



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

CLAUDOMIR PINTO DE SOUSA

PROCESSAMENTO DA INFORMAÇÃO COM ESTADOS COERENTES: FUNÇÕES
LÓGICAS AND & OR USANDO ÓPTICA LINEAR

FORTALEZA

2016

CLAUDOMIR PINTO DE SOUSA

PROCESSAMENTO DA INFORMAÇÃO COM ESTADOS COERENTES: FUNÇÕES
LÓGICAS AND & OR USANDO ÓPTICA LINEAR

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Teleinfor-
mática da Universidade Federal do
Ceará (UFC), como requisito parcial do
Título de Mestre em Engenharia de
Teleinformática. Área de concentração:
Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Rosa Silva.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S696p Sousa, Claudomir Pinto de.
Processamento da informação com estados coerentes: funções lógicas AND & OR usando óptica linear. /
Claudomir Pinto de Sousa. – 2016.
54 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. João Batista Rosa Silva..

1. Funções lógicas. 2. Estados coerentes. 3. Óptica linear. 4. Informação quântica. I. Título.

CDD 621.38

CLAUDOMIR PINTO DE SOUSA

PROCESSAMENTO DA INFORMAÇÃO COM ESTADOS COERENTES:
FUNÇÕES LÓGICAS AND & OR USANDO ÓPTICA LINEAR.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Engenharia de Teleinformática.

Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Aprovada em: 24/02/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Batista Rosa da Silva - UFC

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos - UFC

Prof. Dr(a). Hilma Helena Macedo de Vasconcelos - UFC

Prof. Dr. Marcus Cesar de Oliveira - UNICAMP

Dedico este título Mestre adquirido com tanto esforço e dedicação aos meus pais, Pedro Galdino de Sousa e Gercina Pinto de Sousa, a minha esposa Roberta e meu filho Rodrigo, por estarem sempre ao meu lado, pelo incentivo e apoio em todas as minhas escolhas e decisões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos recebidas, dando-me força e saúde.

Agradeço a minha Família: Pai, mãe, irmãos, esposa e filho, que foram minha fonte de inspiração de onde tive o exemplo de luta e incentivo para sempre buscar os meus ideais.

Agradeço, em especial, ao meu orientador professor Dr. João Batista Rosa da Silva por sua grande dedicação ao trabalho, e conduta de amigo, as quais permitiram que eu conseguisse realizar este trabalho.

Agradeço também aos professores; Rubens e Hilma, por sua conduta e coerência nas disciplinas, incentivo e orientações.

Quero agradecer, também, aos demais que fazem parte do grupo GIQ: George Barbosa, Samy Clever, Sérgio Tahim, Antônio Aguiar, Paulo Vinícius, Paulo Regis, Franklin, Geovan , Glaucionor, por todo apoio, parceria e ajuda em aulas, e o companheirismo fundamental que torna esse grupo unido e forte.

E aos demais que atualmente não estão presentes no grupo: Fernando e Maria do Socorro, mas, sempre que possível comparecem, e contribuem com sua parcela de conhecimento.

Agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro, disponibilizando esse recurso para as despesas rotineiras.

“O homem não teria alcançado o possível, se inúmeras vezes não tivesse tentado atingir o impossível”.

Max Weber

RESUMO

Computação quântica é uma realidade na nossa era. Várias propostas e técnicas para o desenvolvimento de hardware quântico são apresentadas para a geração de dispositivos capazes de codificar a informação de forma segura, a partir dos conceitos e postulados da mecânica quântica. Entre as técnicas utilizadas de implementação do computador quântico, destacamos a óptica linear, que tem sido exaustivamente testada, através dos dispositivos ópticos, capazes de manipular a luz e seus efeitos. Neste trabalho, propomos uma implementação de um sistema óptico capaz de produzir as funções lógicas, probabilisticamente, AND, OR, NAND e NOR com eficiência até $1/8$ para esse sistema óptico usando apenas óptica linear e dispositivos ópticos para qubits codificados em estados coerentes.

Palavras-chave: Funções lógicas. Estados coerentes. Óptica linear. Informação quântica.

ABSTRACT

Quantum computation is an emergent reality in our era. Several proposals and techniques lead to the quantum hardware development, showing to our generation devices capable to manipulate information provable safe and fast, based on quantum mechanics postulates. Among the techniques used to implement the quantum computer, we highlight the linear optics, which has been a lot of times tested. Using light and its effects, optical devices are used to assembly optical systems. This work proposes an optical system, that's able to implement the logic functions, AND, OR, NAND and NOR probabilistically. The efficiency has been proven to be of $1/8$ using only linear optics and linear optical devices for coherent states encoded qubits.

Keywords: Logic functions. Coherent states. Linear optics. Quantum information.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esfera de Bloch.....	18
Figura 2.2 – Diagrama esquemático para geração de estados gato por meio de uma medição de número de fótons condicional em um divisor de feixe	22
Figura 2.3 – Representação de um divisor de feixe balanceado.....	24
Figura 3.1 – Sistema quântico que realiza as funções lógicas AND & OR simultaneamente de dois qubits.....	26
Figura 3.2 – Sistema óptico probabilístico capaz de implementar as funções lógicas AND e OR de dois qubits de estados coerentes.....	27
Figura 3.3 – Probabilidade total de sucesso em função de $ \alpha ^2$ para um sistema óptico ideal. (a) $\theta = \pi/4$ e $\phi = \pi/4$; (b) $\theta = \pi/4$ e $\phi = 2\pi/3$; (c) $\theta = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$	33
Figura 3.4 – Fidelidade total em função de $ \alpha ^2$ para um sistema óptico ideal. (a) $\theta = \pi/4$ e $\phi = \pi/4$; (b) $\theta = \pi/4$ e $\phi = 2\pi/3$; (c) $\theta = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$	33
Figura 3.5 – Probabilidade total de sucesso em função do θ e ϕ para $ \alpha ^2=2$ e de $ \alpha ^2=25$	34
Figura 3.6 – Fidelidade total em função de θ e ϕ para $ \alpha ^2=2$ e de $ \alpha ^2=25$	35
Figura 3.7 – Sistema óptico probabilístico capaz de implementar as funções lógicas NAND e NOR de dois qubits de estados coerentes.....	36
Figura 3.8 – Sistema óptico probabilístico capaz de projetar a função lógica AND de dois qubits de estados coerentes em um estado alvo.....	37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

(CSQIP)	Processamento da informação quântica usando estados coerentes (<i>Quantum information processing using coherent states</i>)
QIP	Processamento da informação Quântica (<i>Quantum information processing</i>)
BS	Divisor de Feixe (<i>Beam Splitter</i>)
C-NOT	Porta clássica e Quântica, interpretada através da operação OU – Exclusivo
SWAP	Porta quântica inversora.
MZI	Interferômetro de Mach-Zehnder
PM	Modulador de fase (<i>Phase modulator</i>)
CP	Controlador de fase (phase controller)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Introdução	17
2.2	Bit Quântico	17
2.3	Estado gato Schrödinger	21
2.4	Entrelaçamento	22
2.5	Dispositivos Ópticos Lineares	23
2.6	Fidelidade	24
3	SISTEMA ÓPTICO PROBABILÍSTICO PARA FUNÇÕES AND E OR	26
3.1	Introdução	26
3.2	Descrição do Sistema Óptico	26
3.3	Análise da Probabilidade de Sucesso e da Fidelidade	26
3.4	Aplicações	35
4	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICE A – OPERADOR DE DESLOCAMENTO	45
	APÊNDICE B – PROBABILIDADE DE SUCESSO	47
	APÊNDICE C – OPERADOR QUÂNTICO UNITÁRIO DE UM DIVISOR DE FEIXE (50/50) BALANCEADO SEM PERDAS PARA O ESTADO COERENTE	50

1 INTRODUÇÃO

O processamento e a segurança da informação são áreas estratégicas em países que buscam manter a hegemonia tecnológica e econômica nessa era de intensa espionagem nos campos político, econômico e militar. Nesse cenário a Mecânica Quântica desponta-se como uma ferramenta poderosa no processamento e segurança da informação [1].

As pesquisas sobre informação quântica prometem mais do que computadores, pois, permitirá desenvolver tecnologias para comunicação quântica, com o compartilhamento de segredos e segurança garantida pelas leis da física, permitirá também que metrologia quântica, medidas de distância e o tempo possam ter maior precisão das possíveis atualmente. O desenvolvimento de tecnologias de grande potencial para computação quântica, ainda não foi imaginada, provavelmente estará disponível para as futuras gerações de engenheiros quânticos de hardware e software de informação e comunicação quântica, como isso poderemos usar computadores quânticos e compreender essa engenharia e tal tecnologia de nível atômico [2].

Apesar dos desafios do desenvolvimento tecnológicos que viabilizem sistemas capazes de processar a informação totalmente quântica [1], vários tipos de tecnologias são testados com o propósito de desenvolver sistemas quânticos eficientes. Entre essas tecnologias em estudos, destacam-se: a óptica linear e os dispositivos fotônicos [3] - [9]; pontos quânticos (*quantum dots*, *QD*) [10] - [14]; dispositivos supercondutores [15] - [22]; semicondutores [23] - [41]; ressonância magnética nuclear (*nuclear magnetic resonance* – NMR) [42] - [50]; e íons aprisionados (*trapped ions*) [51] - [55].

Os pontos quânticos (QDs) apresentam características únicas que as tornam potencialmente útil no processamento de informação quântica. Essa técnica estabelece que o spin de um elétron representa a unidade elementar da informação quântica (qubit). Pontos quânticos podem ser usados para localizar e aproximar spins individuais utilizando métodos elétricos ou ópticos [10].

Um QD incorporado em uma nano-estrutura fotônica e dispendo esses pontos quânticos a distâncias bem definidas uns dos outros (menor que 10\AA) as ondas de luz viajam entre esses nanocristais em um padrão consistente ou coerente, permitindo a transmissão da informação entre os pontos quânticos utilizando-se a luz, o que cria a possibilidade da criação

de um computador quântico. Os últimos resultados teóricos mostram que os pulsos de fótons individuais gerados por QD, em combinação com fotodetectores e elementos ópticos não lineares, pode permitir a computação quântica eficiente [14].

A computação clássica apresenta várias limitações para um processamento rápido e eficiente da informação, um deles, é a resistência apresentada pelos fios metálicos, devido ao alto aquecimento do circuito causando a perda da informação ou decoerência. Uma forma de solucionar esse fato é a aplicação de circuitos supercondutores de resistência nula, pois, operam em baixa temperatura, semelhante a um sistema quântico de uma partícula submetida a um potencial [2].

O circuito pode ser construído em junção Josephson formada por dois supercondutores fracamente acoplados através de uma fina película isolante, aplica-se uma corrente no dispositivo dividida em duas componentes que atravessam as duas junções na forma de correntes de pares de Cooper, submetido a um campo magnético, podendo ser alterado por meio do controle da indutância (L) e capacitância (C), ou podem ser alterados dinamicamente pelos sinais elétricos para dar completo controle quântico, permitindo a construção dos qubits com uma melhor coerência quântica [2]. Ao reduzir o tamanho do supercondutor, pode-se reduzir o acoplamento do estado no supercondutor melhorando, ainda mais a coerência quântica [16].

Várias experiências em circuitos supercondutores têm demonstrado que esses esquemas são considerados como candidatos promissores de qubits que pode processar informação quântica [16].

Circuito semiconductor quântico fotônicos pode ser usado para gerar, manipular, e explorar de forma eficiente estado quântico da luz. Semicondutores estão presentes nos modernos dispositivos quânticos opto-eletrônico e fotônicos, com a perspectiva de desempenharem um papel importante em tecnologias quânticas fotônicas [24]. Em particular, pontos quânticos semicondutores têm sido mostrados para serem fontes ideais de luz [25], [26] podendo ser eficientemente encaminhado para circuitos fotônico em nano-escala [27], [28], até mesmo ser utilizados para manipular o estado quântico de fótons individuais [29] - [31]. Além da geração e processamento quântico da luz em um chip semiconductor [26], [32] [33], um requisito importante para a realização de dispositivos quânticos integrados e a detecção on-chip de fótons individuais com alta eficiência quântica [34], destacando a integração desses

detectores em circuitos nano-fotônicos, que consiste em guias de onda, nanocavidades e divisores de feixe, abrindo o caminho para as tecnologias da informação quântica.

Os spins de moléculas nucleares em soluções líquidas tem sua coerência comparável a átomos aprisionados. Os métodos foram propostos [44], [45] para a construção de pequenos protótipos de computadores quânticos que usam spins nucleares em conjunto com a tecnologia de ressonância magnética nuclear existente há 50 anos. Imersos em um campo magnético forte, spins nucleares podem ser identificados através da frequência de ¹Larmor [34]. Em uma molécula a frequência de Larmor varia de um átomo para outro, irradiando os núcleos com pulsos de rádio-frequência e de ressonância permitindo a manipulação de núcleos de frequências distintas, representando assim os qubits. As interações entre qubit surgem a partir do acoplamento indireto através de elétrons moleculares. A medição é conseguida pela observação da corrente induzida na bobina que circunda a amostra do conjunto de qubits. A partir de amostras no estado líquido aplicando ressonância magnética nuclear tem permitido a manipulação de processadores quânticos com até uma dúzia de qubits [46], e a implementação de algoritmos e protocolos quânticos [47].

