



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RAFAEL ROCHA DE FARIAS

CAMPO DE BUMBLEBEE EM UM ESPAÇO DE SCHWARZSCHILD

FORTALEZA
2017

RAFAEL ROCHA DE FARIAS

Campo de Bumblebee em um Espaço de Schwarzschild

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza

2017

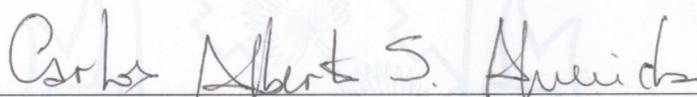
RAFAEL ROCHA DE FARIAS

CAMPO DE BUMBLEBEE EM UM ESPAÇO DE SCHWARZSCHILD

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

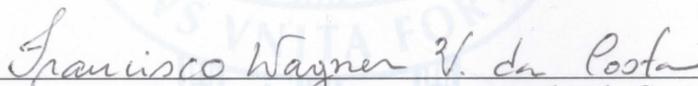
Aprovada em 21 / 02 / 2017.

BANCA EXAMINADORA



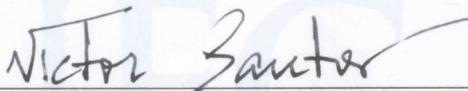
Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Dr. Francisco Wagner Vasconcelos da Costa

Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F238c Farias, Rafael Rocha de.

Campo de Bumblebee em um Espaço de Schwarzschild / Rafael Rocha de Farias. – 2017.
55 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Quebra da simetria de Lorentz. 2. Campo de bumblebee. 3. Geometria de Schwarzschild. I. Título.

CDD 530

RESUMO

O objetivo deste trabalho é aplicar o modelo de bumblebee, um modelo de quebra de simetria espontânea de Lorentz gerada por um quadri-vetor de valor esperado de vácuo não-nulo, a um espaço de vácuo. Apresentamos resultados para quebra de simetria de Lorentz radial/temporal em um espaço de Schwarzschild. Além disso, é verificada uma incompatibilidade entre a hipótese de o universo ser homogêneo quando não há presença de matéria massiva ordinária e a imposição de um campo de bumblebee paralelamente transportado na direção radial.

ABSTRACT

The objective of this work is apply bumblebee model, a spontaneously Lorentz symmetry breaking model due to a non-vanishing vacuum expectation value vector field, to a vacuum space. Results are presented for a radial/temporal Lorentz symmetry breaking in a Schwarzschild space. Also, it is verified an incompatibility between the hypothesis of the universe to be homogenous in the absence of massive ordinary matter and the imposition of a parallelly transported bumblebee field in radial direction.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador Carlos Alberto Santos de Almeida pela orientação ao longo do mestrado, tanto no sentido didático como no sentido pessoal.

Ao coorientador Victor Santos, pelas constantes orientações e, principalmente, pela paciência em me ensinar a “mexer” nos softwares *SageMath* e *SageManifold*, tão necessários nas obtenções dos resultados aqui apresentados.

Aos colegas do Lassco, Michelangelo, Juliana, Nícolas, Matheus (Friend), Débora, Maria Clara, Sofia, Arilo, Augusto (Plácido), Rondinelly, Raphael, Waldo, Diego (Quântico), Samuel, Adevaldo (Meu Chapa), Davi, Júlio e Euclides.

Aos colegas, antigos e atuais, do departamento de Física da UFC, Adaías, Nathanael, Emanuel (Nena), Laura, Wagner, Victor, Pedro, Michel, Raul, Levi, Pablo, Ken, Bentivi, Danilo, Danilo (Mamilo), Israel (Coala), Flávio (Engenheiro), Charles, Misael (Misa), Bruno, Lucas (Jorge), Davi, Paulo Victor, Lucas (Depois), William, Fernando, João Paulo, Daniel, Aurélio, Matheus e Jonathan.

Aos funcionários do departamento de física da UFC, sempre solícitos.

À minha família pelo apoio incondicional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	3
2	Gravitação Einsteiniana e Métrica de Schwarzschild	5
2.1	Variedade, Campo Vetorial, Tensores e Métrica	5
2.2	Derivada Covariante, Conexão Afim e Transporte Paralelo	11
2.3	Curvatura	16
2.4	Geodésica e Limite Newtoniano	21
2.5	Equação de Einstein	23
2.6	Métrica de Schwarzschild	26
3	Violação da Simetria de Lorentz e Modelo de Bumblebee	30
3.1	Transformações de Galileu, Lorentz e CPT	30
3.2	Exemplo de Quebra de Simetria Espontânea	34
3.3	Modelo Padrão Estendido	35
3.4	Modelo de Bumblebee	37
4	Dinâmica do Campo de Bumblebee	39
4.1	Caso geral	40
4.2	Campo de Bumblebee em um Espaço de Schwarzschild	41
4.3	Campo paralelamente transportado na direção radial	45
5	Conclusões e Perspectivas	47

Notação

As regras abaixo serão implícitas ao longo do texto. Casos excepcionais ficarão claros pelo contexto.

- Índices latinos (a, b, c, \dots) referem-se a tensores no espaço-tempo.
- Índices gregos ($\mu, \nu, \lambda, \kappa$) referem-se a coordenadas de tensores no espaço-tempo em um sistema de coordenadas qualquer.
- Índices latinos (i, j, k, \dots) referem-se a coordenadas espaciais, usualmente 1, 2, 3 ou x, y, z , em um sistema de coordenadas.
- As coordenadas naturais no espaço \mathbb{R}^n são representadas por x^μ .
- A assinatura da métrica g_{ab} do espaço-tempo é $(-1, 1, 1, 1)$.
- Vetores espaciais, ou trivetores, são representados por uma flecha (\vec{v}).
- Será adotada a convenção de soma de Einstein, ou seja, índices repetidos indicam um somatório implícito correndo sobre o índice.
- A velocidade da luz é tomada como unitária.

Capítulo 1

Introdução

Em 1905, o físico alemão Albert Einstein publicou a teoria da *relatividade especial* [1]. Tal trabalho mudou a concepção de espaço e de tempo, que antes eram vistos como grandezas distintas: o espaço tri-dimensional euclidiano e uma dimensão temporal independente e absoluta. A relatividade especial combina as dimensões espaciais e a dimensão temporal a uma única *variedade*, que é chamada de *espaço de Minkowski*.

Na relatividade restrita foi estabelecida a simetria de Lorentz, que é a invariância das leis físicas sob as chamadas *transformações de Lorentz*. Tal simetria é global e abrange simetria de translação espacial e temporal.

Em 1915, novamente Albert Einstein publicou um trabalho que mudou a visão de espaço-tempo [2]. Se antes havia uma simetria global das transformações de Lorentz, agora a simetria é apenas local. O espaço-tempo não é mais invariante sob translações. Invariância de Lorentz local refere-se à possibilidade de, em qualquer ponto do espaço-tempo, aplicar a covariância de Lorentz em uma região infinitesimal que contenha tal ponto.

O Modelo Padrão descreve todas as interações não-gravitacionais. Tanto o Modelo Padrão como a Relatividade Geral apresentam simetria de Lorentz e de CPT, além de serem bem estabelecidos, mas até hoje não há uma unificação dos dois modelos amplamente aceita pela comunidade científica. Existem teorias, como a teoria das cordas ou a gravitação quântica em laço, que tentam unificar a gravitação ao modelo padrão.

Os autores Kostelecky e Samuel mostraram que há interações presentes em teoria das cordas que podem levar à quebra espontânea da simetria de Lorentz [3]. O Modelo Padrão Estendido (SME) surge como uma teoria de campo efetiva que contém tanto o Modelo Padrão como a Relatividade Geral, além de todos os operadores possíveis que quebram a simetria de Lorentz.

Dois trabalhos dos autores Colladay e Kostelecky, de 1997 e 1998, deram origem ao SME mínimo no espaço flat [4, 5]. Já em 2004, um trabalho publicado por Kostelecky e Alan expôs os termos líderes de quebra de simetria de Lorentz em espaços curvos para o SME mínimo [6]. No mesmo trabalho, os autores elaboram o *modelo de bumblebee*, que é a suposição da existência de um campo vetorial de valor esperado de vácuo não-nulo, o que

por si só quebra a simetria de Lorentz, por gerar direções privilegiadas no espaço-tempo.

Como exemplo de publicações que aplicam o modelo de bumblebee, podemos citar dois trabalhos em contextos distintos: o primeiro é dos autores Bertolami e Páramos (2005) [7], em gravitação, e o segundo trabalho é dos autores Capello e Páramos (2015) [8], o qual mostra o surgimento natural da constante cosmológica a partir do potencial do campo de bumblebee.

Em 2005, um trabalho publicado pelos autores Bertolami e Páramos apresenta uma nova solução de vácuo de um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, dada a existência de um campo vetorial de valor esperado de vácuo não-nulo. O autor impõe que o campo de bumblebee é paralelamente transportado na direção radial. Os resultados foram uma modificação no raio de Schwarzschild e uma diferença no potencial gravitacional newtoniano [7]. O objetivo de nosso trabalho é analisar a influência do modelo de bumblebee no mesmo espaço-tempo, mas partindo de uma outra premissa: no limite assintótico devemos ter um universo homogêneo e isotrópico. O que encontramos neste trabalho foi um campo de bumblebee em um espaço-tempo de Schwarzschild e uma incompatibilidade entre a premissa acima e a imposição de que o campo de bumblebee é paralelamente transportado na direção radial.

No capítulo 2 definiremos o espaço-tempo como uma variedade quadri-dimensional dotada de métrica Lorentziana. A partir das propriedades de uma variedade Lorentziana, derivaremos um conjunto de propriedades geométricas que descrevem a dinâmica do espaço-tempo: uma equação que descreve o movimento de uma partícula livre, a equação da geodésica, e outra equação que relaciona a geometria do espaço-tempo ao conteúdo de matéria, a famosa equação de Einstein. Finalmente, descreveremos o espaço de Schwarzschild, um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, com um corpo esfericamente simétrico de massa m centrado na origem. No capítulo 3 descreveremos o modelo de violação de simetria de Lorentz desenvolvido por Kostelecky e Samuel e apresentaremos o modelo de bumblebee, em que a violação é realizada por um quadri-vetor [6]. No capítulo 4, encontramos um campo de bumblebee em um espaço-tempo de métrica de Schwarzschild e a incompatibilidade acima citada.

Os resultados deste trabalho foram obtidos a partir dos softwares livres *SageMath* e *SageManifold* [9].

Capítulo 2

Gravitação Einsteiniana e Métrica de Schwarzschild

Neste capítulo, desenvolveremos as ideias iniciais da teoria da relatividade geral partindo da premissa que o espaço-tempo é uma variedade quadri-dimensional cuja métrica é de assinatura $(-, +, +, +)$. A linha de raciocínio apresentada aqui é baseada nos livros-textos dos autores Wald, [10], e Weinberg, [11]. Primeiramente definiremos variedade, métrica, vetores e tensores; após isso derivaremos duas propriedades muito importantes, que são curvatura e transporte paralelo. Nas seções posteriores aplicaremos essas ideias desenvolvidas no contexto da relatividade geral, o que produz três importantes resultados: a equação da geodésica, o limite newtoniano e a equação de Einstein. Por último aplicaremos a teoria desenvolvida em um universo de vácuo, estático e esfericamente simétrico, chamado de espaço de Schwarzschild.

2.1 Variedade, Campo Vetorial, Tensores e Métrica

Seja \mathcal{M} uma *variedade n -dimensional* dotado de *métrica g_{ab} Lorentziana*. O conjunto \mathcal{M} ser uma variedade n -dimensional significa que ele “localmente” possui as mesmas propriedades de \mathbb{R}^n , ou seja, para todo ponto $p \in \mathcal{M}$ existe um subconjunto aberto da variedade, $U_\alpha \subset \mathcal{M}$, tal que $p \in U_\alpha$, e existe um difeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$. Os físicos chamam a aplicação φ de *sistema de coordenadas*. Já a variedade \mathcal{M} ser Lorentziana significa que a métrica tem assinatura $(-, +, \dots, +)$. Falaremos mais a respeito disso no final da seção.

Definimos em \mathcal{M} o conjunto \mathcal{F} das funções suaves que levam pontos de \mathcal{M} a pontos em \mathbb{R} . Aqui uma função ser suave significa que ela possui tantas derivadas quanto necessário. Em linguagem matemática, $f \in \mathcal{F}$ é equivalente a $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, com f suave. Dado um ponto $p \in U_\alpha \subset \mathcal{M}$ e um difeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que o ponto $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$ possui coordenadas x^μ , ou $\varphi_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^n)$, onde $\{x^\mu\}$ são as *coordenadas naturais* de \mathbb{R}^n .

