UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALEX SANDRO LOPES SANTOS

PROBLEMA DE YAMABE MODIFICADO EM VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO QUATRO E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR

FORTALEZA
2017

ALEX SANDRO LOPES SANTOS

PROBLEMA DE YAMABE MODIFICADO EM VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO QUATRO E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR

Tese apresentada ao Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S233p Santos, Alex Sandro Lopes.
Problema de Yamabe Modifcado em Variedades Compactas de dimensão 4 e Métricas Críticas do Funcional Curvatura Escalar / Alex Sandro Lopes Santos. – 2017.
59 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior.

1. Problema de Yamabe. 2. Curvatura Biortogonal. 3. Variedade Compacta. 4. Curvatura Escalar. 5. Variedade Einstein. I. Título.

CDD 510

ALEX SANDRO LOPES SANTOS

PROBLEMA DE YAMABE MODIFICADO EM VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO QUATRO E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR

Tese apresentada ao Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em: 19 de maio de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

À minha família e a João Benício de Melo Neto (In memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade que me foi dada. Em segundo, à minha família que sempre me apoiou e me incentivou, em especial às minhas duas mães Maria da Salete (avó) e Marinalda Sousa Lopes, as quais dedicaram-se ao máximo para minha formação acadêmica e, principalmente, como pessoa.

À minha esposa Yane que sempre me apoiou e por vezes perdeu a paciência comigo, pela falta de tempo, mas sempre me encorajou a seguir em frente.

Aos meus amigos da Pós-graduação, pelos anos de boa convivência e por tornar o ambiente acadêmico mais agradável, Alexandre de Sousa, Antonio Granjeiro, Assis Benjamim, Cleiton Cunha, Davi Lustosa, Diego Eloi, Edvalter Sena, Elzimar Rufino, Emanuel Vieira, Fabrício Oliveira, Ciane Vieira, Halyson Baltazar, Israel Evangelista, Ivaldo Tributino, Kelson Vieira, Marcos Raniere, Renivaldo Senna, Valdir Pereira e Wanderley Pereira.

Aos amigos e colegas de trabalho na Universidade Federal do Piauí (UFPI) em especial a Bruno Vasconcelos, Daniel da Costa e Silva, Francisco Gilberto, João Santos, Anisia Nogueira, Kláudia Craveiro, Erik Rodarte e Antonio José por terem aceito a minha liberação para a conclusão do doutorado.

Aos meus companheiros e amigos que tive oportuniade de dividir apartamento e me ensinaram que a paciência é a melhor das qualidades para uma boa convivência, Israel Evangelista, Franciane Vieira, Maria Vieira e Antonio Aguiar.

Ao meu Orientador Ernani de Sousa Ribeiro Júnior pela compreensão e disponibilidade de ajudar-me sempre que precisei.

Aos professores da Universidade de Federal do Piauí Paulo Alexandre e Rondinele Marcolino por terem aceito o convite de participar da banca.

Ao professores Abdênado Alves de Barros e Rafael Diógenes por aceitarem participar da banca. Agradeço também aos professores da pós-graduação que tive o privilégio de ter como professores durante meu doutorado: Diego Moreira, Fernanda Camargo, Gleydson Ricarte, Antonio Caminha, Daniel Cibotaru e Lev Birbrai.

Ao corpo administrativo da pós-graduação em matemática, em especial à Andrea Dantas e Jessyca Soares pela competência e agilidade.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“A melhor maneira de prever o futuro é criá-lo.”

(Peter Drucker)

RESUMO

Na primeira parte deste trabalho investigamos o problema de Yamabe modificado em variedades de dimensão quatro cujos invariantes modificadores dependem dos autovalores do tensor de Weyl e são descritos em termos do máximo e mínimo da curvatura biortogonal (seccional). Fornecemos algumas propriedades geométricas e topológicas para tais variedades em termos destes invariantes. Na segunda parte investigamos os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao espaço de métricas com curvatura escalar constante e volume unitário, abreviadamente chamamos de métricas CPE. Conjecturou-se na década de 1980 que toda métrica CPE deve ser Einstein. Provamos que tal conjectura é verdadeira sob uma condição de nulidade sobre o divergente de segunda ordem do tensor de Weyl.

Palavras-chave: Problema de Yamabe. Curvatura biortogonal. Variedade compacta. Curvatura escalar. Métricas críticas. Variedade Einstein

ABSTRACT

In the fisrt part of this work we investigate the modified Yamabe problem on four-dimensional manifolds whose the modifiers invariants depending on the eigenvalues of the Weyl curvature tensor and they are described in terms of maximum and minimum of the biorthogonal (sectional) curvature. We provide some geometrical and topological properties on four-dimensional manifolds in terms of these invariants. In the second part we investigate the critical points of the total scalar curvature functional restricted to space of metrics with constant scalar curvature of unitary volume, for simplicity CPE metrics. It was conjectured in the 1980's that every CPE metric must be Einstein. We prove that such a conjecture is true under a second-order vanishing condition on the Weyl tensor.

Keywords: Yamabe problem. Biorthogonal curvature. Compact manifolds. Scalar curvature. Critical metrics. Einstein manifolds

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Comparação com os resultados de Gursky, Chang e Yang (2003) 48

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	11
2	**PRELIMINARES**	18
2.1	**Conceitos básicos de geometria Riemanniana**	18
2.2	**Geometria em dimensão quatro**	21
2.3	**Curvatura biortogonal e o problema de Yamabe modificado**	26
2.4	**Métricas críticas do funcional curvatura escalar total**	30
3	**PROBLEMA DE YAMABE MODIFICADO EM VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO 4**	34
3.1	**Resultados preliminares**	34
3.2	**Resultados principais**	40
4	**MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR E CONDIÇÕES DE NULIDADE SOBRE O TENSOR DE WEYL**	49
4.1	**Resultados Preliminares**	49
4.2	**Resultado Principal**	52
5	**CONCLUSÃO**	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

Sejam M uma variedade suave compacta fechada e $\mathscr{M}$ o conjunto das métricas Riemannianas em M. Um problema clássico em geometria é encontrar uma métrica $g \in \mathscr{M}$ de curvatura escalar constante. Em dimensão dois um resultado clássico de uniformização garante que dada uma superfície Riemanniana (M^2, g) existe uma função suave $u > 0$ em M^2 e uma métrica $\bar{g} = u^2 g$, tais que, $(M^2, \bar{g})$ possui curvatura Gaussiana constante, neste caso a métrica $\bar{g}$ é dita conforme a g. Neste contexto Yamabe (1960) propôs o seguinte problema:

Dada uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$ encontrar uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante.

A resposta afirmativa para esta questão foi obtida combinando resultados de Aubin (1976), Schoen (1984), Trudinger (1968) e Yamabe (1960). Tais resultados têm como peça fundamental o estudo do *invariante de Yamabe*. Mais precisamente, dada uma variedade suave M^n de dimensão n, denote por $[g] = \{\bar{g} \in \mathscr{M} / \bar{g} = u^2 g, u > 0\}$ o conjunto das métricas conformes a uma métrica fixada g. A constante de Yamabe de (M^n, g) é dada por

$$Y(M^n, [g]) = \inf_{\bar{g} \in [g]} \frac{1}{\left(\int_M dV_{\bar{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M R_{\bar{g}} dV_{\bar{g}}.$$

O invariante de Yamabe de M^n é dado por

$$Y(M) = \sup_{[g]} Y(M^n, [g]).$$

Tal invariante aparece em resultados de classificação topológica ou diferenciável de variedades de dimensão $n > 2$.

No caso bidimensional o sinal da característica de Euler já nos fornece uma boa compreensão de tais variedades, em dimensão três, Schoen e Yau (1979) obtiveram uma classificação das variedades compactas com invariante de Yamabe positivo. Em dimensão $n \geq 4$ apenas a positividade do invariante de Yamabe se mostrou uma condição fraca para obter-se uma classificação satisfatória, dessa forma algumas hipóteses adicionais foram consideradas por alguns autores. Por exemplo, em dimensão quatro, Chang, Gursky e Yang (2003) provaram o seguinte resultado.

Teorema *(CHANG et al., 2003) Seja (M^4, g) uma variedade compacta de dimensão quatro com* *invariante de Yamabe positivo. Suponha que*

$$\int_M (|W^+|^2 + |W^-|^2) dV_g < 4\pi^2\chi(M),$$

onde $W^\pm : \Lambda^\pm \to \Lambda^\pm$ *são as partes auto-dual e anti-auto-dual do tensor de Weyl e* $\chi(M)$ *denota a característica de Euler de* M^4*. Então,* M^4 *é difeomorfa a* $\mathbb{S}^4$ *ou* $\mathbb{RP}^4$*.*

Primeiramente, baseado no artigo *Modified Yamabe Problem on* 4*-dimensional Compact Manifolds*, do autor em parceria com Costa e Ribeiro Jr., estudaremos problemas de classificação e algumas estimativas geométrico-topológicas de variedades compactas de dimensão quatro, considerando hipóteses sobre um invariante de Yamabe modificado. Uma extensão do problema de Yamabe foi abordada por Gursky e LeBrun (1998). A ideia é modificar a curvatura escalar da expressão integral da constante de Yamabe por uma função que satisfaz certas propriedades de invariância conforme. Neste contexto, considere para cada métrica $g \in \mathscr{M}$ uma função $f(g) \geq 0$ de classe $C^{0,\alpha}(M)$ satisfazendo a seguinte propriedade de mudança conforme: se $\bar{g} = u^2 g$, então $f(\bar{g}) = u^{-2} f(g)$, nestas condições a curvatura escalar modificada de (M^n, g) é dada por $R_g - f(g)$, onde R_g é a curvatura escalar na métrica g. Usando a curvatura escalar modificada definimos analogamente a constante e o invariante de Yamabe modificados. A geometria global desses invariantes em dimensão quatro foi estudada por Itoh (2005), o qual considerou funções modificadoras dependendo do tensor de Weyl e provou resultados de existência de minimizantes para o problema de Yamabe modificado. Além disso, provou uma relação entre invariante de Yamabe modificado positivo e curvatura escalar modificada positiva. Mais precisamente, sejam $Y_f(M,[g])$ e $Y_f(M)$ a constante de Yamabe modificada e o invariante de Yamabe modificado, respectivamente. Itoh (2005) mostrou que para cada métrica $g \in \mathscr{M}$ existe uma métrica $\bar{g} \in [g]$ com curvatura escalar modificada $R_{\bar{g}} - f(W_{\bar{g}})$ constante. Em particular,

$$R_{\bar{g}} - f(W_{\bar{g}}) = Y_f(M,[g]).$$

Além disso, existe uma métrica $g \in \mathscr{M}$ com curvatura escalar modificada $R_g - f(W_g)$ positiva se, e somente se, $Y_f(M)$ é positivo. Ele ainda provou uma versão do teorema de classificação topológico de Micallef e Moore (1988) observando que a positividade do operador

$$\frac{R_g}{6} - W : \Omega^2(M) \to \Omega^2(M),$$

onde W é o operador de Weyl agindo sobre 2-formas, pode ser escrita em termos das curvaturas escalares modificadas

$$F_g^\pm = R_g - 6w_3^\pm,$$

onde $w_3^{\pm}$ é o maior autovalor da parte auto-dual e anti-auto-dual do operador de Weyl.

Observemos que a norma do tensor Weyl e seus autovalores como funções definidas em M^4 satisfazem a seguinte regra de mudança conforme

$$f(\bar{g}) = u^{-2} f(g),$$

onde $\bar{g} = u^2 g$, desta maneira tais funções surgem como canditados naturais para definirmos curvaturas escalares modificadas. Baseados nisto, iremos considerar na primeira parte do nosso trabalho três funções específicas, a saber:

$$\begin{cases} f_1(W) &= -6(w_1^+ + w_1^-) \\ f_2(W) &= 6(w_3^+ + w_3^-) \\ f_3(W) &= 3(w_3^+ + w_3^-), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $w_i^{\pm}$ são os autovalores dos operadores W^+ e W^-, respectivamente. Tais funções satisfazem a regra de mudança conforme e são não-negativas. Uma peça chave no nosso estudo é a relação dos autovalores do operador de Weyl com a média da curvatura seccional de dois planos perpendiculares (ver Proposição 2.3.1), nos remetendo ao conceito de curvatura biortogonal. Neste sentido, consideremos (M^4, g) uma variedade Riemanniana suave de dimensão quatro, dado um plano $P \subset T_pM^4$, a curvatura (seccional) biortogonal de P é definida por

$$K^{\perp}(P) = \frac{K(P) + K(P^{\perp})}{2},$$

onde $P^{\perp}$ é o plano ortogonal a P. Essa noção de curvatura apareceu em (CHERN, 1955), também foi estudada por Singer e Thorpe (1969) e posteriormente por Gray (1972), Seaman (1991), Noronha (1995) e mais recentemente por Bettiol (2014) e Costa e Ribeiro (2014). As funções que tomam o máximo e o minímo da curvatura biortogonal em cada ponto $p \in M^4$ desempenham um papel fundamental no nosso contexto, denotemos

$$K_1^{\perp}(p) = \min\{K^{\perp}(P); P \subset T_pM\}, \tag{1.2}$$

$$K_3^{\perp}(p) = \max\{K^{\perp}(P); P \subset T_pM\}. \tag{1.3}$$

Usando uma relação entre o máximo e mínimo da curvatura biortogonal com os autovalores do tensor Weyl nossas curvaturas escalares modificadas passarão a depender da curvatura biortogonal, este fato é interessante devido ao caráter de invariância conforme que as funções modificadoras satifazem, pois a curvatura seccional não é um invariante conforme.

Nosso primeiro resultado é um teorema de classificação sob a hipótese do invariante de Yamabe modificado

$$Y_3^{\perp}(M^4,[g]) = \inf_{\overline{g}\in[g]}\left\{\frac{3}{2Vol(M,g)^{\frac{1}{2}}}\int_M(\overline{R}-4\overline{K}_3^{\perp})\,dV_{\overline{g}}\right\} \tag{1.4}$$

ser não negativo.

Teorema *(COSTA et al., 2016) Seja $(M^4,\, g)$ uma variedade Riemenniana de dimensão quatro compacta, orientada e simplesmente conexa com curvatura escalar positiva, tal que, toda 2-forma harmônica tem norma constante. Se $Y_3^{\perp}(M^4,[g]) \geq 0$, então uma das seguintes situações ocorre:*

1. *M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$;*
2. *M^4 é difeomorfa a $\mathbb{CP}^2$;*
3. *ou M^4 é isométrica a $M_1^2 \times M_2^2$, onde cada M_i^2 é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$.*

Nossa hipótese adicional sobre formas harmônicas se torna de certa forma natural uma vez que o teorema de Hodge identifica o espaço das formas harmônicas com o espaço dos grupos de cohomologia de de Rham, os quais, definem propriedades topológicas da variedade.

Consideremos o funcional conformememnte invariante (Ver Proposição 3.1.2) $\mathscr{E}_1^{\perp} : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathscr{E}_1^{\perp}(g) = \int_M \left(R_g - 12K_1^{\perp}\right)^2 dV_g.$$

Obteremos um teorema de classificação com hipótese sobre a limitação de $\mathscr{E}_1^{\perp}$. Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado.

