



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CAMPUS SOBRAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

DELANO KLINGER ALVES DE SOUZA

O PRODUTO DE QUATERBITS NÃO GERA UM QUBIT  
ENTRELAÇADO

SOBRAL

2017

DELANO KLINGER ALVES DE SOUZA

O PRODUTO DE QUATERBITS NÃO GERA UM QUBIT ENTRELAÇADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Federal do Ceará Campus Sobral, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica e Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Computação Distribuída.

Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Nascimento.

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Ozório de Oliveira Filho.

DELANO KLINGER ALVES DE SOUZA

O PRODUTO DE QUATERBITS NÃO GERA UM QUBIT ENTRELAÇADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Federal do Ceará Campus Sobral, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica e Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Computação Distribuída.

Aprovada em .

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Cláudio do Nascimento  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Rui Facundo Vigelis  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Engenharia Elétrica e Computação

---

A000p Souza, Delano Klinger Alves de .  
O Produto de Quaterbits não Gera um Qubit Entrelaçado / Delano Klinger  
Alves de Souza. – Sobral, 2017.  
67.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Campus Sobral, Curso  
de Engenharia Elétrica, Sobral, 2017.

Área de Concentração: Algoritmos e Computação Distribuída.

Orientação: Prof. Dr. José Cláudio Nascimento.

1. Quatérnio. 2. Entrelaçamento. 3. Quaterbit. 4. Quântica. 5. Con-  
corrência. I. Título.

CDD:000.0

---

*Aos Meus Filhos:  
Daniel Bruno,  
Delano Klinger J.  
Samuel Klinger  
Danielle Christine.  
A minha amada  
Régia Prado.  
Ao meu tio lindo  
Tancredo Wilson  
(in memoriam).*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Tancredo (in memoriam) e Lica (in memoriam) por tudo que sou e conquistei na minha vida. A eles, meu eterno amor.

À minha mãe genitora Maria Emília (in memoriam).

À minha mãe de coração Cremilda de Souza Moura.

Aos minhas irmãs e tias amadas, pelo apoio incondicional, em especial a Fatinha e Arlete.

Aos meus tios Francisco Alves de Souza (Zequinha) e Ludenísia (in memoriam).

À minha amada Régia Prado, companheira e incentivadora em todos os momentos.

À minha cunhada Francisca Aparecida Prado Pinto e a minha sogra querida Maria Prado, pelos incentivos prestados.

Ao meu orientador José Cláudio do Nascimento pela sua dedicação, paciência e sabedoria.

À banca de defesa, pela disponibilidade e por aceitarem prontamente o nosso convite.

Aos/às professores/as do Curso de Mestrado Acadêmico, pelas reflexões em sala de aula, que possibilitaram ampliar nossos conhecimentos.

À coordenação e funcionários/as do PPGEEC pela cordialidade durante essa trajetória.

Aos professores do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará-Campus Sobral, e em especial aos professores: Vandilberto Pereira Pinto e ao grande amigo Juan Carlos Oliveira de Medeiros.

Aos colegas de sala de aula, pelo companheirismo e generosidade.

Aos colegas de trabalho do Curso de Física da Universidade Estadual Vale do Acaraú, e em especial aos três amigos professores: Everasmo Freire Bezerra, Francisco Leandro de Oliveira e ao eterno amigo e conselheiro, Luiz Ozório de Oliveira Filho.

## RESUMO

O *quaterbit* é a menor unidade de informação da mecânica quântica quaterniônica. Seu estudo traz a tona problemas fundamentais da Mecânica Quântica que também têm implicações na Teoria da Informação e Computação Quântica. Neste trabalho, foi investigado se um par de *quaterbits* não entrelaçados podem estar entrelaçados na Mecânica Quântica dos números complexos. Para verificar esta hipótese, foram utilizados dois *quaterbits* arbitrários como singletos e, em seguida, tomamos o produto tensorial. A partir deste produto tensorial, estabelecemos as condições necessárias para que o estado esteja somente na Mecânica Quântica Complexa. Dentro desse procedimento, dois casos particulares foram analisados: estado puro e um caso simples de estado misto. Para estados puros, achamos que o *qubit* bipartido resultante ainda não está entrelaçado, e, portanto, concluímos que o produto tensorial de dois *quaterbits* puros não resulta num *qubit* bipartido puro entrelaçado. Por último, consideramos um estado misto de *quaterbits* não entrelaçado (com algumas restrições) e estabelecemos as condições para que o mesmo esteja somente na Mecânica Quântica Complexa, e, portanto concluímos por meio da *concorrência de Wootters* que o estado continua desentrelaçado.

**Palavras-chave:** Quatérnio. Entrelaçamento. Quaterbit. Quântica. Concorrência.

## ABSTRACT

The *quaterbit* is the smallest unit of information of Quaternion quantum mechanics. Their study brings to light fundamental problems of Quantum Mechanics that also have implications in Information Theory and Quantum Computation. In this work, it was investigated whether a pair of *quaterbits* may be entangled in Quantum Mechanics of complex numbers. To verify this hypothesis, two arbitrary *quaterbits* were used as singlets and we did the tensorial product. From this tensorial product, we establish the necessary conditions for the state to be only in Complex Quantum Mechanics. Within this procedure, two particular cases were analyzed: pure state and a simple case of mixed state. For pure states, we find that the resulting separable bipartite *qubit* is not entangled, and therefore we conclude that the tensor product of two pure *quaterbits* does not result in a bipartite pure *qubit* entangled. Finally, we consider a mixed state of disentangled *quaterbits* (with some restrictions) and establish the conditions so that it lies only in Complex Quantum Mechanics, and therefore we conclude by using the *Wootters concurrence* that the state is disentangled.

**Keywords:** Quaternion. Entanglement. Quaterbit. Quantum. Concurrence.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{H}$	Conjunto dos números quatérniônicos
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$\mathcal{V}$	Módulo quatérniônico à direita
$\mathcal{A}_{adj}$	Conjunto dos operadores lineares quatérniônicos auto-adjuntos
$\mathcal{A}_{adj}^+$	Conjunto dos operadores lineares quatérniônicos auto-adjuntos semi-definidos positivos
$\mathcal{A}_{adj}^{1+}$	Esfera quatérniônica unitária
$\otimes$	Produto tensorial
$\mathcal{C}$	Concorrência de Wootters
$\text{tr}$	Traço de uma matriz
$\rho$	Matriz densidade
$\text{lin}_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}$ -linearização
$\text{sup}$	supremo

## SUMÁRIO

Introdução	. . . . .	11
1	ANEL DOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON . . . . .	14
1.1	Anel dos Quatérnios . . . . .	15
1.1.1	Forma Algébrica . . . . .	15
1.1.2	Forma Vetorial . . . . .	16
1.1.3	Multiplicação de dois Quatérnios na Forma Vetorial . . . . .	17
1.1.4	Conjugado Complexo de um Quatérnio . . . . .	20
1.1.5	Norma de um Quatérnio . . . . .	20
1.1.6	Inverso de um Quatérnio . . . . .	22
1.1.7	Forma Geométrica . . . . .	23
1.2	Logaritmo e Exponencial de um Quatérnio . . . . .	24
2	ÁLGEBRA LINEAR QUATERNIÔNICA . . . . .	26
2.1	Módulos Quaterniônicos à Direita . . . . .	26
2.1.1	Bases e Dimensões de um Módulo Quaterniônico à direita . . . . .	29
2.1.2	Módulos Quaterniônicos à Direita com Produto Interno . . . . .	30
2.2	Transformações Lineares Quaterniônicas . . . . .	32
2.2.1	Operadores Lineares Quaterniônicos . . . . .	34
2.3	Teoria Espectral das Matrizes Autoadjuntas $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ . . . . .	38
2.3.1	Autovalores e Autovetores Quaterniônicos . . . . .	38
2.3.2	Teorema Espectral em $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ . . . . .	40
2.4	Produto Tensorial Quaterniônico . . . . .	43
3	QUATERBITS NÃO GERAM <i>QUBITS</i> ENTRELAÇADOS . . . . .	46
3.1	Formalismo Quântico Quaterniônico . . . . .	46
3.2	Estados Quânticos Quaterniônicos . . . . .	46
3.3	Bits Quânticos . . . . .	48
3.4	Canais Quânticos Quaterniônicos . . . . .	51
3.5	Operador Densidade Reduzido nos <i>Qubits</i> . . . . .	52
3.6	Decomposição de Schmidt . . . . .	53
3.7	Entrelaçamento Quântico . . . . .	53
3.7.1	Medidas de Entrelaçamento para Estados Puros Bipartidos . . . . .	54
3.7.1.1	Entropia de von Neumann como uma Medida de Entrelaçamento para Estados Puros Bipartidos . . . . .	54

3.7.1.2	Concorrência de Wootters . . . . .	55
3.8	Quaterbits Puros não Resultam em <i>Qubits</i> Entrelaçados . . .	58
3.9	Quaterbits Mistos Particulares não Resultam em <i>Qubits</i> Entrelaçados . . . . .	60
	Conclusão . . . . .	66
	REFERÊNCIAS . . . . .	67

## INTRODUÇÃO

O cálculo proposicional da mecânica quântica demonstrou que estados de um sistema quântico poderiam ser definidos num espaço de Hilbert sobre qualquer álgebra associativa. Os conjuntos sugeridos incluem os reais,  $\mathbb{R}$ , os complexos,  $\mathbb{C}$ , e os quatérnios,  $\mathbb{H}$  (BIRKHOFF; NEUMANN, 1936). No entanto, os experimentos decidem qual estrutura matemática será adequada para descrever a realidade física. Pois cada um desses conjuntos trazem uma interpretação particular da realidade. Por exemplo, *rebits*, a menor unidade de informação da mecânica quântica real, descrevem apenas amplitudes e omitem a diferença de fase entre amplitudes, dificultando a descrição de experimentos ondulatórios.

A mecânica quântica quaterniônica é descrita pelo espaço de Hilbert formado no conjunto dos quatérnios. Chamamos de *quaterbit* a menor unidade de informação dentro desse conjunto, ou seja, o qubit quaterniônico. Por outro lado, como teoria física, a mecânica quântica quaterniônica deve exibir evidências experimentais que a diferencie da mecânica quântica complexa (PERES, 1979; KAISER; GEORGE; WERNER, 1984). A discussão sobre os testes dos efeitos residuais quaterniônicos na mecânica quântica tem acontecido quando é considerada a interação entre multipartículas (ADLER; FINKELSTEIN, 1996). Também nesse contexto, acontece um fenômeno físico intrigante conhecido como *entrelaçamento* ou *emaranhamento*. Neste texto temos preferência pelo uso do termo *entrelaçamento*.

O *entrelaçamento* é um fenômeno de correlação entre partículas que acontece somente na mecânica quântica e a sua quantificação é um tema de pesquisa relevante. Até o momento há evidências de que a mudança da estrutura algébrica do espaço de Hilbert pode variar a medida do entrelaçamento. Por exemplo, a probabilidade de fatoração de um par de *rebits*, *qubits* e *quaterbits*, é diferente para cada um desses estados (FEI; JOYNT, 2014). Além disso, Caves et al (CAVES; FUCHS; RUNGTA, 2001) apresentaram uma fórmula explícita para o entrelaçamento de formação com respeito a um *rebit*, cujo espaço de estados é um espaço vetorial real bidimensional. O objetivo deste trabalho é ver como o entrelaçamento se manifesta em uma teoria diferente da mecânica quântica complexa.

No trabalho de Caves et al (CAVES; FUCHS; RUNGTA, 2001), uma matriz densidade de um par de *rebits* (qubit real) é uma matriz simétrica real  $4 \times 4$  com traço unitário e sem autovalores negativos. Esses autores definem o entrelaçamento de formação de um par de *rebits* exatamente como na mecânica quântica complexa, exceto que as

únicas decomposições que consideramos são aquelas cujos elementos de estado puro são representados como vetores reais. Esta restrição faz uma diferença significativa, como pode ser visto no estado (real) abaixo:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(I \otimes I + \sigma_y \otimes \sigma_y),$$

onde,  $I$  é a matriz identidade de ordem 2 e  $\sigma_y$  é a matriz de Pauli  $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ . Como podemos notar, o estado  $\rho_0$  é uma mistura equiprovável dos dois estados entrelaçados puros  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$  e  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ . No entanto, na Mecânica Quântica Complexa  $\rho_0$  é separável, porque também pode ser escrito como uma igualdade de mistura de dois produtos de estados puros  $\frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)$  e  $\frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle) \otimes (|0\rangle - i|1\rangle)$ .

Salientaram ainda que na mecânica quântica do espaço vetorial real, o estado  $\rho_0$  é um limite de estado entrelaçado. Não pode ter nenhum entrelaçamento destilável porque não tem qualquer entrelaçamento no mundo complexo, e qualquer procedimento de destilação que se poderia executar no caso real também poderia ser realizado no caso complexo. Este exemplo fornece assim uma perspectiva interessante sobre o limite de entrelaçamento, ou seja, o entrelaçamento pode ser uma manifestação de uma restrição sobre os estados puros que se permite usar na construção do dado estado misto. Wootters (WOOTTERS, 2001) e Caves et al (CAVES; FUCHS; RUNGTA, 2001) levantaram a questão interessante: se alguns estados entrelaçados na mecânica quântica complexa apareceriam desentrelaçados na mecânica quântica quaterniônica.

Nesta dissertação é apresentada uma investigação do problema apresentado por Caves e Wootters, ou seja, verificar se algum estado quântico entrelaçado na mecânica quântica complexa seria desentrelaçado na mecânica quântica quaterniônica. Para isso dois casos foram avaliados:

1. **quaterbits puros** - considerando  $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ , investigamos as condições para que o produto de estados quânticos quaterniônicos,  $|\phi_{12}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , resulte num estado quântico complexo,  $|\tilde{\phi}_{12}\rangle \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ . Usando a concorrência de Wootters como critério de separabilidade, mostramos que  $|\tilde{\phi}_{12}\rangle$  é separável, ou seja, *o produto tensorial de dois quaterbits puros não geram um qubit puro bipartido entrelaçado.*
2. **caso particular de quaterbits mistos** - partindo de estados *quaterbits* do tipo  $\alpha|0\rangle + |1\rangle\beta\mathbf{j}$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{j}$  a segunda unidade imaginária quaterniônica, foram construídos estados quaterniônicos mistos separáveis, após condições que restringem esses *quaterbits* em *qubits*, concluímos por meio da fórmula de concorrência de Wootters, que o estado misto *quaterbits* construído, também é desentrelaçado na

mecânica quântica complexa. Embora esse resultado, ainda não responda o questionamento de Wootters, é uma primeira evidência de que talvez estados entrelaçados na mecânica quântica complexa não apareçam entrelaçados na mecânica quântica quaterniônica.

Para apresentar estes resultados o trabalho está dividido em três capítulos.

No Capítulo 1 construímos o anel dos quatérnios na luz do trabalho de (KUIPERS, 1999) e também utilizamos alguns resultados de (ZHANG, 1997).

No Capítulo 2, definimos módulos quaterniônicos à direita e desenvolvemos a teoria da álgebra linear desses módulos, estudando bases e dimensões, produto interno, normas e o teorema espectral quaterniônico (GRAYDON, 2011; BRENNER, 1951; KYRALA, 1967). Por fim estudamos o produto tensorial quaterniônico (RAZON; HORWITZ, 1991).

No Capítulo 3, temos como meta o alvo principal deste trabalho, que é a confirmação de que o produto de *quaterbits* puros não resultam em *qubits* entrelaçados e um caso especial de estado misto de *quaterbits* desentrelaçados também não resulta. Para chegar a este resultado introduzimos inicialmente o formalismo quântico quaterniônico na perspectiva de Hardy (HARDY, 2001), em seguida definimos estados quânticos quaterniônicos puros e mistos (GRAYDON, 2011; FINKELSTEIN; JAUCH; SPEISER, 1979; JAUCH; MORROW, 1968), os bits quânticos quaterniônicos e por último definimos o entrelaçamento quântico e as medições de entrelaçamento para estados puros bipartidos: entropia de von Neumann e a concorrência de Wootters (WOOTTERS, 1998; WOOTTERS, 2001; CAVES; FUCHS; RUNGTA, 2001; HILL; WOOTTERS, 1997; BERGOU; HILLERY, 2013). Nas duas últimas seções, concluímos o trabalho confirmando que o produto de *quaterbits* puros não resultam em *qubits* entrelaçados (SOUZA D. K. A.; NASCIMENTO, 2016) bem como o caso particular para estados mistos.

Para trabalhos futuros sugerimos a investigação para o caso geral dos estados mistos quaterniônicos.