Em todo ponto $p \in \mathcal{M}$, podemos definir um espaço vetorial $T_p(\mathcal{M})$ tal que um vetor v pertencente a ele é uma aplicação linear $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma. Seja C

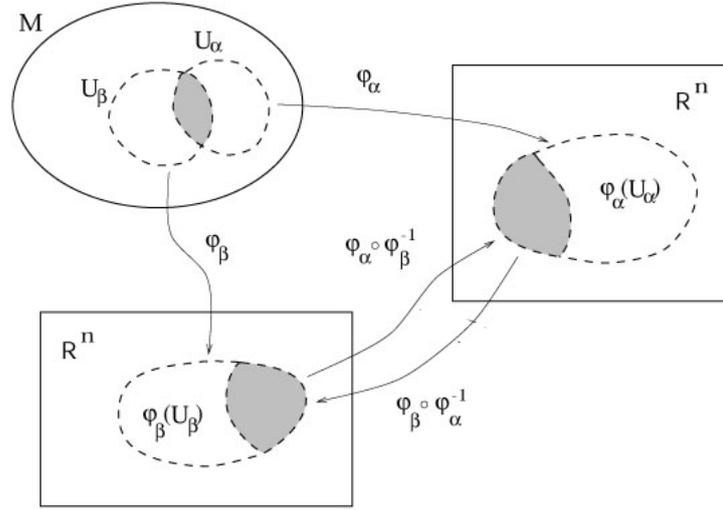


Figura 2.1: Representação esquemática de duas cartas φ_α e φ_β distintas que cobrem os abertos de $U_\alpha, U_\beta \subset \mathcal{M}$, respectivamente [10].

uma curva em \mathcal{M} parametrizada por t , está em p quando $t = 0$ e possui tangente v sobre o ponto em questão. Se $f \in \mathcal{F}$ está definido em p , o vetor v é uma aplicação

$$\begin{aligned}
 v[f]_p &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ C)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha))(C(t)) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha \circ C(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x(t)) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}
 \end{aligned}$$

onde $(x^1(t), \dots, x^n(t)) = x(t) = \varphi_\alpha(C(t))$ é a curva C em coordenadas x^μ . Em uma notação menos carregada,

$$v[f]_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \right)_{\varphi_\alpha(p)}, \quad (2.1)$$

onde o lado esquerdo da equação definimos em $U_\alpha \ni p$ e o lado direito da equação aplicamos em $\varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Por conveniência escrevemos $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ como apenas f . A curva $x(t) = \varphi_\alpha(C(t))$ pertence a \mathbb{R}^n e tem vetor-velocidade $dx^\mu(t)/dt$. Definamos $v_0 \equiv (dx^\mu(t)/dt)|_{t=0}$ e usemos tal notação ao longo do capítulo. Voltando à definição de vetor, veja que o lado direito da equação (2.1), se v_0 tem módulo 1, é a derivada direcional da função f em \mathbb{R}^n na direção v_0 e pode ser reescrito como $v_0 \cdot \vec{\nabla} f$:

$$v[f]_p = \left[v_0 \cdot \vec{\nabla} f \right]_{\varphi_\alpha(p)}. \quad (2.2)$$

Definamos aqui a aplicação $\varphi_\alpha^* : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, pondo $\varphi_\alpha^*(v) = v_0$, de acordo com (2.2). É imediato verificar que a aplicação φ_α^* é uma aplicação linear.

A primeira observação a ser feita é que tal definição de vetor não depende do sistema de coordenadas adotado. Sejam $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo, com $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, e $x^\nu(t) = \varphi_\beta(C(t))$ a curva $C(t)$ no sistema de coordenadas x^ν . Definimos $v_{0\beta} = dx^\nu(t)/dt$ e, pela regra da cadeia,

$$v_{0\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu}{dt}.$$

A aplicação $v[f]$ no sistema de coordenadas φ_β é então

$$v[f]_{\varphi_\beta} = \left[v_{0\beta} \cdot \vec{\nabla} f \right]_{\varphi_\beta(p)} = \frac{dx'^\nu}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} = \frac{dx'^\nu}{dt} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \left[v_{0\alpha} \cdot \vec{\nabla} f \right]_{\varphi_\alpha(p)} = v[f]_{\varphi_\alpha},$$

onde usamos a lei de transformação de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Comumente, $\{x^\mu\}$ é chamado de *as coordenadas naturais do sistema de coordenadas* φ_α . Pela equação acima, as componentes v^μ de um vetor $v \in T_p(\mathcal{M})$ em um sistema de coordenadas φ_α estão relacionadas com as componentes v'^ν do mesmo vetor v em um outro sistema de coordenadas φ_β da seguinte forma:

$$v'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu. \quad (2.3)$$

Reciprocamente, é possível mostrar que se temos um conjunto de funções escalares $\{v^\mu\}$ em um sistema de coordenadas φ que se transformam como as componentes de um vetor sob uma transformação de coordenadas, equação (2.3), então existe um único vetor v em $T_p(\mathcal{M})$ de componentes $\{x^\mu\}$ no sistema de coordenadas φ . Por conveniência, indicamos o vetor v como v^a . O índice em cima chamamos de *índice contravariante*.

Quando estendemos a definição de um vetor em um ponto p para uma região de \mathcal{M} , os coeficientes deixam de ser constantes e passam a ser funções em \mathcal{F} . O vetor passa a se chamar *campo vetorial*.

A próxima definição natural que surge é a base dual de $\{v_\mu\}$, o qual chamaremos de $\{dx^\mu\}$ e definiremos da seguinte forma:

$$dx^\mu(v_\nu) \equiv v_\nu(x^\mu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.4)$$

Pelas propriedades da derivada parcial, a aplicação (2.4) é linear. Chamaremos de 1-forma qualquer elemento do espaço vetorial formado pela base $\{dx^\mu\}$, ou seja, o elemento $\omega_a \in T_p^*(\mathcal{M})$ é uma 1-forma. O índice em baixo, ou *índice covariante*, é uma analogia à notação de vetores, pois ω é uma combinação linear dos elementos $\{dx^\mu\}$, ou $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Então ω também pode ser definido como uma aplicação linear $\omega : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Vejamos como

as componentes de uma 1-forma se transformam sob uma transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned}\omega'_{\mu'} v'^{\mu'} &= \omega(v) = \omega_{\mu} v^{\mu} = v^{\mu'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \omega_{\mu} \Rightarrow \\ \omega'_{\mu'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \omega_{\mu}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Analogamente aos vetores, se um conjunto de funções escalares $\{\omega_{\mu}\}$ em um sistema de coordenadas φ se transforma como as componentes de uma 1-forma sob uma transformação de coordenadas, equação (2.5), então existe uma única 1-forma ω em $T_p^*(\mathcal{M})$ de componentes $\{\omega_{\mu}\}$ no sistema de coordenadas φ . Também podemos estender a definição de uma 1-forma de um ponto p para uma região de \mathcal{M} , o que chamamos de *campo de 1-forma*, e os coeficientes passam a ser funções de \mathcal{F} .

Agora estamos em plena condição de definir tensor na variedade. Um tensor T no ponto $p \in \mathcal{M}$ é um elemento do espaço multivetorial $\mathcal{T}(k, l)$ definido como uma aplicação linear

$$T : \underbrace{T_p^*(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes T_p^*(\mathcal{M})}_{k \text{ vezes}} \otimes \underbrace{T_p(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes T_p(\mathcal{M})}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.\tag{2.6}$$

Podemos ainda escrever T na notação indicial:

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l}.$$

Dizemos que um tensor T é do tipo (k, l) quando $T \in \mathcal{T}(k, l)$ em componentes possui k índices contravariantes e l índices covariantes. Podemos representar T por $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$.

Naturalmente, os coeficientes deixam de ser constantes e passam a ser funções em \mathcal{F} quando estendemos a definição de tensor de um ponto $p \in \mathcal{M}$ para a uma região da variedade, e o tensor passa a se chamar *campo tensorial*.

Dado um sistema de coordenadas φ_{α} de coordenadas naturais $\{x^{\mu}\}$ e outro sistema de coordenadas φ_{β} de coordenadas naturais $\{x'^{\mu'}\}$, as componentes de um tensor $T \in \mathcal{T}(k, l)$ se transformam da seguinte forma:

$$T'^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}_{\nu'_1 \cdots \nu'_l} = \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}.\tag{2.7}$$

Assim como vetores e 1-formas, se funções escalares $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ se transformam da forma acima, então existe um único tensor T na variedade \mathcal{M} no ponto p de componentes $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ no sistema de coordenadas em questão.

Ao longo do trabalho, usaremos em demasia quatro tipos de operações tensoriais. A primeira é contração, também chamada de traço, que leva um tensor de $\mathcal{T}(k, l)$ em um tensor em $\mathcal{T}(k-1, l-1)$. Se $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l} \in \mathcal{T}(k, l)$, então podemos escrever suas componentes em um sistema de coordenadas φ como $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ e contrair o i -ésimo

índice contravariante, ($1 \leq i \leq k$), com o j -ésimo índice covariante, ($1 \leq j \leq l$), assim:

$$\sum_{\lambda=1}^n T^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_l}.$$

Provemos que as componentes de um tensor contraído ainda se transformam como tensores.

$$\begin{aligned} T^{\mu'_1 \dots \lambda \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \lambda \dots \nu'_l} &= \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu_i}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_j}}{\partial x^{\lambda}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_l} \\ &= \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_l}, \end{aligned}$$

onde usamos a relação

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \delta_{\mu}^{\nu}.$$

Portanto $T^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_l}$ são componentes de um tensor em $\mathcal{T}(k-1, l-1)$ e o denotaremos por $T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}$. A segunda operação tensorial é o produto exterior de dois tensores. Sejam A um tensor em $\mathcal{T}(k, l)$ e B um tensor em $\mathcal{T}(k', l')$ definidos em um mesmo ponto $p \in \mathcal{M}$. O produto exterior $A \otimes B$ é um tensor T em $\mathcal{T}(k+k', l+l')$ no ponto $p \in \mathcal{M}$ e em componentes é escrito como

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_l \nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}} = A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} B^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}},$$

o que facilmente pode ser demonstrado se transformar como as componentes de um tensor. A terceira operação é a simetrização de índices, que consiste em simetrizar dois índices de um tensor, ambos covariantes ou contravariantes, mas nunca um covariante com outro contravariante. Se T_{ab} é um tensor do tipo $(0, 2)$, então $T_{(ab)}$, definido por

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}),$$

se transforma como (2.7) e, portanto, é um tensor do tipo $(0, 2)$. O número de índices independentes, ou graus de liberdade, de um tensor do tipo $(0, 2)$ é n^2 , já um tensor do mesmo tipo simetrizado é $n(n+1)/2$. A quarta e última operação é a antissimetrização de índices de um tensor, que consiste em antissimetrizar dois ou mais índices, todos covariantes ou todos contravariantes. Iniciemos com um tensor T_{ab} do tipo $(0, 2)$. O tensor $T_{[ab]}$, definido por

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}),$$

também se transforma como (2.7). No caso em questão, o número de graus de liberdade é $n(n-1)/2$. Para antissimetrizarmos k índices de um tensor, $T_{[a_1, \dots, a_k] \dots}$, precisamos

inicialmente saber duas informações. A primeira é que o número de permutações possíveis de k índices é $k!$. A segunda é que uma permutação ímpar (par) consiste em permutar um número ímpar (par) de índices, ou “trocar” de posição uma quantidade ímpar (par) de pares de índices. Finalmente temos:

$$T_{[a_1, \dots, a_k] \dots} = \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\text{par}\{a_1, \dots, a_k\}} T_{\{a_1, \dots, a_k\} \dots} - \sum_{\text{ímpar}\{a_1, \dots, a_k\}} T_{\{a_1, \dots, a_k\} \dots} \right\},$$

onde ímpar(par) $\{a_1, \dots, a_k\}$ indica uma soma sobre todas as permutações ímpares (pares) possíveis dos índices $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Finalmente vamos definir métrica. Métrica g é um operador bilinear de $T_p(\mathcal{M}) \otimes T_p(\mathcal{M})$ em reais, simétrico e não-degenerado.

1) Bilinear significa que para todo $v_1, v_2, w_1, w_2 \in T_p(\mathcal{M})$ e todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} g(v_1, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 g(v_1, w_1) + \beta_2 g(v_1, w_2), \\ g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w_1) &= \alpha_1 g(v_1, w_1) + \alpha_2 g(v_2, w_1). \end{aligned}$$

2) Simétrico significa que

$$g(v, w) = g(w, v).$$

3) Não-degenerado significa que se para todo $v \in T_p(\mathcal{M})$ tem-se

$$g(v, w) = 0,$$

então $w = 0$.

Pela definição de tensores, a métrica g é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$, simétrico e não-degenerado em uma variedade \mathcal{M} . Por ser um tensor do tipo $(0, 2)$, podemos representá-lo simplesmente por g_{ab} . Em um sistema de coordenadas, a métrica é dada por

$$d\mathcal{S}^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde dx^μ são deslocamentos infinitesimais em \mathbb{R}^n . O valor de $d\mathcal{S}^2$ pode ser positivo, nulo ou negativo.

Veja que $g(v, \cdot)$ é uma operação linear que leva vetores de $T_p(\mathcal{M})$ em reais. Portanto $g(v, \cdot)$ é uma 1-forma. Por conveniência, se v^a é um vetor em $T_p(\mathcal{M})$, então a 1-forma $g(v, \cdot)$ pode ser reescrita como $v_b \equiv v^a g_{ab}$.

