UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA

ESTIMATIVAS GRADIENTE PARA AUTOFUNÇÕES DO V-LAPLACIANO E MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS COMPACTAS COM BORDO

FORTALEZA

2017

ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA

ESTIMATIVAS GRADIENTE PARA AUTOFUNÇÕES DO V-LAPLACIANO E MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS COMPACTAS COM BORDO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S578e Silva, Antonio Kelson Vieira da.
Estimativas gradiente para autofunções do V-Laplaciano e métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas com bordo / Antonio Kelson Vieira da Silva. – 2017.
41 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Métricas m-quasi-Einstein generalizadas. 2. Operador V-Laplaciano. 3. Desigualdade de Harnack. I. Título.

CDD 510

ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA

ESTIMATIVAS GRADIENTE PARA AUTOFUNÇÕES DO V-LAPLACIANO E MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS COMPACTAS COM BORDO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovado em: 17 / 08 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

À Deus, a Virgem Santíssima, a meus pais e
a minha amada Vilmara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois foi quem primeiro me amou, dando-me a graça do dom da vida. Ele que é Pai, criador de todas as coisas, Filho, nosso salvador e Espírito Santo, consolador. Sem ele nada disso teria sentido e não poderia ser realizado. A Nossa Senhora, nossa mãe e mãe de Deus, por ter me acolhido como filho e servo, intercedido por mim junto a Deus e me consolando em meio à vida.

À minha mãe Vanda, por ter me gerado com amor e carinho, me educado desde criança e criado segundo os bons costumes. Ao meu pai, Antonio, por ter me criado, educado e zelado por mim, com amor e dedicação. Agradeço a ambos, que juntos deram a mim oportunidades que não tiveram.

À minha família, com quem cresci e vivi, sempre com muita alegria e amor. Aos meus avós, Otávio, Maria da Conceição, Domingos e Maria das Dores (em memória). A meus tios Fernando, Manuel, Amarildo, Domingos e "Nego". A minhas tias Fátima Sousa, Fátima Vieira, Ducarmo, Dora, Gra ca, Conceição, Francisca, Valnice e Socorro. Aos meus primos e irmãos, Alisson, Diego, Rafael, Tiago e Talysson e as minhas primas e irmãs, Dávila, Priscilia, Alana, Ravena e Flávia, com quem vivi e cresci.

À Vilmara, que por quase 6 anos tem me suportado, literalmente, especialmente nesses 4 anos de doutoramento, suportando a distância. Obrigado pela força, pelo apoio, pela paciência e pelo amor.

A todos os meus amigos do bairro São João, em especial a "galera da esquina", que de várias formas contribuíram para esse momento, onde me incentivavam a estudar, jogar futebol, videogame, etc.

Aos meus grandes amigos e guerreiros do saudoso colégio Humanos. A Givaggo, Deângeles e Ricardo, amigos de longa data. A Sebastião Carvalho e todos os professores, que contribuíram para meu conhecimento e minha formação acadêmica e humana. A Daniel Rodrigues, que ninguém imaginaria abandonar a matemática, e a Anderson Gomes que, pelo menos ainda, não abandonou o "verdão". Por fim, aos que aprenderam um pouco de matemática por meio de minhas explicações.

À turma do antigo CEFET-PI, pela amizade, brincadeiras, ideias de estudo, pelos interclássicos, peças teatrais, filmes no clube dos diários, almoços no refeitório, e os sonhos futuros, que muitos estamos realizando.

Aos amigos e irmãos da Renovação Carismática Católica do Piauí, que me fizeram conhecer um novo mundo, ampliar muitos minhas amizades e os horizontes. Especialmente, a todos do Ministrio Universidades Renovadas, que desde o início me acolheram, amaram e me fizeram levar esse amor a tantos outros, para que juntos pudéssemos sonhar com um mundo e uma universidade renovada.

Aos amigos e irmãos da Arquidiocese de Fortaleza, em especial à Renovação Carismática Católica do Ceará. Destaco os amigos Karine, André, Walesa, Emanuel, Mislene, Lílian, Edlene, Regina, Artur, Evilásio, Víncius, Gerson, Caio, Ismael, Gustavo, Paloma, Jorge, Rayme, Pe. Wilame, Pe. Sávio, Pe. Almeida e outros tantos que estão destacados em meu coração.

Aos professores da UFPI, que me iniciaram na matemática, em especial a Gilvan, pois foi quem primeiro me motivou no estudo da matemática, a Mário Gomes, pois foi quem me direcionou para uma iniciação científica, a Newton, quem me orientou na graduação e no mestrado, e a todos do departamento de matemtíca, hoje meus colegas de trabalho.

Agradeço, em especial, ao professor Abdênago Barros, por ter me orientadado no doutorado na UFC, pela parceria no estudo, amizade, paciência e apóio. Aos professores Ernani Ribeiro Jr., Nazareno Gomes, Antônio Caminha e João Francisco por aceitarem participar da minha banca e pelas contribuições para este trabalho. De mandeira particular, ao professor Ernani pela amizade e apoio durante o doutorado, ajudando em muitos momentos a superar as dificuldades.

Aos professores na Pós-Graduação: G. Pacelli Bessa, Diego Moreira, Fernanda Camargo, Jorge Herbert e Eduardo Teixeira. Agradeço também a Andrea Dantas secretária da PGMAT-UFC, pelo seu excelente trabalho.

Agradeço, a meus colegas de estudo durante estes 4 anos em Fortaleza: Eraldo, Leandro, Assis, Rodrigo, Alexandre, Renivaldo, Francaine, janielly, Ivaldo, Alex, Israel, Wilson, Raimundo, Marcolino, Kelton, Davi, Chaves, Disson, Adriano, Tiarlos, Elaine, Edvalter, Damião, João Vitor, Valdir, Rafael, Nino e a tantos outros, que não foram citados, mas que participaram dessa minha formação.

Agradeço a FUNCAP-CE pelo incentivo e apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

"Não percais esta convicção a que está vinculada uma grande recompensa, pois vos é necessária a perseverança para fazerdes a vontade de Deus e alcançardes os bens prometidos. Ainda um pouco de tempo - sem dúvida, bem pouco -, e o que há de vir virá e não tardará. Meu justo viverá da fé. Porém, se ele desfalecer, meu coração já não se agradará dele. Não somos, absolutamente, de perder o ânimo para nossa ruína; somos de manter a fé, para nossa salvação!"
(Hebreus 10, 35-39)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo estudar propriedades de variedades Riemannianas quando submetidas a condições sobre tensores de Ricci-Bakry-Émery. Essencialmente estudamos dois casos. No primeiro caso, motivados pelos trabalhos de Barros e Ribeiro Jr (2014), He, Petersen e Wylie (2012) e por Miao e Tam (2011), introduzimos métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas com bordo, donde obtemos um resultado que garante uma classificação para estas métricas; mais precisamente, assumindo que o gradiente da exponencial da função potencial é um campo conforme, obtemos que aquela deve ser uma bola geodésica de uma forma espacial simplesmente conexa. Disso, obtemos alguns resultados em que garantimos quando estas métricas são triviais. No segundo caso, trabalhos o tensor de Ricci-Bakry-Émery limitado por baixo, inicialmente, em variedades Riemannianas compactas, com bordo ou sem bordo, e posteriormente, sobre bolas em variedades Riemannianas completas. Com esse estudo, obtivemos estimativas do gradiente para autofunções do operador V-Laplaciano, generalizando resultados de (Li, 2005) e (Li, 2015). Finalmente, como consequências desses resultados, exibimos uma desigualdade de Harnack.

Palavras-chave: Métricas m-quasi-Einstein generalizadas. Operador V-Laplaciano. Desigualdade de Harnack.

ABSTRACT

The main of this work was to study properties of Riemannian when subjected to conditions on Bakry-Émery-Ricci tensor. Essentially we study two cases. In the first case, motivated by the work of Barros and Ribeiro Jr. (2014), He, Petersen and Wylie (2012) and Miao and Tam (2011), was introduced generalized m-quasi-Einstein metrics compact with boundary, where we get a result that classify these metrics; more specifically, assuming that gradient field of the exponential of potential function is a conformal vector field, we obtain that this must be a geodesic ball in a simply connected space form. That we get some results that implies when these are trivial metrics. In the second case, we work the Bakry-Émery-Ricci tensor bounded bellow, initially in a compact Riemannian, with or without boundary, and later on balls in complete Riemannian. With this study, we obtain gradient estimates for eigenfunctions of V-Laplacian operator, that generalize results of (Li, 2005) and (Li, 2015). Finally, as consequence theses results, we show an Harnack's inequality.