## 1 ANEL DOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON

No trabalho de Hamilton (HAMILTON, 1899) desenvolvido em 1843 pelo matemático, físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), estende-se a noção de números complexos à de números quaterniônicos. Nesse contexto, ele pensa no conjunto dos números reais como números hiper-complexos de posto um e dos números complexos como sendo números hiper-complexos de posto dois, e neste caso trata os reais como um subconjunto dos números complexos em que a parte imaginária é nula. Sabemos que esses dois primeiros conjuntos com as operações usuais de adição e multiplicação definidas, satisfazem as propriedades de corpo. Acontece, porém, que qualquer conjunto de números hiper-complexos com posto superior a dois não satisfaz todas as propriedades de corpo. Foi esse fato que intrigou os matemáticos da época que estavam buscando extensões de postos superior a dois. Hamilton chamou o número hiper-complexo de posto quatro, de quatérnio. Para esta definição ele demonstrou e usou os seguintes produtos especiais fundamentais:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (1.1)$$

Embora os números hiper-complexos de posto 1 até  $n$  possam ser definidos, algumas aplicações foram encontradas para os hiper-complexos de posto  $n > 4$ . Como aqui nossa atenção é para aplicações à Computação Quântica e Informação Quântica com abordagem quaterniônica, vamos restringir nosso estudo para os números hiper-complexos de posto 4. Veremos que o conjunto dos quatérnios, juntamente com as duas operações de adição e multiplicação, que iremos definir, possui estrutura algébrica de anel de divisão normado com unidade não-comutativo. Portanto não é um corpo por causa da ausência da propriedade comutativa da multiplicação.

Pouco antes de sua morte, Hamilton escreveu a seguinte carta a seu filho Archibald:

“Every morning in the early part of the above-cited month [author’s note: October 1843], on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me: ‘Well, Papa, can you multiply triplets?’ Where to I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: ‘No, I can only add and subtract them’.”

W. R. Hamilton, August 5, 1865 [23]

## 1.1 Anel dos Quatérnios

Um quatérnio  $q$  é representado por quatro componentes ou parâmetros de números reais,  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ , cuja igualdade  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (q'_0, q'_1, q'_2, q'_3)$  ocorre se, e somente se,  $q_0 = q'_0$ ,  $q_1 = q'_1$ ,  $q_2 = q'_2$  e  $q_3 = q'_3$ . Definindo agora duas operações de adição e multiplicação, segundo as leis:

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) + (q'_0, q'_1, q'_2, q'_3) = (q_0 + q'_0, q_1 + q'_1, q_2 + q'_2, q_3 + q'_3)$$

e

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) \cdot (q'_0, q'_1, q'_2, q'_3) = (q_0q'_0 - q_1q'_1 - q_2q'_2 - q_3q'_3, q_0q'_1 + q_1q'_0 + q_2q'_3 - q'_2q_3, \\ q_0q'_2 + q'_0q_2 + q_3q'_1 - q'_3q_1, q_0q'_3 + q_3q'_0 + q_1q'_2 - q'_1q_2).$$

Portanto,  $(\mathbb{H} = \mathbb{R}^4, +, \cdot)$ , é um anel divisional com unidade, cujo elemento neutro da operação adição é a quádrupla ordenada  $(0, 0, 0, 0)$  e a unidade da multiplicação é a quádrupla ordenada  $(1, 0, 0, 0)$ .

**Exemplo 1.1.1** *Fazendo agora os produtos permutados:*

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1), \\ (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1),$$

*notamos que este anel não possui a propriedade comutativa. Portanto  $(\mathbb{H} = \mathbb{R}^4, +, \cdot)$  é um anel não comutativo com unidade.*

### 1.1.1 Forma Algébrica

Fazendo as identificações:

$$q_0 \leftrightarrow (q_0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{i} \leftrightarrow (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{j} \leftrightarrow (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{k} \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

e

$$q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \leftrightarrow (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

obtemos a forma algébrica de um quatérnio  $q$  do seguinte modo:

$$q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3. \quad (1.2)$$

Por meio dessas identificações chegamos ao conjunto:

$$\mathbb{H} = \{q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

onde

$$q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = q'_0 + \mathbf{i}q'_1 + \mathbf{j}q'_2 + \mathbf{k}q'_3 \Leftrightarrow q_0 = q'_0, q_1 = q'_1, q_2 = q'_2 \quad \text{e} \quad q_3 = q'_3;$$

$$q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 + q'_0 + \mathbf{i}q'_1 + \mathbf{j}q'_2 + \mathbf{k}q'_3 = q_0 + q'_0 + \mathbf{i}(q_1 + q'_1) + \mathbf{j}(q_2 + q'_2) + \mathbf{k}(q_3 + q'_3).$$

Através das identificações feitas e das definições das duas operações em forma de quádruplas ordenadas, chega-se aos produtos especiais fundamentais descrito na Igualdade (1.1). Efetuamos a multiplicação de dois quatérnios na forma algébrica, fazendo uso da distributividade do anel e utilizando os produtos especiais dados na Igualdade (1.1), porém respeitando a não comutatividade. Mais adiante veremos uma outra maneira de efetuar o produto de dois quatérnios. Seja  $\lambda$  um escalar real e  $q$  é um quatérnio tal que  $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ . Então o produto do quatérnio  $q$  pelo escalar  $\lambda$ , é dado por  $\lambda q = \lambda q_0 + \lambda \mathbf{i}q_1 + \lambda \mathbf{j}q_2 + \lambda \mathbf{k}q_3$ .

### 1.1.2 Forma Vetorial

A forma vetorial de um quatérnio descrito na forma algébrica como na Igualdade (1.2), será definida por:

$$q = q_0 + \vec{\mathbf{q}}, \quad (1.3)$$

onde  $\vec{\mathbf{q}} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ . A parte real é o número real  $q_0$  e escreve-se  $\text{Re } q = q_0$  e a parte imaginária é a parte vetorial e escreve-se  $\text{Im } q = \vec{\mathbf{q}}$ . Fazendo agora as seguintes identificações:

$$\mathbf{i} \leftrightarrow (1, 0, 0);$$

$$\mathbf{j} \leftrightarrow (0, 1, 0);$$

$$\mathbf{k} \leftrightarrow (0, 0, 1).$$

Assim,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  é a base canônica do espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , que é ortonormal, ou seja

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0); \mathbf{j} = (0, 1, 0); \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

O leitor poderá fazer a seguinte pergunta:

Como pode um quatérnio, que reside no  $\mathbb{R}^4$ , operar com um vetor, que reside no  $\mathbb{R}^3$ ?

Há uma resposta para esta pergunta, que pode parecer óbvia, que é a seguinte:

Um vetor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , pode ser tratado como um quatérnio  $q \in \mathbb{H}$ , cuja parte real é zero.

Tal quatérnio é chamado de puro. Considere  $H_0$ , como sendo o conjunto de todos os quatérnios puros. Este é um subconjunto de  $\mathbb{H}$ . Podemos simplesmente identificar vetores do  $\mathbb{R}^3$  com os elementos do conjunto  $H_0$ , através do isomorfismo entre  $H_0$  e  $\mathbb{R}^3$ . Desse modo, um vetor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  corresponde a um único quatérnio puro  $\nu = 0 + \vec{v} \in H_0$ , ou seja:

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \nu = 0 + \vec{v} \in H_0 \subset \mathbb{H}.$$

**Exemplo 1.1.2** *No quatérnio:*

$$q = 1 + 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

*Temos que  $\text{Re } q = 1$ , enquanto  $\text{Im } q = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , cuja representação em quádrupla ordenada é  $(1, 5, 3, 4)$ .*

### 1.1.3 Multiplicação de dois Quatérnios na Forma Vetorial

O produto de dois quatérnios deve atender aos produtos especiais fundamentais:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1; \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji}; \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj}; \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sejam agora dois quatérnios:

$$p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$$

e

$$q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3,$$

então

$$pq = p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) + q_0(\mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) \\ + \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1).$$

Vamos agora reescrever essa expressão de uma forma mais concisa. Para isso, recordemos o produto escalar e o produto vetorial da álgebra linear de vetores em três dimensões. Seja dois vetores:  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  e  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ , então o produto escalar é dado por:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \quad (1.5)$$

enquanto o produto vetorial:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1). \quad (1.6)$$

Usando as Igualdades (1.5) e (1.6), podemos reescrever numa forma mais concisa o produto de dois quatérnios  $p$  e  $q$  dados anteriormente, do seguinte modo:

$$pq = p_0q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}. \quad (1.7)$$

**Observação 1.1.1** *É interessante observar que num produto de dois quatérnios aparecem produto de escalares reais, produto escalar vetorial, produto de um vetor por um escalar real e produto vetorial.*

**Observação 1.1.2** *Uma outra forma de analisar no anel dos quatérnios, a ausência da propriedade comutativa na multiplicação é bastante simples. Como o produto vetorial  $\vec{p} \times \vec{q}$  não comuta, segue-se da Igualdade (1.7) que o produto de dois quatérnios não comuta, pois no produto há parte vetorial.*

**Exemplo 1.1.3** *Vamos efetuar o produto dos dois quatérnios:*

$$p = 2 + \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e

$$q = 3 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

*Primeiro vamos encontrar os produtos escalar e vetorial referente as partes vetoriais dos quatérnios  $p$  e  $q$ .*

$$\vec{p} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e

$$\vec{q} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Então

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (1)(-1) + (-2)(2) + (1)(3) = -2$$

e

$$\vec{p} \times \vec{q} = (-6 - 2)\mathbf{i} + (-1 - 3)\mathbf{j} + (2 - 2)\mathbf{k},$$

ou seja,

$$\vec{p} \times \vec{q} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \quad (1.8)$$

Portanto o produto quaterniônico  $pq$  será dado por:

$$pq = 6 - (-2) + 2(-1 + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + 3(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j},$$

de modo que

$$pq = 8 - 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Utilizando mais uma vez o produto escalar e o produto vetorial da álgebra linear de vetores do  $\mathbb{R}^3$ , podemos escrever o produto de dois quatérnios  $p$  e  $q$  numa forma matricial. Para isso, seja:

$$pq = r = r_0 + \vec{r} = r_0 + \mathbf{i}r_1 + \mathbf{j}r_2 + \mathbf{k}r_3.$$

Então temos:

$$pq = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

onde

$$r_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3; \quad r_1 = p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2;$$

$$r_2 = p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1; \quad r_3 = p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0.$$

**Exemplo 1.1.4** Tomando os quatérnios do exemplo anterior, obtemos:

$$pq = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Portanto, obtemos o produto  $pq = 8 - 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ , como anteriormente.

#### 1.1.4 Conjugado Complexo de um Quatérnio

Um importante conceito algébrico relativo aos quatérnios é do conjugado complexo de um quatérnio. O conjugado complexo de um quatérnio  $q = q_0 + \vec{\mathbf{q}}$ , denotado por  $q^*$ , será dado por:

$$q^* = q_0 - \vec{\mathbf{q}}, \quad (1.11)$$

de modo que:

$$q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}. \quad (1.12)$$

Podemos provar que o conjugado complexo de um produto de dois quatérnios é igual ao produto dos conjugados complexos individuais na ordem reversa, ou seja:

$$(pq)^* = q^*p^*. \quad (1.13)$$

Note também que para qualquer quatérnio  $q$ , a soma de  $q$  com seu conjugado complexo  $q^*$  é um número real ou escalar, ou seja:

$$q + q^* = (q_0 + \vec{\mathbf{q}}) + (q_0 - \vec{\mathbf{q}}) = 2q_0, \quad (1.14)$$

onde  $2q_0$  é um escalar. Veremos na subseção seguinte, que o produto  $q^*q$  também é um escalar.

#### 1.1.5 Norma de um Quatérnio

A conjugação complexa quaterniônica induz uma norma multiplicativa

$$\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R},$$

via

$$\|q\| = \sqrt{q^*q}. \quad (1.15)$$

Usando a definição de produto quaterniônico, junto com o fato de que, para qualquer vetor  $\vec{\mathbf{q}}$ , temos  $\vec{\mathbf{q}} \times \vec{\mathbf{q}} = 0$ , podemos provar que  $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ . De

fato,

$$\begin{aligned}
\|q\|^2 &= q^* q \\
&= (q_0 - \vec{q})(q_0 + \vec{q}) \\
&= q_0 q_0 - (-\vec{q}) \cdot \vec{q} + q_0 \vec{q} p_3 q_3 + (-\vec{q}) q_0 + (-\vec{q}) \times \vec{q} \\
&= q_0^2 + \vec{q} \cdot \vec{q} \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (1.16)$$

**Exemplo 1.1.5** *Seja o quatérnio  $q = 1 + 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Então por definição de norma do quatérnio  $q$ , temos:*

$$\|q\|^2 = 1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 15 \Rightarrow \|q\| = \sqrt{15}.$$

**Teorema 1.1.1** *A norma de quatérnios, obedece então as três propriedades:*

- i) (multiplicatividade):  $\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|, \forall p, q \in \mathbb{H}$ ;*
- ii) (não-negatividade):  $\|q\| \geq 0, \forall q \in \mathbb{H}$  e prevalece a igualdade se, e somente se,  $q = 0$ ;*
- iii) (desigualdade triangular):  $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|, \forall p, q \in \mathbb{H}$ .*

**Demonstração 1.1.1** *Demonstraremos as duas primeiras. Provando a primeira propriedade. Com efeito,*

$$\begin{aligned}
\|pq\|^2 &= (pq)^*(pq) \\
&= q^* p^*(pq) \\
&= q^*(p^* p)q \\
&= q^* \|p\|^2 q \\
&= (q^* q) \|p\|^2 \\
&= \|q\|^2 \|p\|^2 \\
&= \|p\|^2 \|q\|^2,
\end{aligned}$$

*de modo que*

$$\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|. \quad (1.17)$$

Para provar a segunda propriedade considere a igualdade:

$$\|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad (1.18)$$

logo  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \geq 0$ , prevalecendo a igualdade se, e somente se,  $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , e nesse caso  $q = 0$ .

**Observação 1.1.3** Note que o produto de dois quatérnios unitários é também um quatérnio unitário. Por indução finita o resultado se estende a qualquer produto de um número finito de quatérnios unitários.

**Observação 1.1.4** Note ainda que num quatérnio que tem norma 1, cada um dos seus componentes deve ter um valor absoluto menor ou igual a 1. Na maioria das vezes, trabalharemos com quatérnios de norma 1. Estes são chamados de quatérnios unitários ou quatérnios normalizados.

### 1.1.6 Inverso de um Quatérnio

Usando as definições de conjugado complexo e norma de um quatérnio, vamos mostrar que cada quatérnio diferente de zero possui um inverso multiplicativo, e podemos achar uma fórmula para isso. Designando o inverso de um quatérnio  $q$  por  $q^{-1}$ , por definição de inversa, temos:

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1. \quad (1.19)$$

Logo, pré e pós multiplicando pelo complexo conjugado de  $q$ , temos:

$$q^{-1}qq^* = q^*qq^{-1} = q^*.$$

Como  $qq^* = \|q\|^2$ , então:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}. \quad (1.20)$$

Portanto, todo quatérnio não nulo possui inverso multiplicativo, o que faz com que o conjunto dos quatérnios com as duas operações de adição e multiplicação definidas anteriormente seja um anel de divisão não comutativo.

**Observação 1.1.5** A álgebra dos quatérnios é a única álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.

**Observação 1.1.6** Note que, se  $q$  é um quatérnio unitário ou normalizado,  $\|q\| = 1$ , então o inverso de  $q$  é simplesmente o complexo conjugado de  $q$ :

$$q^{-1} = q^*. \quad (1.21)$$

O anel dos quatérnios  $\mathbb{H}$  equipado dessa norma multiplicativa forma uma álgebra associativa normada com divisão.

**Teorema 1.1.2** *Sejam os quatérnios  $q, p$  e  $r$ . Então valem os seguintes resultados: (ZHANG, 1997)*

$$i) \quad q^2 = |\operatorname{Re} q|^2 - |\operatorname{Im} q|^2 + 2 \operatorname{Re} q \cdot \operatorname{Im} q;$$

$$ii) \quad q^* = q \Leftrightarrow q \in \mathbb{R};$$

iii)

$$iv) \quad aq = qa, \forall q \in \mathbb{H} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}; \|q\| \|q^{-1}\| = 1;$$

$$v) \quad \forall q \in \mathbb{H}, \text{ escreve-se de modo único como } q = \alpha + \beta \mathbf{j}, \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

$$vi) \quad z\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{z} \text{ ou } \mathbf{j}z\mathbf{j}^* = \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C};^1$$

**Demonstração 1.1.2** *Vamos provar apenas os itens v) e vi). Com efeito, basta tomar  $\alpha = q_0 + q_1 \mathbf{i}$  e  $\beta = q_2 + \mathbf{i}q_3$ , de modo que  $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + (q_2 + \mathbf{i}q_3)\mathbf{j}$ . Para finalizar, sendo  $z = a + b\mathbf{i}$ , com  $a, b$  reais, temos sucessivamente:  $\mathbf{j}z = \mathbf{j}(a + b\mathbf{i}) = \mathbf{j}a + \mathbf{j}b\mathbf{i} = a\mathbf{j} + b(-\mathbf{i}\mathbf{j}) = a\mathbf{j} - b\mathbf{i}\mathbf{j} = (a - b\mathbf{i})\mathbf{j} = \bar{z}\mathbf{j}$ .*

### 1.1.7 Forma Geométrica

Seja um quatérnio  $q$  na forma vetorial:

$$q = q_0 + \vec{\mathbf{q}},$$

com norma unitária, então:

$$q_0^2 + \|\vec{\mathbf{q}}\|^2 = 1.$$

Para qualquer ângulo  $\theta$  temos que

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1;$$

logo deve existir algum ângulo  $\theta$  tal que

$$\cos^2 \theta = q_0^2$$

e

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \|\vec{\mathbf{q}}\|^2.$$

---

<sup>1</sup> $\bar{z}$  significa conjugado do número complexo  $z$ .