Finalmente, se uma variedade n -dimensional \mathcal{M} é dotada de uma métrica g , então sempre é possível tomar uma base ortonormal $\{v_\mu\}$ de $T_p(\mathcal{M})$, em todo ponto $p \in \mathcal{M}$, de forma que $g(v_\mu, v_\nu) = 0$, para $\mu \neq \nu$, e $g(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$. Provemos por indução.

Para $n = 2$, se $\{v, v'\}$ forma uma base de $T_p(\mathcal{M})$, então $\{v, u\}$, com $u = v' - \frac{g(v, v')}{g(v, v)}v$, forma uma base ortogonal de $T_p(\mathcal{M})$. Redefinimos $v \rightarrow \sqrt{\frac{1}{g(v, v)}}v$, $u \rightarrow \sqrt{\frac{1}{g(u, u)}}u$ e temos uma base ortogonal.

Agora suponhamos que para $n = k$ a afirmação seja verdadeira. Dada uma variedade $(k + 1)$ -dimensional \mathcal{M} , dotada de métrica g , e dada uma base $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}\}$ de $T_p(\mathcal{M})$, com $g(w_\mu, w_\mu) = \pm 1$, o conjunto $\{w_1, \dots, w_k\}$ forma uma base de $T_p(\mathcal{M}')$, onde \mathcal{M}' é uma sub-variedade de \mathcal{M} , k -dimensional e dotada de métrica g . Por hipótese, existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_k\}$ de $T_p(\mathcal{M}')$. Se definirmos $v'_{k+1} = w_{k+1} - \frac{g(w_{k+1}, v_1)}{g(v_1, v_1)}v_1 - \dots - \frac{g(w_{k+1}, v_k)}{g(v_k, v_k)}v_k$, o conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$, com $v_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{g(v'_{k+1}, v'_{k+1})}}v'_{k+1}$, formará uma base de ortonormal de $T_p(\mathcal{M})$ e a afirmação está provada.

A assinatura da métrica é definida pela quantidade de sinais $g(v_\mu, v_\mu) = +1$ e $g(v_\mu, v_\mu) = -1$. É possível provar que a assinatura da métrica independe da base ortonormal escolhida, portanto a assinatura é uma propriedade intrínseca da variedade. Se todos os sinais forem positivos, $(+, \dots, +)$, teremos uma métrica Riemanniana, já se a assinatura for $(-, +, \dots, +)$, teremos uma métrica Lorentziana, que é a assinatura da métrica de um *espaço-tempo*. Espaço-tempo é uma variedade física 4-dimensional que nos ateremos ao longo de nosso trabalho.

2.2 Derivada Covariante, Conexão Afim e Transporte Paralelo

Definimos um operador de diferenciação ∇_a em uma variedade \mathcal{M} como um mapa que toma tensores do tipo (k, l) e leva em tensores do tipo $(k, l + 1)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. Linearidade: para todo $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_c(\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}.$$

2. Regra de Leibnitz: para todo tensor $A, B \in \mathcal{T}$, vale a regra

$$\nabla_c(A^{a_1 \dots}_{b_1 \dots} B^{a'_1 \dots}_{b'_1 \dots}) = (\nabla_c A^{a_1 \dots}_{b_1 \dots}) B^{a'_1 \dots}_{b'_1 \dots} + A^{a_1 \dots}_{b_1 \dots} (\nabla_c B^{a'_1 \dots}_{b'_1 \dots}).$$

3. Comutatividade com contração:

$$\nabla_c(A^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}) = \nabla_c A^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}.$$

4. Consistência com a notação de vetores tangentes como derivadas direcionais sobre campos escalares: para todo $f \in \mathcal{F}$ e todo $t^a \in T_p(\mathcal{M})$,

$$t(f) = t^a \nabla_a f.$$

5. Sem torção: para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f.$$

O item (5) nos assegura que o espaço é livre de torção.

Seja φ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de \mathcal{M} e seja $\{x^\mu\}$ as coordenadas naturais associadas. Assim, em uma região coberta por φ , podemos definir um operador diferencial ∂_a , chamado de *derivada ordinária*, da seguinte forma. Para qualquer tensor suave $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}(k, l)$, tomamos ele em componentes, $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$, no sistema de bases em questão e definimos $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ como o tensor de componentes $\partial T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} / \partial x^\sigma$. Todas as cinco propriedades são satisfeitas pelas propriedades usuais da derivada parcial. Logo, dado um sistema de coordenadas φ , podemos construir um operador diferencial ∂_a associado. Tal operador diferencial é dependente do sistema de coordenadas escolhido, não da estrutura da variedade.

O primeiro resultado imediato que podemos extrair das propriedades de um operador de diferenciação é relacionado à comutação de dois vetores v^a e t^a em \mathcal{M} . Seja f uma função suave em \mathcal{M} , assim:

$$v(t(f)) = v^a \nabla_a (t^b \nabla_b f) = v^a t^b \partial_a \partial_b f + v^a \nabla_a t^b \partial_b f$$

e portanto o comutador de v^a e t^a é

$$\begin{aligned} [v, t]^b \nabla_b f &= [v, t](f) = v(t(f)) - t(v(f)) = [v^a \nabla_a t^b - t^a \nabla_a v^b] \partial_b f \Rightarrow \\ [v, t]^b &= v^a \nabla_a t^b - t^a \nabla_a v^b \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para sabermos o quão único são os operadores diferenciais, analisemos a diferença $\nabla_a - \tilde{\nabla}_a$, onde ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$ são operadores diferenciais. Primeiramente apliquemos sobre uma função suave f :

$$t^a \tilde{\nabla}_a f = t(f) = t^a \nabla_a f \Rightarrow \tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f \quad (2.9)$$

Agora investiguemos uma possível diferença sobre tensores de rank maior. Começemos com uma 1-forma. Seja ω_a um campo de 1-forma e consideremos a diferença $\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b)$ para um campo escalar f arbitrário.

$$\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) = (\tilde{\nabla}_a f)\omega_b + f\tilde{\nabla}_a\omega_b - (\nabla_a f)\omega_b - f\nabla_a\omega_b = f(\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b)$$

Naturalmente, dado um ponto $p \in \mathcal{M}$, o valor de $\nabla_a\omega_b$ em p depende do valor de ω_a em p e na vizinhança de p . Provemos que $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ em p depende apenas de p . Sejam ω'_a e ω_a campos de 1-forma definidos na vizinhança de p e iguais em tal ponto. Assim

podemos escrever

$$\omega'_b - \omega_b = \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}$$

onde $\mu_b^{(\alpha)}$ são campos de 1-forma e $f_{(\alpha)}$ são funções suaves definidos na vizinhança de p , com $f_{(\alpha)}(p) = 0$ para todo $\alpha = 1, \dots, n$. Assim sobre o ponto p temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b) - \nabla_a(\tilde{\omega}_b - \omega_b) &= \sum_{\alpha=1}^n \{ \tilde{\nabla}_a(f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}) \} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \{ \tilde{\nabla}_a \mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a \mu_b^{(\alpha)} \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ define um mapa de 1-formas em p em tensores do tipo $(0, 2)$ em p . Pela propriedade (1), esse mapa é linear. Conseqüentemente $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ define um tensor do tipo $(1, 2)$ em p , que denotaremos C^c_{ab} . Assim mostramos que dado dois operadores diferenciais $\tilde{\nabla}_a$ e ∇_a existe um campo tensorial C^c_{ab} tal que

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c. \quad (2.10)$$

Usando a propriedade (5) combinada a (2.10) e (2.9), podemos mostrar que C^c_{ab} é simétrico nos índices covariantes. Veja:

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c_{ab} \nabla_c f$$

Pela propriedade (5) o dois primeiros termos são simétricos. Conseqüentemente

$$C^c_{ab} = C^c_{ba}$$

Para determinarmos a relação entre $\tilde{\nabla}_a$ e ∇_a ao aplicarmos sobre um campo vetorial, usemos a propriedade (5) e a regra de Leibnitz. Sejam t^a e ω_a campos tensoriais arbitrários. Temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) \\ &= t^b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b + \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b \\ &= t^b C^c_{ab} \omega_c + \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b \\ &= \omega_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C^b_{ac} t^c] \end{aligned}$$

Como o ω_a é um campo de 1-forma qualquer, temos que o termo entre colchetes é nulo. Portanto

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b_{ac} t^c \quad (2.11)$$

Para um campo tensorial $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}(k, l)$ arbitrário, podemos provar por indução a relação a seguir:

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{i=1}^k C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_{j=1}^l C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l} \quad (2.12)$$

Portanto a diferença entre dois operadores diferenciais é completamente definida por um campo tensorial C^c_{ab} . Por outro lado, dado um campo tensorial C^c_{ab} e um operador diferencial $\tilde{\nabla}_a$ arbitrários, se (2.12) é válido, então ∇_a satisfaz as cinco propriedades de um operador diferencial. Isso mostra que existe uma grande liberdade de escolha envolvendo um operador de diferenciação, visto que em uma variedade n-dimensional C^c_{ab} possui $n^2(n+1)/2$ componentes independentes a serem determinadas em cada ponto.

O termo C^c_{ab} é chamado de conexão afim, um nome bastante apropriado visto que “conecta” diferentes operadores diferenciais e é nulo quando os operadores são iguais.

Talvez a aplicação mais importante da equação (2.12) seja o caso em que $\tilde{\nabla}_a$ é o operador de diferenciação ordinário ∂_a . Neste caso, o tensor C^c_{ab} é denotado por Γ^c_{ab} , chamado de *símbolo de Christoffel*. Visto que a derivada ordinária depende da escolha do sistema de coordenadas, o símbolo de Christoffel depende de ∇_a e do sistema de coordenadas, portanto não associado à estrutura da variedade. Caso mudemos de coordenadas, o tensor Γ^c_{ab} também mudará para Γ'^c_{ab} , logo as componentes de Γ^c_{ab} não estão relacionadas com as componentes de Γ'^c_{ab} pela lei de transformação tensorial, visto que mudamos tanto de tensor como de coordenadas. Se soubermos como computar Γ^c_{ab} , saberemos também como computar ∇_a , visto que a derivada parcial é conhecida.

Agora vamos estudar uma noção de transporte paralelo, dado um operador diferencial ∇_a . Dizemos que um campo vetorial v^a é paralelamente transportado ao longo de uma curva C de tangente t^a se

$$t^a \nabla_a v^b = 0$$

De forma genérica, dizemos que $T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l}$ é paralelamente transportado ao longo de uma curva C de tangente t^a se

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0$$

Mas um operador diferencial não necessariamente está conectado à estrutura da variedade. Entretanto, se definirmos uma métrica g_{ab} na variedade, surge uma escolha natural do operador de diferenciação. Uma propriedade do transporte paralelo é que se v^a e w^a são

transportados paralelamente ao longo de uma curva C de tangente t^a , então $g(v, w) = g_{ab}v^a w^b$ também é paralelamente transportado. Portanto

$$\begin{aligned} t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) &= 0 \Rightarrow \\ \nabla_a g_{bc} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Essa é a condição adicional sobre ∇_a para definirmos um operador de diferenciação conectado à métrica e, portanto, à estrutura da variedade. A esse operador diferencial particular daremos o nome de *derivada covariante*. Daqui em diante nos referiremos a ∇_a como derivada covariante.

Provemos que a derivada covariante é única. Seja $\tilde{\nabla}_a$ um operador diferencial qualquer. Assim:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} \Rightarrow \\ C^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto $\tilde{\nabla}_a g_{bc} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\nabla}_a = \nabla_a$ e a unicidade está provada. No caso especial em que $\tilde{\nabla}_a = \partial_a$, a conexão afim recebe o nome de *símbolo de Christoffel*, representada por $\Gamma^c{}_{ab}$, e, pela equação (2.14), é dada por

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \right\}. \quad (2.15)$$

De forma geral, se um vetor v^a é paralelamente transportado ao longo de uma curva C de tangente t^a , então

$$0 = t^a \nabla_a v^b = t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b{}_{ac} v^c. \quad (2.16)$$

Em componentes, seja t o parâmetro da curva C . A equação acima fica

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} t^\mu v^\lambda = 0. \quad (2.17)$$

Este é um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem e homogêneas. Dado o valor de v^μ em algum ponto p da curva, o valor de v^μ ao longo de toda a curva é unicamente determinado pela equação (2.17).

Naturalmente o tensor t^a é paralelamente transportado, se impusermos $t_a t^a = \text{constante}$. Tomando o caso particular $v^a = t^a$ e sabendo que o vetor tangente pode ser escrito em componentes como $t^\mu = dx^\mu/dt$, a equação (2.17) fica

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

Esta é a *equação da geodésica*. Normalmente o parâmetro t é escrito como τ , chamado de *tempo próprio*. Mais à frente falaremos a respeito.

