UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HAMILTON REGIS MENEZES DE ARAUJO

SOBRE INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS COM SINGULARIDADE ISOLADA

FORTALEZA

2017

HAMILTON REGIS MENEZES DE ARAUJO

SOBRE INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS COM SINGULARIDADE ISOLADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. José Edson Sampaio

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A689s Araujo, Hamilton Regis Menezes de.
Sobre Invariantes Topológicos de Folheações Holomforfas com Singularidade Isolada / Hamilton Regis Menezes de Araujo. – 2017.
62 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. José Edson Sampaio.

1. Folheações holomorfas. 2. Invariantes topológicos. 3. Singularidades. I. Título.
CDD 510

HAMILTON REGIS MENEZES DE ARAUJO

SOBRE INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS COM SINGULARIDADE ISOLADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovoda em: 19 / 05 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Edson Sampaio (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lev Birbrair
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dedico este trabalho a minha família. Ao meu Pai, Djacir, *In memoriam.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por tornar tudo possível.

A minha família, em especial a Margarida, minha mãe, e aos meus tios Luíza e Otávio, pelo apoio inestimável.

Ao Prof. Dr. José Edson Sampaio, pelos seus ensinamentos, pela excelente orientação e pela ajuda determinante ao longo do curso.

Aos professores participantes da banca examinadora, Alexandre Fernandes, Lev Birbrair, Joserlan Perote e João Carlos, pela disponibilidade, pelas valiosas colaborações e pelas sugestões.

Aos colegas e amigos da turma de mestrado e do departamento, os quais destaco, em ordem alfabética: André, Danielson, Danuso, Diego, Emanoel, Felipe, Geraldo e Rosa.

Ao Felipe e ao Danielson, novamente, agradeço pela parceria e amizade desde a graduação no IFCE.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC, que pelos excelentes cursos ministrados, sugestões e conversas foram fundamentais na minha formação, dentre os quais destaco: Alexandre Fernandes, Antônio Caminha, Daniel Cibotaru, Edson Sampaio, Fernanda Camargo, Lev Birbrair, Raimundo Leitão e Rodrigo Rodrigues.

A todos os professores do IFCE que contribuíram na minha formação, dentre os quais destaco meu orientador, Prof. Francisco Regis, que foi fundamental para que eu ingressasse na carreeira acadêmica.

À Andrea Costa, pela eficiência e presteza na secretaria do departamento.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo." (Winston Churchill).

RESUMO

Considerando a folheação induzida por um campo vetorial complexo holomorfo, buscaremos exibir invariantes topológicos na vizinhança de um ponto singular. Num primeiro momento, ganha importância o Número de Milnor de um campo vetorial, no sentido desse número ser invariante topológico. Em outra discussão, daremos ênfase a campos vetoriais em dimensão dois, nesse caso, as folhas, cuja folheação é induzida pelo campo, serão curvas integrais de uma 1-forma. Nesse sentido, trataremos de Desingularização, ou seja, após um número finito de processos, que chamaremos de Blow-ups, ou explosões, transformaremos a folheação inicial em uma folheação cujas singularidades são todas simples. Por fim, o processo de Desingularização de um campo nos dará ferramentas que possibilitam relacionar os dados obtidos nesse processo com os objetos tratados ao longo de todo o trabalho, diante disto apresentaremos outros invariantes topológicos de folheações.

Palavras-chave: Invariantes topológicos. Folheações holomorfas. Singularidades.

ABSTRACT

Considering the foliation induced by a complex holomorph vector field, we will look for topological invariants in the neighborhood of a singular point. At first, the Milnor Number of a vector field becomes important, in the sense that this number is topological invariant. In another discussion, we will emphasize vector fields in dimension two, in which case the leaves, whose foliation is induced by the field, will be integral curves of a 1-form. In this sense, we will deal with Desingularization, that is, after a finite number of processes, which we will call Blow-ups or explosions, we will turn the initial foliation into a foliation whose singularities are all simple. Finally, the Desingularization process of a field will give us tools that make it possible to relate the data obtained in this process to the objects treated throughout the work, with this we will present other topological invariants of foliations.

Keywords: Holomorphic foliations. Topological invariants. Singularities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Descrição do Lema 3.2 27
Figura 2 – Placa contida na folha L_q 28

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

Z	Campo vetorial
$\mathcal{F}$	Folheação
$\mathcal{O}_{n,p}$	Anel dos germes analíticos em p de $\mathbb{C}^n$
$\mu(Z,p)$	Número de Milnor de Z em p
$m(Z,p)$	Multiplicidade Algébrica de Z em p

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	12
2	**PRELIMINARES**	13
2.1	**Folheações holomorfas**	13
2.2	**Índice de um campo em uma singularidade isolada**	14
2.3	**Multiplicidade algébrica e número de Milnor**	16
2.4	**O método blow-up**	21
3	**A INVARIÂNCIA TOPOLÓGICA DO NÚMERO DE MILNOR**	26
3.1	**Invariância topológica do número de Milnor**	26
3.2	**Invariância da multiplicidade ao longo de um subconjunto**	32
4	**DESINGULARIZAÇÃO**	36
4.1	**O caso não dicrítico**	36
4.1.1	***Desingularização no caso não dicrítico***	36
4.1.2	***Curvas generalizadas e suas desingularizações***	40
4.1.3	***O número de Milnor de uma curva generalizada***	44
4.2	**O caso dicrítico**	46
5	**ALGUNS INVARIANTES**	54
6	**CONCLUSÃO**	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Considere $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma curva analítica com expansão de Taylor, em torno de $0 \in \mathbb{C}^2$, sendo $f = f_\nu + f_{\nu+1} + \cdots$, onde $f_\nu \not\equiv 0$. O inteiro $m(f, 0) = \nu$ é chamado de Multiplicidade Algébrica de f em 0.

Um resultado inicial, devido a BURAU (1932) e ZARISKI (1932), mostrou que dada $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, nas mesmas condições de f, e um homeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$, tal que $h(f^{-1}(0) \cap U) = \tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{U}$, onde U e $\tilde{U}$ são vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}^2$, tem-se que $m(f, 0) = m(\tilde{f}, 0)$. Posteriormente, o famoso trabalho de ZARISKI (1971), estabeleceu a Conjectura de Zariski para multiplicidade em dimensão maior que 2, sendo uma generalização do problema acima. Alguns resultados trazem avanços importantes nesse sentido. Como exemplo, EPHRAIM (1976) apresenta uma prova no caso em que h é difeomorfismo $\mathcal{C}^1$ e ROSAS (2016) trata do caso Bi-Lipschitz. Ademais, casos particulares também foram estudados, e positivamente respondidos, como por exemplo, A'CAMPO (1973) e LÊ (1973) trazem uma prova quando $m(f, 0) = 1$.

Deste modo, é natural buscar estender o problema de invariância da multiplicidade para folheações em $\mathbb{C}^2$. Discutiremos questões relacionadas a este problema tendo como suporte o trabalho de CAMACHO, LINS e SAD (1984).

Nesse sentido, as integrais de um campo vetorial holomorfo Z definido em um aberto U de $\mathbb{C}^n$ são curvas complexas parametrizadas localmente como as soluções da equação diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z), T \in \mathbb{C}, z \in U.$$

Isso define uma folheação $\mathcal{F}_Z$ de U com singularidades nos zeros de Z. Assim, seja $\mathcal{O}_n$ o anel dos germes de funções holomorfas definidas numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ e $I(Z_1, \cdots, Z_n)$ o ideal gerado pelas funções coordenadas de Z. O Número de Milnor de Z em $0 \in \mathbb{C}^n$ definido por $\mu(Z, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / I(Z_1, \cdots, Z_n)$. Num primeiro momento, mostraremos que este número é invariante topológico em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

Posteriormente, olhando para campos em $\mathbb{C}^2$, trataremos de Desingularização. Descreveremos um método de Blow-up, que permite criar, a partir de uma folheação dada, uma outra folheação cujas singularidades sejam todas simples, isto é, os autovalores λ_1 e λ_2 de $dZ(p)$, onde Z é um campo que induz tal folheação em p, são tais que $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Esse processo, nos fornece ferramentas importantes, que relacionam os dados obtidos na desingularização com os objetos previamente tratados, como o Número de Milnor e a Multiplicidade Algébrica.

No último capítulo vamos apresentar resultados de invariância relacionados com todos esses objetos.

2 PRELIMINARES

Apresentaremos nesta seção introdutória algumas ferramentas e resultados que vão servir de norte para o que vamos discutir ao longo do texto.

2.1 Folheações holomorfas

Uma variedade complexa de dimensão n é um espaço topológico M, de Hausdorff, conexo, com base enumerável, munido de uma estrutura analítica definida da seguinte maneira: existe uma cobertura de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ de abertos para M e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, onde V_α é aberto de $\mathbb{C}^n$, tais que as mudanças de coordenadas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ são holomorfas onde sua definição faz sentido. Cada par $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in L}$ é dito ser um atlas de M. Dois atlas são equivalentes se a mudança $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ for holomorfa.

Seja M uma variedade complexa com dimensão $n \geq 2$.

Definição 2.1 *Uma folheação holomorfa não singular de dimensão k (ou codimensão $n-k$) em M, onde $1 \leq k \leq n-1$, é dada pelo seguinte conjunto de informações:*

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ por abertos;

(b) Para cada $\alpha \in L$, um biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, onde $\mathbb{D}$ é o disco unitário de $\mathbb{C}$ centrado na origem;

(c) Sempre que $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$, a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z,w) & \longmapsto & \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z,w) = (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

satisfaz $\Phi_{\alpha\beta}(z,w) = (\varphi_1(z,w), \varphi_2(w))$.

Pelo item (b) dessa definição cada U_α é decomposto em variedades, de dimensão k, da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{w_0\})$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, chamadas de placas. O item (c) garante que na interseção dos U_α as placas se sobrepõem de modo satisfatório, ou seja, se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, então ou $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$, ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Assim, podemos definir em M a seguinte relação: $p \sim q$ se existem placas $P_1, \cdots, P_n$ com $p \in P_1$ e $q \in P_n$, tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing, i = 1, \cdots, n-1$. A classe de equivalência seguindo essa relação é chamada de ***folha*** por p.

Definição 2.2 *Uma folheação holomorfa singular, ou simplesmente **folheação**, de dimensão k (codimensão $n-k$), onde $1 \leq k \leq n-1$, em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k (Definição 2.1) em $M\backslash S$, onde S é conjunto* *analítico em M de codimensão maior ou igual a 2, de modo que S seja minimal com essa definição. Notaremos a folheação por $\mathcal{F}$ e $S = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Os pontos de $M \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ são chamados de regulares e os de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ de singulares.*

Proposição 2.1 *Toda folheação de dimensão 1 é induzida localmente por um campo de vetores holomorfo.*

Ver SOARES e MOL (2001, p. 97, Proposição 6.1.4).

Definição 2.3 *Duas folheações $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ em M são ditas localmente topologicamente equivalentes em $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $\tilde{p} \in \mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, respectivamente, se existe um homeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$, onde U e $\tilde{U}$ são vizinhanças de p e $\tilde{p}$ (respec.), tal que $h(U) = \tilde{U}$ e que leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.*

Observação: Existe uma definição análoga para campos de vetores holomorfos. Considere $Z : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um campo holomorfo, com $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Nesse sentido, uma folheação em U é definida pela equação diferencial $\frac{dz}{dT} = Z(z)$. O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, provado em SOTOMAYOR (1979, p. 209, Teorema 1), garante que dado $p \in U$ e $K \subset U$ compacto, com $p \in K$ e $Z(p) \neq 0$, existe única aplicação holomorfa $\varphi : D \times K \to U$, onde $D \subset \mathbb{C}$ é disco aberto centrado na origem, de modo que: (a) $\varphi(0, z) = z$; (b) $\dfrac{d\varphi}{dT}(T, z) = Z(\varphi(T, z))$. Assim, fixado $z_0 \in U$ existe uma única solução $\varphi(T, z_0) : D \to U$ para a equação diferencial $\dfrac{dz}{dT} = Z(z)$. Uma folha é uma curva holomorfa, conexa e regular de U a qual, localmente, pode ser parametrizada como solução da equação diferencial em questão.

2.2 Índice de um campo em uma singularidade isolada

Em linhas gerais, estamos sempre considerando um campo vetorial holomorfo Z definido num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, ou seja, $Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e $Z_j : U \to \mathbb{C}$ é função holomorfa para todo j.

Definição 2.4 (Singularidade) *Um ponto $p \in U$ é uma singularidade de Z se $Z(p) = 0$. Se $Z(p) \neq 0$ dizemos que p é um ponto regular. Ademais, se p é uma singularidade de Z e $Z(z) \neq 0$, $\forall z \in B_r(p) \backslash \{p\}$, onde $r > 0$, dizemos que p é singularidade isolada de Z.*

Definição 2.5 (Grau topológico) *Sejam M e N variedades orientadas n-dimensionais e sem bordo. Considere $f : M \to N$ uma aplicação suave. Se M é compacta e N é conexa, então definimos o grau de f como segue. Se $y \in N$ é valor regular de f, então $\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sign} df_x$, onde sign é igual a 1 se df preserva orientação e -1 caso contrário.*

Alguns resultados garantem que a Definição 2.5 está bem posta e que não depende da escolha do valor regular $y \in N$, usamos então a notação $\deg(f)$. Para mais detalhes sobre os objetos tratados nesta definição consultar MILNOR (1965, cap. II e III). Vamos utilizar a definição de grau para aplicações entre esferas de espaços euclidianos. Antes disto, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1 *O grau é um invariante homotópico, ou seja, se existe uma homotopia entre f e g, então $\deg(f) = \deg(g)$, onde $f, g : M \to N$ como na Definição 2.5.*

Ver MILNOR (1965, p. 28, Teorema B).

Considere um aberto $U \subset \mathbb{C}^n, n \geq 2$, e $Z : U \to \mathbb{C}^n$ um campo vetorial holomorfo. Seja X um campo vetorial real, de classe $C^r, r \geq 0$, definido em $U \subset \mathbb{C}^n$, ou seja, $X : U \to \mathbb{R}^{2n}$.

Definição 2.6 (Campo tangente) *Dizemos que X é tangente a Z se para todo $z \in U$ tivermos $X(z) \in \mathbb{C}Z(z) = \{\lambda Z(z); \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Definição 2.7 (Índice de um campo) *O índice de X em $p \in U$, o qual notaremos por $ind_p(X)$, é o grau topológico da aplicação $X/\|X\| : \mathbb{S}_r{}^{2n-1}(p) \to \mathbb{S}^{2n-1}$, onde $\|X\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} x_j^2$, $\mathbb{S}_r{}^{2n-1}(p) = \{z; \|z - p\| = r\}$ e $r > 0$ é suficientemente pequeno.*

A seguinte proposição garante a boa definição do Índice de um campo segundo a Definição 2.7.

Proposição 2.2 *Sejam X e Y campos vetoriais reais contínuos, definidos no aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, e tangentes a Z. Suponha que $p \in U$ é singularidade isolada de Z, X e Y, então $ind_p(X) = ind_p(Y)$.*

Prova: Podemos considerar Z como um campo real em U, isto é, $Z(z) = ((Re(Z_1(z)), Im(Z_1(z)), Re(Z_2(z)), Im(Z_2(z)), \cdots, Re(Z_n(z)), Im(Z_n(z)))$. Observe que, se mostrarmos que $ind_p(Z) = ind_p(X)$ a proposição fica demonstrada, pois o mesmo valeria para Y. Com efeito, desde que X é tangente a Z, temos que para cada $z \in U$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$X(z) = \lambda(z)Z(z) = (\alpha(z) + i\beta(z))Z(z) = (\alpha(z))Z(z) + (\beta(z))iZ(z).$$

Na igualdade acima, estamos interessados em pontos z na bola $B_r(p)$, onde p é singularidade isolada de Z, e r é suficientemente pequeno, em particular, $Z(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{S}_r^{2n-1}(p)$. Considere então a função $f : (\alpha, \beta) : \mathbb{S}_r^{2n-1}(p) \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ contínua. Como, para $n \geq 2$, $\pi_{2n-1}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \{0\}$ temos que existe homotopia

$$\tilde{f} : [0,1] \times \mathbb{S}_r^{2n-1}(p) \to \mathbb{R}^2 - \{0\}; \tilde{f}(0, z) = f \text{ e } \tilde{f}(1, z) = (1, 0).$$

Deste modo, escrevendo $\tilde{f}(t,z) = (\alpha(t,z), \beta(t,z))$, defina $X(t,z) = (\alpha(t,z) + i\beta(t,z))Z(z)$ e $F(t,z) = X(t,z)/||X(t,z)||$. Segue que F é homotopia entre $F(0,z) = X(0,z)/||X(0,z)|| = X/||X||$ e $F(1,z) = X(1,z)/||X(1,z)|| = Z/||Z||$. Como o grau é invariante topológico segue que $X/||X||$ e $Z/||Z||$ tem o mesmo grau, logo $ind_p(X) = ind_p(Z)$.

□

2.3 Multiplicidade algébrica e número de Milnor

Definição 2.8 (Multiplicidade algébrica) *Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ analítica na vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{C}^n$. Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor de f, em torno de p, como sendo*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(z), \text{ onde } f_m \not\equiv 0.$$

*O número m é chamado de multiplicidade algébrica, ou simplesmente **multiplicidade**, de f em p e é denotado por $m(f,p)$*

Observação: A Definição 2.8, acima, pode ser feita de modo análogo para campos vetoriais e para folheações, via a multiplicidade de um campo que a induz localmente numa singularidade. Não obstante, se S é germe de curva analítica em $p = (0,0) \in \mathbb{C}^2$, isto é, existe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ analítica tal que a equação local reduzida de S é dada por $f(x,y) = 0$, a multiplicidade de S em p é dada por $m(S,p) = m(f,p)$.

Teorema 2.2 *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de curva analítica com singularidade em $0 \in \mathbb{C}^2$. Se $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é germe de curva analítica e $h : U \to \tilde{U}$ homeomorfismo, onde U e $\tilde{U}$ são vizinhanças de 0, tal que $h(f^{-1}(0) \cap U) = \tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{U}$, então $m(f,0) = m(\tilde{f},0)$.*

O Teorema 2.2 é provado no trabalho de ZARISKI (1932). Este problema em dimensão maior que 2, foi proposto por Oscar Zariski, em ZARISKI (1971), juntamente com diversos problemas em Singularidades. O caso geral ainda não tem resposta, contudo temos respostas positivas em alguns casos, como por exemplo EPHRAIM(1976) para o caso C^1 e ROSAS (2016) no caso Bi-Lipschitz. Por fim, EYRAL (2007) traz um apanhado geral sobre avanços no problema.

Sejam $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ e $g : V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ funções holomorfas, onde U e V são abertos. Fixado $p \in U \cap V$, dizemos que $f \sim g$, se existe um aberto $W \subset U \cap V$, contendo p, tal que $f|W \equiv g|W$. A classe $\overline{f}$, segundo a relação de equivalência acima, é chamada de **germe** de f em p. O conjunto dos germes de funções holomorfas de $U \subset \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, no ponto p, será notado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Se $p = 0$, por simplicidade, escreveremos $\mathcal{O}_n$.

Com as operações naturais de soma de germes e multiplicação por escalar, temos que $\mathcal{O}_{n,p}$ é um anel. Mais detalhes sobre os germes de funções holomorfas encontramos no segundo capítulo de EBELING (2007).