Keywords: Generalized m-quasi-Einstein metrics. V-Laplacian operator. Harnack's inequality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Primeiramente, em um trabalho conjunto com Diógenes e Barros (2015) obtevê-se alguns resultados sobre métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas e com bordo, que foram introduzidas por Catino (2012) para o caso de métricas completas. Mais precisamente, Catino definiu uma métricas m-quasi-Einstein generalizadas, que pode ser vista como uma quadra (M^n, g, f, λ), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa, f e λ são funções suaves sobre M tais que

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g. \tag{1}$$

No mesmo trabalho Catino (2012) mostrou que, em torno de qualquer ponto regular de f, uma métrica m-quasi-Einstein generalizada com tensor de Weyl harmônico $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ é localmente um produto warped com fibras de Einstein com dimensão $n-1$. Além disso, mostrou que a hipótese $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ é necessária. Barros e Ribeiro Jr. (2014) provaram que os espaços $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{R}^n$ possuem uma estrutura natural de métrica quasi-Einstein generalizada, além disso, constataram que estes são, essencialmente, os únicos exemplos, desde que (M^n, g) também seja uma variedade Einstein. Em (2013) Barros e Gomes, provaram que substituindo a hipótese de (M^n, g) ser Einstein, por $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^n$.

Inspirados por uma técnica de Miao e Tam (2011), obtivemos um resultado similar de (2014) e (2013), para o caso de métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas e com bordo. Mais precisamente.

Teorema 1 *Suponha $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, com $n \geq 3$, é uma m-quasi-Einstein métrica generalizada conexa, compacta e com bordo suave $\Sigma = \partial M$. Suponha que (M^n, g) é uma variedade Einstein ou ∇u é um campo vetorial conforme, onde a função $u := e^{-f/m}$ é constante sobre Σ. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica de um espaço forma simplesmente conexo, ou seja, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n(r)$ ou $\mathbb{S}^n(r)$.*

Este resultado, e algumas consequências, são apresentados e demonstrados na secção 3.

Na segunda parte deste trabalho, exibiremos algumas estimativas gradientes de autofunções do operador V-Laplaciano obtidas em (2015). Este problema é clássico na teoria de Equações Diferencias Parciais e possui muitas aplicações nesta área. Muitos matemáticos fizeram estudos de modo a encontrar estimativas de gradientes de determinadas funções, destacamos aqui Yau, Shoen, Cheng e Peter Li (1975, 1975, 1979, 1979, 1994, 2012, 2005). Usando tais técnicas conseguimos obter resultados similares para autofunções do V-Laplaciano que generalizam resultados dos recentes trabalhos (2005) e (2015).

Considerando o tensor modificado de Bakry-Émery-Ricci

$$Ric_V^{m,n} := Ric - \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \frac{1}{m-n} V \otimes V,$$

e o operador de difusão V-Laplaciano

$$\Delta_V := \Delta + V,$$

onde V é um campo vetorial ao longo de uma variedade Riemanniana (M^n, g), os nossos resultados obtidos foram:

Teorema 2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n. Suponha $Ric_V^{m,n} \geq -(m-1)K$, onde $K \geq 0$ é uma constante não-negativa. Se u é uma solução positiva de $\Delta_V u = -\lambda u$ sobre M, então*

$$\sup_{B(x,r/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C,$$

onde $C = C(m, K, r, \lambda)$ é uma constante positiva que depende de m, K, r e λ, e o supremo é tomado sobre todas as bolas $B(x, r/2)$ de M centradas em algum ponto x com raios $r/2$.

Teorema 3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemannian compacta de dimensão n, com bordo ∂M convexo, quando $\partial M \neq \emptyset$. Suponha $Ric_V^{m,n} \geq -K$, onde $K \geq 0$ é uma constante. Seja u uma solução, limitada por baixo, de $\Delta_V u = -\lambda u$, satisfazendo a condição de Neumann no bordo, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre ∂M, desde que $\partial M \neq \emptyset$. Então,*

$$|\nabla u| \leq C \left(u - \inf_M u \right), \tag{2}$$

onde $C = \sqrt{(m-1)K + \sqrt{(m-1)^2 K^2 + 2\lambda^2}}$. Em particular, se $K = 0$, podemos assumir $C = \sqrt{|\lambda|}$.

As demonstrações desses resultados, e uma desigualdade Harnack, serão apresentadas na secção 4.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar o material básico necessário para uma boa compreensão dos próximos capítulos. No que segue, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana $n-$dimensional com métrica suave $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. O espaço das funções suaves (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos suaves sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

2.1 Conceitos e resultados básicos

Aqui iremos expor conceitos, notações básicas e resultados clássicos da teoria de Geometria Riemanniana. Sugerimos as seguintes referências (Chow, Lu, Ni, 2006, Capítulo 1), (Chavel, 2006), (do Carmo, 2005).

Para uma variedade Riemanniana (M^n, g), o **tensor curvatura de Riemann** é o (1,3)-tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Comumente, pode-se interpretar o tensor curvatura de Riemann como sendo um (0,4)-tensor definido por $Rm : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle Rm(X, Y)Z, W \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Em um sistema de coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ de M^n, as componentes do tensor curvatura de Riemann é dado por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

e $R_{ijkl} := g_{ls} R^s_{ijk}$. Recordemos que

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}$$

O **tensor de Ricci** é definido como o sendo o traço do tensor curvatura de Riemann dado por

$$Ric(Y, Z) := \mathrm{tr}(X \mapsto Rm(X, Y)Z).$$

Em um sistema de coordenadas locais temos

$$R_{ij} = \sum_{i=1}^{n} R^{i}_{ijk}.$$

A **curvatura de Ricci** de uma reta $L \subset T_xM$, para algum $x \in M$, é definida por

$$Ric(L) := Ric(e_1, e_1),$$

onde $e_1 \in T_xM$ é um vetor únitario que gera L. Dizemos que M possui **curvatura de Ricci constante**, se $Ric(L)$ é constante para qualquer reta L contida em algum espaço tangente de M, isto é, se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in M$ e toda reta $L \subset T_xM$ tem-se $Ric(L) = c$

A **curvatura escalar** é o traço do tensor de Ricci, ou seja, em coordenadas locais, temos

$$R := g^{ij}R_{ij}.$$

Dizemos que g é uma **métrica de Einstein** (ou que (M, g) é uma **variedade de Einstein**) se existir uma função real λ, tal que

$$Ric = \lambda g.$$

Observe que tomando o traço na igualdade acima, concluímos que $\lambda = R/n$, ou seja, $Ric = \frac{1}{n}Rg$.

O **tensor de Weyl** W, é o (0,4)-tensor definido, para $n \geq 3$, pela seguinte decomposição

$$\begin{aligned} -R_{ijkl} = W_{ijkl} &+ \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

Sejam $X, Z_1, \ldots, Z_s \in \mathfrak{X}(M)$. A **derivada covariante** ∇_X de um $(0, s)$-tensor $Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_s$ é também um $(0, s) - tensor$ dado por

$$\nabla_X(Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_s) := \sum_{i=1}^{s} Z_1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X Z_i \otimes \cdots \otimes Z_s.$$

A **derivada covariante de um** (r, s)**-tensor** β é um $(r + 1, s)$-tensor definido por

$$(\nabla\beta)(X, Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla_X(\beta(Y_1, \ldots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} \beta(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r).$$

Dizemos que β é um **tensor paralelo** se sua derivada covariante é nula, ou seja, $\nabla\beta = 0$.

Em particular, temos que a métrica Riemanniana g é paralela, devido a sua compatibilidade com a conexão Riemanniana ∇. Em um sistema de coordenadas locais, seja $\beta^{k_1,\dots,k_s}_{j_1,\dots,j_r}$ as componentes do (r,s)-tensor β. Assim, definimos as componentes $\nabla_i\beta^{k_1,\dots,k_s}_{j_1,\dots,j_r}$ de $\nabla\beta$, a derivada covariante de β, por

$$\nabla_i\beta^{k_1,\dots,k_s}_{j_1,\dots,j_r}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_s}} := (\nabla_{\partial/\partial x^i}\beta)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\right)$$

Proposição 1 (Identidades de Bianchi) *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e Rm seu tensor curvatura. Então:*

(a) $R_{ijkl}+R_{jkil}+R_{kijl}=0$, (a primeira identidade de Bianchi)

(b) $\nabla_i R_{ijkl}+\nabla_j R_{jkil}+\nabla_k R_{kijl}$, (a segunda identidade de Bianchi).

(c) $g^{im}\nabla_i R_{jklm}=\nabla_j R_{kl}-\nabla_k R_{jl}=0$, (a segunda identidade de Bianchi contraída uma vez).