2.3 Curvatura

Transportar paralelamente um vetor v^a em um ponto p a um ponto q em geral depende do caminho que liga os dois pontos. Podemos usar a dependência de caminho do transporte paralelo para definir uma noção intrínseca de curvatura. Primeiramente vamos definir o tensor de curvatura em termos da não-comutatividade da aplicação de duas derivadas covariantes sobre uma 1-forma. Então vamos dar um exemplo em um pequeno loop de que tal tensor de curvatura está relacionado à falha do vetor em retornar ao valor original ao percorrer o loop.

Primeiramente apliquemos duas derivadas covariantes no produto $f\omega_c$, onde $f \in \mathcal{F}$ e ω uma 1-forma, e usemos a regra de Leibnitz sucessivas vezes:

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f\omega_c) &= (\nabla_a \nabla_b f)\omega_c + \nabla_b f \nabla_a \omega_c + \nabla_a f \nabla_b \omega_c + f \nabla_a \nabla_b \omega_c \Rightarrow \\ (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) &= f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c.\end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos para encontrar a conexão afim, o tensor $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$ no ponto p só depende do valor de ω_c no ponto p . Consequentemente $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$ define um mapa linear de vetores duais em p em tensores do tipo $(0,3)$ em p ; isto é, a ação de um tensor do tipo $(1,3)$. Logo mostramos que existe um campo tensorial $R_{abc}{}^d$ tal que para todo campo vetorial dual ω_c , temos

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (2.19)$$

Agora vejamos como o tensor de curvatura está relacionado à falha em um vetor retornar ao seu valor inicial após ser paralelamente transportado em um loop. Seja p o ponto inicial, onde inicialmente temos o vetor v^a . Agora tomemos uma superfície de duas dimensões tangente a p e inteiramente contida na variedade. Na superfície, parametrizada por T e S de forma que $p = (0,0)$, vamos transportar paralelamente v^a pelos caminhos

- $\gamma_1: S = 0$ e $T = 0 \rightarrow \Delta T$,
- $\gamma_2: T = \Delta T$ e $S = 0 \rightarrow \Delta S$,
- $\gamma_3: S = \Delta S$ e $T = \Delta T \rightarrow 0$,
- $\gamma_4: T = 0$ e $S = \Delta S \rightarrow 0$,

formado assim um loop. Em todos os caminhos é válida a equação

$$t^a \nabla_a v^b = 0,$$

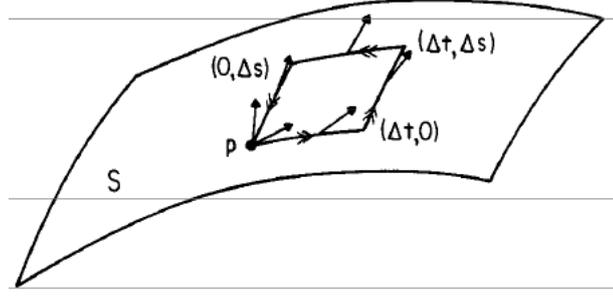


Figura 2.2: Transporte paralelo do vetor v^a ao longo de um loop. Como veremos mais adiante, a variação do vetor ao percorrer o loop em segunda ordem para ΔS e ΔT é proporcional ao tensor de Riemann [10].

onde t^a é o vetor tangente à curva, com $t^a = T^a$ em γ_1 e γ_3 e $t^a = S^a$ em γ_2 e γ_4 . Uma maneira engenhosa de estudar a variação do vetor após o loop é por meio de um campo de 1-forma genérico ω_a . Naturalmente, por ser um campo vetorial, o valor de ω_a só depende do ponto em \mathcal{M} . Agora vamos analisar a variação do produto $v^a \omega_a$ ao longo dos caminhos. Para isso basta calcularmos a variação no caminho 1, os demais caminhos são análogos.

$$\begin{aligned}
 \delta(v^a \omega_a) &= (v^a \omega_a)|_{(\Delta T, 0)} - (v^a \omega_a)|_{(0, 0)} \\
 &= (v^a \omega_a)|_{(0, 0)} + T^b \nabla_b (v^a \omega_a)|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} \Delta T - (v^a \omega_a)|_{(0, 0)} \\
 &= T^b \nabla_b (v^a \omega_a)|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} \Delta T \\
 &= v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} \Delta T
 \end{aligned}$$

A variação dos caminhos 1 e 3 é

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta T \left\{ v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} - v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, \Delta S)} \right\}$$

A variação nos caminhos 1 e 4 é análoga. Veja que se fizermos $\Delta S \rightarrow 0$, a variação será nula. Portanto não temos variação em primeira ordem. Para calcular a variação em segunda ordem basta expandir o segundo termo entre chaves em primeira ordem, seguindo o caminho $T = \Delta T/2$, $S = 0 \rightarrow \Delta T$. Veja:

$$\begin{aligned}
 v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, \Delta S)} &= v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} + S^c \nabla_c (v^a T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})} \Delta S \\
 &= v^a T^b \nabla_b \omega_a|_{(\frac{\Delta T}{2}, 0)} + v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})} \Delta S
 \end{aligned}$$

logo

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta T \Delta S v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})}$$

Finalmente a variação total do produto $v^a \omega_a$ em um loop é

$$\begin{aligned} \delta(v^a \omega_a) &= \Delta T \Delta S \left\{ v^a T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a) \Big|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})} - v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \Big|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})} \right\} \\ &= \Delta T \Delta S v^a \left\{ [T^c \nabla_c S^b - S^c \nabla_c T^b] \nabla_b \omega_a + T^c S^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) \omega_a \right\} \Big|_{(\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta S}{2})} \end{aligned}$$

O termo entre colchetes é $[T, S]^b$, por (2.8). Tomando a superfície em um sistema de coordenadas natural (t, s) tal que $(T = t, S = s)$, temos que $T^a = \partial_t$ e $S^a = \partial_s$ e, pelas propriedades da derivada parcial, os vetores comutam. Logo o termo em questão é nulo. Finalmente a variação, usando (2.19), fica

$$\delta(v^a \omega_a) = \Delta T \Delta S v^a T^b S^c R_{bca}{}^d \omega_d$$

Mas ω_a não sofre variação e é qualquer, logo

$$\delta v^a = \Delta T \Delta S v^b T^c S^d R_{cdb}{}^a$$

Assim o tensor de curvatura está relacionado à falha de um vetor retornar ao valor original após ser paralelamente transportado em um loop.

Agora calculemos uma expressão análoga a (2.19) para vetores. Sejam t^a um campo vetorial e ω_a um campo de 1-forma quaisquer em \mathcal{M} . Pelas propriedades de vetor, o produto $t^a \omega_a$ representa uma função (suave) em \mathcal{M} , portanto

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (t^c \omega_c) \\ &= t^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c + \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c \\ &\quad + \nabla_b t^c \nabla_a \omega_c + \nabla_a t^c \nabla_b \omega_c - \nabla_a t^c \nabla_b \omega_c - \nabla_b t^c \nabla_a \omega_c \end{aligned}$$

Finalmente usamos a equação (2.19) e chegamos à relação

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abd}{}^c t^d \quad (2.20)$$

Podemos generalizar as expressões (2.19) e (2.20) para um tensor do tipo (k, l) qualquer via indução. De forma geral,

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l} \quad (2.21)$$

Agora vamos estabelecer cinco propriedades de simetria do tensor de Riemann. São elas:

- 1) $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$
- 2) $R_{[abc]}{}^d = 0$
- 3) $R_{abcd} = -R_{abdc}$

$$4) R_{abcd} = R_{cdab}$$

$$5) \textit{ identidade de Bianchi: } \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$$

A primeira propriedade é uma consequência imediata de (2.19). Para provar a segunda propriedade, vamos usar a equação (2.15) e o fato de o símbolo de Christoffel ser simétrico nos índices covariantes. Seja ω_a um campo de 1-forma qualquer. Assim, usando a equação (2.12), temos que

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = \partial_{[a} \nabla_b \omega_c] - \Gamma^e{}_{[ab} \nabla_{|e|} \omega_c] - \Gamma^e{}_{[ac} \nabla_b] \omega_e = \partial_{[a} (\partial_b \omega_c] - \Gamma^d{}_{bc]} \omega_d) = 0$$

mas

$$R_{[abc]}{}^d \omega_d = (\nabla_{[a} \nabla_b - \nabla_{[b} \nabla_a]) \omega_c] = 2 \nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = 0$$

e finalmente como ω_a é qualquer, a propriedade (2) é satisfeita. Para provar a propriedade (3) vamos usar a relação (2.13). Veja:

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}$$

A quarta propriedade provamos a partir das demais. Veja:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{[abc]d} = \frac{1}{3!} (R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} - R_{bacd} - R_{cbad} - R_{acbd}) \\ &= \frac{2}{3!} (R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad}) \end{aligned}$$

Agora apliquemos sucessivamente os resultados já obtidos:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{[abc]d} \\ &= R_{[abc]d} - R_{[cda]b} = R_{[dab]c} - R_{[bcd]a} \\ &= R_{abcd} + R_{bcad} - R_{cdab} - R_{dacb} = R_{dabc} + R_{abdc} - R_{bcd a} - R_{cdba} \\ &= R_{abcd} - R_{cdab} + R_{bcad} - R_{adbc} = R_{abcd} - R_{cdab} - R_{bcad} + R_{adbc} \\ &= R_{abcd} - R_{cdab} \end{aligned}$$

Finalmente a quinta e última propriedade vamos obter de

$$\text{i) } (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (\nabla_c \omega_d) = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abc}{}^e \nabla_c \omega_e$$

$$\text{ii) } \nabla_a (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) \omega_d = \omega_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a \omega_e$$

Veja que $\nabla_{[a} (\nabla_b \nabla_c] - \nabla_c \nabla_b]) = (\nabla_{[a} \nabla_b - \nabla_{[b} \nabla_a]) \nabla_c]$ logo as expressões (i) e (ii) antissimetrizadas são equivalentes. Portanto

$$\begin{aligned} R_{[abc]}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{[ab|d]}{}^e \nabla_c] \omega_e &= \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{[bc|d]}{}^e \nabla_a] \omega_e \Rightarrow \\ \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e &= 0 \end{aligned}$$

e novamente por ω_a ser qualquer, a propriedade (5) é satisfeita.

É interessante analisarmos os traços possíveis do tensor de curvatura. Iniciemos com $R_{abc}{}^c$:

$$R_{abc}{}^c = R_{abcd}g^{dc} = R_{ab[cd]}g^{(cd)} = 0$$

O mesmo vale para $R^a{}_{abc}$. Definimos o *tensor de Ricci* da seguinte forma:

$$R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b = R^b{}_{abc} \quad (2.22)$$

O escalar de curvatura é o traço do tensor de Ricci:

$$R \equiv R^a{}_a = R_a{}^a \quad (2.23)$$

A última propriedade que vamos obter aqui é bastante útil em gravitação. A partir da identidade de Bianchi fazemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^c + \nabla_c R_{abd}{}^c + \nabla_b R_{cad}{}^c \\ &= \nabla_a R_{bd} + \nabla_c R_{abd}{}^c - \nabla_b R_{ad} \\ &= \nabla_a R - \nabla_c R_a{}^c - \nabla_b R_a{}^b \\ &= \nabla_c \left(\frac{1}{2} \delta_a{}^c R - R_a{}^c \right) \end{aligned}$$

O *tensor de Einstein* é definido como

$$G^a{}_b \equiv R^a{}_b - \frac{1}{2} \delta^a{}_b R. \quad (2.24)$$

Veja que o tensor de Einstein é simétrico. Finalmente temos a relação

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (2.25)$$

Esta equação representa uma conservação, como ficará mais claro adiante.

Finalmente vamos computar a curvatura. A maneira que faremos é por um sistema de coordenadas. Inicialmente escolhemos um sistema de coordenadas, então escrevemos o tensor de curvatura em termos da derivada ordinária e do símbolo de Christoffel. De uma forma direta,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_{cba}{}^d \omega_d &= \nabla_{[c} \nabla_{b]} \omega_a \\ &= \partial_{[c} \partial_{b]} \omega_a - \partial_{[c} (\Gamma^d{}_{b]a} \omega_d) - \Gamma^d{}_{[cb]} \nabla_d \omega_a - \Gamma^e{}_{a[c} (\partial_{b]} \omega_e - \Gamma^d{}_{b]e} \omega_d) \\ &= -\partial_{[c} \Gamma^d{}_{b]a} + \Gamma^e{}_{a[c} \Gamma^d{}_{b]e}. \end{aligned}$$

Finalmente chegamos à expressão

$$R_{abc}{}^d = 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]e} - 2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c}. \quad (2.26)$$

Esta expressão é bastante útil tanto para encontrarmos um limite Newtoniano quanto para derivarmos a equação de Einstein.