Este ângulo  $\theta$  pode ser definido de modo único se colocarmos uma restrição apropriada ao seu domínio. Em geral, vamos tomar  $\theta$  satisfazendo a seguinte restrição:

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Desta forma, existe um ângulo  $\theta$  definido acima, associado com o quatérnio  $q$ . Vamos achar isto conveniente para escrever o quatérnio unitário  $q = q_0 + \vec{q}$  em termos deste ângulo. Seja agora, um vetor unitário  $\vec{u}$ , que seja múltiplo do vetor  $\vec{q}$  escrito por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{\vec{q}}{\text{sen } \theta}.$$

Então, podemos escrever o quatérnio unitário  $q$  em termos do ângulo  $\theta$  e do vetor unitário  $\vec{u}$  como

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos \theta + \vec{u} \text{sen } \theta, \quad (1.22)$$

denominado de forma trigonométrica ou polar. Para o conjugado complexo do quatérnio expresso na forma polar como da Igualdade (1.22), basta substituir  $\theta$  por  $-\theta$ , para obter

$$q^* = \cos \theta - \vec{u} \text{sen } \theta. \quad (1.23)$$

Seja agora dois quatérnios  $q$  e  $p$  escritos na mesma forma com mesma parte vetorial unitária  $\vec{u}$ . Vamos desenvolver a fórmula para o produto quaterniônico, similar a fórmula de Moivre descrita para o produto de números complexos, que chamaremos também de fórmula de Moivre.

**Teorema 1.1.3 (Fórmula de Moivre)** *Sejam  $q, p \in \mathbb{H}$ ,  $q = \cos \alpha + \vec{u} \text{sen } \alpha$  e  $p = \cos \beta + \vec{u} \text{sen } \beta$ . Então*

$$qp = \cos(\alpha + \beta) + \vec{u} \text{sen}(\alpha + \beta). \quad (1.24)$$

**Demonstração 1.1.3** *De acordo com as hipóteses do teorema, temos:*

$$\begin{aligned} qp &= (\cos \alpha + \vec{u} \text{sen } \alpha)(\cos \beta + \vec{u} \text{sen } \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\vec{u} \text{sen } \alpha) \cdot (\vec{u} \text{sen } \beta) \\ &\quad + \cos \alpha (\vec{u} \text{sen } \beta) + \cos \beta (\vec{u} \text{sen } \alpha) \\ &\quad + \vec{u} \text{sen } \alpha \times \vec{u} \text{sen } \beta \\ &= \cos(\alpha + \beta) + \vec{u} \text{sen}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

## 1.2 Logaritmo e Exponencial de um Quatérnio

Nesta seção iremos definir o logaritmo e a exponencial de um quatérnio  $q$ .

**Definição 1.2.1** Seja  $q \in \mathbb{H}, q \neq -1$ , onde  $q$  está escrito na forma polar  $q = \cos \theta + \vec{v} \operatorname{sen} \theta$ , conforme a Igualdade (1.22). O logaritmo de  $q$  é definido por:

$$\log q = \theta \vec{v}. \quad (1.25)$$

**Observação 1.2.1** Note que  $\log 1 = 0$ , pois a parte vetorial é nula. Veja também que o  $\log q$  não representa um quatérnio unitário, pois o vetor  $\theta \vec{v}$  pode ser não unitário.

**Definição 1.2.2** Seja  $q = \theta \vec{u}$ , com  $\theta \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{u}\| = 1$ . A exponencial de  $q$  na base  $e$ , é definida por:

$$e^q = \cos \theta + \vec{u} \operatorname{sen} \theta. \quad (1.26)$$

Para finalizar esta seção, vamos enunciar quatro propriedades envolvendo exponencial e logaritmo, por meio do seguinte teorema:

**Teorema 1.2.1**  $\forall q \in \mathbb{H} - \{-1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , temos as seguintes propriedades:

- i)  $\log q^x = x \log q$ ;
- ii)  $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$ ;
- iii)  $(q^x)^y = q^{xy}$ ;
- iv)  $q^n = \cos n\theta + \vec{u} \operatorname{sen} n\theta$ .

**Demonstração 1.2.1** Vamos provar os itens i), iii) e iv).

Provando i):

$$\log q^x = \log(e^{\log q})^x = \log e^{x \log q} = x \log q.$$

Provando iii):

$$(q^x)^y = (e^{x \log q})^y = e^{y \log e^{x \log q}} = e^{yx \log q} = q^{yx} = q^{xy}.$$

Provando iv):

$$q^n = e^{n \log q} = e^{n\theta \vec{v}} = \cos n\theta + \vec{v} \operatorname{sen} n\theta.$$

**Observação 1.2.2** Em geral,  $\log(qp) \neq \log q + \log p$ . Isso deve-se a ausência da propriedade comutativa em  $\mathbb{H}$ .

## 2 ÁLGEBRA LINEAR QUATERNIÔNICA

Como vimos no Capítulo 1, ao contrário do corpo dos números complexos e de seu subcorpo, os números reais, o anel de divisão dos quatérnios que contém esses números, não é um anel comutativo, ou seja, a operação de multiplicação não admite a propriedade comutativa. Devido a essa ausência, aparecem significativas diferenças entre teorias da álgebra linear nos complexos e nos quatérnios. Só para citar um exemplo notável, existem matrizes quaterniônicas de dimensão finita que admitem um espectro com infinitos autovalores. Neste capítulo, introduziremos a teoria da álgebra linear dos módulos à direita quaterniônicos de dimensão finita, que é um espaço vetorial não comutativo, respeitando, desse modo, a não comutatividade da segunda operação, produto por um escalar quaterniônico.

### 2.1 Módulos Quaterniônicos à Direita

Vamos restringir nossa atenção à teoria da álgebra linear dos módulos à direita quaterniônicos de dimensão finita e suas matrizes. Na teoria da álgebra linear dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}$  comutativos, os espaços são construídos sobre o conjunto de escalares dos números complexos  $\mathbb{C}$ , que possui estrutura de corpo sobre as duas operações usuais de adição e multiplicação de números complexos. Nos espaços vetoriais de Hilbert podemos definir um produto interno, induzindo uma norma. Portanto, os espaços vetoriais comutativos de Hilbert  $\mathcal{H}$  são estruturas de uma álgebra de divisão comutativa associativa normada. Com respeito a segunda operação dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}$  é irrelevante multiplicar um escalar tanto à direita como à esquerda de um vetor, ou seja, ela é comutativa. No caso da álgebra linear quaterniônica, a mesma afirmação não se sustenta. Por exemplo, se  $A$  é uma matriz quaterniônica,  $\phi$  é um vetor coluna quaterniônico, e  $\lambda$  é um quatérnio que, pelos itens  $v)$  e  $vi)$  do Teorema 1.1.2, pode ser escrito como  $\lambda = \alpha + \beta\mathbf{j} = \alpha + \mathbf{j}\bar{\beta}$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , então, de  $A\phi = \phi\lambda$ , temos sucessivamente,

$$A\phi = A(\alpha + \beta\mathbf{j}) = A\alpha + A\beta\mathbf{j} = \alpha A + \mathbf{j}\bar{\beta}A = (\alpha + \mathbf{j}\bar{\beta})A \neq \phi A,$$

e portanto,  $A\phi = \phi\lambda$  não implica em  $A\phi = \lambda\phi$ . Podemos então dividir em dois módulos à direita e à esquerda, cuja multiplicação escalar é realizada a partir da direita ou da esquerda respectivamente. Adotaremos a convenção de tomarmos os módulos quaterniônicos de dimensão finita como módulos à direita, que é um espaço vetorial de Hilbert não comutativo chamado de espaço vetorial de Hilbert à direita quaterniônico. Esta esco-

lha permite a adoção da familiar notação de Dirac (*bra-ket*) da teoria quântica complexa para formular aspectos da teoria das transformações lineares quaterniônicas que será visto na Seção 2.2. Vamos agora definir um módulo à direita quaterniônico.

**Definição 2.1.1** *Um conjunto  $\mathcal{V}$  não-vazio é um módulo à direita sobre o anel quaterniônico  $\mathbb{H}$  ou  $\mathcal{V}$ -módulo à direita quaterniônico, quando existirem duas operações fechadas:*

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

e

$$\cdot : \mathcal{V} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{V},$$

denominadas respectivamente por adição e multiplicação à direita por um escalar quaterniônico, tais que, se dados  $\phi, \psi, \varphi \in \mathcal{V}$  e  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$ , forem satisfeitos os seguintes axiomas:

i)  $(\phi + \psi) + \varphi = \phi + (\psi + \varphi);$

ii)  $\phi + \psi = \psi + \phi;$

iii) *Existe um único elemento nulo  $0 \in \mathcal{V}$ , tal que  $\phi + 0 = \phi;$*

iv) *Para cada elemento  $\phi \in \mathcal{V}$  existe um único elemento  $-\phi \in \mathcal{V}$ , chamado inverso aditivo, ou simétrico de  $\phi$  tal que  $\phi + (-\phi) = 0;$*

v)  $(\phi + \psi)\lambda = \phi\lambda + \psi\lambda;$

vi)  $\phi(\lambda_1 + \lambda_2) = \phi\lambda_1 + \phi\lambda_2;$

vii)  $\phi(\lambda_1\lambda_2) = (\phi\lambda_1)\lambda_2;$

viii)  $\phi \cdot 1 = \phi.$

Podemos ver que um  $\mathcal{V}$ -módulo à direita quaterniônico é um espaço vetorial não comutativo. Por isso, os elementos de  $\mathcal{V}$  serão chamados de vetores quaterniônicos ou simplesmente de vetores.

**Exemplo 2.1.1** *Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{H}$ , com as operações usuais de soma de quatérnios e produto por escalar à direita como a multiplicação usual de quatérnios, tomados à direita, definidas no Capítulo 1. Pela Definição 2.1.1 segue-se que  $\mathcal{V} = \mathbb{H}$  com essas duas operações é um módulo à direita quaterniônico.*

**Exemplo 2.1.2** Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^d$  e consideremos dois elementos quaisquer

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d), \psi = (\psi_1, \dots, \psi_d) \in \mathbb{H}^d,$$

e um escalar quaterniônico  $\lambda$ . Munindo  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^d$  com as duas operações:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{H}^d \times \mathbb{H}^d &\longrightarrow \mathbb{H}^d \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \phi + \psi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{H}^d \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H}^d \\ (\phi, \lambda) &\longmapsto \phi \cdot \lambda, \end{aligned}$$

tais que

$$\phi + \psi = (\phi_1 + \psi_1), \dots, (\phi_d + \psi_d),$$

e

$$\phi \cdot \lambda = (\phi_1 \lambda, \dots, \phi_d \lambda).$$

De acordo com a Definição 2.1.1,  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^d$  munidas com essas duas operações definidas, é um módulo à direita quaterniônico.

**Exemplo 2.1.3** Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^{d \times 1}$  a família de todas as matrizes colunas quaterniônicas do tipo  $d \times 1$ , onde  $d$  é um número natural finito. Consideremos dois vetores quaterniônicos quaisquer

$$\phi = [\phi_1 \dots \phi_d]^t, \quad \psi = [\psi_1 \dots \psi_d]^t \in \mathbb{H}^{d \times 1},$$

e um escalar quaterniônico  $\lambda$ . O expoente  $t$  denota transposta da matriz. Munindo agora essa família de matrizes com as duas operações:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{H}^{d \times 1} \times \mathbb{H}^{d \times 1} &\longrightarrow \mathbb{H}^{d \times 1} \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \phi + \psi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{H}^{d \times 1} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H}^{d \times 1} \\ (\phi, \lambda) &\longmapsto \phi \cdot \lambda, \end{aligned}$$

tais que

$$\phi + \psi = [(\phi_1 + \psi_1) \dots (\phi_d + \psi_d)]^t,$$

e

$$\phi \cdot \lambda = [\phi_1 \lambda \dots \phi_d \lambda]^t.$$

De acordo com a Definição 2.1.1, esta família  $\mathbb{H}^{d \times 1}$  com as duas operações definidas acima possui estrutura algébrica de módulo à direita quaterniônico.

**Definição 2.1.2** *Seja  $\mathcal{V}$  um módulo à direita quaterniônico e  $\mathcal{W}$  um subconjunto não-vazio de  $\mathcal{V}$ . Se  $\mathcal{W}$  forma um módulo à direita quaterniônico com as mesmas operações de  $\mathcal{V}$ , então dizemos que  $\mathcal{W}$  é um submódulo à direita quaterniônico de  $\mathcal{V}$ , onde  $\mathcal{W}$  é um subespaço vetorial de Hilbert não comutativo  $\mathcal{V}$ .*

Por uma simples análise das propriedades de módulo à direita quaterniônico, podemos provar o Teorema 2.1.1, bastante útil para verificar se um determinado subconjunto não vazio de um módulo à direita quaterniônico é ou não um submódulo à direita quaterniônico.

**Teorema 2.1.1** *Um subconjunto  $\mathcal{W}$  não-vazio de  $\mathcal{V}$  é um submódulo à direita quaterniônico de  $\mathcal{V}$ , se são verificadas as seguintes propriedades:*

- i) Se  $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ , então  $w_1 + w_2 \in \mathcal{W}$ ;
- ii) Se  $w \in \mathcal{W}$  e  $\lambda \in \mathbb{H}$ , então  $w\lambda \in \mathcal{W}$ .

**Exemplo 2.1.4** *Considere a família de todas as matrizes colunas quaterniônicas  $\mathcal{W} = \{\phi = [\phi_1 \dots \phi_d]^t \in \mathbb{H}^{d \times 1} : \phi_1 = 0\}$ . Nestas condições com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar à direita,  $\mathcal{W}$  é um submódulo à direita quaterniônico do módulo quaterniônico à direita dado no Exemplo 2.1.3,  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ .*

### 2.1.1 Bases e Dimensões de um Módulo Quaterniônico à direita

Os conceitos familiares de independência linear, conjuntos geradores e bases da teoria do espaço vetorial complexo são naturalmente carregados para a teoria dos módulos quaterniônicos à direita. Em particular, dizemos que um subconjunto  $S$  de vetores quaterniônicos de um módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$  é linearmente independente se nenhum vetor quaterniônico pertencente a  $S$ , pode ser escrito como uma combinação linear dos outros com escalares tomados à direita, caso contrário dizemos que  $S$  é linearmente dependente. Além disso, se para qualquer vetor quaterniônico em  $\mathbb{V}$  pode ser escrito como uma combinação linear quaterniônica à direita de vetores do conjunto  $S \subset \mathcal{V}$ , então dizemos que  $S$  é um conjunto gerador, ou seja, ele gera um submódulo à direita quaterniônico.

**Definição 2.1.3** *Um conjunto gerador finito  $\mathcal{B}_d = \{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  constituído de  $d$  vetores linearmente independente é denominado uma base para um módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$  de dimensão  $d$ .*

**Definição 2.1.4** *Quaisquer duas bases finitas de um módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$ , terão a mesma cardinalidade  $d$ , e essa cardinalidade comum, é chamada de dimensão do módulo  $\mathcal{V}$ .*

Se  $\mathcal{B}_d = \{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  é uma base para um módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$  de dimensão finita  $d$ , então qualquer vetor quaterniônico  $\phi \in \mathcal{V}$ , se escreve de modo único como  $\phi = \phi_1\lambda_1 + \dots + \phi_d\lambda_d$ , para certos escalares quaterniônicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{H}$ . Desse modo a matriz coluna  $\begin{bmatrix} \lambda_i \end{bmatrix}_{i=1, \dots, d}^t$ , representa as coordenadas do vetor  $|\phi\rangle$  na base  $\mathcal{B}_d$ , e escrevemos:

$$\phi_{\mathcal{B}_d} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix}.$$

**Observação 2.1.1** *Sempre que fizermos uma referência a um elemento de um módulo à direita quaterniônico de dimensão finita  $d$ , fica subtendido que existe uma base explícita  $\mathcal{B}_d$ . Na Subseção 2.1.2, definiremos a base canônica, que é base natural que trabalhamos corriqueiramente.*

## 2.1.2 Módulos Quaterniônicos à Direita com Produto Interno

Um produto interno em um módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$  é uma aplicação que toma dois vetores de entrada  $\phi, \psi$  e produz um número quaterniônico denotado por  $\langle \phi | \psi \rangle$ , satisfazendo algumas exigências.

**Definição 2.1.5** *Uma aplicação  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{H}$ , onde  $\mathcal{V}$  um módulo à direita quaterniônico é um produto interno, se satisfaz os seguintes requisitos:*

i)  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  é  $\mathbb{H}$ -linear no segundo argumento:

$$\langle \phi | \sum_i \psi_i \lambda_i \rangle = \sum_i \langle \phi | \psi_i \rangle \lambda_i :$$

ii) simetria conjugada:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* ;$$

iii)  $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0, \forall \phi$ . Prevalece a igualdade se, e somente se,  $\phi = 0$ .