(d) $2g^{ij}\nabla_i R_{jk}=\nabla_k R=0$. (a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes).

Como consequência da segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, temos o seguinte lema:

Lema 1 (Schur) *Seja (M^n,g) uma variedade Riemanniana com $n\geq 3$, onde g é uma métrica de Einstein, isto é, $Ric=\frac{1}{n}Rg$. Então a curvatura escalar R é constante.*

Para uma demonstração das identidades de Bianchi e do Lema de Schur, sugerimos (Petersen, Capítulo 2, 2006).

Dado $x\in M$, seja $P\subset T_xM$ um plano contido no espaço tangente de x em M. A **curvatura seccional** de P é definida por

$$K(P)=\langle Rm(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle,$$

onde $\{e_1,e_2\}$ é uma base ortornormal de P. Dizemos que uma variedade Riemanniana possui **curvatura seccional constante** se, para todo ponto $p\in M$, $K(P)$ possuir o mesmo valor, qualquer que seja o plano P contido no espaço tangente T_pM. As variedades completas simplesmente conexas que possuem curvatura seccional constante são chamadas de **formas espaciais**. CARTAN (1951) provou que a únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante são o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$. Mais precisamente, a menos de escalonamento, temos o seguinte resultado.

Teorema 4 (CARTAN, 1951) *Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante K. Então M é isométrica a:*

(a) $\mathbb{R}^n$, *se* $K=0$;

(b) $\mathbb{S}^n$, *se* $K = 1$;

(c) $\mathbb{H}^n$, *se* $K = -1$.

Devido a Bishop (1964), pode-se comparar volumes de bolas geodésicas entre variedades completas com curvatura de Ricci limitada por baixo com o volume das bolas geodésicas de formas espaciais. A seguir enunciaremos este resultado clássico.

Teorema 5 (Bishop, 1964). *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana completa* n*-dimensional tal que* $Ric^M \geq (n-1)k > 0$*. Então para todo* $x_0 \in M$ *e* $r > 0$*, temos*

$$Vol(B(x,r)) \leq Vol(\mathbb{B}_k(r)),$$

onde $B(x,r)$ *é a bola de centro* x_0 *e raio* r *em* M *e* $\mathbb{B}_k(r)$ *é uma bola de raio* r *em* $\mathbb{M}_k^n$*, uma forma espacial de curvatura seccional constante* k *de mesma dimensão que* M*. A igualdade vale se, e somente se,* $B(x,r)$ *é isométrico a* $\mathbb{B}_k(r)$*.*

Para uma melhor abordagem deste resultado sugerimos consultar (Chavel, Capítulo 3, 2006).

2.2 Estimativas Gradiente de funções harmônicas e autofunções do Laplaciano

Muitos problemas na natureza são modelados por meio de Equações Diferencias Parciais (EDP), por isso ainda hoje buscam-se técnicas para se resolver tais problemas. No entanto é extremamente difícil encontrar tais soluções e, deste modo, procura-se entender ao máximo o comportamento de soluções de uma EDP em determinados ambientes, como por exemplo encontrar estimativas do gradiente dessas soluções, quando este faz sentido, e consequentemente buscar desigualdades Harnack.

Um dos problemas mais conhecidos é a solução da equação de Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega, \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio do espaço Euclidiano. Para um estudo desse caso recomendamos o livro (Evans, 1998).

Sejam Ω um aberto de uma variedade Riemanniana M^n e $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções suaves definidas em Ω. Dizemos que $L : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ é um **operador linear de segunda ordem** se, para qualquer função $u \in C^\infty(\Omega)$, Lu puder ser escrito em um sistema de coordenadas locais $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\partial_i u + c(x)u, \tag{4}$$

onde $a^{ij}, b^i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções reais e $x \in U$. Neste caso, dizemos que L é um **operador elíptico** em um ponto $x \in U$, se a matriz coeficiente $[a^{ij}(x)]$ é positiva, ou seja, se existirem $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ positivos, tais que

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2, \tag{5}$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aqui $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são justamente o menor e o maior autovalor de $[a^{ij}(x)]$, respectivamente.

Yau (1975) desenvolveu um método de princípio do máximo para provar que variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não negativa possui uma propriedade Liouville. Além disso, em um trabalho conjunto com Cheng, Yau, usando o mesmo argumento, obteve uma estimativa gradiente para uma classe mais geral de equações elípticas. Li (1979), usou esse método de princípio do máximo obteve inicialmente uma estimativa de autovalor do Laplaciano para variedades Riemannianas compactas, onde posteriormente foi usado em outros trabalhos, como (Li, Yau, 1979) e (Zhong, Yang, 1984), para se obter uma estimativa ótima.

Nosso objetivo, é obter resultados similares com o operador elíptico V**-Laplaciano**, denotado por Δ_V, sobre uma variedade Riemanniana M^n, onde $V \in \mathfrak{X}(M)$ é uma campo vetorial suave sobre M^n. Mais precisamente, temos

$$\Delta_V := \Delta + V \tag{6}$$

onde Δ e ∇ denotam, respectivamente, o operador Laplaciano e o operador gradiente de M. O operador V-Laplaciano é um caso especial de aplicações V-harmônicas introduzidas por Chen, Qiu e Jost (2012) utilizado nos recentes trabalhos de (Li, 2005) e (Li, 2015), por exemplo.

O tensor Bakry-Emery-Ricci (1985) pode ser definido por

$$Ric_V := Ric - \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g, \qquad Ric_V^{m,n} := Ric - \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \frac{1}{m-n} V \otimes V,$$

onde $\mathcal{L}_V$ denota a derivada de Lie ao longo de um campo suave V e $m > n$. Li (2005) generalizou uma estimativa gradiente obtida por Schoen e Yau (1994) para funções V-sobre variedades fechadas (completas e compactas) e bolas em variedades completas com $Ric_V^{m,n}$ limitada por baixo.

Dada uma função suave w sobre uma variedade Riemanniana M, a fórmula de Bochner é dada por

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla w|^2 = Ric(\nabla w, \nabla w) + |\nabla^2 w|^2 + \langle \nabla w, \nabla \Delta w \rangle. \tag{7}$$

Como

$$\Delta_V|\nabla w|^2 = \Delta|\nabla w|^2 + 2\nabla^2 w(\nabla w, V)$$

e

$$\langle \nabla w, \nabla(\Delta_V w)\rangle = \langle \nabla w, \nabla(\Delta w)\rangle - 2\nabla^2 w(\nabla w, V),$$

obtemos uma fórmula de Bochner para o V-Laplacian, dada por

$$\frac{1}{2}\Delta_V|\nabla w|^2 = Ric_V(\nabla w, \nabla w) + |\nabla^2 w|^2 + \langle \nabla w, \nabla \Delta_V w\rangle. \tag{8}$$

3 MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS COMPACTAS COM BORDO

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados obtidos em (2015) pelo autor em parceria com Barros e Diógenes para métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas com bordo. Tais métricas foram introduzidas por Catino (2012) e são uma das várias métricas tipo Einstein que existem.

Sejam f e λ funções suaves sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g), de modo que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ seja uma métrica m-quasi-Einstein generalizada, isto é, satisfaça a equação (1)

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g.$$

Em particular, temos

$$Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla_{\nabla f}, \nabla f \rangle = \frac{1}{m} |\nabla f|^4 + \lambda |\nabla f|^2,$$

onde $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Tomando o traço em (1), vemos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = n\lambda, \tag{9}$$

donde,

$$\langle \nabla f, \nabla R \rangle + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle - \frac{1}{m} \langle \nabla f, \nabla |\nabla f|^2 \rangle = n \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle. \tag{10}$$

Combinando as equações (1) e (10), obtemos

$$\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g = \frac{1}{m} \left(df \otimes df - \frac{1}{n} |\nabla f|^2 g \right) - \left(Ric - \frac{R}{n} g \right).$$

Nesta seção, denotaremos

$$u = e^{-f/m}. \tag{11}$$

Assim, $\nabla u = -\frac{1}{m}u\nabla f$, donde, para quaisquer campos suaves X, Y sobre M, temos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla u, Y\rangle \\
&= -\frac{1}{m}\langle \nabla_X (u\nabla f), Y\rangle \\
&= -\frac{1}{m}\langle u\nabla_X \nabla f + X(u)\nabla f, Y\rangle \\
&= -\frac{u}{m}\langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle - \frac{1}{m}X(u)\langle \nabla f, Y\rangle \\
&= -\frac{u}{m}\nabla^2 f(X,Y) + X(u) - \frac{1}{m}\langle \nabla u, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&= -\frac{u}{m}\left(\nabla^2 f(X,Y) + X(u) - \frac{1}{m}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u}\nabla^2 u. \tag{12}$$

Deste modo, $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é uma métrica m-quasi-Einstein generalizada se, e somente se, satisfaz

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g, \tag{13}$$

onde u é dado por (11). Além disso, ∇u é um campo vetorial conforme (ou seja, $\mathcal{L}_{\nabla u} g = \rho g$, para alguma função suave ρ sobre M) se, e somente se, (M^n, g) é uma variedade de Einstein.