Outra proposta, é a utilização de íons aprisionados, apresentando uma maneira bem sucedida para criação e manipulação de estados emaranhados, descrevendo como os avanços destes estados podem ajudar a gerar portas quântica para processamento da informação quântica melhorando as ferramentas para medição de alta precisão fundamentais para o contexto do processamento da informação quântica. Atualmente vários laboratórios em todo o mundo estão estudando os aspectos de processamento da informação quântica com íons aprisionados, pois, eles fornecem um sistema relativamente 'limpo', podendo ser confinados por longas durações, sofrendo apenas pequenas perturbações do ambiente, permitindo serem manipulados de forma coerente. Embora íons aprisionando envolva vários processos técnicos, o sistema é acessível no qual testa conceitos que possam ser aplicáveis a outros sistemas, tais como aqueles que envolvem átomos neutros aprisionados, pontos quânticos, spin nucleares, junções Josephson ou fótons [51].

¹ Quando os núcleos atômicos estão sobre a ação de um campo magnético externo, a soma de todos os vetores magnéticos resulta em um vetor m_o , mas, os núcleos não estão igualmente distribuídos no espaço, devido a esse fato o vetor magnético m_o , apresenta um movimento de precessão cuja frequência é chamada de frequência de Larmor em homenagem ao físico britânico Sir. Joseph Larmor.

Cada uma dessas tecnologias tem suas vantagens e desvantagens. Por outro lado, as pesquisas realizadas ou em progresso ainda não apontaram qual ou quais delas combinadas serão as mais promissoras para o processamento quântico da informação (*Quantum Information Processing* – QIP).

Portanto, nesse trabalho optamos pela óptica linear e dispositivos ópticos fotônicos. Mas, a maioria das aplicações da informação quântica requerem fontes ópticas fracas com fortes correlações quânticas entre fótons únicos. Um elemento essencial para a realização da computação quântica segura, é uma fonte óptica que emite uma série de pulsos que contenha um único e apenas um fóton por pulso. Além do mais, as medições inevitavelmente podem modificar o estado de um sistema quântico [57].

Sistemas ópticos quânticos são candidatos com bastante relevância para a computação quântica, uma vez que proporcionam uma integração natural da computação quântica e comunicação quântica, além disso, as transformações lineares ópticas em um qubit são geralmente fáceis e podem alcançar alta precisão, transformações de polarização, por exemplo, podem atingir fidelidades $> 99\%$, usando placas de onda, combinação de divisores de feixe e manipulações de mudanças de fase, e em alguns casos usar-se o grau de liberdade de polarização [58].

Para alcançar a computação quântica, são necessários sistemas físicos com propriedades especiais, pois, é essencial que o sistema quântico evolua de forma coerente, portanto deve ser bem isolado a partir do seu ambiente. Ao mesmo tempo, a fim de que a informação armazenada no sistema possa ser processada e lida, deve ser possível produzir interações fortes entre o sistema de controle [58]. Diante desses critérios, o trabalho apresenta uma proposta inédita e viável de um sistema óptico configurável capaz de produzir as funções lógicas AND e OR, e suas funções complementares, probabilisticamente, para dois qubits codificados em estados coerentes [59].

Assim essa dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os conceitos fundamentais necessários para compreensão do sistema óptico proposto e descrito no capítulo seguinte. No Capítulo 3 descreve o sistema óptico capaz de implementar, não deterministicamente, as funções lógicas AND e OR para dois qubits de estados coerentes, bem como as funções universais NAND e NOR. Também é realizada uma análise da probabilidade de sucesso do sistema e do grau de fidelidade dos estados resultantes,

são apresentadas duas reconfigurações do sistema óptico original. Finalmente, apresentamos as conclusões dos resultados obtidos e perspectivas de trabalhos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos importantes para auxiliar na compreensão da dissertação. Na Seção 2.2, são apresentadas as definições de qubit codificado na polarização de fótons (únicos ou isolados) e em estados coerentes. Na Seção 2.3, são descritas as principais portas quânticas. Um simples comentário sobre entrelaçamento é visto na Seção 2.4. A descrição do funcionamento dos principais dispositivos ópticos lineares empregados neste trabalho é objeto da Seção 2.5.

2.2 Bit Quântico

Em um computador quântico, um sistema de 2 estados é utilizado para representar um bit, sendo então chamado de quantum bit (ou qubit). No entanto, além da possibilidade de existir (ou de estar) em um dos dois estados 0 ou 1 (representados por $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, respectivamente), um qubit têm singularidade de encontrar-se em uma mistura desses dois estados simultaneamente o que é conhecido como uma superposição coerente de estados. Em termos matemáticos, o estado geral de um qubit (denotado usualmente por $|\psi\rangle$) é descrito por um vetor unitário no espaço de Hilbert (\mathcal{H}) bidimensional (\mathbb{C}^2).

O bit quântico (qubit) é a unidade básica da computação quântica. Em contraste com o sistema clássico, isso significa que esses estados podem ser representados por um vetor em um espaço de Hilbert bidimensional, dados por [1]:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

as amplitudes a e b são números complexos satisfazendo a condição $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

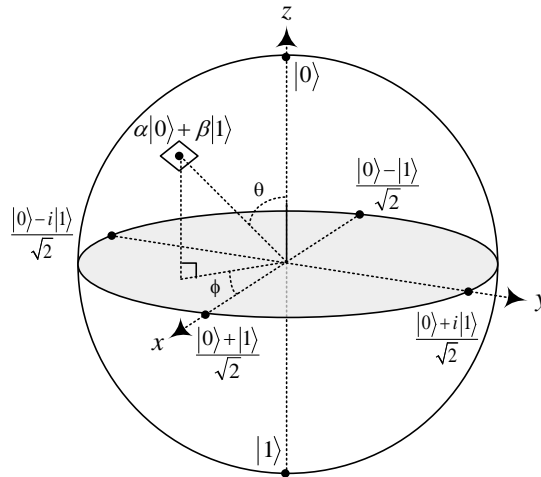
Esses dois estados possíveis, denotados *kets* $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formam uma base para este espaço, chamada de base computacional. Os *kets* $|0\rangle$ e $|1\rangle$ representam vetores.

A forma geral do estado puro de um qubit é [1]:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{j\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \quad (2.2)$$

O estado apresentado em (2.2) pode ser analisado na esfera de Bloch, conforme a Figura 2.1. Cada eixo representa uma base existente no espaço de Hilbert de duas dimensões, e os estados de bases diferentes não são ortogonais entre si [1].

Figura 2.1 - Esfera de Bloch



Fonte [1]. Quaisquer dois estados diametralmente opostos formam uma base para descrever um qubit, e quaisquer duas linhas ortogonais que passem pela origem definem duas bases mutuamente não ortogonais.

Atualmente, a representação física mais adotada de um qubit é a polarização do campo eletromagnético de um fóton (horizontal- H e vertical- V), representando o a codificação lógica para um fóton sendo: $|1_L\rangle = |V\rangle$ e $|0_L\rangle = |H\rangle$, os qubits são distinguíveis de acordo com a sua polarização [3], [60]. É fácil codificar e decodificar esse tipo de qubit usando placas de meia-onda, quarto de onda e divisores de feixes por polarização.

Outra maneira de representar fisicamente um qubit em óptica é utilizando estados coerentes. Os estados coerentes são definidos como sendo autoestados do operador de aniquilação \hat{a} (criação, \hat{a}^\dagger), com autovalor complexo α , isto é, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, e foram introduzidos por R. J. Glauber em 1963 [61]. Podendo ser escritos na base dos estados de Fock, ou conhecido estados de número de fótons, como:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.3)$$

Podemos definir (2.3) a partir da ação do operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ sobre o estado vácuo $|0\rangle$, ou seja, dado o operador de deslocamento:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (2.3)$$

$\hat{D}(\alpha)$ corresponde ao operador deslocamento, o efeito deste operador consiste em “deslocar” o estado fundamental até o centro deste coincidir com o ponto $(Re[\alpha], Im[\alpha])$ conservando as suas características de mínima incerteza.

Para o caso particular $\alpha = 0$, teremos o estado vácuo, que é um estado coerente, e por definição o estado coerente, é um estado vácuo deslocado da origem para um ponto qualquer do espaço de fase. Matematicamente, isso pode ser expresso através do operador deslocamento representado na equação (2.4) [63]. Permitindo a sua ação sobre o estado vácuo, resultando em:

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (2.5)$$

A ortogonalidade entre os dois estados que representam os qubits lógicos é muito importante em informação quântica, para uma distinção exata das informações. O produto interno entre $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, dois estados coerentes, é dado por:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}}. \quad (2.6)$$

Assim, os qubits lógicos são codificados usando $|0\rangle_L = |-\alpha\rangle$ e $|1\rangle_L = |\alpha\rangle$, sendo α um número real. Esse tipo de codificação é chamado de $(-, +)$ e por meio da equação (2.6), tem-se:

$$|\langle \alpha | -\alpha \rangle|^2 = e^{-4|\alpha|^2}. \quad (2.7)$$

A ausência de ortogonalidade entre os estados $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ é um problema para esse tipo de codificação, pois, complica a identificação dos estados. Por isso, é necessário que α seja grande o suficiente para amenizar este problema. Para proporcionar uma boa aproximação da ortogonalidade entre os estados citados, usa-se $\alpha \geq 2$, visto que $|\langle -\alpha | \alpha \rangle|^2 \leq 1,1254 \cdot 10^{-7}$ [8], pois, a maioria das portas quânticas necessita dessa ortogonalidade para esse valor de α [4]. É possível também representar os qubits lógicos na base $(0, \alpha)$, $|0\rangle_L = |0\rangle$ (estado vácuo) e $|1\rangle_L = |2\alpha\rangle$.

2.3 Estado gato Schrödinger

Um estado quântico é qualquer manifestação possível em que um sistema mecânico quântico possa se encontrar, sendo distinguível e mensurável como: spin das partículas, os campos, a polarização e, a função de onda, fótons e qualquer outro elemento físico associado a átomos e a luz (partícula/onda). Um estado quântico plenamente especificado pode ser descrito por um vetor de estado, por uma função de onda ou um conjunto completo de números quânticos para um dado sistema [1].

Um ponto interessante da física quântica é a possibilidade de geração macroscópica de superposições quânticas, classicamente distinguíveis. Essa ideia está relacionada com o famoso paradoxo do gato de Schrödinger, onde o gato pode estar vivo ou morto com probabilidades iguais até que a medição seja realizada. Na literatura a superposição de dois estados coerentes com uma diferença de fase e uma grande amplitude herda esse nome, e é referido como um estado *gato* [63].

O estado gato é definido como uma superposição de dois estados coerentes com fases opostas:

$$|\Psi_{\pm}(\alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}(\alpha)}} (|-\alpha\rangle \pm |\alpha\rangle), \quad (2.8)$$

com $N_{\pm}(\alpha) = 2 \pm 2e^{-\alpha^2}$ correspondendo a sua constante de normalização [64].

Observa-se que, quando o estado $|\Psi_{+}(\alpha)\rangle$ é expresso em número de fótons, tem-se:

$$\begin{aligned} |\Psi_{+}(\alpha)\rangle &= \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_{+}(\alpha)}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right] = \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_{+}(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} [(-1)^n + 1] |n\rangle \\ &= \frac{2e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_{+}(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

enquanto o estado $|\Psi_{-}(\alpha)\rangle$ é descrito como:

$$|\Psi_{-}(\alpha)\rangle = \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_{-}(\alpha)}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right] = \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_{-}(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} [(-1)^n - 1] |n\rangle$$

$$= \frac{2e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{N_-(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \quad (2.10)$$

A partir das expressões (2.9) e (2.10), pode-se perceber que o estado $|\Psi_+(\alpha)\rangle$ contém somente números pares de fótons e o estado $|\Psi_-(\alpha)\rangle$ contém apenas ímpares. Por esta razão, eles são denominados, respectivamente, de estado gato par e gato ímpar. Observa-se, também, ambos estados são ortogonais entre si, permitindo adquirir medidas aleatórias de acordo com a contagem dos fótons [64].

Uma maneira eficiente de produzir estado gato é por átomos aprisionados em cavidade QED experiências em que um átomo confinado interage com o campo eletromagnético oscilantes não homogêneos. Primeiramente os átomos são excitados num estado $|\psi\rangle$, depois lançados por uma fonte com velocidades controladas por um feixe de laser atingindo uma cavidade, campos eletromagnéticos são produzidos por um gerador de microondas de intensidades ajustáveis, interagindo com os estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ dos átomos, de modo a produzir um pulso de $\frac{\pi}{2}$ quando os átomos cruzam esse campo, formam sobreposições de estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$, resultando nos estados gato par e ímpar [66].