2.4 Geodésica e Limite Newtoniano

A geodésica é uma equação que descreve o movimento de uma partícula livre em um dado espaço-tempo. Já adiantamos que a equação propriamente dita é (2.18), mas agora buscaremos derivá-la pelo princípio variacional. Por uma questão de conveniência, adotaremos um sistema de coordenadas φ de coordenadas naturais $\{x^\mu\}$. Naturalmente é necessário primeiro definir uma ação a ser extremizada e, para isso, vamos escrever $d\tau^2$:

$$-d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.27)$$

onde $-d\tau^2$ é uma grandeza chamada intervalo e pode ser negativa (tipo-tempo), nula (tipo-luz) ou positiva (tipo-espaço). Esta grandeza se transforma de acordo com a transformação tensorial em componentes, por ser uma contração de vetores com um tensor e, portanto, é invariante sob transformação de coordenadas. Além disso, ela define a métrica g_{ab} do espaço-tempo. Sejam p e q dois pontos no espaço-tempo e C uma curva qualquer que liga os dois pontos. Queremos a curva que extremize a grandeza τ , chamada tempo próprio e definida por

$$\tau = \int_p^q d\tau. \quad (2.28)$$

Observação: somente é definido o tempo próprio de curvas que conservem o sinal da grandeza intervalo. Se o sinal for negativo, a curva é do tipo-tempo, se positivo, tipo-espaço e se nula, tipo-luz. Em termos da métrica, $d\tau$ pode ser escrito em termos do parâmetro t da curva C como

$$d\tau = \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right|} dt$$

e finalmente a ação pode ser reescrita como

$$\tau = \int_0^T \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right|} dt,$$

onde 0 e T são os valores de t nos pontos p e q , respectivamente. Por simplicidade, tomaremos \pm ao invés de módulo, o que facilita no manuseio. Variando a ação, temos:

$$\delta\tau = \pm \int \left(\pm g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2} \left[2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{d(\delta x^\nu)}{dt} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right] dt.$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar como parâmetro $t = \tau$, visto que temos uma liberdade na escolha do parâmetro da curva. Assim

$$d\tau = \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right|} d\tau \Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \pm 1.$$

Por outro lado,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu \right) - \delta x^\nu \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right).$$

No primeiro termo usamos o princípio fundamental do cálculo ao integrá-lo e, por não haver variação nos extremos, concluímos que é zero. Finalmente extremizando a ação ($\delta\tau = 0$) temos:

$$\int \left[-\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\sigma d\tau = 0.$$

Como a variação δx^μ da curva é qualquer, concluímos que o termo entre colchetes é zero. Expandindo o termo em questão,

$$-g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

A partir da equação (2.14), em componentes, e após algumas manipulações algébricas, chegamos à equação da geodésica (2.18). Esta é a equação que rege o movimento de partículas livres em um espaço-tempo. A partir dela procuraremos relacionar a tão bem-sucedida gravitação Newtoniana à métrica do espaço-tempo.

No limite Newtoniano devemos reescrever as equações em termos da velocidade da luz c e tomar o limite $c \rightarrow \infty$, haja vista ser muito maior que as velocidades envolvidas e as interações ocorrerem de forma instantânea. Também o tempo é tomado como absoluto, o que implica $\tau = t$, ou seja, a coordenada temporal é o tempo próprio. Em outras palavras,

$$\frac{dx^i}{d\tau} \rightarrow \frac{dx^i}{d(c\tau)} \ll \frac{dt}{d\tau} \approx 1.$$

Também no limite Newtoniano os campos são estáticos, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\vec{x})$. Assim a

equação da geodésica fica

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{dx^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
&= \frac{dx^i}{dt^2} + \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right\} \\
&= \frac{dx^i}{dt^2} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Como o espaço tempo é aproximadamente flat, podemos escrever a métrica como aproximadamente a métrica de Minkowski mais uma pequena perturbação, ou seja:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(\vec{x}) &= \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) & |\gamma_{\mu\nu}| &\ll 1, \\
g^{\mu\nu}(\vec{x}) &= \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}(\vec{x}) & |\gamma^{\mu\nu}| &\ll 1,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica, cuja inversa é $\gamma^{\mu\nu}$. Finalmente a equação de movimento, em forma vetorial, é

$$\frac{d\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla \gamma_{00}. \tag{2.30}$$

Mas a equação equivalente na teoria Newtoniana é

$$\frac{d\vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \tag{2.31}$$

onde ϕ é o potencial gravitacional dado por $\phi = -GM/r$. Comparando os termos, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{00} &= -2\phi \Rightarrow \\
g_{00} &= -(1 + 2\phi).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Esta é a primeira relação entre a relatividade geral e a gravitação de Newton. Na próxima seção ela será usada para derivar a equação de Einstein.

2.5 Equação de Einstein

Vamos nesta seção encontrar uma equação equivalente à equação de Poisson na teoria Newtoniana. A equação de Poisson é

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \tag{2.33}$$

onde ϕ já definimos como o potencial gravitacional Newtoniano, G é a constante gravitacional e ρ é a densidade de massa. Como estamos lidando com o limite Newtoniano,

podemos utilizar a equação (2.32) para reescrever (2.33) como

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G\rho.$$

Veja que de um lado da equação temos escrito um tensor do tipo (0, 2) sendo derivado, enquanto do outro lado temos apenas uma função ρ . Mas a densidade de massa é a componente tempo-tempo do tensor momento-energia, ou $T_{00} = \rho$. Vamos reescrever a equação acima em um “formato mais tensorial”:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi GT_{00}. \quad (2.34)$$

Será que bastaria agora substituir os índices 00 por índices gregos e afirmar que essa é uma equação covariante? Não, pois o termo $\nabla^2 g_{00}$ **não** se transforma como um tensor. A equação acima só é válida no limite Newtoniano. O que precisamos fazer é encontrar uma expressão que no limite Newtoniano se reduza a (2.34). Como o lado direito da equação é uma componente de um tensor (no limite Newtoniano ou não), vamos definir um tensor G_{ab} que satisfaz a equação

$$G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

e no limite Newtoniano, em componentes, $G_{00} \rightarrow -\nabla^2 g_{00}$. Precisamos fazer algumas considerações a respeito do tensor G_{ab} :

- (A) Primeiro, ele é uma combinação linear da métrica e de derivadas dela até segunda ordem, visto que derivadas de ordem superior a dois resultaria em termos do tipo r^{-3}, r^{-4}, \dots , o que iria de encontro à teoria Newtoniana.
- (B) ele é simétrico, pois T_{ab} é simétrico
- (C) ele é conservado, visto que T_{ab} é conservado, ou seja:

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (2.35)$$

De (A), podemos escrever G_{ab} como uma combinação linear do tensor de Ricci e da curvatura escalar, que são combinações lineares de derivadas até segunda ordem do tensor métrico.

$$G_{ab} = c_1 R_{ab} + c_2 g_{ab} R.$$

Por construção, (B) é satisfeito. De (C), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^a G_{ab} = c_1 \nabla^a R_{ab} + c_2 g_{ab} \nabla^a R \\ &= c_1 \frac{1}{2} \nabla_b R + c_2 \nabla_b R \\ &= \left(\frac{c_1}{2} + c_2 \right) \nabla_b R, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade de Bianchi (2.25). Concluimos que $c_2 = -c_1/2$. Reescrevendo G_{ab} , ficamos com

$$G_{ab} = c \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right).$$

No limite Newtoniano $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$. Pela proporcionalidade com $G_{\mu\nu}$, podemos tomar

$$\begin{aligned} 0 &= G_{ij} = c \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \Rightarrow \\ R_{ij} &= \frac{1}{2} g_{ij} R \approx \frac{1}{2} \delta_{ij} R \Rightarrow \\ R_{kk} &= \frac{3}{2} R. \end{aligned}$$

Logo a curvatura escalar é aproximadamente

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + R_{kk} = -R_{00} + \frac{3}{2} R \Rightarrow \\ R_{00} &= \frac{1}{2} R. \end{aligned}$$

Assim

$$G_{00} = 2cR_{00}.$$

Agora vamos explicitar R_{00} em termos do tensor métrico através da equação (2.26)

$$R_{00} = R_{0\mu 0}{}^\mu = 2\Gamma^\nu{}_{0[0}\Gamma^\mu{}_{\mu]\nu} - 2\partial_{[0}\Gamma^\mu{}_{\mu]0}.$$

Substituindo (2.15) e após algumas manipulações algébricas concluimos que

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^k \partial x^k} = -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00},$$

o que implica $c = 1$. Portanto

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T_{ab}. \quad (2.36)$$

Esta equação foi derivada pela primeira vez em 1916 pelo físico alemão Albert Einstein. Ele também propôs a existência de uma constante, chamada *constante cosmológica*, ao

acrescentar o termo Λg_{ab} à equação:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (2.37)$$

que apesar de não reduzir à gravitação Newtoniana, pois $G_{00} \rightarrow -\nabla^2 g_{00} + \Lambda g_{00}$, resulta em um universo estático, como acreditava Einstein. Pouco tempo depois foi observado que o universo está em expansão e a hipótese da constante cosmológica foi descartada. Hoje existem evidências de observações suficientes para acreditarmos que o universo está em expansão acelerada [12]. Uma mudança de sinal da constante cosmologia explica tal expansão acelerada e a hipótese voltou a ser considerada. No trabalho do autor Capelo [8], é demonstrado que o modelo de bumblebee, o qual falaremos mais adiante, no contexto da cosmologia, faz surgir naturalmente a constante cosmológica.

2.6 Métrica de Schwarzschild

Vamos agora derivar uma solução para as equações de Einstein no vácuo e em um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático.

O vácuo significa que o tensor momento-energia T_{ab} é nulo, ou que o tensor de Ricci é igual a zero. O espaço-tempo ser estático significa que o tensor métrico não depende da componente temporal, ou em outras palavras, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\vec{x})$. Já a simetria esférica significa que o espaço é invariante sob rotação e reversão de eixos. De forma sucinta, há invariância

- de reversão e translação temporal;
- de rotação e reversão de eixos.

Tomemos a métrica em coordenadas esféricas e escrevamos a ação:

$$d\mathcal{S}^2(t, r, \theta, \phi) = g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.38)$$

com os índices 0, 1, 2, 3 correspondendo às coordenadas t, r, θ, ϕ , respectivamente. Pela simetria $x^\lambda \rightarrow -x^\lambda$ em todas as coordenadas, temos que, para um λ fixo,

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}^2(x^\lambda) &= g_{\lambda\lambda}(x^\lambda)dx^\lambda dx^\lambda + 2 \sum_{\nu \neq \lambda} g_{\lambda\nu}(x^\lambda)dx^\lambda dx^\nu + \sum_{\mu, \nu \neq \lambda} g_{\mu\nu}(x^\lambda)dx^\mu dx^\nu, \\ d\mathcal{S}^2(-x^\lambda) &= g_{\lambda\lambda}(-x^\lambda)dx^\lambda dx^\lambda - 2 \sum_{\nu \neq \lambda} g_{\lambda\nu}(-x^\lambda)dx^\lambda dx^\nu + \sum_{\mu, \nu \neq \lambda} g_{\mu\nu}(-x^\lambda)dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Mas $g_{\mu\nu}(x^\lambda) = g_{\mu\nu}(-x^\lambda)$, logo

$$\sum_{\nu \neq \lambda} g_{\lambda\nu}(x^\lambda)dx^\lambda dx^\nu = 0.$$

Como as variações dx^ν são independentes entre si, a consequência da simetria de reversão de coordenadas é $g_{\lambda\nu} = 0$ para $\lambda \neq \nu$. Portanto

$$d\mathcal{S}^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (2.39)$$

A ação acima sobre uma 2-esfera a tempo constante,

$$dl^2 = g_{\theta\theta} \left(d\theta^2 + \frac{g_{\phi\phi}}{g_{\theta\theta}} d\phi^2 \right),$$

deve ser igual à métrica de uma 2-esfera usual:

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = r^2 d\Omega^2.$$

Portanto $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$. Aplicando em (2.39), temos que

$$d\mathcal{S}^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Mas as componentes r - r e t - t do tensor métrico só podem depender da componente radial, por estaticidade e simetria esférica. Por simplicidade definamos $g_{tt} \equiv A(r)$ e $g_{rr} \equiv B(r)$. Agora apliquemos a métrica acima nas equações de Einstein. Para isso precisamos definir o tensor de Ricci em componentes, que é nulo por considerarmos vácuo. De posse da métrica, a forma mais direta de se obter o tensor de Ricci é calculando o símbolo de Christoffel e o tensor de curvatura. Pela equação (2.15), as componentes não nulas do símbolo de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{B}, & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\cos\theta \sin\theta, \\ \Gamma^r_{tt} &= -\frac{A'}{2B}, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{r \sin^2\theta}{B}, & \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{B'}{2B}, & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Substituindo o símbolo de Christoffel em (2.26) e aplicando o resultado em (2.22), temos o sistema de equações

$$rb(A')^2 - 2rABA'' + rAA'B' - 4ABA' = 0, \quad (2.41)$$

$$rb(A')^2 - 2rABA'' + (rAA' + 4A^2)B' = 0, \quad (2.42)$$

$$2AB^2 - rBA' + rAB' - 2AB = 0. \quad (2.43)$$

Subtraindo a segunda equação pela primeira, temos que

$$4A^2B' + 4ABA' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(AB) = 0 \Rightarrow A = \frac{c}{B},$$

onde c é uma constante a ser determinada. Substituindo na terceira equação, ficamos com

$$\begin{aligned}
0 &= 2\frac{c}{B}B^2 - rB\left(-\frac{c}{B^2}B'\right) + r\frac{c}{B}B' - 2c \\
&= 2B^2 + rB' + rB' - 2B \Rightarrow \\
rB' &= B(1 - B) \Rightarrow \\
dB\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{1 - B}\right) &= \frac{dr}{r} \Rightarrow \\
d[\ln B - \ln(B - 1)] &= d \ln r \Rightarrow \\
\frac{B}{B - 1} &= kr \Rightarrow \\
B(r) &= \left(1 - \frac{1}{kr}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Agora falta determinarmos apenas as duas constantes c e k para definirmos a métrica de Schwarzschild.

$$d\mathcal{S}^2 = c\left(1 - \frac{1}{kr}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{1}{kr}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

Usando o limite Newtoniano (2.32), impomos que se tivermos um corpo de massa m esfericamente simétrico de centro sobre a origem e em repouso, a componente tempo-tempo da métrica seria

$$c\left(1 - \frac{1}{kr}\right) = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right),$$

válido para todo raio r suficientemente grande. Logo $c = -1$ e $1/k = 2Gm$. Por convenção se define

$$s \equiv 2Gm \tag{2.44}$$

como o *raio de Schwarzschild*. Finalmente a métrica de um espaço-tempo estático, esfericamente simétrico e com um corpo sobre a origem de massa m é

$$d\mathcal{S}^2 = -\left(1 - \frac{s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{2.45}$$

Veja que na região $r < s$ há uma inversão de sinal entre as componentes $t-t$ e $r-r$ da métrica em relação à região $r > s$. A hipersuperfície $r = s$ é chamada de *horizonte de eventos* e sobre ela há uma divergência da métrica. O raio de Schwarzschild do planeta terra é aproximadamente 9 mm, enquanto o do sol é aproximadamente 3 km.