Teorema *(COSTA et al., 2016) Seja (M^4,g) uma variedade Riemanniana de dimensão quatro compacta, orientada e simplesmente conexa. Suponha ainda que a curvatura escalar seja positiva.*

1. *Se $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 96\pi^2$, então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$.*
2. *Se $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 72\pi^2$, então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) = 72\pi^2$ e neste caso, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, $(M^4,\overline{g})$ é isométrica a $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study.*

Finalizando a primeira parte deste trabalho apresentaremos estimativas da característica de Euler (invariante topológico) em função do invariante conforme $\mathscr{W}$ obtido a partir do funcional

$$\mathscr{W}(M,[g]) = \int_M |W_g|^2 dV_g,$$

com hipóteses sobre as constantes de Yamabe clássica e modificada. Ademais, iremos caracterizar os casos "ótimos". Kobayashi (1982) estudou o invariante

$$\mathbf{W}(M) = \inf_{\mathscr{M}} \int_M |W_g|^2 dV_g$$

e demonstrou que o mesmo reflete várias propriedades topológicas da variedade. Observe que se (M^4, g) é localmente conformemente flat, então $\mathbf{W}(M) = 0$. A recíproca, porém, não é verdadeira.

Para o resultado seguinte consideremos as seguintes curvaturas escalares modificadas

$$R_1 = R_g + 6|w_1^+ - w_1^-| \quad \text{e} \quad R_3 = R_g - 3(w_1^+ + w_1^-),$$

com suas respectivas constantes de Yamabe modificada $Y^1(M^4, [g])$ e $Y^3(M^4, [g])$.

Teorema *(COSTA et al., 2016) Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão quatro compacta e orientada.*

1. *Se $Y(M^4, [g]) < 0$ e $Y^1(M^4, [g]) \geq 0$, então*

$$4\pi^2 \chi(M) \leq \mathscr{W}(M, [g]).$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao plano hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^2$ com a métrica de Bergman.

2. *Se $Y(M^4, [g]) < 0$ e $Y^3(M^4, [g]) \geq 0$, então*

$$\frac{16}{3}\pi^2 \chi(M) \leq \mathscr{W}(M, [g]).$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao produto dos planos hiperbólicos $\mathbb{H}_c^2 \times \mathbb{H}_c^2$ com curvatura seccional constante c.

Na segunda parte deste trabalho, baseados no artigo *Critical Metrics of the Scalar Curvature Functional Satisfying a Vanishing Conditions on the Weyl Tensor*, do autor, estudaremos métricas críticas do funcional curvatura escalar total restrito a certas condições, mais precisamente, seja M^n uma variedade compacta e $\mathscr{M}_1$ o conjunto das estruturas Riemannianas de M^n de volume unitário, isto é,

$$\mathscr{M}_1 = \{g : \text{métrica Riemanniana em } M;\ Vol_g(M) = 1\}.$$

Se $g \in \mathscr{M}_1$ definimos o funcional curvatura escalar total ou o funcional de Einstein-Hilbert, $\mathscr{R} : \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$\mathscr{R}(g) = \int_M R_g dV_g, \tag{1.5}$$

onde R_g e dV_g são a curvatura escalar e a forma de volume da métrica g, respectivamente. As métricas críticas do funcional $\mathscr{R}$ são sempre Einstein, para mais detalhes ver Capítulo 4 em (BESSE, 2008). Além disso, o funcional de Einstein-Hilbert restrito a uma classe conforme é simplesmente o funcional de Yamabe, o qual é minimizado pelas métricas com curvatura escalar constante na classe conforme fixada. Em virtude disso é natural considerar o seguinte conjunto

$$\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{M}_1; R_g \text{ é constante}\}.$$

Sob algumas condições genéricas, $\mathscr{C}$ é uma variedade de dimensão infinita (KOISO, 1979), ver também Teorema 4.44 em (BESSE, 2008).

Nos anos 80 conjecturou-se que os pontos críticos do funcional curvatura escalar total $\mathscr{R}$ restrito a $\mathscr{C}$ são sempre Einstein (cf. (BESSE, 2008), p. 127). Neste contexto, a equação de Euler-Lagrange da ação do funcional Einstein-Hilbert restrito a $\mathscr{C}$ pode ser escrita como

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = Ric_g - \frac{R_g}{n} g, \tag{1.6}$$

onde f é uma função suave em M^n e $\mathfrak{L}_g^*$ é o L^2-adjunto da linearização do operador curvatura escalar $\mathfrak{L}_g$ dado por

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta_g f)g + Hess_g f - fRic_g.$$

Em particular, a Equação (1.6) pode ser reescrita como

$$Ric_g - \frac{R_g}{n} g = Hess_g f - \Big(Ric_g - \frac{R_g}{n-1} g\Big) f, \tag{1.7}$$

onde Ric_g, R_g e $Hess_g f$ denotam o tensor de Ricci, a curvatura escalar e o hessiano da função f em (M^n, g), respectivamente. Uma variedade compacta (M^n, g) juntamente com uma função suave f satisfazendo (1.7) é denominada uma *métrica CPE*. Nesses termos a conjectura citada acima pode ser expressa como

Conjectura *Toda métrica CPE é Einstein.*

0Durante as últimas décadas vários autores tentaram resolver tal conjectura, mas até o presente momento apenas respostas parciais foram obtidas, em particular respostas parciais sob condições sobre o tensor de Weyl e do seu divergente, isto é, Weyl harmônico. Por exemplo, Lafontaine (1983) provou a conjectura sob à condição de localmente conformemente flat (i.e., $W=0$) e $Ker\,\mathfrak{L}_g^*(f)\neq 0$. Em 2011 Chang, Hwang and Yun retiraram a condição $Ker\,\mathfrak{L}_g^*(f)\neq 0$, veja Corolário 1.3 em (CHANG *et al.*, 2014). Chang, Hwang e Yun (2014) provaram a conjectura com a hipótese adicional de curvatura harmônica, que no caso de curvatura escalar constante é equivalente ao tensor de Weyl harmônico (i.e., $\mathrm{div}W=0$). Em dimensão quatro, Barros e Ribeiro (2014) provaram a conjectura no caso semi-conformemente flat, isto é, $W^+=0$ ou $W^-=0$. Ainda em dimensão quatro, Barros, Ribeiro Jr e Benedito (2015) provaram o caso $\mathrm{div}W^{\pm}=0$, isto é, uma condição de harmonicidade da parte autodual ou antiautodual do tensor de Weyl. Enquanto Qing e Yuan (2014) obtiveram o resultado para variedades Bach-flat em dimensão qualquer, a condição de nulidade do tensor de Bach pode ser vista como uma condição envolvendo termos de ordem zero e ordem dois do tensor de Weyl. Para mais resultados parciais relacionados a conjectura CPE ver (BENJAMIM, 2015) e (BENEDITO, 2015).

Recentemente Catino, Mastrolia and Monticelli (CATINO *et al.*,) obtiveram uma importante classificação para solitons de Ricci do tipo gradiente assumindo uma condição de nulidade sobre a divergência de quarta ordem do tensor de Weyl. Mais precisamente, provaram que qualquer soliton de Ricci do tipo gradiente de dimensão n (≥ 4) com divergente de quarta ordem do tensor de Weyl nulo (i.e. $\mathrm{div}^4(W)=0$) é Einsten, um quociente finito de $N^{n-k}\times\mathbb{R}^k$ $(k>0)$ ou o produto de uma variedade Einstein N^{n-k} com o shrinking Soliton Gaussiano $\mathbb{R}^k$. Destacamos que

$$\mathrm{div}^4(W)=W_{ijkl,ijkl},$$

onde os índices após a vírgula representam a derivada covariante. Baseados nas ideias desenvolvidas em (CATINO *et al.*,) provamos que a conjectura acima é verdadeira assumindo a hipótese do divergente de segunda ordem do tensor de Weyl nulo, isto é,

$$\mathrm{div}^2W=W_{ijkl,ij}=0.$$

Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema *(SANTOS, 2017) A Conjectura CPE é verdadeira para variedades de dimensão $n\geq 4$ satisfazendo* $\mathrm{div}^2W=0$.

A condição acima é claramente mais fraca que a hipótese de localmente conformemente flat e tensor de Weyl harmônico que são consideradas em (LAFONTAINE, 1983) e (CHANG *et al.*, 2014), respectivamente.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar o material básico necessário para a boa compreensão dos capítulos seguintes. Em tudo o que segue (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel das funções diferenciáves (suaves) ou de classe C^∞ definidas em M será denotado por $C^\infty(M)$.

2.1 Conceitos básicos de geometria Riemanniana

Considerando (M^n, g) uma variedade Riemanniana suave. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves em M, isto é, as seções do fibrado tangente TM. Considerando uma conexão em uma variedade Riemanniana podemos definir um **tensor de curvatura**. Este tensor mede o quanto a variedade em questão deixa de ser plana. Tomando os traços do tensor de curvatura obtemos várias outras noções de curvatura que desempenham um papel fundamental no contexto da geometria Riemanniana, as quais descreveremos em seguida.

O tensor de curvatura é um $(1,3)$-tensor

$$\mathrm{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

definido por

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Para mostrar que o operador acima definido é um tensor, relembramos que a segunda derivada covariante em X e Y é tensorial e um cálculo simples mostra que

$$\mathrm{R}(X,Y)fZ = f\mathrm{R}(X,Y)Z,$$

para toda função f em $C^\infty(M)$. Usando o tensor de curvatura R juntamente com a métrica g definimos o **tensor curvatura de Riemann** ou **tensor curvatura total** como o $(0,4)$-tensor

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

definido por

$$Rm(X,Y,Z,W) = g(\mathrm{R}(X,Y)Z, W),$$

em coordenadas,

$$R_{ijkl} = \mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) := g\left(\mathrm{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right). \tag{2.1}$$

As propriedades do tensor de curvatura e do tensor curvatura de Riemann são dadas na seguinte proposição.

Proposição 2.1.1 *O tensor de curvatura* R *e o tensor curvatura de Riemann Rm satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *Rm é antisimétrico nas duas primeiras e nas duas últimas entradas,*

$$Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W) = -Rm(X,Y,W,Z).$$

2. *Rm é simétrico entre as duas primeiras entradas e as duas últimas,*

$$Rm(X,Y,Z,W) = Rm(Z,W,X,Y).$$

3. R *satisfaz uma propriedade de permutação cíclica, chamada de* ***primeira identidade de Bianchi****,*

$$\mathrm{R}(X,Y)Z + \mathrm{R}(Z,X)Y + \mathrm{R}(Y,Z)X = 0.$$

4. *A derivada covariante ∇R satisfaz uma permutação cíclica, chamada de* ***segunda identidade de Bianchi****,*

$$(\nabla \mathrm{R}_Z)(X,Y)W + (\nabla \mathrm{R}_X)(Y,Z)W + (\nabla \mathrm{R}_Y)(Z,X)W = 0.$$

Dados dois vetores X e Y não nulos e lineramente independentes em T_pM definimos a **curvatura seccional** do plano $P = span\{X,Y\}$ por

$$K(P) = K(X,Y) = \frac{Rm(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)}.$$

O **tensor de Ricci** denotado por Ric é o traço do tensor Rm, em coordenadas,

$$R_{ik} := g_{jl}R_{ijkl}$$

e a **curvatura escalar** R é o traço do tensor de Ricci.

Relembremos alguns tensores importantes no estudo das propriedades de uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$. No que segue iremos adotar a linguagem em coordenadas, primeiramente o tensor de Weyl W, o qual é definido pela seguinte fórmula de decomposição do tensor curvatura de Riemann

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\right) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

O segundo é o tensor de Cotton C que é definido por

$$C_{ijk} = R_{jk,i} - R_{ik,j} - \frac{1}{2(n-1)}\big(R_i g_{jk} - R_j g_{ik}\big). \tag{2.3}$$

Os índices após a vírgula representam a derivação covariante. Para $n \geq 4$ os tensores de Weyl e Cotton satisfazem a seguinte relação

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)} W_{ijkl,l}. \tag{2.4}$$

Além disso, o tensor de Cotton satisfaz as seguintes propriedades

$$C_{ijk} = -C_{jik} \;\text{ e }\; C_{ijk} + C_{jki} + C_{kij} = 0. \tag{2.5}$$

Em particular, pela antisimetria e pelo Lema de Schur, tem-se

$$g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = g^{jk}C_{ijk} = 0. \tag{2.6}$$

Ressaltamos que o tensor de Cotton tem divergente nulo na última entrada, isto é,

$$C_{ijk,k} = 0. \tag{2.7}$$

Relembremos também que o tensor de Bach de uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 4$, o qual foi introduzido por volta de 1920 no estudo de relatividade, é definido em termos das componentes do tensor de Weyl como segue

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} W_{ikjl,lk} + \frac{1}{n-2} R_{lk} W_{ikjl}. \tag{2.8}$$

Em particular, usando (2.4) temos imediatamente

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2}\Big(C_{kij,k} + R_{lk} W_{ikjl}\Big). \tag{2.9}$$

Observe que o tensor de Bach é símetrico e possui traço nulo. Ademais, pelo Lema 5.1 em (CAO; CHEN, 2013) o divergente de B é dado por

$$B_{ij,j} = \frac{n-4}{(n-2)^2} R_{jk} C_{ijk}. \tag{2.10}$$

Em dimensão 3 o tensor de Bach é definido como a divergência do tensor de Cotton, isto é,

$$B_{ik} = C_{jik,j}.$$

2.2 Geometria em dimensão quatro

O estudo das variedade de dimensão quatro é muito intrigante, isso se deve em parte pelos fenômenos particulares desta dimensão. No estudo da classificação de tais variedades sob o aspecto topológico temos grandes contribuições de Freedmam (1982) e Donaldson (1983), seus trabalhos nos dão uma classificação baseada em invariantes homotópicos, em particular topológicos. Nesta seção iremos apresentar noções e conceitos básicos para o entendimento de tais invariantes e sua dinâmica nos resultados que serão usados nos capítulos seguintes.

Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n. Considere o seguinte fibrado

$$\Lambda^k(M) = \cup_{p\in M}\Lambda^k(T_pM).$$

Definição 2.2.1 *O espaço das seções de $\Lambda^k(M)$ é denotado por $\Omega^k(M)$, isto é,*

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Omega^k(M)).$$

Elementos de $\Omega^k(M)$ são chamadas de k-formas diferenciais, ou simplesmente, k-formas.