Barros e Ribeiro Jr. (2014) demonstraram o seguinte resultado, que classifica um conjunto de variedades m-quasi-Einstein generalizadas completas e sem bordo.

Teorema 6 (Barros, Ribeiro Jr., 2014) *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m-quasi-Einstein generalizada completa e sem bordo não-trivial com $n \geq 3$. Assuma que (M^n, g) é uma variedade Einstein ou que ∇u é um campo vetorial conforme. Então, para algum $r > 0$, temos uma das seguintes possibilidades:*

1. *M^n é isométrica a esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$;*
2. *M^n é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$;*
3. *M^n é isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$.*

Por outro lado, Miao e Tam (2009, 2011) estudaram métricas críticas do funcional volume em variedades compactas com bordo, ou seja, uma tripla $(M^n,\ g,\ f)$, onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa e compacta com bordo suave Σ e f é uma função suave sobre M tal que $f^{-1}(0) = \Sigma$ satisfaz

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g. \tag{14}$$

Inspirados pelo trabalho de Barros e Ribeiro Jr. (2014), obtivemos os seguintes exemplos de métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas com bordo.

Exemplo 1 *Considere (M^n_k, g_0) uma bola geodésica de uma forma espacial simplesmente* *conexo de curvatura seccional constante k, com sua respectiva métrica canônica. Então,*

(i) *Se $k = 1$, tome*

$$f = -m \log(\tau - \frac{h_v}{n})$$

e

$$\lambda = (n-1) - m\frac{\tau - u}{u},$$

onde τ é um parâmetro real em $(1/n, \infty)$, h_v é a função altura da esfera para algum vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $u = e^{-f/m} = \tau - \frac{h_v}{n}$.

(ii) *Quando tivermos $k = 0$, defina*

$$f = -m \log(\tau + |x|)$$

e

$$\lambda = -2\frac{m}{u},$$

onde τ é um parâmetro real positivo, $|\cdot|$ é a norma Euclidiana e $u = e^{-f/m} = \tau|x|^2$.

(iii) *Finalmente, se $k = -1$ considere*

$$f = -m \log(\tau + \frac{h_v}{n})$$

e

$$\lambda = -(n-1) - m\frac{\tau - u}{u},$$

onde τ é um parâmetro real em $(-1, \infty)$, h_v é a função altura sobre o espaço hiperbólico para algum $v \in \mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n,1}$ e $u = \exp(-\frac{f}{m}) = \tau + \frac{h_v}{n}$.

Portanto $(M_k^n, g_0, \nabla f, \lambda)$ é uma métrica m-quasi-Einstein generalizada com bordo, para cada $k = 1, 0, -1$. Observe que cada (M_k^n, g_0) é uma variedade Einstein e que a função f é constante ao longo do do bordo de (M_k^n)

A seguir iremos enunciar o nosso resultado principal, que irá mostrar que nossos exemplos acima são, essencialmente, as únicas variedades m-quasi-Einstein generalizadas com bordo que também são variedades Einstein. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 7 *Suponha $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, com $n \geq 3$, é uma m-quasi-Einstein métrica generalizada conexa, compacta e com bordo suave $\Sigma = \partial M$. Se ocorre alguma das seguintes condições:*

(i) *(M^n, g) é uma variedade Einstein,*

ou

(ii) *∇u é um campo vetorial conforme, onde a função $u := e^{-f/m}$ é constante sobre Σ.*

Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica de um espaço forma simplesmente conexo, ou seja, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n(r)$ ou $\mathbb{S}^n(r)$, para algum $r > 0$.

3.1 Consequências do Teorema 7

Neste tópico iremos exibir algumas consequências que obtemos a partir do Teorema 7.

Corolário 1 *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$ *uma m-quasi-Einstein métrica generalizada compacta não trivial, com bordo* Σ *tal que a função* $u = e^{-f/m}$ *é constante sobre* Σ *e* $\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)dM \geq \frac{n}{n-1}\int_M (\Delta u)^2 dM$. *Se a curvatura média de* Σ *é não negativa, então* M *é isométrica a uma bola geodésica de uma esfera* $\mathbb{S}^n(r)$.

Demonstração. Pela clássica fórmula de Reilly (1977),

$$0 = \int_M \{Ric(\nabla u, \nabla u) - |\Delta u|^2 + |\nabla^2 u|^2\}dM$$
$$+ \int_\Sigma \left\{ \left(\Delta^\Sigma u + H\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\frac{\partial u}{\partial \nu} - \left\langle \nabla^\Sigma u, \nabla^\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right\rangle + h(\nabla^\Sigma u, \nabla^\Sigma u)\right\}d\Sigma$$

Usando que u é constante sobre Σ, temos

$$\int_M |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n}g|^2 dM = \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta u)^2 dM - \int_M Ric(\nabla u, \nabla u)dM$$

$$- \int_\Sigma H\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma.$$

Assim, por hipótese, obtemos $\nabla u = \frac{\Delta u}{n}g$, isto é, ∇u é um campo vetorial conforme não trivial. Pelo Teorema 7 obtemos o resultado desejado. ■

O próximo resultado mostra algumas condições para que uma métrica m-quasi-Einstein generalizada compacta e com bordo é trivial, ou seja, quando esta não admite f não constante.

Teorema 8 *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$ *uma métrica m-quasi-Einstein generalizada compacta e com bordo* Σ *tal que* f *é constante sobre o bordo* Σ. *Se* $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM \leq \frac{2}{m}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM - (n-2)\int_M g(\nabla\lambda, \nabla f)dM + \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}d\Sigma$, *ou* $R = n\lambda$, *então* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *é trivial.*

Demonstração.

Por (Barros, Ribeiro Jr., 2014),

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f - (n-2)g(\nabla\lambda, \nabla f).$$

Integrando a equação acima sobre M e usando as fórmulas de Green juntamente com o fato de u ser constante sobre Σ, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla^2 f|^2 dM &= \int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM - \frac{2}{m}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM + (n-2)\int_M g(\nabla\lambda, \nabla f)dM \\
&- \frac{1}{2}\int_\Sigma \nu(|\nabla f|^2)d\Sigma \\
&= \int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM - \frac{2}{m}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM + (n-2)\int_M g(\nabla\lambda, \nabla f)dM \\
&- \int_\Sigma g(\nabla_\nu \nabla f, \nabla f)d\Sigma \\
&= \int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM - \frac{2}{m}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM + (n-2)\int_M g(\nabla\lambda, \nabla f)dM \\
&- \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}d\Sigma.
\end{aligned}$$

Como o lado direito é não positivo, concluímos que $\nabla^2 f \equiv 0$, donde $\Delta f = 0$. Pelo princípio do máximo obtemos que f é constante em M.

Agora assuma que $R = n\lambda$. Se $m = \infty$, então da equação (9) obtemos $\nabla f = 0$. Deste modo, pelo princípio do máximo, f é constante. Por outro lado, se m for finito, tome o traço em (12) e use (9) para obter $\Delta u = \frac{u}{m}(R - n\lambda)$. Novamente pelo princípio do máximo, obtemos que u, portanto f, é constante em M. Isto conclui a demonstração. ■

3.2 Demonstração do Teorema 7

Aqui, será exibido os passos para a demonstração do Teorema 7. Isso se dará utilizando lemas e resultados auxiliares, para assim facilitar a compreensão e a ideia utilizada. No que segue, sempre considere geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco.