Em experimentos deste tipo o fator limitante para geração de estados não clássicos são os efeitos de perda de coerência, pode ocorrer devido: problemas técnicos do experimento, movimento dos íons, imperfeições do campo aplicado [69].

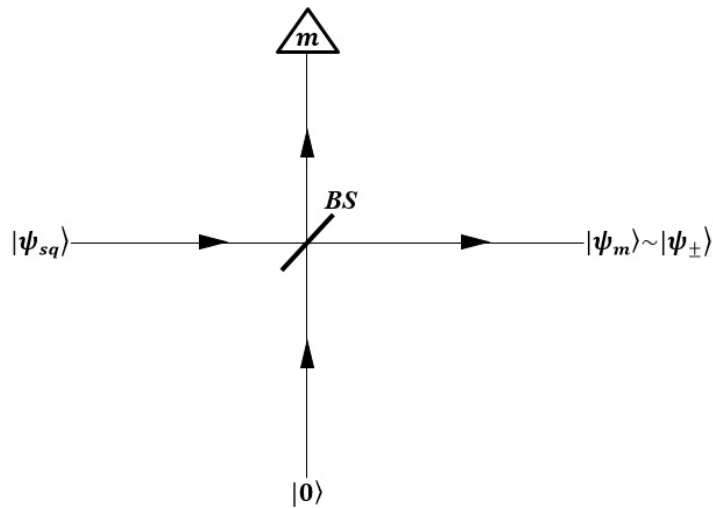
Uma proposta conhecida como subtração de fóton [70], o esquema está representado na Figura 2.2 é usada para gerar estado gato, dada pela interação de estados comprimidos, utilizando um divisor de feixe *BS*, e um detector de fóton *m* [64]. Seu funcionamento demanda a preparação de um estado de luz comprimido, podendo ser adquirido através do envio de um feixe de laser com o dobro da frequência do estado comprimido desejado através de um cristal, como o KTP (fosfato de potássio titânio). Isto irá aplicar um Hamiltoniano proporcional eficaz para $\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2$ ao modo que conterà um estado comprimido. Antes da ação deste hamiltoniano, este modo contém o estado vácuo $|0\rangle$, e depois o estado comprimido $|\xi_{Sq}\rangle$ resultando em:

$$|\xi_{Sq}\rangle = e^{\frac{z(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^2}{2}} |0\rangle = (1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n |2n\rangle, \quad (2.10)$$

onde Z depende de fatores tais como a força da interação de laser/cristal, potência do laser, e das dimensões do cristal, com $\lambda = \tanh z$ (parâmetro de compressão λ). Observe que $|\xi_{sq}\rangle$ tem apenas os números pares de fótons, correspondendo a um legítimo estado gato. O estado comprimido $|\xi_{sq}\rangle$ e um estado de vácuo $|0\rangle$ são combinados em um divisor de feixe BS com transmissividade θ . Na segunda da saída do divisor de feixe uma medição do número de fótons é realizada dando um resultado m . O estado condicional do modo de saída restante é então:

$$|\xi_{sq}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} \left(\frac{\lambda T}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} |0\rangle. \quad (2.11)$$

Figura 2.2 - Diagrama esquemático para a geração de estados gato por meio de uma medição de número de fótons condicional em um divisor de feixe.



Fonte [64]. Um estado comprimido modo único em uma entrada, e um divisor de feixe **BS**, de transmissividade variável, com a outra entrada contendo o estado vácuo. Uma medição definitiva de fótons m sobre uma das saídas do divisor de feixe prepara o estado $|\psi_m\rangle$, Que é uma boa aproximação um estado gato $|\psi_{\pm}\rangle$.

É de grande importância o estudo e o desenvolvimento de aplicações práticas de métodos para geração e análise de estados quânticos, tanto na implementação de portas lógicas, geração de estados emaranhados e essenciais para explorar o potencial do processamento da informação e para computação óptica quântica [51].

2.4 Entrelaçamento

O entrelaçamento quântico, proposto por Schrödinger, estudado na mecânica quântica descreve a correlação não local entre sistemas quânticos, não explicado pela Mecânica

Clássica. No caso de dois fótons estando em um estado entrelaçados, então medir um, determina o estado do outro, mesmo se eles estejam separados. O entrelaçamento é atualmente reconhecido como um importante recurso na realização de tarefas tais como, teleportação de estados quânticos, codificação densa, dentre outros [1].

O entrelaçamento quântico é uma propriedade da mecânica quântica que permite a dois ou mais estados estarem de tal forma relacionados que não é possível descrever completamente um deles sem relaciona-lo aos demais. Estas correlações não podem ser descritas, apenas com probabilidades ou quaisquer outros recursos clássicos, esses estados podem ser criados interagindo dois ou mais sistemas individuais através de uma operação unitária. Propriedades como spin de elétrons ou polarização de fótons, por exemplo, podem ser entrelaçadas [1].

Dado um sistema de duas partes entrelaçadas, o entrelaçamento faz com que medições realizadas em uma parte pareçam estar influenciando a outra parte e sugere que alguma influência se propaga instantaneamente entre os objetos no momento da medição, independente da distância que os separe [5].

2.5 Dispositivos Ópticos Lineares

A óptica linear com contagem de fótons é um método em destaque para a prática da computação óptica quântica, demonstrando que a computação óptica quântica eficiente é possível usando fótons individuais, elementos ópticos lineares como: Fontes de fóton único, detectores de fóton, moduladores de fase, divisores de feixe se medidas projetivas [8].

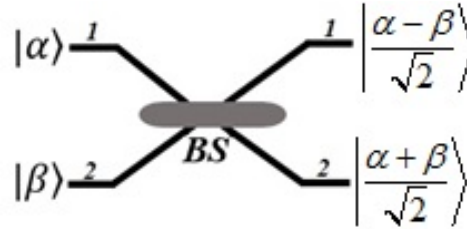
Neste trabalho os principais dispositivos ópticos usados foram: O divisor de feixe balanceado (*BS*), modulador de fase (*PM*) e detectores de fóton (*D*). Uma função importante do *BS* é realizar a geração de superposição de estados coerentes. Sendo \hat{a}^\dagger o operador de criação, tendo em vista o operador unitário de um *BS* sem perda, (ideal) definido conforme a seguir:

$$\hat{B} = \exp[\pi(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)/4] . \quad (2.12)$$

Assim, quando dois estados coerentes $|\alpha\rangle_1$ e $|\beta\rangle_2$ alcançam um *BS*, conforme apresentado Figura 2.3, o estado resultante processado na saída é:

$$|\alpha, \beta\rangle_{1,2} \xrightarrow{BS} \left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_{1,2}. \quad (2.13)$$

Figura 2.3 - Representação de um divisor de feixe balanceado (BS).



Fonte: [5].

Moduladores de fase óptica se baseiam em materiais que permitem que a fase óptica modulada seja uma função (preferencialmente linear) da tensão ou corrente elétricas de acionamento. A modulação ocorre com a luz através da absorção, explorando a modulação de fase, seguida por interferência óptica. A modulação de fase é transformada em modulação de intensidade ou em modulação de amplitude/fase, combinados usando uma estrutura de interferência apropriada que recompõe os ramos individuais. Normalmente, estas funções são integradas dentro do mesmo dispositivo [65].

O modulador de fase (*PM*), por sua vez, adiciona uma fase θ ao sinal óptico que o atravessa. O operador unitário correspondente é [6]:

$$\hat{U}(\theta) = \exp(j\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}). \quad (2.14)$$

Se o sinal de entrada for $|\alpha\rangle$, na saída do *PM* o estado será:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{PM} |e^{j\theta} \alpha\rangle \quad (2.14)$$

Assim, se $\theta = \pi$, o *PM* funciona como uma porta *NOT*, para qubits de estados coerentes.

2.6 Fidelidade

A grandeza utilizada para estabelecer a 'proximidade' dada pelo valor absoluto do produto escalar entre dois estados quânticos, corresponde à noção quantificada pela fidelidade. Essa métrica é importante para analisar a semelhança entre um determinado estado de saída, após processamento em um sistema quântico, para um estado ideal sem erros. Este conceito é

absoluto no processamento da informação quântica, uma vez que dá um valor numérico para a qualidade dos procedimentos na preparação de estados, implementação de portas quântica, e etc.

A fidelidade tem uma definição operacional, significa que não depende de interpretação, dependente apenas de conceitos. A fidelidade de um estado quântico com respeito a um estado de referência é a probabilidade de que um determinado estado seja confundido com o estado de referência em uma medição. Para dois estados puros $|\psi\rangle$ e $|\psi_0\rangle$, essa probabilidade é a sobreposição dos dois estados no espaço de Hilbert, representada por [1]:

$$F = |\langle \psi | \psi_0 \rangle|. \quad (2.17)$$

A fidelidade F é delimitada entre 0 e 1, ou seja, se $F = 0$, então o estado $|\psi\rangle$ é totalmente diferente do estado de referência $|\psi_0\rangle$, enquanto que se $F = 1$, os estados são $|\psi\rangle$ e $|\psi_0\rangle$ são iguais [48].

3 SISTEMA ÓPTICO PROBABILÍSTICO PARA FUNÇÕES AND E OR

3.1 Introdução

Neste Capítulo apresentemos e analisamos uma configuração óptica baseada em fibra óptica capaz de implementar simultânea e probabilisticamente as funções lógicas AND e OR de dois qubits codificados em estados coerentes usando apenas dispositivos baseados em óptica linear [59].

Na Seção 3.2 é descrito o sistema óptico capaz de realizar as funções lógicas AND e OR. Na Seção 3.3 foi realizado uma análise de desempenho do sistema descrito na seção anterior quanto a probabilidade de sucesso e a fidelidade do estado gerado. Também é aplicada uma técnica para melhorar a eficiência do sistema. Finalmente, são apresentadas alterações no sistema óptico original que possibilitam a gerações de outras funções lógicas e a projeção das mesmas em estado alvo.

3.2 Descrição do Sistema Óptico

O sistema proposto por nós é capaz de realizar as funções lógicas AND e OR, ao mesmo tempo, de dois qubits conforme apresentado na Figura 3.1. Em outras palavras, se temos com qubits de entrada $|A\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ e $|B\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$, e após passá-los pelo sistema *AND&OR*, teremos na saída as funções lógicas AND e OR dos estados de entrada: $|A, B\rangle \xrightarrow{AND\&OR} |A \cdot B, A + B\rangle$.

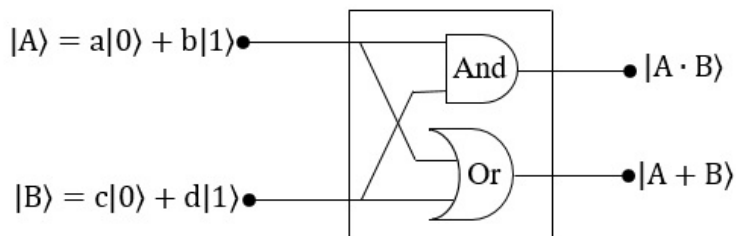


Figura 3.1 – Sistema quântico que realiza as funções lógicas AND & OR, simultaneamente, de dois qubits

Fonte: Próprio autor.