As $k-$formas desempenham um papel fundamental na decomposição do tensor de curvatura, principalmente no caso de dimensão quatro, como veremos adiante. Relembremos que operador estrela de Hodge é uma única aplicação linear $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$ que satisfaz a identidade

$$\omega\wedge *\eta = \langle\omega,\eta\rangle_g dV_g.$$

Em particular, no contexto de dimensão quatro o operador estrela de Hodge é um endomorfismo sobre o fibrado das 2-formas $\Omega^2(M)$, isto é,

$$*:\Omega^2(M)\to\Omega^2(M),$$

além disso, satisfaz $*^2 = Id_{\Omega^2}$, dessa forma o operador estrela de Hodge decompõe o fibrado das $2-$formas nos autoespaços referentes aos autovalores 1 e -1. De maneira mais precisa temos a seguinte decomposição

$$\Omega^2(M) = \Lambda^+M\oplus\Lambda^-M, \tag{2.11}$$

onde $\Lambda^+M = \{\alpha\in\Omega^2(M); *\alpha=\alpha\}$ é a parte autodual de $\Omega^2(M)$ e $\Lambda^-M = \{\alpha\in\Omega^2(M); *\alpha = -\alpha\}$ é a parte antiautodual de $\Omega^2(M)$. Além disso, podemos definir o operador curvatura $\mathfrak{R}$

agindo nas $2-$formas a partir do tensor de Riemann Rm como

$$\mathfrak{R}\omega = \sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_{ij},$$

a decomposição em (2.11) permite escrever o operador curvatura como

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_+^+ + \mathfrak{R}_-^- + \mathfrak{R}_-^+ + \mathfrak{R}_+^-$$

onde os termos $\mathfrak{R}_\pm^\pm$ são exatamente as partes que preservam $(\mathfrak{R}_+^+, \mathfrak{R}_-^-)$ ou invertem $(\mathfrak{R}_-^+, \mathfrak{R}_+^-)$ a decomposição acima. Usando a decomposição algébrica do tensor de curvatura total Rm juntamente com a decomposição descrita acima obtemos uma decomposição baseada em dualidade do tensor de Weyl

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

onde W^+ é a parte autodual e W^- é a parte antiautodual. Ademais, fixado um ponto, podemos diagonalizar $W^\pm$ de modo que $w_i^\pm, 1 \leq i \leq 3$, são seus respectivos autovalores. Em particular, satisfazem

$$w_1^\pm \leq w_2^\pm \leq w_3^\pm \quad \text{e} \quad w_1^\pm + w_2^\pm + w_3^\pm = 0. \tag{2.12}$$

A decomposição (2.11) ainda nos diz que o operador de curvatura $\mathfrak{R}$ pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\mathfrak{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{R}{12}I & \mathring{Ric} \\ \hline \mathring{Ric}^* & W^- + \frac{R}{12}I \end{array}\right), \tag{2.13}$$

onde $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{4}g$ é o tensor de Ricci sem traço e $\mathring{Ric}^*$ é a adjunta de $\mathring{Ric}$. Para mais detalhes ver (BESSE, 2008).

Uma importante ferramenta no estudo de restrições topológicas via propriedades geométricas de uma variedade é o estudo dos grupos de Cohomologia de *de Rham* combinados com fórmulas do tipo *Weintzenböck*, nesse contexto as formas harmônicas surgem de maneira natural em função do teorema de Hodge que descreveremos mais adiante. Relembremos a definição de grupo de Cohomologia de *de Rham*.

Definição 2.2.2 *O p-ésimo grupo de cohomologia de* de Rham *de uma variedade M^n é o espaço quociente (vetorial)*

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathscr{Z}^p(M)}{\mathscr{B}^p(M)},$$

onde

$$\mathscr{Z}^p(M) = Ker[d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)] = \{p\text{-formas fechadas em } M\}$$

e

$$\mathscr{B}^p(M) = Im[d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)] = \{p\text{-formas exatas em } M\}.$$

No caso de M ser compacta o teorema a seguir nos fornece uma maneira precisa de escolher um representante sem ambiguidade e com uma característica particular (p-forma harmônica).

Teorema 2.2.1 (Hodge) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então toda classe de Cohomologia de de Rham em $H^p_{dR}(M)$ $(0 \leq p \leq n = dimM)$ possui exatamente uma p-forma harmônica.*

A dificuldade do resultado acima está na demonstração da existência de tal representante em uma dada classe de cohomologia, a qual pode ser feita usando cálculo variacional a fim de encontrar um minimizante para um certo funcional sobre tal classe. A unicidade segue de um cálculo direto usando as propriedades da diferencial d e de seu adjunto a codiferencial d^*. De fato, considere $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(M)$ cohomólogas e harmônicas, assim

$$\begin{aligned}
(\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2) &= (\omega_1 - \omega_2, d\eta) \\
&= (d^*(\omega_1 - \omega_2), \eta) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao fato de toda p-forma harmônica ($\Delta\omega = 0$) ser fechada ($d\omega = 0$) e cofechada ($d^*\omega = 0$). Uma consequência do teorema de Hodge é a finitude da dimensão dos grupos de cohomologia como espaços vetoriais, este fato nos permite definir de maneira concisa o seguinte invariante

Definição 2.2.3 *O p-ésimo número de Betti de uma variedade M^n é dado por*

$$b_p = dimH^p_{dR}(M).$$

Os números de Betti são importantes invariantes homotópicos com um papel fundamental no estudo da classificação topológica de variedades. No caso de M^n ser uma variedade compacta e orientada de dimensão n temos uma simplificação para tais invariantes devida a *dualidade de Poincaré* que afirma que o p-ésimo número de Betti é igual ao $(n-p)$-ésimo número de Betti, isto é, vale a seguinte relação:

$$b_p = b_{n-p}.$$

Outro importante invariante topológico no estudo da classificação de variedades é a **característica de Euler** $\chi(M)$, a qual admite uma representação via números de Betti, mais precisamente, se M^n é uma variedade compacta e orientada vale a seguinte identidade

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p. \tag{2.14}$$

Se $n = 4$, pela teoria básica de cohomologia de de Rham $b_p = 0$ para $p > 4$. Ademais, se considerarmos M^4 orientada e simplesmente conexa pela dualidade de Poincaré temos

$$b_1 = b_3 = 0 \quad \text{e} \quad b_0 = b_4 = 1.$$

Neste caso a expressão (2.14) é consideravelmente simplificada

$$\chi(M) = b_2 + 2.$$

Isto mostra que no caso de dimensão quatro a informação topológica das variedades orientadas e simplesmente conexas está no segundo grupo de cohomologia de de Rham. Pelo Teorema (2.2.1) $H^2_{dR}(M)$ é isomorfo ao espaço das 2-formas harmônicas, denotemos por $\mathscr{H}(M)$ tal espaço. O espaço das formas harmônicas por sua vez admite uma decomposição baseada em dualidade como está descrito na seguinte proposição.

Proposição 2.2.1 *O operador estrela de Hodge comuta com o operador Laplaciano (Beltrami) em $\Omega^p(M)$, isto é,*

$$\Delta * = * \Delta.$$

Demonstração: Demonstraremos o caso de dimensão quatro e os operadores agindo em 2-formas, pois este é o caso que nos interessa. Mas, de fato, a comutatividade vale em geral para qualquer p-formas em qualquer dimensão. Como

$$\Delta = dd^* + d^*d,$$

onde d é a diferencial e d^* o codiferencial, o qual podemos escrever como $d^* = -*d*$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta * &= (dd^* + d^*d)* \\
&= (d(-*d*) + (-*d*)d)* \\
&= -d*d*^2 - *(d*)^2 \\
&= -d*d + *d(-*d*)d \\
&= *(-*d*)d + *d(-*d*)d \\
&= *\Delta,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $*^2 = Id_{\Omega^2(M^4)}$. □

A proposição acima nos garante a seguinte decomposição para o espaço das 2-formas harmônicas

$$\mathscr{H}(M) = \mathscr{H}^+ \oplus \mathscr{H}^-,$$

nos fornecendo dois invariantes fundamentais no estudo das variedades em dimensão quatro. A saber, denotamos

$$b^+ = dim\mathscr{H}^+ \quad \text{e} \quad b^- = dim\mathscr{H}^-.$$

Assim o segundo número de Betti se escreve como $b_2 = b^+ + b^-$. Os trabalhos de Freedman (1982) e Donaldson (1983) nos fornecem uma classificação topológica das variedades de dimensão quatro baseada na seguinte definição.

Definição 2.2.4 *Uma variedade suave M^4 compacta e orientada é dita positiva (respectivamente, negativa) definite se $b^- = 0$ (respectivamente, se $b^+ = 0$). Se $b^+ = 0$ ou $b^- = 0$ dizemos simplesmente que a variedade é definite.*

Como consequência dos trabalhos de Freedman e Donaldson temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.2 *(FREEDMAN (1982), DONALSON (1983)). Seja M^4 uma variedade de dimensão quatro compacta e simplesmenste conexa. Se M^4 é definite, então é homeomorfa a:*

i. $\mathbb{S}^4$, se o segundo número de Betti $b_2 = 0$, ou

ii. Soma conexa $\mathbb{CP}^2\sharp...\sharp\mathbb{CP}^2$($b_2$vezes), se $b_2 > 0$.

2.3 Curvatura biortogonal e o problema de Yamabe modificado

Um conceito central no nosso contexto é o de curvatura (seccional) biortogonal, esta noção de curvatura, como iremos ver adiante, está entre a curvatura seccional e a curvatura escalar, não influenciando a curvatura de Ricci. Considere $p \in M^4$ e $P \subset T_pM$ um plano, se denotarmos por $K(P)$ a curvatura seccional do plano P, então temos a seguinte definição

Definição 2.3.1 *A curvatura (seccional) biortogonal de P é dada por*

$$K^{\perp}(P) = \frac{K(P) + K(P^{\perp})}{2}, \tag{2.15}$$

onde $P^{\perp}$ é o plano ortogonal a P.

Como nossa variedade tem dimensão quatro a escolha de um plano, isto é, de um subespaço bidimensional em T_pM, garante a consistência da definição acima. Existem definições de curvatura neste mesmo sentido em dimensões arbitrárias, para maiores detalhes veja (BETTIOL, 2014 e COSTA, RIBEIRO JR., 2014).

A soma de curvaturas de planos ortogonais foi considerada por Chern (1955), Singer e Thorpe (1969), também foram estudadas por Gray (1972), Seaman (1991) e Noronha (1995). Porém, apenas em (COSTA, 2004), (COSTA; RIBEIRO, 2014) e (BETTIOL, 2014) que o termo curvatura biortogonal foi introduzido. Surpreendentemente, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ com sua métrica canônica tem curvatura biortogonal positiva, o que mostra que a positividade da curvatura biortogonal não implica na positividade da curvatura de Ricci. De fato, curvatura biortogonal positiva é uma condição intermediária entre curvatura seccional positiva e curvatura escalar positiva. Ademais, uma variedade compacta de dimensão quatro é Einstein se, e somente se, $K^{\perp} = K$ (SINGER; THORPE, 1969), isto é, estudar curvatura biortogonal no caso Einstein é equivalente a estudar simplesmente a curvatura seccional.

Em seguida iremos deduzir algumas expressões que relacionam a curvatura biortogonal com os autovalores do operador de Weyl. Para isso, consideremos as seguintes funções

$$K_1^{\perp}(p) = \min\{K^{\perp}(P); P \subset T_pM\}, \tag{2.16}$$

$$K_3^{\perp}(p) = \max\{K^{\perp}(P); P \subset T_pM\} \tag{2.17}$$

e

$$K_2^{\perp}(p) = \frac{R(p)}{4} - K_1^{\perp}(p) - K_3^{\perp}(p). \tag{2.18}$$

Estas funções foram definidas primeiramente por Costa e Ribeiro Jr em (COSTA; RIBEIRO, 2014) onde os autores estudam problemas de *pinching* substituindo a curvatura seccional pela curvatura (seccional) biortogonal. Por exemplo, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 2.3.1 *(COSTA; RIBEIRO, 2014) Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientável com curvatura escalar positiva satisfazendo $K_1^{\perp} \geq R/24$. Então uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *(M^4, g) é difeomorfa a soma conexa $\mathbb{S}^4 \sharp (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3)/G_1 \sharp \ldots \sharp (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3)/G_n$, onde cada G_i é um subgrupo discreto do grupo de isometria de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$;*
2. *ou (M^4, g) é isométrica ao plano projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Study-Fubini.*

Observação 2.3.1 *A métrica de Study-Fubini surge naturalmente na construção do espaço projetivo complexo como o espaço quociente $\mathbb{CP}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1$ age pela multiplicação por escalar complexo. Tal métrica possui a propriedade de ter a curvatura seccional $1/4-$pinçada, isto é, $1 \leq K \leq 4$. Para mais detalhes ver (SCORPAN, 1974).*

Portanto, como consequência do Teorema 2.3.1 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.1 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientável com curvatura escalar positiva satisfazendo $K_1^{\perp} \geq R/24$. Se M^4 tem grupo fundamental finito, então*

1. *(M^4, g) é difeomorfa a $\mathbb{S}^4$;*
2. *ou (M^4, g) é isométrica ao plano projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Study-Fubini.*

O resultado acima está relacionado com a seguinte conjectura (cf. (SCHOEN; YAU, 1994) Problema 12, pág. 369).

Conjectura 2.3.1 *(SCHOEN; YAU, 1994) Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e R_0 a curvatura escalar normalizada de M^n. Se $K_{min} > \dfrac{n-1}{n+2} R_0$, onde K_{min} é o mínimo da curvatura seccional em um ponto fixado, então M^n é difeomorfa a esfera canônica $\mathbb{S}^n$.*

O Corolário 2.3.1 nos fornece uma reposta parcial em dimensão quatro da conjectura do problema de pinching proposto por Yau, considerando a curvatura biortogonal. Além disso, com suas métricas canônicas, as variedades $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{CP}^2$ e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ tem $K_1^{\perp} = \frac{R}{12}$, $K_1^{\perp} = \frac{R}{24}$ e $K_1^{\perp} = \frac{R}{12}$, respectivamente. Para maiores detalhes veja (COSTA; RIBEIRO, 2014).

A próxima proposição relaciona as funções (2.16), (2.18) e (2.17) com a curvatura escalar e os autovalores das partes autoduais e antiautoduais $W^{\pm}$ do tensor de Weyl.