Lema 2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e com bordo suave ∂M. Assuma que exista uma função suave u em M tal que*

$$\nabla^2 u = (-Au + B)g, \tag{15}$$

onde A e B são constantes. Suponha que exista um ponto $p \in M$ tal que $\nabla u(p) = 0$. Então

(1) *Ao longo de uma geodésica $\gamma(t)$ em M partindo de p, temos*

(a)

$$u(t) = \frac{1}{2}Bt^2 + u(p), \qquad \text{quando } A = 0;$$

(b)

$$u(t) = (u(p) - B)\cos t + B, \qquad \text{quando } A = 1;$$

(c)

$$u(t) = (u(p) + B)\cosh t - B, \qquad \text{quando } A = -1;$$

(2) *Se existe um ponto $p \in M$ e uma geodésica minimizante $\gamma(t)$ ligando p a q, então para qualquer outra geodésica $\tilde{\gamma}(t)$ que liga p à q teremos que $\tilde{\gamma}(t)$ também é minimizante, quando $A = 0$ ou $A = -1$. No caso $A = 1$ suponha também que $Ric = (n-1)g$ e $\tilde{\gamma}(t)$ não possui comprimento maior do que π, assim concluimos que $\tilde{\gamma}$ também é minimizante.*

(3) *Assuma que Σ é uma hipersuperfície fechada e conexa. Se u é constante sobre Σ, então a distância de p à Σ é constante, desde que $Ric = (n-1)g$ quando tivermos $A = 1$. Em particular, Σ é uma esfera geodésica centrada em o e com raio $dist(o, \Sigma)$.*

Demonstração. Note que ao longo de uma geodésica γ, temos

$$u''(t) = -Au(t) + B, \qquad \text{com } u'(0) = 0. \tag{16}$$

Usando o método de solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de segunda ordem com coeficientes constantes (veja Boyce, DiPrima, Haines, 1992), obtemos o resultado enunciado em (1).

Agora, sejam L e $\tilde{L}$ os comprimentos de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente. Como $\gamma(L) = \tilde{\gamma}(\tilde{L}) = p$ e u não é identicamente nula, obtemos, por (1) acima, que $L = \tilde{L}$ quando $A = 0$ or $A = -1$. Por outro lado, se $A = 1$ temos $\cosh L = \cosh \tilde{L}$, pelo caso (1) acima. Além disso, $L, \tilde{L} \leq \pi$, pois $Ric = (n-1)g$ e pela hipótese sobre $\tilde{\gamma}$, neste caso. Portanto $L = \tilde{L}$, e o caso (2) está provado.

Finalmente, veja que (3) segue diretamente de (1). ■

Lema 3 *Seja (M^n, g) e u como acima. Suponha que Σ é uma hipersuperfície mergulhada conexa em M tal que, sobre Σ, u é constante e ∇u não se anula. Se ν é o campo vetorial normal unitário exterior à Σ, então $|\nabla u|$ é constante sobre Σ e a segunda forma fundamental h de Σ em relação a ν satisfaz*

$$h = \text{sinal}\big(-Au(p) + B\big)|\nabla u|^{-1}(-Au + B)g, \tag{17}$$

onde A e B são constantes. Em particular, se Σ_t é uma esfera geodésica em M, centrada no ponto p e com raio $0 < t < dist(p, \Sigma)$, então a curvatura média, de Σ_t, em relação ao vetor normal unitário exterior ν, é dada por

$$H_t = (n-1)t^{-1}, \qquad \text{quando } A = 0;$$

$$H_t = (n-1)\frac{\cos t}{\sin t}, \qquad \text{quando } A = 1;$$

$$H_t = (n-1)\frac{\cosh t}{\sinh t}, \qquad \text{quando } A = -1.$$

Demonstração. Pelo Lema 2 temos que Σ é uma esfera geodésica em M e

$$\nu = \text{sinal}\big(-Au(p)+B\big)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}.$$

Logo, para quaisquer campos vetoriais X, Y sobre Σ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X(|\nabla u|^2) &= g(\nabla_X \nabla u, \nabla u)\\ &= \nu(u)g(\nabla_X\nabla u, \nu)\\ &= \nu(u)\nabla^2 u(X,\nu)\\ &= \nu(u)(-Au+B)g(X,\nu)\\ &= 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{sinal}\big(-Au(p)+B\big)h(X,Y) &= |\nabla u|^{-1}g(\nabla_X\nabla u, Y)\\ &= |\nabla u|^{-1}\nabla^2 u(X,Y)\\ &= |\nabla u|^{-1}(-Au+B)g(X,Y).\end{aligned}$$

Isto prova a primeira parte. Ainda pelo Lema 2, temos que u é constante ao longo de Σ_t e $|\nabla u|$ não se anula sobre Σ_t. Assim, $|\nabla u(p)| = |\gamma'(t)|$. Tomando o traço em (17) em relação ao vetor normal unitário exterior ν, obtemos

$$H = \text{sinal}\big(-Au(p)+B\big)(n-1)|\nabla u|^{-1}(Au+B). \tag{18}$$

Se $A = 0$, então $|\nabla u| = |B|t$ sobre Σ_t. Portanto,

$$\begin{aligned}H_t &= (n-1)\text{sinal}\big(B\big)\frac{B}{|B|t}\\ &= (n-1)t^{-1}.\end{aligned}$$

Quando tivermos $A = 1$, obtemos $|\nabla u| = |u(p) - B| \sin t$ sobre Σ_t. Assim,

$$\begin{aligned} H_t &= (n-1)\text{sinal}\big(-u(p)+B\big)\frac{-u(t)+B}{-|u(p)-B|\sin t} \\ &= (n-1)\text{sinal}\big(-u(p)+B\big)\frac{(-u(p)+B)\cos t}{|-u(p)+B|\sin t} \\ &= (n-1)\frac{\cos t}{\sin t}. \end{aligned}$$

Finalmente, se $A = -1$, concluímos que $|\nabla u| = |u(p) + B| \sinh t$ sobre Σ_t, donde

$$\begin{aligned} H_t &= (n-1)\text{sinal}\big(u(p)+B\big)\frac{u(t)+B}{|u(p)+B|\sinh t} \\ &= (n-1)\text{sinal}\big(u(p)+B\big)\frac{(u(p)+B)\cosh t}{|u(p)+B|\sinh t} \\ &= (n-1)\frac{\cosh t}{\sinh t}. \end{aligned}$$

■

Lema 4 (Barros, Ribeiro Jr., 2014) *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda), n \geq 3$, *uma métrica m-quasi-Einstein generalizada. Se* (M^n, g) *é uma variedade Einstein, então*

$$\nabla^2 u = \left(-\frac{R}{n(n-1)}u + \frac{c}{m}\right) g, \tag{19}$$

onde c é uma constante real e $u = e^{-f/m}$.

Demonstração. Como M^n é Einstein e $n \geq 3$, temos que $Ric = \frac{R}{n}g$ e que R é constante. Em particular de (13), obtemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{m}\left(\frac{R}{n}u - \lambda u\right) g. \tag{20}$$

Sendo

$$Ric(\nabla u) + \nabla \Delta u = \frac{1}{m}\nabla\left(\frac{R}{n}u - \lambda u\right) \tag{21}$$

e $Ric = \frac{R}{n}g$, temos que

$$\frac{R}{n}\nabla u + \nabla \Delta u = \frac{R}{mn}\nabla u - \frac{1}{m}\nabla(\lambda u). \tag{22}$$

Por outro lado, tomando o traço em (19) temos

$$\Delta u = \frac{R}{m}u - \frac{n}{m}\lambda u. \tag{23}$$

Combinando as equações (23) e (22) concluímos

$$\nabla(\lambda u) = \frac{m+n-1}{n(n-1)} R \nabla u. \tag{24}$$

Deste modo (24) implica que $\lambda u = \frac{m+n-1}{n(n-1)} Ru - c$, onde c é uma constante. Usando este fato e aplicando em (19), concluímos a demonstração deste lema. ■

Finalmente, com auxílio dos resultados acima, iremos concluir a demonstração do Teorema 7.

Prova do Teorema 7. Como u é constante sobre Σ e u não é equivalente a zero, existe um ponto p em $M \setminus \Sigma$ satisfazendo $\nabla u(p) = 0$. Pelo Lema (4)

$$\nabla^2 u = \left(-\frac{R}{n(n-1)} u + \frac{c}{m} \right) g, \tag{25}$$

onde c é uma constante. Sendo (M^n, g) uma variedade Einstein, obtemos pelo Lema de Schur (Lema 1), que R é constante. Seja $r := dist(p, \Sigma)$ a distância de p a Σ. Se $B_r(p)$ é a bola geodésica em M centrada em p e com raio r, o Lema 2 nos dá que u é constante sobre $\partial B_r(p) = \Sigma$. Como M é conexa, temos $B_r(p) = M$.