Ou seja:

$$\text{Entrada : } |A\rangle \otimes |B\rangle = |AB\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle,$$

$$\text{Saída: } S_{ao} |A, B\rangle = |A \cdot B, A + B\rangle = ac |00\rangle + ad |01\rangle + bc |10\rangle + bd |11\rangle. \quad (3.1)$$

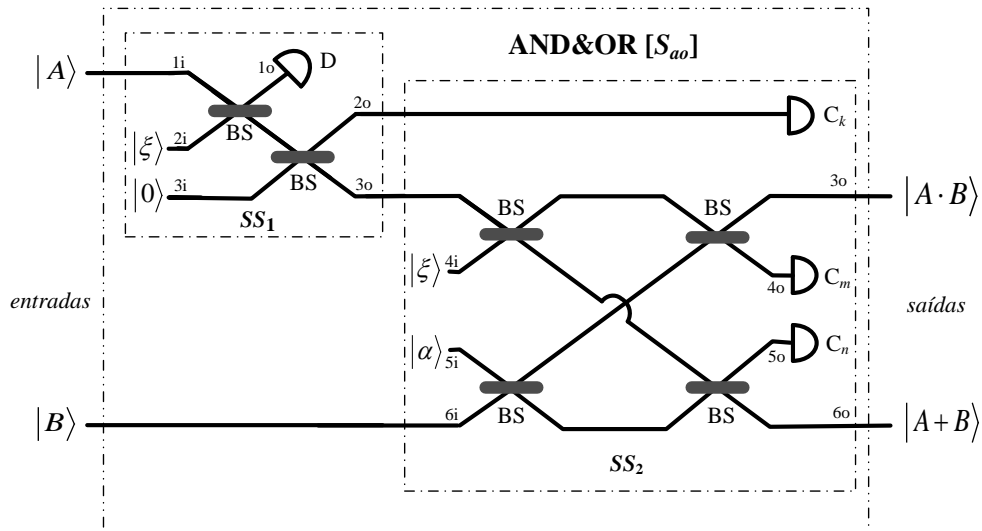
Em CSQC, conforme descrito no Capítulo 2, o qubit é codificado usando $|0\rangle_L = |-\alpha\rangle$ e $|1\rangle_L = |\alpha\rangle$ onde α é considerado real. Neste caso, temos que a ortogonalidade entre os estados coerentes que representam os qubits lógicos, $|\langle 0|1\rangle|^2 = |\langle -\alpha|\alpha\rangle|^2 = e^{-4|\alpha|^2}$, é assegurada quando $\alpha \geq 2$ [6], [65]. Assim, os estados $|A\rangle$ e $|B\rangle$, usando estados coerentes, são:

$$|A\rangle = N_A (a|-\alpha\rangle + b|\alpha\rangle) \quad \text{e} \quad |B\rangle = N_B (c|-\alpha\rangle + d|\alpha\rangle), \quad \text{sendo} \quad |N_A|^2 = (1 + 2ab.e^{-2|\alpha|^2})^{-1} \quad \text{e}$$

$|N_B|^2 = (1 + 2cd.e^{-2|\alpha|^2})^{-1}$ as constantes de normalizações dos estados $|A\rangle$ e $|B\rangle$, respectivamente, com a, b, c, d são valores reais.

Na Figura 3.2 é apresentado o sistema óptico capaz de realizar o sistema mostrado na Figura 3.1. O sistema óptico proposto S_{ao} na Figura 3.2 está dividido em dois subsistemas, SS_1 e SS_2 . O sistema proposto é constituído de 6 divisores de feixes balanceados (BS), um fotodiodo D e três contadores de fótons (C), Todos os dispositivos são considerados ideais.

Figura 3.2 - Sistema óptico probabilístico capaz de implementar as funções lógicas AND e OR de dois qubits de estados coerentes.



Fonte: Próprio autor.

Estes subsistemas são geradores de entrelaçamento. No primeiro subsistema, SS_1 um estado de Bell é gerado a partir do estado de entrada $|A\rangle$ e do estado auxiliar $|\xi\rangle = N_\xi (|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)$ onde $|N_\xi|^2 = 2[1 + \exp(-2|\alpha|^2)]^{-1}$, resultando no estado

$SS_1|A, \xi\rangle = N_A N_\xi (a|-\alpha, -\alpha\rangle + b|\alpha, \alpha\rangle)$. Esse estado de Bell é gerado somente quando for detectado o estado vácuo $|0\rangle$ no fotodetector D, ou seja, quando não for detectado luz em D. O segundo subsistema SS_2 é responsável por entrelaçar o estado de Bell gerado em SS_1 com qubits $|\xi, \alpha, B\rangle$.

No lado esquerdo do sistema óptico mostrada na Figura 3.2 temos os nossos modos entradas: Nos modos 1 e 6, entram os estados $|A\rangle_1$ e $|B\rangle_6$, respectivamente, que serão processados pelo sistema AND&OR; os modos 2 ao 5 foram o estado auxiliar $|\xi, 0, \xi, \alpha\rangle_{2-5}$ ($|0\rangle$ é o estado de vácuo) necessário para o funcionamento do sistema. Assim, antes dos contadores de fótons (C_k, C_m e C_n), o estado de saída $|\psi\rangle$ (não normalizado), no lado direito do sistema, resultante da evolução do estado de entrada. $|A\rangle_1 \otimes |\xi, 0, \xi, \alpha\rangle_{2-5} \otimes |B\rangle_6$, é dado por:

$$\begin{aligned}
|\psi_{out}\rangle \approx & ac \left(\begin{aligned} & \left(|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |0, -\alpha, -2\alpha, 0, 0, 0\rangle + \right. \\ & \left. \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle \right) \\ & + ad \left(\begin{aligned} & \left(|0, -\alpha, 0, 0, -2\alpha, 0\rangle + |0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + \right. \\ & \left. \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2} \right\rangle \right) \\ & + bc \left(\begin{aligned} & \left(\left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \right. \\ & \left. \left(|0, \alpha, 0, 2\alpha, 0, 0\rangle + |0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle \right) \right) \\ & + bd \left(\begin{aligned} & \left(\left| \sqrt{2}\alpha, 0, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2} \right\rangle + \right. \\ & \left. \left(|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle + |0, \alpha, 0, 0, 0, 2\alpha\rangle \right) \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Após a reorganização e normalização do estado de saída (3.2), teremos:

$$|\psi_{out}\rangle = N_\xi^2 N_A N_B \left(\frac{1}{N_d} |\psi_d\rangle + \frac{1}{N_u} |\psi_u\rangle \right). \quad (3.3)$$

A partir do estado de saída em (3.3), podemos classificar os demais estados, $|\psi_d\rangle$ e $|\psi_u\rangle$, respectivamente, como sendo:

$$|\psi_d\rangle = N_d \left(ac|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + ad|0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + bc|0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + bd|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle \right), \quad (3.4)$$

O estado desejado na saída do sistema quando funciona corretamente, possui constante de normalização N_d dada por:

$$|N_d|^2 = [1 + 2(cd + ab.e^{-2|\alpha|^2} + 2abcd.e^{-2|\alpha|^2}).e^{-4|\alpha|^2}]^{-1}, \quad (3.5)$$

e,

$$\begin{aligned} |\psi_u\rangle = N_u \left[ac \left(\left| 0, -\alpha, -2\alpha, 0, 0, 0 \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle \right) \right. \\ + ad \left(\left| 0, -\alpha, 0, 0, -2\alpha, 0 \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2} \right\rangle \right) \\ + bc \left(\left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| 0, \alpha, 0, 2\alpha, 0, 0 \right\rangle \right) \\ \left. + bd \left(\left| \sqrt{2}\alpha, 0, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\rangle + \left| \sqrt{2}\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2} \right\rangle + \left| 0, \alpha, 0, 0, 0, 2\alpha \right\rangle \right) \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

O estado inútil que ocorre quando o sistema falha, e sua constante de normalização N_u .

Em (3.6), este estado $|\psi_u\rangle$ contempla as situações em que ocorre detecção no fotodiodo D e/ou nenhum fóton é contado nos contadores C_k , C_m e/ou C_n . Nestes casos, o sistema falha. Por outro lado, quando o fotodiodo D não detectar nenhum fóton e os contadores C_k , C_m e C_n registrarem a contagem (não nula) de k , m e n fótons, respectivamente, os modos 3 e 6 do estado de saída (3.3), e conseqüentemente o estado desejado (3.4), colapsará para o estado:

$$|\chi\rangle_{3,6} = {}_{1,2,4,5} \langle 0, k, m, n | \psi_{out} \rangle_{3,6} \cong ac(-1)^{k+n} |-\alpha, -\alpha\rangle + ad(-1)^{k+n+m} |-\alpha, \alpha\rangle + bc |-\alpha, \alpha\rangle + bd(-1)^n |\alpha, \alpha\rangle. \quad (3.7)$$

Em (3.6), notamos que o sistema da Figura 3.2 implementará as funções lógicas AND e OR dos estados $|A\rangle$ e $|B\rangle$, respectivamente, nos modos 3 e 6, quando todas as contagens não nulas registradas nos contadores forem pares. Assim, o estado na saída do sistema será:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= S_{ao} |A, B\rangle = |A \cdot B, A + B\rangle = \\
&N (ac |-\alpha, -\alpha\rangle + ad |-\alpha, \alpha\rangle + bc |-\alpha, \alpha\rangle + bd |\alpha, \alpha\rangle),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

em que N é a constante de normalização que corresponde a:

$$|N|^2 = \left\{ [1 + 2(ab + cd) \cdot \exp(-2|\alpha|^2) + 2abd[1 + \exp(-4|\alpha|^2)]] \right\}^{-1}. \tag{3.9}$$

3.3 Análise da Probabilidade de Sucesso e da Fidelidade

Nesta Seção foi analisada a probabilidade de sucesso do sistema S_{ao} mostrado na Figura 3.2. Considerando a situação que o sistema óptico é bem-sucedido, ou seja, quando tivermos o estado (3.3) antes da realização de quaisquer medições e quando as medições não-nulas realizadas nos contadores de fótons forem todas pares, a probabilidade de sucesso do sistema, P_{suc} , é dada por:

$$P_{suc} = \left(\frac{1 - e^{-|\alpha|^2}}{2} \right)^3 \left| \langle \psi_{out} | \psi_d \rangle \right|^2 = \frac{|N_d|^2 (1 - e^{-|\alpha|^2})^3}{128 |N_\xi|^4 |N_A|^2 |N_B|^2}. \tag{3.10}$$

Assim, podemos observar em (3.8) que a probabilidade de sucesso do sistema óptico proposto é de até 1/32. Entretanto, é possível melhorar o desempenho do sistema usando um operador de deslocamento apropriado conforme descrito no Capítulo 2, $\hat{D}_x(\beta) = e^{(\beta \hat{a}_x^\dagger - \beta^* \hat{a}_x)}$. Esse operador pode ser aplicado em um ou em ambos os modos do estado (3.6), em alguns casos em que o sistema falha. Dessa forma, a fidelidade do estado colapsado aproximará de 1 para um $|\alpha|^2$ suficientemente grande [6]. Existem três casos em (3.7) onde o sistema falha, mas, que é possível aplicar o operador de deslocamento para aumentar a fidelidade do estado (3.7) colapsado em comparação ao estado requerido (3.8). Conforme as contagens registradas em cada contador de fótons, os casos passíveis de correções são:

- (i) k é par, ambos m e n são números de fótons ímpares;
- (ii) m é par, tanto k e n são números fótons ímpares;
- (iii) n é par, tanto k e m são números ímpares de fótons.

Quando o caso (i) ocorre, o estado resultante de (3.7) é o estado:

$$\begin{aligned} |\phi_i\rangle &= -N_i \left(ac|-\alpha, -\alpha\rangle - ad|-\alpha, \alpha\rangle - bc|-\alpha, \alpha\rangle + bd|\alpha, \alpha\rangle \right), \\ |N_i|^2 &= \left[1 + 2abcd(1 + e^{-4|\alpha|^2}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O estado (3.11) não é o estado (3.8), nem pode ser convertido por um operador unitário e a sua fidelidade será inferior a 1. Mas, se aplicar o operador deslocamento $\hat{D}(-\beta)$ em modo 3 e $\hat{D}(\beta)$ em modo 6 do estado em (3.10) para aumentar a fidelidade do estado final, para $\beta = -j\pi/(4\alpha)$, o estado obtido será:

$$\begin{aligned} |\phi_{id}\rangle &= \hat{D}_3(\beta)\hat{D}_6(-\beta)|\phi_i\rangle = N_i \left(ac|-\beta - \alpha, \beta - \alpha\rangle + jad|-\beta - \alpha, \beta + \alpha\rangle + \right. \\ &\quad \left. jbc|-\beta - \alpha, \beta + \alpha\rangle + bd|-\beta + \alpha, \beta + \alpha\rangle \right)_{3,6}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De tal modo que a fidelidade do estado em (3.12) em comparação ao estado requerido (3.8) é

$$F = \left| \langle \phi_{id} | \psi_d \rangle \right| = |N| \cdot |N_i| \cdot e^{-|\beta|^2} \sqrt{(\varepsilon + \lambda)^2 + (\gamma + \lambda)^2}, \quad (3.13)$$

sendo $\varepsilon = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \cdot e^{-|\alpha|^2}$, $\lambda = (ab + cd)e^{-|\alpha|^2}$, $\gamma = (ad + bd)^2$.