Esta foi a primeira solução de vácuo não-trivial da equação de Einstein, obtida em 1915, apenas um mês após a publicação da teoria da relatividade geral, pelo astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild [13].

Façamos agora um exercício de imaginação para entender a formação de um buraco negro, uma região do espaço-tempo em que a matéria está inteiramente contida na região

$r < s$.

Em unidades completas, o raio de Schwarzschild s para um corpo esféricamente simétrico de massa M , raio a e densidade constante ρ é

$$s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{G}{c^2} \rho a^3.$$

Logo

$$\frac{s}{a} = \frac{8\pi}{3} \frac{G}{c^2} \rho a^2.$$

Assim, mesmo que a densidade não seja muito grande, bastaria que tivéssemos a suficientemente grande para que seja $s > a$, ou para que o horizonte de eventos esteja fora da matéria. No caso do sol,

$$\frac{s_{\odot}}{a_{\odot}} \approx \frac{3}{7} \times 10^{-5}.$$

Agora considere uma galáxia esféricamente simétrica contendo em torno de 10^{11} sois igualmente espaçados e inicialmente em repouso. Visto que o raio de Schwarzschild só depende da massa, podemos tomar como uma aproximação bastante realista

$$s \approx 10^{11} \times s_{\odot} \approx \frac{3}{7} 10^6 a_{\odot}.$$

Logo a razão entre os volumes da galáxia e de um sol é

$$\left(\frac{s}{a_{\odot}} \right)^3 \approx 10^{17}.$$

Mesmo que houvessem 10^{11} sois, ainda assim haveria uma “sobra” de 10^6 . Em outras palavras, ainda que na galáxia os sois se distanciassem uns dos outros a uma distância de $100 a_{\odot}$, a matéria estaria inteiramente contida dentro do horizonte. Tal exercício mostra que não é tão difícil que um aglomerado de matéria se colapse e forme um buraco negro. Somente rotação poderia “salvar” as galáxias de se colapsarem.

Capítulo 3

Violação da Simetria de Lorentz e Modelo de Bumblebee

Neste capítulo introduziremos brevemente as ideias de violação de simetria de Lorentz, seguindo principalmente os artigos dos autores Kostelecky e Bluhm [6, 14]. Iniciamos por explicar o que são as simetrias de Lorentz e CPT. Logo após, tomaremos o caso simples de quebra espontânea de simetria em um campo escalar real. Na seção seguinte introduzimos os principais conceitos do Modelo Padrão Estendido (SME) e finalmente apresentamos um modelo particular do SME, muito explorado nos dias atuais, que é o modelo de bumblebee.

3.1 Transformações de Galileu, Lorentz e CPT

Antes de falarmos de violação de simetria de Lorentz e de violação de CPT, precisamos antes saber o que são tais transformações.

De acordo com a teoria euclidiana, a grandeza chamada distância, uma aplicação que relaciona dois pontos no espaço a um real não negativo, é invariante sob rotação e translação espacial. Qualquer ponto P pertencente ao espaço tri-dimensional pode ser representado por três números reais, (x, y, z) , chamados de *coordenadas*. Se dois pontos $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ pertencem ao espaço tri-dimensional, então a distância $d(P, Q)$ entre eles é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Uma transformação de Galileu é definida da seguinte forma: se um observador O' , que registra um tempo t' , viaja a velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ em relação a um outro observador O , que registra um tempo t , então a relação entre os tempos t, t' e entre as coordenadas (x, y, z) observadas por O e as coordenadas (x', y', z') observada por O' de um mesmo

ponto P é dada por

$$t' = t,$$

$$(x', y', z') = (x, y, z) - (v_x, v_y, v_z)t,$$

onde supomos que os relógios são idênticos e que em $t = 0$ os relógios estão sincronizados e as origens dos dois sistemas de coordenadas coincidem. Dados dois pontos P e Q no espaço, a distância observada entre os pontos em questão é a mesma para os dois observadores O e O' , pois

$$d'(P, Q) = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = d(P, Q).$$

Portanto as transformações de Galileu preservam distância .

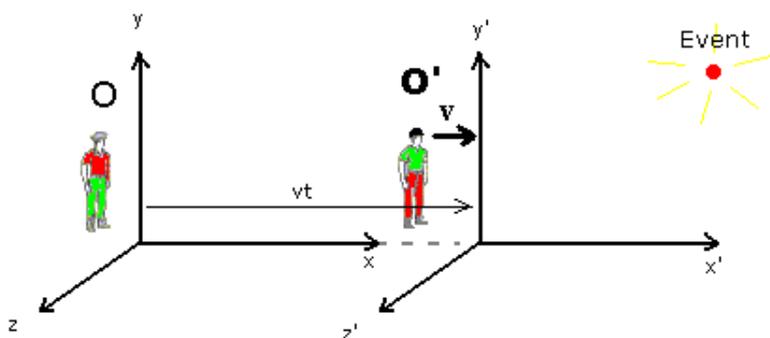


Figura 3.1: O observador O' se move com velocidade v em relação ao observador O . Cada um deles possui seu próprio sistema de coordenadas, que classicamente estão relacionados pela transformação de Galileu e relativisticamente, pelas transformações de Lorentz [15].

Além das transformações de Galileu, existem as transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz são de dois tipos: rotações espaciais e *boosts*. Vamos falar sobre boosts.

Inicialmente substituímos a ideia de espaço Euclidiano por espaço-tempo de Minkowski, onde pontos são substituídos por eventos, $P \rightarrow \mathcal{P}$, representados por quatro números reais, $\mathcal{P} = (t, x, y, z)$, observados por um observador O . Chamamos a representação do espaço-tempo em coordenadas observada por O de *sistema de coordenadas*. Veja que um mesmo observador pode representar o espaço-tempo por diferentes sistemas de coordenadas; por exemplo, ele pode mudar a orientação espacial, executar uma translação espacial/temporal ou mesmo “encolher os eixos”, tomando $y_1 = 2x_1$. Por simplicidade, a cada observador associamos um único *referencial*, que é representado por um sistema de coordenadas naturais (t, x, y, z) padrão. Seja um outro observador O' em velocidade uniforme \vec{v} relativa ao observador O . Dizemos que os referenciais O e O' estão em *configuração padrão* se o ponto $\mathcal{O} = (0, 0, 0, 0)$, chamado de origem, tiver as mesmas coordenadas em ambos os referenciais, a velocidade \vec{v} observada por O for constante e na direção x e

os eixos x , y e z de O forem paralelos aos eixos x' , y' e z' de O' , respectivamente.

Dados dois referenciais O e O' em configuração padrão, a lei de transformação entre as coordenadas de um mesmo evento \mathcal{P} no espaço-tempo é

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - vx), \\x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z,\end{aligned}$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ é chamado de fator de Lorentz. A transformação acima é chamada de boost e ela não preserva distância. Se \mathcal{P} e \mathcal{Q} são eventos no espaço-tempo, então não é necessariamente verdade que $d(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') = d(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, onde a linha (') sobre o evento significa que as coordenadas do evento tomadas são as observadas por O' .

Por outro lado, existe uma grandeza chamada intervalo que é invariante sob uma transformação de boost. A grandeza intervalo ΔS^2 entre os eventos $\mathcal{P} = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ e $\mathcal{Q} = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ é definida por:

$$\Delta S^2 = -(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

É fácil provar que tal grandeza é invariante sob uma transformação de boost. Se os observadores O e O' estão em configuração padrão e as coordenadas de O' são representadas por uma linha ('), então

$$\begin{aligned}\Delta S^2(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') &= -(t'_1 - t'_2)^2 + (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 \\ &= -(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \Delta S^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q}).\end{aligned}$$

Dizemos então que ΔS^2 é um *invariante de Lorentz*.

Além da transformação de boost, a rotação também deixa a grandeza intervalo invariante. Se uma grandeza é invariante sob uma transformação de Lorentz, que pode ser um boost e/ou uma rotação, dizemos que ela é um invariante de Lorentz. Já a *simetria de Lorentz* diz respeito ao fato de transformações de Lorentz deixarem a ação invariante.

Simetria de Lorentz é uma propriedade da natureza segundo a qual o resultado de experimentos é independente da orientação ou da velocidade de boost do laboratório no espaço. Em outras palavras, a física é a mesma para dois observadores que se movem a uma velocidade relativa entre eles uniforme. Covariância de Lorentz é uma propriedade do espaço-tempo e possui dois significados distintos, porém relacionados. O primeiro é que uma grandeza física é dita covariante de Lorentz se ela se transforma sob uma representação do grupo de Lorentz. De acordo com a teoria das representações do grupo de Lorentz, tais quantidades são escalares, quadri-vetores, quadri-tensores e espinores. No caso de escalares covariantes de Lorentz, eles permanecem inalterados sob uma transformação de Lorentz, por isso são ditos invariantes de Lorentz. O segundo significado é que

uma equação é dita covariante de Lorentz se ela puder ser escrita em termos de grandezas invariantes de Lorentz. A principal característica de uma equação covariante de Lorentz é que se ela é válida em um sistema de coordenadas inerciais, então ela é válida em qualquer sistema de coordenadas inerciais.

Não se deve confundir covariância de Lorentz com vetor covariante. Em uma variedade, covariante e contravariante estão relacionados a como um objeto se transforma sob uma transformação de coordenadas.

Em suma, as transformações de Lorentz são:

- rotações espaciais, que são de três tipos, uma para cada direção e
- boosts, gerados por velocidades relativas e também de três tipos, uma para cada direção.

Falemos agora de um outro conjunto de transformações. As transformações de CPT são formadas pela combinação de três transformações: Conjugação de carga, inversão de Paridade e reversão Temporal.

- C converte partícula em antipartícula;
- P transforma um objeto em sua própria imagem, porém de ponta-cabeça;
- T inverte a direção do fluxo do tempo.

Um sistema físico possui simetria de Lorentz se as leis físicas não forem afetadas por uma transformação de Lorentz e, analogamente, possui simetria de CPT se a física também não for afetada por uma transformação de CPT. Aqui uma observação precisa ser feita: violação das simetrias C, P, T e CP são previstas no Modelo Padrão e são observados em experimentos, somente a combinação CPT é requerida pelo Modelo Padrão para ser uma simetria da natureza. Essas simetrias são a base da Relatividade de Einstein.

O Modelo Padrão descreve de maneira unificada todas as partículas elementares e suas interações não gravitacionais. A nível clássico, a gravitação é bem descrita pela Relatividade Geral de Einstein. As duas teorias apresentam simetria de Lorentz e de CPT. O Modelo-Padrão Estendido (ou SME - Standard-Model Extension) é uma teoria que tenta generalizar o Modelo Padrão usual e a Relatividade Geral, e que possui todas as propriedades convencionais desejáveis, além de permitir violação de simetria de Lorentz e de CPT.

A quebra de simetria de Lorentz, ou a alteração da velocidade limite de propagação, contraria fortemente a teoria da relatividade restrita, que tem como um dos postulados a invariância da velocidade da luz (velocidade limite de propagação) qualquer que seja o referencial em que o observador se encontre. Apesar desta contradição, outros modelos que tentam unificar a força gravitacional com as demais, como a teoria das cordas, preveem esta quebra de simetria. Outras teorias que violam Lorentz incluem, por exemplo, aproximações de gravidade quântica [16–22], modelos dinâmicos aleatórios [23], multiversos [24], e cenários de mundo-brana [25–27].