Nesse sentido, dado $Z : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um campo vetorial holomorfo, tal que $Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$, podemos olhar para os germes das funções coordenadas e considerar o ideal $\langle Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\rangle$ em $\mathcal{O}_{n,p}$, onde $p \in U$.

Definição 2.9 (Número de Milnor) *O inteiro*

$$\mu = \mu(Z, p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,p}/\langle Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\rangle$$

é chamado de ***Número de Milnor*** *de Z em p.*

Proposição 2.3 *Seja Z um campo de vetores holomorfo em $\mathbb{C}^n$. A cerca do número de Milnor são verdadeiras as afirmações abaixo:*

(1) $\mu(Z, p) = 0$ se, e somente se, p é ponto regular de Z.

(2) $0 < \mu(Z, 0) < \infty$ se, e somente se, p é uma singularidade isolada de Z.

(3) $\mu(Z, p) = 1$ se, e somente se, $\det(\partial Z_i/\partial z_j(p))_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$.

(4) Seja $0 < \mu < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $c \in \mathbb{C}$, com $\|c\| < \delta$, o numero de soluções da equação $Z(z) = c$ na bola $B_\varepsilon(p) = \{z; ||z - p|| < \varepsilon\}$ é no máximo μ. Mais ainda, se $p_1, p_2, \cdots, p_m, m \leq \mu$, são soluções de $Z(z) = c$, então

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(Z - c, p_i) = \mu.$$

(5) $\mu = ind_p(Z)$.

Prova: (1) Suponha que $Z(p) \neq 0$, então existe $i \in \{1, \cdots, n\}; Z_i(p) \neq 0$. Assim, $1 = Z_i(p)^{-1}Z_i(p) \in \mathcal{O}_{n,p}/\langle Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\rangle$. Logo, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,p}/\langle Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\rangle = 0$. Reciprocamente, se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,p}/\langle Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\rangle = 0$, então existem $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathcal{O}_{n,p}$ tais que $a_1Z_1(p) + a_2Z_2(p) + \cdots + a_nZ_n(p) = 1$. Logo, deve existir $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $Z_i(p) \neq 0$ e, portanto, $(Z_1(p), Z_2(p), \cdots, Z_n(p)) \neq 0$, ou seja, p é ponto regular de Z.

(2) Supondo que p é singularidade isolada de Z temos $V(\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle) = \{p\}$. Assim, $I(V(\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle)) = \mathfrak{m}_p$ é o ideal maximal das funções de $\mathcal{O}_p$ que se anulam em p. O Teorema dos zeros de Hilbert (Ver EISENBUD (1995, p.33, Teorema 1.6)) nos informa que $I(V(\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle)) = \mathrm{Rad}\langle Z_1, \cdots Z_n\rangle = \{f; f^k \in \langle Z_1, \cdots Z_n\rangle$, para $k \in \mathbb{N}\}$.

Como $\mathrm{Rad}\langle Z_1, \cdots Z_n\rangle$ é finitamente gerado, já que $\mathcal{O}_p$ é Noetheriano, existe $r > 0$ tal que $\mathfrak{m}_p^r = (\mathrm{Rad}\langle Z_1, \cdots Z_n\rangle)^k \subset \langle Z_1, \cdots Z_n\rangle$. Daí,

$$\mu(Z, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle Z_1, \cdots Z_n\rangle} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{m}_p^r}$$

O ideal $\mathfrak{m}_p^r$ é gerado por monômios de grau r nas variáveis $z_1, \cdots, z_n$, fazendo com que $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r$ seja gerado sobre $\mathbb{C}$ pelos monômios de grau inferior a r. Logo, $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r < \infty$.

Para a recíproca vamos supor que $0 < \mu(Z,p) < \infty$. A cadeia de ideais

$$\begin{aligned} \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p \supset \quad & \cdots \ \supset \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p^k \\ & \cdots \ \supset \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle, \end{aligned}$$

implica nas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p} \leq \quad & \cdots \ \leq \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p^k} \\ & \cdots \ \leq \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle} = \mu(Z,p) < \infty. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escolher $r \in \mathbb{N}$ tal que $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r = \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^{r+1}$, portanto $\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p^r = \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p^{r+1}$. Em particular, temos $\mathfrak{m}_p^r \subset \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle + \mathfrak{m}_p^{r+1}$. Segue do Lema de Nakayama (Ver EBELING (2007, p. 93, Proposição 2.38)) que $\mathfrak{m}_p^r \subset \langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle$. O que implica em, $\{p\} = V(\mathfrak{m}_p^r) \supset V(\langle Z_1, \cdots, Z_n\rangle)$, logo p é singularidade isolada.

(3) Defina a matriz $A = \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ e suponha que $\det(A) \neq 0$. Podemos escrever $Z(z) - Z(p) = L(z-p) + r(z-p)$, onde $r(z-p)$ é resto de ordem superior a 1. Logo, $Z(z) = L(z-p) + r(z-p)$. Como L é não singular podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\|r(z-p)\| < \|L(z-p)\|$, para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon^{n+1}(p)$. Tal fato permite definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} G : [0,1] \times \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}(p) \ &\longrightarrow \ \mathbb{S}^{2n-1} \\ (t,z) \ &\longmapsto \ \frac{L(z) + tr(z)}{\|L(z) + tr(z)\|}. \end{aligned}$$

Repare que, G é homotopia entre $Z/\|Z\|$ e $L/\|L\|$, logo $\deg(Z/\|Z\|) = \deg(L/\|L\|)$ Segue o resultado pois, $\deg(L/\|L\|) = 1$. Ver MILNOR (1965, p.37, Lema 4).

Reciprocamente, suponha que $\mu(Z,p) = 1$. Seja $g \in \mathcal{O}_n$ de modo que sua classe gera $\mathcal{O}_p$ sobre $\mathbb{C}$. Para cada $f \in \mathcal{O}_n$, existem $\alpha_f \in \mathbb{C}$ e germes $h_1^f, \cdots, h_n^f \in \mathcal{O}_p$ tais que $f = \alpha_f g + h_1^f Z_1 + \cdots + h_n^f Z_n$. Em particular, para $f = 1$, escrevemos $1 = \alpha_1 g + h_1^1 Z_1 + \cdots + h_n^1 Z_n$. Assim, $g(p) \neq 0$. Para cada $i = 1, \cdots, n$, escrevemos $z_i - p_i = \alpha_{z_i} g + h_1^{z_i} Z_1 + \cdots + h_n^{z_i} Z_n$, onde $p = (p_1, \cdots, p_n)$. Avaliando essa expressão em 0, temos $\alpha_{z_i} = 0$, portanto $z_i - p_i = h_1^{z_i} Z_1 + \cdots + h_n^{z_i} Z_n$.

Derivando a expressão acima, em relação a z_i e $z_j, i \neq j$, obtemos

$$h_1^{z_i}(p)\frac{\partial Z_1}{\partial z_i}(p) + \cdots + h_n^{z_i}(p)\frac{\partial Z_n}{\partial z_i}(p) = 1 \text{ e}$$

$$h_1^{z_i}(p)\frac{\partial Z_1}{\partial z_j}(p) + \cdots + h_n^{z_j}(p)\frac{\partial Z_n}{\partial z_j}(p) = 0$$

Segue daí que $\det(A) \neq 0$.

(5) Suponha que $0 < \mu < \infty$, neste caso, estamos supondo que p é singularidade isolada de Z. Seja $\varepsilon > 0$ de modo que a bola $B = \{z; \|z-p\| \leq \varepsilon\}$ isole esta singularidade. O item (4) nos fornece, para este $\varepsilon > 0$, um $\delta > 0$ de modo que, se $\|c\| < \delta$ para $c \in \mathbb{C}$, então $Z(z) = c$ tem no máximo μ soluções em B. Defina $k = \inf_{z \in \partial B} |Z(z)|$. Assim, se $\|c\| < \min\{\delta, k\}$ temos que $Z(z) = c$ tem exatamente μ soluções em B.

Por outro lado, definindo $Z^t(z) = Z(z) - tc$, para $t \in [0,1]$, temos $Z^t(z) \neq 0$ se $||z|| = \varepsilon$. Ora, mas isso implica que definindo $F : [0,1] \times \partial\overline{B} \to \mathbb{S}^{2n-1}$ por $F(t,z) = Z^t(z)/|Z^t(z)|$, temos que F é homotopia entre $F_0 = Z/|Z|$ e $F_1 = Z - c/|Z-c|$. Daí, como o grau é invariante topológico, segue que F_0 e F_1 tem o mesmo grau.

Sejam $p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ as singularidades de $Z - c$. Para cada $j = 1, 2, \cdots, \mu$, considere bolas $B_j \subset B$ que isolem as singularidades p_j de $Z-c$, de modo que $B_j \cap B_i = \varnothing$, se $i \neq j$. Assim, defina $G_j : B_j \to \mathbb{S}^{2n-1}$ por $G_j(z) = Z_j(z) - c/|Z_j(z) - c|$. Note que,

$$\deg\left(\frac{Z-c}{|Z-c|}\right) = \deg F_1 = \sum_{j=1}^{\mu} \deg(G_j) \tag{1}$$

De sorte que, c é valor regular para Z, temos que $\mu(Z-c, p_j) = 1$, já que pelo item (3), $\mu = 1 \Leftrightarrow \det(\partial Z_i/\partial z_j)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$, e isto ocorre, pois c é regular. Assim, seque de (1) que

$$\deg\left(\frac{Z-c}{|Z-c|}\right) = \deg F_1 = \sum_{j=1}^{\mu} \deg(G_j) = \sum_{j=1}^{\mu} \mu(Z-c, p_j) = \sum_{j=1}^{\mu} 1 = \mu$$

Isso conclui a demonstração pois o grau de $Z - c/|Z-c|$ é igual ao grau de $Z/|Z|$ e, pelo que foi feito, é igual a μ. Logo, $ind_p(Z) = \mu$.

$\square$

Lema 2.1 (Parametrização de Puiseux) *Se S é um germe de curva analítica irredutível em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, distinta dos eixos coordenados, com equação local reduzida $f = 0$, então existe um germe de aplicação holomorfa*

$$\alpha : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

$$T \longmapsto (T^m, T^n u(T)),$$

onde u é holomorfa com $u(0) \neq 0$ e a multiplicidade $m(f,0) = \min\{m,n\}$, cuja imagem coincide com a curva S.

Ver CAMACHO e SAD (1987, p. 2, Teorema 1.1).

Seja Z campo de vetores holomorfo em M uma superfície complexa com singularidade isolada no ponto p. Tomamos coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ nas quais $p = (0, 0)$ e $Z = (Z_1, Z_2)$. Suponha de Z_1 é irredutível e seja $\alpha(T) = (T^m, T^n u(T))$, onde $u(p) \neq 0$ e $m(Z, p) = \min\{m, n\}$, uma parametrização de Puiseux para $Z_1^{-1}(0)$. Segue que $Z_2 \circ \alpha(T)$ não é identicamente nula. Nessas condições temos:

Lema 2.2 *Seja $Z = (Z_1, Z_2)$ como acima. Então $\mu(Z, p)$ é a multiplicidade de $Z_2 \circ \alpha(T)$ em $T = 0$.*

Prova: Repare que, os pontos da forma $(0, c) \in \mathbb{C}^2$, com $c \neq 0$ e $|c|$ suficientemente pequeno, são regulares para Z, pois $(0, 0)$ é singularidade isolada de Z. Considere então um valor regular $w_0 = (0, c)$ de Z. Assim, por um lado, temos que $\#\{z; Z(z) = w_0\}$ é igual a $\mu(Z, p)$ e, por outro lado, é igual a multiplicidade de $Z_2 \circ \alpha(T)$ em $T = 0$.

$\square$

Se Z_1, Z_2 são funções holomorfas numa vizinhança de $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$, por exemplo as coordenadas de um campo holomorfo, que se anulam simultaneamente somente em p, com multiplicidade m_1 e m_2, respectivamente, estabelecemos $\tilde{Z}_1(x, t) = \dfrac{Z_1(x, tx)}{x^{m_1}}$ e $\tilde{Z}_2(x, t) = \dfrac{Z_2(x, tx)}{x^{m_2}}$.

As raízes em comum de $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ em $\{x = 0\}$ ocorrem em número finito. Temos então o seguinte lema.

Lema 2.3

$$\mu((Z_1, Z_2), p) = m_1 m_2 + \sum_{q \in \{x=0\}} \mu((\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2), q).$$

Prova: Suponha, para facilitar as contas, que Z_1 é irredutível e que $Z_1^{-1}(0)$ é diferente dos eixos coordenados. Tome uma parametrização de Puiseux $\alpha(T) = (T^m, T^n u(T))$, onde $u(0) \neq 0$ e $m_1 = \min\{m, n\}$, para o conjunto $Z_1^{-1}(0)$. Podemos supor ainda que, $m_1 = m \leq n$, do contrario, mude coordenadas trocando x por y, onde (x, y) é o sistema de coordenados em que Z está escrito.

Observe que, a curva $\tilde{\alpha}(T) = (T^m, T^{n-m} u(T))$ é uma parametrização para $\tilde{Z}_1^{-1}(0)$. Como $\tilde{Z}_1$ é irredutível, do fato de Z_1 ser, se $q = \tilde{\alpha}(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\mu((\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_1), q) &\overset{\text{Lema2.2}}{=} m(\tilde{Z}_2 \circ \tilde{\alpha}(T), q) = m\left(\frac{Z_2 \circ \alpha(T)}{(T^m u(T))^{m_2}}, q\right) \\
&= \mu((Z_1, Z_2), p) - m m_2 \\
&= \mu((Z_1, Z_2), p) - m_1 m_2
\end{aligned}$$

Isso demonstra o resultado quando Z_1 irredutível. A propriedade aditiva por coordenadas do Número de Milnor, isto é, $\mu((Z_1^{(1)} \cdot Z_1^{(2)}, Z_2)) = \mu((Z_1^{(1)}, Z_2)) + \mu((Z_1^{(2)}, Z_2))$, estende este resultado para o caso geral (Z_1 não irredutível).

□

2.4 O método blow-up

Considere um campo vetorial holomorfo definido num aberto $U \subset \mathbb{C}^2$, onde $0 \in U$ é singularidade de Z, isto é, $Z(0) = 0$. Suponha ainda que $0 \in \mathbb{C}^2$ é a única singularidade de Z em U.

O blow up de $0 \in \mathbb{C}^2$, ou explosão, consiste em substituir $0 \in \mathbb{C}^2$ pela reta projetiva P de dimensão um. Existem diversas formas de definir P, ou mais precisamente $C\mathbb{P}^1$, ou ainda $\mathbb{P}^1$, inicialmente temos $P = \{l \in \mathbb{C}^2; l \text{ é espaço vetorial e} \dim_{\mathbb{C}} l = 1\}$. Por outro lado, $P = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}/\sim$ onde é a relação dada nas direções não nulas de $\mathbb{C}^2$, mais precisamente, $(x, y) \sim (x', y')$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) = (\lambda x', \lambda y')$.

Vamos criar o conjunto $U^{(1)} := U\backslash\{0\} \cup P$ introduzindo coordenadas da seguinte forma: Qualquer aberto em $U\backslash\{0\}$ mantém suas coordenadas. Precisamos agora cobrir P, vamos utilizar as cartas $\varphi : V_1 \times \mathbb{C} \to U\backslash(y = 0) \cup P\backslash\{0\}$ e $\psi : \mathbb{C}_2 \times V_2 \to U\backslash(x = 0) \cup P\backslash\{\infty\}$ relacionadas por $\psi^{-1} \circ \varphi(t, x) = (t^{-1}, tx), t \neq 0$. Nós escolhemos os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, identificados como 0 e ∞, respectivamente, em P, que é o mesmo que escolher duas retas complexas em $\mathbb{C}^2$. As cartas acima cobrem vizinhanças de $P\backslash\{\infty\}$ e $P\backslash\{0\}$.

Deste modo, defina $\pi^{(1)} : U^{(1)} \to U$ por $\pi(p) = p$ se $p \notin P$ e $\pi(p) = 0$ se $p \in P$ e descreva π em coordenadas como $(x, t) \mapsto (x, xt)$ e $(u, y) \mapsto (uy, y)$ respectivamente.

Suponha que, temos a seguinte folheação $\mathcal{F}_Z$ de U, dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_\nu(x, y) + R_1(x, y)\\ \dot{y} &= b_\nu(x, y) + R_2(x, y),\end{aligned}$$

nesse caso $Z(x, y) = (a_\nu(x, y), b_\nu(x, y)) + (R_1(x, y), R_2(x, y))$ onde $(a_\nu(x, y), b_\nu(x, y))$ é o primeiro jato não nulo de Z, ou seja, $\nu = m(Z, 0)$ é a multiplicidade algébrica de Z(ou de $\mathcal{F}_Z$) na singularidade $0 \in \mathbb{C}^2$ e (R_1, R_2) é o restante da expansão de Z. Se estivemos com a mudança de coordenadas $(x, y) \mapsto (x, tx)$ temos que,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_\nu(x, tx) + R_1(x, tx) = x^\nu a_\nu(1, t) + x^{\nu+1} R_1'(x, t)\\ &= x^\nu(a_\nu(1, t) + xR_1'(x, t))\end{aligned}$$

Na expressão acima, retiramos o fator x^ν de a_ν, que é homogêneo e tem grau ν, e de R_1, que tem grau maior ou igual a $\nu + 1$, $R_1(x, y) = x^{\nu+1} R_1'(x, y)$. De modo similar, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{(tx)} &= b_\nu(x,tx) + R_2(x,tx)\\
\Leftrightarrow \dot{t}x + t\dot{x} &= x^\nu b_\nu(1,t) + x^{\nu+1}R_2'(x,t)\\
\Leftrightarrow \dot{t}x &= x^\nu b_\nu(1,t) + x^{\nu+1}R_2'(x,t) - tx^\nu a_\nu(1,t) - tx^{\nu+1}R_1'(x,t)\\
\Leftrightarrow \dot{t} &= x^{\nu-1}(b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)) + x^\nu(R_2'(x,t) - tR_1'(x,t)).
\end{aligned}$$

Assim, as equações para $\pi^* Z$ nessa mudança são dadas por:

$$\text{(I)}\begin{cases} \dot{x} = x^\nu(a_\nu(1,t) + xR_1'(x,t)),\\ \dot{t} = x^{\nu-1}(b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)) + x^\nu(R_2'(x,t) - tR_1'(x,t)) \end{cases}$$

De modo análogo, considerando a mudança de coordenadas $(u,y) \mapsto (uy,y)$, obtemos as equações:

$$\text{(II)}\begin{cases} \dot{u} = y^{\nu-1}(a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1)) + y^\nu(R_1''(u,y) - uR_2''(u,y)),\\ \dot{y} = y^\nu(b_\nu(u,1) + yR_2''(u,y)) \end{cases}$$

Temos agora dois casos a analisar, de acordo com a expressão $a_\nu(1,t)+xR_1'(x,t)$ ser identicamente nula ou não.

(i) ***Caso não dicrítico***. Se $b_\nu(1,t)-ta_\nu(1,t) \neq 0$ podemos dividir as equações de (I) por $x^{\nu-1}$ e obter:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_\nu(1,t) + xR_1'(x,t)),\\ \dot{t} = b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) + x(R_2'(x,t) - tR_1'(x,t)) \end{cases}$$

A expressão acima, juntamente com a expressão obtida ao dividir (II) por $y^{\nu-1}$, definem uma folheação $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ em $U^{(1)}$ tendo P como conjunto invariante. Mais precisamente, a menos de um certo numero finito de raízes de $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) = 0$, P é folha de $\mathcal{F}_Z^{(1)}$. Observe que, $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ coincide com $\pi^*\mathcal{F}_Z$ fora de $P^{(1)}$.