Para o caso (ii), em que m é par e tanto k e n são ímpares, o estado resultante de (3.7) é

$$\begin{aligned} |\phi_{ii}\rangle &= N_{ii} \left(ac|-\alpha, -\alpha\rangle + ad|-\alpha, \alpha\rangle + bc|-\alpha, \alpha\rangle - bd|\alpha, \alpha\rangle \right), \\ |N_{ii}|^2 &= |N_i|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aplicando o operador de deslocamento $\hat{D}(\beta)$ em ambos os modos de (3.14) o estado obtido é dado por:

$$\begin{aligned} |\phi_{iid}\rangle &= \hat{D}_3(\beta)\hat{D}_6(\beta)|\phi_{ii}\rangle = N_{ii} \left(jac|\beta - \alpha, \beta - \alpha\rangle + ad|\beta - \alpha, \beta + \alpha\rangle + \right. \\ &\quad \left. bc|\beta - \alpha, \beta + \alpha\rangle + jbd|\beta + \alpha, \beta + \alpha\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para o último caso passível de amplificação do grau de fidelidade, o estado gerado e o estado corrigido com aplicação do operador de deslocamento $\hat{D}(-\beta)$ em ambos os modos, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} |\phi_{iii}\rangle &= -N_{iii} (ac |-\alpha, -\alpha\rangle - ad |-\alpha, \alpha\rangle - bc |-\alpha, \alpha\rangle - bd |\alpha, \alpha\rangle), \\ |N_{iii}|^2 &= |N_i|^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e,

$$\begin{aligned} |\phi_{iiid}\rangle &= \hat{D}_3(-\beta) \hat{D}_6(-\beta) |\phi_{iii}\rangle = N_{iii} (jac |-\beta - \alpha, -\beta - \alpha\rangle + ad |-\beta - \alpha, -\beta + \alpha\rangle + \\ &\quad bc |-\beta - \alpha, -\beta + \alpha\rangle + jbd |-\beta + \alpha, -\beta + \alpha\rangle). \end{aligned} \quad (3.17)$$

A fidelidade do estado (3.15) e (3.17) é o mesmo do estado $|\phi_i\rangle$ dada em (3.12). A probabilidade de sucesso em cada um dos três casos é igual a (3.10). Portanto, a probabilidade de sucesso e fidelidade totais do sistema óptico proposto são, respectivamente:

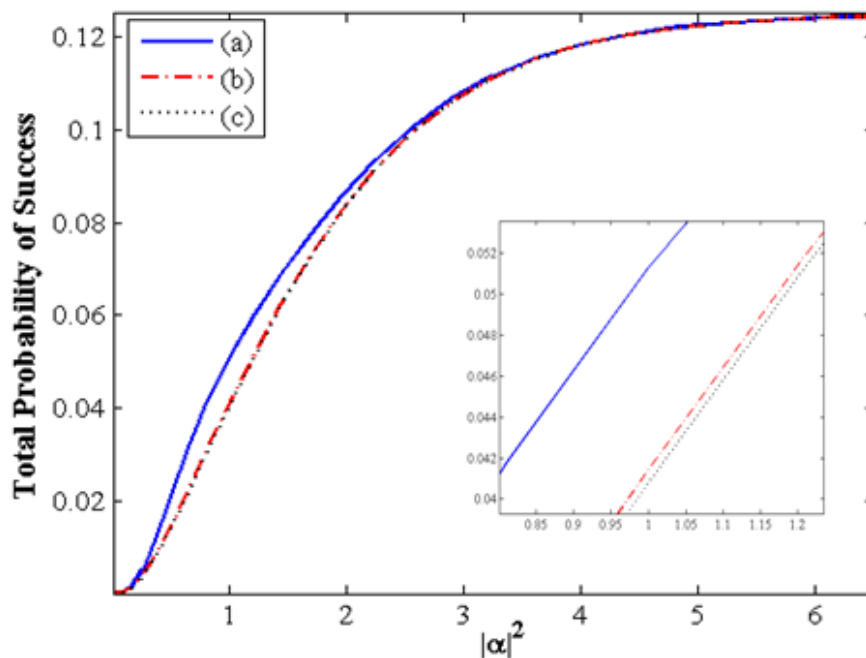
$$P_T = \frac{|N_d|^2 (1 - e^{-|\alpha|^2})^3}{32 |N_\xi|^4 |N_A|^2 |N_B|^2}, \quad (3.15)$$

e,

$$F_T = 8p_{suc} (1 + 3F). \quad (3.18)$$

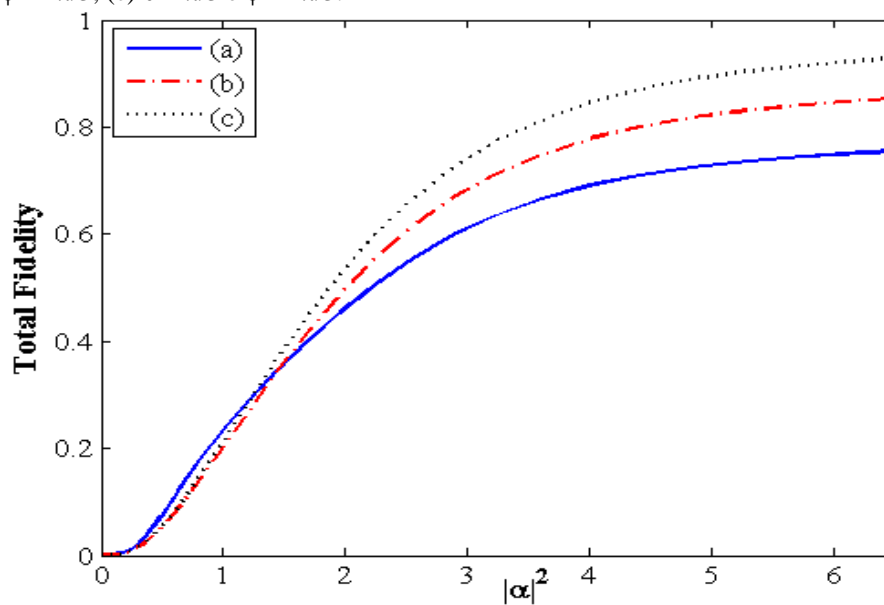
A partir de (3.18) e (3.19), foram traçados os comportamentos da probabilidade total de sucesso e da fidelidade total como funções de $|\alpha|^2$, ϕ e θ em que $a = \text{sen}(\theta)$, $b = \text{cos}(\theta)$, $c = \text{sen}(\phi)$, $d = \text{cos}(\phi)$ e mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4, respectivamente. Como podemos observar nas Figuras 3.3 e 3.4, existe um comportamento monotônico tanto na probabilidade total de sucesso quanto na fidelidade total com número médio de fótons $|\alpha|^2$ para um sistema óptico sem perda e dispositivos ópticos ideais para vários valores de θ e ϕ (ou seja, diferentes estados de entrada, $|A\rangle$ e $|B\rangle$). Ambos P_T e F_T assintoticamente aproximam-se de 1 a medida que $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$.

Figura 3.3 - Probabilidade total de sucesso em função de $|\alpha|^2$ para um sistema óptico ideal. (a) $\theta = \pi/4$ e $\phi = \pi/4$; (b) $\theta = \pi/4$ e $\phi = 2\pi/3$; (c) $\theta = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$.



Fonte: Próprio Autor

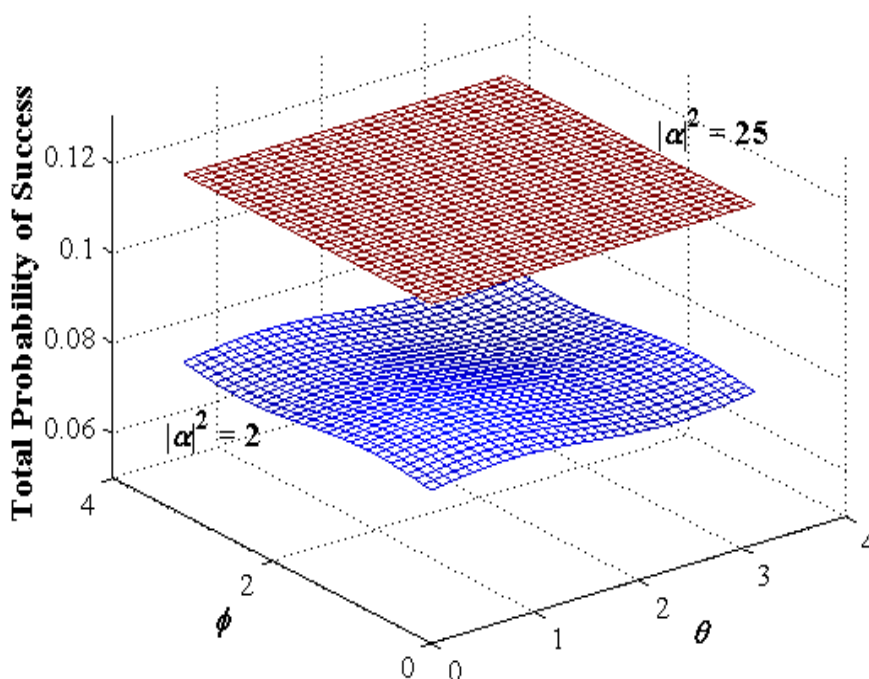
Figura 3.4 - Fidelidade total em função de $|\alpha|^2$ para um sistema óptico ideal. (a) $\theta = \pi/4$ e $\phi = \pi/4$; (b) $\theta = \pi/4$ e $\phi = 2\pi/3$; (c) $\theta = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$.



Fonte: Próprio Autor

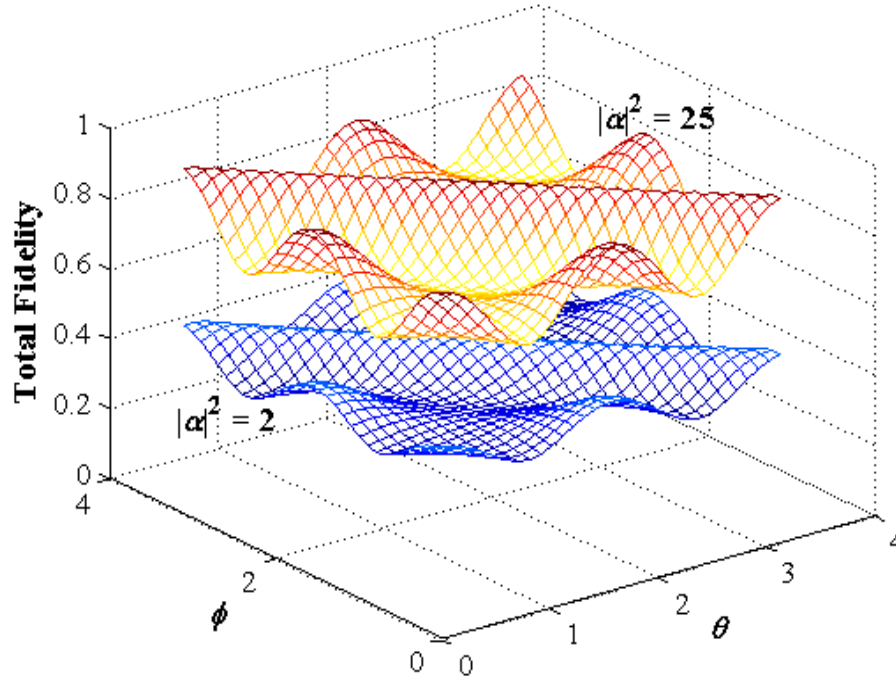
Nas Figuras 3.5 e 3.6 foram analisados os comportamentos da probabilidade total de sucesso e da fidelidade total em funções θ e ϕ para dois valores fixos de número de médio de fótons: $|\alpha|^2 = 2$ e $|\alpha|^2 = 25$. Podemos observar que o sistema proposto realiza as operações referentes as funções lógicas AND e OR com alta fidelidade quando $|\alpha|^2 \geq 25$ e com uma eficiência total de aproximadamente $1/8$ como pode ser observado na Figura 3.5. Já como era esperado em (3.18), a fidelidade total é quase independente θ e ϕ , ou seja, quase independente dos estados de entrada, $|A\rangle$ e $|B\rangle$, conforme mostrado na Figura 3.6. Nos casos analisados na Figura 3.6, a fidelidade total apresentou um valor médio de 0,4788 com desvio padrão de 0,0581 para $|\alpha|^2 = 2$ enquanto que $|\alpha|^2 = 25$ a média foi de 0,8738 com um desvio padrão de 0,1070.

Figura 3.5 - Probabilidade total de sucesso em função do θ e ϕ para $|\alpha|^2 = 2$ e $|\alpha|^2 = 25$.



Fonte: Próprio Autor

Figura 3.6 - Total da fidelidade como uma função de θ e ϕ para $|\alpha|^2 = 2$ e $|\alpha|^2 = 25$.



Fonte: Próprio autor

3.4 Aplicações

O sistema óptico proposto na seção anterior apresentação uma estrutura reconfigurável possibilitando a gerações de outras funções lógicas e a projeção das operações lógicas em um qubit alvo.

A primeira reconfiguração do sistema é feita por meio da colocação de um modulador de fase *PM*, configurado para funcionar como uma porta NOT para qubits de estados coerentes, em cada saída correspondente (aos modos 3 e 6) do sistema mostrado na Figura 3.2, o mesmo produzirá as operações lógicas NAND e NOR, conforme apresentado na Figura 3.7.