**Exemplo 2.1.5** *A partir de agora, dotaremos a familiar notação bra-ket de Dirac, identificando o vetor quaterniônico  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}^{d \times 1}$ , com o vetor ket coluna:*

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_d \end{bmatrix},$$

e o vetor bra conjugado, com o vetor linha, compondo o dual do módulo à direita de  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ , como sendo

$$\langle \phi | = \left[ \phi_1^* \quad \dots \quad \phi_d^* \right].$$

De acordo com a Definição 2.1.5, o módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^{d \times 1}$  tem um produto interno definido por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{r=1}^d \phi_r^* \psi_r. \quad (2.1)$$

**Lema 2.1.1** Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, |\phi\rangle, |\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{V}$ —módulo à direita quaterniônico, então vale a  $\mathbb{R}$ —linearidade:

$$\langle \phi \lambda_1 + \psi \lambda_2 | \varphi \rangle = \lambda_1^* \langle \phi | \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi | \varphi \rangle. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.1.2** O produto interno  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , dado na Definição 2.1.5 é  $\mathbb{H}$ —conjugado linear no primeiro argumento, ou seja:

$$\langle \sum_i \phi_i \lambda_i | \psi \rangle = \sum_i \lambda_i^* \langle \phi_i | \psi \rangle. \quad (2.3)$$

**Corolário 2.1.1**  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}, \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{H}^{d \times 1}$ , temos:

$$\langle \phi \lambda_1 | \psi \lambda_2 \rangle = \lambda_1^* \langle \phi | \psi \rangle \lambda_2. \quad (2.4)$$

O produto interno induz de forma natural, uma norma de valores reais sobre  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ , que definiremos a seguir.

**Definição 2.1.6** A norma de um vetor quaterniônico de dimensão  $d$  é uma aplicação  $\| \cdot \| : \mathbb{H}^{d \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\| |\phi\rangle \| = \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}. \quad (2.5)$$

Um vetor quaterniônico unitário ou normalizado  $|\phi\rangle$  é aquele vetor para qual  $\| |\phi\rangle \| = 1$ . A normalização de um vetor é feita dividindo-se o vetor por sua norma. Dois vetores quaterniônicos  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle$ , de um mesmo módulo quaterniônico são ortogonais, se  $\langle \phi | \psi \rangle = 0$ .

**Definição 2.1.7** Uma base  $B_d$  de um módulo à direita quaterniônico, constituída de  $d$  vetores ortonormais é chamada de base ortonormal quaterniônica, ou simplesmente base ortonormal.

**Observação 2.1.2** Podemos usar o método da ortonormalização de Gram-Schmidt feita em espaços vetoriais, para ortonormalizar uma base qualquer quaterniônica.

Dentre as inúmeras bases ortonormais, existe uma base única, que corriqueiramente trabalhamos, denominada base canônica, que definiremos após a definição do símbolo delta de Kronecker que faremos a seguir.

**Definição 2.1.8** *Definimos o símbolo de Kronecker  $\delta_{ij}$  para  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , como sendo*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq 0. \end{cases}$$

**Observação 2.1.3** *Para cada natural  $1 \leq i \leq n$ , denotamos por  $|e_i\rangle$ , o  $i$ -ésimo vetor  $|e_i\rangle = (\delta_{ij})_{j=1, \dots, i, \dots, d}$ , denominado  $i$ -ésimo vetor canônico. Portanto explicitamente teremos:*

$$|e_i\rangle = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

*em  $\mathcal{V}$ -módulo à direita, onde a componente 1 se encontra na  $i$ -ésima posição. O conjunto  $\mathcal{B}_d = \{|e_1\rangle, \dots, |e_d\rangle\}$  é uma base ortonormal para o módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{V}$  de dimensão  $d$ , denominada a base canônica de  $\mathcal{V}$ .*

**Observação 2.1.4** *O conjunto  $\mathcal{B}_d = \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  é a base canônica, para o módulo à direita quaterniônico dado no Exemplo 2.1.1. Para isso, basta fazermos as seguintes identificações:  $e_1 = 1, e_2 = i, e_3 = j$  e  $e_4 = k$ , e por conseguinte sua dimensão é  $d = 4$ . Seja um elemento qualquer  $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$  desse módulo, então tomamos como escalares:  $\lambda_1 = q_0, \lambda_2 = q_1, \lambda_3 = q_2$  e  $\lambda_4 = q_3$ , para obtermos as coordenadas de  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  na base canônica em questão.*

## 2.2 Transformações Lineares Quaterniônicas

Nesta seção, trataremos de examinar aplicações entre dois módulos à direita, que atendam alguns quesitos, as chamadas transformações lineares quaterniônicas.

**Definição 2.2.1** *Definimos uma transformação linear quaterniônica como uma aplicação  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , onde  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  são módulos quaterniônicos à direita, tais que  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$ , e  $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{V}$ :*

$$T(|\phi\rangle\lambda_1 + |\psi\rangle\lambda_2) = T(|\phi\rangle)\lambda_1 + T(|\psi\rangle)\lambda_2. \quad (2.6)$$

Vamos nos restringir ao caso de dimensão finita. Denotamos por  $\mathbb{H}^{p \times d}$ , o conjunto de todas as transformações lineares quaterniônicas  $T : \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^d \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^p$ . Fixemos agora, duas bases finitas  $B_d$  e  $B_p$ , para os respectivos módulos quaterniônicos à direita:  $B_d = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_d\rangle\}$  e  $B_p = \{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_p\rangle\}$ . Então para cada índice  $s \in$

$\{1, \dots, d\}$ , existem escalares quaterniônicos  $T_{1s}, \dots, T_{ps}$  tal que

$$T(|\phi_s\rangle) = \sum_{r=1}^p |\psi_r\rangle T_{rs}. \quad (2.7)$$

Portanto, podemos representar uma transformação linear  $T$ , por meio de uma matriz  $A \in \mathbb{H}^{p \times d}$  com entradas  $A_{rs} = T_{rs}$ , chamada representação matricial de  $T$  com respeito as bases  $B_d$  e  $B_p$ . Assim, podemos identificar a transformação linear quaterniônica  $T$  sobre  $\chi \in \mathbb{H}^d, T(\chi)$ , com a ação esquerda da matriz quaterniônica  $A \in \mathbb{H}^{p \times d}$  com entradas  $A_{rs} = T_{rs}$  do seguinte modo:

$$T(|\phi\rangle) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\chi_1 + A_{12}\chi_2 + \dots + A_{1d}\chi_d \\ A_{21}\chi_1 + A_{22}\chi_2 + \dots + A_{2d}\chi_d \\ \dots \\ A_{p1}\chi_1 + A_{p2}\chi_2 + \dots + A_{pd}\chi_d \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Existe um isomorfismo entre  $\mathbb{H}^{p \times d}$  e o conjunto de todas transformações lineares quaterniônicas  $\{T : \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^d \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^p\}$ . Portanto uma matriz  $A \in \mathbb{H}^{p \times d}$  é equivalente a uma transformação linear  $T : \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^d \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^p$ , e desse modo “matriz” ou “transformação linear” significam a mesma coisa.

**Teorema 2.2.1** *O conjunto  $\mathcal{V} = \mathbb{H}^{d \times p}$  com as operações de soma matricial e produto por escalar matricial quaterniônico à direita, definidas respectivamente por*

$$A(|\phi\rangle\lambda_1 + |\psi\rangle\lambda_2) = (A|\phi\rangle)\lambda_1 + (A|\psi\rangle)\lambda_2,$$

e

$$A(B|\varphi\rangle) = AB(|\varphi\rangle),$$

para quaisquer  $A \in \mathbb{H}^{p \times d}, B \in \mathbb{H}^{d \times q}, |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{H}^d, |\varphi\rangle \in \mathbb{H}^q, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$ , possui estrutura de módulo à direita quaterniônico de dimensão  $pd$ .

**Teorema 2.2.2** *Se  $B_d = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_d\rangle\}$  e  $B_p = \{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_p\rangle\}$  são duas bases ortonormais para os módulos à direita  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$ , respectivamente, então a forma matricial da transformação linear  $T(|\phi\rangle) = A|\phi\rangle$ , descrita na Igualdade (2.15), se escreve do seguinte modo:*

$$T(|\phi\rangle) = A|\phi\rangle = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^d |\psi_r\rangle A_{rs}\chi_s. \quad (2.9)$$

**Demonstração 2.2.1** De acordo com as hipóteses do teorema, obtemos explicitamente:

$$T(|\phi\rangle) = A|\phi\rangle = \left( \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^d |\psi_r\rangle A_{rs} \langle \phi_s| \right) \left( \sum_{t=1}^d |\phi_t\rangle \chi_t \right) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^d |\psi_r\rangle A_{rs} \chi_s. \quad (2.10)$$

### 2.2.1 Operadores Lineares Quaterniônicos

**Definição 2.2.2** Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  dois módulos à direita quaterniônicos de dimensões finitas. Uma transformação linear  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , será chamado de operador linear quaterniônico, quando as dimensões dos módulos  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  são iguais a  $d$ .

Denotamos a família de todos os operadores lineares quaterniônicos  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  pelo conjunto  $\mathbb{H}^{d \times d}$ .

**Definição 2.2.3** Seja um operador linear  $A = (a_{rs}) \in \mathbb{H}^{d \times d}$ . Associamos para este operador as seguintes matrizes:

$\bar{A} = \overline{(a_{rs})} = (a_{rs}^*)$ , denominado conjugado de  $A$ , onde  $a_{rs}^*$  é o conjugado quaterniônico de  $a_{rs}$ ;

$A^t = (a_{sr})$ , denominada transposta de  $A$ ;

$A^\dagger = (\bar{A})^t = (a_{sr}^*)^t = (a_{sr}^*)$ , denominado de conjugado transposto de  $A$  ou conjugado hermitiano<sup>1</sup> de  $A$ .

**Definição 2.2.4** Seja uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$ . Dizemos que  $A$  é hermitiana quando  $A^\dagger = A$ , anti-hermitiana quando  $A^\dagger = -A$ , normal quando  $AA^\dagger = A^\dagger A$ . Finalmente dizemos que  $A$  é inversível quando existe uma matriz  $B$  do tipo  $d \times d$ , tal que  $AB = BA = I_{\mathbb{H}_d}$ , onde  $I_{\mathbb{H}_d}$  é a matriz de identidade de ordem  $d$ .

**Teorema 2.2.3** Se  $A, B \in \mathbb{H}^{d \times d}$  são dois operadores lineares quaterniônicos, então

- i)  $(\bar{A})^t = \overline{(A^t)}$ ;
- ii)  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ;
- iii)  $\overline{AB} \neq \bar{A}\bar{B}$  (em geral);
- iv)  $(AB)^t \neq B^t A^t$  (em geral);
- v)  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$  desde que  $A$  e  $B$  sejam inversíveis;
- vi)  $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$  desde que  $A$  seja inversível;

---

<sup>1</sup> $A^\dagger$  é a denotação universal da Mecânica Quântica para o conjugado hermitiano.

vii)  $(\bar{A})^{-1} \neq \overline{A^{-1}}$  (em geral);

viii)  $(A^t)^{-1} \neq (A^{-1})^t$  (em geral).

**Definição 2.2.5** *Seja um operador  $U \in \mathbb{H}^{d \times d}$  tal que  $UU^\dagger = I_{\mathbb{H}^{d \times d}}$ , onde a condição  $UU^\dagger = I_{\mathbb{H}^{d \times d}}$  é equivalente a condição  $U^\dagger U = I_{\mathbb{H}^d}$ , então dizemos que a matriz  $U$  é um operador matricial quaterniônico unitário.*

**Observação 2.2.1** *O conjunto de todas as matrizes unitárias quaterniônicas forma um subgrupo do grupo dos automorfismos sobre  $\mathbb{H}^d$  que preserva o produto interno.*

**Teorema 2.2.4** *Se  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$  é um operador quaterniônico, então:*

$$\langle \phi | A\psi \rangle = \langle A^\dagger \phi | \psi \rangle, \quad (2.11)$$

$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{H}^d$ .

**Demonstração 2.2.2** *Com efeito,  $\forall A \in \mathbb{H}^{d \times d}$  e  $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{H}^{d \times 1}$ , temos sucessivamente:*

$$\begin{aligned} \langle \phi | A\psi \rangle &= \sum_{r=1}^d |\bar{\phi}_r\rangle (A|\psi\rangle)_r \\ &= \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d |\bar{\phi}_r\rangle A_{rs} |\psi_s\rangle \\ &= \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d \overline{A_{rs}} |\phi_r\rangle |\psi_s\rangle \\ &= \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d \overline{A_{sr}} |\phi_s\rangle |\psi_r\rangle \\ &= \langle A^\dagger \phi | \psi \rangle. \end{aligned}$$

**Definição 2.2.6** *O conjunto formado por todos os operadores lineares quaterniônicas  $\mathbb{H}^{d \times d}$  que são hermitianos, será chamado de autoadjunto <sup>2</sup> de  $\mathbb{H}^{d \times d}$  e será denotado por  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ . Assim  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d}) = \{A \in \mathbb{H}^{d \times d} : A = A^\dagger\}$ .*

Existe um isomorfismo entre o conjunto das matrizes autoadjuntas  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  e o conjunto dos operadores lineares quaterniônicos lineares  $T = T^\dagger : \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^{d \times d} \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^{d \times d}$ , via

$$\langle T(\phi) | \psi \rangle = \langle \phi | T^\dagger(\psi) \rangle. \quad (2.12)$$

<sup>2</sup>Na Mecânica Quântica postula-se que a cada grandeza física mensurável corresponde um único operador autoadjunto, conhecido como observável.

**Teorema 2.2.5** *O conjunto  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  dos operadores quaterniônicos autoadjuntos com as operações de soma e produto por um escalar definidas no Teorema 2.2.1, forma um espaço vetorial real de dimensão  $d(2d - 1)$ .*

**Definição 2.2.7** *Dizemos que  $A \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  é uma matriz semi-definida positiva se*

$$\langle \phi | A \phi \rangle \geq 0. \quad (2.13)$$

para qualquer  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$ .

Denotamos o conjunto dos operadores lineares semi-definidos positivos sobre  $\mathbb{H}^{d \times d}$  por  $\mathcal{A}_{adj}^+(\mathbb{H}^{d \times d})$ .

**Teorema 2.2.6 (Semi-definida positiva implica em autoadjunto)** . *Se  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$  é tal que  $\langle \phi | A \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$ , então  $A = A^\dagger$ .*

**Demonstração 2.2.3** *Com efeito, aplicando a simetria conjugada, propriedade ii) da Definição 2.1.5, temos:*

$$\langle \phi | A \phi \rangle^\dagger = \langle A \phi | \phi \rangle. \quad (2.14)$$

Agora sendo  $\langle \phi | A \phi \rangle$  real, temos:

$$\langle \phi | A \phi \rangle^\dagger = \langle \phi | A \phi \rangle. \quad (2.15)$$

Das igualdades (2.14) e (2.15), obtemos:

$$\langle \phi | A \phi \rangle = \langle A^\dagger \phi | \phi \rangle,$$

daí

$$\langle A \phi | \psi \rangle = \langle A^\dagger \phi | \phi \rangle,$$

e por conseguinte  $A = A^\dagger$ .

Vamos agora equipar o espaço vetorial real dado no Teorema 2.2.5:  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ , com o produto interno:  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d}) \times \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por,

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(AB), \quad (2.16)$$

onde o traço quaterniônico é definido para  $A \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  com entradas  $A_{rs}$ , por meio da fórmula

$$\text{tr}(A) = \Re\left(\sum_{i=1}^d A_{ii}\right), \quad (2.17)$$

onde  $\Re$  é uma aplicação binária em  $\mathbb{H}$ , que resulta na parte real de um quaternio e satisfaz as duas propriedades:

$$\Re(\lambda_1 + \lambda_2) = \Re(\lambda_1) + \Re(\lambda_2) \quad (2.18)$$

e

$$\Re(\lambda_1 \lambda_2) = \Re(\lambda_2 \lambda_1). \quad (2.19)$$

O traço é  $\mathbb{R}$ -linear:  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\forall A, B \in \mathbb{H}^{d \times d}$ ,

$$\text{tr}(A\lambda_1 + B\lambda_2) = \text{tr}(A)\lambda_1 + \text{tr}(B)\lambda_2. \quad (2.20)$$

**Teorema 2.2.7** Para quaisquer  $A, B \in \mathbb{H}^{d \times d}$ , temos:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA). \quad (2.21)$$

**Demonstração 2.2.4** Sejam  $A, B \in \mathbb{H}^{d \times d}$  com relação a base canônica, de modo que

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \Re \left( \sum_{t=1}^d \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{u=1}^d \sum_{v=1}^d \langle t|r \rangle A_{rs} \langle s|u \rangle B_{uv} \langle v|t \rangle \right) \\ &= \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d \Re(A_{rs} B_{sr}) \\ &= \Re \left( \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d B_{rs} A_{sr} \right) \\ &= \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

O produto interno canônico em  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ , goza das três propriedades descritas no teorema a seguir.