(ii) ***Caso dicrítico***. Se $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) \equiv 0$, então podemos dividir $(*)$ por x^ν e encontrar:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_\nu(1,t) + xR_1'(x,t),\\ \dot{t} = R_2'(x,t) - tR_1'(x,t). \end{cases}$$

Novamente, como no caso não dicrítico, a expressão destacada acima, juntamente com a expressão correspondente no outro sistema de coordenadas, formam uma folheação $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ que coincide com $\pi^*\mathcal{F}_Z$ fora de P e nesse caso P não é invariante. A folheação $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ é transversal a P exceto num número finito de pontos (raizes de $a_\nu(1,t) = 0$) que podem ser ou não singularidades.

Repare que, em ambos os casos as folheações são dadas por expressões analíticas.

Deste modo, podemos olhar para as singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ e repetir esse mesmo processo. A nova folheação obtida é dada na vizinhança de uma união de retas projetivas tendo cruzamentos (interseções) normais e novamente com um número finito de singularidades.

Após k processos de blow-up teremos uma folheação $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ definida numa vizinhança $U_Z^{(k)}$ de uma união $\mathcal{P}_Z^{(k)}$ de retas projetivas com uma projeção analítica própria $\pi_Z^{(k)} : U^{(k)} \to U$ que manda $\mathcal{P}_Z^{(k)}$ em $0 \in \mathbb{C}^2$ e tal que $\pi_Z^{(k)} : U_Z^{(k)} \backslash \mathcal{P}_Z^{(k)} \to U \backslash \{0\}$ é isomorfismo entre as folheações $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ e $\mathcal{F}_Z$.

Definição 2.10 *Mantendo a notação destacada acima a quadrupla* $(U_Z^{(l)}, \pi_Z^{(k)}, \mathcal{P}_Z^{(k)}, \mathcal{F}_Z^{(k)})$ *denota o* k^o *blow-up de* Z *em* $0 \in \mathbb{C}^2$*.*

Definição 2.11 *Se* $\mathcal{F}$ *é folheação em* p*, e após um Blow-Up neste ponto se manifesta o caso (i), acima descrito, dizemos que* $\mathcal{F}$ *é folheação não dicrítica. Folheação dicrítica é definida de modo análogo.*

Definição 2.12 *Se* Z *é campo em* $U \subset \mathbb{C}^2$ *com singularidade em* $0 \in U$*, dizemos que esta singularidade é simples se os autovalores* λ_1, λ_2 *de* $dZ(0)$ *satisfazem uma das condições abaixo:*

(i) $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$ *e* $\lambda_1 \backslash \lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$

(ii) $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 \neq 0$

Uma singularidade simples do tipo (ii) é chamada de Sela-Nó

O Teorema de Desingularização para campos vetoriais, devido ao trabalho de SEIDENBERG (1968), afirma que todas as singularidades se tornam simples após um número finito de blow-ups e estas apenas se repetem sob novas explosões, isto é, desde que as singularidades simples aparecem, e não são submetidas a novas explosões, tem-se que depois de l blow-ups todas as singularidades serão simples. Isso define unicamente o blow-up $(U_Z^{(l)}, \pi_Z^{(l)}, \mathcal{P}_Z^{(l)}, \mathcal{F}_Z^{(l)})$, que chamaremos de **Desingularização de Z em 0** $\in \mathbb{C}^\mathbf{2}$. Para simplificar podemos também usar a notação $(\tilde{U}_Z, \pi_Z, \mathcal{P}_Z, \tilde{\mathcal{F}}_Z)$ para denotar uma desingularização. Mais precisamente:

Teorema 2.3 *Sejam* $\mathcal{F}$ *uma folheação em uma superfície complexa* M *e* $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$*. Então existe uma sequência de explosões* π *em* p *tal que todas as singularidades de* $\pi^*\mathcal{F}$ *sobre* $\pi^{-1}(p)$ *são simples.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em SOARES e MOL (2001, p. 126, Teorema 6.2.2). O termo sequência de explosões será melhor discutido no Capítulo 4 como preparação para a demonstração do Teorema 4.1.

Observação: Seja $\mathcal{F}$ folheação (de dimensão 1) em uma superfície complexa M(uma variedade complexa de dimensão 2). Uma vez que $\mathcal{F}$ tem dimensão e codimensão 1, ela tanto é localmente induzida por um campo de vetores holomorfo (Proposição 2.1) quanto por uma 1-forma holomorfa. Assim, se $\mathcal{F}$ é definida em uma vizinhança de $p \in M$

por um campo Z, escrito num sistema de coordenadas (x, y) tal que $p = (0,0)$, na forma

$$Z = Z_1\frac{\partial}{\partial x} + Z_2\frac{\partial}{\partial y} = (Z_1, Z_2),$$

então $\mathcal{F}$ também é definida pela equação $\omega = 0$, onde

$$\omega(x, y) = -Z_2(x, y)dx + Z_1(x, y)dy.$$

Podemos, da mesma forma em que fizemos na discussão acima, para campos vetoriais, olhar para o desenvolvimento de Taylor de Z_1 e Z_2 e avaliar a 1-forma $\omega(x, y)$ nos sistemas (x, t) e (u, y). Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Nas coordenadas (x, t) e (u, y), introduzidas no inicio da sessão, podemos olhar para as formas $\pi^*\omega(x, t)$ e $\pi^*\omega(u, y)$ a fim de obter uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{M}\backslash P$, que é possível pois a folheação $\mathcal{F}|_{M\backslash\{p\}}$ é transportada para $\tilde{\mathcal{F}}$ pelo biholomorfismo $\pi|_{\tilde{M}\backslash P} : \tilde{M}\backslash P \to M\backslash\{p\}$.

Assim, destacando as expressões do desenvolvimento de Z_1 e Z_2, após a explosão, estudamos os casos dicrítico e não dicrítico como anteriormente. O objetivo dessa observação é ratificar que a discussão pode ser feita, tanto no contexto de formas, como no de campos.

Exemplo 2.1 *Considere o campo* $Z(x, y) = (3x + y, -2x - y^2)$ *com singularidade em* $0 \in \mathbb{C}^2$. *Veja que*

$$DZ(0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 2.3, temos $\mu(Z, 0) = 1$, *ou seja,* 0 *é singularidade isolada de* Z. *Mais ainda,* $DZ(0)$ *tem* $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 1$ *como autovalores, portanto* $0 \in \mathbb{C}^2$ *não é singularidade simples.*

Podemos então considerar Z *dado pela* 1*-forma* $\omega(x, y) = (2x + y^2)dx + (3x + y)dy$. *Segue que,* $m(Z, 0) = 1, Z_{11}(x, y) = 2x$ *e* $Z_{21}(x, y) = 3x + y$. *Ademais, o termo cuja análise diz sobre o tipo de singularidade é igual a* $2x^2 + 3xy + y^2 \not\equiv 0$, *logo* $(0,0)$ *é singularidade não dicrítica.*

Nas coordenadas $(x, t) \xmapsto{\pi} (x, tx)$, *onde* π *é uma explosão em* 0, *temos*

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= (2x + x^2t^2)dx + (3x + tx)(tdx + xdt) \\ &= (2x + t^2x^2 + 3xt + t^2x)dx + (3x^2 + tx^2)dt \Rightarrow \\ \omega_1 = x^{-1}\pi^*\omega &= (2 + t^2x + 3t + t^2)dx + x(3 + t)dt \end{aligned}$$

Assim, as singularidades de $\mathcal{F}^1$ *são dadas por* $(0, t)$ *onde* $t^2 + 3t + 2 = 0$, *portanto as singularidades são* $(0, -2)$ *e* $(0, -1)$.

Deste modo, a folheação $\mathcal{F}$ *é dada pelo campo,* $\tilde{Z}(x, t) = (-x(3 + t), 2 + t^2x + 3t + t^2)$. *Analisando a singularidade* $(0, -2)$ *considere a mudança* $(x, t) \longmapsto (x, t - 2)$, *que* *faz com que* $(0,-2)$ *seja a origem, temos que após esta mudança a singularidade* $(0,2)$ *de* $\mathcal{F}^1$ *é dada pelo campo*

$$\tilde{Z}_1(x,t) = ((-x(1+t), 4x + t + t^2 + t^2x - 2tx)).$$

Assim,

$$D\tilde{Z}_1(0) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $D\tilde{Z}_1(0)$ *são* $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 1$, *segue que* $(0,-2)$ *é singularidade simples.*

Analisando a singularidade $(0,-1)$ *considere a mudança* $(x,t) \longmapsto (x, t-1)$ *e o campo* $\tilde{Z}_2(x,t) = (-x(2+t), x + t + t^2 - 2xt + xt^2)$ *que da a singularidade* $(0,-1)$ *de* $\mathcal{F}^1$. *Nesse caso,*

$$D\tilde{Z}_2(0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como os autovalores são -2 *e* 1, *temos que* $(0,1)$ *é singularidade simples.*

$\square$

Isso ilustra o que diz o Teorema 2.3, o que fizemos acima foi desingularizar o campo Z. Estudaremos no Capítulo 4 as informações que aparecem ao longo de sequências de explosões. Parte importante do que faremos no Capitulo 4 será relacionar a Multiplicidade Algébrica de um campo com os dados da sua desingularização, bem como com o Número de Mílnor. Se dois campos possuem a mesma desingularização suas multiplicidades algébricas coincidem? O que se pode dizer sobre o Número de Milnor? Antes disto, no Capítulo 3 seguinte, mostraremos a preservação do Número de Milnor por equivalências topológicas locais, nosso primeiro invariante topológico. Estas duas discussões nos permitirão, no Capítulo 5, apresentar mais alguns resultados de invariância topológica combinando todas estas informações.

3 A INVARIÂNCIA TOPOLÓGICA DO NÚMERO DE MILNOR

Vamos destacar alguns resultados relacionados ao número de Milnor que são preservados por equivalências topológicas locais.

3.1 Invariância topológica do número de Milnor

O objetivo central desta seção é provar que o Número de Milnor de um campo vetorial holomorfo, com singularidade isolada, é um invariante topológico em $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Em outras palavras, se Z e $\widetilde{Z}$ são localmente topologicamente equivalentes em p e $\widetilde{p}$, respectivamente, então $\mu(Z,p) = \mu(\widetilde{Z},\widetilde{p})$.

Nesse sentido, buscaremos uma definição alternativa para o índice de um campo vetorial holomorfo, a qual faremos uso na prova do Teorema principal desta seção.

Tendo em vista a equação diferencial $\dfrac{dz}{dT} = Z(z)$, podemos considerar o fluxo complexo dessa equação como sendo $\varphi : \overline{D_\varepsilon} \times \overline{B_r} \to B_\rho$, onde $D_\varepsilon = \{T \in \mathbb{C}; |T| < \varepsilon\}$, $B_r = \{z \in \mathbb{C}^n; \|z\| < r\}$ e $0 < r < \rho$. Ou seja, fixado z em U, $\dfrac{d\varphi}{dT}(T,z) = Z(\varphi(T,z))$. Ademais, φ possui a propriedade de que dado $z \in B_r$, o fluxo que passa por z, dado por $\varphi_z(.) = \varphi(.,z)$, é tal que $\varphi(0,z) = z$.

Lema 3.1 *Seja $\tau : \overline{B}_r - \{0\} \to D_\varepsilon - \{0\}$ uma função contínua tal que para todo $z \in \overline{B}_r - \{0\}$ e $t \in (0,1]$ tem-se $\varphi(t\tau(z),z) \neq z$. Seja $g : \partial B_r \to \mathbb{S}^{2n-1}$ dada por*

$$g(z) = \frac{\varphi(\tau(z),z) - z}{\|\varphi(\tau(z),z) - z\|}.$$

Então, $\mathrm{ind}_0(Z) = \deg(g)$.

Prova: Como $\varphi(t\tau(z),z) \neq z$, para $t \in (0,1]$ e $z \in \partial B_r$, podemos definir a função $G : [0,1] \times \partial B_r \to \mathbb{S}^{2n-1}$ por

$$G(t,z) = \frac{\varphi(t\tau(z),z) - z}{\|\varphi(t\tau(z),z) - z\|}, t \neq 0 \quad \text{e} \quad G(0,z) = \frac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\frac{Z(z)}{\|Z(z)\|},$$

já que em $t = 0$ a expressão geral de G fica indefinida, pois $\varphi(0,z) = z$. Desde que, $G(1,z) = g(z)$ devemos mostrar que $\lim\limits_{t\to 0} G(t,z) = \dfrac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\dfrac{Z(z)}{\|Z(z)\|}$ para conseguir uma homotopia entre $G(0,z)$ e $G(1,z)$. Com efeito, observe que para $t \neq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
G(t,z) &= \frac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{\|\varphi(t\tau(z),z)\|} = \frac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{\|\varphi(t\tau(z),z)\|}\cdot\frac{|t\tau(z)|}{|t\tau(z)|}\cdot\frac{\tau(z)}{\tau(z)}\\
&= \frac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\cdot\left\|\frac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{t\tau(z)}\right\|^{-1}\cdot\frac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{t\tau(z)}
\end{aligned}
$$

Ora, mas $\dfrac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{t\tau(z)} = \dfrac{\varphi(t\tau(z),z)-\varphi(0,z)}{t\tau(z)}$. Logo, quando $t\to 0$, pelas propriedades do fluxo, essa expressão tende para a derivada de φ em $T=0$, assim $\dfrac{\varphi(t\tau(z),z)-z}{t\tau(z)} \to Z(z)$ quando $t\to 0$. Isso mostra que, $G(t,z)\to\dfrac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\cdot\dfrac{Z(z)}{\|Z(z)\|}$ quando, $t\to 0$. Por fim, pelo que foi provado, temos G contínua, daí G é homotopia entre $G(0,z) = \dfrac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\cdot\dfrac{Z(z)}{Z(z)}$ e $G(1,z)=g(z)$. Se $n\geq 2, \pi_{2n-1}(\mathbb{S}^1)=\{0\}$, assim a aplicação $\dfrac{\tau}{|\tau|}:\partial B_r\to\mathbb{S}^1$ é homotópica a constante $1\in\mathbb{S}^1$ e assim, g é homotópica a $\dfrac{Z(z)}{\|Z(z)\|}$. Isso mostra que, $\operatorname{ind}_0(Z)=\deg(g)$.

□

O seguinte Lema descreve o comportamento do fluxo de Z em torno de um ponto regular.

Lema 3.2 *Seja $\varphi: D_\varepsilon\times\overline{B}_{r'}\to B_\rho$ o fluxo complexo local de Z. Suponha $Z(z)\neq 0$ para $z\in\overline{B}_r-\{0\}$, onde $0<r\leq r'$. Então existe $\delta>0$ tal que $\forall T\in D_\delta-\{0\}$ e $z\in\overline{B}_r-\{0\}$ temos $\varphi(T,z)\neq z$. Ver Figura 1.*

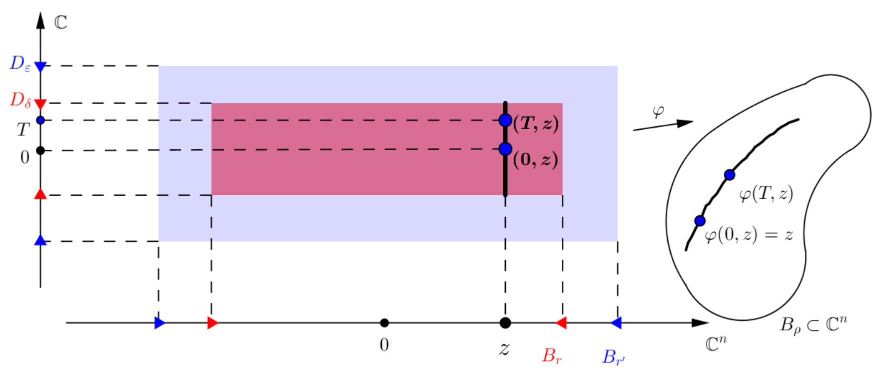

Figura 1: Descrição do Lema 3.2

Prova: Suponha que a propriedade pretendida no Lema não ocorre. Assim, dado $n\in\mathbb{N}$, com $1/n<\varepsilon$, existem $T_n\in D_{1/n}-\{0\}$ e $z_n\in\overline{B}_r-\{0\}$ tal que $\varphi(T_n,z_n)=z_n$. Em outras palavras, $\exists (T_n)\to 0$, $0<|T_n|<\varepsilon$ e $z_n\in\overline{B}_r-\{0\}$ tal que $\varphi(T_n,z_n)=z_n$. Seja L_n a folha de $Z/\overline{B}_r$ que passa por z_n, ou seja, $L_n=\varphi(D_\varepsilon,z_n)$ é dada localmente pelo fluxo de Z.

Afirmação: Mantendo a notação acima, temos:

(i) $L_n\cap\partial\overline{B}_r\neq\emptyset$

(ii) Para todo $n\in\mathbb{N}, \varphi(T_n,z)=z, \forall z\in L_n\cap\overline{B}_r$

Suponha que a afirmação seja verdadeira. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o item (i) da afirmação fornece $w_n \in L_n \cap \partial\overline{B}_r$. Como $\|w_n\| = r$, a menos de subsequência, podemos admitir que $w_n \to w_0$ e nesse caso $\|w_0\| = r$. Segue do item (ii) que $\varphi(T_n, w_n) = w_n$.

Assim,

$$Z(w_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(T_n, w_n) - \varphi(0, w_n)}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(T_n, w_n) - w_n}{T_n} = 0,$$

o que é um absurdo pois $w_0 \in \overline{B}_r - \{0\}$ é regular.

Prova da afirmação, item (i): Considere L uma folha não singular de Z e suponha, por contradição, que $L \subset B_r = \text{int}(\overline{B}_r)$. Defina $\tilde{r} = \sup\limits_{z\in L} \|z\|$. Podemos então tomar (q_n) em L tal que $q_n \to q_0$ e $||q_0|| = \tilde{r}$. Repare que, $q_0 \in \overline{L}$, logo $Z(q_0) \neq 0$, pois a folha L é regular. Assim, pelo teorema da caixa do fluxo complexo, existe $\alpha > 0, Q = Q(q_0)$, uma vizinhança de q_0, e $\psi : D_\alpha \times B_\alpha \to Q$ um difeomorfismo holomorfo, onde $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^{n-1}; \|z\| < \alpha\}$, $\psi(0,0) = q_0$ e $\psi(T + T_0, w) = \varphi(T, \psi(T_0, w))$, desde que os termos da igualdade estejam definidos. Considere $p \in Q$, temos $\psi^{-1}(q) \in D_\alpha \times B_\alpha$, logo $p_2(\psi^{-1}(q)) \in B_\alpha$, defina então o conjunto $P_q = \psi(D_\alpha \times p_2(\psi^{-1}(q)))$ qual chamaremos de placa de Q pelo ponto q, claramente P_q esta contido na folha de Z pelo ponto q. Nesse caso, podemos olhar para a aplicação $\psi_q : D_\alpha \to P_q$ como sendo $\psi|D_\alpha \times p_2(\psi^{-1}(q))$ que é uma imersão analítica. Observe a Figura 2.