A segunda reconfiguração do sistema é mostrada na Figura 3.8. Trata-se de uma configuração mais complexa que permite a projeção da função lógica AND dos estados de entrada, $|A\rangle$ e $|B\rangle$, em um terceiro estado alvo, $|\alpha\rangle$, ou seja, dado o estado de entrada ($|A, B, 1\rangle \xrightarrow{S_{And}} |A, B, A.B\rangle$). Na Figura 3.8, tanto o estado $|A\rangle$ como o estado $|B\rangle$ passam pelos geradores de entrelaçamento SS_{1a} e SS_{1b} , respectivamente, para produzir os seguintes estados de Bell: $|A'\rangle = N_A N_\xi (a|-\alpha, -\alpha\rangle + b|\alpha, \alpha\rangle)$ e $|B'\rangle = N_b N_\xi (c|-\alpha, -\alpha\rangle + d|\alpha, \alpha\rangle)$. Esses

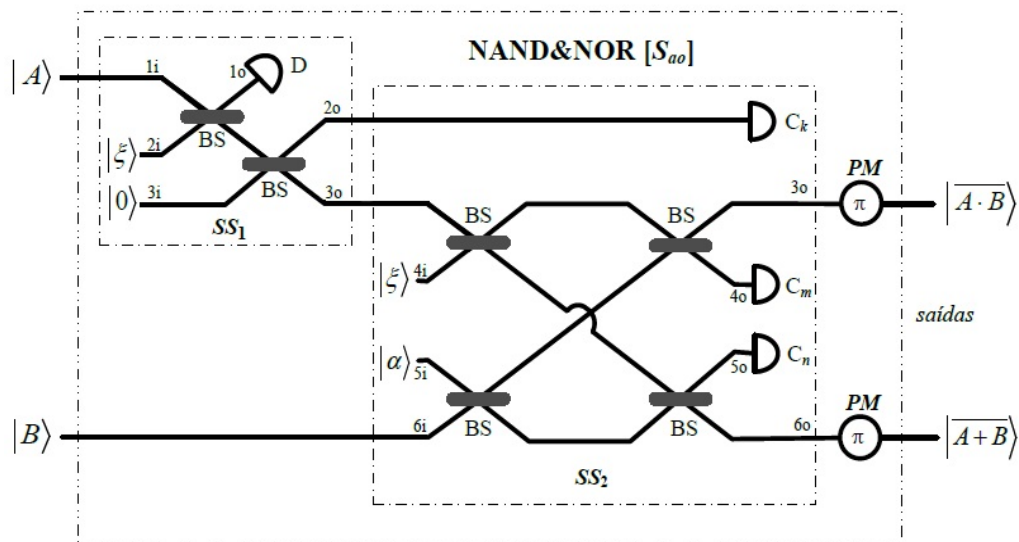
estados aos serem processados no subsistema SS_2 resultarão no seguinte estado não normalizado (desde que as condições de funcionamento descritas para o sistema óptico original forem atendidas):

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{273} \approx & ac(-1)^{m+n} |-\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + ad(-1)^{k+n} |-\alpha, \alpha, -\alpha\rangle \\ & + bc|\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + bd(-1)^m |\alpha, \alpha, \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Quanto ao desempenho do sistema reconfigurado mostrado na Figura 3.8, se desconsiderarmos o processo de entrelaçamento nos subsistemas SS_{1a} e SS_{1b} , a probabilidade de sucesso é de 1/32 sem aplicação da técnica de amplificação do grau de fidelidade nos casos possíveis quando o sistema falha conforme descrito na seção anterior. Vale ressaltar que nessa segunda reconfiguração, se deslocarmos o contador de fótons C_n para o 3º modo, é possível realizar a projeção da função OR dos estados de entrada sobre o estado alvo. ($|A, B, 1\rangle \xrightarrow{S_{or}} |A, B, A+B\rangle$) Assim, o estado (não normalizado) resultante na saída do sistema será (nos modos 2, 6 e 7):

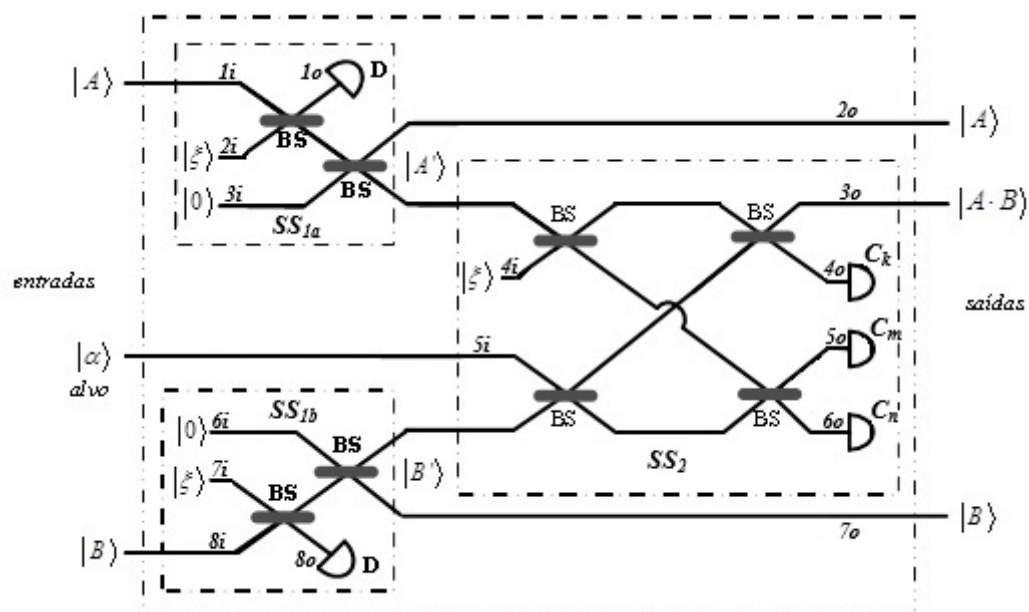
$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{276} \approx & ac(-1)^{m+n} |-\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + ad(-1)^{k+m+n} |-\alpha, \alpha, \alpha\rangle \\ & + bc(-1)^n |\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + bd(-1)^{k+n} |\alpha, \alpha, \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Figura 3.7 - Sistema óptico probabilístico capaz de implementar as funções lógicas NAND e NOR de dois qubits de estados coerentes.



Fonte: Próprio autor

Figura 3.8 - Sistema óptico probabilístico capaz de projetar a função lógica AND de dois qubits de estados coerentes em um estado alvo.



Fonte: Próprio autor

4 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou um sistema óptico reconfigurável capaz de produzir, simultânea e probabilisticamente, as funções lógicas AND e OR e suas funções complementares, de dois qubits codificados em estados coerentes. O sistema proposto é baseado em óptica linear e usa dispositivos ópticos disponíveis comercialmente, tornando-o factível de implementação.

O mesmo apresentou uma eficiência de até $1/8$ com uma fidelidade média superior a 85% para $|\alpha|^2 \geq 25$ com uso de um operador de deslocamento adequado para alguns casos especiais em que o estado gerado, após o processamento pelo sistema, ser passível de ampliação do grau de fidelidade. E com o uso da integração de sistemas fotônicos em silício, as dificuldades de implementação do sistema proposto com dispositivos discretos em fibra ótica, como sincronização e despolarização da luz, podem ser superados.

Entre as perspectivas de atividades decorrentes desse trabalho, podemos destacar:

1. Análise do desempenho do sistema proposto considerando dispositivos reais;
2. Análise da viabilidade de reusos dos estados gerados quando o sistema falha;
3. Melhorar a eficiência e viabilidade operacional do sistema com uso de operadores de deslocamento pré-configurados nas saídas do sistema;
4. Utilização do sistema para outros tipos de qubits (de fótons únicos de polarização e híbridos, por exemplo);
5. Avaliar a possibilidade de desenvolvimento de protocolos de comunicações para comunicações quânticas;
6. Desenvolvimento de um modelo do sistema integrado em silício.

REFERÊNCIAS

- [1] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. *Cambridge University Press*, 2005.
- [2] LADD, T. D. et al. QUANTUM COMPUTERS. **Nature**, v. 464, n. 7285, p. 45-53, 2010.
- [3] KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics; **Nature**, 2001.
- [4] JEONG, H.; KIM, M. S. Efficient quantum computation using coherent states. **Physical Review A**, v. 65, n. 4, p. 042305, 2002.
- [5] SILVA, J. B. R.; RAMOS, R. V. "Smart generation of a tripartite GHZ-type state for coherent state qubit". **Optics Communications**, v. 281, p. 2705–2709, 2008.
- [6] OLIVEIRA, M. S. R.; VASCONCELOS, H. M.; SILVA, J. B. R. A probabilistic CNOT gate for coherent state qubits. **Physics Letters A**, v. 377, n. 39, p. 2821-2825, 2013.
- [7] SILVA, J. B. R.; RAMOS, R. V. Implementations of quantum and classical gates with linear optical devices and photon number quantum non-demolition measurement for polarization encoded qubits. **Physics Letters A**, v. 359, n. 6, p. 592-596, 2006.
- [8] KOK, P. et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits. **Reviews of Modern Physics**, v. 79, n. 1, p. 135, 2007.
- [9] GLANCY, S. et al. Imperfect detectors in linear optical quantum computers. **Physical Review A**, v. 65, n. 6, p. 062317, 2002.
- [10] IMAMOGLU, A. Are quantum dots useful for quantum computation? **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, v. 16, n. 1, p. 47-50, 2003.
- [11] HERRERA-MARTÍ, A. et al. Photonic implementation for the topological cluster-state quantum computer, **Physical Review A**, v. 82, n. 3, p. 032332, 2010.
- [12] UHRIG, S. G. A quantum bit alive by optimized π -pulse sequences. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 10, p. 100504, 2007
- [13] LIU, H. et al. A gate-defined silicon quantum dot molecule. **Applied Physics Letters**, v. 92, n. 22, p. 222104, 2008.

- [14] SIMMONS, C. B. et al. Charge sensing and controllable tunnel coupling in a Si/SiGe double quantum dot. **Nano letters**, v. 9, n. 9, p. 3234-3238, 2009.
- [15] YOU, J. Q. TSAI, J. S.; NORI, F. Experimentally realizable scalable quantum computing using superconducting qubits. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, v. 18, n. 1, p. 35-36, 2003
- [16] YOU, J. Q.; NORI, F. Superconducting circuits and quantum information. **Physics today**, v. 58, n. 11, p. 42-47, 2005.
- [17] MAKHLIN, Y.; SCHÖN, G. SHNIRMAN, A. Josephson junction quantum logic gates. **Computer physics communications**, v. 127, n. 1, p. 156-164, 2000.
- [18] SCHREIER, J. A. et al. Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits. **Physical Review B**, v. 77, n. 18, p. 180502, 2008.
- [19] CHIORESCU, I. et al. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. **Science Science**, v. 299, n. 5614, p. 1869-1871, 2003.
- [20] NISKANEN, A. O. et al. Quantum coherent tunable coupling of superconducting qubits. **Science**, v. 316, n. 5825, p. 723-726, 2007.
- [21] HARRIS, R. et al. Experimental demonstration of a robust and scalable flux qubit. **Physical Review B**, v. 81, n. 13, p. 134510, 2010.
- [22] DICARLO, L. et al. Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor. **Nature**, v. 460, n. 7252, p. 240-244, 2009.
- [23] COPSEY, D. et al. Toward a scalable, silicon-based quantum computing architecture. **IEEE Journal of selected topics in quantum electronics**, v. 9, n. 6, p. 1552-1569, 2003.
- [24] O'BRIEN, J. L. FUR;USAWA, A. VUČKOVIĆ, J. Photonic quantum technologies. **Nature Photonics**, v. 3, n. 12, p. 687-695, 2009.
- [25] SHIELDS A. J., Semiconductor quantum light sources, **Nature Photonics**, vol. 1, p. 215, 2007.
- [26] LAUCHT, A. et al. A waveguide-coupled on-chip single-photon source. **Physical Review X**, v. 2, n. 1, p. 011014, 2012.

- [27] FARAON, A. et al. Coherent generation of non-classical light on a chip via photon-induced tunnelling and blockade. **Nature Physics**, v. 4, n. 11, p. 859-863, 2008.
- [28] POLITI, A. J. et al. Integrated quantum photonics. **IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics**, v. 15, n. 6, p. 1673-1684, 2009.
- [29] MATTHEWS, Jonathan CF et al. Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits. **Nature Photonics**, v. 3, n. 6, p. 346-350, 2009.
- [30] LODAHL, P.; MAHMOODIAN, S.; STOBBE, S. Interfacing single photons and single quantum dots with photonic nanostructures. **Reviews of Modern Physics**, v. 87, n. 2, p. 347, 2015.
- [31] SCHWAGMANN, A. S. et al. On-chip single photon emission from an integrated semiconductor quantum dot into a photonic crystal waveguide. **Applied Physics Letters**, v. 99, n. 26, p. 261108, 2011.
- [32] HOANG, B.A T et al. Enhanced spontaneous emission from quantum dots in short photonic crystal waveguides. **Applied Physics Letters**, v. 100, n. 6, p. 061122, 2012.
- [33] PERNICE, W. H. P. et al. High-speed and high-efficiency travelling wave single-photon detectors embedded in nanophotonic circuits. **Nature communications**, v. 3, p. 1325, 2012.
- [34] KAWABATA, S. Quantum Information Processing and Entanglement in Solid State Devices. **Science and Technology of Advanced Materials**, v. 5, n. 3, p. 295-299, 2004
- [35] KANE, B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer. **Nature**, v. 393, n. 6681, p. 133-137, 1998.
- [36] VRIJEN, R. et al. Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures. **Physical Review A**, v. 62, n. 1, p. 012306, 2000.
- [37] O'BRIEN, J. L. et al. Towards the fabrication of phosphorus qubits for a silicon quantum computer. **Physical Review B**, v. 64, n. 16, p. 161401, 2001
- [38] DUTT, M. V. G. et al. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond. **Science**, v. 316, n. 5829, p. 1312-1316, 2007.
- [39] NEUMANN, P. et al. Multipartite entanglement among single spins in diamond. **Science**, v. 320, n. 5881, p. 1326-1329, 2008
- [40] JIANG, L. et al. Repetitive readout of a single electronic spin via quantum logic with nuclear spin ancillae. **Science**, v. 326, n. 5950, p. 267-272, 2009.