**Teorema 2.2.8** Para quaisquer  $A, B, C \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  e  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$ , então

$$i) \text{ } \mathbb{R}\text{-bilinearidade: } \langle A\lambda_1 | B\lambda_2 \rangle = \lambda_1 \langle A | B \rangle \lambda_2 \text{ e } \langle A + B | C \rangle = \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle;$$

$$ii) \text{ Simetria: } \langle A | B \rangle = \langle B | A \rangle;$$

$$iii) \text{ Não-negatividade: } \langle A | A \rangle \geq 0 \text{ e prevalece a igualdade se, e somente se, } A = 0.$$

Todas essas propriedades seguem a partir da definição de traço quaterniônico. O produto interno canônico em  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  obedece a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle A | B \rangle|^2 \leq \langle A | A \rangle \langle B | B \rangle. \quad (2.22)$$

O produto interno canônico em  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  induz uma norma de valor real  $\|\cdot\| : \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d}) \rightarrow \mathbb{R}$ , via

$$\|A\| = \sqrt{\langle A | A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^2)}, \quad (2.23)$$

A norma  $\|\cdot\|$  obedece as três propriedades enunciadas no teorema a seguir:

**Teorema 2.2.9** *Para quaisquer  $A, B \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades:*

- i)  *$\mathbb{R}$ -homogeneidade:*  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ;
- ii) *Não-negatividade:*  $\|A\| \geq 0$  e prevalece a igualdade se, e somente se,  $A = 0$ ;
- iii) *Desigualdade triangular:*  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

**Demonstração 2.2.5** *Provando inicialmente a homogeneidade. Com efeito, por definição:*

$$\|\lambda A\| = \sqrt{\text{tr}((\lambda A)^2)} = \sqrt{\lambda^2 \text{tr}(A^2)} = |\lambda| \sqrt{\text{tr}(A^2)} = |\lambda| \|A\|.$$

e a não negatividade, segue de

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}((A)^2)} = \sqrt{\sum_{r,s} |A_{rs}|^2}$$

e esta última expressão  $\sqrt{\sum_{r,s} |A_{rs}|^2} \geq 0$ . Para finalizar,

$$\begin{aligned} \|A + B\|^2 &= \langle A + B | A + B \rangle \\ &\leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2|(A, B)| \\ &\leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\|\|B\| \\ &= (\|A\| + \|B\|)^2, \end{aligned}$$

de modo que  $\|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$ , ou melhor,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

**Teorema 2.2.10** *Se  $A, B \in \mathcal{A}_{adj}^+(\mathbb{H}^{d \times d})$  tais que seus traços são unitários, então  $\text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ . Prevalece a igualdade se, e somente se,  $A = B$ .*

## 2.3 Teoria Espectral das Matrizes Autoadjuntas $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema Espectral para os operadores lineares quaterniônicos autoadjuntos (BAKER, 1999; GRAYDON, 2011; ZHANG, 1997).

### 2.3.1 Autovalores e Autovetores Quaterniônicos

**Definição 2.3.1** *Seja  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$  um operador linear quaterniônico sobre  $\mathbb{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{H}$ . O quaternário  $\lambda$  é chamado de autovalor ou raiz característica quaterniônico módulo à direita*

sobre o operador  $A$ , se existir um vetor quaterniônico  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$  não nulo, tal que

$$T(\phi) = |\phi\rangle\lambda. \quad (2.24)$$

O vetor  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$  é chamado autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . O par  $(|\phi\rangle, \lambda)$  é denominado um auto-par. O conjunto dos autovalores de todos os auto-pares é definido como o espectro de  $A$ .

**Exemplo 2.3.1** Os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$ ,

são -1 e 1. De fato, temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \lambda,$$

que origina o sistema linear:

$$\begin{cases} \mathbf{i}p = q\lambda \\ -\mathbf{i}q = p\lambda \end{cases}$$

pré-multiplicando a segunda equação do sistema acima por  $\mathbf{i}$ , obtemos:

$$x = \mathbf{i}p\lambda,$$

que substituindo na primeira equação, obtemos:

$$\mathbf{i}p = (\mathbf{i}p\lambda)\lambda,$$

de modo que  $\lambda^2 = 1$ . Portanto  $\{-1, 1\}$  é o espectro da matriz  $A$ .

**Exemplo 2.3.2** Os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix},$$

são  $\pm\mathbf{i}$ ,  $\pm\mathbf{j}$  e  $\pm\mathbf{k}$ .

**Definição 2.3.2** Dizemos que duas matrizes quaterniônicas  $A$  e  $B$  são similares e denotamos por  $A \sim B$ , se existir uma matriz inversível  $Q$ , tal que

$$B = QAQ^{-1}. \quad (2.25)$$

**Lema 2.3.1** Duas matrizes quaterniônicas similares possuem o mesmo espectro.

**Demonstração 2.3.1** Se  $A \sim B$ , então de acordo com a Definição 2.3.2,  $B = QAQ^{-1}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{H}$  é um autovalor de  $A$ , então devemos encontrar um autovetor  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^{d \times 1}$ , tal que:

$$A|\phi\rangle = |\phi\rangle\lambda.$$

Seja agora  $|\psi\rangle = Q|\phi\rangle$ . Então

$$B|\psi\rangle = QAQ^{-1}|\psi\rangle = QAQ^{-1}Q|\phi\rangle = QA|\phi\rangle = Q|\phi\rangle\lambda = |\psi\rangle\lambda. \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Teorema Espectral em $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$

Nesta subseção daremos algumas definições a respeito da teoria espectral de um operador quaterniônico, dando maior ênfase aos operadores auto-adjuntos. Enunciaremos quatro lemas que darão suporte para a validade do teorema espectral dos operadores autoadjuntos, objetivo principal dessa subseção.

**Lema 2.3.2** Sejam  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$  e  $\lambda \in \mathbb{H}$  um autovalor da matriz  $A$ . Se  $\gamma \in \mathbb{H}, \gamma \neq 0$ , então  $\gamma^{-1}\lambda\gamma$  também é um auto valor da matriz  $A$ .

**Demonstração 2.3.2** De  $A|\phi\rangle = |\phi\rangle\lambda$ , obtemos:

$$A(|\phi\rangle\gamma) = |\phi\rangle\lambda\gamma = |\phi\rangle\gamma\gamma^{-1}\lambda\gamma = (|\phi\rangle\gamma)(\gamma^{-1}\lambda\gamma).$$

Portanto  $\gamma^{-1}\lambda\gamma$  é também autovalor de  $A$ .

**Observação 2.3.1** A partir do Lema 2.3.2, vemos que, se o vetor correspondente ao autovalor  $\lambda$ , é  $|\phi\rangle$ , então  $|\phi\rangle\gamma$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $\gamma^{-1}\lambda\gamma, \gamma \in \mathbb{H}$ .

**Lema 2.3.3** Se  $A \in \mathbb{H}^{d \times d}$ , então existe uma matriz triangular  $T$  tal que

$$C = T^{-1}AT, C = [c_{ij}] \in \mathbb{H}^{d \times d},$$

onde  $c_{ij} = 0, \forall i > j + 1$ .

A demonstração pode ser encontrada em (BRENNER, 1951). O próximo Lema é com respeito aos autovalores dos operadores autoadjuntos quaterniônicos:

**Lema 2.3.4** Um operador autoadjunto quaterniônico tem espectro real.

**Demonstração 2.3.3** Seja  $T \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$  tal que

$$T(\phi) = \phi\lambda,$$

onde  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^{d \times 1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{H}$ . Afirimo  $\text{Im}(\lambda) = 0$ . Com efeito,  $T(|\phi\rangle) = |\phi\rangle\lambda$  implica que

$$\lambda = \frac{\langle \phi | T(\phi) \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \phi | T^\dagger(\phi) \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \lambda^*, \quad (2.27)$$

logo  $\lambda$  é um número real.

Utilizando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt, podemos obter o seguinte lema.

**Lema 2.3.5** *Se  $|\phi\rangle \in \mathcal{V}$  e  $\mathcal{V}$  admite produto interno  $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ , então existe uma base ortonormal  $B_p = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_p\rangle\}$  para  $\mathcal{V}$  com  $|\phi\rangle = |\phi_1\rangle$  (GRAVES, 1975).*

**Lema 2.3.6** *Se  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  é um operador linear autoadjunto quaterniônico cuja dimensão do módulo  $V$  é  $d$ , então  $\mathcal{V}$  admite uma base ortonormal consistindo dos autovetores de  $T$ .*

**Demonstração 2.3.4** *Vamos provar por indução em  $d$ . Para  $d = 1$ , a base ortonormal pode ser escolhida como qualquer quatérnio  $|\phi\rangle$  com norma unitária. Suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para o inteiro positivo  $d$ . Devemos mostrar que o resultado também é válido para  $d + 1$ . Com efeito, seja  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{H}$  tal que*

$$T(|\phi\rangle) = |\phi\rangle\lambda.$$

*Pelo Lema 2.3.4,  $\lambda$  é real. Além disso,  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$  pode ser escolhido tal que  $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ . Agora, seja*

$$\mathcal{W} = \{|\psi\rangle \in \mathcal{V} : \langle \psi | \phi \rangle = 0\} \subset \mathcal{V}.$$

*$\mathcal{W}$  é um submódulo à direita quaterniônico de  $\mathcal{V}$ . Pelo Lema 2.3.5, existe uma base  $B_p = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_p\rangle\}$  para  $\mathcal{W}$ . Portanto, se  $|\psi\rangle \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ , então existe escalares  $\{b_1, \dots, b_p\} \subset \mathbb{H}$  tais que*

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle b_1 + \dots + |\phi_p\rangle b_p, \quad (2.28)$$

*Assim,  $\mathcal{W}$  é um submódulo à direita quaterniônico de dimensão  $d$ . Agora, observe que  $\mathcal{W}$  é um submódulo invariante sobre  $T$ , para quaisquer que sejam  $|\psi\rangle \in \mathcal{V}$ :*

$$\langle T(\psi) | \phi \rangle = \langle \psi | T^\dagger(\phi) \rangle = \langle \psi | T(\phi) \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \lambda = 0, \quad (2.29)$$

*estabelecendo que  $T \rightarrow \mathcal{W}$  é um operador linear autoadjunto quaterniônico. Portanto, por hipótese de indução,  $\mathcal{W}$  admite uma base ortonormal  $B$  que consiste dos autovetores de  $T$ . Adjuntando  $|\phi\rangle$  a essa base  $B_p$ , finaliza a tese de indução.*

**Observação 2.3.2** *Conforme o Lema 2.3.6, qualquer operador linear autoadjunto quaterniônico de dimensão  $d$  admite exatamente  $d$  (possivelmente degenerados) autovalores*

reais, e os autovetores correspondentes podem ser escolhidos para constituir uma base ortonormal para o módulo  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ .

**Teorema 2.3.1 (Teorema Espectral)** *Se  $T$  é um operador linear autoadjunto quaterniônico sobre um módulo à direita  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ , então  $\mathbb{H}^{d \times 1}$  admite uma base ortonormal  $B_d = \{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  consistindo dos autovetores de  $T$  tal que a matriz de representação  $T$  com respeito a base  $B_d$  é uma matriz diagonal real.*

Com efeito, pelo Lema 2.3.6 temos que  $\mathcal{V}$  admite uma base ortonormal  $B_d = \{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  consistindo dos autovetores de  $T$ . Portanto, a ação de  $T$  sobre  $\mathcal{V}$  pode ser definida via matriz autoadjunta  $A \in \mathcal{A}_{adj}^+(\mathbb{H}^{d \times d})$  onde  $A$  age de acordo com

$$A = \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d |\phi_r\rangle A_{rs} \langle \phi_s|. \quad (2.30)$$

Segue que

$$A_{rs} = \langle \phi_r | A \phi_s \rangle = \langle \phi_r | \phi_s \lambda_s \rangle = \delta_{rs} \lambda_s, \quad (2.31)$$

onde pelo Lema 2.3.4, o autovalor  $\lambda_s$  é real. Logo,

$$A = \sum_{r=1}^d |\phi_r\rangle \lambda_r \langle \phi_r|. \quad (2.32)$$

Usaremos o Teorema 2.3.1, para caracterizar a norma de uma matriz autoadjunta semi-positiva  $A$ , isto é,  $A \in \mathcal{A}_{adj}^+(\mathbb{H}^{d \times d})$  em termos dos seus autovalores. É o que vai acontecer no Corolário a seguir.

**Corolário 2.3.1** *Se  $A$  é um operador autoadjunto semi-definido positivo de dimensão  $d$ , admite um espectro  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ , associados aos autovetores ortonormais  $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_d\rangle\}$ , então*

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{r=1}^d \lambda_r^2}. \quad (2.33)$$

Com efeito, temos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \text{tr}(A^2) \\
&= \text{tr}\left(\sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d |\psi_r\rangle \lambda_r \langle \psi_r| \psi_s\rangle \lambda_s \langle \psi_s|\right) \\
&= \text{tr}\left(\sum_{r=1}^d |\psi_r\rangle \lambda_r^2 \langle \psi_r|\right) \\
&= \sum_{r=1}^d \text{tr}(|\psi_r\rangle \langle \psi_r|) \\
&= \sum_{r=1}^d \lambda_r^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ao determinar a Igualdade (2.34), utilizamos os Lemas 2.3.4 e 2.3.6, e o fato de que  $\forall |\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(|\psi\rangle \langle \phi|) &= \Re\left(\sum_{t \in B_d} \langle t|\psi\rangle \langle \phi|t\rangle\right) \\
&= \sum_{t \in B_d} \Re(\langle t|\psi\rangle \langle \phi|t\rangle) \\
&= \sum_{t \in B_d} \Re(\langle \phi|t\rangle \langle t|\psi\rangle) \\
&= \Re\left(\sum_{t \in B_d} \langle \phi|t\rangle \langle t|\psi\rangle\right) \\
&= \Re(\langle \phi|\psi\rangle).
\end{aligned}$$

onde  $B_d$  é tomado como uma base ortonormal para o  $\mathbb{H}^{d \times 1}$ .

## 2.4 Produto Tensorial Quaterniônico

Nesta seção definiremos um produto tensorial de módulos à direita quaterniônicos. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar (RAZON; HORWITZ, 1991). Sistemas quânticos individuais podem interagir para formarem sistemas quânticos compostos. Existe um postulado em Mecânica Quântica que descreve como o espaço de estados do sistema composto é construído a partir dos espaços de estados dos sistemas individuais. Vamos então desenvolver a noção de produto tensorial de módulos à direita quaterniônicos.

**Definição 2.4.1** *Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  módulos à direita quaterniônicos de dimensão  $d$ . Diremos*

que um módulo denotado por  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ , junto com uma aplicação bilinear:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \\ (|\phi\rangle, |\psi\rangle) &\mapsto |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \end{aligned}$$

é o produto tensorial de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  se, ao considerarmos um outro módulo à direita quaterniônico  $\mathcal{U}$  e também uma aplicação bilinear:

$$\begin{aligned} g : \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{U} \\ (|\phi\rangle, |\psi\rangle) &\mapsto g(|\phi\rangle, |\psi\rangle), \end{aligned}$$

afirmarmos que existe uma única transformação linear quaterniônica  $T : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ , tal que  $g(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = T \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} & \\ & \uparrow & \searrow \\ \mathcal{V} \times \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

**Observação 2.4.1** A aplicação  $f$  é uma aplicação bilinear universal, pois qualquer outra é uma composição de  $f$  por uma linear. Esta é a propriedade universal do produto tensorial, também é chamada mapeamento universal.

Generalizando, o produto tensorial de  $n$  módulos à direita quaterniônicos:  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ , é dado por um módulo à direita quaterniônico que denotamos por  $\mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_n$ , junto com uma aplicação  $n$ -linear universal  $f : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_n$ . Precisamente, isto quer dizer que qualquer outra transformação  $n$ -linear  $g : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U}$  é outro módulo à direita quaterniônico, pode ser escrita de forma única como  $g = T \circ f$ , onde  $T : \mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{U}$  é uma transformação linear quaterniônica. (RAZON; HORWITZ, 1991).

Em diversas vezes, denotaremos o produto tensorial de dois vetores quânticos quaterniônicos  $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$  por  $|\phi\rangle|\psi\rangle$ .

**Teorema 2.4.1** O produto tensorial quaterniônico satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle)\lambda = (|\phi\rangle\lambda) \otimes |\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes (|\psi\rangle\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{H}, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{V}, |\psi\rangle \in \mathcal{W}$ ;
- ii)  $(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) \otimes |\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\psi\rangle + |\phi_2\rangle \otimes |\psi\rangle, \forall |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathcal{V}, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{W}$ ;
- iii)  $|\phi\rangle \otimes (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |\phi\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{V}, \forall |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{W}$ .