Seja Σ_t a esfera geodésica em M de raio $t \in (0, r]$ centrado no ponto p. Assuma que R é igual a 0, $n(n-1)$ ou $-n(n-1)$. Então, pela primeira variação da área, obtemos $A'(t) = H_t A(t)$, onde $A(t)$ denota a área de Σ_t e H_t denota a curvatura média de Σ_t, em relação ao vetor normal unitário exterior. Assim, do Lema 3 e pelo teorema de existência para soluções de equações diferenciais ordinárias (EDOs), $A(t)$ é igual área da esfera de dimensão $(n-1)$ com raio t, em um espaço forma conexo de dimensão n. Como M é Einstein, temos $Ric = (R/n)g$ sobre M. Portanto, o Teorema de comparação de Bishop (Teorema 5) implica que M é isométrica a uma bola geodésica de raio r em um espaço forma conexo de dimensão n. Assim, concluímos a demonstração do teorema. ■

4 ESTIMATIVAS GRADIENTES PARA AUTOFUNÇÕES DO V-LAPLACIANO

Inicialmente na seção 4.1, obeteremos uma estimativa gradiente para autofunções do operador V-Laplaciano, denotado por Δ_V, em variedades Riemannianas compactas, com bordo ou sem bordo, sobre condições na fronteira no último caso. Para isto devemos supor Ric_V^m limitado inferiormente. Este resultado generaliza um teorema devido a Li (2005). Na seção 4.2, sob hipóteses semelhantes ao caso anterior, obteremos uma estimativa gradiente para autofunções de Δ_V sobre bolas em variedades Riemannianas completas. Exibiremos algumas consequências desses resultados, como uma desigualdade de Harnack. Esses resultados são obtidos no trabalho (2015).

4.1 Estimativa Gradiente sobre Variedades Riemannianas compactas

Inicialmente, precisaremos de alguns resultados já existentes, para assim demonstrarmos o resultado desejado.

Lema 5 *Dados dois números reais quaisquer a, b e α um número positivo, temos*

$$(a+b)^2 \geq \frac{a^2}{1+\alpha} - \frac{b^2}{\alpha}. \tag{26}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, tivermos $b = -\frac{\alpha}{1+\alpha}a$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}a + \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}b\right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha}a^2 + 2ab + \frac{1+\alpha}{\alpha}b^2 \\ &= (a+b)^2 - \frac{a^2}{1+\alpha} + \frac{b^2}{\alpha}, \end{aligned}$$

o que prova o Lema. ■

Teorema 9 (Bakry, Qian, 2005) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric_V^{m,n} \geq (n-1)K$, onde $K = K(d(p))$ depende da função distância $d(p) = d(o,p)$, para algum ponto fixo $o \in M$. Seja θ_K a solução, definida sobre o intervalo maximal $(0, \delta_K)$, da seguinte equação de Riccati:*

$$\theta'_K(r) = -K(r) - \theta_K^2(r), \quad \lim_{r\to 0} r\theta_K(r) = n-1,$$

e δ_K tal que

$$\lim_{r\to\delta_K^-} \theta_K(r) = -\infty.$$

Então

(i) *Se $\delta_K < 0$, então M é compacta e o diâmentro de (M, g) é limitado por baixo por δ_K;*

(ii) *Para qualquer ponto $p \in M \setminus \mathrm{cut}(o)$, temos*

$$\Delta_V d \leq (n-1)\theta_K(d).$$

Considerando o caso particular de K constante, o teorema acima implica

Corolário 2 *Seja (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric_V^{m,n} \geq (n-1)K$, onde K é uma constante real. Fixe um ponto $o \in M$. Então, para* *todo ponto $x \in M$, tal que $d(x) = d(o,x)$ é suave, temos*

$$\Delta_V(d) = \begin{cases} (n-1)\sqrt{K}\cot\left(\sqrt{K}d\right), & se\ K > 0, \\ \frac{n-1}{d}, & se\ K = 0, \\ (n-1)\sqrt{|K|}\coth\left(\sqrt{|K|}d\right), & se\ K < 0. \end{cases}$$

Usando que $x\coth x \leq 1 + x$, tem-se

Corolário 3 *Seja (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric_V^{m,n} \geq (n-1)K$, onde $K \leq 0$. Então, para todo ponto $x \in M$, tal que $d(x) = d(o,x)$ é suave, temos*

$$\Delta_V(d) \leq \frac{n-1}{d} + (n-1)\sqrt{|K|}.$$

Proposição 2 *Seja u uma solução de $\Delta_V u = -\lambda u$ e $m > n$ uma constante. Então, para $\beta > 0$ dado,*

$$|\nabla u|\Delta_V|\nabla u| \geq \frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\beta)(m-1)} + Ric_V^{m,n}(\nabla u, \nabla u) - \frac{(\lambda u)^2}{\beta(m-1)} - \lambda|\nabla u|^2. \tag{27}$$

Demonstração. Usando a identidade

$$\Delta_V|\nabla u|^2 = 2|\nabla u|\Delta_V|\nabla u| + 2|\nabla(|\nabla u|)|^2$$

e a fórmula de Bocnher

$$\frac{1}{2}\Delta_V|\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + Ric_V(\nabla u, \nabla u) + \langle\nabla u, \nabla\Delta_V u\rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla u|\Delta_V|\nabla u| &= \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 - |\nabla(|\nabla u|)|^2 \\ &= |\nabla^2 u|^2 + Ric_V(\nabla u, \nabla u) + \langle\nabla u, \nabla\Delta_V u\rangle - |\nabla(|\nabla u|)|^2 \\ &= |\nabla^2 u|^2 - |\nabla(|\nabla u|)|^2 + Ric_V(\nabla u, \nabla u) - \lambda|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Dado $p \in M$, tome um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em torno de p tal que $u_1(p) = |\nabla u|(p)$ e $u_i(p) = 0$, para $2 \leq i \leq n$, onde $u_i := e_i(u)$. Assim,

$$|\nabla(|\nabla u|)|^2 = |\nabla u_1|^2 = \sum_{1\leq j\leq n} u_{1j}^2$$

e

$$-\sum_{2\leq i\leq n} u_{ii} = -\Delta u + u_{11} = -\Delta_V u + u_{11} + \langle V, u_1 e_1\rangle = \lambda u + u_{11} + V_1 u_1.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|\nabla^2 u|^2 - |\nabla(|\nabla u|)|^2 &= \sum_{1\le j\le n} u_{jj}^2 - \sum_{1\le j\le n} u_{1j}^2 \\
&= \sum_{i\neq j, 1\le j\le n} u_{ij}^2 \\
&\ge \sum_{2\le i\le n} u_{i1}^2 + \sum_{2\le i\le n} u_{ii}^2 \\
&\ge \sum_{2\le i\le n} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{2\le i\le n} u_{ii}\right)^2 \\
&\ge \sum_{2\le i\le n} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}(\lambda u + u_{11} + V_1 u_1)^2.
\end{aligned}
$$

Pela desiguladade (26) temos, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
(\lambda u + u_{11} + V_1 u_1)^2 &\ge \frac{(\lambda u + u_{11})^2}{1+\alpha} - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha} \\
&\ge \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{u_{11}^2}{1+\beta} - \frac{(\lambda u)^2}{\beta}\right) - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha} \\
&\ge \frac{u_{11}^2}{(1+\alpha)(1+\beta)} - \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta} - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Logo, para $\alpha, \beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
|\nabla^2 u|^2 - |\nabla(|\nabla u|)|^2 &\ge \sum_{2\le i\le n} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{u_{11}^2}{(1+\alpha)(1+\beta)} - \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta} - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha}\right) \\
&= \left(\sum_{2\le i\le n} u_{i1}^2 + \frac{u_{11}^2}{(1+\alpha)(1+\beta)(n-1)}\right) - \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta(n-1)} \\
&\quad - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha(n-1)} \\
&\ge \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)(n-1)} \sum_{1\le i\le n} u_{i1}^2 - \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta(n-1)} - \frac{(V_1 u_1)^2}{\alpha(n-1)} \\
&= \frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\alpha)(1+\beta)(n-1)} - \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta(n-1)} - \frac{\langle V, \nabla u\rangle^2}{\alpha(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Aplicando (28) na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla u|\Delta_V|\nabla u| &= |\nabla^2 u|^2 - |\nabla(|\nabla u|)|^2 + Ric_V(\nabla u, \nabla u) - \lambda|\nabla u|^2 \\
&\geq \frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\alpha)(1+\beta)(n-1)} + Ric_V(\nabla u, \nabla u) - \frac{\langle V, \nabla u\rangle^2}{\alpha(n-1)} \\
&- \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta(n-1)} - \lambda|\nabla u|^2 \\
&\geq \frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\alpha)(1+\beta)(n-1)} + \left(Ric_V - \frac{1}{\alpha(n-1)} V \otimes V\right)(\nabla u, \nabla u) \\
&- \frac{(\lambda u)^2}{(1+\alpha)\beta(n-1)} - \lambda|\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{m-n}{n-1}$ conclui-se a demonstração. ■

Teorema 10 *Seja (M, g) uma variedade Riemannian compacta de dimensão n, com bordo ∂M convexo, quando $\partial M \neq \emptyset$. Suponha $Ric_V^{m,n} \geq -K$, onde $K \geq 0$ é uma constante. Seja u uma solução, limitada por baixo, de $\Delta_V u = -\lambda u$, satisfazendo a condição de Neumann no bordo, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre ∂M, desde que $\partial M \neq \emptyset$. Então,*

$$|\nabla u| \leq C\left(u - \inf_M u\right), \tag{29}$$

onde $C = \sqrt{(m-1)K + \sqrt{(m-1)^2K^2 + 2\lambda^2}}$. Em particular, se $K = 0$, podemos assumir $C = \sqrt{|\lambda|}$.