Proposição 2.3.1 *(COSTA (2004); COSTA e RIBEIRO (2014)) Seja (M^4,g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então*

$$K_1^{\perp} = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2} + \frac{R}{12}, \tag{2.19}$$
$$K_3^{\perp} = \frac{w_3^+ + w_3^-}{2} + \frac{R}{12} \tag{2.20}$$

e

$$K_2^{\perp} = \frac{w_2^+ + w_2^-}{2} + \frac{R}{12}. \tag{2.21}$$

Demonstração: Seja $p \in M^4$ e $X,Y \in T_pM$ ortonormais. Então, existe uma 2-forma unitária $\alpha = X \wedge Y$, a qual pode ser unicamente decomposta como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $\alpha^{\pm} \in \Lambda^{\pm}M$ com $|\alpha^{\pm}| = \frac{1}{2}$. Assim, de (2.13) temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\alpha) &= \begin{pmatrix} W^+ + \frac{R}{12}I & \mathring{Ric} \\ \mathring{Ric}^* & W^- + \frac{R}{12}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} W^+(\alpha^+) + \frac{R}{12}\alpha^+ + \mathring{Ric}(\alpha^-) \\ \mathring{Ric}^*(\alpha^+) + W^-(\alpha^-) + \frac{R}{12}\alpha^- \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, a curvatura seccional de α é dada por

$$\begin{aligned}
K(\alpha) &= \langle \mathfrak{R}(\alpha), \alpha \rangle \\
&= \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \frac{R}{12}\langle \alpha^+, \alpha^+ \rangle + \langle \mathring{Ric}(\alpha^-), \alpha^+ \rangle \\
&\quad + \langle \mathring{Ric}^*(\alpha^+), \alpha^- \rangle + \langle W^-(\alpha^-), \alpha^- \rangle + \frac{R}{12}\langle \alpha^-, \alpha^- \rangle \\
&= \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle + 2\langle \alpha^+, E(\alpha^-) \rangle.
\end{aligned}$$

Então, para $\alpha^{\perp} = \alpha^+ - \alpha^-$, temos

$$K(\alpha^{\perp}) = \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle - 2\langle \alpha^+, E(\alpha^-) \rangle.$$

Portanto, fazendo a média das equações acima, concluímos que

$$\frac{K(\alpha) + K(\alpha^{\perp})}{2} = \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle. \tag{2.22}$$

Logo, usando (2.16) obtemos

$$K_1^{\perp} = \frac{R}{12} + \min\left\{ \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle ; |\alpha^+|^2 = \frac{1}{2} \right\} + \min\left\{ \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle ; |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

Além disso, usando a Proposição 2.1 de Noronha (1997), podemos concluir que existe uma base ortonormal de $\Lambda^2(M)$ dado por

$$\{X_1 \wedge Y_1, X_2 \wedge Y_2, X_3 \wedge Y_3, X_4 \wedge Y_4\},$$

onde $X_i, Y_i \in T_pM$ para todo $i = 1,2,3,4$. Daí, pela Proposição 2.5 de Noronha (1997), concluímos que

$$K_1^{\perp} = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

De maneira similar prova-se que

$$K_3^{\perp} = \frac{w_3^+ + w_3^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

Finalmente, de (2.18) segue que

$$K_2^{\perp} = \frac{w_2^+ + w_2^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

□

A Proposição 2.3.1 nos diz que M é localmente conformemente flat se, e somente se, $K_1^{\perp} = \frac{R}{12}$. Baseados nos trabalhos de Gursky e LeBrun (1998), Cheng e Zhu (2014), bem como Itoh (2005), estudaremos o problema de Yamabe modificado em termos de um funcional dependendo do tensor de Weyl. Mais precisamente, considere f uma função de classe $C^{0,\alpha}(M)$ dependendo do tensor de Weyl, tal que, para cada métrica $g \in \mathscr{M}$ satisfaz às seguintes condições

$$\begin{cases} f(W_g) \geq 0; \\ f(W_{\overline{g}}) = u^{-2} f(W_g), \text{ quando } \overline{g} = u^2 g \end{cases}. \tag{2.23}$$

Nessas condições, podemos definir o funcional de Yamabe modificado, o qual é dado por

$$Y_f(M,g) = \frac{1}{Vol(M,g)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M (R_g - f(W_g))\, dV_g, \tag{2.24}$$

onde $R_g - f(W_g)$ é chamado de **curvatura escalar modificada** de (M,g). De maneira similar ao caso do problema de Yamabe, podemos definir a constante de Yamabe modificada e o invariante de Yamabe modificado. Se denotarmos por $[g]$ a classe conforme de g, então temos a seguinte definição.

Definição 2.3.2 *A* ***constante de Yamabe modificada*** *e o* ***invariante de Yamabe modificado*** *são dados, respectivamente, pelas seguintes expressões:*

$$Y_f(M,[g]) = \inf_{\overline{g} \in [g]} \{Y_f(M, \overline{g})\} \tag{2.25}$$

e

$$Y_f(M) = \sup_{g\in\mathscr{M}} \{Y_f(M,[g])\}. \tag{2.26}$$

Observe que considerando a função f nãp negativa temos a seguinte relação entre as constantes de Yamabe clássica e modificada

$$Y_f(M,[g]) \leq Y(M,[g]).$$

Em (ITOH, 2005) foram consideradas funções com sinal, isto é, funções não positivas ou não negativas no problema modificado e provou-se resultados de existência de minimizantes e a relação entre o sinal da constante de Yamabe modificada e existência de métricas com curvatura escalar mdificada constante. A proposição a seguir nos fornece tais relações.

Proposição 2.3.2 *(ITOH, 2005) Seja M^n uma variedade suave compacta tal que exista uma função f satisfazendo à condição (2.23). Então:*

1. *Para cada $g \in \mathscr{M}$ existe $\overline{g} \in [g]$ com curvatura escalar modificada $R_{\overline{g}} - f(W_{\overline{g}})$ constante. Em particular, $R_{\overline{g}} - f(W_{\overline{g}}) = Y_f(M,[g])$.*
2. *Existe uma métrica $g \in \mathscr{M}$ com curvatura escalar modificada $R_g - f(W_g)$ positiva se, e somente se, $Y_f(M)$ é positivo.*

Demonstração: Para uma prova detalhada, veja Seção 2.2 de (LISTING, 2014). □

2.4 Métricas críticas do funcional curvatura escalar total

Nesta seção estudaremos a equação de estrutura que caracteriza as métricas críticas do funcional curvatura escalar total restrito ao espaço das métricas de volume unitário e curvatura escalar constante e suas consequências, assim como o contexto básico da conjectura CPE.

Seja $\mathscr{M}$ o conjunto das métricas Riemannianas de uma variedade compacta M^n, para cada $g \in \mathscr{M}$ tem-se que R_g é uma função suave em M^n, dessa forma temos a seguinte aplicação $L : \mathscr{M} \to C^\infty(M)$ que associa cada métrica Rienmanniana sua função curvatura escalar. A linearização de L em g é dada por

$$\mathfrak{L}_g(h) = \frac{d}{dt} R_{g+th}|_{t=0} = -\Delta_g tr(h) + div(div(h)) - \langle h, Ric\rangle_g,$$

onde h é um $2-$tensor simétrico. Considerando $\mathfrak{L}_g$ uma aplicação linear do espaço vetorial dos $2-$tensores simétricos $S^2(M)$ no espaço vetorial das funções suaves de M^n podemos usar integração por partes e encontrar o L^2-adjunto $\mathfrak{L}_g^*: C^\infty(M) \to S^2(M)$. De fato, usando coordenadas temos

$$\begin{aligned}
\int_M \mathfrak{L}_g(h) f \, dV_g &= \int_M (-h_{ii,jj} f + h_{ij,ij} f - h_{ij} R_{ij} f) \, dV_g \\
&= \int_M (-h_{ii} f_{jj} + h_{ij} f_{ij} - h_{ij} R_{ij} f) \, dV_g \\
&= \int_M (-g_{kl} h_{kl} f_{jj} + h_{ij} f_{ij} - h_{ij} R_{ij} f) \, dV_g \\
&= \int_M h_{kl} (-f_{jj} g_{kl} + f_{kl} - R_{kl} f) \, dV_g \\
&= \int_M h \mathfrak{L}_g^*(f) dV_g.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{L}_g^*(f) = -\Delta_g f g + Hess_g f - f Ric_g$. Considerando o operador $\mathfrak{L}_g$ e seu L^2-adjunto $\mathfrak{L}_g^*$ temos as seguintes decomposições

$$C^\infty(M) = Im(\mathfrak{L}_g) \oplus Ker(\mathfrak{L}_g^*)$$

e

$$S^2(M) = Im(\mathfrak{L}_g^*) \oplus Ker(\mathfrak{L}_g).$$

Por outro lado, via integração sobre M podemos definir o seguinte funcional.

Definição 2.4.1 *Dada uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) definimos o funcional curvatura escalar total $\mathscr{R}: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ por*

$$\mathscr{R}(g) = \int_M R_g dV_g.$$

O estudo dos pontos críticos deste funcional restrito a alguns subconjuntos específicos de métricas deram origem a alguns resultados e problemas interessantes. Dada uma métrica $g \in \mathscr{M}$ considere uma variação na direção de um $2-$tensor simétrico h, ou seja, $g(t) = g + th$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$. Então calculando a derivada de $\mathscr{R}$ em g e usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_g'(h) &= \int_M (R_{g(t)} dV_{g(t)})' \\
&= \int_M R_g' dV_g + R_g (dV_g)' \\
&= \int_M (-\Delta_g tr(h) + div(div(h)) - \langle h, Ric \rangle_g) dV_g + R_g \frac{1}{2} tr_g(h) dV_g \\
&= \int_M \langle -Ric + \frac{R_g}{2} g, h \rangle_g dV_g.
\end{aligned}$$

Observe que R'_g é simplesmente a linearização da curvatura escalar $\mathfrak{L}_g$ onde usamos o fato de $(dV_g)' = \frac{1}{2}tr_g(h)$. Se g é um ponto crítico de $\mathscr{R}$, então a expressão acima é nula para todo h, assim $Ric = \frac{R_g}{2}g$. Portanto, para $n > 2$ temos que (M^n, g) é Ricci-flat. No caso $n = 2$ sabemos pelo teorema de Gauss-Bonnet que a integral da curvatura Gaussiana é um invariante topológico, assim, fixada uma variedade M^2 a variação do funcional curvatura escalar total é nula.

Consideremos agora o subconjunto de $\mathscr{M}$ das métricas de volume unitário

$$\mathscr{M}_1 = \{g \in \mathscr{M} / Vol_g(M) = 1\}.$$

A derivada do funcional $\mathscr{R}$ restrito a $\mathscr{M}_1$ em g na direção de um $2-$tensor h é dada por

$$\mathscr{R}'_g(h) = \int_M \langle -Ric + \frac{R_g}{n}g, h\rangle_g dV_g.$$

Portanto, a expressão de Euler-Lagrange da restrição é dada por $Ric = \frac{R_g}{n}g$, isto é, os pontos críticos da restrição são exatamente as métricas Einstein.

Pela resolução do problema de Yamabe obtida por Aubin (1976), Schoen (1984), Trudinger (1968) e Yamabe (1960), sabe-se que em cada classe conforme existe uma métrica de curvatura escalar constante, isto é, dada $g \in \mathscr{M}$ existe $\bar{g} = u^2 g$, onde $u \neq 0$ é uma função suave em M, tal que, $R_{\bar{g}}$ é constante. Dessa forma é razoável considerar $\mathscr{C}$ o subconjunto de $\mathscr{M}_1$ das métricas de curvatura escalar constante, isto é,

$$\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{M}_1; R_g \text{ é constante}\}.$$

Koiso (1979) mostrou que sob certas condições genéricas $\mathscr{C}$ é uma variedade de dimensão infinita, mais precisamente, que $\mathscr{C}$ é localmente uma subvariedade de $\mathscr{M}_1$, (cf. Teorema 4.44 em BESSE (2008)). Desta forma é natural se pensar no problema variacional do funcional $\mathscr{R}$ restrito a $\mathscr{C}$. Surge assim a questão de caracterizar as métricas críticas do funcional $\mathscr{R}$ restrito a $\mathscr{C}$. Conjecturou-se por volta de 1980 que as métricas de Einsten são precisamente tais pontos críticos. Uma métrica g é ponto crítico de $\mathscr{R}$ restrito a $\mathscr{C}$ se existe uma função suave ϕ satisfazendo (Ver BESSE (2008))

$$Ric_g - \frac{R_g}{n}g = \mathfrak{L}^*_g(\Delta\phi),$$

fazendo $\Delta\phi = f$ temos a seguinte definição.

Definição 2.4.2 *Uma métrica CPE (critical point equation) é uma tripla (M^n, g, f), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana orientada compacta de dimensão $n \geq 3$, volume unitário e* *curvatura escalar constante e f é uma função em M que satisfaz a seguinte equação de estutura*

$$Ric_g - \frac{R_g}{n}g = Hess_g f - \Big(Ric_g - \frac{R_g}{n-1}g\Big)f, \tag{2.27}$$

onde $Hess_g f$ é o hessiano de f.

Quando $f = 0$ a equação (4.1) se reduz a $Ric_g = \dfrac{R_g}{n}g$, isto é, uma métrica de Einstein. Além disso, a única solução conhecida com f não constante até o presente momento é o caso da esfera canônica $\mathbb{S}^n$ com f sendo uma função altura. De fato, sendo $f = h_v$ a função altura da esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao vetor fixado $v \in \mathbb{R}^{m+1}$, um cálculo simples mostra que $(Hessh_v)_{ij} = -h_v g_{ij}$, assim, a esfera $\mathbb{S}^n$ com a métrica canônica juntamente com a função altura h_v satisfazem a equação (4.1). A conjectura citada anteriormente ficou conhecida como conjectura CPE (ver BESSE (2008)).

Note que, tomando o traço em (4.1) obtemos

$$\Delta_g f + \frac{R_g}{(n-1)}f = 0,$$

portanto, se $\frac{R_g}{(n-1)}$ não é um autovalor positivo do laplaciano, então $f = 0$ e a conjectura é verdadeira, caso contrário f é uma autofunção do laplaciano de média nula e pela teoria espectral, R_g é positivo. Um clássico resultado de Obata nos permite reescrever a conjectura CPE como um problema de rigidez, para esclarecer essa observação relembremos do seguinte resultado.

Teorema 2.4.1 *(OBATA, 1962) Uma variedade Riemenniana compacta de dimensão $n \geq 2$ admite uma função não constante f satisfazendo*

$$Hess_g f = -c^2 f g$$

se, e somente se, a variedade é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n(c)$ de raio $\dfrac{1}{c}$, com $c > 0$.

O teorema acima permite reescrever a conjectura CPE como um resultado de rigidez, isto é,

Conjectura 2.4.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica CPE, então g é Einsten, $M^n = \mathbb{S}(r)^n$ e f é uma função altura.*

Muitas respostas parciais foram obtidas ao longo dos últimos anos para a conjectura CPE, porém, o problema continua em aberto até o presente momento. Para mais detalhes sobre as respostas parciais a cerca da Conjectura CPE veja (LAFONTAINE, 1983), (HWANG, 2003), (HWANG, 2000),(BARROS; RIBEIRO, 2014), (BENJAMIM, 2015), (BENEDITO, 2015) e (BARROS *et al.*, 2015).

3 PROBLEMA DE YAMABE MODIFICADO EM VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO 4

Este capítulo é baseado no artigo *Modified Yamabe Problem on* 4*-dimensional Compact Manifolds*, escrito pelo autor em parceria com E. Costa e E. Ribeiro Jr., no qual é estudado o problema de Yamabe modificado em variedades compactas de dimensão quatro. Seu objetivo é apresentar propriedades geométricas e topológicas, bem como alguns resultados de classificação em variedades compactas de dimensão quatro com hipóteses sobre o *invariante de Yamabe modificado*. Primeiramente apresentaremos alguns resultados preliminares a cerca do funcional $\mathscr{E}_1^{\perp}$, o qual é conformemente invariante (veja Proposição 3.1.2). Além disso, provaremos uma estimativa sobre tal funcional em relação ao funcional de Weyl, e usando o resultado de Gursky (1998) obtemos uma cota superior para o mesmo em função da característica de Euler e da assinatura da variedade. Nosso objetivo principal é obter teoremas de classificação sob a hipótese de curvatura escalar positiva. Neste sentido, o primeiro resultado nos diz que sob a hipótese adicional de não-negatividade do invariante de Yamabe modificado e que toda 2-forma harmônica possua norma constante, uma variedade é homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ ou difeomorfa a $\mathbb{CP}^2$. Em seguida, sob a hipótese de simplesmente conexa, daremos uma classificação topológica de variedades em função de uma estimativa sobre $\mathscr{E}_1^{\perp}$, ainda iremos caracterizar o caso da igualdade como conformemente isométrico a $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study. Finalmente, nosso último resultado dispensa a hipótese de curvatura escalar positiva, em vez disso, supomos que o invariante de Yamabe é negativo e o invariante de Yamabe modificado não negativo. Nessas condições, obtemos uma estimativa da característica de Euler em função do funcional de Weyl, além disso, caracterizamos o caso da igualdade.