**Exemplo 2.4.1** *Seja a matriz de Pauli  $\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$ . Então*

$$\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} & -j \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \\ j \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

*de modo que*

$$\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3 QUATERBITS NÃO GERAM *QUBITS* ENTRELAÇADOS

#### 3.1 Formalismo Quântico Quaterniônico

Nesta seção, consideramos um formalismo quântico quaterniônico para a descrição de estados quânticos, canais quânticos e medições quânticas. A nossa formulação terá lugar num ambiente de dimensão finita, e deve ser limitado à descrição das experiências do tipo considerado por Hardy em (HARDY, 2001). Consideramos experimentos em que o cientista tem acesso a três tipos de equipamentos: dispositivos de preparação, canais de transformação e dispositivos de medição. Em particular, considera-se o tipo de experiência representada pela figura:

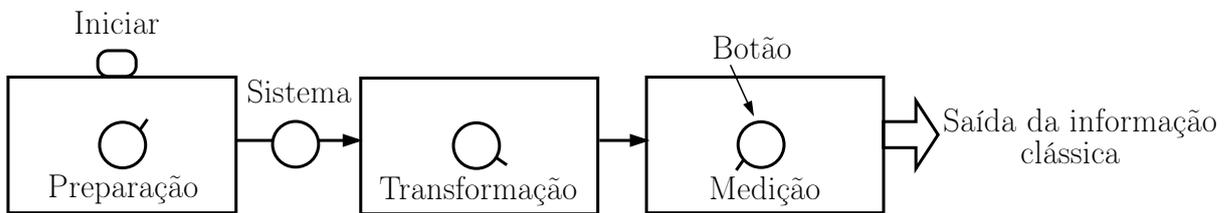


Figura 1: *Dispositivo de preparação de um sistema de informação.*(HARDY, 2001).

Um dispositivo de preparação emite um sistema físico com um estado associado inicial. O estado associado inicial é definido pelas configurações do dispositivo de preparação. O sistema em seguida entra num canal de transformação que pode transformar o estado associado inicial. A transformação do estado associado inicial é definida pelas configurações de canal de transformação. Finalmente, um sistema físico sai do canal e entra em um dispositivo de medição que registra um resultado clássico. O número de resultados clássicos depende das configurações do dispositivo de medição. As probabilidades para os resultados clássicos dependem das configurações do dispositivo de medição e o estado associado inicial transformado. Hardy aponta para que este tipo de experiência abranja uma vasta gama de fenômenos físicos.

Nas seções seguintes, formularemos uma descrição quântica quaterniônica de estados e dispositivos de medição.

#### 3.2 Estados Quânticos Quaterniônicos

Definimos um estado quântico quaterniônico de um sistema físico  $\Omega$ , que sempre é um espaço de Hilbert, por meio do traço unitário da matriz semi-definida positiva

denotada por  $\rho$  e chamada de operador densidade, ou seja,  $\rho \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{d \times d})$ , ou seja:

$$\text{tr}(\rho) = 1, \quad (3.1)$$

e

$$\langle \psi | \rho \psi \rangle \geq 0. \quad (3.2)$$

para qualquer  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}^d$ .

**Definição 3.2.1** *A matriz  $\rho$  é denominada matriz densidade ou operador densidade.*

O conjunto de todos os estados quânticos quaterniônicos  $\rho$  de dimensão  $d$  será denotado por  $\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$ .

**Teorema 3.2.1** *O conjunto  $\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  é convexo.*

**Demonstração 3.2.1** *Dados  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  e  $0 < \lambda < 1$ , então devemos provar que,  $\rho = [(1 - \lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2]$  é um elemento de  $\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$ . Com efeito, por linearidade do traço quaterniônico, temos que*

$$\text{tr}(\rho) = \text{tr}[(1 - \lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2] = (1 - \lambda) \text{tr}(\rho_1) + \lambda \text{tr}(\rho_2) = 1,$$

e por linearidade do produto interno quaterniônico, temos que para qualquer vetor quântico quaterniônico  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}^d$ :

$$\langle \phi | \rho \phi \rangle = (1 - \lambda) \langle \phi | \rho_1 \phi \rangle + \lambda \langle \phi | \rho_2 \phi \rangle > 0. \quad (3.3)$$

**Definição 3.2.2** *Os pontos extremos do conjunto convexo  $\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  serão chamados de estados quânticos puros e os demais serão chamados de estados mistos, que podem ser considerados como misturas probabilísticas de estados puros.*

**Teorema 3.2.2** *Os estados puros de  $\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  são operadores de densidade projeção de posto 1.*

**Demonstração 3.2.2** *Seja o operador densidade projeção:*

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d}), \quad (3.4)$$

possui posto 1 sobre  $|\phi\rangle$ . Temos que mostrar que  $\mathbf{P}$  é um estado puro. Com efeito, suponha por absurdo que ele seja um estado misto. Então, sejam  $A, B \in \mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$ , com  $A \neq B$ , e seja  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$ . Por convexidade  $\mathbf{P} = \lambda A + (1 - \lambda)B$ , de modo que

$\mathbf{P}^2 = \lambda^2 A^2 + (1 - \lambda)^2 B^2 + \lambda(1 - \lambda)(AB + BA)$ . Aplicando o traço a ambos os membros, temos que:

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda^2 \operatorname{tr}(A^2) + (1 - \lambda)^2 \operatorname{tr}(B^2) + \lambda(1 - \lambda) \operatorname{tr}(AB + BA) \\
&= \lambda^2 \operatorname{tr}(A^2) + (1 - \lambda)^2 \operatorname{tr}(B^2) + \lambda(1 - \lambda)[\operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA)] \\
&= \lambda^2 \operatorname{tr}(A^2) + (1 - \lambda)^2 \operatorname{tr}(B^2) + \lambda(1 - \lambda)[2 \operatorname{tr}(AB)] \\
&= \lambda^2 \operatorname{tr}(A^2) + (1 - \lambda)^2 \operatorname{tr}(B^2) + 2\lambda(1 - \lambda) \operatorname{tr}(AB).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pelo Teorema 2.2.10 com  $A \neq B$ , temos que  $\operatorname{tr}(AB) < \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$ . Aplicando este resultado na Igualdade 3.5, chegamos a uma contradição. Portanto nossa suposição é falsa, e com isso concluímos que os operadores densidade  $\mathbf{P}$  projeção de posto 1, são os estados puros de  $\mathcal{A}_{\text{adj}}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$ . Uma vez que cada elemento de  $\mathcal{A}_{\text{adj}}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  pode ser expandido como uma combinação convexa de operadores densidade projeção de posto 1, pelo Teorema Espectral 2.3.1, apenas os operadores densidade projeção de posto 1, podem ser estados puros.

**Teorema 3.2.3** (GRAYDON, 2011). Seja  $A \in \mathcal{A}_{\text{adj}}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})$  é tal que  $A = |\phi\rangle\langle\phi|$  se, e somente se,

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^3) = 1.$$

Portanto, esse Teorema identifica de forma precisa os estados quânticos quaterniônicos puros.

### 3.3 Bits Quânticos

Sabemos que a menor porção de informação clássica é o *bit*, o qual pode assumir apenas um único dos dois estados clássicos 0 ou 1. Na computação e informação quântica, utilizam-se estados quânticos no lugar de estados clássicos. Os *bits* clássicos 0 e 1 são substituídos respectivamente pelos *bits* quânticos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , representados algumas vezes na forma de matriz coluna  $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , chamados de *q-bits* ou *qubits*. A principal diferença entre o *bit* clássico e o *bit* quântico (*q-bit* ou *qubit*), é que um estado quântico genérico  $|\psi\rangle$  pode assumir os dois estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  ao mesmo tempo. Noutras palavras, dizemos que o estado genérico  $|\psi\rangle$  é uma superposição dos *qubits*  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , ou seja,

$$|\psi\rangle = |0\rangle\lambda_1 + |1\rangle\lambda_2, \tag{3.6}$$

para certos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}$  é um sistema que é um espaço de Hilbert. O vetor de estado genérico  $|\psi\rangle$  é uma combinação linear dos *bits* quânticos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , com amplitudes  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Se o espaço de Hilbert estiver definido sobre os reais, o *bit* quântico é chamado *rebit*, se for sobre os complexos recebe o mesmo nome *qubit* e se for sobre os quatérnios, *quaterbit*. Os vetores de estado  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  formam portanto, uma base computacional ortonormal, chamada base computacional.

Como vimos, a interpretação física de um *quaterbit* é que ele está simultaneamente nos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , e isto faz com que a quantidade de informações armazenadas no estado  $|\psi\rangle$  possa ser infinita. Entretanto, essa quantidade de informações está no nível quântico. Para torná-la acessível no nível clássico, há necessidade de fazermos algumas medidas e a Mecânica Quântica diz que o processo de medida altera o estado do estado quântico, fazendo assumir o estado  $|0\rangle$ , com probabilidade  $\|\lambda_1\|^2$ , ou o estado  $|1\rangle$ , com probabilidade  $\|\lambda_2\|^2$ . Com apenas as duas possibilidades temos  $\|\lambda_1\|^2 + \|\lambda_2\|^2 = 1$ . Assim a norma do estado quântico genérico  $|\psi\rangle$  é um, ou seja, ele é unitário. Os sistemas quânticos são sistemas físicos naturais, que podem ser usados para representar um *bit* quântico  $|\psi\rangle$ , são os *spins* eletrônicos ou nucleares e da polarização dos fótons. A diferença entre um *bit* e *quaterbit* é que este último pode existir numa superposição à direita de estados.

Uma representação conveniente do estado de um *quaterbit* é dada pelo conjunto das matrizes

$$A_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{2 \times 2}) \subset \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{2 \times 2}), \quad (3.7)$$

denominado esfera quaterniônica unitária, que pode ser obtida por meio de todas as combinações  $\mathbb{R}$ -lineares das matrizes de Pauli quaterniônicas junto com a matriz identidade, listadas abaixo:

$$I_{\mathbb{H}_2}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}, \sigma_5 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

**Observação 3.3.1** O conjunto de operadores  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$  é denominado sistema spin-flip <sup>1</sup> do ambiente  $\mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{2 \times 2})$ , haja vista que admite a relação

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 2\delta_{xy} I_{\mathbb{H}_2},$$

para todo  $x, y = 1, \dots, 5$ .

Desse modo aplicando a  $\mathbb{R}$ -linearização ( $\text{lin}_{\mathbb{R}}$ ) nessa lista de matrizes, teremos

$$\text{lin}_{\mathbb{R}}\{I_{\mathbb{H}_2}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\} = \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{2 \times 2}),$$

<sup>1</sup>Sistema *spin-flip* é uma coleção de operadores unitários anti-comutativas distintos de  $\pm I_{\mathbb{H}_2}$  em uma álgebra de Jordan real unitária que gera uma álgebra de Jordan-Banach conhecido como fatores *spins* (HANCHE-OLSEN; STÖRMER, 1984).

e a esfera unitária quaterniônica dos estados *qaterbits*, é dada por

$$\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{2 \times 2}) = \left\{ \rho \in \mathcal{A}_{adj}(\mathbb{H}^{2 \times 2}) : \rho = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{H}_2} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \right\}, \quad (3.9)$$

cujo o *spin-flip* é  $\vec{\sigma}$  da esfera quaterniônica unitária será

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5), \quad (3.10)$$

e o vetor da esfera quaterniônica é  $\vec{r} \in \mathbb{R}^5$ , e é tal que  $\|\vec{r}\| \leq 1$ , que é uma “condição sine qua non”, para que  $\rho$  seja semi-definida positiva. Quando  $\|\vec{r}\| = 1$ , os *qaterbits* são puros. Nessa representação, os pólos da esfera correspondem aos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Suponha agora que desejamos representar um conjunto de  $n$  *qaterbits*, da mesma forma que podemos escrever sequências de *bits* clássicos, como por exemplo “01”, “110” e “1010”. Dado que cada *qaterbit* é representado por um sistema físico distinto (átomos, fótons, etc), o estado global ou composto é obtido pelo produto tensorial de cada estado individual. Assim como um *qaterbit* simples pode se encontrar em uma superposição dos dois estados mensuráveis 0 e 1, um conjunto de *qaterbits* também pode se encontrar em uma superposição de todas as possíveis combinações desses estados.

**Exemplo 3.3.1** Considere o operador de Hadamard  $\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Calculando o produto tensorial  $\mathbf{H}|0\rangle \otimes \mathbf{H}|1\rangle$ :

$$\mathbf{H}|0\rangle \otimes \mathbf{H}|1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle),$$

que é uma superposição de todos os 4 possíveis bits clássicos “0” e “1”.

Este resultado pode ser estendido naturalmente para mais de dois *qaterbits*, cuja base do produto tensorial de um estado de  $n$  bits quânticos é dada por:

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle &= |0 \dots 00\rangle \\ |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle &= |0 \dots 01\rangle \\ &\vdots \\ |1\rangle \otimes \dots \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle &= |1 \dots 11\rangle. \end{aligned}$$

**Observação 3.3.2** Portanto a aplicação de uma mesma transformação em  $n$  *qaterbits* pode resultar em uma superposição de todos os  $2^n$  possíveis valores. Esse fato é sem dúvida

uma grande vantagem de um computador quântico sobre um computador clássico.

### 3.4 Canais Quânticos Quaterniônicos

Assim como em qualquer sistema de telecomunicações, a fonte e o receptor se comunicam através de um canal. No caso de comunicações quânticas, ele é chamado de canal quântico. Em termos, mais precisos:

**Definição 3.4.1** *Seja  $\rho$  um estado quântico quaterniônico associado a sistema físico  $\Omega$ . Chamamos de canal quântico quaterniônico que evolui o estado  $\rho$ , como sendo o mapeamento:*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{H}^{d \times d} &\longrightarrow \mathbb{H}^{p \times p} \\ \rho &\longmapsto \Phi(\rho) \end{aligned} \quad (3.11)$$

expresso por

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^n A_i \rho A_i^\dagger, \quad (3.12)$$

para certos  $A_i, i = 1, \dots, n$  em  $\mathbb{H}^{p \times d}$ , onde

$$\sum_{i=1}^n A_i^\dagger A_i = I_{\mathbb{H}_d}. \quad (3.13)$$

**Lema 3.4.1** *Se  $A \in \mathbb{H}^{p \times d}$  e  $\rho \in \mathbb{H}^{d \times d}$ , então*

$$\text{tr}(A\rho A^\dagger) = \text{tr}(A^\dagger A\rho). \quad (3.14)$$

Equipado com o Lema 3.5, vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.1** *Os canais quânticos quaterniônicos transformam estados quânticos quaterniônicos, ou seja*

$$\Phi(\mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d})) \subseteq \mathcal{A}_{adj}^{1+}(\mathbb{H}^{d \times d}). \quad (3.15)$$

**Demonstração 3.4.1** *De acordo com Definição 3.4.1, devemos provar as duas condições:  $\text{tr}(\Phi(\rho)) = 1$  e  $\langle \psi | \Phi(\rho) \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle \in \mathbb{H}^p$ . Com efeito, aplicando as propriedades de traço quaterniônico em  $\Phi(\rho)$ , teremos sucessivamente*

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi(\rho)) &= \text{tr} \left( \sum_{i=1}^n A_i \rho A_i^\dagger \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{tr}(A_i \rho A_i^\dagger) \end{aligned}$$

que utilizando o Lema 3.4.1, vem

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\Phi(\rho)) &= \sum_{i=1}^n \text{tr}(A_i^\dagger A_i \rho) \\
&= \text{tr}\left(\sum_{i=1}^n A_i^\dagger A_i \rho\right) \\
&= \text{tr}(I_{\mathbb{H}_d} \rho) \\
&= \text{tr}(\rho) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

A segunda condição o leitor poderá encontrá-la na íntegra em (GRAYDON, 2011).

### 3.5 Operador Densidade Reduzido nos *Qubits*

Vamos exigir uma descrição para estados quânticos quaterniônicos de subsistemas de sistemas quânticos compostos<sup>2</sup>. O operador densidade quaterniônico reduzido proporciona tal descrição.

**Definição 3.5.1** *Suponha que se tenha dois subsistemas  $A$  e  $B$ , cujo estado seja descrito por um operador densidade  $\rho_{AB}$ . O operador reduzido para o sistema  $A$ , será*

$$\rho_A \equiv \text{tr}_B(\rho_{AB}), \quad (3.16)$$

em que  $\text{tr}_B$  é uma operação denominada traço parcial sobre  $B$ . O traço parcial é definido por

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle)(\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}_B(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (3.17)$$

em que  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  são quaisquer dois vetores de  $A$  e  $|b_1\rangle$  e  $|b_2\rangle$  são quaisquer dois vetores de  $B$ .

**Lema 3.5.1** *Suponha um sistema quântico formado por um produto de estados:  $\rho_{AB} = \rho \otimes \sigma$ , em que  $\rho$  é o operador densidade de  $A$  e  $\sigma$  é o operador densidade de  $B$ . Então*

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho \otimes \sigma) = \rho \text{tr}(\sigma) = \rho. \quad (3.18)$$

que é o resultado que se espera intuitivamente. Analogamente,  $\rho_B = \sigma$  para esse estado.

**Exemplo 3.5.1** *Vamos encontrar o operador densidade do estado de Bell  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle +$*

---

<sup>2</sup>Sistemas compostos são os que podem ser vistos como constituídos de duas (ou mais!) partes (ou ‘subsistemas’).