3.2 Exemplo de Quebra de Simetria Espontânea

Em teoria quântica de campos, a quebra de simetrias fundamentais (a nível de solução ou espontânea) leva a previsão teórica de fenômenos observados experimentalmente. Um exemplo bastante simples é a quebra de simetria de um campo escalar real φ . Dada a lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4,$$

onde λ é positivo e μ^2 é positivo ou negativo, a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$ deixa a lagrangeana invariante. Temos então uma simetria em nosso sistema físico. O potencial, por construção, é

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4.$$

O estado fundamental φ_0 é o que minimiza o potencial. Assim,

$$0 = \left. \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = \varphi_0 \left(\mu^2\varphi_0 + \frac{1}{6}\lambda\varphi_0^3 \right).$$

Se $\mu^2 > 0$, então existe apenas um mínimo, que é em zero e, neste caso, a simetria continua válida. Agora, se $\mu^2 < 0$, então existem dois mínimos, que são em $\pm\sqrt{-6\mu^2/\lambda}$. Uma vez escolhido o valor de $\varphi_0 \neq 0$, a simetria é quebrada pelo vácuo da teoria.

Se definirmos $\rho \equiv \varphi - \varphi_0$, com $\varphi_0 \neq 0$, teremos um mínimo em $\rho = 0$, mas a simetria $\rho \rightarrow -\rho$ será quebrada, pois a lagrangeana escrita em termos de ρ é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - \frac{1}{2}\mu^2(\rho^2 + 2\rho\varphi_0 + \varphi_0^2) - \frac{\lambda}{4!}(\rho^4 + 6\rho^2\varphi_0^2 + \varphi_0^4 + \rho^3\varphi_0 + 4\rho\varphi_0^3),$$

que não é invariante sob tal transformação.

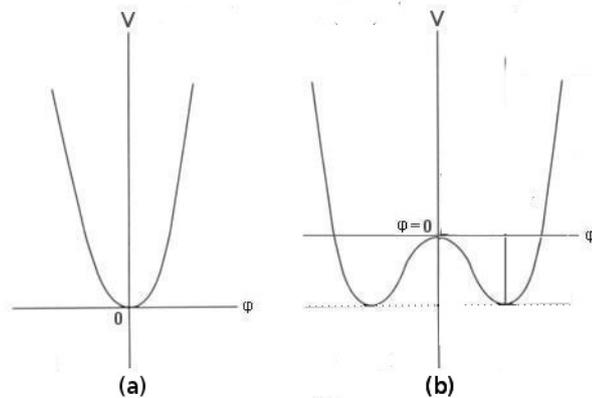


Figura 3.2: (a) caso $\mu^2 > 0$. Vácuo único e a simetria é preservada. (b) Dois vácuos distintos. O campo $\rho = \varphi - \varphi_0$ não deixa a lagrangeana invariante sob a transformação $\rho \rightarrow -\rho$ [28].

Algo análogo é buscado em relação às simetrias (locais) de Lorentz. O modelo de

Kostelecky [6] busca quantidades tensoriais e espinoriais que, na lagrangeana, preservem a simetria de Lorentz, mas a nível de vácuo apresentem um valor esperado não-nulo. Por exemplo, se temos um quadri-vetor na lagrangeana de um modo que preserve a simetria de Lorentz, mas apresentando um valor esperado de vácuo não-nulo, então existe uma direção privilegiada no espaço-tempo e um referencial privilegiado, o que viola a simetria de Lorentz. Tal violação é espontânea por ocorrer apenas a nível de solução, não na lagrangeana. Se a violação fosse na lagrangeana, chamaríamos de violação explícita.

3.3 Modelo Padrão Estendido

O Modelo Padrão Estendido, ou SME (Standard-Model Extension), é uma teoria que engloba o modelo padrão, a relatividade geral, e todos os operadores possíveis que quebram a simetria de Lorentz. O SME pode ser expressado como uma lagrangeana de vários termos. Cada termo da lagrangeana que viola a simetria de Lorentz é um escalar sob as transformações de Lorentz construído por contração de operadores de campo padrão com coeficientes de controle chamados coeficientes de violação de Lorentz. Esses coeficientes de controle são determinados por restrições ou experimentos.

Existem duas maneiras em teoria de campos de violar tal simetria: explícita e espontânea. A quebra explícita de simetria ocorre quando já de início ela viola a simetria. Já a quebra espontânea ocorre quando uma simetria da dinâmica não é respeitada em uma solução específica. Por exemplo, as forças dinâmicas que controlam a interação entre planetas na gravitação Newtoniana apresentam simetria rotacional, porém a solução da teoria para o sistema solar exibe uma orientação definida no espaço, que é o plano do sistema solar. Em 2004 um resultado publicado por Kostelecky [6] mostrou que a violação explícita de Lorentz leva a uma incompatibilidade das identidades de Bianchi com as leis de conservação dos tensores energia-momento e densidade de spin, enquanto na violação espontânea não há tal incompatibilidade. Logo qualquer quebra de simetria de Lorentz precisa ser espontânea.

A proposta do SME é, mesmo que a teoria apresente simetria de Lorentz e de CPT, a solução de vácuo da teoria poderia violar espontaneamente essas simetrias. Essa é uma maneira atrativa de quebrar a simetria de Lorentz e de CPT, pois a dinâmica permanece simétrica e as características tão desejáveis da simetria são preservadas. Assim como no Modelo Padrão usual, quebras espontâneas da simetria de Lorentz e de CPT são desencadeadas por interações que desestabilizam o vácuo vazio. No caso usual, o vácuo é preenchido por grandezas simétricas sob transformações de Lorentz e de CPT (porém violam outras simetrias). Já no SME, o vácuo é preenchido por grandezas orientadas no espaço quadridimensional, gerando quebra de simetria de Lorentz e (em algumas circunstâncias) de CPT.

O teorema de CPT é um resultado geral que liga as simetrias de Lorentz e de CPT. Ele afirma que as teorias com simetria de Lorentz precisam apresentar também simetria

de CPT. Essas teorias incluem todas utilizadas para descrever a física de partículas e muitas teorias propostas. No cenário do SME, a quebra de CPT sempre implica quebra de Lorentz, mas o contrário não é verdadeiro. Assim o teorema de CPT é válido no SME.

De forma sucinta, o SME agrega todas as propriedades do Modelo Padrão e da Relatividade Geral de Einstein, exceto que as simetrias de Lorentz e de CPT podem ser violadas localmente. Essa teoria sugere que a quebra de simetria de Lorentz e de CPT pode ser observada em experimentos realizáveis, e isso conduz a uma fenomenologia geral para violação de Lorentz e CPT a nível do Modelo Padrão e da Relatividade Geral. Outras teorias padrões como a Eletrodinâmica Quântica são tomadas como casos específicos.

A presença de violação local em um referencial de Lorentz é devido a uma ou mais grandezas que carregam índices locais de Lorentz, chamados de coeficientes de violação de Lorentz. Como exemplo suponhamos que exista um campo vetorial cujo valor esperado de vácuo é $b^a \neq 0$. Assim existe uma direção privilegiada no referencial local de Lorentz, levando a uma violação no princípio da equivalência. A quebra de simetria ocorre sempre que partículas ou campos interagem com b^a .

Cabe aqui distinguir dois tipos de transformações locais de Lorentz: a transformação de partícula e a transformação de observador. Ambas são compostas pelas transformações usuais de Lorentz, que são rotações e boosts. A diferença é que na transformação de partícula o campo b^a é mantido fixo, enquanto na transformação de observador b^a também é transformado (da forma usual em que um vetor se transforma). O SME apresenta invariância sob uma transformação de observador, mas há violação quando a transformação é de partícula.

De acordo com os estudos em Violação de Lorentz, a extensão do setor gravitacional incluindo termos que violam a simetria de Lorentz é dada pela ação

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{LV}} + S_{\text{matéria}}, \quad (3.1)$$

onde S_{EH} representa a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} R, \quad (3.2)$$

R é a curvatura escalar e $\kappa^2 = 8\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional. A ação S_{LV} é composta por termos líderes que violam a simetria de Lorentz e é escrita por:

$$S_{\text{LV}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} (uR + s^{ab}R_{ab} + t^{abcd}R_{abcd}), \quad (3.3)$$

onde u , s^{ab} e t^{abcd} são tensores que geram a violação de Lorentz. Os tensores adimensionais s^{ab} e t^{abcd} possuem as mesmas simetrias dos tensores de Ricci e de Riemann respectivamente, e possuem traço nulo, ou seja, $s^a_a = t^{ab}_{ab} = 0$, uma vez que podemos alocá-los em u . Também podemos tomar $t^{abc}_b = 0$, visto que ele pode ser alocado em s^{ab} . Assim os tensores s^{ab} e t^{abcd} possuem, respectivamente, nove e dez componentes independentes.

Como exemplo de tensores que geram violação de Lorentz, vejamos o modelo de bumblebee.

3.4 Modelo de Bumblebee

Modelos em que a violação de Lorentz é resultado da dinâmica de um campo vetorial B_a , chamado de campo de Bumblebee, são interessantes pois possuem uma forma relativamente simples e envolvem características importantes, como rotação, boost, e violação de CPT. Ele é um exemplo simples de um modelo gravitacional em que um campo vetorial B^a possui valor esperado de vácuo não nulo, o que induz a uma violação de Lorentz e de difeomorfismo. Este modelo foi primeiramente utilizado no contexto da teoria de cordas [3], no qual a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada devido ao potencial $V(B^a B_a \pm b^2) = \frac{\lambda}{2}(B^a B_a \pm b^2)^2$, onde λ é uma constante real de acoplamento. Uma outra escolha para o potencial seria uma com similaridades ao modelo sigma: $V(x) = \lambda x$, onde λ agora é um campo multiplicador de Lagrange. O modelo de Bumblebee pode ser representado na ação (3.3) sempre que

$$t^{abcd} = 0, \quad u = \frac{1}{4}\xi B^a B_a, \quad s^{ab} = \xi \left(B^a B^b - \frac{1}{4}g^{ab} B^c B_c \right), \quad (3.4)$$

onde ξ é uma constante. Em um espaço de Riemann-Cartan, o campo de força correspondente a B_a é definido por

$$\begin{aligned} B_{ab} &\equiv \nabla_a B_b - \nabla_b B_a + T^c{}_{ab} B_c \\ &= \partial_a B_b - \partial_b B_a \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde ∇_a é a derivada covariante com respeito à métrica, $T^c{}_{ab}$ é a torção do espaço-tempo e ∂_a é a derivada ordinária. No espaço-tempo de Riemann, em que não há torção, o termo de torção $T^c{}_{ab}$ na definição acima é omitido, haja vista ser nulo.

De posse destas definições, a ação responsável pela dinâmica do campo de Bumblebee B_a é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^a B^b R_{ab}) - \frac{1}{4} B^{ab} B_{ab} - V(B^a B_a \pm b^2) + \mathcal{L}_{\text{matéria}} \right], \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{matéria}}$ é a lagrangeana da matéria.

No vácuo, onde a curvatura e a torção são nulas, o campo de Bumblebee possui valor não nulo $B^a = b^a$, onde $b^a b_a = \mp b^2$, de forma que $V = 0$. A grandeza b_a é o coeficiente de violação de Lorentz e CPT. Em um referencial local de Lorentz as condições se tornam: $B_\mu B^\mu = \mp b^2$, o que implica um campo de fundo b_a não nulo, gerando direções privilegiadas. Como consequência, mesmo no limite do espaço-tempo plano de Minkowski há uma anisotropia, embora esse efeito possa ser mascarado pela presença de matéria e por fortes curvaturas e torções [6].

As ideias físicas oferecidas por esta teoria são bastante ricas. O limite do espaço-tempo de Minkowski e o potencial do multiplicador de Lagrange é equivalente à teoria estudada por Nambu [29], que obteve uma prova de que esta teoria é equivalente à eletrodinâmica em um gauge não linear. O caso sem violação de Lorentz e de potencial V nulo, mas de ξ não nulo é usado como uma teoria alternativa de gravitação em um espaço-tempo de Riemann por Will e Nordtvedt [30–32]. Teorias onde $\xi = 0$ foram introduzidas na Ref. [3] para ilustrar algumas ideias a respeito da violação da simetria de Lorentz.

De posse da ação, podemos derivar as equações de movimento pelo princípio variacional. Variando a ação (3.6) com respeito ao campo de bumblebee ($\delta_B S[g, B] = 0$) temos o conjunto de equações

$$\nabla_a B^{ab} = 2 \left(V' B^b - \frac{\xi}{2\kappa} B_a R^{ab} \right). \quad (3.7)$$

Ao variarmos a mesma ação em relação à métrica ($\delta_g S[g, B] = 0$) temos

$$\begin{aligned} G_{ab} = & \kappa \left[2V' B_a B_b - B_{ac} B^c_b - \left(V + \frac{1}{4} B_{cd} B^{cd} \right) g_{ab} \right] \\ & + \xi \left[\frac{1}{2} B^c B^d R_{cd} g_{ab} - 2B_{(a} B^c R_{b)c} \right. \\ & \left. + \nabla_c \nabla_{(a} (B^c B_{b)}) - \frac{1}{2} \nabla_c \nabla_d (B^c B^d) g_{ab} - \frac{1}{2} \square (B_a B_b) \right] + \kappa T_{ab}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein usual e T_{ab} o tensor momento-energia da matéria.