3.1 Resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos resultados preliminares que serão usados na demonstração dos teoremas principais. Baseado na notação introduzida no Capítulo 2 considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} f_1(W) &= -6(w_1^+ + w_1^-), \qquad (3.1)\\ f_2(W) &= 6(w_3^+ + w_3^-) \end{aligned}$$

e

$$f_3(W) = 3(w_3^+ + w_3^-)$$

Relembre que os autovalores do operador curvatura de Weyl obedecem a seguinte regra de mudança conforme

$$\bar{w}_i^{\pm} = \frac{1}{u^2} w_i^{\pm},$$

onde $\bar{w}_i^{\pm}$ são os autovalores associados a métrica $\bar{g} = u^2 g$. Assim, as funções acima satisfazem às condições em (2.23). Portanto, para $1 \leq i \leq 3$,

$$R - f_i(W)$$

são curvaturas escalares modificadas. Denotemos as constantes de Yamabe modificadas e os invariantes de Yamabe modificados relacionados as funções f_i por

$$Y_i^{\perp}(M^4,[g]) \quad \text{e} \quad Y_i^{\perp}(M^4), \text{ para } 1 \leq i \leq 3,$$

respectivamente. Em (CHEN e ZUH, 2014), Chen e Zhu consideraram a curvatura escalar modificada associada a função $f(W) = 6\max\{w_3^+, w_3^-\}$. Em particular, tem-se que $R - f(W) > 0$ se, e somente se, M^4 possui curvatura isotrópica não-negativa.

As relações dadas pela Proposição 2.3.1 nos permitem expressar as funções f_1, f_2 e f_3 usando a curvatura biortogonal. A saber, usando (3.1) juntamente com as identidades (2.19), (2.20) e (2.21) podemos reescrever as curvaturas escalares modificadas associadas as funções f_i, $(1 \leq i \leq 3)$, como

$$12K_1^{\perp},\ 2\big(R - 6K_3^{\perp}\big) \ \text{ e } \ \frac{3}{2}\big(R - 4K_3^{\perp}\big),$$

respectivamente. Em particular, se $\overline{K}_1^{\perp}$ e $\overline{K}_3^{\perp}$ são as funções definidas em (2.16) e (2.17) com respeito à métrica $\bar{g}$, temos:

$$Y_1^{\perp}(M^4,[g]) = \inf_{\bar{g}\in[g]} \left\{ \frac{12}{Vol(M,g)^{\frac{1}{2}}} \int_M \overline{K}_1^{\perp} dV_{\bar{g}} \right\}, \tag{3.2}$$

$$Y_2^{\perp}(M^4,[g]) = \inf_{\bar{g}\in[g]} \left\{ \frac{2}{Vol(M,g)^{\frac{1}{2}}} \int_M (\overline{R} - 6\overline{K}_3^{\perp})\, dV_{\bar{g}} \right\} \tag{3.3}$$

e

$$Y_3^{\perp}(M^4,[g]) = \inf_{\bar{g}\in[g]} \left\{ \frac{3}{2Vol(M,g)^{\frac{1}{2}}} \int_M (\overline{R} - 4\overline{K}_3^{\perp})\, dV_{\bar{g}} \right\}. \tag{3.4}$$

A proposição a seguir é uma consequência dos resultados obtidos por Costa e Ribeiro (COSTA; RIBEIRO, 2014).

Proposição 3.1.1 *Seja (M^4,g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada com curvatura escalar positiva e $Y_2^{\perp}(M^4,[g]) \geq 0$. Então um dos seguintes casos ocorre:*

1. *M^4 é difeomorfa a soma conexa $\mathbb{S}^4\sharp(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^3)/G_1\sharp\ldots\sharp(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^3)/G_n$, onde cada G_i é um subgrupo discreto do grupo das isometrias de $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^3$;*
2. *ou existe uma métrica $\bar{g}\in[g]$, tal que, (M^4,g) é isométrica ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study.*

Demonstração: Primeiramente assumimos que $Y_2^{\perp}(M^4,[g]) = Y_2^{\perp}(M^4,[g]) \geq 0$, então usamos a Proposição 2.3.2 para garantir a existência de uma métrica $\overline{g}\in\mathscr{M}$, tal que, $\overline{R}-6\overline{K}_3\geq 0$, assim, usando a demonstração do Teorema 2.3.1 em (COSTA; RIBEIRO, 2014) obtemos o resultado. □

Em (ITOH, 2005) foi provado que se $Y_f(M^4,[g])>0$ é a constante de Yamabe modificada em relação a uma função f, então existe uma métrica $\overline{g}\in[g]$, tal que, $\overline{R}-f(\overline{W})>0$, (veja também Proposição 3 em (GURSKY; LEBRUN, 1998). Ademais, LeBrun (1998) prova que se $\overline{g}\in[g]$ tem curvatura escalar constante negativa ou é uma métrica Einstein e $\overline{R}-f(\overline{W})$ é constante, então $Y_f(M^4,\overline{g}) = Y_f(M^4,g)$ (veja também Corolário 2.4 em (CHEN; ZHU, 2014))). Baseado nos fatos acima citados ressaltamos que se g_1, g_2 e g_3 são as métricas canônicas de $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{CP}^2$ e $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$, respectivamente, então temos as seguintes relações entre o invariante de Yamabe e o invariante de Yamabe modificado:

$$\begin{cases} Y_1^{\perp}(\mathbb{S}^4) = Y_1^{\perp}(\mathbb{S}^4,[g_1]) = Y(\mathbb{S}^4,[g_1]) = Y(\mathbb{S}^4) = 8\pi\sqrt{6}, \\ Y_1^{\perp}(\mathbb{CP}^2) = Y_1^{\perp}(\mathbb{CP}^2,[g_2]) = \frac{1}{2}Y(\mathbb{CP}^2,[g_2]) = \frac{1}{2}Y(\mathbb{CP}^2) = 6\pi\sqrt{2}, \\ Y_1^{\perp}(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2,[g_3]) = Y(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2,[g_3]) - 16\pi = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Enfatizamos que até o presente momento o valor exato de $Y(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)$ não é conhecido. Entretanto, sabemos que $Y(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)\geq Y_1^{\perp}(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)$. Além disso, em (BETTIOL, 2014) provou-se que $Y_1^{\perp}(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)>0$.

Agora definimos o funcional $\mathscr{E}_1^{\perp}$, que como será mostrado é conformemente invariante e está diretamente relacionado com a geometria da variedade. Para cada $g\in\mathscr{M}$ o funcional $\mathscr{E}_1^{\perp}(g)$ é dado por

$$\mathscr{E}_1^{\perp}(g) = \int_M \left(R-12K_1^{\perp}\right)^2 dV_g. \tag{3.6}$$

A proposição a seguir nos fornece algumas propriedades do funcional $\mathscr{E}_1^{\perp}$.

Proposição 3.1.2 *Seja (M^4,g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então temos:*

1. *$\mathscr{E}_1^{\perp}(g)$ é conformemente invariante.*
2. *$\mathscr{E}_1^{\perp}(g)=0$ se, e somente se, (M^4,g) é localmente conformemente flat.*

Demonstração: Note que (2.19) implica

$$R-12K_1^{\perp}=-6(w_1^{+}+w_1^{-}).$$

Daí, denotando $\overline{g}=u^2g$ temos

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1^{\perp}(\overline{g}) &= \int_M \big(\overline{R}-12\overline{K}_1^{\perp}\big)^2 dV_{\overline{g}}\\ &= \int_M \big[-6(\overline{w}_1^{+}+\overline{w}_1^{-})\big]^2 u^4 dV_g\\ &= \int_M \Big[-6\Big(\frac{w_1^{+}}{u^2}+\frac{w_1^{-}}{u^2}\Big)\Big]^2 u^4 dV_g\\ &= \mathscr{E}_1^{\perp}(g).\end{aligned}$$

Assim $\mathscr{E}_1^{\perp}(g)$ é conformemente invariante.

Para demonstrar o segundo item observe que, por definição, $\mathscr{E}_1^{\perp}=0$ se, e somente se, $w_1^{+}+w_1^{-}=0$. Mas como w_1^{+} e w_1^{-} são ambos não-positivos segue que $w_1^{+}=w_1^{-}=0$. Portanto, $W^{\pm}=0$ e (M^4,g) é localmente conformemente flat, finalizando a demonstração da proposição. $\square$

Consideremos agora o funcional $\mathscr{W}:\mathscr{M}\to\mathbb{R}$ definido por

$$\mathscr{W}(g)=\int_M |\,W_g\,|^2\,dV_g. \tag{3.7}$$

Em (KOBAYASHI, 1985) Kobayashi estudou este operador e provou que o invariante

$$\mathbf{W}(M)=\inf\{\mathscr{W}(g);\,g\in\mathscr{M}\}$$

reflete certas propriedades da variedade considerada. Observe que dada uma variedade M^4 denotando por W e $\overline{W}$ os tensores de Weyl associados as métricas g e $\overline{g}=u^2g$, $u\neq 0$, respectivamente. Não é difícil mostrar que

$$|\overline{W}|_{\overline{g}}^2=|W|_{\overline{g}}^2=u^{-4}|W|_g^2$$

e

$$dV_{\overline{g}}=u^4dV_g,$$

portanto, o operador $\mathscr{W}$ é conformemente invariante. Observe que uma variedade localmente conformemente flat tem necessariamente $\mathscr{W}$ identicamente nulo, por outro lado, é importante destacar que $\mathbb{S}^p \times \mathbb{T}^q$, $p,q \geq 2$ não admite métrica localmente conformemente flat e tem $\mathscr{W}(\mathbb{S}^p \times \mathbb{T}^q) = 0$, (ver Teorema 2.1 em (KOBAYASHI, 1985)).

Agora, relembremos que a fórmula da assinatura de Hirzebruch é dada por

$$12\pi^2\tau(M) = \int_M \Big(|W^+|^2 - |W^-|^2\Big) dV_g, \tag{3.8}$$

onde $\tau(M)$ é a assinatura da variedade M^4.

De (3.7) e (3.8) obtemos a conhecida estimativa

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}(g) &= \int_M |\, W_g \,|^2 \, dV_g \\
&= \int_M |\, W_g^+ \,|^2 + |\, W_g^- \,|^2 \, dV_g \\
&= \int_M |\, W_g^+ \,|^2 - |\, W_g^- \,|^2 \, dV_g + 2\int_M |\, W_g^- \,|^2 \, dV_g \\
&\geq 12\pi^2\tau(M)
\end{aligned}$$

Analogamente, $\mathscr{W}(g) \geq -12\pi^2\tau(M)$. Portanto,

$$\mathscr{W}(g) \geq 12\pi^2|\tau(M)|,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a variedade é half-conformememente flat. Em particular, temos

$$W(M) \geq 12\pi^2|\tau(M)|.$$

A estimativa acima mostra que o invariante $W(M)$ obedece certa restrição topológica, o que nos leva a entender o motivo do mesmo refletir algumas propriedades globais da variedade. Em particular, a métrica de Fubini-Study em $\mathbb{CP}^2$ é um minimizante absoluto do funcional $\mathscr{W}$, desde que $\tau(\mathbb{CP}^2) = 1$ e $|\, W_g^- \,| = 0$. Além disso, em Poon (1986) provou que, a menos de isometria conforme, este é o único minimizante em $\mathbb{CP}^2$ com constante de Yamabe positiva (curvatura escalar positiva).

O próximo lema tem um papel crucial no presente contexto nos dando uma relação entre os funcionais $\mathscr{W}$ e $\mathscr{E}_1^{\perp}$.

Lema 3.1.1 *Seja M^4 uma variedade de dimensão quatro compacta e orientada. Então*

$$\mathscr{W}(g) \leq \frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(g),$$

para qualquer métrica Riemanniana g em M.

Demonstração: Como mencionado anteriormente, de (2.12) tem-se $w_1^{\pm} \leq 0$ e $w_3^{\pm} \geq 0$. Além disso, usando o fato que $(w_1^{\pm}+w_2^{\pm}+w_3^{\pm})^2 = 0$ e $w_2^{\pm}+w_3^{\pm} = -w_1^{\pm}$, obtemos

$$(w_2^{\pm})^2 + (w_3^{\pm})^2 = (w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm}.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} |W^+|^2 &= (w_1^+)^2 + (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 \\ &= 2(w_1^+)^2 - 2w_2^+w_3^+. \end{aligned}$$

Desde que $w_1^+w_3^+ \leq w_2^+w_3^+$ e $(w_1^+)^2 = -w_1^+w_3^+ - w_1^+w_2^+$ obtemos

$$\begin{aligned} |W^+|^2 &\leq 2(w_1^+)^2 - 2w_1^+w_3^+ \\ &\leq 6(w_1^+)^2. \end{aligned}$$

Um argumento similar mostra que $|W^-|^2 \leq 6(w_1^-)^2$. Portanto, desde que $w_1^+w_1^- \geq 0$ concluímos que

$$\begin{aligned} \mathscr{W}(g) &= \int_M |W|^2 dV_g \\ &= \int_M \left(|W^+|^2 + |W^-|^2\right) dV_g \\ &\leq \int_M \left(6(w_1^+)^2 + 6(w_1^-)^2\right) dV_g \\ &\leq 6\int_M \left(w_1^+ + w_1^-\right)^2 dV_g. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para finalizar basta combinar as equações (2.19) e (3.9) para obtermos

$$\begin{aligned} \mathscr{W}(g) &\leq \frac{1}{6}\int_M \left(R - 12K_1^{\perp}\right)^2 dV_g \\ &= \frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(g), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Diretamente do lema acima temos

$$\mathrm{W}(M) \leq \frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(M), \tag{3.10}$$

onde $\mathscr{E}_1^{\perp}(M) = \inf_{g\in\mathscr{M}} \mathscr{E}_1^{\perp}(g)$. Usando o Teorema 1.1 de (GURSKY, 1998) obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.3 *Seja* (M^4, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão quatro compacta, orientada com curvatura escalar positiva, satisfazendo* $Y_1^{\perp}(M^4,[g]) > 0$. *Suponha que*

$$\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 8\pi^2(2\chi(M)+3\tau(M)).$$

Então, $b_2 = 0$ *ou* $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) = 8\pi^2(2\chi(M)+3\tau(M))$ *e no último caso existe uma métrica* $\overline{g} \in [g]$, *tal que,* $(M^4,\overline{g})$ *é isométrica ao plano projetivo complexo* $\mathbb{CP}^2$ *com a métrica de Fubini-Study.*

Demonstração: Primeiramente, invocamos (2.19) para obtermos

$$R - 12K_1^{\perp} = -6(w_1^+ + w_1^-) \geq -6w_1^+. \tag{3.11}$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $w_1^- = 0$. Relembremos que $|W^+|^2 \leq 6(w_1^+)^2$ (Ver Lema 3.1.1 e sua prova). Das informações acima deduzimos

$$(R - 12K_1^{\perp})^2 \geq 36(w_1^+)^2 \geq 6|W^+|^2. \tag{3.12}$$

Integrando a expressão acima sobre M, obtemos

$$\frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \geq \int_M |W^+|^2 dV_g. \tag{3.13}$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, $W^- = 0$. Por hipótese temos

$$\frac{4\pi^2}{3}(2\chi(M)+3\tau(M)) \geq \int_M |W^+|^2 dV_g. \tag{3.14}$$

Por outro lado, assumindo que $b^+ \neq 0$, então $b_2 \neq 0$, isto é, $H^+(M^4,\mathbb{R}) \neq 0$. Neste caso o Teorema 1.1 em (GURSKY, 1998) nos fornece

$$\frac{4\pi^2}{3}(2\chi(M)+3\tau(M)) \leq \int_M |W^+|^2 dV_g. \tag{3.15}$$

Portanto, de (3.14) e (3.15) concluímos que $W^- = 0$. Finalmente aplicando o Teorema de Gursky (1998) concluímos que existe $\overline{g} \in [g]$, tal que, $(M^4,\overline{g})$ é Kähler-Einstein, e então usamos o teorema de Hitchin para concluir que $(M^4,\overline{g})$ é isométrico à $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study, concluindo a demonstração. $\square$

3.2 Resultados principais

Passemos agora ao enunciado e demonstrações dos resultados principais deste capítulo.