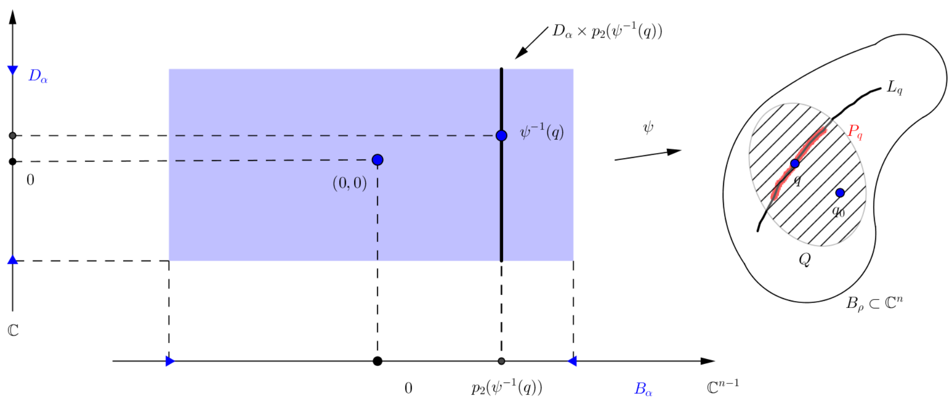

Figura 2: Placa contida na folha L_q

Observe que, ψ_{q_0} não é constante, pois se fosse, o fluxo em q_0 seria constante, daí q_0 seria singular. Assim, pelo princípio do módulo máximo, $0 \in D_\alpha$ não é ponto de máximo para a aplicação $z \in D_\alpha \mapsto \|\psi_{q_0}(z)\|$. Logo, existe $z \in D_\alpha$ tal que $\|p_0\| = \|\psi_{q_0}(z)\| > \|\psi_{q_0}(0)\| = \|q_0\| = \tilde{r}$, ou seja, existe $p_0 \in P_{q_0}$ tal que $\|p_0\| > \tilde{r}$. Por outro lado, pela continuidade, existe $\delta > 0$ tal que se $\|q - q_0\| < \delta$, então a placa P_q contem um ponto p, tal que $\|p\| > \tilde{r}$. Ora, mas como $q_n \to q_0$, para $n >> 1$, temos $\|q_n - q_0\| < \delta$. Assim, existe $p \in P_{q_n}$ tal que $\|p\| > \tilde{r}$. Isso contraria a maximalidade de $\tilde{r}$, já que, como $q_n \in L$, temos $P_{q_n} \subset L$.

Prova da afirmação, item (ii): Considere uma folha L de $Z/B_r, r < r'$. Suponha que $\varphi(T_0, z_0) = z_0$, para algum $z_0 \in Z$, e defina o conjunto $A = \{z \in L; \varphi(T_0, z) = z\}$, veja que $z_0 \in A$ e A é fechado. Estamos considerando aqui a topologia intrínseca das placas P_q de pontos $q \in L$. Como L é conexa vamos mostrar que A é aberto.

Seja $q \in A$, Como $Z(q) \neq 0$ tome o fluxo $\varphi_q : D_\varepsilon \to L$, onde $\varphi_q(T) = \varphi(T, q)$, nesse caso, φ_q parametriza L numa vizinhança de q. Pelas propriedades do fluxo, sendo $|T| < \varepsilon - |T_0| = \rho$, temos

$$\varphi(T_0, \varphi(T, q)) = \varphi(T_0 + T, q) = \varphi(T, \varphi(T_0, q)) \underbrace{=}_{q \in A} \varphi(T, q)$$

Repare que, $|T + T_0| \leq |T| + |T_0| < \varepsilon - |T_0| + |T_0| = \varepsilon$, isso faz com que os termos da igualdade acima estejam definidos. Mostramos com isso que, se $p \in \varphi_q(D_\rho)$ então $\varphi(T_0, p) = p$, portanto $\varphi_q(D_\rho) \subset A$, o que implica A aberto na topologia considerada.

□

O Corolário 3.1, abaixo, relaciona a função $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$, definida atraves do fluxo e de τ, como no Lema 3.1, com $\mu = \mathrm{ind}_0(Z)$.

Corolário 3.1 *Seja Z como antes, $\delta > 0$ do Lema 3.2 e $\tau : B_r - \{0\} \to D_\delta - \{0\}$ uma função contínua. Defina $f : B_r - \{0\} \to \mathbb{C}^n - \{0\}$ por $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$. Então, pelo Lema 3.2, temos $f(z) \neq z, \forall z \in B_r - \{0\}$. Mais ainda, se $(f - id)_* : H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \to H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\})$ é a aplicação induzida por $f - id$ no nível de homologia, então $(f - id)_*$ é a multiplicação por $\mu = \mathrm{ind}_0(Z)$.*

Prova: Desde que, τ é tal que $0 < |\tau(z)| < \delta$, temos pelo Lema 3.2 que, $\varphi(\tau(z), z) \neq z$, se $z \in B_r - \{0\}$. Por outro lado, o Lema 3.1 nos informa que $\mu = \mathrm{ind}_0(Z) = \deg(g)$ onde

$$g(z) = \frac{\varphi(\tau(z), z) - z}{||\varphi(\tau(z), z) - z||}.$$

Assim, $g_* : H_{2n-1}(\partial B_r) \to H_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$ é dada por $g_*(\sigma) = \mu\sigma$, onde σ é um gerador do grupo $H_{2n-1}(\partial B_r)$.

Por outro lado, definindo $i_s : \mathbb{C}^n - \{0\} \to \partial B_s$ como $i_s(z) = sz/||z||$, temos que isto é uma equivalência homotópica, portanto o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
H_{2n-1}(B_r - \{0\}) \arrow[r, "i_{r*}"] \arrow[d, "(f-id)_*"] & H_{2n-1}(\partial B_r) \arrow[d, "g_*"] \\
H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{2n-1}(B_r - \{0\}).
\end{tikzcd}$$

Deste modo, dado γ gerador de $H_{2n-1}(B_r - \{0\})$, temos $g_*(i_{r*}(\gamma)) = \mu i_{r*}(\gamma) = \mu\gamma$ e $i_{1*}((f - id)_*(\gamma)) = (f - id)_*(\gamma)$. Isso conclui a prova.

□

Teorema 3.1 *O Número de Milnor de um campo vetorial holomorfo é um invariante topológico em $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Ou seja, se Z e $\tilde{Z}$ são localmente topologicamente equivalentes, em p e $\tilde{p}$, respectivamente, então $\mu(Z,p) = \mu(\tilde{Z},\tilde{p})$.*

Vamos supor que Z e $\tilde{Z}$ são localmente equivalentes em $0 \in \mathbb{C}^n$ pelo homeomorfismo $h : B_{r'} \to h(B_{r'}) = U$. Sejam $\varphi : D_\varepsilon \times \overline{B}_r \to \mathbb{C}^n$ e $\tilde{\varphi} : D_\varepsilon \times \overline{B}_{\tilde{r}} \to \mathbb{C}^n$ os fluxos de Z e $\tilde{Z}$ respectivamente. Tome $r' < r$ suficientemente pequeno de modo que $B_{r'} \subset B_r$ e que $h(B_{r'}) = U \subset B_{\tilde{r}}$. Por fim, escolha ρ tal que $\varphi(D_\varepsilon \times B_\rho) \subset B_{r'}$ e $\varphi(D_\varepsilon \times h(B_\rho)) \subset U = h(B_{r'})$.

Pelo Lema 3.2, podemos tomar $\delta = \delta(Z) > 0$ e $\tilde{\delta} = \delta(\tilde{Z}) > 0$ tal que para todo par $(T,z) \in D_\delta - \{0\} \times B_r - \{0\}$ e $(\tilde{T},\tilde{z}) \in D_{\tilde{\delta}} - \{0\} \times B_{\tilde{r}} - \{0\}$ tem-se $\varphi(T,z) \neq$ z e $\tilde{\varphi}(\tilde{T},\tilde{z}) \neq z$. Nessas condições vamos provar o lema abaixo.

Lema 3.3 *Existem funções contínuas $\tau : B_\rho - \{0\} \to (0,\delta)$ e $\tilde{\tau} : h(B_\rho) - \{0\} \to D_{\tilde{\delta}}$ tais que*

$$h(\varphi(\tau(z),z)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(h(z)),h(z)), \forall z \in B_\rho - \{0\}.$$

Vamos fixar algumas notações antes de provar o Lema 3.3. Estamos no caso em que 0 é singularidade isolada de Z e $\tilde{Z}$. Seja $z_0 \in B_r - \{0\}$, como $Z(z_0) \neq 0$, temos, por teorema, que $\exists \alpha > 0, Q = Q(z_0)$ vizinhança aberta de z_0 e g um difeomorfismo holomorfo tal que, $g : D_\alpha \times B_\alpha \to Q$, onde $D_\alpha = \{T \in \mathbb{C}; |T| < \varepsilon\}$, $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^{n-1}; \|z\| < \alpha\}$, $g(0,0) = z_0$ e $g(T + T_0, w) = \varphi(T, g(T_0,w))$. Defina $V = V(z_0) = g(D_{\alpha/2} \times B_\alpha)$ e chame a tripla (V,Q,α) de **caixa** de Z.

Se considerarmos $q \in Q$ podemos olhar para $g^{-1}(q) \in D_\alpha \times B_\alpha$, com isso $p_2(g^{-1}(q)) \in B_\alpha$, onde p_2 denota a projeção usual na componente D_α. Deste modo, defina o conjunto $P_q = g(D_\alpha \times p_2(g^{-1}(q)))$, o qual chamamos de **placa** de Q pelo ponto q. Observe que, P_q está contida na folha por p. Por fim, repare que se $|T| < \alpha/2$ e $q \in V$ obtemos, $\varphi(T,q) \in P_q$. De fato, $\varphi(T,q) = \varphi(T, g(T_0,w)) = g(T + T_0, w) \in P_q$, pois $q \in V \Rightarrow q = g(T_0,w)$, onde $|T_0| < \alpha/2$ e $w \in D_\alpha$. Podemos fazer essa mesma construção para o campo $\tilde{Z}$.

Prova do Lema 3.3: Sejam (V,Q,α) e $(\tilde{V},\tilde{Q},\tilde{\alpha})$ caixas, tais que $h(Q) \subset \tilde{V}$. Como h é equivalência entre Z e $\tilde{Z}$, isto é, manda a folha de Z por um ponto q na folha de $\tilde{Z}$ pelo ponto $h(q)$, temos que $h(P_q) \subset \tilde{P}_{h(q)}$. Assim, existe uma função contínua $S : D_{\alpha/2} \times V \to D_{2\alpha}$ tal que, $h(\varphi(T,q)) = \tilde{\varphi}(S(T,q), h(q))$ e $S(T,q) = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

Vamos considerar $\{(V_j,Q_j,\alpha_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{(\tilde{V}_j,\tilde{Q}_j,\tilde{\alpha}_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ famílias de caixas de Z e $\tilde{Z}$, respectivamente, tais que:

(a) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são coberturas localmente finitas de $B_\rho - \{0\}$ e $h(B_\rho) - \{0\}$, respectivamente.

(b) $\forall j \in \mathbb{N}, \exists i = i(j) \in \mathbb{N}; h(Q_j) \subset \tilde{V}_i$

(c) $\alpha_j < \delta/2$ e $\tilde{\alpha}_j < \tilde{\delta}/4$.

Dado $j \in \mathbb{N}$ tome $i \in \mathbb{N}$ tal que $h(Q_j) \subset \tilde{V}_i$. Assim, tome, como acima, $S_j : D_{\alpha/2} \times V_j \to D_{2\tilde{\alpha}}$ tal que $h(\varphi(T,q)) = \tilde{\varphi}(S_j(T,q), h(q))$ para todo $(T,q) \in D_{\alpha_j/2} \times V_j$. Suponha agora que $q \in V_j \cap V_{j'} \neq \emptyset$ e que $|T| < \frac{1}{2}\min\{\alpha_j, \alpha_{j'}\}$, observamos acima que $\varphi(T,q) \in Q_j \cap Q_{j'}$. Temos também a igualdade

$$h(\varphi(T,q)) = \tilde{\varphi}(S_j(T,q), h(q)) = \tilde{\varphi}(S_{j'}(T,q), h(q))$$

O que implica $S_j(T,q) = S_{j'}(T,q)$. Seja $\tau : B_\rho - \{0\} \to (0,\delta)$ uma função contínua tal que $\tau(q) \leq \alpha_j/2$ se $q \in V_j$. Defina então $\tilde{\tau}(\tilde{q}) = S_j(\tau(h^{-1}(\tilde{q})), h^{-1}(\tilde{q}))$, se $\tilde{q} \in h(V_j)$. A observação feita anteriormente garante que $\tilde{\tau}(q)$ não depende de j, onde $q \in h(V_j)$ o que garante a boa definição de $\tilde{\tau}$. Ora, mas assim temos

$$\tilde{\tau}(h(q)) = S_j(\tau(h^{-1}(h(q))), h^{-1}(h(q))) = S_j(\tau(q), q).$$

Portanto,

$$h(\varphi(\tau(q), q)) = \tilde{\varphi}(S_j(\tau(q), q), h(q)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(h(q), h(q)).$$

$\square$

Se escrevermos $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$, para $z \in B_\rho - \{0\}$, e $\tilde{f}(w) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(w), w)$, para $w \in h(B_\rho) - \{0\}$, o Lema 3.3 nos diz que $h \circ f = \tilde{f} \circ h$. Por outro lado, o corolário do Lema 3.2 diz que $(f - id)_*$ e $(\tilde{f} - id)_*$ correspondem, nos níveis de homologia, a multiplicação por μ e $\tilde{\mu}$, respectivamente.

Diante dos resultados acima, o Lema 3.4, abaixo, implica no nosso objetivo, o Teorema 3.1.

Lema 3.4 *O diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd}
H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \arrow[r, "(f-id)_*"] \arrow[d, "h_*"'] & H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \arrow[d, "h_*"] \\
H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \arrow[r, "(f-id)_*"] & H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\})
\end{tikzcd}$$

Prova: Temos que, $h \circ f = \tilde{f} \circ h$, pelo Lema 3.3. Daí,

$$(\tilde{f} - id) \circ h = \tilde{f} \circ h - h = h \circ f - h.$$

Por conseguinte, é suficiente mostrar que $h \circ f - h$ e $h \circ (f - id)$ são homotópicas, onde $h \circ (f - id) : B_\rho - \{0\} \to \mathbb{C}^n - \{0\}$, pois isso dá homotopia entre $(\tilde{f} - id) \circ h$ e $h \circ (f - id)$. Definimos então a homotopia $F : [0,1] \times (B_\rho - \{0\}) \to \mathbb{C}^n - \{0\}$ por $F(t,z) = h(f(z) - (1-t)z) - h(tz)$. Observe que, F se trata da composição de funções contínuas, portanto é contínua, e além disso, $F(t,z) \neq 0$ para todo $z \in [0,1] \times (B_\rho - \{0\})$. De fato, se $F(t,z) = 0$ temos $h(f(z) - (1-t)z) = h(tz)$ o que implica, do fato de h ser homeomorfismo, que $f(z) - (1-t)z = tz$, donde $f(z) = z$. Tal fato é uma contradição pois, na notação já consolidada acima, temos $\varphi(\tau(z), z) \neq z$. Por fim, veja que $F(0,z) = h(f(z) - z) - h(0) = (h \circ (f - id))(z)$ e $F(1,z) = h(f(z)) - h(z) = (h \circ f - h)(z)$, isso mostra que F é a homotopia desejada.

$\square$

3.2 Invariância da multiplicidade ao longo de um subconjunto

Exemplo 3.1 *Seja $Z(z) = z^m$ e $\tilde{Z}(z) = z^n$ com $n \neq m$. Temos que $\operatorname{ind}_0(Z) = m \neq n = \operatorname{ind}_0(\tilde{Z})$. Veja que $\mathbb{C} - \{0\}$ é a única folha não singular de Z e $\tilde{Z}$. Logo, a identidade de $\mathbb{C}$ é uma equivalência entre Z e $\tilde{Z}$.*

O Exemplo 3.1 mostra que o Teorema 3.1 é falso para $n = 1$, ou seja, para campos vetoriais holomorfos $Z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Esta seção discute uma maneira de restringir o domínio de Z e obter um resultado análogo ao do Teorema 3.1 para $n = 1$. Salvo menção contrária, para facilitar, estamos sempre considerando conjuntos e funções analíticas irredutíveis.

$\square$

Seja Z um germe em $p \in \mathbb{C}^n$ de um campo vetorial holomorfo e V um germe em p de conjunto analítico, digamos que seja definido por $V = f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ é germe em p de uma aplicação analítica.

Definição 3.1 (Subconjuntos Z-invariantes) *Nas condições acima, dizemos que V é $Z-$invariante, se para todo $q \in V$ tivermos $df_q.Z(q) = 0$.*

Segue dessa definição que, se V é $Z-$invariante, então V é saturado pela folheação definida por Z, isto é, para cada $q \in V$ a folha L_q de Z que passa por q satisfaz $L_q \subset V$. Do ponto de vista de equivalência topológica, uma situação interessante é quando p é singularidade isolada e $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Nesse caso, se restringirmos Z a uma vizinhança suficientemente pequena de p temos que $V - \{p\}$ é folha de Z.

Proposição 3.1 *Sejam p e $\tilde{p}$ singularidades isoladas de Z e $\tilde{Z}$, respectivamente, e V germe em p de conjunto analítico irredutível Z-invariante tal que $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Suponha que $h : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, \tilde{p})$ é equivalência topológica local entre (Z, p) e $(\tilde{Z}, \tilde{p})$. Então $\tilde{V} = h(V)$ é germe em $\tilde{p}$ de conjunto analítico irredutível $\tilde{Z}$-invariante.*

Ver CAMACHO, LINS e SAD (1984, p.152, Proposição 2).

$\square$

Vamos supor que p é singularidade de Z e V é Z-invariante com $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Seja B uma bola suficientemente pequena de modo que $B \cap V$ seja homeomorfo a um disco 2-dimensional. O homeomorfismo pode ser dado, por exemplo, pela parametrização de Puiseux, ver Lema 2.1. Estamos na seguinte situação: Temos o disco $D = B \cap V$ e o campo vetorial $X = Z/D$, que tem uma única singularidade em $p \in D$. Podemos então olhar para X como campo vetorial real em D e assim seu índice está bem definido (Definição 2.7 e Proposição 2.2). Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.2 (Multiplicidade ao longo de um conjunto analítico) *Seja Z, V, B, $D = B \cap V$ e $p \in D$ como acima. A multiplicidade de Z ao longo de V em $p \in D$ é o índice topológico (Definição 2.7) de $X = Z/D$ em p, considerado como campo vetorial real em D. Usaremos a notação $\mathrm{ind}_p(Z/V)$ para esta multiplicidade.*

Temos então um resultado no sentido do Teorema 3.1, vamos mostrar que a multiplicidade ao longo de um conjunto Z-invariante é invariante topológico. Mantendo a notação fixada acima temos:

Teorema 3.2 *A multiplicidade de Z ao longo de V, um conjunto Z-invariante, é um invariante topológico. Mais precisamente, sejam Z e $\tilde{Z}$ campos vetoriais holomorfos localmente topologicamente equivalentes, por um homeomorfismo $h : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, \tilde{p})$, onde p e $\tilde{p}$ são singularidades isoladas de Z e $\tilde{Z}$, respectivamente. Suponha que V é Z-invariante, com $p \in V$, e $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Se $\tilde{V} = h(V)$, então $\mathrm{ind}_p(Z/V) = \mathrm{ind}_{\tilde{p}}(\tilde{Z}/\tilde{V})$.*

Antes disto, considere a seguinte proposição que exibe o índice em termos da parametrização de Puiseux.