- [41] HANSON, R. et al. Coherent dynamics of a single spin interacting with an adjustable spin bath. **Science**, v. 320, n. 5874, p. 352-355, 2008.
- [42] CHUANG, I. L. et al. Bulk quantum computation with nuclear magnetic resonance: theory and experiment. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. **The Royal Society**, 1998. p. 447-467.
- [43] HAVEL, T. F. et al. Principles and Demonstrations of Quantum Information Processing by NMR Spectroscopy. **Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing**, v. 10, n. 4-5, p. 339-374, 2000.
- [44] RAUSSENDORF, R. A one-way quantum computer. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 22, p. 5188, 2001.
- [45] RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H, J. A one-way quantum computer. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 22, p. 5188, 2001.
- [46] NEGREVERGNE, C. et al. Benchmarking quantum control methods on a 12-qubit system. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 17, p. 170501, 2006.
- [47] VANDERSYPEN, L. M. K. et al. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. **Nature**, v. 414, n. 6866, p. 883-887, 2001.
- [48] KHANEJA, N. et al. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms. **Journal of magnetic resonance**, v. 172, n. 2, p. 296-305, 2005.
- [49] BRAUNSTEIN, S. L. et al. Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 5, p. 1054, 1999.
- [50] CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. **Physical review letters**, v. 74, n. 20, p. 4091, 1995.
- [51] WINELAND, D.; BLATT, R. Entangled states of trapped atomic ions. **Nature**, v. 453, n. 7198, p. 1008-1015, 2008.
- [52] OSPELKAUS, C. et al. Trapped-ion quantum logic gates based on oscillating magnetic fields. **Physical review Letters**, v. 101, n. 9, p. 090502, 2008.
- [53] GARCÍA-RIPOLL, J. J.; ZOLLER, P.; CIRAC, J. I. Speed optimized two-qubit gates with laser coherent control techniques for ion trap quantum computing. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 15, p. 157901, 2003.

- [54] LEIBFRIED, D. Quantum dynamics of single trapped ions. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 1, p. 281, 2003.
- [55] HOME, J. P. et al. Complete methods set for scalable ion trap quantum information processing. **Science**, v. 325, n. 5945, p. 1227-1230, 2009.
- [56] OLMSCHENK, S. et al. Quantum teleportation between distant matter qubits. **Science**, v. 323, n. 5913, p. 486-489, 2009.
- [57] MICHLER, P. et al. A quantum dot single-photon turnstile device. **Science**, v. 290, n. 5500, p. 2282-2285, 2000.
- [58] O'BRIEN, J. L. Optical quantum computing. **Science**, v. 318, n. 5856, p. 1567-1570, 2007.
- [59] SOUSA C.P.; SILVA, J. B. R. Probabilistic Quantum Logic AND and OR Gates for Coherent States Using Linear Optics. Workshop-Escola em Computação Quântica e Informação **WECIQ** 2015.
- [60] KOK, P. et al. Linear optical quantum computing. **arXiv preprint quant-ph /0512071**, 2005.
- [61] GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. **Physical Review**, v. 130, n. 6, p. 2529, 1963.
- [62] LUND, A. P.; RALPH, T. C.; HASELGROVE, H. L. Fault-tolerant linear optical quantum computing with small-amplitude coherent states. **Physical review letters**, v. 100, n. 3, p. 030503, 2008.
- [63] OURJOUMTSEV, A. et al. Generation of optical 'Schrödinger cats' from photon number states. **Nature**, v. 448, n. 7155, p. 784-786, 2007.
- [64] VASCONCELOS, H. M. **Topics in Coherentstate Quantum Computation and State Purification**. Tese (Doutorado em Física), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 2006
- [65] WINZER P. J.; ESSIAMBRE R. Advanced optical modulation formats. **Proceedings of the IEEE**, v. 94, n. 5, p. 952-985, 2006.
- [66] STOBINSKA, M.; MILBURN, G. J.; WODKIEWICZ, K. Effective generation of cat and kitten states. **Open Systems & Information Dynamics**, v. 14, n. 01, p. 81-90, 2007.
- [67] KOK. P.; LOVETT, B. W. **Introduction to Optical Quantum Information Processing**. Cambridge University Press 2010.

- [68] SILVA, J. B. R. **Sistemas Ópticos para Comunicação e Computação Quântica**. Tese Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática), Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2008.
- [69] WINELAND, D. J. et al. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions. **Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology**, v. 103, n. 3, p. 259, 1998.
- [70] DAKNA, M. et al. Generating Schrödinger-cat-like states by means of conditional measurements on a beam splitter. **Physical Review A**, v. 55, n. 4, p. 3184, 1997
- [71] NASCIMENTO, J. C. **Correção de erro em sistemas de comunicação quântica utilizando polarização de estados coerentes e fótons isolados**. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) – Universidade Federal do Ceará - UFC. 2006.

APÊNDICE A - OPERADOR DE DESLOCAMENTO

Este Apêndice apresenta o uso do operador de deslocamento, de forma a melhorar a fidelidade e a probabilidade sucesso, apresentados nas expressões (3.12), (3.14) e (3.16) do Capítulo 3.

Considerando que o operador deslocamento seja dado por:

$$\hat{D}_x(\beta)|\alpha\rangle = e^{-(\beta\alpha)}|\beta + \alpha\rangle. \text{ Considerando } \beta = -\frac{j\pi}{4\alpha}.$$

Assim, para qubit igual a $|- \alpha\rangle$, tem-se:

$$\hat{D}\left(-\frac{j\pi}{4\alpha}\right)|-\alpha\rangle = e^{-\left[-\frac{j\pi}{4\alpha}(-\alpha)\right]} \left|-\frac{j\pi}{4\alpha} - \alpha\right\rangle = e^{-\frac{j\pi}{4}} \left|-\frac{j\pi}{4\alpha} - \alpha\right\rangle = e^{-\frac{j\pi}{4}} |\beta - \alpha\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Assim, para qubit igual a $|\alpha\rangle$, tem-se:

$$\hat{D}\left(-\frac{j\pi}{4\alpha}\right) = e^{-\left[-\frac{j\pi}{4\alpha}(\alpha)\right]} \left|-\frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha\right\rangle = e^{\frac{j\pi}{4}} \left|-\frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha\right\rangle = e^{\frac{j\pi}{4}} |\beta + \alpha\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Dessa forma aplicado ao caso (i) eq. (3.10) para corrigi-lo.

$$\text{Como: } e^{-\frac{j\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j,$$

$$\begin{aligned} |\phi_{id}\rangle_{3,6} &= \hat{D}_3(\beta)\hat{D}_6(-\beta)|\phi_i\rangle = \hat{D}_3\left(-\frac{j\pi}{4\alpha}\right)\hat{D}_6\left(-\frac{j\pi}{4\alpha}\right)|\phi_i\rangle = \hat{D}_3\left(-\frac{j\pi}{4\alpha}\right)\hat{D}_6\left(\frac{j\pi}{4\alpha}\right)|\phi_i\rangle \\ &= N_i \left(e^{j\pi/4} \cdot e^{-j\pi/4} \cdot ac \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} - \alpha \right\rangle + e^{j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4} \cdot ad \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. e^{j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4} \cdot bc \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle + e^{-j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4} \cdot bd \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} + \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle \right) = \\ &= N_i \left(ac \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} - \alpha \right\rangle + e^{j\pi/2} \cdot ad \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. e^{j\pi/2} \cdot bc \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} - \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle + bd \left| \frac{-j\pi}{4\alpha} + \alpha, \frac{j\pi}{4\alpha} + \alpha \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Logo o estado corrigido $|\phi_{id}\rangle$ corresponde.

$$|\phi_{id}\rangle = N_i \left(ac|\beta - \alpha, -\beta - \alpha\rangle + jad|\beta - \alpha, -\beta + \alpha\rangle + \right. \\ \left. jbc|-\beta - \alpha, -\beta + \alpha\rangle + bd|\beta + \alpha, -\beta + \alpha\rangle \right)_{3,6}. \quad (\text{A.4})$$

O mesmo cálculo é aplicado para os casos (ii) e (iii).

APÊNDICE B – PROBABILIDADE DE SUCESSO

A probabilidade de sucesso do sistema óptico proposto na Figura 3.2 após a correção dos estados que o sistema falha equações (3.10), (3.11) e (3.12) é acima de 85%, para o caso da utilização apenas de contadores de fótons ideais. No entanto, para $\langle -\alpha | \alpha \rangle = \exp(-4|\alpha|^2)$, a probabilidade de sucesso do sistema óptico proposto é dada pela probabilidade condicional $P_{suc} = P_m \cdot P_n \cdot P_n \cdot |\langle \psi_{out} | \psi_d \rangle|^2$ na qual, P_k, P_m e P_n são as probabilidades de sucesso de cada contador de fóton C_k, C_m e C_n .

A probabilidade sucesso considerando que o sistema é bem sucedido ocorre quando houver registrar não nulo e contagem par em todos os contadores de fótons C_k, C_m e C_n .

$$P_{\langle 0|\pm\alpha \rangle} = |\langle 0 | \pm\alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}, \quad (\text{B.1})$$

$P_{\langle 0|\pm\alpha \rangle}$ corresponde a probabilidade de registrar medida $\langle 0 | \pm\alpha \rangle$ em um dos contadores de fótons.

$$P_{\langle 0|0 \rangle} = |\langle 0 | 0 \rangle|^2 = 1, \quad (\text{B.2})$$

$P_{\langle 0|0 \rangle}$ corresponde a probabilidade de registrar medida $\langle 0 | 0 \rangle$ em um dos contadores de fótons.

$$P_n = \frac{1 - e^{-|\alpha|^2}}{2}, \quad (\text{B.3})$$

P_n corresponde a probabilidade de cada contador de fóton ser bem sucedido.

$$P_k = P_m = P_n = \frac{1 - e^{-|\alpha|^2}}{2}. \quad (\text{B.4})$$

Probabilidade de sucesso corresponde a:

$$P_{suc} = P_k \cdot P_m \cdot P_n = \left(\frac{1 - e^{-|\alpha|^2}}{2} \right)^3 \cdot |\langle \psi_{out} | \psi_d \rangle|^2. \quad (\text{B.5})$$

Assim como foi definido na seção 3.2 o estado desejado $|\psi_d\rangle$ e saída $|\psi_{out}\rangle$ temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_{out}\rangle = N_{\xi}^2 . N_A . N_B (ac|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + ad|0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + bc|0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + \\ \quad bd|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle + (ac|0, -\alpha, -2\alpha, 0, 0, 0\rangle + \dots + ad\left|-\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\rangle + \\ \quad bc|0, \alpha, 0, 2\alpha, 0, 0\rangle + \dots + bd\left|\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}\right\rangle, \\ |\psi_d\rangle = N_d (ac|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + ad|0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + \\ \quad bc|0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + bd|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle. \end{array} \right. \quad (B.6)$$

Aplicando em $|\langle\psi_{out}|\psi_d\rangle|^2$.

$$\left| N_{\xi}^2 . N_A . N_B \left(\begin{array}{l} ac|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + \\ ad|0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle \\ + bc|0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + \\ bd|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle + \\ ac|0, -\alpha, -2\alpha, 0, 0, 0\rangle + \dots + \\ ad\left|-\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\rangle \\ + bc|0, \alpha, 0, 2\alpha, 0, 0\rangle + \dots + \\ bd\left|\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}\right\rangle \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} N_d (ac|0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + \\ ad|0, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + \\ bc|0, \alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + \\ bd|0, \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle \end{array} \right) \right|^2. \quad (B.7)$$

Realizando o produto interno $\langle\psi_{out}|\psi_d\rangle$ para cada termo temos.