Demonstração. Assuma, sem perda de generalidade, que u é positiva, do contrário, substitua u por $u - \inf_M u$. Defina $\phi := |\nabla u|/u = |\nabla \ln u|$. Então,

$$\nabla\phi = \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}. \tag{30}$$

Em qualquer ponto que $|\nabla u| \neq 0$, temos

$$\Delta_V|\nabla u| = u\Delta_V\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle + \phi\Delta_V u = u\Delta_V\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle - \lambda|\nabla u|.$$

Pela Proposição 2, temos para todo $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta_V \phi &= \frac{\Delta_V |\nabla u|}{u} - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} + \frac{\lambda|\nabla u|}{u} \\
&\geq \frac{1}{u|\nabla u|}\left(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\beta)(m-1)} + Ric_V^{m,n}(\nabla u, \nabla u) - \frac{(\lambda u)^2}{\beta(m-1)} - \lambda|\nabla u|^2\right) \\
&- \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} + \frac{\lambda|\nabla u|}{u} \\
&\geq \frac{1}{u|\nabla u|}\left(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(1+\beta)(m-1)} - K|\nabla u|^2 - \frac{(\lambda u)^2}{\beta(m-1)}\right) - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} \\
&= \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{u|\nabla u|} - K\phi - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi} - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} &= (2-\varepsilon)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} + \varepsilon\frac{\langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u\rangle}{u^2} - \varepsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\
&\leq (2-\varepsilon)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} + \varepsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} - \varepsilon\phi^3.
\end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Young,

$$\varepsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{|\nabla u|u} + \frac{|\nabla u|^3}{u^3}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_V \phi &\geq \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{u|\nabla u|} - K\phi - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi} - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} \\
&\geq \frac{2}{(1+\beta)(m-1)}\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} - \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\phi^3 - K\phi - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi} \\
&- (2-\varepsilon)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} - \varepsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} + \varepsilon\phi^3.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = 2/(1+\beta)(m-1)$, concluímos

$$\Delta_V \phi \geq -K\phi - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi} - \left(2 - \frac{2}{(1+\beta)(m-1)}\right)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} + \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\phi^3. \tag{31}$$

Suponha que ϕ atinge seu máximo no ponto $x_0 \in M$. Afirmamos que x_0 pertence ao interior de M. Do contrário, pelo princípio do máximo forte, $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x_0) > 0$. Escolha um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial\nu}\}$ sobre TM. Então, em x_0,

$$u^2|\nabla u|\phi_\nu = u\sum_{j=1}^{n-1} u_j u_{j\nu} + u_\nu u_{\nu\nu} - |\nabla u|^2 u_\nu.$$

Denote por h_{jk} os componentes da segunda forma fundamental. Assim, pela condição de Neumann, obtemos

$$u^2|\nabla u|\phi_\nu = u\sum_{j=1}^{n-1} u_j u_{j\nu} = -u\sum_{j,k=1}^{n-1} h_{jk}u_j u_k.$$

Pela hipótese de convexidade no bordo obteríamos $\phi_\nu(x_0) \leq 0$, uma contradição. Logo, x_0 está no interior de M e, por maximalidade, $\nabla\phi(x_0) = 0$ e $\Delta_V\phi(x_0) \leq 0$. Usando a desigualdade (31),

$$0 \geq -K\phi(x_0) - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi(x_0)} + \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\phi^3(x_0).$$

Ou seja,

$$\beta\phi^4(x_0) - \beta(1+\beta)(m-1)K\phi^2(x_0) - (1+\beta)\lambda^2 \leq 0.$$

Portanto, existe uma constante $C = C(m, K, \lambda) > 0$ tal que $\phi(x_0) \leq C$, donde, $|\nabla u| \leq Cu$ sobre M. Quando $K = 0$, faça β tender ao infinito, donde podemos tomar $C = \sqrt{\lambda}$. Por outro lado, se $K \neq 0$, então resolvendo a desigualdade polinomial acima, obtemos

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\left(\beta(1+\beta)(m-1)K + \sqrt{\beta^2(1+\beta)^2(m-1)^2K^2 + 4\beta(1+\beta)\lambda^2}\right)/2\beta} \\ &\geq \sqrt{\left(\beta(1+\beta)(m-1)K\right)/2\beta} > 0 \end{aligned}$$

Em particular, para $\beta = 1$, temos $C = \sqrt{(m-1)K + \sqrt{(m-1)^2K^2 + 2\lambda^2}}$. ■

Observação 1 *Se assumirmos $\lambda = 0$ no Teorema 10 acima, podemos tomar o limite de C quando $\beta \to 0$, e deste modo, obteríamos a mesma estimativa do caso particular provado por Li (2005).*

4.2 Estimativa Gradiente sobre bolas em variedades Riemannianas completas e uma desigualdade de Harnack

Dando continuidade as estimativas gradiente de autofunções do V-Laplaciano, enunciaremos um resultado sobre bolas em Variedades Riemannianas completas, que generaliza o Teoremas 2.3 e 2.6 de (Li, 2005) e o Teorema 1.5 de (Li, 2015).

Teorema 11 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n. Suponha $Ric_V^{m,n} \geq -(m-1)K$, onde $K \geq 0$ é uma constante não-negativa. Se u é uma solução positiva de $\Delta_V u = -\lambda u$ sobre M, então*

$$\sup_{B(x,r/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C,$$

onde $C = C(m, K, r, \lambda)$ *é uma constante positiva que depende de* m, K, r *e* λ, *e o supremo é tomado sobre todas as bolas* $B(x, r/2)$ *de* M *centradas em algum ponto* x *com raios* $r/2$.

Demonstração. Da desigualdade (31),

$$\begin{aligned}\Delta_V \phi \geq & -(m-1)K\phi - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi} - \left(2 - \frac{2}{(1+\beta)(m-1)}\right)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} \\ & + \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\phi^3,\end{aligned} \tag{32}$$

onde $\phi = |\nabla u|/u$. Dado $r > 0$, defina

$$F(y) := (r^2 - d^2(x, y))\phi(y), \quad y \in B(x, r).$$

Note que

$$\nabla F = -\phi\nabla(d^2) + (r^2 - d^2)\nabla\phi,$$

$$\Delta_V F = (r^2 - d^2)\Delta_V\phi - \phi\Delta_V(d^2) - 2\langle\nabla(d^2), \nabla\phi\rangle.$$

Suponha $|\nabla u| \neq 0$. Como $F = 0$ sobre $\partial B(x, r)$ e $F > 0$ em $B(x, r)$, então F atinge seu máximo em algum ponto $x_0 \in B(x, r)$. Devido a (Calabi, 1958) (ver também (1975, 1994)), podemos supor que x_0 não é um *cut-point* de x. Portanto, F é suave perto de x_0, donde $\nabla F(x_0) = 0$ e $\Delta F(x_0) \leq 0$. Assim, em x_0, temos

$$\Delta_V F = \Delta F + \langle V, \nabla F\rangle \leq 0,$$

$$\frac{\nabla\phi}{\phi} = \frac{\nabla F}{(r^2 - d^2)\phi} + \frac{\nabla(d^2)}{(r^2 - d^2)} = \frac{\nabla(d^2)}{(r^2 - d^2)};$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_V\phi}{\phi} &\leq \frac{\Delta_V(d^2)}{r^2 - d^2} + \frac{2\langle\nabla(d^2), \nabla\phi\rangle}{(r^2 - d^2)\phi} \\ &= \frac{\Delta_V(d^2)}{r^2 - d^2} + \frac{2|\nabla(d^2)|^2}{(r^2 - d^2)^2}.\end{aligned}$$

Como $|\nabla(d^2)|^2 = 4d^2$, pela desigualdade (32) e pelo corolário 3, obtemos, em x_0, que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\Delta_V F}{(r^2-d^2)\phi} = \frac{\Delta_V \phi}{\phi} - \frac{\Delta_V(d^2)}{(r^2-d^2)} - \frac{8d^2}{(r^2-d^2)^2} \\
&\geq -(m-1)K - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{\phi^2} - \left(2 - \frac{2}{(1+\beta)(m-1)}\right)\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{\phi u} \\
&+ \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}\phi^2 - \frac{2+2(m-1)(1+\sqrt{K}d)}{(r^2-d^2)} - \frac{8d^2}{(r^2-d^2)^2}
\end{aligned}$$