Proposição 3.2 *Seja V um conjunto analítico Z-invariante de dimensão complexa igual a 1 e $p \in V$ uma singularidade isolada de Z. Seja $\alpha : (D, 0) \to (\mathbb{C}^n, p)$ uma parametrização de Puiseux de uma vizinhança de p em V, onde D é um disco complexo centrado em 0. Então existe um único campo vetorial holomorfo X em D tal que $d\alpha.X = Z \circ \alpha$. Mais ainda, se $X(t) = \sum_{j \geq m} a_j t^j$, com $a_m \neq 0$, então $\mathrm{ind}_p(Z/V) = m$.*

Prova: Podemos supor que $p = 0$. Desde que $\alpha : (D, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ é a parametrização de Puiseux de V, temos que α é injetiva, holomorfa em D e $\alpha'(t) \neq 0$ se $t \neq 0$. Ver Lema 2.1.

Seja $t \in D - \{0\}$. Então o espaço tangente a V em $\alpha(t)$ é gerado por $\alpha'(t)$. Então, pela Z-invariância de V, podemos escrever $Z(\alpha(t)) = X(t)\alpha'(t) = d\alpha(t).X(t)$, onde $X(t) \in \mathbb{C}$. Observe que $X : D - \{0\} \to \mathbb{C}$ é holomorfo. Vamos provar que X se estende naturalmente para 0.

Podemos escrever $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t))$, onde $\alpha_j(t) = t^{m_j}\xi_j(t), m_j \geq 1$ e $\xi_j(0) \neq 0$ ou $\xi_j(0) \equiv 0$. Seja $m_k = \min\{m_j; \xi_j \neq 0\}$. Por outro lado, sabemos que Z tem singularidade em $0 \in \mathbb{C}^n$. Olhamos, agora, para a série de Taylor da k-

ésima coordenada de Z e escrevemos $Z_k(z) = \sum_{|\sigma|\geq 1} a_\sigma z^\sigma$, onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, $z^\sigma = z_1^\sigma . z_2^\sigma . \cdots z_n^\sigma$ e $|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$, na notação de multi-índice. Portanto,

$$\begin{aligned} Z_k(\alpha(t)) &= \sum_{|\sigma|\geq 1} a_\sigma (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t))^\sigma \\ &= \sum_{|\sigma|\geq 1} a_\sigma (t^{m_1}\xi_1(t), t^{m_2}\xi_2(t), \cdots, t^{m_j}\xi_n(t))^\sigma \\ &= \sum_{|\sigma|\geq 1} a_\sigma t^{m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \cdots m_n\sigma_n} \xi^\sigma = \sum_{|\sigma|\geq 1} a_\sigma t^{\langle \sigma, m\rangle} \xi^\sigma, \end{aligned}$$

onde $\langle \sigma, m\rangle = \sum_{t=1}^n \sigma_i m_i$. Ora, isso nos dá $Z_k(\alpha(t)) = t^{m_k}\lambda(t)$, onde λ é uma função analítica numa vizinhança de 0. Por outro lado, da expressão dos α_j's, temos que

$$\alpha_k'(t) = m_k t^{m_k - 1}\xi_k(t) + t_k^m \xi_k'(t) = t^{m_k-1}u(t), \text{ onde } u(0) \neq 0.$$

Isso implica que,

$$X(t) = \frac{1}{\alpha_k'(t)} Z_k(\alpha(t)) = t\frac{\lambda(t)}{u(t)}$$

é analítico numa vizinhança de 0.

Desde que $\alpha : D \to V$ é difeomorfismo fora de $0 \in D$ segue que os índices de X em 0 e Z/V em $0 \in V$ são iguais.

Finalmente, tome $X(t) = t^m\gamma(t)$, onde $\gamma(0) \neq 0$. Se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, a variação do argumento de $X(\rho e^{i\theta}) = \rho^m e^{im\theta}\gamma(\rho e^{i\theta})$, quando θ varia de 0 a 2π, é $2m\pi$, o que implica $\mathrm{ind}_0(X) = m$.

□

Prova do Teorema 3.2: A prova é similar a do Teorema 3.1. Sejam Z e $\tilde{Z}$ campos vetoriais holomorfos com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n, n \geq 2$, e suponha que eles são localmente topologicamente equivalentes por um homeomorfismo $h : B_r \to h(B_r) = U$. Seja $V \subset B_r$ um conjunto analítico Z-invariante com $0 \in V$ e $\tilde{V} = h(V)$. Queremos provar que $\mathrm{ind}_0(Z/V) = \mathrm{ind}_0(\tilde{Z}/\tilde{V})$.

Sejam φ e $\tilde{\varphi}$ os fluxos complexos de Z e $\tilde{Z}$, respectivamente, τ e $\tilde{\tau}$ funções contínuas como no Lema 3.3 e defina $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$ e $\tilde{f}(w) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(w), w)$. Segue que, $h \circ f = \tilde{f} \circ h$. Sejam $\alpha : D \to V$ e $\alpha : D \to \tilde{V}$ as parametrizações de Puiseux de V e $\tilde{V}$, juntamente com X e $\tilde{X}$ sendo os campos vetoriais dados pela Proposição 3.2, isto é, $d\alpha.X = Z \circ \alpha$ e $d\tilde{\alpha}.\tilde{X} = \tilde{Z} \circ \tilde{\alpha}$.

Defina, agora, $F : \alpha^{-1}(B_\rho) \to D$ e $\tilde{F} : \tilde{\alpha}^{-1}(h(B_\rho)) \to D$ por $F = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ e $F = \tilde{\alpha}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}$. Se definimos $H = \tilde{\alpha} \circ h \circ \alpha^{-1}$, teremos que $H \circ F = \tilde{F} \circ H$. Seguindo a prova do Lema 3.4, temos que o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) & \xrightarrow{(F-id)_*} & H_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) \\ {\scriptstyle H_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_*} \\ H_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) & \xrightarrow{(F-id)_*} & H_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) \end{array}$$

A partir disso, é suficiente provarmos que $(F-id)_*$ e $(\tilde{F}-id)_*$ são multiplicações por m e $\tilde{m}$, respectivamente, onde $m = \text{ind}_0(Z/V) = \text{ind}_0(X)$ e $\tilde{m} = \text{ind}_0(\tilde{Z}/\tilde{V}) = \text{ind}_0(\tilde{X})$. Provaremos este fato para $(\tilde{F} - id)_*$.

Utilizando a equivalência homotópica $i_s : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{S}^1_s$ dada por $i_s(z) = sz/|z|$, vemos que é suficiente provamos que as aplicações $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1_r \to \mathbb{S}^1$, definidas por $\gamma_0(z) = \tilde{X}(z)/|\tilde{X}(z)|$ e $\gamma_0(z) = (\tilde{F}(z) - z)/|\tilde{F}(z) - z|$, são homotópicas. Para isso, defina $\tilde{\psi}(T, z) = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\varphi}(T, \tilde{\alpha}(z)))$ o fluxo local em D induzido por $\tilde{\varphi}$. Assim, $G : [0, 1] \times \mathbb{S}^1_r \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$G(t, z) = \frac{\tilde{\psi}(t\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha}(z), z) - z}{|\tilde{\psi}(t\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha}(z), z) - z|}.$$

Segue que, $G(1, z) = \gamma_1(z)$ e

$$\lim_{t \to 0} G(t, z) = \frac{\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha}(z)}{|\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha}(z)|} . \frac{\tilde{X}(z)}{|\tilde{X}(z)|}$$

Por fim, observe que $\tilde{\tau} : U - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ e 1 são homotópicas, pois $U - \{0\} = h(B_r) - \{0\}$ é homotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^{2n-1}$ e $\pi_{2n-1}(\mathbb{C} - \{0\})$ é trivial. Assim, se $\tilde{\tau}_t$ é homotopia entre 1 e $\tilde{\tau}$, então $(\tilde{\tau}_t \circ \tilde{\alpha})/|\tilde{\tau}_t \circ \tilde{\alpha}|$ é homotopia entre 1 e $(\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha})/|\tilde{\tau} \circ \tilde{\alpha}|$. Isso conclui a prova do Teorema.

$\square$

4 DESINGULARIZAÇÃO

O processo de Blow-up, descrito na Seção 2.4, permitiu construir a partir da folheação $\mathcal{F}_Z$, dada localmente em uma singularidade de $\mathcal{F}$, uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ cujas singularidades foram analisadas em dois casos: Dicrítico e Não Dicrítico. Trataremos neste capítulo de Desingularização (Teorema 2.3) nesses dois casos.

4.1 O caso não dicrítico

Vamos assumir, por enquanto, que o caso Dicrítico não aparece no processo de blow-up, trataremos disto na Seção 4.2. Vamos introduzir alguns conceitos importantes, relacionados a Desingularização, e buscar relaciona-los com os conceitos já definidos.

4.1.1 *Desingularização no caso não dicrítico*

Suponha que uma curva analítica, suave e invariante S contenha as singularidades de uma folheação $\mathcal{F}$, dada na vizinhança de uma singularidade por um campo vetorial analítico. Mudando as coordenadas de modo conveniente, podemos escrever:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^n P(x) + yQ(x,y), \\ \dot{t} = yR(x,y) \end{cases}$$

onde S é dada por $y = 0$ e $P(0) \neq 0$.

Definição 4.1 *O inteiro $n \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de $\mathcal{F}$ em $q \in S$ ao longo de S. Usaremos a seguinte notação: $\mu_{\mathcal{F}}(q, S)$.*

Considere uma desingularização $(\tilde{U}, \pi, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}})$ de Z. Um ponto $p \in \tilde{P}$ é chamado de ***corner*** se $\{p\} = P_1 \cap P_2$, com P_1 e P_2 sendo retas projetivas complexas em $\tilde{P}$. Assim, considere a seguinte definição.

Definição 4.2 (Multiplicidade alterada) *Seja $(\tilde{U}, \pi, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}})$ uma desingularização de Z e $p \in \tilde{P}$ uma singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$. Definimos,*

$$\mu^*_{\tilde{\mathcal{F}}}(p, P) = \begin{cases} \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(p, P), \textit{se } p \in P \textit{ não é corner} \\ \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(p, P) - 1, \textit{se } p \in P \textit{ é corner,} \end{cases}$$

onde P é uma reta projetiva complexa criada na desingularização de $\tilde{\mathcal{F}}$.

A discussão acima, a cerca da multiplicidade de uma folheação ao longo de uma curva analítica suave, pode ser vista ainda da seguinte forma. Sabendo que, folheações de dimensão um em superfícies complexas de dimensão dois tem dimensão e codimensão um, a folheação, tanto é induzida por um campo vetorial holomorfo, quando por uma 1-forma holomorfa. Assim, se $\mathcal{F}$ é folheação de uma superfície complexa M (variedade complexa de dimensão 2) é definida em uma vizinhança de $p \in M$ por um campo Z, escrito em um sistema de coordenadas (x, y) no qual $p = (0, 0)$, na forma

$$Z = Z_1 \frac{\partial}{\partial x} + Z_2 \frac{\partial}{\partial y} = (Z_1, Z_2),$$

então $\mathcal{F}$ também é definida pela equação $\omega = 0$ onde

$$\omega(x, y) = -Z_2(x, y)dx + Z_1(x, y)dy$$

Nesse sentido, sendo S uma curva suave em $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, em coordenadas locais (x, y), para as quais $p = (0, 0)$ e $S : \{y = 0\}$, $\mathcal{F}$ é induzida por uma $1 - forma$ holomorfa

$$\omega(x, y) = yf(x, y)dx + g(x, y)dy,$$

onde $g(0, 0) = 0$ e $g(x, 0) \neq 0$. A multiplicidade de $g(x, 0)$ em $x = 0$ é a multiplicidade de $\mathcal{F}$ ao longo de S.

Diante disto, se π é um explosão em p, então π^*S também é suave. Assim, se $q = \pi^*S \cap P$, onde $P = \pi^{-1}(p)$, temos o Lema 4.1, abaixo, que relaciona as multiplicidades de $\mathcal{F}$ e $\pi^*\mathcal{F}$, ao longo de S e π^*S, respectivamente, com a multiplicidade algébrica de $\mathcal{F}$.

Lema 4.1 *Nas condições acima:*

$$\mu_{\pi^*\mathcal{F}}(q, \pi^*S) = \begin{cases} \mu_{\mathcal{F}}(p, S) - (m(\mathcal{F}, p) - 1), & \text{se p é não dicrítica;} \\ \mu_{\mathcal{F}}(p, S) - m(\mathcal{F}, p), & \text{se p é dicrítica.} \end{cases}$$

Prova: Nas coordenadas (x, t) temos que $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida pela 1-forma

$$\begin{aligned} \omega_1(x, t) &= \frac{1}{x^m}\left[txf(x, tx)dx + g(x, tx)(tdx + xdt)\right] \\ &= \frac{1}{x^m}[(txf(x, tx) + tg(x, tx))dx + xg(x, tx)dt], \end{aligned}$$

onde, de acordo com a discussão já feita na seção 2.4, $m = m(\mathcal{F}, p) + 1$, no caso dicrítico, ou $m = m(\mathcal{F}, p)$ no caso não dicrítico. Temos π^*S dada por $\{y = 0\}$, assim $\mu_{\pi_1^*\mathcal{F}}(q, \pi^*S)$ é a multiplicidade de $(1/x^m)xg(x, 0)$ em $x = 0$. Ora, mas esta é igual a $\mu_{\mathcal{F}}(p, S) + 1 - m$, o que prova o resultado.

$\square$

Lema 4.2 *Se* $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ *é não dicrítica, então*

$$m(\mathcal{F},p)+1=\sum_{q\in \mathrm{Sing}(\pi^*\mathcal{F})}\mu_{\pi^*\mathcal{F}}(q,P)$$

Prova: Seja $w(x,y)=\sum\limits_{k\geq m}(f_k(x,y)dx+g_k(x,y)dy)$ uma 1-forma que induz $\mathcal{F}$ em p, onde $m=m(\mathcal{F},p)$. Nas coordenadas (x,t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida por

$$\omega_1(x,t)=[f_m(1,t)+tg_m(1,t)]dx+g_m(1,t)dt+x\rho(x,t)$$

onde ρ tem ordem maior que m. Mudando as coordenadas, podemos supor que $g_m(0,1)\neq 0$, de forma que $\mathrm{grau}(f_m(1,t)+tg_m(1,t))=m+1$. Porém, se $q=(0,t_0)\in \mathrm{Sing}(\pi^*\mathcal{F})\cap P$, $\mu_{\pi^*\mathcal{F}}(q,P)$ é a multiplicidade de t_0 como raiz de $f_m(1,t)+tg_m(1,t)$. Portanto,

$$\sum_{q\in \mathrm{Sing}(\pi^*S)}\mu_{\pi^*\mathcal{F}}(q,P)=\mathrm{grau}(f_m(1,t)+tg_m(1,t))=m+1=m(\mathcal{F},p)+1.$$

□

O Teorema 4.1, que enunciaremos em seguida, generaliza o Lema 4.2 para uma quantidade finita de explosões. O Teorema 4.1 traz um fórmula que relaciona a multiplicidade algébrica de um campo, ou uma folheação, com os dados obtidos da sua desingularização. Antes disto, vamos estabelecer algumas notações necessárias.

Seja π uma sequência finita de explosões em $p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Sendo $\pi_1: M_1\to M$ a primeira explosão dessa sequência, denote $P_1^{(1)}=\pi^{-1}(p)$, $D_1^{(1)}=P_1^{(1)}$ e $\mathcal{F}_1=\pi_1^*\mathcal{F}$. Indutivamente, dada a explosão $\pi_n: M_n\to M_{n-1}$ em $p_{n-1}\in D_{n-1}\subset M_{n-1}$, definimos

$$\begin{cases} P_n^{(n)}=\pi_n^{-1}(p_{n-1}) & \\ P_k^{(n)}=\pi^*P_k^{(n-1)} & \text{se } k=1,\cdots,n-1,\end{cases}$$

onde, por convenção, colocamos $p_0=p$, $M_0=M$ e fazemos $D_n=P_1^{(n)}\cup\cdots\cup P_n^{(n)}$.

Com essa notação, vamos definir o peso de uma reta projetiva, criada nos processos de explosão acima descritos, da seguinte forma:

Definição 4.3 (Peso de uma reta projetiva) *O peso de um reta projetiva, criada na sequência de explosões acima descrita, é dado pelo número inteiro abaixo, dividido nos seguintes casos:*

(i) $\rho(P_1^{(1)})=1$;
(ii) $\rho(P_j^{(n)})=\rho(P_j^{(n-1)})$, *se* $1\leq j<n$;
(iii) $\rho(P_n^{(n)})=\sum\limits_{p_{n-1}\in P_k^{(n-1)}}\rho(P_k^{(n-1)})$.

Em outras palavras, a Definição 4.3 atribuí peso 1 à reta projetiva criada na primeira explosão em p. Ademais, uma vez introduzida, uma reta mantém seu peso nas demais explosões. Por fim, a definição estabelece que cada nova reta tem como peso a soma dos pesos das retas que contém o ponto que lhe deu origem.

Teorema 4.1 *A multiplicidade algébrica $m(Z,p)$ de Z é dada por*

$$m(Z,p)+1=\sum_{q\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_n)} \rho(P_j^{(n)})\mu^*_{\mathcal{F}_n}(q,P_j^{(n)})$$

onde este somatório é tomado sobre as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{\mathcal{P}}$.

Prova: Para apenas uma explosão (caso $n=1$ na igualdade proposta pelo teorema) o resultado foi provado no Lema 4.2. Suponha, agora, a fórmula válida para n processos de blow-up. Efetuando a explosão π_{n+1} em $p_n\in D_n$, temos dois caso a analisar.

Caso (i): p_n não é *corner*. Se $p_n\in P_k^{(n)}$, a única parcela, da soma que o teorema se refere, alterada por uma explosão em p_n é

$$\rho(P_k^{(n)})\mu^*_{\mathcal{F}_n}(p_n,P_k^{(n)})=\rho(P_k^{(n)})\mu_{\mathcal{F}_n}(p_n,P_k^{(n)}).$$

Se $q=P_k^{(n)}\cap P_{n+1}^{(n+1)}$, então do Lema 4.1 temos que

$$\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q,P_k^{(n+1)})=\mu_{\mathcal{F}_n}(p_n,P_k^{(n)})-(m(\mathcal{F}_n,p_n)-1)$$

onde $m(\mathcal{F}_n,p_n)$ é a multiplicidade algébrica de $\mathcal{F}_n$ em p_n. Assim,

$$\begin{aligned}\rho(P_k^{(n)})\mu_{\mathcal{F}_n}(p_n,P_k^{(n)}) &= \rho(P_k^{(n)})(\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q,P_k^{(n+1)})+m(\mathcal{F}_n,p_n)-1)\\ &= \rho(P_k^{(n+1)})(\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q,P_k^{(n+1)})-1)+\rho(P_k^{(n+1)})m(\mathcal{F}_n,p_n). \quad (2)\end{aligned}$$

Por outro lado, como q é *corner*, temos que a multiplicidade alterada é dada por

$$\mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(q,P_k^{(n+1)})=\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q,P_k^{(n+1)})-1. \quad (3)$$

Analisaremos agora o termo $\rho(P_k^{(n+1)})m(\mathcal{F}_n,p_n)$. Como $P_k^{(n+1)}$ é a única reta projetiva de $D^{(n+1)}$ que intercepta $P_{n+1}^{(n+1)}$, temos

$$\rho(P_{n+1}^{(n+1)})=\rho(P_k^{(n+1)}). \quad (4)$$

Ademais, pelo Lema 4.2,

$$m(\mathcal{F}_n,p_n)+1=\sum_{r\in P_{n+1}^{(n+1)}}\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(r,P_{n+1}^{(n+1)}). \quad (5)$$

Por fim, substituindo as expressões (3), (4) e (5) em (2) obtemos:

$$\begin{aligned}
\rho(P_k^{(n)})\mu^*_{\mathcal{F}_n}(p_n, P_k^{(n)}) &= \rho(P_k^{(n)})\mu_{\mathcal{F}_n}(p_n, P_k^{(n)}) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})(\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_k^{(n+1)}) - 1) + \rho(P_k^{(n+1)})m(\mathcal{F}_n, p_n) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})(\mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_k^{(n+1)})) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)}) \left(\sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)}} \mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(r, P_{n+1}^{(n+1)}) - 1 \right) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})\mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_k^{(n+1)}) + \rho(P_{n+1}^{(n+1)})(\mu_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)}) \left(\sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} - \{q\}} \mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(r, P_{n+1}^{(n+1)}) \right) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})\mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_k^{(n+1)}) + \rho(P_{n+1}^{(n+1)})\mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(q, P_{n+1}^{(n+1)}) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)}) \left(\sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} - \{q\}} \mu^*_{\mathcal{F}_{n+1}}(r, P_{n+1}^{(n+1)}) \right).
\end{aligned}$$

Isso conclui a demostração no caso em que p_n não é *corner*, pois a expressão encontrada após a $(k+1)^{\text{a}}$ explosão é a mesma pretendida pelo Teorema. O resultado segue por indução.