Teorema 3.2.1 *Seja* (M^4, g) *uma variedade Riemenniana compacta, orientada e simplesmente conexa de dimensão quatro com curvatura escalar positiva, tal que, toda* 2*-forma harmônica tem norma constante. Se* $Y_3^{\perp}(M^4, [g]) \geq 0$, *então uma das seguintes situações ocorre:*

1. M^4 *é homeomorfa a* $\mathbb{S}^4$;
2. M^4 *é difeomorfa a* $\mathbb{CP}^2$;
3. *ou* M^4 *isométrica a* $M_1^2 \times M_2^2$, *onde cada* M_i^2 *é difeomorfo a esfera* $\mathbb{S}^2$.

Demonstração: A primeira parte da demonstração segue de Kotschick (KOTSCHICK, 2001). Por hipótese M é simplesmente conexa, dessa forma pela dualidade de Poincaré tem-se

$$b_1 = b_3 = 0,$$

isto é, toda informação topológica da variedade está no segundo número de Betti, b_2. Ainda por hipótese toda 2-forma harmônica possui norma constante, ou seja, o produto interno de 2-formas harmônicas é constante. De fato, por polarização, dadas duas $2-$formas harmônicas α e ω, tem-se que $\alpha - \omega$ também é harmônica, o que implica que $\langle \alpha, \omega \rangle$ é constante. Isto é consequência da seguinte identidade

$$\langle \alpha - \omega, \alpha - \omega \rangle = |\alpha|^2 + |\omega|^2 - 2\langle \alpha, \omega \rangle.$$

Portanto,

$$b_2 = dim H^2_{dR}(M) = dim \mathscr{H}^2(M) \leq dim \Lambda^2(T_pM) = \binom{4}{2} = 6.$$

Usando o mesmo argumento para cada parcela da decomposição

$$\mathscr{H}^2(M) = \mathscr{H}^+ \oplus \mathscr{H}^-$$

temos que $b_2^{\pm} \in \{0,1,2,3,\}$. Se $b_2^+ > 0$ então existe uma 2-forma harmônica auto-dual não trivial $\alpha \in \Lambda_2^+(M)$. Observe que α tem norma constante, portanto, não se anula em nenhum ponto, logo define uma estrutura simplética em M. Então, pelo Lema de Noether (SCORPAN, 1974, p. 422) temos que $b_2^+ + b_1$ é ímpar. Como $b_1 = 0$, isto implica que b_2^+ é ímpar, mostrando que $b_2^+ > 0$, assim, $b_2^+ = 1$ ou $b_2^+ = 3$.

Suponha agora que $b_2^+ = 3$. Dessa forma, as 2-formas auto-duais harmônicas linearmente independentes em cada ponto trivializam $\Lambda_2^+(T_pM)$ e cada uma delas define uma estrutura quase complexa com primeira classe de Chern trivial. Usando a fórmula

$$c_1^2(M) = 2\chi(M) + 3\sigma(M),$$

obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\chi(M)+3\sigma(M) \\ &= 4+5b_2^+-b_2^- \\ &= 19-b_2^-, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato que $b_2^- \leq 3$. Portanto o caso $b_2^+ = 3$ não ocorre. De maneira análoga $b_2^- = 3$ também não ocorre. Passemos agora a analisar os casos possíveis, a saber, $b_2^\pm \in \{0,1\}$.

Caso I: Se $b_2^+ = b_2^- = 0$, basta utilizarmos o trabalho de Freedman (1982) para concluir que M é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$.

Caso II: Se $b_2^+ = 1$ e $b_2^- = 0$, usamos (OHTA; ONO, 1996) para deduzir que M é difeomorfa a $\mathbb{CP}^2$ ou a uma superfície regrada. Como M tem curvatura escalar positva e $b_2^+ = 1$ implica que a mesma admite uma forma simplética, assim o Teorema 1.1 (OHTA; ONO, 1996) garante que M é difeomorfa a um blow-up de $\mathbb{CP}^2$ ou a uma superfície regrada. Dentre as variedades citadas só resta $\mathbb{CP}^2$, devido a configuração homotópica. O caso $b_2^+ = 0$ e $b_2^- = 1$ é análogo.

Caso III: Finalmente, se $b_2^+ = b_2^- = 1$ podemos tomar 2-formas harmônicas $\alpha^\pm \in \Lambda^\pm(M)$ e sem perda de generalidade podemos assumir que $|\alpha^+| = |\alpha^-| = 1$. Pela fórmula de Weitzenbock temos

$$\langle \Delta\alpha^\pm, \alpha^\pm \rangle = \frac{1}{2}\Delta \mid \alpha^\pm \mid^2 + \mid \nabla\alpha^\pm \mid^2 + \langle (\frac{R}{3} - 2W^\pm)\alpha^\pm, \alpha^\pm \rangle. \tag{3.16}$$

Usando que $w_3^\pm$ é o maior autovalor de $W^\pm$, respectivamente, obtemos

$$\langle W^\pm(\alpha^\pm), \alpha^\pm \rangle \leq w_3^\pm \langle \alpha^\pm, \alpha^\pm \rangle.$$

De acordo com (3.16) deduzimos as seguintes desigualdades

$$0 \geq \mid \nabla\alpha^+ \mid^2 + \left(\frac{R}{3} - 2w_3^+\right) \mid \alpha^+ \mid^2 \tag{3.17}$$

e

$$0 \geq \mid \nabla\alpha^- \mid^2 + \left(\frac{R}{3} - 2w_3^-\right) \mid \alpha^- \mid^2. \tag{3.18}$$

Agora, combinando (3.17) com (3.18) e usando a Proposição 2.3.1, deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \mid \nabla\alpha^+ \mid_g^2 dV_g + \int_M \mid \nabla\alpha^- \mid_g^2 dV_g + \int_M (\frac{2R}{3} - 2w_3^+ - 2w_3^-) dV_g \\ &\geq \int_M \mid \nabla\alpha^+ \mid_g^2 dV_g + \int_M \mid \nabla\alpha^- \mid_g^2 dV_g + \int_M \left(R - 4K_3^\perp\right) dV_g. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por hipótese $Y_3^{\perp}(M^4,[g]) \geq 0$, logo,

$$\int_M \big(R - 4K_3^{\perp}\big) dV_g \geq 0.$$

Portanto, a estimativa acima nos diz que $\alpha^{\pm}$ são paralelas, assim, M é Kähler. Em particular $w_3^+ = R/6$. Usando novamente a Proposição 2.3.1 concluímos que $w_3^- = R/6$, comparando os autovalores do tensor de Weyl nas identidades acima concluímos

$$\frac{R}{6} - w_i^{\pm} \geq 0 \quad i = 1,2,$$

isto é, os dois menores autovalores dos operadores $R/6 - W^{\pm}$ são não-negativos, então pelos resultados de Micallef e Moore (1988), M possui curvatura isotrópica não-negativa.

Finalmente, como $b_2 \neq 0$, se (M,g) fosse irredutível teríamos $b_2 = 1$ (MICALLEF; MOORE, 1988, Teorema 2.1 (b)) chegando a uma contradição. Dessa forma, por (MICALLEF; MOORE, 1988, Teorema 3.1) (M,g) é redutível e seu recobrimento universal $(\tilde{M},\tilde{g})$ é isométrico a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ o que conclui a demonstração. □

Nosso próximo resultado é uma classificação topológica em função de uma estimativa do funcional $\mathscr{E}^{\perp}$. De (GURSKY, 1994) temos que uma variedade M^4 compacta e orientada de dimensão quatro com curvatura escalar positiva satisfaz

$$8\pi^2\Big(\chi(M) - 2\Big) \leq \int_M |W|^2 dV_g. \tag{3.20}$$

Em particular, a igualdade em (3.20) ocorre se, e somente se, M^4 é conformemente isométrica a $\mathbb{S}^4$ com a métrica canônica. De posse deste resultado temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.2 *Seja (M^4,g) uma variedade Riemanniana de dimensão quatro, compacta, orientada e simplesmente conexa. Suponha ainda que a curvatura escalar seja positiva, então:*

1. *Se $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 96\pi^2$, então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$.*
2. *Se $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 72\pi^2$, então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) = 72\pi^2$ e neste caso, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, $(M^4,\overline{g})$ é isométrico a $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.1 temos

$$\mathscr{W}(g) \leq \frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(g).$$

Então, assumindo que (M^4,g) não é conformemente isométrica a $\mathbb{S}^4$, a estimativa (3.20) é estrita e juntamente com a estimativa acima temos

$$8\pi^2\chi(M) - 16\pi^2 < \int_M |W|^2 dV_g \leq \frac{1}{6}\mathscr{E}^{\perp}(g). \tag{3.21}$$

Por hipótese $\mathscr{E}_1^{\perp}(g) \leq 96\pi^2$, isto combinado com (3.21) garante

$$8\pi^2\chi(M) - 16\pi^2 < 16\pi^2,$$

isto é,

$$\chi(M) \leq 3.$$

Como M^4 é simplesmente conexa $(b_1 = 0)$ temos $\chi(M) = 2 + b_2$. Logo, sendo M^4 *definite* temos duas possibilidades, $b_2 = 0$ ou $b_2 = 1$. Pelo trabalho de Freedman (1982), M é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ (caso $b_2 = 0$) ou M é homeomorfa a $\mathbb{CP}^2$ (caso $b_2 = 1$), concluindo a demonstração do primeiro item.

Para o segundo item, relembremos a fórmula da assinatura de Hirzebruch

$$12\pi^2\tau(M) = \int_M \Big(|W^+|^2 - |W^-|^2\Big) dV_g.$$

Usando esta fórmula juntamente com o Lema 3.1.1 e a nossa hipótese, deduzimos

$$\begin{aligned} 12\pi^2\tau(M) &= \int_M \big(|W^+|^2 + |W^-|^2 - 2|W^-|^2\big) dV_g \\ &\leq \frac{1}{6}\mathscr{E}_1^{\perp}(g) - 2\int_M |W^-|^2 dV_g \\ &\leq 12\pi^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Isto implica que $\tau(M) \leq 1$. Observe que a estimativa obtida acima vale independente da orientação, então podemos supor sem perda de generalidade que $\tau(M) \geq 0$ e então concluir que $\tau(M) = 1$ ou $\tau(M) = 0$. Argumentando como no primeiro item, supondo M^4 não é conformemente isométrica a $\mathbb{S}^4$, obtemos que $\chi(M) \leq 3$. Assim, se $\tau(M) = 0$, então $b_2 = 0$ e M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$. Caso contrário, se $\tau(M) = 1$, da estimativa (3.22) obtemos que $W^- \equiv 0$, isto é, (M, g) é auto-dual. Neste caso aplicamos o Teorema A em (POON, 1986) e concluímos que existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, $(M^4, \overline{g})$ é isométrica a $\mathbb{CP}^2$ com a métrica de Fubini-Study. Isto finaliza a prova do segundo item. $\square$

Passemos agora ao último resultado deste capítulo. Em (ITOH, 2005) é considerada a seguinte curvatura escalar modificada

$$R_g^+ := R_g - 6w_1^+,$$

juntamente com a constante de Yamabe modificada correspondente $Y^+(M, [g])$. Observe que a função considerada é não positiva, assim, a relação da constante de Yamabe modificada com a clássica é seguinte

$$Y^+(M, [g]) \geq Y(M, [g]).$$

Denotando por $Y(M)$ o invariante de Yamabe clássico, Itoh provou que se $Y(M,[g]) < 0$ e $Y^+(M.[g]) \geq 0$, então

$$\int_M |W^+|^2 dV_g \geq \frac{4\pi^2}{3}\big(2\chi(M^4) + 3\tau(M^4)\big). \tag{3.23}$$

Ademais, se vale a igualdade em (3.23), então existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, $(M^4, \overline{g})$ ou o seu recobrimento duplo é Kähler-Einstein. Motivados por este contexto introduzimos as seguintes curvaturas escalares modificadas

$$R_1 = R_g + 6|w_1^+ - w_1^-| \ \text{ e } \ R_3 = R_g - 3(w_1^+ + w_1^-), \tag{3.24}$$

as quais dependem de R_g e $K_1^\perp$. Denotemos por $Y^1(M^4, [g])$ e $Y^3(M^4, [g])$ a constante de Yamabe modificada relacionadas as curvaturas escalares modificadas R_1 e R_3, respectivamente. De posse desta notação temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada de dimensão quatro.*

1. *Se $Y(M^4, [g]) < 0$ e $Y^1(M^4, [g]) \geq 0$, então*

$$4\pi^2\chi(M^4) \leq \mathscr{W}(g).$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao plano hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^2$ com a métrica de Bergman.

2. *Se $Y(M^4, [g]) < 0$ e $Y^3(M^4, [g]) \geq 0$, então*

$$\frac{16}{3}\pi^2\chi(M^4) \leq \mathscr{W}(g).$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$, tal que, o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao produto dos planos hiperbólicos $\mathbb{H}^2_c \times \mathbb{H}^2_c$ com curvatura seccional constante c.