Por outro lado, por Cauchy-Schwarz,

$$\frac{\langle \nabla\phi, \nabla u\rangle}{\phi u} = \frac{\langle \nabla(d^2), \nabla u\rangle}{u(r^2-d^2)} = \frac{2d\langle \nabla d, \nabla u\rangle}{u(r^2-d^2)} \leq \frac{2d\phi}{r^2-d^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\geq -(m-1)K(r^2-d^2)^2 - \frac{1}{\beta(m-1)}\frac{\lambda^2}{F^2}(r^2-d^2)^4 - 4\left(\frac{(1+\beta)m-(\beta+2)}{(1+\beta)(m-1)}\right)dF \\
&+ \frac{1}{(1+\beta)(m-1)}F^2 - (2+2(m-1)(1+\sqrt{K}d))(r^2-d^2) - 8d^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \beta F^4 - 4\beta[(1+\beta)m-(\beta+2)]rF^3 - (\beta+1)\lambda^2 r^8 \\
&- \beta(\beta+1)(m-1)[(m-1)Kr^4 + (2m+8)r^2 + 2(m-1)\sqrt{K}r^3]F^2.
\end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}
\xi(y) &= \beta y^4 - 4\beta\,(m+\beta m-\beta-2)\,ry^3 - (\beta+1)\lambda^2 r^8 \\
&- \beta(\beta+1)(m-1)[(m-1)Kr^4 + (2m+8)r^2 + 2(m-1)\sqrt{K}r^3]y^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Note que $\xi(0) = -(\beta+1)\lambda^2 r^8 < 0$, donde a equação polinomial em ξ possui apenas duas raizes reais, com sinais opostos. Logo, existe uma constante positiva C, dependendo de m, K, r e λ, de modo que $y \leq C$, quando $\xi(y) \leq 0$. Portanto, temos $F \leq C$ sobre $B(x,r)$, donde

$$\frac{3}{4}r^2 \sup_{B(x,r/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq \sup_{B(x,r/2)} F \leq C,$$

ou seja,

$$\sup_{B(x,r/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq \frac{4}{3}Cr^{-2}. \tag{34}$$

Assim, obtemos a estimativa desejada. ■

Corolário 4 *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa de dimensão n satisfazendo $Ric_V^{m,n} \geq -(m-1)K$, onde $K \geq 0$ é uma constante não-positiva.*

1. *Se u é solução de $\Delta_V u = -\lambda u$ sobre uma bola geodésica $B(x, r)$, então*

$$\sup_{B(x,r/2)} |\nabla u| \leq 2C \sup_{B(x,r/2)} |u|.$$

2. *Se u é uma solução positiva de $\Delta_V u = -\lambda u$ sobre uma bola geodésica $B(x, 2r)$, então*

$$\sup_{B(x,r/2)} u \leq e^{Cr} \inf_{B(x,r/2)} |u|.$$

Em ambos os casos $C = C(m, K, r, \lambda)$ é uma constante positiva dependendo de m, K, λ e r.

Demonstração. Para provar (1) considere $A = \sup_{B(x,r)} |u|$. Assim para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $v := u + A + \varepsilon > 0$ sobre $B(x, r)$. Pelo Teorema 11,

$$\begin{aligned}
\sup_{B(x,r/2)} |\nabla u| &= \sup_{B(x,r/2)} |\nabla v| \\
&\leq C \sup_{B(x,r/2)} (u + A + \varepsilon) \\
&\leq C(2 \sup_{B(x,r/2)} |u| + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ concluímos a prova de (1).

Finalmente, para provar (2), tome x_1, x_2 em $B(x, r/2)$ satisfazendo $u(x_1) = \sup_{B(x,r/2)} u$ e $u(x_2) = \inf_{B(x,r/2)} u$. Seja γ uma geodésica mínimizante conectando x_1 a x_2. Como γ está contida em $B(x, r)$, obtemos, do Teorema 11 e da desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} &= \log u(x_1) - \log u(x_2) \\
&\leq \int_\gamma \frac{|\nabla u|}{u} ds \\
&\leq \int_\gamma C ds \\
&\leq C2r.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x_1) \leq e^{rC} u(x_2).$$

■

5 CONCLUSÃO

Na primeira parte do trabalho vimos que o conceito de métricas m-quasi-Einstein generalizadas compactas com bordo não é um conjunto vazio, e isto mostra uma outra forma de enxergar tais métricas. Além disso quando restrita ao caso de métricas Einstein vemos que aquelas devem ser uma bola geodésica de espaço forma simplesmente conexo. Isso garante casos em que a trivialidade sempre ocorre e estende, no caso compacto com bordo, os resultados de (2014). Já na segunda parte deste trabalho, conseguimos generalizar resultados de (2005) e (2015), conseguindo uma estimativa para o gradiente de autofunções do V-Laplaciano, ampliando o leque destes resultados. Mesmo estas estimativas não sendo as melhores, a sua existência em si é de bastante importância para a teoria, dando-nos inclusive nesse caso uma desigualdade de Harnack.

REFERÊNCIAS

BAKRY, D.; ÉMERY, M. Diffusions hypercontractives. **Séminaire de Probabilités XIX 1983/84**, p. 177–206, 1985.

BAKRY, D.; QIAN, Z. **Volume comparison theorems without Jacobi fields**. *Conference on Potential Theory.* 2005, p. 115–122.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; SILVA, A. Generalized m-quasi-Einstein with boundary. **pré-print**, 2015.

BARROS, A.; GOMES, J. N. A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 401, n. 2, p. 702–705, 2013.

BARROS, A.; RIBEIRO JR., E. Characterizations and integral formulae for generalized m-quasi-Einstein metrics. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 45, n. 2, p. 325–341, 2014.

BARROS, A.; SILVA, A. Gradient estimate for eingenfunction of operator Δ_V. **pré-print**, 2015.

BISHOP, R. L.; CRITTENDEN, R. J. Geometry of manifolds. **Pure and Applied Mathematics**, v. 15, 1964.

BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R. C.; HAINES, C. W. **Elementary differential equations and boundary value problems**, v. 9. Wiley New York, 1992.

CALABI, E. An extension of E. Hopfs maximum principle with an application to Riemannian geometry. **Duke Mathematical Journal**, v. 25, n. 1, p. 45–56, 1958.

CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

CARTAN, E. **Leçons surla geométrie des espaces de Riemann**. Gauthier-Villars, Paris, 1951.

CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor. **Mathematische Zeitschrift**, v. 271, n. 3-4, p. 751–756, 2012.

CHAVEL, I. **Riemannian geometry: a modern introduction**, v. 98. Cambridge university press, 2006.

CHEN, Q.; JOST, J.; QIU, H. Existence and Liouville theorems for V-harmonic maps from complete manifolds. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 42, n. 4, p. 565–584, 2012.

CHENG, S. Y.; YAU, S.-T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 28, n. 3, p. 333–354, 1975.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics**, v. 77. American Mathematical Soc., 2006.

EVANS, L. **Partial differential equations**, v. 19. American Mathematical Society, 1998.

HE, C.; PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of warped product Einstein metrics. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 20, n. 2, 2012.

LI, P. Lower bound for the 1st eigenvalue of the Laplacian on a compact manifold. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 28, n. 6, p. 1013–1019, 1979.

LI, P. **Geometric analysis**, v. 134. Cambridge University Press, 2012.

LI, P.; YAU, S.-T. Eigenvalues of a compact Riemannian Manifold. **AMS Proc. Symp. Pure Math.**, v. 36, p. 205–239, 1979.

LI, X.-D. Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 84, n. 10, p. 1295–1361, 2005.

LI, Y. Li–Yau–Hamilton estimates and Bakry–Emery–Ricci curvature. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 113, p. 1–32, 2015.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

PETERSEN, P. **Riemannian geometry, Graduate Texts in Mathematics**, v. 171. Springer, New York, 2006.

REILLY, R. C. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 26, n. 3, p. 459–472, 1977.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. **Lectures on differential geometry**, v. 2. International press Cambridge, 1994.

YAU, S.-T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.

ZHONG, J. Q.; YANG, H. C. On the estimate of the 1st eigenvalue of a compact Riemannian manifold. **Scientia Sinica Series A-Mathematical Physical Astronomical & Technical Sciences**, v. 27, n. 12, p. 1265–1273, 1984.