$|11\rangle\rangle,$

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|}{2}.\end{aligned}$$

Realizando o traço sobre o segundo qubit, encontra-se o operador densidade reduzido do primeiro qubit,

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{\text{tr}_2(|00\rangle\langle 00|) + \text{tr}_2(|11\rangle\langle 00|) + \text{tr}_2(|00\rangle\langle 11|) + \text{tr}_2(|11\rangle\langle 11|)}{2} \\ &= \frac{|00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|}{2} \\ &= \frac{|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|}{2} \\ &= \frac{I_{\mathbb{H}_d}}{2}.\end{aligned}$$

### 3.6 Decomposição de Schmidt

A decomposição de Schmidt é de fundamental importância no estudo do entrelaçamento de estados puros bipartidos, que veremos na Seção 3.7, sendo considerada um critério de separabilidade para tais estados.

**Teorema 3.6.1 (01)** *Seja  $|\psi\rangle$  um estado puro de um sistema  $AB$ . Então existem estados ortonormais  $|i_A\rangle \in A$  e  $|i_B\rangle \in B$  tais que*

$$|\psi\rangle = \sum_i |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \lambda_i, \quad (3.19)$$

em que  $\lambda_i$  são números reais não negativos satisfazendo  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ , e são denominados coeficientes de Schmidt.

### 3.7 Entrelaçamento Quântico

O entrelaçamento é a característica da mecânica quântica que permite, por exemplo, o teletransporte (BENNETT C. H.; WOOTTERS, 1993) e codificação densa (BENNETT; WIESNER, 1992). É o que Schrödinger chamava “o traço característico da mecânica quântica, aquele que leva ao abandono completo do pensamento clássico” (SCHRÖDINGER, 1980). Considere um espaço de estados quânticos quaterniônico de Hilbert  $\mathcal{H}$ , decomposto em dois fatores tensoriais quaterniônicos  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , ou seja

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

Um estado  $|\psi\rangle_{AB}$  puro em  $\mathcal{H}$  é dito separável se existirem pelo menos dois estados  $|\psi_1\rangle_A \in \mathcal{H}_A$  e  $|\psi_2\rangle_B \in \mathcal{H}_B$  tal que

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi_1\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B, \quad (3.20)$$

caso contrário, o estado é entrelaçado. Um operador densidade quaterniônico,  $\rho_{AB}$ , é separável se é um produto tensorial de estados mistos, isto é, se

$$\rho_{AB} = \sum \rho_{A_i} \otimes \rho_{B_i} p_i, \quad (3.21)$$

onde  $0 \leq p_i \leq 1$  e  $\sum_i p_i = 1$ . Se  $\rho_{AB}$  não é separável, então  $\rho_{AB}$  é *entrelaçado*. Para um estado puro, que é separável, medições nos sistemas  $A$  e  $B$  não estão correlacionados. Para um operador densidade separável existem apenas as correlações clássicas entre medidas realizadas sobre os dois sistemas. Estados entrelaçados podem levar correlações muito mais fortes do que as possíveis clássicas. Finalmente, chamamos um estado *maximamente entrelaçado* se ele está *entrelaçado* e seus operadores densidade são proporcionais à identidade.

**Exemplo 3.7.1** O estado puro  $|0\rangle_A|0\rangle_B$  não é entrelaçado e nem a matriz densidade  $\rho_{AB} = \frac{1}{3}|0\rangle_{AA}\langle 0| \otimes |0\rangle_{BB}\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle_{AA}\langle 1| \otimes |1\rangle_{BB}\langle 1|$ .

**Exemplo 3.7.2** Os chamados estados de Bell:

$$|\Phi_{\pm}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} \pm |10\rangle_{AB}) \quad (3.22)$$

e

$$|\Psi_{\pm}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} \pm |11\rangle_{AB}), \quad (3.23)$$

são maximamente entrelaçados.

### 3.7.1 Medidas de Entrelaçamento para Estados Puros Bipartidos

Para um estado bipartido puro  $|\phi\rangle_{AB}$  vamos utilizar duas medidas de entrelaçamento de formação: a entropia de von Neumann e a *concorrência de Wootters* (WOOTTERS, 2001).

#### 3.7.1.1 Entropia de von Neumann como uma Medida de Entrelaçamento para Estados Puros Bipartidos

Para um estado bipartido puro  $|\phi\rangle_{AB}$ , utilizamos a entropia de von Neumann de um dos operadores densidade reduzido como uma medida de entrelaçamento,  $E$ :

$$E(|\phi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (3.24)$$

onde a entropia de von Neumann:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (3.25)$$

onde os  $\lambda_i$  são os auto-valores de  $\rho$ .

**Observação 3.7.1** *Note que, se um sistema composto  $AB$  estiver em um estado puro, resulta que  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ . Note ainda, que se  $(|\psi\rangle_{AB}) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = 0$ , uma vez que a entropia de von Neumann de um estado puro é zero.*

### 3.7.1.2 Concorrência de Wootters

Apresentaremos nesta seção a forma do entrelaçamento de formação para os estados de dois *qubits* e sua medida denominada de *concorrência de Wootters*. O entrelaçamento da formação é definido conforme (BENNETT et al., 1996; BARNETT, 2009): dado uma matriz densidade  $\rho$  de um par de sistemas quânticos  $A$  e  $B$ , considere todos as possíveis decomposições de estados puros de  $\rho$ , isto é, todos ensembles de estados  $|\psi_i\rangle$  com probabilidades  $p_i$  tal que

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3.26)$$

Para cada estado puro, o entrelaçamento  $E$  é definido como a entropia de qualquer um dos subsistemas  $A$  ou  $B$  (POPESCU; ROHRLICH, 1996):

$$E(\psi) = -\text{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{tr}(\rho_B \log_2 \rho_B). \quad (3.27)$$

Aqui  $\rho_A$  é o traço parcial de  $|\psi\rangle \langle \psi|$  sobre subsistema  $B$ , e  $\rho_B$  é definido de modo análogo. O entrelaçamento de formação de um estado misto  $\rho$  é então definido como entrelaçamento médio dos estados puros da decomposição minimizada sobre todas as decomposições de  $\rho$ :

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i). \quad (3.28)$$

A Igualdade 3.27 é justificada pela interconvertibilidade física de uma coleção de pares num estado puro arbitrário  $|\psi\rangle$  e uma coleção de pares no estado singleto padrão, sendo a razão de conversão assintótica dada por  $E(\Psi)$  (POPESCU; ROHRLICH, 1996). O foco central desta seção é que para um par de *qubits*, o valor mínimo especificado na Igualdade (3.28) pode ser expresso como uma função explícita de  $\rho$ , que apresentaremos nos parágrafos a seguir.

A fórmula para o entrelaçamento quântico faz uso da transformação linear *spin-flip*, que é uma função aplicável tanto a vetores de estado como matrizes de densidade

de um número arbitrário de *qubits*. Para um estado puro de um único *qubit*, assume a seguinte forma:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (3.29)$$

onde  $|\psi^*\rangle$  é o complexo conjugado de  $|\psi\rangle$ , quando este é expresso numa base fixa computacional, e  $\sigma_y$  expressa nessa mesma base é a matriz de Pauli  $\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$ . Essa operação tem o efeito de inverter o sinal do vetor da esfera de Bloch (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\rho = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{H}_2} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \Rightarrow \tilde{\rho} = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{H}_2} - \vec{r} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3.30)$$

O operador *spin-flip* para dois *qubits* é obtido, naturalmente, aplicando a transformação *spin-flip* a ambos os *qubits*:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (3.31)$$

onde novamente o conjugado complexo é tomado na base padrão, que para um par de partículas *spin* 1/2 é  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ . Neste caso, o operador *spin-flip* é equivalente (COFFMAN; KUNDU; WOOTTERS, 2000) a “conjugação complexa na base mágica”, que aparece em (HILL; WOOTTERS, 1997).

A introdução da transformação *spin-flip* pode ser também conveniente para expressar o entrelaçamento de um estado puro de dois *qubits*. Pode-se mostrar que o entrelaçamento, definido na Igualdade (3.27), pode ser escrito como (HILL; WOOTTERS, 1997):

$$E(\psi) = \varepsilon(\mathcal{C}(\psi)), \quad (3.32)$$

onde a *concorrência*  $\mathcal{C}$  é definida como

$$\mathcal{C}(\psi) = \|\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle\|, \quad (3.33)$$

e a função  $\varepsilon$  é dada por:

$$\varepsilon(\mathcal{C}) = -\Delta_{(+)} \cdot \log_2 \Delta_{(+)} - \Delta_{(-)} \cdot \log_2 \Delta_{(-)}, \quad (3.34)$$

onde

$$\Delta_{(+)} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}}{2}} \quad \text{e} \quad \Delta_{(-)} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}}{2}}. \quad (3.35)$$

A função  $\varepsilon(\mathcal{C})$  é monotonicamente crescente e varia de 0 a 1 e como  $\mathcal{C}$  varia de 0 a 1, de modo que se pode tomar a *concorrência* como medida de entrelaçamento.

Tendo definido o *spin-flip* e a função  $\varepsilon(\mathcal{C})$ , vamos agora apresentar a fórmula

para o entrelaçamento de formação de um estado misto  $\rho$  de dois *qubits*:

$$E(\rho) = \varepsilon(\mathcal{C}(\rho)), \quad (3.36)$$

onde a *concorrência de Wootters*  $\mathcal{C}$  é definida por:

$$\mathcal{C}(\rho) = \sup\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (3.37)$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  são os autovalores, na ordem decrescente, da matriz hermitiana:

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}. \quad (3.38)$$

Alternativamente, pode-se dizer que os  $\lambda_i$ s são as raízes quadradas dos autovalores da matriz não-hermitiana  $\rho\tilde{\rho}$ , e neste caso a *concorrência de Wootters* será dada por:

$$\mathcal{C}(\rho) = \sup\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}. \quad (3.39)$$

Note que cada  $\lambda_i$  é um número real não-negativo. As matrizes  $R$  e  $\rho\tilde{\rho}$  estão intimamente relacionadas com a *concorrência* de estado puro da Igualdade (3.33). Se  $\mathcal{C}(\rho) = 0$ , dizemos que o estado é separável, caso contrário, dizemos que o estado associado dessa matriz densidade está entrelaçado. Outra observação é que a *concorrência* é uma medida de entrelaçamento, apenas para estados de dois *qubits*.

**Exemplo 3.7.3** *Considere o estado de dois qubits:*

$$|\psi\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle.$$

*e seu estado associado pelo operador spin-flip será*

$$|\tilde{\psi}\rangle = \cos\theta|11\rangle + \sin\theta|00\rangle. \quad (3.40)$$

*Assim, teremos*

$$\mathcal{C}(\psi) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|. \quad (3.41)$$

*Utilizando a Igualdade (2.16), temos*

$$\mathcal{C}(\psi) = |\text{tr}(\psi\tilde{\psi})|, \quad (3.42)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\psi) &= \left| \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{tr} \begin{bmatrix} \cos \theta \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\mathcal{C}(\psi) = |\operatorname{sen} 2\theta|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_{(+)} &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \operatorname{sen} \theta \\ \Delta_{(-)} &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Se por exemplo  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , então teremos  $\mathcal{C}(\psi) > 0$ ; logo o estado nesse caso está entrelaçado e o grau de entrelaçamento será 0,67972. De fato:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{C}(\psi)) &= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \log_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \log_2 \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} \log_2 3 - 1 \right) \\ &= 0,67972. \end{aligned}$$

**Teorema 3.7.1** (BERGOU; HILLERY, 2013). Um estado qubit bipartido pode ser escrito como

$$|\phi\rangle = |\varphi\rangle_{AB} = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle,$$

com  $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} \in \mathbb{C}$ . Então a concorrência  $\mathcal{C}(\phi_{AB}) = 2|a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}|$ .

### 3.8 Quaterbits Puros não Resultam em *Qubits* Entrelaçados

Sejam os estados puros quânticos *quaterbits* normalizados:  $|\psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{H}$  e  $|\psi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ ,  $c, d \in \mathbb{H}$ . Fazendo o produto tensorial entre eles, temos:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle. \quad (3.43)$$

Para os quaternions:  $a, b, c, d$ , usando a forma dada pelo item v) do Teorema 1.1.2, temos:

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{j}; \quad (3.44)$$

$$b = \beta_1 + \beta_2 \mathbf{j}; \quad (3.45)$$

$$c = \gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{j}; \quad (3.46)$$

$$d = \delta_1 + \delta_2 \mathbf{j}. \quad (3.47)$$

onde  $\mathbf{j}^2 = -1$  da álgebra quaterniônica e os demais parâmetros são números complexos e são obedecidas nos dois *quaterbits*:

$$\sum_{i=1}^2 (\|\alpha_i\|^2 + \|\beta_i\|^2) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^2 (\|\gamma_i\|^2 + \|\delta_i\|^2) = 1. \quad (3.48)$$

Cada amplitude do *quaterbit* como produto entre os quaternios pode ser escrito por:

$$ac = (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \overline{\gamma_2}) + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \overline{\gamma_1}) \mathbf{j} \quad (3.49)$$

$$ad = (\alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \overline{\delta_2}) + (\alpha_1 \delta_2 + \alpha_2 \overline{\delta_1}) \mathbf{j} \quad (3.50)$$

$$bc = (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \overline{\gamma_2}) + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \overline{\gamma_1}) \mathbf{j} \quad (3.51)$$

$$bd = (\beta_1 \delta_1 - \beta_2 \overline{\delta_2}) + (\beta_1 \delta_2 + \beta_2 \overline{\delta_1}) \mathbf{j}. \quad (3.52)$$

Por simplicidade de notação, parametrizamos as partes complexas e quaterniônicas das Igualdades: (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52), obtendo:

$$\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \overline{\gamma_2} = \tilde{A} \quad (3.53)$$

$$\alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \overline{\delta_2} = \tilde{B} \quad (3.54)$$

$$\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \overline{\gamma_2} = \tilde{C} \quad (3.55)$$

$$\beta_1 \delta_1 - \beta_2 \overline{\delta_2} = \tilde{D} \quad (3.56)$$

e

$$\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \overline{\gamma_1} = A \quad (3.57)$$

$$\alpha_1 \delta_2 + \alpha_2 \overline{\delta_1} = B \quad (3.58)$$

$$\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \overline{\gamma_1} = C \quad (3.59)$$

$$\beta_1 \delta_2 + \beta_2 \overline{\delta_1} = D. \quad (3.60)$$

Agora, definimos critérios para que os termos em  $\mathbf{j}$  no produto tensorial  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  se anule. Dessa forma o estado quântico resultante estará presente na mecânica quântica complexa. Para isso devemos ter  $A = B = C = D = 0$ , de modo que:

$$\alpha_1 \gamma_2 = -\alpha_2 \overline{\gamma_1} \quad (3.61)$$

$$\beta_1\gamma_2 = -\beta_2\overline{\gamma_1}. \quad (3.62)$$

As Igualdades (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56) nos levam ao estado *qubit* bipartido:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \tilde{A}|00\rangle + \tilde{B}|01\rangle + \tilde{C}|10\rangle + \tilde{D}|11\rangle. \quad (3.63)$$

Como trata-se de *qubit*, então podemos usar o critério de Wootters (WOOTTERS, 1998) para verificar se esse estado puro é ou não entrelaçado. Pelo Teorema 3.7.1:

$$\mathcal{C}(\psi_1 \otimes \psi_2) = 2|\tilde{A}\tilde{D} - \tilde{B}\tilde{C}|. \quad (3.64)$$

Para um desenvolvimento mais detalhado apresentamos:

$$\tilde{A}\tilde{D} = (\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\overline{\gamma_2})(\beta_1\delta_1 - \beta_2\overline{\delta_2}) \quad (3.65)$$

e

$$\tilde{B}\tilde{C} = (\alpha_1\delta_1 - \alpha_2\overline{\delta_2})(\beta_1\gamma_1 - \beta_2\overline{\gamma_2}) \quad (3.66)$$

de modo que

$$\tilde{A}\tilde{D} = \alpha_1\gamma_1\beta_1\delta_1 - \alpha_1\gamma_1\beta_2\overline{\delta_2} - \alpha_2\overline{\gamma_2}\beta_1\delta_1 + \alpha_2\overline{\gamma_2}\beta_2\overline{\delta_2} \quad (3.67)$$

e

$$\tilde{B}\tilde{C} = \alpha_1\delta_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1\beta_2\overline{\gamma_2} - \alpha_2\overline{\delta_2}\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\overline{\delta_2}\beta_2\overline{\gamma_2}. \quad (3.68)$$

Alguns termos já reconhecidos como iguais já podem ser cancelados. Então:

$$\mathcal{C}(\psi_1 \otimes \psi_2) = 2|(\delta_1\overline{\gamma_2} - \gamma_1\overline{\delta_2})(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)|. \quad (3.69)$$

Considerando as Igualdades: (3.61) e (3.62), concluímos que  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ , logo a *concorrência* é nula. Mostrando que esse estado também é separável nos complexos.