Observação 3.2.1 *A métrica de Bergmam é definida em certos tipos de variedades complexas e é construída a partir do kernel de Bergmam. Para mais detalhes ver (KRANTZ, 2013).*

Demonstração: Para a primeira afirmação temos que, por hipótese, $Y(M^4, [g]) < 0$ e neste caso existe uma métrica $\overline{g} \in [g]$ com curvatura escalar negativa constante $R_{\overline{g}}$. Além disso, note que

$$R_{\overline{g}}^2 = R_{\overline{g}}\big(R_{\overline{g}} + 6|\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|\big) - 6R_{\overline{g}}|\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|.$$

Como $Y^1(M^4,[g]) \geq 0$ implica que

$$\int_M \big(R_{\overline{g}} + 6|\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|\big) dV_{\overline{g}} \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}} &\leq R_{\overline{g}} \int_M \big(R_{\overline{g}} + 6|\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|\big) dV_{\overline{g}} - 6\int_M R_{\overline{g}} |\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-| dV_{\overline{g}} && (3.25)\\ &\leq 6\int_M \big(-R_{\overline{g}}|\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|\big) dV_{\overline{g}} \\ &\leq 6\big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\big)^{\frac{1}{2}} \big(\int_M |\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|^2 dV_{\overline{g}}\big)^{\frac{1}{2}}, && (3.26)\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Por outro lado, temos

$$|w_1^{\pm}|^2 \leq \frac{2}{3}|W^{\pm}|^2. \tag{3.27}$$

Além disso, a igualdade vale em (3.27) se, e somente se, $w_3^{\pm} = w_2^{\pm}$. De fato, dado que

$$w_1^+ + w_2^+ + w_3^+ = 0$$

deduzimos

$$(w_1^+)^2 = (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 + 2w_2^+ w_3^+. \tag{3.28}$$

Além disso, temos

$$0 \leq (w_3^+ - w_2^+)^2 = (w_3^+)^2 - 2w_2^+ w_3^+ + (w_2^+)^2. \tag{3.29}$$

Portanto, somando (3.28) com (3.29) obtemos

$$2[(w_2^+)^2 + (w_3^+)^2] \geq (w_1^+)^2.$$

De onde segue que $(w_1^+)^2 \leq \frac{2}{3}|W^+|^2$. Similarmente, temos $(w_1^-)^2 \leq \frac{2}{3}|W^-|^2$ o que prova (3.27). Prosseguindo, usamos (3.27) em (3.25) para obter

$$\begin{aligned} \Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)^2 &\leq 36\Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)\Big(\int_M |\overline{w}_1^+ - \overline{w}_1^-|^2 dV_{\overline{g}}\Big) \\ &\leq 24\Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)\int_M \Big(|\overline{W}^+|^2 + |\overline{W}^-|^2\Big) dV_{\overline{g}}, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}} \leq 24\int_M \big(|\overline{W}^+|^2 + |\overline{W}^-|^2\big) dV_{\overline{g}}. \tag{3.30}$$

Em particular, se a igualdade vale em (3.30), então $R_{\overline{g}} = -6|\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|$ e $\overline{w}_1^+\overline{w}_1^- = 0$, isto é, $(M,\overline{g})$ é half conformemente flat e $R_{\overline{g}} = 6\overline{w}_1^+$ ou $R_{\overline{g}} = 6\overline{w}_1^-$. Agora relembre que pela fórmula de Chern-Gauss-Bonnet a característica de Euler satisfaz a seguinte equação

$$8\pi^2\chi(M) = \int_M \Big(|W^+|^2 + |W^-|^2 + \frac{R^2}{24} - \frac{1}{2}|\mathring{Ric}|^2\Big) dV_g, \tag{3.31}$$

onde $\mathring{Ric}$ é o Ricci sem traço; Veja (BESSE, 2008). Portanto, combinando (3.31) e (3.30) obtemos

$$4\pi^2\chi(M) \leq \mathscr{W}(\overline{g}) = \mathscr{W}(g),$$

onde na última igualdade usamos a invariância conforme de $\mathscr{W}$, provando assim a primeira parte do item 1. Além disso, se a igualdade ocorre concluímos que $(M^4, \overline{g})$ é uma variedade Einstein half conformemente flat. Neste caso, podemos assumir que $\overline{W}^- = 0$. Daí, temos

$$\chi(M) = 3\tau(M)$$

e

$$\overline{w}_2^+ = \overline{w}_3^+ = -R_{\overline{g}}/12.$$

Em outras palavras, $(M^4, \overline{g})$ é uma variedade Einstein com curvatura escalar negativa, tal que, os autovalores do operador de Weyl são constantes. Disto, deduzimos que $(M^4, \overline{g})$ é localmente simétrica e então o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^2$ com a métrica de Bergman, o que finaliza a prova do primeiro item.

Para o segundo item, seguimos os mesmo passos da demonstração do primeiro. De fato, note que

$$R_{\overline{g}}^2 = R_{\overline{g}}\big(R_{\overline{g}} + 3|\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|\big) - 3R_{\overline{g}}|\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|.$$

Em particular, desde que $Y^3(M^4, [g]) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}} &\leq 3\int_M \big(-R_{\overline{g}}|\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|\big) dV_{\overline{g}} \\ &\leq 3\big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\big)^{\frac{1}{2}}\big(\int_M |\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|^2 dV_{\overline{g}}\big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz junto com a estimativa (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} \Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)^2 &\leq 9\Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)\Big(\int_M |\overline{w}_1^+ + \overline{w}_1^-|^2 dV_{\overline{g}}\Big) \\ &\leq 6\Big(\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}}\Big)\int_M \Big(|\overline{W}^+|^2 + |\overline{W}^-|^2\Big) dV_{\overline{g}}, \end{aligned}$$

isto é,

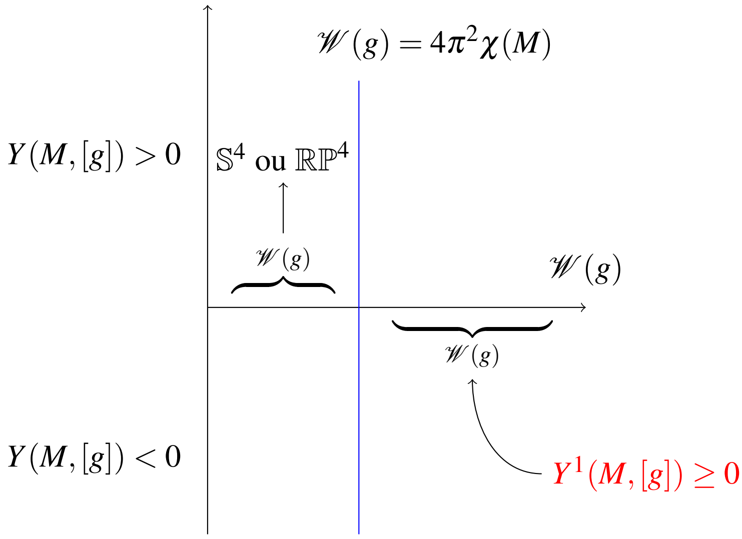
$$\int_M R_{\overline{g}}^2 dV_{\overline{g}} \leq 6 \int_M \left(|\overline{W}^+|^2 + |\overline{W}^-|^2\right) dV_{\overline{g}}. \tag{3.33}$$

Usando a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern concluímos

$$\begin{aligned} \frac{16}{3}\pi^2\chi(M) &\leq \mathscr{W}(\overline{g}) \\ &= \mathscr{W}(g). \end{aligned}$$

Em particular, se a igualdade ocorre $\overline{g}$ é uma métrica Einstein de curvatura escalar negativa satisfazendo $w_3^{\pm} = w_2^{\pm}$ e $R = 3w_1^- = 3w_1^+$. Portanto, pelo mesmo argumento do primeiro item, $(M^4, \overline{g})$ é localmente simétrico. Ademais, os autovalores de $\overline{W}^+$ e $\overline{W}^+$ coincidem o que implica, pela fórmula da assinatura de Hirzebruch, que $\tau = 0$. Portanto, o recobrimento universal de $(M^4, \overline{g})$ é isométrico ao produto dos planos hiperbólicos $\mathbb{H}_c^2 \times \mathbb{H}_c^2$ com curvatura seccional constante c. Isto finaliza a demonstração do teorema. $\square$

Figura 1 – Comparação com os resultados de Gursky, Chang e Yang (2003)



Na figura acima relacionamos o resultado obtido na primeira parte do Teorema 3.2.3 com os resultados obtidos por Gursky, Chang e Yang em 2013.

4 MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR E CONDIÇÕES DE NULIDADE SOBRE O TENSOR DE WEYL

Este capítulo é baseado no artigo *Critical Metrics of the Scalar Curvature Functional Satisfying a Vanish Condition on the Weyl Tensor*, escrito pelo autor, onde estudamos os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito as métricas de volume unitário e curvatura escalar constante sob a condição de harmonicidade do tensor de Cotton, ou equivalentemente, a condição de nulidade do divergente de ordem 2 do tensor de Weyl. Provaremos que sob tais condições a Conjectura CPE é verdadeira.

4.1 Resultados Preliminares

Relembremos que uma métrica *CPE* (M^n, g, f) satisfaz a seguinte equação de estrutura

$$Ric_g - \frac{R_g}{n}g = Hess_g f - \Big(Ric_g - \frac{R_g}{n-1}g\Big)f, \tag{4.1}$$

escrevendo a equação (4.1) em coordenadas, temos

$$R_{ij} - \frac{R_g}{n}g_{ij} = f_{ij} - \Big(R_{ij} - \frac{R_g}{n-1}g_{ij}\Big)f, \tag{4.2}$$

podemos reorganizar os termos para obter

$$(f+1)R_{ij} = f_{ij} + \Big(\frac{R_g}{n} + \frac{R_g f}{n-1}\Big)g_{ij} \tag{4.3}$$

ou, abreviadamente,

$$(f+1)R_{ij} = f_{ij} + \lambda g_{ij}, \tag{4.4}$$

onde $f_{ij} = (Hess f)_{ij}$ é o hessiano de f em coordenadas e $\lambda = \Big(\frac{R_g}{n} + \frac{R_g f}{n-1}\Big)$.

Inspirados nas ideias desenvolvidas em (CATINO *et al.*,) iremos investigar a Conjectura 2.4.1 sob a condição

$$div^2 W = W_{ijkl,ik} = 0.$$

Observe que por (2.4) a condição acima é equivalente a $div(C) = 0$ se $n \geq 4$, isto é, tensor de Cotton harmônico.

Primeiramente relembremos um resultado obtido em (BARROS; RIBEIRO, 2014)

Lema 4.1.1 *(BARROS; RIBEIRO, 2014) Seja* $\big(M^n, g, f\big)$ *uma métrica CPE, então*

$$\begin{aligned}(f+1)C_{ijk} &= W_{ijks}f_s - \frac{R}{(n-2)}\big(f_j g_{ik} - f_i g_{jk}\big) + \frac{(n-1)}{(n-2)}\big(R_{ik}f_j - R_{jk}f_i\big)\\ &\quad - \frac{1}{(n-2)}\big(R_{is}f_s g_{jk} - R_{js}f_s g_{ik}\big).\end{aligned}$$

Seguindo a notação adotada em (BARROS; RIBEIRO, 2014) definimos o tensor T por

$$\begin{aligned}T_{ijk} &= \frac{(n-1)}{(n-2)}\big(R_{ik}f_j - R_{jk}f_i\big) - \frac{1}{(n-2)}\big(R_{is}f_s g_{jk} - R_{js}f_s g_{ik}\big)\\ &\quad - \frac{R}{(n-2)}\big(f_j g_{ik} - f_i g_{jk}\big).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Em particular, adotando tal definição no Lema 4.1.1 obtemos a seguinte identidade

$$(f+1)C_{ijk} = W_{ijks}\nabla^s f + T_{ijk}. \tag{4.6}$$

Em seguida recordemos um resultado obtido em (HWANG, 2000) que trata do conjunto de nível da função potencial f.

Proposição 4.1.1 *(HWANG, 2000) Seja* (M^n, g, f) *uma métrica CPE com* f *não constante. Então, o conjunto* $\{x \in M^n : f(x) = -1\}$ *tem medida nula.*

O lema abaixo nos fornece relações envolvendo o tensor T, a função potencial e os tensores de Cotton, Bach, Weyl e Ricci.

Lema 4.1.2 *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica CPE. Então:*

1. $T_{ijk} = (f+1)C_{ijk} - W_{ijks}f_s$,
2. $T_{ijk,i} = f_iC_{ijk} + (n-2)(f+1)B_{jk} - \frac{(n-3)}{(n-2)}C_{kij}f_i$,
3. $T_{itk,it} = f_iC_{itk,t} + (n-2)f_tB_{tk} - \frac{(f+1)}{n-2}R_{ti}C_{kti}$,
4. $T_{itk,itk} = (f_iC_{itk,t})_{,k} + (n-2)(f_tB_{tk})_{,k} - \frac{R_{ti}}{n-2}(f_kC_{kti} + (f+1)C_{kti,k}) - \frac{(f+1)|C|^2}{2(n-2)}$.

Demonstração: Primeiramente note que o item 1 é simplesmente a equação (4.6). Prosseguindo, para obter o item 2 tomamos a divergência na expressão (4.6) obtendo,

$$T_{ijk,i} = f_iC_{ijk} + (f+1)C_{ijk,i} - W_{ijks}f_{si} - W_{ijks,i}f_s.$$

Portanto, segue de (2.8) e (2.4) que

$$\begin{aligned}T_{ijk,i} &= f_iC_{ijk} + (n-2)(f+1)B_{jk} - (f+1)R_{is}W_{jiks} + W_{jiks}f_{si} - \frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ksj}f_s\\ &= f_iC_{ijk} + (n-2)(f+1)B_{jk} - \lambda g_{si}W_{jiks} - \frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ksj}f_s\\ &= f_iC_{ijk} + (n-2)(f+1)B_{jk} - \frac{(n-3)}{(n-2)}C_{kij}f_i,\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde usamos (4.4) e o fato do tensor de Weyl ter traço nulo.

Passemos a prova do terceiro item. Derivando covariantemente (4.7) e usando novamente (4.4) obtemos

$$\begin{aligned}
T_{ijk,it} &= f_{it}C_{ijk} + f_iC_{ijk,t} + (n-2)(f_tB_{jk} + (f+1)B_{jk,t}) \\
&\quad -\frac{(n-3)}{(n-2)}(C_{ksj,t}f_s + C_{kij}f_{it}) \\
&= (f+1)R_{it}C_{ijk} - \lambda g_{it}C_{ijk} + f_iC_{ijk,t} + (n-2)(f_tB_{jk} + (f+1)B_{jk,t}) \\
&\quad -\frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ksj,t}f_s - \frac{(n-3)}{(n-2)}((f+1)R_{st}C_{ksj} - \lambda g_{it}C_{kij}) \\
&= (f+1)R_{it}C_{ijk} - \lambda C_{tjk} + f_iC_{ijk,t} + (n-2)(f_tB_{jk} + (f+1)B_{jk,t}) \\
&\quad -\frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ksj,t}f_s - \frac{(n-3)}{(n-2)}((f+1)R_{st}C_{ksj} - \lambda C_{ktj}).
\end{aligned}$$

Em particular, tomando o traço na expressão acima com respeito aos índices j e t, usando a antisimetria e o fato do tensor de Cotton ter traço nulo, deduzimos

$$\begin{aligned}
T_{itk,it} &= (f+1)R_{it}C_{itk} - \lambda C_{ttk} + f_iC_{itk,t} + (n-2)(f_tB_{tk} + (f+1)B_{tk,t}) \\
&\quad -\frac{(n-3)}{(n-2)}C_{kst,t}f_s - \frac{(n-3)}{(n-2)}((f+1)R_{st}C_{kst} - \lambda C_{ktt}) \\
&= f_iC_{itk,t} + (n-2)(f_tB_{tk} + (f+1)B_{tk,t}) - \frac{(n-3)}{(n-2)}(f+1)R_{it}C_{kit}.
\end{aligned}$$

Assim, usando (2.10) concluímos a prova do item 3.