Caso (ii): p_n é *corner*. Se $q_1 = P_{k_1}^{(n+1)} \cap P_{n+1}^{(n+1)}$ e $q_2 = P_{k_2}^{(n+1)} \cap P_{n+1}^{(n+1)}$. Temos que as parcelas alteradas são

$$\rho(P_{k_1}^{(n)})\mu^*_{\mathcal{F}_n}(p_n, P_{k_1}^{(n)}) + \rho(P_{k_2}^{(n)})\mu^*_{\mathcal{F}_n}(p_n, P_{k_2}^{(n)})$$

Da mesma forma que no primeiro caso, podemos relacionar as multiplicidades em q_1 e q_2 com a multiplicidade em p_n, usando praticamente as mesmas ferramentas, assim, a demonstração é análoga.

□

4.1.2 *Curvas generalizadas e suas desingularizações*

Vamos destacar e estudar a Desingularização de uma classe importante de campos vetoriais, as Curvas Generalizadas.

Definição 4.4 (Curva generalizada) *Um campo vetorial Z é uma curva generalizada se $\tilde{\mathcal{F}}_Z$, na desingularização de Z, não possui singularidades com autovalor igual a 0. Ou ainda, as singularidades, na desingularização de Z, nunca são do tipo Sela-nó.*

Definição 4.5 (Separatriz) *Uma separatriz de Z é uma curva integral conexa V de Z*

tal que $\overline{V} = V \cup 0$. *Se* $\mathcal{F}$ *é folheação (de dimensão 1) em uma variedade complexa* M, *dado* $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, *uma separatriz em* p *é um germe de conjunto analítico* V, *contendo* p, *invariante por* $\mathcal{F}$, *isto é,* $V \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ *é localmente uma união de folhas de* $\mathcal{F}$. *Uma separatriz é, portanto, um germe de curva analítica.*

Observação: Usamos aqui um resultado, provado em CAMACHO e SAD (1982, p. 579, Teorema único), que garante a existência de separatriz. Mais precisamente, se Z é campo vetorial holomorfo definido numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, com singularidade isolada nesse ponto, então existe germe de conjunto analítico V, passando por $0 \in \mathbb{C}^2$, Z-invariante.

Vamos provar que a desingularização de uma curva generalizada esta intimamente ligada com as suas separatrizes.

Exemplo 4.1 *Considere* $Z = Z_f = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$, *ou seja,* $\dot{x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ *e* $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}$. *Nesse caso,* $f : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *é analítica com singularidade em* $0 \in \mathbb{C}^2$.

As curvas integrais de Z_f são as componentes conexas de $f(x, y) = c$ para $c \in \mathbb{C}^*$ pequeno, de modo que $\{(x, y); f(x, y) = c\} \subset U$, e suas separatrizes são as componentes conexas de $f^{-1}(0)$ em $U - \{0\}$. As curvas integrais são fechadas em U e não se aproximam de $0 \in \mathbb{C}^2$, exceto $f(x, y) = 0$. Essa propriedade não é compatível com a existência de singularidades de $\mathcal{F}_{Z_f}$ que tem autovalor zero. Ver CAMACHO (1978, p. 92, Teorema 2).

$\square$

Mais geralmente, seja Z campo vetorial holomorfo em U, com $Z(0) = 0$, e $\{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ o conjunto das suas separatrizes em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então cada separatriz S_j corresponde a uma função irredutível $f_j : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, tal que $f_j(0) = 0$ e $S_j = f_j^{-1}(0) \cap (U \backslash \{0\})$. Deste modo, se $f = \prod_{j=1}^{k} f_j$ é a decomposição de f em fatores irredutíveis e se $S = \cup_{j=1}^{k} S_j$, então $S = f^{-1} \cap (U \backslash \{0\})$.

O Lemas 4.3 e 4.4, abaixo, resultam no Teorema mais importante desta subseção.

Lema 4.3 (Resolução de Singularidades) *Seja* $\mathcal{F}$ *folheação, em* $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, *de uma superfície complexa* M *com* $m(\mathcal{F}, p) = 1$. *Olhe para um campo* Z *que induz* $\mathcal{F}$ *e considere a parte linear de* Z *como sendo* $A = DZ(p)$. *Desde que,* $m(\mathcal{F}, p) = 1$ *temos* $A \neq 0$. *Assim, a forma canônica de Jordan de* A *tem uma das formas abaixo.*

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; \qquad (2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$$

$$(3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; \qquad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja π uma explosão em p, $P = \pi^{-1}(p)$ a reta projetiva originada e $\pi^*\mathcal{F}$ a folheação induzida. São verdadeiros os seguintes itens:

(i) Se p é singularidade do tipo (2) com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então $\pi^*\mathcal{F}$ não possui singularidades sobre P.

(ii) Se p é singularidade do tipo (2) com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\pi^*\mathcal{F}$ possui duas singularidades sobre P, ambas do tipo (2).

(iii) Se p é singularidade do tipo (3), então $\pi^*\mathcal{F}$ possui uma única singularidade, do tipo (1), sobre P.

(iv) Se p é singularidade do tipo (2), tal que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+$, então existe um número infinito de separatrizes em p.

(v) Se p é singularidade do tipo (4), então $\pi^*\mathcal{F}$ possui sobre P uma única singularidade q tal que $m(\pi^*\mathcal{F}, q) = 1$ ou $m(\pi^*\mathcal{F}, q) = 2$.

Deixamos como referência para este Lema o trabalho de SOARES e MOL (2001, p.124, Seção 7.4).

Lema 4.4 *Toda singularidade de uma curva generalizada que possui exatamente duas separatrizes transversais suaves é simples.*

Prova: Vamos provar primeiro que $m(\mathcal{F}, p) = 1$, para poder usar o Lema 4.3. Seja π uma sequência de explosões a fim de desingularizar $\mathcal{F}$. Como existem apenas duas separatrizes em p, $\pi^{-1}(p)$ é $\pi^*\mathcal{F}$-invariante. Sejam S_1 e S_2 tais separatrizes suaves e transversais tais que $q_1 = \pi^*S_1 \cap P_1$ e $q_2 = \pi^*S_2 \cap P_2$, onde P_1 e P_2 são retas projetivas de $D = \pi^{-1}(p)$. Observe que as únicas singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ fora dos *corners* de D são q_1 e q_2, pois se existisse uma singularidade fora dos *corners* de D esta seria uma sela nó, já que admitiria apenas uma separatriz, o que não ocorre por hipótese. Como $\rho(P_1) = \rho(P_2) = 1$, temos, do Teorema 4.1, que

$$m(\mathcal{F}, p) = \rho(P_1)\mu_{q_1}(\pi^*\mathcal{F}, P_1) + \rho(P_2)\mu_{q_2}(\pi^*\mathcal{F}, P_2) = 2.$$

Logo, $m(\mathcal{F}, p) = 1$. Vamos agora usar o Lema 4.3 e analisar os casos nele tratados. Inicialmente temos que p não é singularidade do tipo (1), por definição de curva generalizada. Da mesma forma, p não é do tipo (3), pois uma nova explosão origina uma sela-nó. Considere agora o tipo (4). A primeira explosão π_1, em p, origina uma única singularidade sobre a reta projetiva $P = \pi_1^{-1}(p)$ de modo que $\pi_1^*S_1$ e $\pi_1^*S_2$ interceptam P em dois pontos diferentes, que são singularidades. Logo, não ocorre o tipo (4). Restando assim, o tipo (2), porém o item (*iv*) do Lema 4.3 nos diz que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$, pois do contrário teríamos um número infinito de separatrizes. Segue que p é simples.

□

Teorema 4.2 *Seja Z uma curva generalizada com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Se*

S é a união das separatrizes de Z, então S e Z tem a mesma desingularização.

Prova: Seja π uma sequência de explosões que desingulariza o conjunto de separatrizes de $\mathcal{F}$ (folheação induzida por Z em 0). Vamos mostrar que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são simples. As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, que ficam em algum *corner* de $D = \pi^*(p)$ ou em $D \cap \pi^*S$, adimitem duas separatrizes transversais. Logo, pelo Lema 4.4, esses singularidades são simples. Por outro lado, ss singularidades nos *corners* de D ou em $D \cap \pi^*S$ constituem todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, pois se uma singularidade não fosse de nenhum desses dois tipos, esta admitiria apenas uma separatriz, o que contradiz o Lema 4.5 abaixo.

$\square$

Lema 4.5 *Suponha que uma curva generalizada tenha uma separatriz suave em uma singularidade. Então existe outra separatriz nessa singularidade.*

Ver SOARES e MOL (2001, p.151, Lema 8.7.4).

Observação: Vamos considerar, como no Exemplo 4.1, $Z = Z_f$ e supor f irredutível. Pelo Teorema 4.2 as desingularizações de Z e f são as mesmas. Aplicando então o Teorema 4.1 temos que $m(Z, 0) + 1 = \rho(P)$ onde P é a reta projetiva em $\mathcal{P}$ transversal a curva transformada de $f(x, y) = 0$. Porém, $m(Z, 0) + 1$ é a multiplicidade algébrica de f em $0 \in \mathbb{C}^2$, portanto, como f e Z_f tem as mesmas desingularizações segue que $m(f, 0) = \rho(P)$. Isso mostra que, a multiplicidade algébrica de f é igual ao peso da reta projetiva em $\mathcal{P}$ que é transversal a curva transformada de $f(x, y) = 0$. Se $f(x, y) = 0$ for redutível, faremos este processo para cada componente irredutível, ou seja, obteremos retas projetivas de peso igual a multiplicidade algébrica de cada componente. Como consequência dessa observação temos o seguinte teorema.

Teorema 4.3 *Seja Z uma cuva generalizada e $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, \cdots, f_k(x, y) = 0$ as equações de suas separatrizes. Então,*

$$m(Z, 0) + 1 = m(Z_f, 0) + 1 = \sum_{i=1}^{k} m(Z_{f_i}, 0)$$

Prova: Seja $f = f_1.f_2.\cdots.f_k$. Pelo Teorema 4.2, Z e Z_f tem as mesmas desingularizações. Como o Teorema 4.1 relaciona os dados da desingularização com a multiplicidade algébrica, temos $m(Z, 0) = m(Z_f, 0)$. A segunda igualdade seque da observação feita acima.

$\square$

4.1.3 *O número de Milnor de uma curva generalizada*

Sabendo que uma curva generalizada possui a mesma desingularização da união das suas separatrizes, a pergunta natural é: um campo vetorial que possui a mesma desingularização das suas separatrizes é curva generalizada? A resposta é não. Nesta subseção vamos introduzir uma condição algébrica para garantir a validade da recíproca. Vamos, novamente, recorrer ao o número de Milnor de um campo.

Proposição 4.1 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Supondo p não dicrítica temos:*

$$\mu(\mathcal{F}, p) = m(\mathcal{F}, p)^2 - (m(\mathcal{F}, p) + 1) + \sum_{q \in P} \mu(\pi^* \mathcal{F}, q).$$

Prova: Vamos considerar coordenadas (x, y) nas quais $p = (0, 0)$ e $\mathcal{F}$ é induzida pelo campo $Z = (Z_1, Z_2)$. A menos de uma mudança de coordenadas, podemos sempre supor que Z_1 e Z_2 tem a mesma ordem, digamos m, onde $m = m(\mathcal{F}, p)$, e que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão no sistema de coordenadas (x, t) de $\tilde{M}$, o que equivale a por exemplo a Z_1 ter um termo em y^m. Nesse sistema, supondo que $\omega(x, y) = -Z_2(x, y)dx + Z_1(x, y)dy$ induz $\mathcal{F}$ segue que $\omega(x, tx) = -Z_2(x, tx)dx + Z_1(x, tx)(tdx + xdt) = (tZ_1(x, tx) - Z_2(x, tx))dx + xZ_1(x, tx)dt$. Assim, no sistema (x, t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida pelo campo

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(x, t) &= \frac{1}{x^m}(xZ_1(x, tx), Z_2(x, tx) - tZ_1(x, tx)) \\ &= (x\tilde{Z}_1(x, t), \tilde{Z}_2(x, t) - t\tilde{Z}_1(x, t)). \end{aligned}$$

Deste modo, pela aditividade em coordenadas no Número de Milnor

$$\mu(\tilde{Z}, q) = \mu((x, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1), q) + \mu((\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1), q). \tag{6}$$

Pelo Lema 2.2, se $q = (0, t_0) \in P$, temos que $\mu((x, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1), q)$ é a multiplicidade de $\tilde{Z}_2(0, t) - t\tilde{Z}_1(0, t)$ em t_0, que, por outro lado, coincide com a multiplicidade de t_0 como raiz do polinômio $Z_{2m}(1, t) - tZ_{1m}(1, t)$, onde Z_{1m} e Z_{2m} denotam os termos de grau m de Z_1 e Z_2, respectivamente. Assim, $\sum_{q \in P} \mu((x, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1), q)$ é igual ao grau de $Z_{2m}(1, t) - tZ_{1m}(1, t)$, que por sua vez é igual a $m + 1$.

Deste modo, utilizando a equação (6), acima destacada, temos

$$\begin{aligned}\sum_{q\in P}\mu(\pi^*\mathcal{F},q) &= \sum_{q\in P}\mu((x,\tilde{Z}_2-t\tilde{Z}_1),q)+\sum_{q\in P}\mu((\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2-t\tilde{Z}_1),q)\\ &= (m+1)+\sum_{q\in P}\mu((\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2),q).\end{aligned}$$

Ademais, pelo Lema 2.3, temos

$$m^2+\sum_{q\in P}\mu((\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2),q)=\mu((Z_1,Z_2),p)=\mu(\mathcal{F},p).$$

Para finalizar, juntando essas duas equações temos:

$$\mu(\mathcal{F},p)=m(\mathcal{F},p)^2-(m(\mathcal{F},p)+1)+\sum_{q\in P}\mu(\pi^*\mathcal{F},q)$$

□

Teorema 4.4 *Seja campo vetorial complexo. Temos* $\mu(Z,0)\geq\mu(Z_f,0)$ *e a igualdade ocorre se, e somente se,* Z *é curva generalizada.*

Prova: Vamos provar este resultado por indução sobre o numero de explosões que Z_f precisa para se tornar desingularizado. Usaremos uma fórmula que relaciona o número de Milnor de um campo vetorial com o Número de Milnor das singularidades que aparecem na primeira explosão, no caso

$$\mu(Z_f,0)=m(Z_f,0)^2-(m(Z_f,0)+1)+\sum_{i=1}^{s}\mu(\mathcal{F}^{(1)}_{Z_f},p_i) \tag{7}$$

onde $p_1,p_2,\cdots,p_s$ são as singularidades de $\mathcal{F}^{(1)}_{Z_f}$ conforme a Proposição 4.1.

Suponha agora que Z_f precisa de uma explosão para ser desingularizado. Nesse caso, $\mathcal{F}^{(1)}_{Z_f}$ tem $p_1,p_2,\cdots,p_s$ como singularidades, todas são simples, pela definição de um campo ser desingularizado, e com Número de Milnor igual a 1, pois através de cada uma dessas singularidades passa uma curva suave transversal a reta projetiva e invariante por $\mathcal{F}^{(1)}_{Z_f}$. Isso também vale para $\mathcal{F}^{(1)}_{Z}$, exceto que, possivelmente, $p_1,p_2,\cdots,p_s$ não sejam todas simples ou outras singularidades $p_{s+1},p_{s+2},\cdots,p_k$ possam existir. Ou seja,

$$\mu(Z,0)=m(Z,0)^2-(m(Z,0)+1)+\sum_{i=1}^{k}\mu(\mathcal{F}^{(1)}_{Z},p_i),k\geq s \tag{8}$$

Deste modo, temos dois casos a analisar:

(i) Z é curva generalizada. Então, Z e Z_f possuem a mesma desingularização. Portanto, $s=k$ e as singularidades $p_1,p_2,\cdots,p_s$ são todas simples. Então, pelo Teorema

4.1, $m(Z,0) = m(Z_f,0)$ e pelas fórmulas (7) e (8), temos $\mu(Z,0) = \mu(Z_f,0)$.

(ii) Z não é curva generalizada. Então,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(\mathcal{F}_Z^{(1)}, p_i) > \sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{F}_{Z_f}^{(1)}, p_i)$$

De fato, se $k > s$ a desigualdade é válida pois todas as parcelas são positivas, desde que os p_i's são singularidades e o lado esquerdo tem mais parcelas. Por outro lado, se $k = s$ e se todas as singularidades $p_1, p_2, \cdots, p_k$ tem número de Milnor igual a 1, segue que $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ tem multiplicidade algébrica 1 em $p_i, i = 1, \cdots, k$. Assim, procedendo com um argumento análogo ao feito na demonstração do Lema 4.4, chegamos a uma contradição.

Vamos assumir agora que o teorema está provado para todas as singularidades em que o conjunto das suas separatrizes precisa de $l \in \mathbb{N}$ processos blow up para ser desingularizado. Considere agora Z campo vetorial em $\mathbb{C}^2$ que precisa de $l+1$ explosões para ser desingularizado. Explodindo Z_f uma vez, vamos olhar para as $\mathcal{F}_{Z_f}^{(1)}$-singularidades, digamos $p_1, p_2, \cdots, p_s$. Por sua vez, todas também são singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(1)}$. Da mesma forma, como no primeiro passo de indução, surgem duas possibilidades:

(i) Z é curva generalizada. Todos os pontos $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(1)}$. Pela hipótese de indução, pelo Teorema 4.1 e pelas fórmulas (7) e (8), temos $\mu(Z,0) = \mu(Z_f,0)$.