### 3.9 Quaterbits Mistos Particulares não Resultam em *Qubits* Entrelaçados

Sabemos que um estado misto é entrelaçado, se ele não pode ser representado coma a mistura de estados puros fatoráveis. Para isso, sejam os estados normalizados  $|\psi_1\rangle = |0\rangle a + |1\rangle b\mathbf{j}$  e  $|\psi_2\rangle = |0\rangle c + |1\rangle d\mathbf{j}$ , façamos o produto tensorial  $|\psi_{12}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ , obedecendo as propriedades algébricas dos quatérnios garantindo que  $\mathbf{j}$  fique sempre do

lado esquerdo,

$$\begin{aligned}
|\psi_{12}\rangle &= (|0\rangle a + |1\rangle b\mathbf{j}) \otimes (|0\rangle c + |1\rangle d\mathbf{j}) \\
&= |00\rangle ac + |01\rangle ad\mathbf{j} + |10\rangle b\mathbf{j}c + |11\rangle b\mathbf{j}d\mathbf{j} \\
&= |00\rangle ac + |01\rangle ad\mathbf{j} + |10\rangle bc^*\mathbf{j} - |11\rangle bd^*,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\psi_{12}\rangle = |00\rangle ac + |01\rangle ad\mathbf{j} + |10\rangle b\bar{c}\mathbf{j} - |11\rangle b\bar{d}. \quad (3.70)$$

Para o cálculo do vetor bra é conveniente que  $\mathbf{j}$  fique também do lado esquerdo.

$$\langle\psi_{12}| = \langle 00|c^*a^* - \langle 01|\mathbf{j}d^*a^* - \langle 10|\mathbf{j}cb^* - \langle 11|db^*,$$

de modo que:

$$\langle\psi_{12}| = \langle 00|\bar{a}\bar{c} - \langle 01|ad\mathbf{j} - \langle 10|b\bar{c}\mathbf{j} - \langle 11|\bar{b}\bar{d}. \quad (3.71)$$

O produto *ket bra* para escrever a matriz densidade posicionando  $\mathbf{j}$  do lado esquerdo, utilizando as propriedades dos quatérnios, temos:

$$|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}| = \begin{bmatrix} |ac|^2 & -a^2cd\mathbf{j} & -ab|c|^2\mathbf{j} & -a\bar{b}cd \\ a^2cd\mathbf{j} & |ad|^2 & a\bar{b}cd & -ab|d|^2\mathbf{j} \\ ab|c|^2\mathbf{j} & \bar{a}b\bar{c}\bar{d} & |bc|^2 & -b^2\bar{c}\bar{d}\mathbf{j} \\ -\bar{a}b\bar{c}\bar{d} & ab|d|^2\mathbf{j} & b^2\bar{c}\bar{d}\mathbf{j} & |bd|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

De forma análoga, para os *quaterbits*  $|\phi_1\rangle = |0\rangle u + |1\rangle v\mathbf{j}$  e  $|\phi_2\rangle = |0\rangle x + |1\rangle y\mathbf{j}$ , podemos calcular o produto tensorial  $|\phi_{12}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ , construindo assim a matriz densidade quaterniônica:

$$|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}| = \begin{bmatrix} |ux|^2 & -u^2xy\mathbf{j} & -uv|x|^2\mathbf{j} & -u\bar{v}xy \\ u^2xy\mathbf{j} & |uy|^2 & u\bar{v}xy & -uv|y|^2\mathbf{j} \\ uv|x|^2\mathbf{j} & \bar{u}v\bar{x}\bar{y} & |vx|^2 & -v^2\bar{x}\bar{y}\mathbf{j} \\ -\bar{u}v\bar{x}\bar{y} & uv|y|^2\mathbf{j} & v^2\bar{x}\bar{y}\mathbf{j} & |vy|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

O estado misto  $\rho = \frac{1}{2}|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}| + \frac{1}{2}|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|$  é um estado da mecânica quântica quaterniônica de estados fatoráveis. São necessárias as seguintes condições para

que  $\rho$  seja um estado misto da mecânica quântica complexa:

$$a^2 cd = -u^2 xy; \quad (3.74)$$

$$ab |c|^2 = -uv |x|^2; \quad (3.75)$$

$$ab |d|^2 = -uv |y|^2; \quad (3.76)$$

$$b^2 \bar{c} \bar{d} = -v^2 \bar{x} \bar{y}. \quad (3.77)$$

Dividindo a Igualdade (3.74) pela Igualdade (3.77), resulta na igualdade:

$$\frac{|a|^2}{|b|^2} = \frac{|u|^2}{|v|^2}. \quad (3.78)$$

Agora, dividindo a Igualdade (3.75) pela Igualdade (3.76), temos:

$$\frac{|c|^2}{|d|^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2}. \quad (3.79)$$

O estado  $\rho$  na mecânica quântica complexa, será então a matriz hermitiana:

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|ac|^2 + \frac{1}{2}|ux|^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}acd\bar{b} - \frac{1}{2}uxy\bar{v} \\ 0 & \frac{1}{2}|ad|^2 + \frac{1}{2}|uy|^2 & \frac{1}{2}acd\bar{b} + \frac{1}{2}uxy\bar{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{v}\bar{u}\bar{x}\bar{y} & \frac{1}{2}bc|^2 + \frac{1}{2}|vx|^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{d} - \frac{1}{2}\bar{v}\bar{u}\bar{x}\bar{y} & 0 & 0 & \frac{1}{2}|bd|^2 + \frac{1}{2}|vy|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Para simplificar a notação podemos fazer as seguintes parametrizações:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|ac|^2 + \frac{1}{2}|ux|^2; \\ B &= \frac{1}{2}|ad|^2 + \frac{1}{2}|uy|^2; \\ C &= \frac{1}{2}|bc|^2 + \frac{1}{2}|vx|^2; \\ D &= \frac{1}{2}|bd|^2 + \frac{1}{2}|vy|^2; \\ E &= -\frac{1}{2}acd\bar{b} - \frac{1}{2}uxy\bar{v}. \end{aligned}$$

A matriz  $\rho$  tem a seguinte forma hermitiana:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & E \\ 0 & B & -E & 0 \\ 0 & -\bar{E} & C & 0 \\ \bar{E} & 0 & 0 & D \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo da *concorrência* precisamos da matriz:

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim podemos calcular  $\tilde{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \bar{E} \\ 0 & B & -\bar{E} & 0 \\ 0 & -E & C & 0 \\ E & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ &= \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & E \\ 0 & C & -E & 0 \\ 0 & -\bar{E} & B & 0 \\ \bar{E} & 0 & 0 & A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os autovalores da matriz não hermitiana  $\rho\tilde{\rho}$  são necessários para o cálculo da *concorrência*,

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\rho} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & E \\ 0 & B & -E & 0 \\ 0 & -\bar{E} & C & 0 \\ \bar{E} & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & E \\ 0 & C & -E & 0 \\ 0 & -\bar{E} & B & 0 \\ \bar{E} & 0 & 0 & A \end{bmatrix}; \\ &= \begin{bmatrix} AD + E\bar{E} & 0 & 0 & 2AE \\ 0 & E\bar{E} + BC & -2BE & 0 \\ 0 & -2C\bar{E} & E\bar{E} + BC & 0 \\ 2D\bar{E} & 0 & 0 & AD + E\bar{E} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os autovalores da matriz  $\rho\tilde{\rho}$  são:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= AD + 2\sqrt{ADE\bar{E}} + E\bar{E}; \\
\lambda_2 &= AD - 2\sqrt{ADE\bar{E}} + E\bar{E}; \\
\lambda_3 &= BC + 2\sqrt{BCE\bar{E}} + E\bar{E}; \\
\lambda_4 &= BC - 2\sqrt{BCE\bar{E}} + E\bar{E}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Assumindo que  $BC < AD$ , temos que  $\lambda_1$  é o maior dos autovalores. Então podemos escrever a *concorrência* por:

$$\begin{aligned}
C(\rho) &= \sup\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \\
&= \sup\{0, \sqrt{AD + 2\sqrt{ADE\bar{E}} + E\bar{E}} - \sqrt{AD - 2\sqrt{ADE\bar{E}} + E\bar{E}} \\
&\quad - \sqrt{BC + 2\sqrt{BCE\bar{E}} + E\bar{E}} - \sqrt{BC - 2\sqrt{BCE\bar{E}} + E\bar{E}}\} \\
&= \sup\{0, \sqrt{(\sqrt{AD} + \sqrt{E\bar{E}})^2} - \sqrt{(\sqrt{AD} - \sqrt{E\bar{E}})^2} \\
&\quad - \sqrt{(\sqrt{BC} + \sqrt{E\bar{E}})^2} - \sqrt{(\sqrt{BC} - \sqrt{E\bar{E}})^2}\} \\
&= \sup\{0, \sqrt{AD} + \sqrt{E\bar{E}} - |\sqrt{AD} - \sqrt{E\bar{E}}| - (\sqrt{BC} + \sqrt{E\bar{E}}) - |\sqrt{BC} - \sqrt{E\bar{E}}|\}; \\
&= \sup\{0, \sqrt{AD} - \sqrt{BC} - |\sqrt{AD} - \sqrt{E\bar{E}}| - |\sqrt{BC} - \sqrt{E\bar{E}}|\}.
\end{aligned}$$

Pelas condições estabelecidas pelas Igualdades (3.74) e (3.77) podemos concluir que  $AD = BC$  e por conseguinte  $C(\rho) = \sup\{0, -2|\sqrt{AD} - \sqrt{E\bar{E}}|\} = 0$ .

**Demonstração 3.9.1** *Com efeito, sejam*

$$AD = \left(\frac{1}{2}|ac|^2 + \frac{1}{2}|ux|^2\right)\left(\frac{1}{2}|bd|^2 + \frac{1}{2}|vy|^2\right)$$

e

$$BC = \left(\frac{1}{2}|ad|^2 + \frac{1}{2}|uy|^2\right)\left(\frac{1}{2}|bc|^2 + \frac{1}{2}|vx|^2\right).$$

Assim

$$AD = \frac{1}{4}(|abcd|^2 + |acvy|^2 + |bdux|^2 + |uxvy|^2) \tag{3.82}$$

e

$$BC = \frac{1}{4}(|abcd|^2 + |advx|^2 + |bcyu|^2 + |uxvy|^2). \tag{3.83}$$

Então:

$$AD - BC = \frac{1}{4}(|advx|^2 + |bcyu|^2 - |acvy|^2 - |bdux|^2),$$

daí,

$$AD - BC = \frac{1}{4}[|av|^2(|dx|^2 - |cy|^2) + |bu|^2(|cy|^2 - |dx|^2)],$$

e por conseguinte,

$$AD - BC = \frac{1}{4}(|dx|^2 - |cy|^2)(|av|^2 - |bu|^2). \quad (3.84)$$

Pelas Igualdades (3.78) e (3.79) das condições estabelecidas para que  $\rho$  seja um qubit,  $AD - BC = 0$  e por conseguinte  $C(\rho) = \sup\{0, -2|\sqrt{AD} - \sqrt{E\bar{E}}|\} = 0$ .

Portanto o estado misto *quaterbits* construído também é desentrelaçado na mecânica quântica complexa.

## CONCLUSÃO

O presente trabalho mostrou que um produto de um par de *quaterbits* puros não pode ser um *qubit* entrelaçado. Para verificar essa hipótese, definimos dois *quaterbits* arbitrários na forma de singletos e em seguida obtivemos o produto tensorial. A partir do resultado desse produto, estabelecemos as condições necessárias para que o estado resultante esteja somente nos complexos, ou seja, o produto de *quaterbits* gere um *qubit* bipartido. Então, constatamos que o *qubit* bipartido resultante ainda continua desentrelaçado. Assim, o produto tensorial de dois *quaterbits* puros não geram um *qubit* puro bipartido entrelaçado (SOUZA D. K. A.; NASCIMENTO, 2016).

Para o caso misto, começamos por caso particular ao invés de iniciar com um caso geral. Iniciamos escrevendo uma mistura de *quaterbits* fatoráveis normalizados a partir dos estados:  $|\psi_i\rangle, |\phi_i\rangle$ , para  $i = 1, 2$  na forma  $|0\rangle\alpha + |1\rangle\beta\mathbf{j}$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Por meio de produto tensorial obtemos os estados bipartidos  $|\psi_{12}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  e  $|\phi_{12}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ , e com isso construímos as matrizes densidades:  $|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|$  e  $|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|$ , de modo a obter o estado misto  $\rho = \frac{1}{2}|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}| + \frac{1}{2}|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|$  da mecânica quântica quaterniônica de estados fatoráveis. Em seguida encontramos as condições que tornam nulos os termos em  $\mathbf{j}$ , transformando a matriz  $\rho$  numa hermitiana presente na mecânica quântica complexa. A partir da matriz densidade  $\rho$ , obtemos por meio do operador *spin-flit* a matriz  $\tilde{\rho}$ . Finalmente obtemos a matriz não hermitiana  $\rho\tilde{\rho}$  e dela extraímos os autovalores necessários para o cálculo da concorrência de Wootters, cujo resultado foi nulo. Concluimos então que esse estado misto de *quaterbits*, também é desentrelaçado na mecânica quântica complexa. Portanto, o problema ainda necessita de continuidade de investigações futuras para o caso geral.

## REFERÊNCIAS

- ADLER, S. L.; FINKELSTEIN, D. R. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. *Physics Today*, v. 49, p. 58, 1996.
- BAKER, A. Right eigenvalues for quaternionic matrices: a topological approach. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 286, n. 1, p. 303–309, 1999.
- BARNETT, S. *Quantum information*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. v. 16.
- BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, APS, v. 54, n. 5, p. 3824, 1996.
- BENNETT, C. H.; WIESNER, S. J. Communication via one-and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Physical review letters*, APS, v. 69, n. 20, p. 2881, 1992.
- BENNETT C. H., B. G. C. C. J. R. P. A.; WOOTTERS, W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- BERGOU, J.; HILLERY, M. New York: Springer Science, 2013.
- BIRKHOFF, G.; NEUMANN, J. von. The logic of quantum mechanics. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 823–843, 1936.
- BRENNER, J. L. Matrices of quaternions. *Pacific J. Math*, v. 1, p. 329–335, 1951.
- CAVES, C. M.; FUCHS, C. A.; RUNGTA, P. Entanglement of formation of an arbitrary state of two rebits. *Foundations of Physics Letters*, Springer, v. 14, n. 3, p. 199–212, 2001.
- COFFMAN, V.; KUNDU, J.; WOOTTERS, W. K. Distributed entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 5, p. 052306, 2000.
- FEI, J.; JOYNT, R. Numerical computations of separability probabilities. *arXiv preprint arXiv:1409.1993*, 2014.
- FINKELSTEIN, D.; JAUCH, J.; SPEISER, D. Notes on quaternion quantum mechanics. *Logico-algebraic approach to quantum mechanics II*, Reidel, Dordrecht, p. 367–421, 1979.
- GRAVES, R. P. [S.l.]: Arno Press, 1975. v. 2.
- GRAYDON, M. Quaternions and quantum theory. University of Waterloo, 2011.
- HAMILTON, W. R. *Elements of quaternions*. London: Longmans, Green, and Company, 1899. v. 1.
- HANCHE-OLSEN, H.; STØRMER, E. [S.l.]: Pitman Advanced Publishing Program, 1984. v. 21.

- HARDY, L. Quantum theory from five reasonable axioms. *arXiv preprint quant-ph/0101012*, 2001.
- HILL, S.; WOOTTERS, W. K. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical review letters*, APS, v. 78, n. 26, p. 5022, 1997.
- JAUCH, J. M.; MORROW, R. A. Foundations of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 36, n. 8, p. 771–771, 1968.
- KAISER, H.; GEORGE, E.; WERNER, S. A. Neutron interferometric search for quaternions in quantum mechanics. *Physical Review A*, APS, v. 29, n. 4, p. 2276, 1984.
- KUIPERS, J. B. *Quaternions and rotation sequences*. [S.l.]: Princeton University Press, 1999. v. 66.
- KYRALA, A. *Theoretical physics; applications of vectors, matrices, tensors and quaternions*. [S.l.]: Saunders, 1967.
- PERES, A. Proposed test for complex versus quaternion quantum theory. *Physical Review Letters*, APS, v. 42, n. 11, p. 683, 1979.
- POPESCU, S.; ROHRLICH, D. E. On the measure of entanglement for pure states. *Phys. Rev. A*, v. 56, n. quant-ph/9610044, p. 3319–3321, 1996.
- RAZON, A.; HORWITZ, L. P. Tensor product of quaternion hilbert modules. *Acta Applicandae Mathematica*, Springer, v. 24, n. 2, p. 141–178, 1991.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011.
- SCHRÖDINGER, E. *Naturwissenschaften* 23, 807; 823; 844 (1935); english translation. *Proceedings of American Philosophical Society*, v. 124, p. 323, 1980.
- SOUZA D. K. A.; NASCIMENTO, J. C. Pure quaterbits do not generate qubits entangled. *Encontro de Física*, SBF, 2016.
- WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, Mar 1998. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information & Computation*, v. 1, n. 1, p. 27–44, 2001.
- ZHANG, F. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 251, p. 21–57, 1997.