Para finalizar, tomando o divergente na equação do terceiro item e usando as simetrias do tensor de Cotton novamente, deduzimos

$$\begin{aligned}
T_{itk,itk} &= (f_iC_{itk,t})_{,k} + (n-2)(f_tB_{tk})_{,k} \\
&\quad -\frac{1}{n-2}\big((f+1)R_{ti,k}C_{kti} + (f+1)R_{ti}C_{kti,k} + f_kR_{ti}C_{kti}\big) \\
&= (f_iC_{itk,t})_{,k} + (n-2)(f_tB_{tk})_{,k} \\
&\quad -\frac{1}{n-2}\big((f+1)R_{ti,k}C_{kti} + (f+1)R_{ti}C_{kti,k} + f_kR_{ti}C_{kti}\big) \\
&= (f_iC_{itk,t})_{,k} + (n-2)(f_tB_{tk})_{,k} - \frac{(f+1)|C|^2}{2(n-2)} \\
&\quad -\frac{R_{ti}}{n-2}\big((f+1)C_{kti,k} + f_kC_{kti}\big),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\begin{aligned}
2R_{ti,k}C_{kti} &= R_{ti,k}C_{kti} - R_{ti,k}C_{tki} \\
&= R_{ti,k}C_{kti} - R_{ki,t}C_{kti} \\
&= C_{kti}(R_{ti,k} - R_{ki,t}) = |C|^2,
\end{aligned}$$

o que implica

$$R_{ti,k}C_{kti} = \frac{1}{2}|C|^2. \qquad (4.8)$$

Finalizando a prova do lema. □

4.2 Resultado Principal

Passemos a demonstração do resultado principal deste capítulo, onde provamos que a hipótese sobre a segunda divergência do tensor de Weyl é suficiente para que um métrica CPE seja isométrica a esfera canônica $\mathbb{S}^n$ com a função potencial sendo uma função altura. A demonstração é baseada na seguinte fórmula integral para métricas CPE de dimensão $n \geq 4$.

Lema 4.2.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica CPE com $n \geq 4$, então temos a seguinte fórmula integral:*

$$\int_M (f+1)^2|C|^2\,dV_g = -\int_M (f+1)^2 div^3(C)\,dV_g - 2\int_M (divC)(\nabla f, \nabla f)\,dV_g. \qquad (4.9)$$

Demonstração: Multiplicando a equação obtido no item 4 do Lema 4.1.2 por $(f+1)$ e integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\int_M (f+1)T_{itk,itk}\,dV_g &= -\int_M f_k f_i C_{itk,t}\,dV_g - (n-2)\int_M f_t f_k B_{tk}\,dV_g - \frac{1}{n-2}\int_M (f+1)f_k C_{kti}R_{ti}\,dV_g \\ &\quad -\frac{1}{n-2}\int_M (f+1)^2 R_{ti}C_{kti,k}\,dV_g - \frac{1}{2(n-2)}\int_M (f+1)^2|C|^2\,dV_g. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Por outro lado, segue do Lemma 4.1.2 item (3) que

$$\begin{aligned}\int_M (f+1)T_{itk,itk}\,dV_g &= -\int_M f_k T_{itk,it}\,dV_g \\ &= -\int_M f_k f_i C_{itk,t}\,dV_g - (n-2)\int_M f_k f_t B_{tk}\,dV_g - \frac{(f+1)}{n-2}R_{ti}C_{kti}\,dV_g \\ &\quad +\frac{1}{n-2}\int_M (f+1)f_k R_{it}C_{kti}\,dV_g. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Assim, substituindo (4.10) em (4.11) obtemos

$$\begin{aligned}\int_M (f+1)f_k R_{it}C_{kti}\,dV_g &= -\int_M f_k(f+1)R_{it}C_{kti}\,dV_g - \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2|C|^2\,dV_g \\ &\quad -\int_M (f+1)^2 R_{it}C_{kti,k}\,dV_g. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (4.4) temos

$$\int_M (f+1)f_k R_{it}C_{kti}\,dV_g = \int_M f_k f_{it}C_{kti}\,dV_g \qquad (4.13)$$

Novamente usando integração por partes, o lado direito da equação acima nos fornece

$$\begin{aligned}
\int_M f_k f_{it} C_{kti}\, dV_g &= -\int_M f_{kt} f_i C_{kti}\, dV_g - \int_M f_k f_i C_{kti,t}\, dV_g \\
&= -\int_M f_k f_i C_{kti,t}\, dV_g \\
&= \int_M (f+1) f_i C_{kti,tk}\, dV_g + \int_M (f+1) f_{ik} C_{kti,t}\, dV_g \\
&= -\int_M (f+1) f_i C_{kti,kt}\, dV_g + \int_M (f+1) f_{ik} C_{kti,t}\, dV_g \\
&= \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 C_{kti,kti}\, dV_g + \int_M (f+1) f_{ik} C_{kti,t}\, dV_g. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M (f+1) f_k R_{it} C_{kti}\, dV_g = \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 C_{kti,kti}\, dV_g + \int_M (f+1) f_{ik} C_{kti,t}\, dV_g. \qquad (4.15)$$

Subtituindo (4.15) em (4.12) tem-se

$$\int_M (f+1) f_k R_{it} C_{kti}\, dV_g = -\frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 div^3(C)\, dV_g - \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g. \qquad (4.16)$$

Mas, a equação (4.12) nos garante que

$$\begin{aligned}
2\int_M (f+1) f_k R_{it} C_{kti}\, dV_g &= -\frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g - \int_M (f+1) f_{it} C_{kti,k}\, dV_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g + \int_M f_t f_i C_{kti,k}\, dV_g + \int_M (f+1) f_i C_{kti,kt}\, dV_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g + \int_M f_t f_i C_{kti,k}\, dV_g - \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 C_{kti,kti}\, dV_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g + \int_M (div C)(\nabla f, \nabla f)\, dV_g - \\
&\quad \frac{1}{2}\int_M (f+1)^2 div^3(C)\, dV_g,
\end{aligned}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\int_M (f+1) f_k R_{it} C_{kti}\, dV_g &= -\frac{1}{4}\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g + \frac{1}{2}\int_M (div C)(\nabla f, \nabla f)\, dV_g \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_M (f+1)^2 div^3(C)\, dV_g. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Portanto, comparando (4.16) e (4.17) concluímos

$$\int_M (f+1)^2 |C|^2\, dV_g = -\int_M (f+1)^2 div^3(C)\, dV_g - 2\int_M (div C)(\nabla f, \nabla f)\, dV_g,$$

completando a prova do lema. □

Agora usaremos o lema acima para provar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.2.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica CPE de dimensão $n \geq 4$. Se $div^2 W = 0$, então (M^n, g) é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Primeiramente, note que $div^2(W) = 0$ implica $div C = 0$. De fato, por (2.4) temos

$$div C = C_{ijk,i} = -\frac{(n-2)}{(n-3)} W_{ijkl,li} = \frac{(n-2)}{(n-3)} div^2 W = 0.$$

Em particular, deduzimos que $div^3(C) = 0$. Ademais, pela Proposição 4.1.1 o conjunto de nível $f = -1$ possui medida nula em M^n. Portanto, usamos o Lema 4.2.1 para concluir que o tensor de Cotton C é identicamente nulo em M^n, isto é, o tensor de Weyl é harmônico sendo assim basta aplicarmos o Teorema 1.2 em (CHANG *et al.*, 2014) para concluir que (M^n, g) é isométrica a esfera canônica $\mathbb{S}^n$ e f é uma função altura. Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

5 CONCLUSÃO

O estudo do invariante de Yamabe modificado e suas implicações na topologia e geometria de uma variedade suave dada se mostrou interessante. Provamos resultados relevante sobre a classificação topológica e diferenciável para variedades de curvatura escalar positiva considerando curvaturas escalares modificadas por funções dependendo dos auto valores do tensor de Weyl visto como operador agindo no espaço das $2-$formas. Modificar o funcional por funções definidas apartir dos autovalores do tensor de Weyl nos permitiu obter tais classificações em dimensão quatro onde tais invariantes conformes gozam de uma relação com uma noção de curvatura específica desta dimensão, a saber, a curvatura (seccional) biortogonal. Funcionais conformemente invariantes como o funcional $\mathscr{E}_1$ se mostram boas ferramentas para o estudo e classificação de variedades do ponto de vista topológico e diferenciável, através de estimativas com elementos invariantes já conhecidos como funcional de Weyl, característica de Euler e assinatura da variedade.

Na segunda parte deste trabalho estudamos as métricas críticas do funcional curvatura escalar total, abreviadamente "métricas CPE", mais precisamente, estudamos a conjectura CPE. Vários resultados parciais da conjectura foram obtidos ao longos dos anos, com destaque para os resultados sob condições geométricas a partir de alguns tensores específicos como por exemplo, o tensor de Weyl. A conjectura é verdadeira sob a hipótese do tensor de Weyl harmônico (HWANG, 2000), dessa forma é natural pensar o que acontece sob condições de harmonicidade de ordem superior, isto é, com a divergência de segunda ordem nula. Seguindo este pensamento provamos a conjectura CPE sob hipótese de nulidade na divergência de segunda ordem do tensor de Weyl ou, equivalentemente, sob a harmonicidade do tensor de Cotton e concluímos que a equação de estrutura de uma métrica CPE nos fornece informações importantes no sentido de que nulidade da divergência de segunda ordem do tensor de Weyl implica em tensor de Weyl harmônico e por sua vez, tal condição implica na conjectura CPE.

REFERÊNCIAS

AUBIN, T. Équation différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. **Journal Mathematics Pures Applied**, v. 55, p. 269–296, 1976.

BARROS, A.; BENEDITO, L.; RIBEIRO, E. Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds. **Mathematische Nachrichten**, 288, n. 16, p. 1814–1821, 2015.

BARROS, A.; RIBEIRO, E. Critical point equation on four-dimensional compact manifolds. **Mathematische Nachrichten**, v. 287, n. 14-15, p. 1618–1623, 2014.

BENEDITO, L. A note on critical point metrics of the total scalar curvature functional. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** , v. 2, p. 1544–1548, 2015.

BENJAMIM, F. Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional. **Archiv der Mathematik**, v. 104, n. 5, p. 463–470, 2015.

BESSE, A. **Einstein manifolds**. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 2008.

BETTIOL, R. Positive biorthogonal curvature on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. **Proceedings of the American Mathematicla Society**, v. 142, n. 12, p. 4341–4353, 2014.

CAO, H. D.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematic Journal**, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

CATINO, G.; MASTROLIA, P.; MONTICELLI, D. Gradient Ricci solitons with vanishing conditions on Weyl. **To appear Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**.

CHANG, J.; HWANG, S.; YUN, G. Total scalar curvature and harmonic curvature. **Taiwanese Journal Mathematics**, v. 9, p. 1439–1458, 2014.

CHANG, S. Y.; GURSKY, M.; YANG, P. A conformally invariant sphere theorem in four dimensions. **Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, v. 98, n. 1, p. 105–143, 2003.

CHEN, B.-L.; ZHU, X.-P. A conformally invariant classification theorem in four dimensions. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 22, n. 5, p. 811–831, 2014.

CHERN, S. S. On Curvature and Characteristic Classes of a Riemann Manifold. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**, v. 20, n. 1-2, p. 117–126, 1955.

COSTA, E. On Einstein four-manifolds. **Journal of Geometry and Physics**, v. 51, n. 2, p. 244–255, 2004.

COSTA, E.; RIBEIRO, E. Four-dimensional compact manifolds with nonnegative biorthogonal curvature. **Michigan Mathematical Journal**, v. 63, n. 4, p. 747–761, 2014.

COSTA, E.; RIBEIRO, E.; SANTOS, A. Modified Yamabe problem on 4-dimensional compact manifolds. **Houston Journal of Mathematics**, v. 42, n. 4, p. 1141–1156, 2016.

DONALSON, K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. **Journal of Differential Geometry**, v. 18, n. 2, p. 279–315, 1983.

FREEDMAN, M. The topology of four-dimensional manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 17, n. 3, p. 357–453, 1982.

GRAY, A. Invariants of curvature operators of four-dimensional Riemannian manifolds. **Proc. of the 13th Biennial Seminar Canadian Math. Congress**, v. 2, p. 42–65, 1972.

GURSKY, M.; LEBRUN, C. Yamabe problem and $spin^c$ structures. **Geometric & Functional Analysis**, v. 8, n. 6, p. 965–977, 1998.

GUSRKY, M. J. Locally conformally flat four-manifolds and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic. **Indiana University Mathematicals Journal**, v. 43, n. 3, p. 747–774, 1994.

GUSRKY, M. J. The Weyl functional, de Rham Cohomology and Kaehler-Einstein metrics. **Annals of Mathematics**, v. 148, n. 1, p. 315–337, 1998.

HWANG, S. Critical points of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature. **Manuscripta Mathematica**, v. 103, n. 2, p. 135–142, 2000.

HWANG, S. The critical point equation on a three-dimensional compact manifold. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 10, p. 3221–3230, 2003.

ITOH, M. The modified Yamabe invariant problem and the geometry of modified scalar curvatures. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 15, n. 1, p. 63–81, 2005.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O. On a conformally functional of the space of Riemannian metrics. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 37, n. 3, p. 373–389, 1985.

KOISO, N. A decomposition of the space of Riemannian metrics on a manifolds. **Osaka J. of Math**, v. 16, n. 2, p. 423–429, 1979.

KOTSCHICK, D. On product of harmonic forms. **Duke Mathematic Journal**, v. 107, n. 3, p. 521–531, 2001.

KRANTZ, S. G. **Geometric Analisys of the Bergman kernel and Metric.** [S.l.]: Springer, 2013.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata. **Journal de Math matiques Pures et Appliquées**, v. 62, n. 1, p. 63–72, 1983.

LEBRUN, C. Weyl curvature, Einstein metrics, and Seiberg-Witten equations. **Mathematical Research Letters**, v. 5, n. 4, p. 423–438, 1998.

LISTING, M. $L^{n/2}$-curvature gaps of the Weyl Tensor . **The Journal of Geometric Analysis**, v. 24, n. 2, p. 786–797, 2014.

MICALLEF, M.; MOORE, J. Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. **Annals of Mathematics**, v. 127, n. 2, p. 199–227, 1988.

NORONHA, M. Some results on nonnegatively curved four manifolds. **Matematática Contemporânea**, v. 9, n. 1, p. 153–175, 1995.

NORONHA, M. Positively curved 4-manifolds and the nonnegatively of isotropic curvatures. **Michigan Mathematical Journal**, v. 44, n. 2, p. 221–229, 1997.

OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 14, n. 3, p. 333–340, 1962.

OHTA, H.; ONO, K. Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$. II. **International Journal of Mathematics**, v. 7, n. 6, p. 755–770, 1996.

POON, Y. Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 1, n. 24, p. 97–132, 1986.

QING, J.; YUAN, W. A note on static spaces and related problems. **Journal of Geometry and Physics**, v. 74, p. 18–27, 2014.

SANTOS, A. Critical metrics of the scalar curvature functional satisfying a vanishing condition on the Weyl tensor. **Archiv der Mathematik**, doi:10.1007/s00013-017-1030-7, 2017.

SCHOEN, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 20, p. 479–495, 1984.

SCHOEN, R.; YAU, S. T. On the structure of manifolds with positive scalar curvature. **Manuscripta Mathematica**, v. 28, p. 159–184, 1979.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. **Lectures on differential geometry. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology I**. [S.l.: s.n.], 1994.

SCORPAN, I. **The wild world of 4-manifolds.** [S.l.]: Providence: American Mathematical Society, 1974.

SEAMAN, W. Orthogonally pinched curvature tensors and applications. **Mathematica Scandinavica**, v. 69, p. 5–14, 1991.

SINGER, I.; THORPE, J. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. **Global Analisys**, p. 355–365, 1969.

TRUDINGER, N. Remarks concerning the conformal deformations of Riemannian structures on compact manifolds. **Annali Scuola Normale Superiore Pisa**, v. 22, p. 265–274, 1968.

YAMABE, H. On deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Osaka Journal Mathematics**, v. 12, p. 21–37, 1960.