1º Termo $\langle ac|ac\rangle$:

$$\left\langle ac \left(\begin{array}{l} (0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha) + (0, -\alpha, -2\alpha, 0, 0, 0) + \\ \left(-\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2} \right) + \left(-\sqrt{2}\alpha, 0, \frac{-3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) \end{array} \right) \left| ac(0, -\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha) \right\rangle =$$

$$acac \left[\begin{array}{l} \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle + \langle -\alpha|0\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \\ \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle + \langle -\alpha|0\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \\ \langle -\alpha|\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle + \langle \alpha|0\rangle, \langle \alpha|-\alpha\rangle, \langle \alpha|-\alpha\rangle, \langle \alpha|\alpha\rangle, \langle \alpha|-\alpha\rangle, \\ \langle \alpha|-\alpha\rangle + \langle -\alpha|0\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle + \\ \langle -\alpha|0\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle + \langle -\alpha|0\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \\ \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\alpha|-\alpha\rangle + \langle -2\alpha|0\rangle, \langle -2\alpha|-\alpha\rangle, \langle -2\alpha|-\alpha\rangle, \\ acac \left[\begin{array}{l} \langle -2\alpha|\alpha\rangle, \langle -2\alpha|-\alpha\rangle, \langle -2\alpha|-\alpha\rangle + \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \\ \langle 0|-\alpha\rangle + \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle + \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \\ \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle \end{array} \right] \\ \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{l} \langle -\sqrt{2}\alpha|0\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle + \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \\ \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \right. \right. \\ acac \left[\begin{array}{l} \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \right. \right. \\ \left. \left. \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \end{array} \right] \\ \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{l} \langle -\sqrt{2}\alpha|0\rangle, -\langle \sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle, \langle -\sqrt{2}\alpha|-\alpha\rangle + \langle 0|0\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \\ \langle 0|-\alpha\rangle \langle 0|\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle, \langle 0|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \right. \right. \\ acac \left[\begin{array}{l} \left\langle \frac{-3\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \right. \right. \\ \left. \left. \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{2}|0\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle, \left\langle \frac{\alpha}{2}|-\alpha\rangle \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \end{array} \right] \\ \end{array} \right] . \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Após esse processo aplicando o caso geral: $|\langle \alpha|\beta\rangle| = e^{-|\alpha-\beta|^2}$, em cada situação,

obtendo a probabilidade total de sucesso com os estados coerentes corrigidos.

$$P_{suc} = \left(\frac{1 - e^{-|\alpha|^2}}{2} \right)^3 \cdot |\langle \psi_{out} | \psi_d \rangle|^2 = P_T = \frac{|N_d|^2 \left(1 - e^{-|\alpha|^2} \right)^3}{32 |N_\xi|^4 |N_A|^2 |N_B|^2}.$$

APÊNDICE C – OPERADOR QUÂNTICO UNITÁRIO DE UM DIVISOR DE FEIXE (50/50) BALANCEADO SEM PERDAS PARA O ESTADO COERENTE.

Extraído de [71].

Partindo do operador unitário de um *BS* sem perda, (ideal) com \hat{a}_1 e \hat{a}_2 operadores de aniquilação dos estados coerente na saída, para os estados também coerentes na entrada $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ aplicando uma rotação de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ definido conforme a seguir [71].

Os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ podem ser escritos na base dos estados de Fock, o mesmo estados de número de fótons, $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ e $|\beta\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$. O operador quântico de rotação par o estado coerente binomial é $e^{i\theta\hat{s}}$, sendo $\hat{s} = \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2$ operador quântico de Stokes.

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta\hat{s}} |\alpha\rangle |\beta\rangle &= e^{i\theta\hat{s}} \cdot \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \cdot \left(e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right) \\
 &= e^{i\theta\hat{s}} \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right) \cdot \left(e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right) \quad (C.1) \\
 &= e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} e^{i\theta\hat{s}} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle |0\rangle,
 \end{aligned}$$

Sendo

$$e^{i\theta\hat{s}} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle |0\rangle = \frac{(e^{i\theta\hat{s}} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\theta\hat{s}})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(e^{i\theta\hat{s}} \hat{a}_2^\dagger e^{-i\theta\hat{s}})^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle |0\rangle. \quad (C.2)$$

De acordo com a fórmula - de Baker Campbell-Hausdorf, pode-se desenvolver a relação C.2 da seguinte forma.

$$(e^{i\theta\hat{s}} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\theta\hat{s}})^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p}{p!} C_p. \quad (C.3)$$

Na equação (C.3) $C_p = [i\theta\hat{s}, C_{p-1}]$, sendo $C_0 = \hat{a}_1^\dagger$. Sabendo que $-\hat{a}_2^\dagger = [\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1^\dagger]$ e $\hat{a}_1^\dagger = [\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2^\dagger]$, a operação de comutação obedece à sequência para C_p , de forma que $C_{par} = i^p \hat{a}_1^\dagger$ e $C_{impar} = i^{p+1} \hat{a}_2^\dagger$. Permitindo desenvolver a seguinte série.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p}{p!} C_p = \sum_{p=par} \frac{\theta^p}{p!} i^p \hat{a}_1^\dagger + \sum_{p=impar} \frac{\theta^p}{p!} i^{p+1} \hat{a}_2^\dagger. \quad (C.4)$$

Abreviando $p(t) \begin{cases} 2t \text{ par} \\ 2t+1 \text{ impar} \end{cases}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta^{2t}}{(2t)!} i^{2t} \hat{a}_1^\dagger + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^{2t+1}}{(2t+1)!} i^{2t+1+1} \hat{a}_2^\dagger \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \theta^{2t}}{(2t)!} \hat{a}_1^\dagger + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1} \theta^{2t+1}}{(2t+1)!} \hat{a}_2^\dagger \\ &= \text{Cos}(\theta) \hat{a}_1^\dagger + \text{Sin}(\theta) \hat{a}_2^\dagger. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Resolvendo agora para $(e^{i\theta\hat{s}} \hat{a}_2^\dagger - i\theta\hat{s})^n$, tem-se $C_{par} = i^p \hat{a}_2^\dagger$ e $C_{impar} = i^{p+1} \hat{a}_1^\dagger$.

Desenvolvendo a seguinte série.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p}{p!} C_p = \sum_{p=par} \frac{\theta^p}{p!} i^p \hat{a}_2^\dagger + \sum_{p=impar} \frac{\theta^p}{p!} i^{p+1} \hat{a}_1^\dagger. \quad (C.6)$$

Aplicando a mesma parametrização $p(t) \begin{cases} 2t \text{ par} \\ 2t+1 \text{ impar} \end{cases}$, obtém-se o seguinte

desenvolvimento.

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta^{2t}}{(2t)!} i^{2t} \hat{a}_1^\dagger + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta^{2t+1}}{(2t+1)!} i^{2t+1+1} \hat{a}_2^\dagger \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \theta^{2t}}{(2t)!} \hat{a}_2^\dagger + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1} \theta^{2t+1}}{(2t+1)!} \hat{a}_2^\dagger \\ &= \text{Cos}(\theta) \hat{a}_2^\dagger - \text{Sin}(\theta) \hat{a}_1^\dagger, \end{aligned} \quad (C.7)$$

obtendo: $(e^{i\theta\hat{s}}\hat{a}_1^\dagger e^{-i\theta\hat{s}})^n = \text{Cos}(\theta)\hat{a}_1^\dagger + \text{Sin}(\theta)\hat{a}_2^\dagger$ e $(e^{i\theta\hat{s}}\hat{a}_2^\dagger e^{-i\theta\hat{s}})^n = \text{Cos}(\theta)\hat{a}_2^\dagger - \text{Sin}(\theta)\hat{a}_1^\dagger$,

substituindo na equação (C.2).

$$e^{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} e^{i\theta\hat{s}} \frac{(\text{Cos}(\theta)\hat{a}_1^\dagger + \text{Sin}(\theta)\hat{a}_2^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\text{Cos}(\theta)\hat{a}_2^\dagger - \text{Sin}(\theta)\hat{a}_1^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle|0\rangle. \quad (\text{C.8})$$

Aplicando a seguinte relação binomial;

$$(\text{Cos}(\theta)\hat{a}_1^\dagger + \text{Sin}(\theta)\hat{a}_2^\dagger)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\hat{a}_1^\dagger \text{Cos}(\theta))^{n-i} (\hat{a}_2^\dagger \text{Sin}(\theta))^i, \quad (\text{C.9})$$

$$(\text{Cos}(\theta)\hat{a}_2^\dagger + \text{Sin}(\theta)\hat{a}_1^\dagger)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\hat{a}_1^\dagger \text{Sin}(\theta))^{n-i} (\hat{a}_2^\dagger \text{Cos}(\theta))^i. \quad (\text{C.10})$$

Substituindo as equações (C.9) e (C.10) em (C.8) e multiplicando a expressão pelos

termos $\sqrt{\frac{[m+n-(j+i)]!}{[m+n-(j+i)]!}}$ e $\sqrt{\frac{(j+i)!}{(j+i)!}}$ obtemos:

$$= e^{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{[m+n-(j+i)]!}{[m+n-(j+i)]!} \frac{(\alpha \text{Cos}(\theta))^{n-i}}{\sqrt{(n-i)!}} \frac{(-\beta \text{Sin}(\theta))^{m-j}}{\sqrt{(m-j)!}} \frac{(\alpha \text{Cos}(\theta))^{n-i}}{\sqrt{(n-i)!}} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n-i}}{\sqrt{(n-i)!}} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n-i}}{\sqrt{(m-j)!}} \sqrt{\frac{(j+i)!}{(j+i)!}} \frac{(\alpha \text{Sin}(\theta))^i}{\sqrt{i!}} \frac{(\beta \text{Sin}(\theta))^j}{\sqrt{j!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n-i}}{\sqrt{i!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n-i}}{\sqrt{j!}} |0\rangle|0\rangle, \quad (\text{C.11})$$

$$= e^{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{(\alpha \text{Cos}(\theta))^{n-i}}{\sqrt{(n-i)!}} \frac{(-\beta \text{Sin}(\theta))^{m-j}}{\sqrt{(m-j)!}} \frac{\sqrt{[m+n-(j+i)]!}}{\sqrt{(n-i)(m-j)!}} |m+n-(j+i)\rangle \frac{(\alpha \text{Sin}(\theta))^i}{\sqrt{i!}} \frac{(\beta \text{Sin}(\theta))^j}{\sqrt{j!}} \frac{\sqrt{(j+i)!}}{\sqrt{ij!}} |j+i\rangle. \quad (\text{C.12})$$

Verifica-se nitidamente que $j+i$ nunca vai ser maior que $m+n$, aplica-se então a seguinte mudança de variável.

$$m+n-(j+i) = q, m+n = l, j+i = w. \quad (\text{C.13})$$

É possível fazer um rearranjo dos termos com essa nova parametrização, pois, q, l e w são variáveis positivas e reais, variando de zero a infinito, implicando ainda na relação $m - j = q - w$. Os novos termos da série permite desenvolver a nova função.

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{w=0}^n \sum_{i=0}^m \frac{(\alpha \cos(\theta))^w (-\beta \sin(\theta))^{q-w}}{\sqrt{w!} \sqrt{(w-q)!}} \sqrt{\binom{q}{w}} |q\rangle \sqrt{\binom{l}{i}} \frac{(\alpha \sin(\theta))^i (\beta \sin(\theta))^j}{\sqrt{i!} \sqrt{(l-i)!}} |l\rangle \\
&= e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{w=0}^n \sum_{i=0}^m \sqrt{q!} \frac{(\alpha \cos(\theta))^w (-\beta \sin(\theta))^{q-w}}{\sqrt{w!} \sqrt{(w-q)!}} |q\rangle \sqrt{l!} \frac{(\alpha \sin(\theta))^i (\beta \sin(\theta))^j}{\sqrt{i!} \sqrt{(l-i)!}} |l\rangle. \quad (C.14)
\end{aligned}$$

Multiplicando (B.14) por $\frac{\sqrt{q!}}{\sqrt{q!}}$ e $\frac{\sqrt{l!}}{\sqrt{l!}}$ retornaremos ao binômio.

$$= e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha \sin(\theta) - \beta \sin(\theta))^q}{\sqrt{q!}} |q\rangle \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha \sin(\theta) + \beta \sin(\theta))^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle. \quad (C.15)$$

Considerando a conservação de energia na saída do divisor de feixe, o operador quântico unitário de rotação terá como resultado final:

$$e^{i\theta\hat{s}} |\alpha\rangle |\beta\rangle = |\alpha \sin(\theta) - \beta \sin(\theta)\rangle |\alpha \sin(\theta) + \beta \sin(\theta)\rangle. \quad (C.16)$$

Analisando (C.16) para $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos a expressão apresentada em (2.14), representado na Figura 2.3 e mostrado na seção 2.5.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta\hat{s}} |\alpha\rangle |\beta\rangle &= \left| \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \left| \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \\
&= \left| \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \beta \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \left| \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \\
|\alpha\rangle |\beta\rangle &= \left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle.
\end{aligned}$$