(ii) Z não é curva generalizada. Então, ou $p_1, p_2, \cdots, p_s$ são todas as singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(1)}$, com pelo menos uma delas não sendo curva generalizada, ou $\mathcal{F}_Z^{(1)}$ tem mais singularidades, $p_{s+1}, p_{s+2}, \cdots, p_k$. Na primeira situação, temos, pela hipótese de indução, que

$$\sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{F}_Z^{(1)}, p_i) > \sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{F}_{Z_f}^{(1)}, p_i).$$

Na segunda situação, temos

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(\mathcal{F}_Z^{(1)}, p_i) > \sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{F}_{Z_f}^{(1)}, p_i).$$

Portanto, como $m(Z,0) \geq m(Z_f,0)$, temos, das fórmulas (7) e (8), que $\mu(Z,0) > \mu(Z_f,0)$.

□

4.2 O caso dicrítico

Quanto ao caso Dicrítico, relembrando o que foi discutido na seção 2.4, temos as equações de Z, que definem uma folheação $\mathcal{F}$, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_\nu(x,y) + \cdots \\ \dot{y} &= b_\nu(x,y) + \cdots , \end{aligned}$$

onde $(a_\nu(x,y)b_\nu(x,y))$ é termo homogêneo da expansão de Z, com grau ν, onde ν indica a multiplicidade algébrica de Z. No caso dicrítico, temos $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) \equiv 0$ e, após o primeiro blow-up, obtemos a folheação

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_\nu(1,t) + xR_1'(x,t) \\ \dot{t} &= R_2'(x,t) - tR_1'(x,t), \end{aligned}$$

para o primeiro sistema de coordenadas de $U^{(1)}$, $(x,t) \mapsto (x,tx)$, como já discutido na seção 2.4.

Vamos realizar blow ups adicionais, não olhando apenas para as singularidades, insistiremos, também, em ter todas as separatrizes desingularizadas. Doravante, vamos adotar a seguinte notação:

Definição 4.6 *O conjunto de separatrizes de um campo vetorial é dito desingularizado quando:*

(i) Todas as separatrizes desse conjunto forem suaves e disjuntas;

(ii) Nenhuma separatriz passar por pontos que são corners;

(iii) Todas as separatrizes são transversais ao divisor.

Alem disso, se as singularidades que aparecem na explosão também são simples e se encontrarem em retas projetivas invariantes, então o campo vetorial é dito ser desingularizado.

Repare que, no caso não dicrítico, tratado na Seção 4.1, tínhamos pedido apenas que todas as singularidades sejam simples após um número finito de explosões.

Seja Z um campo vetorial definido em uma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^2$ e S uma curva suave, com $p \in S$, que não seja invariante por Z. Considere coordenadas locais (x,y) em $p \in \mathbb{C}^2; p = (0,0)$ e S é dada por $(y = 0)$. Seja

$$\dot{x} = a(x,y) \ , \ \dot{y} = b(x,y)$$

a equação de Z nesse sistema de coordenadas.

Definição 4.7 (Tangência entre um campo e uma curva) *Nas condições acima, a tangência de Z em relação a S é igual a multiplicidade de $0 \in \mathbb{C}$ como raiz de $b(x,0)$. Denote tal número por $\eta_Z(p,S)$ ou $\eta_{\mathcal{F}}(p,S)$, onde $\mathcal{F}$ é a folheação induzida por Z*

Lema 4.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida numa vizinhança de $p \in \mathbb{C}^2$ com multiplicidade* *algébrica* $m(\mathcal{F},p)$. *Seja* S *uma curva suave, com* $p \in S$, *não invariante por* $\mathcal{F}$. *Seja* $\mathcal{F}^{(1)}$ *a folheação obtida pela explosão em* $p \in S$. *Então,*

(i) *Se* $p \in S$ *é uma singularidade não dicrítica, então*

$$\eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p,S) = \eta_{\mathcal{F}}(p,S) - m(\mathcal{F},p);$$

(ii) *Se* $p \in S$ *é uma singularidade dicrítica, então*

$$\eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p,S) = \eta_{\mathcal{F}}(p,S) - (m(\mathcal{F},p)+1);$$

(i) *Se* $p \in S$ *não é singularidade e* $\eta_{\mathcal{F}}(p,S) \neq 0$, *então* $p \in S$ *é singularidade simples não dicrítica de* $\mathcal{F}^{(1)}$, *cujos auto valores são* -1 *e* 1 *e*

$$\eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p,S) = \eta_{\mathcal{F}}(p,S).$$

Prova: O blow up em $p \in S$ é representado nas coordenadas (x,t) pela mudança $y = tx$. Agora a curva S é dada por $(y=0)$ e $p=(0,0)$. A folheação $\mathcal{F}^{(1)}$ perto de p é dada pelas seguintes equações.

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = a(x,tx) \\ \dot{(tx)} = b(x,tx) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = a(x,tx) \\ \dot{t} = \dfrac{b(x,tx) - ta(x,tx)}{x} \end{array} \right.$$

Da mesma forma que fizemos a divisão dos casos na Seção 2.4, quando for o caso não dicrítico divide-se a expressão da folheação por $x^{m(\mathcal{F},p)-1}$, já no caso dicrítico dividimos por $x^{m(\mathcal{F},p)}$. Assim, $\mathcal{F}^{(1)}$ é dada por

$$\dot{x} = \frac{a(x,tx)}{x^{\sigma-1}}, \qquad \dot{t} = \frac{b(x,tx) - ta(x,tx)}{x^{\sigma}}$$

onde $\sigma = m(\mathcal{F},p)$ no caso em que p é singularidade não dicrítica e $\sigma = m(\mathcal{F},p)+1$ no caso dicrítico. Em ambos os casos, como S é dada, nessas coordenadas, por $(y=0)$, temos que

$$\eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p,S) = \text{ multiplicidade de } \frac{b(x,0)}{x^{\sigma}} = \eta_{\mathcal{F}}(p,S) - \sigma$$

o que demonstra (i) e (ii).

Suponha agora que $p \in S$ é ponto regular. Então, $\mathcal{F}$ pode ser dada pelo campo vetorial,

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = b(x,y)$$

e $\mathcal{F}^{(1)}$ é dada localmente em torno de $p \in S$ por

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{t} = b(x, tx) - t.$$

Portanto, $p \in S$ é singularidade simples de $\mathcal{F}^{(1)}$ com autovalores iguais a 1 e -1. Além disso,

$$\eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p, S) = \text{ multiplicidade de } b(x, 0) = \eta_{\mathcal{F}}(p, S.)$$

$\square$

O teorema a seguir garante que, nessas novas condições, ainda temos a existência de Desingularização.

Teorema 4.5 *Seja Z um campo vetorial holomorfo com um número infinito de separatrizes passando por $0 \in \mathbb{C}^2$. Então existe uma desingularização para Z.*

A prova desse resultado encontra-se em CAMACHO, LINS e SAD (1984, p. 168, Teorema 5).

Sendo S o conjunto das separatrizes de Z, temos o teorema abaixo que é análogo ao Teorema 4.2. Onde a definição de curva generalizada no caso dícritico é a mesma para o caso não dicrítico (Definição 4.4).

Teorema 4.6 *Se Z é curva generalizada, então Z e S tem a mesma desingularização.*

Prova: Inicialmente vamos desingularizar S. Buscamos as singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ onde $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ é a folheação que resulta das mesmas explosões em Z. Dada uma separatriz isolada, o ponto onde passa uma reta projetiva é singularidade de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$. Existem exatamente duas separatrizes passando por ele, e transversais. Na prova do Lema 4.4 vimos que a multiplicidade algébrica dessa singularidade é 1. Além disso, os dois autovalores são não nulos. Observamos ainda que, os autovalores λ_1 e λ_2 da singularidade não são relacionados por uma igualdade do tipo $m\lambda_1 = n\lambda_2$ para $m, n \in \mathbb{N}$. De fato, a singularidade em questão ou é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y + a x^p \end{cases}, \text{ onde } p \in \mathbb{N}.$$

No primeiro caso, teriamos infinitas separatrizes passando pela singularidade de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$. No outro caso, obtemos apenas uma separatriz. Portanto, nenhum dos casos pode acontecer. Logo, a singularidade é simples.

Por outro lado, nos pontos que são *corners*, não existem separatrizes passando por eles. Temos então duas possibilidades: Qualquer uma das duas retas que originam esse *corner* é fibrada por uma família de separatrizes ou não. No primeiro caso, se o *corner* fosse singularidade de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ teria no máximo uma separatriz de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ contradizendo o Teorema 4.1. Já no segundo caso, ambas as retas do *corner* são invariantes por $\mathcal{F}_Z^{(k)}$, e daí temos que a singularidade é simples.

Qualquer outra singularidade de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ ao longo de uma reta projetiva invariante implicaria a existência de separatriz de Z que são faz parte do conjunto S, o que não pode ocorrer. Finalmente, o Teorema 4.1 garante que não existem singularidades de $\mathcal{F}_Z^{(k)}$ em retas projetivas não invariantes.

□

Queremos uma formula semelhante a do Teorema 4.1, que permite calcularmos a multiplicidade algébrica a partir dos dados da desingularização, agora para o caso dicrítico. Faremos da seguinte maneira.

Lema 4.7 *Suponha que*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_\nu(x,y) + a_{\nu+1} + \cdots \\ \dot{y} = b_\nu(x,y) + b_{\nu+1} + \cdots \end{cases}$$

são as equações diferenciais de Z *e* $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) \equiv 0$*, onde* $\nu = m(Z,0)$*. Se* P *é a reta projetiva e* $\mathcal{F}^{(1)}$ *a folheação que resultam da explosão de* $0 \in \mathbb{C}^2$*, então*

$$m(Z,0) - 1 = \sum_{p \in P} \eta_{\mathcal{F}^{(1)}}(p,P).$$

Prova: Podemos assumir que $b_\nu(0,1) \neq 0$. Então, todos os pontos não transversais de $\mathcal{F}^{(1)}$, relativos a P, aparecerão no sistema de coordenadas (x,t) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_\nu(1,t) + x(\cdots) \\ \dot{t} &= [b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)] + x(\cdots). \end{aligned}$$

Concluímos que a soma das de tangências de $\mathcal{F}^{(1)}$ relativas a P é exatamente o grau de $a_\nu(1,t)$. Assim, temos que $a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1) \equiv 0$, portanto $u/a_\nu(u,1)$ e se $a_\nu(x,y) = a_1(y)x + a_2(y)x^2 + \cdots + a_\nu(y)x^\nu$, então $\deg a_1(y) = \deg[a_\nu(1,t)] = \nu - 1 = m(Z,0) - 1$.

□

Feita essa discussão, considere a seguinte situação: ao realizar a desingularização de um campo vetorial encontra-se uma singularidade dicrítica $p \in P \subset \mathcal{P}^{(k)}$ na folheação $\mathcal{F}^{(k)}$ do k-ésimo processo de explosão. Até este ponto podemos aplicar o Teorema 4.1. Como faremos adiante? Temos dois casos:

(i) $p \in P$ é *corner*. Consideramos o termo $\rho(P)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P)$ que aparece na fórmula dada pelo Teorema 4.1. Assim, temos que

$$\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p,P)=\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P)-m(\mathcal{F}^{(k)},p).$$

Se $p\in P$ é explodido para P' e $\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$ é o conjunto dos pontos onde $\mathcal{F}^{(k+1)}$ não é transversal a P', então $m(\mathcal{F}^{(k)},p)-1=\sum_{i=1}^{s}\eta_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_i,P')$ pelo Lema 4.7. Assim, podemos substituir $\rho(P)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P)$ por

$$\begin{aligned}\rho(P)[\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p,P)+m(\mathcal{F}^{(k)},p)] &= \rho(P)\left[\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p,P)+\sum_{i=1}^{s}\eta_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_i,P')+1\right]\\ &= \rho(P)\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p,P)+\sum_{i=1}^{s}\rho(P')\eta_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_i,P')+\rho(P')\end{aligned}$$

(ii) $p\in P_1\cap P_2$ é *corner*. Queremos substituir agora o termo $\rho(P_1)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_1)+\rho(P_2)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_2)$. Vamos supor que p é explodido para P' e $p_1\in P'\cap P_1, p_2\in P'\cap P_2$. Da mesma forma como no caso (i) temos

$$\begin{cases}\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_1,P_1)=\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_1)-m(\mathcal{F}^{(k)},p),\\ \mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_2,P_2)=\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_2)-m(\mathcal{F}^{(k)},p)\end{cases}$$

e $m(\mathcal{F}^{(k)},p)-1=\sum_{i=1}^{s}\eta_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_i,P')$. Segue daí que,

$$\begin{aligned}\rho(P_1)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_1)+\rho(P_2)\mu_{\mathcal{F}^{(k)}}(p,P_2) &= \rho(P_1)[\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_1,P_1)+m(\mathcal{F}^{(k)},p)]\\ &+ \rho(P_2)[\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_2,P_2)+m(\mathcal{F}^{(k)},p)]\\ &= \rho(P_1)\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_1,P_1)+\rho(P_2)\mu_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_2,P_2)\\ &+ (\rho(P_1)+\rho(P_2))\left[1+\sum_{i=1}^{s}\eta_{\mathcal{F}^{(k+1)}}(p_i,P')\right].\end{aligned}$$

Portanto, somos capazes de produzir uma fórmula quando aparece uma singularidade dicrítica. Contudo, ainda há um ponto a ser discutido: como transformar uma singularidade p que aparece em uma reta projetiva P não invariante por $\mathcal{F}^{(k+1)}$. A fórmula resultante depende da natureza da singularidade. Se tiver um número finito de separatrizes a ordem de tangência $\eta(p,P)$ pode ser substituída por $\eta(p,P)-(m(\mathcal{F},p)+1)$. Em ambos os casos nos conseguimos escrever $m(\mathcal{F},p)$ em termos de dos dados das explosões, como tem sido feito até agora. Essa situação torna inviável uma fórmula universal.

Em suma, podemos dizer que, dada a desingularização de um campo vetorial, existe uma fórmula que envolve: (1) termos devidos a contribuição das singularidades no caso não dicrítico; (2) uma expressão algébrica envolvendo o peso das retas projetivas, como reflexo da presença de singularidades dicríticas no processo de desingularização e que depende apenas da desingularização das componentes dicríticas.

Teorema 4.7 *Sejam Z e $\tilde{Z}$ campos vetoriais tais que $Z(0) = \tilde{Z}(0) = 0$ com S_Z e $S_{\tilde{Z}}$ sendo o conjunto das suas separatrizes, respectivamente. Suponha que Z é curva generalizada e que S_Z e $S_{\tilde{Z}}$ possuem dessingularizações isomorfas. Então, $\mu(\tilde{Z}, 0) \geq \mu(Z, 0)$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $\tilde{Z}$ é curva generalizada.*

Ver CAMACHO, LINS e SAD (1984, p. 173, Teorema 7).

Teorema 4.8 *Seja Z uma curva generalizada com ponto singular em $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja $\tilde{Z}$ campo vetorial topologicamente equivalente a Z em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então Z e $\tilde{Z}$ possuem dessingularizações isomorfas.*

Prova: A equivalência topológica entre Z e $\tilde{Z}$ é também uma equivalência entre S_Z e $S_{\tilde{Z}}$, onde S_Z e $S_{\tilde{Z}}$ é o conjunto das separatrizes dos campos em questão. Portanto, S_Z e $S_{\tilde{Z}}$ tem as mesmas dessingularizações. Desde que o número de Milnor é um invariante sobre equivalências topológicas temos, pelos Teoremas 4.4 e 4.7, que $\tilde{Z}$ é curva generalizada. Assim, pelo Teorema 4.3 e Teorema 4.6 segue que Z e $\tilde{Z}$ tem as mesmas dessingularizações.

□

Para finalizar, provaremos um resultado, análogo a Proposição 4.1, que relaciona o Número de Milnor com a Multiplicidade Algébrica e os dados da Desingularização.

Proposição 4.2 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Supondo p dicrítica temos:*

$$\mu(\mathcal{F}, p) = m(\mathcal{F}, p)^2 + m(\mathcal{F}, p) - 1 + \sum_{q \in P} \mu(\pi^*\mathcal{F}, q).$$

Prova: Vamos considerar coordenadas (x, y) nas quais $p = (0, 0)$ e $\mathcal{F}$ é induzida pelo campo $Z = (Z_1, Z_2)$. A menos de uma mudança de coordenadas, podemos sempre supor que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, que resultam da explosão em p, estão no sistema de coordenadas (x, t) de $\tilde{M}$, o que equivale a Z_1 ter um termo em y^{m+1}, onde $m = m(\mathcal{F}, p)$. Nesse sistema, supondo que $\omega(x, y) = -Z_2(x, y)dx + Z_1(x, y)dy$ induz $\mathcal{F}$, segue que

$$\begin{aligned} \omega(x, tx) &= -Z_2(x, tx)dx + Z_1(x, tx)(tdx + xdt) \\ &= (tZ_1(x, tx) - Z_2(x, tx))dx + xZ_1(x, tx)dt. \end{aligned}$$

Assim, no sistema (x,t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida pelo campo

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}(x,t) &= \frac{1}{x^{m+1}}(xZ_1(x,tx), Z_2(x,tx) - tZ_1(x,tx)) \\
&= (\frac{1}{x^m}Z_1(x,t), \frac{1}{x^{m+2}}xZ_2(x,t) - xtZ_1(x,t)) \\
&= (\tilde{Z}_1(x,t), \tilde{f}(x,t)).
\end{aligned}
$$

onde estabelecemos $\tilde{Z}_1(x,t) = \dfrac{1}{x^m}Z_1(x,t)$ e $\dfrac{1}{x^{m+2}}xZ_2(x,t) - xtZ_1(x,t)$.

Por conseguinte,

$$
\begin{aligned}
\mu((Z_1, xZ_2 - yZ_1), p) &= \mu((Z_1, xZ_2)) \\
&= \mu((Z_1, x), p) + \mu((Z_1, Z_2), p)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, o Lema 2.3 garante que

$$
\mu((Z_1, xZ_2 - yZ_1), p) = m(m+2) + \sum_{q \in P} \mu((\tilde{Z}_1, \tilde{f}), q).
$$

Por fim, juntando essas equações segue que

$$
\begin{aligned}
\mu(Z,p) &= \mu((Z_1, xZ_2 - yZ_1), p) - (m+1) \\
&= m(m+2) + \sum_{q \in P} \mu((\tilde{Z}_1, \tilde{f}), q) - (m+1) \\
&= m^2 + m - 1 + \sum_{q \in P} \mu((\tilde{Z}_1, \tilde{f}), q).
\end{aligned}
$$

$\square$

5 ALGUNS INVARIANTES

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados de invariantes relacionados a Multiplicidade Algébrica e ao Número de Milnor.

Considere um campo vetorial holomorfo Z numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n, n \geq 2$. Olhando para a expansão de Taylor de Z em 0 temos que

$$Z(z) = \sum_{i=k}^{\infty} Z_i(z)$$

onde Z_i é campo vetorial homogêneo de grau i. Suponha que Z_k tenha singularidade isolada em 0. Temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1 *Sejam Z e $\tilde{Z}$ dois campos vetoriais holomorfos definidos como acima, isto é, 0 é singularidade isolada de Z_k e $\tilde{Z}_{\tilde{k}}$. Se Z e $\tilde{Z}$ são localmente topologicamente equivalentes em 0, então $k = \tilde{k}$.*

Prova: *Afirmação:* $\mu(Z, 0) = k^n$, onde k vem da expansão de Z e n da dimensão de $\mathbb{C}^n$. Provada tal afirmação temos, pelo Teorema 3.1,

$$k^n \overset{Afirm.}{=} \mu(Z, 0) \overset{\text{Teo.3.1}}{=} \mu(\tilde{Z}, 0) \overset{Afirm.}{=} \tilde{k}^n.$$

Portanto, $k = \tilde{k}$.

Prova da afirmação: Considere $Z = Z_k + Z_{k+1} + \cdots$ a expansão, numa vizinhança de 0, do campo Z, onde 0 é singularidade isolada de Z_k. Defina $m = \inf\{||Z_k(z)||; ||z|| = 1\}$ e, para cada $j \geq k$, defina $m_j = \sup\{||Z_j(z)||; ||z|| = 1\}$. Queremos uma estimativa para $Z(z)$ sempre que $||z|| = 1$. Como, pela homogeneidade, temos $||Z_j(z)|| = ||Z_j(1)z^j|| \leq m_j||z||^j$, para $j \geq k+1$ e $||Z_k(z)|| = ||Z_k(1)||.||z||^k \geq m||z||^k$.

Diante disto, temos

$$\begin{aligned} \|Z(z)\| &= \|Z_k(z) + Z_{k+1}(z) + \cdots\| \\ &\geq \|Z_k(z)\| - \|Z_{k+1}(z) + Z_{k+2}(z) + \cdots\| \\ &\geq m\|z\|^k - \|Z_{k+1}(z)\| - \|Z_{k+2}(z)\| - \cdots \\ &\geq \left(m - \sum_{j \geq k+1} m_j \|z\|^{j-k}\right) \|z\|^k. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos tomar $\varepsilon > 0$, de modo que, se $\|z\| < \varepsilon$ implica em $\sum_{j \geq k+1} m_j \|z\|^{j-k} \leq m/2$. Daí, $m - \sum_{j \geq k+1} m_j \|z\|^{j-k} \leq m/2$. Portanto, $||Z(z)|| \geq m\|z\|^k/2$ para $\|z\| < \varepsilon$. Desta feita, tome $0 < r < \varepsilon$ e considere $G : [0,1] \times \mathbb{S}_r^{2n-1} \to \mathbb{C}^{2n-1}$

dada por

$$\begin{aligned} G(t,z) &= \sum_{j\geq k} t^{j-k} Z_j(z)/\|\sum_{j\geq k} t^{j-k} Z_j(z)\| \\ &= \frac{Z_k(z) + tZ_{k+1}(z) + t^2 Z_{k+2}(z) + \cdots}{\|Z_k(z) + tZ_{k+1}(z) + t^2 Z_{k+2}(z) + \cdots \|}. \end{aligned}$$

Repare que, G é homotopia entre $G(1,z) = Z(z)/\|Z(z)\|$ e $G(0,z) = Z_k(z)/\|Z_k(z)\|$. Logo, $\mu(Z,0) = \mu(Z_k,0)$. Por fim, se $c \neq 0$ é regular para Z_k, então, pelo Teorema de Bézout, o número de soluções da equação $Z_k(z) = c$ é exatamente k^n. Porém, o item (4) da Proposição 2.3, nos informa que $\mu(Z_k,0) = k^n$. Isso conclui a prova.

□

Teorema 5.2 (Sela-nó é invariante topológico) *Sejam Z e $\tilde{Z}$ campos vetoriais holomorfos em $\mathbb{C}^2$ com singularidade isolada em p e $\tilde{p}$, respectivamente. Se Z e $\tilde{Z}$ são localmente topologicamente equivalentes em p e $\tilde{p}$ (respec.) e p é sela-nó de Z, então $\tilde{p}$ é sela-no de $\tilde{Z}$.*

Prova: Como Z é sela-nó, a matriz de $DZ(p)$ possui um autovalor não nulo, digamos λ, e 0 é o outro auto valor. Vamos chamar o autoespaço de $DZ(p)$, associado a λ de direção forte de Z. Vamos utilizar o seguinte teorema, cuja prova é encontrada em MATTEI e MOSSU (1980): **Teorema:** Seja p uma sela-nó de Z e E a direção forte de Z em p. Então existe um germe de subvariedade analítica $W \subset \mathbb{C}^2$, tal que $p \in W$, W é tangente a E em p e W é Z-invariante.

Como p é ponto de W, podemos tomar, numa vizinhança deste ponto, um sistema de coordenadas (x,y) de modo que $p = (0,0)$ e $W \subset \{(x,y); y = 0\}$. Suponha que, nesse sistema, Z é escrito como $Z(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Recordando a Definição 3.1, W é Z-invariante se $df_q.Z(q) = 0$, para todo $q \in W$, onde f é a função analítica que dá W. No sistema de coordenadas (x,y), W é dado pela função $(x,y) \overset{f}{\mapsto} y$, que é linear, nesse caso $W \subset f^{-1}(0)$, portanto, $df_{(x,0)}Z(x,0) = df_{(x,0)}(P(x,0), Q(x,0)) = Q(x,0) \overset{Inv.}{=} 0$. Por outro lado, como λ é o autovalor que dá a direção de E, segue que $P(x,0) = \lambda x + a_2 x^2 + \cdots$, pois W é tangente a E. Daí, pela Proposição 3.2, temos $\mathrm{ind}_p(Z/W) = 1$.

Deste modo, considere $h : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, \tilde{p})$ uma equivalência entre Z e $\tilde{Z}$. Defina $\tilde{W} = h(W)$ e suponha, para simplificar, que $\tilde{p} = 0$. Segue da Proposição 3.1 que, $\tilde{W}$ é subconjunto analítico de $\mathbb{C}^2$. Por outro lado, sendo $\tilde{E}$ o subespaço de dimensão 1 que é tangente a $\tilde{W}$, temos que $\tilde{E}$ é invariante por $D\tilde{Z}(0)$. Segue do Teorema 3.2 que $\mathrm{ind}_0 \tilde{Z}/\tilde{W} = 1$. Daí, pelo monos um autovalor de $D\tilde{Z}(0)$ é não nulo. Como 0 é autovalor de $DZ(0)$, temos $\det\left(\partial Z_j/\partial x_k(0)\right)_{j,k\in\{1,2\}} = 0$, logo $\mu(Z,0) > 1$. Assim, pelo Teorema 3.1, segue que $\mu(\tilde{Z},0) > 1$. Ora, mas isso implica que $\det(D\tilde{Z}(0)) = 0$, logo o outro autovalor de $D\tilde{Z}(0)$ necessariamente é nulo. O que implica $\tilde{Z}$ ser sela-nó.

□

Corolário 5.1 (Multiplicidade Algébrica 1 é invariante topológico) *Sejam $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações holomorfas localmente topologicamente equivalentes em $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $\tilde{p} \in \mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, respectivamente. Se $m(\mathcal{F}, p) = 1$, então $m(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{p}) = 1$.*

Prova: Suponha que, $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são induzidas por Z e $\tilde{Z}$, respectivamente, e que $p = \tilde{p} = 0$. Como $m(Z, p) = 1$, escrevendo, $Z = Z_1 + Z_2 + \cdots$, onde $Z_1 \not\equiv 0$, temos que $DZ(0) \neq 0$. Olhando para a matriz de $DZ(0)$, suponha que λ_1 e λ_2 são os seus autovalores. Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ temos que Z é Sela-nó, e pelo Teorema 5.2, segue que $\tilde{Z}$ é Sela-nó. Portanto, como $D\tilde{Z}(0)$ tem autovalores que resultam em uma sela-nó, um deles é não nulo, daí $\tilde{Z}_1 \not\equiv 0$, logo $m(\tilde{Z}, 0) = 1$.

Se $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$, temos que $DZ(0)$ é invertível. Pela Proposição 2.3, temos $\mu(Z, 0) = 1$, logo $\mu(\tilde{Z}_1, 0) = 1$. Da mesma forma concluímos que $D\tilde{Z}(0)$ é invertível, logo seus autovalores são não nulos, o que nos dá $\tilde{Z}_1 \not\equiv 0$, ou seja, $m(\tilde{Z}, 0) = 1$.

□

Teorema 5.3 *Suponha que as folheações $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são localmente topologicamente equivalentes em $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $\tilde{p} \in \mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, respectivamente. Se $\mathcal{F}$ é não dicritica em p, então $\tilde{\mathcal{F}}$ é não dicrítica em $\tilde{p}$.*

Prova: Supondo que $\mathcal{F}$ é folheação não dicrítica em p, temos, pela discussão feita na Seção 2.4, que observando as equações que definem $\mathcal{F}$, suas separatrizes, são dadas pelas raízes de $b_v(1, t) - ta_v(1, t)$, que ocorrem em número finito. Por outro lado, uma singularidade dicrítica, caso em que $b_v(1, t) - ta_v(1, t) \equiv 0$, as separatrizes ocorrem numa quantidade infinita, correspondendo às folhas por pontos regulares de $P = \pi^{-1}(p)$.

Deste modo, se h é equivalência topológica entre $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, e supondo, por contradição, que $\tilde{\mathcal{F}}$ é dicrítica, isso implica que $\mathcal{F}$ tem uma quantidade infinita de separatrizes, o que não ocorre já que $\mathcal{F}$ é não dicrítica.

□

Corolário 5.2 *Suponha que as folheações $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são localmente topologicamente equivalentes em $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $\tilde{p} \in \mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, respectivamente. Se $\mathcal{F}$ é dicritica em p, então $\tilde{\mathcal{F}}$ é dicrítica em $\tilde{p}$.*

Prova: Segue do Teorema 5.3.

□

Teorema 5.4 *Sejam $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações em $\mathbb{C}^2$. Se $\mathcal{F}$ é curva generalizada e existe equivalência topológica entre $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, então $\tilde{\mathcal{F}}$ é curva generalizada.*

Prova: Seja $h : (U, \mathcal{F}) \to (\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}})$ um homeomorfismo que da a equivalência local entre $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ em $0 \in \mathbb{C}^2$. Considere $S = f^{-1}(0)$ e $\tilde{S} = \tilde{f}^{-1}(0)$ como o conjunto das separatrizes de $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, onde f e $\tilde{f}$ são curvas analíticas em $\mathbb{C}^2$.

O homeomorfismo h pode ser visto como $h : (U, S, 0) \to (\tilde{U}, \tilde{S}, 0)$, ou seja, h é uma equivalência entre S e $\tilde{S}$, portanto $\mu(f,0)=\mu(\tilde{f},0)$. Por outro lado, olhando para os campos $Z_f=(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x})$ e $\tilde{Z}_{\tilde{f}}=(-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y},\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x})$, temos $\mu(f,0)=\mu(Z_f,0)$ e $\mu(\tilde{f},0)=\mu(\tilde{Z}_{\tilde{f}},0)$. Logo,

$$\mu(Z_f,0)=\mu(\tilde{Z}_{\tilde{f}},0). \quad (*)$$

Suponha agora que as folheações $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são dadas localmente pelos campos Z e $\tilde{Z}$, respectivamente. Pelos Teoremas 4.4 e 4.7 é suficiente provarmos que $\mu(\tilde{Z},0)=\mu(\tilde{Z}_{\tilde{f}},0)$, desde que $\mu(Z,0)=\mu(Z_f,0)$, pois $\mathcal{F}$ é curva generalizada.

De fato, observe que

$$\mu(\tilde{Z},0)\overset{\text{Teo. 3.1}}{=}\mu(Z,0)=\mu(Z_f,0)\overset{(*)}{=}\mu(\tilde{Z}_{\tilde{f}},0).$$

□

Da prova do teorema acima conseguimos garantir que a Multiplicidade Algébrica de uma Curva Generalizada é invariante topológico. De fato, considerando Z curva generalizada e $\tilde{Z}$ um campo localmente topologicamente equivalente a Z, temos, pelo Teorema 5.4 acima, que $\tilde{Z}$ é curva generalizada. Assim,

$$m(Z,0)=m(Z_f,0)=m(f,0)-1=m(\tilde{f},0)-1=m(\tilde{Z}_{\tilde{f}},0)=m(\tilde{Z},0),$$

onde $m(Z,0)=m(Z_f,0)$ pois estamos supondo que f da o conjunto de separatrizes de Z e o Teorema 4.1 exibe a multiplicidade algébrica de Z via os dados da sua desingularização, que por sua vez são iguais aos dados da desingularização de Z_f, em virtude de Z ser curva generalizada. Vale o mesmo para o campo $\tilde{Z}$. Fica então demonstrado o corolário abaixo.

Corolário 5.3 *A multiplicidade algébrica de uma curva generalizada é invariante topológico.*

Finalizaremos com o seguinte resultado que, por nossa parte, é desconhecido o caráter de ineditismo.

Teorema 5.5 *Suponha que $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são folheações localmente topologicamente equivalentes, em $p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $\tilde{p}\in\mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, respectivamente, de uma superfície complexa M. Se após um blow-up nestas folheações tivermos $\mathcal{F}^{(1)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ topologicamente equivalentes, então $m(\mathcal{F},p)=m(\tilde{\mathcal{F}},p)$.*

Prova: Suponha que a folheação $\mathcal{F}$ seja não dicrítica em p. Pelo Teorema 5.3, temos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é não dicrítica. Vamos supor que, $\pi: M_1\to M$ é explosão em $p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e $P=\pi^{-1}(p)$. Da mesma forma, seja $\tilde{\pi}: M_2\to M$ explosão em $\tilde{p}$ e defina $\tilde{P}=\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{p})$. Nesse caso, $\mathcal{F}^{(1)}$ é obtida de $\pi^*\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ obtida de $\tilde{\pi}^*\tilde{\mathcal{F}}$. Dito isto, a Proposição 4.1 nos informa que

$$\mu(\mathcal{F},p) = m(\mathcal{F},p)^2 - m(\mathcal{F},p) - 1 + \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F},q) \text{ e}$$
$$\mu(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p}) = m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})^2 - m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p}) - 1 + \sum_{q\in \tilde{P}} \mu(\tilde{\pi}^*\tilde{\mathcal{F}},q).$$

Podemos então definir a constante $A = -1 + \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F},q) - \mu(\mathcal{F},p)$. Agora observe que, como $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são topologicamente equivalentes, então, pelo Teorema 3.1, $\mu(\mathcal{F},p) = \mu(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})$. Da mesma forma, como $\mathcal{F}^{(1)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ são topologicamente equivalentes, temos $\sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F},q) = \sum_{q\in \tilde{P}} \mu(\tilde{\pi}^*\tilde{\mathcal{F}},q)$.

Por outro lado, considere o polinômio

$$f(m) = m^2 - m + A.$$

Veja que, $m(\mathcal{F},p)$ é raiz positiva de f, assim, estudando suas raízes, temos

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4A}}{2}.$$

Como m é um inteiro positivo, pois p é singularidade, $m(\mathcal{F},p) = \frac{1-\sqrt{1-4A}}{2}$ não ocorre, já que para este número ser positivo devemos ter $\sqrt{1-4A} < 1$, o que implicaria em $m(\mathcal{F},p)) < 1$. Portanto, nos resta

$$m(\mathcal{F},p) = \frac{1 + \sqrt{1-4A}}{2}.$$

Logo, pela discussão feita acima, a constante A, definida para $\mathcal{F}$, é a mesma para $\tilde{\mathcal{F}}$, ou seja, $m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})$ também é raiz de f, logo $m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p}) = \frac{1+\sqrt{1-4A}}{2}$. Segue que, $m(\mathcal{F},p) = m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})$.

No caso dicrítico, a Proposição 4.2 nos fornece

$$\mu(\mathcal{F},p) = m(\mathcal{F},p)^2 + m(\mathcal{F},p) - 1 + \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F},q) \text{ e}$$
$$\mu(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p}) = m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})^2 + m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p}) - 1 + \sum_{q\in \tilde{P}} \mu(\tilde{\pi}^*\tilde{\mathcal{F}},q).$$

Igualmente como no caso não dicrítico, definindo $A = -1 + \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F},q) - \mu(\mathcal{F},p)$, temos que $m(\mathcal{F},p)$ é raiz positiva do polinômio

$$f(m) = m^2 + m + A.$$

Assim, $m(\mathcal{F},p) = \frac{-1\pm\sqrt{1-4A}}{2}$. Nesse caso, $m(\mathcal{F},p)$ não pode ser igual a $\frac{-1-\sqrt{1-4A}}{2}$, pois é positivo. Portanto, pelo mesmo argumento do caso anterior, temos que $m(\mathcal{F},p) = \frac{-1+\sqrt{1-4A}}{2} = m(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{p})$. Concluímos, portanto, que nas hipóteses deste Teorema, a multiplicidade algébrica é invariante topológico.

$\square$

6 CONCLUSÃO

Estudamos inicialmente algumas ferramentas ligadas a um campo vetorial holomorfo, como o Número de Milnor e a Multiplicidade Algébrica. Posteriormente, vimos que a equação diferencial dada por um campo, induz uma folheação holomorfa. Num primeiro momento, mostramos a invariância topológica do Número de Milnor em $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Não obstante, tratamos de Desingularização, via processos de Blow-up, e estudamos os dados obtidos por esses processos, tanto no caso de Singularidade Dicrítica, como Não Dicrítica, relacionando esses dados com as ferramentas já conhecidas. Por fim, no último capítulo, apresentamos alguns invariantes, por equivalências topológicas, provenientes de todas as discussões feitas ao longo do texto.

REFERÊNCIAS

A'CAMPO, N. Le nombre de Lefschetz d'une Monodromie. **Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76 = Indag. Math.**, v. 35, p. 113–118, 1973.

BURAU, Werner. Kennzeizeichnung der schlauchknoten. **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg**, v. 9, p. 125–133, 1932.

CAMACHO, Cesar. On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in $\mathbf{C}^2$. **Asterisque**, v. 59-60, p. 83–94, 1978.

CAMACHO, Cesar; LINS, Alcides; SAD, Paulo. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. **J. Differential Geometry**, v. 20, p. 143–174, 1984.

CAMACHO, Cesar; SAD, Paulo. **Pontos Singulares de Equações diferenciais analíticas**. IMPA, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1987.

CAMACHO, Cesar; P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. **Ann. of Math.**, v. 115, p. 579–595, 1982.

EBELING, W. **Functions of Several Complex Variables and their singularities**. Vol. 83, Graduate Studies in Mathematics, 2007.

EISENBUD, D. **Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry**. Vol. 150, Graduate Texts in Mathematics, 1995.

EPHRAIM, R. $\mathcal{C}^1$ preservation of multiplicity. **Duke Math. Journal**, v. 43, p. 797–803, 1976.

EYRAL, Christophe. Zariski's Multiplicity question — a survey. **NEW ZEALAND JOURNAL OF MATHEMATICS**, v. 36, p. 253–276, 2007.

LÊ, Dung. T. Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe,. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 23, p. 261–270, 1973.

MATTEI, J. F.; MOSSU, R. Holonomie et intégrales premiéres. **Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (4)**, v. 13, p. 469–523, 1980.

MILNOR, J. **Topology from the differentiable viewpoint**. The University Press of Virginia, 1965.

ROSAS, R. Bilipschitz Invariants for Germs of Holomorphic Foliations. **Int. Mathematics Res. Notices**, v. 11, p. 3425–3472, 2016.

SEIDENBERG, Abraham. Reduction of singularities of the differential equation Ady=Bdx. **Amer. J. Math**, v. 90, p. 248–269, 1968.

SOARES, M.; MOL, R. **Índices de Campos Holomorfos e Aplicações**. IMPA, 23º Coloquio Brasileiro de Matemática, 2001.

SOTOMAYOR, J. **Licões de Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

ZARISKI, O. On the topology of algebroid singularities. **Amer. J. Math**, v. 54, p. 453–465, 1932.

ZARISKI, O. Some open questions in the theory of singularities. **Amer. Math. Soc.**, v. 77, p. 481–491, 1971.