A equação (3.7) implica a lei de conservação de corrente

$$\nabla_b (2\kappa V' B^b) = \nabla_b (\xi B_a R^{ab}). \quad (3.9)$$

Já uma lei covariante de conservação do tensor momento-energia se deriva da seguinte forma: definimos o tensor momento-energia de bumblebee como

$$T_{ab}^B \equiv 2V' B_a B_b - B_{ac} B^c_b - \left(V + \frac{1}{4} B_{cd} B^{cd} \right) g_{ab}, \quad (3.10)$$

aplicamos o operador ∇^a nos dois lados da equação acima e utilizamos a equação de movimento (3.7), resultando em

$$\kappa \nabla^a T_{ab}^B = \xi \nabla^d (R_{cd} B^c B_b) - \frac{1}{2} \xi R^{cd} \nabla_b (B_c B_d) \quad (3.11)$$

Como uma aplicação do modelo, vejamos no próximo capítulo como se comporta o campo de bumblebee em um espaço de Schwarzschild.

Capítulo 4

Dinâmica do Campo de Bumblebee

O objetivo deste capítulo é encontrar uma solução de vácuo de um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, dado um campo vetorial de valor esperado de vácuo não-nulo. Pela equação de movimento desenvolvida no capítulo anterior, a presença de matéria ordinária altera a geometria do espaço-tempo, que por sua vez altera o valor do campo de bumblebee, e o próprio campo de bumblebee também altera a geometria do espaço tempo.

Neste capítulo, assumiremos que o espaço-tempo é estático e esfericamente simétrico, com métrica, em coordenadas esféricas, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^\Phi, e^\rho, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, onde Φ e ρ são funções de r . Também assumiremos que o campo de bumblebee B_μ convergiu ao valor esperado de vácuo b_μ , o que para o espaço-tempo em questão somente poderá ser escrito da forma $b_\mu = (b_t(r), b_r(r), 0, 0)$.

Assumiremos que o universo é isotrópico e, no limite assintótico, homogêneo. Portanto os limites

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} b^t(r) &= \lim_{m \rightarrow 0} b^t(r) = b_0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} b^r(r) &= \lim_{m \rightarrow 0} b^r(r) = 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde b_0 é uma constante, serão assumidos ao longo do capítulo. Além disso, assumiremos que a métrica é assintoticamente flat, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu}(r) = \lim_{m \rightarrow 0} g_{\mu\nu}(r) = \eta_{\mu\nu}.\tag{4.2}$$

Primeiramente consideraremos o caso geral acima. Logo após, tomaremos como hipótese um campo de bumblebee em um espaço-tempo de métrica de Schwarzschild (2.45). Por último vamos impor que o campo de bumblebee é paralelamente transportado ao longo da direção radial, assim como é feito em um trabalho publicado em 2005 pelos autores Berlotami e Páramos [7], chegando a uma incompatibilidade com a métrica de Schwarzschild no limite $b_0 \rightarrow 0$.

4.1 Caso geral

Tomando a métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^\Phi, e^\rho, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, o Tensor de Ricci pode ser encontrado explicitamente através das equações (2.15), (2.22) e (2.26). Visto que o campo de bumblebee é igual ao valor esperado de vácuo, podemos tomar o potencial $V(B^\mu B_\mu \pm b^2)$ igual a zero. De posse dessas informações, a componente r da equação (3.7) afirma que ou

$$\rho' = r \frac{(\Phi')^2 + \Phi''}{r\Phi' + 2}, \quad (4.3)$$

ou

$$b^r = 0. \quad (4.4)$$

Analisemos os dois casos.

No primeiro caso, (4.3), o limite $b_0 \rightarrow 0$ concorda com a métrica de Schwarzschild, como é requerido. A componente t da equação (3.7), substituindo (4.3), é

$$\begin{aligned} & b_t'' + \left(3\Phi' + \frac{2}{r} - r \frac{(\Phi')^2 + \Phi''}{r\Phi' + 2} \right) b_t' \\ & + \left\{ (\Phi')^2 + \Phi'' + \Phi' \left[\frac{2}{r} - r \frac{(\Phi')^2 + \Phi''}{r\Phi' + 2} \right] \right\} \left(2 + \frac{\xi}{\kappa} \right) b_t = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) e o sistema de equações não-lineares (3.8) são por demais complicados de serem solucionados. Na seção seguinte analisaremos o caso do campo de bumblebee em um espaço de Schwarzschild.

Já no segundo caso, $b^r = 0$, a componente t da equação (3.7) nos dá

$$b_t'' + \left(3\Phi' + \frac{2}{r} - \rho' \right) b_t' + \left[(\Phi')^2 + \Phi'' + \Phi' \left(\frac{2}{r} - \rho' \right) \right] \left(2 + \frac{\xi}{\kappa} \right) b_t = 0 \quad (4.6)$$

As componentes não-nulas da equação (3.8) são:

$$\begin{aligned} & 4 \left(2 \frac{\xi}{\kappa} + 9 \right) r^2 e^{4\Phi} (\Phi')^2 b_t^2 + \left[\left(8 \frac{\xi}{\kappa} + 9 \right) r\Phi' + 4 \frac{\xi}{\kappa} - 2 \frac{\xi}{\kappa} r\rho' \right] 4r e^{4\Phi} b_t b_t' \\ & + 8 \frac{\xi}{\kappa} r^2 e^{4\Phi} b_t b_t'' + \left(8 \frac{\xi}{\kappa} + 9 \right) r^2 e^{4\Phi} (b_t')^2 + (2r\rho' - 1 + e^{2\rho}) 8e^{2\Phi} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & 4 \left(2 \frac{\xi}{\kappa} + 9 \right) r^2 e^{2\Phi} (\Phi')^2 b_t^2 + 4 \left(2 \frac{\xi}{\kappa} + 9 \right) r^2 e^{2\Phi} \Phi' b_t b_t' + 9r^2 e^{2\Phi} (b_t')^2 \\ & - 8(2r\Phi' + e^{2\rho} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
-4 \left(2 \frac{\xi}{\kappa} - 1 \right) r^2 e^{2\Phi} (\Phi')^2 b_t^2 - 4 \left(2 \frac{\xi}{\kappa} - 1 \right) r^2 e^{2\Phi} (\Phi')^2 b_t b_t' + r^2 e^{2\Phi} (b_t')^2 \\
- 8r(r(\Phi')^2 + r\Phi'' + \Phi' - r\Phi'\rho' - \rho') = 0 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

As equações diferenciais (4.6-4.9) são nao-lineares e acopladas.

Trataremos do mesmo problema em um caso particular, o Espaço de Schwarzschild.

4.2 Campo de Bumblebee em um Espaço de Schwarzschild

Visto que a lei do inverso quadrado gravitacional apresenta uma precisão extraordinária, é razoável consideramos que, mesmo existindo um campo vetorial de valor esperado de vácuo não-nulo, a solução de Schwarzschild continue válida.

Na hipótese em questão, mesmo que consideremos $V(B^\mu B_\mu \pm b^2)$, concluiremos que $V = 0$. A equação (3.7), em componentes e assumindo a hipótese acima, é

$$\nabla_\mu b^{\mu\nu} = 2V'b^\nu, \quad (4.10)$$

visto que o tensor de Ricci é nulo. Em componentes, a equação (4.10) se torna

$$V'b^r(r) = 0, \quad (4.11)$$

$$2V'rb^t(r) + (r-s)\frac{d^2b^t(r)}{dr^2} + 2\frac{db^t(r)}{dr} = 0. \quad (4.12)$$

Da primeira equação, ou $V' = 0$ ou $b^r = 0$. Caso consideremos $b^r = 0$, as equações (3.8) nos dará $V' = V = 0$. Logo o mais geral é considerarmos $V = 0$. Agora está fácil resolver a equação (4.12). Façamos a mudança de variável $u = r - s$, definamos a função $U(u) \equiv b^t(r)$ e substituamos em (4.12):

$$\begin{aligned}
u \frac{dU'(u)}{du} + 2U'(u) = 0 &\Rightarrow \frac{dU'(u)}{U'(u)} = -2\frac{du}{u} \\
&\Rightarrow d \ln U'(u) = -2d \ln u = d \ln \frac{1}{u^2} \\
&\Rightarrow U'(u) = \frac{C}{u^2} \\
&\Rightarrow U(u) = \frac{C_1}{u} + C_2.
\end{aligned}$$

Aplicando a condição (4.1), concluímos que

$$b^t(r) = b_0 + \frac{ks}{r-s}, \quad (4.13)$$

onde k é uma constante a ser determinada. Por construção, k tem a mesma dimensão do

campo de bumblebee. A equação (3.8), em componentes, se reduz a

$$0 = G_{\mu\nu} = -b_{\mu\lambda}b^\lambda{}_\nu - \frac{1}{4}b_{\lambda\sigma}b^{\lambda\sigma}g_{\mu\nu} + \xi \left[\nabla_\lambda \nabla_{(\mu}(b^\lambda b_{\nu)}) - \frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla_\sigma (b^\lambda b^\sigma) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square (b_\mu b_\nu) \right]. \quad (4.14)$$

Ao substituírmos (4.13) na equação acima, teremos o conjunto de equações

$$\begin{aligned} & 3(b_0^2 - 2b_0k + k^2)r^2s^2 - 6(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 + 3(b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\ & - \frac{1}{2} \left\{ 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 16r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right. \\ & + 4r^4 b^r(r)^2 + 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 - (b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\ & + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} \right. \\ & + 22r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 7r^2 b^r(r)^2 - (b_0^2 - 2b_0k + 4k^2)r^2 \left. \right] s^2 \\ & \left. - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 19r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^3 b^r(r)^2 \right] s \right\} \xi = 0, \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 3(b_0^2 - 2b_0k + k^2)r^2s^2 + 6(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 - 3(b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\ & + \frac{1}{2} \left\{ 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^4 b^r(r)^2 + 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 \right. \\ & - (b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 + \left[6r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 3r^2 b^r(r)^2 - (b_0^2 - 2b_0k)r^2 \right] s^2 \\ & \left. - 2 \left(7r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^3 b^r(r)^2 \right) s \right\} \xi = 0, \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)r^2s^2 + 4(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 - 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\ & + \left\{ 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right. \\ & - 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 + (b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\ & + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} \right. \\ & + 10r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + r^2 b^r(r)^2 + (b_0^2 - 2b_0k)r^2 \left. \right] s^2 \\ & \left. - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 9r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right] s \right\} \xi = 0, \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)r^2s^2 + 4(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 - 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\
& + \left\{ 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right. \\
& - 2(b_0^2 - 2b_0k + k^2)rs^3 + (b_0^2 - 2b_0k + k^2)s^4 \\
& + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} \right. \\
& + 10r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + r^2 b^r(r)^2 + (b_0^2 - 2b_0k)r^2 \left. \right] s^2 \\
& \left. - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 9r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right] s \right\} \xi = 0. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Pela repetição do termo $(b_0 - k)^2$ nas equações acima, um bom palpite para o valor de k é $k = b_0$. Em tal hipótese, nenhuma das equações acima conterá a constante de acoplamento não-mínimo ξ , supondo não-nulo. Tomando como palpite $k = b_0$ nas equações acima, ficamos com

$$\begin{aligned}
& 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 16r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^4 b^r(r)^2 \\
& + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 22r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 7r^2 b^r(r)^2 - 3b_0^2 r^2 \right] s^2 \\
& - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 19r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^3 b^r(r)^2 \right] s = 0, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^4 b^r(r)^2 \\
& + \left[6r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 3r^2 b^r(r)^2 + b_0^2 r^2 \right] s^2 - 2 \left(7r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + 4r^3 b^r(r)^2 \right) s = 0, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \\
& + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 10r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + r^2 b^r(r)^2 - b_0^2 r^2 \right] s^2 \\
& - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 9r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right] s = 0, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4r^6 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^6 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 8r^5 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \\
& + \left[4r^4 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^4 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 10r^3 b^r(r) \frac{db^r}{dr} + r^2 b^r(r)^2 - b_0^2 r^2 \right] s^2 \\
& - 2 \left[4r^5 \left(\frac{db^r}{dr} \right)^2 + 4r^5 b^r(r) \frac{d^2b^r}{dr^2} + 9r^4 b^r(r) \frac{db^r}{dr} \right] s = 0. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

O que nos restou foi um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem homogêneas

e não-lineares. Agora vamos buscar uma solução para o conjunto de equações acima por método de tentativas. Façamos

$$b^r(r) = A \frac{s^\gamma}{(r - ns)^\gamma}, \quad (4.23)$$

onde A é uma constante de mesma dimensão canônica que o campo de bumblebee, n pode ser zero ou um e γ uma constante. Analisemos as duas hipóteses para n .

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} & \left[4(2\gamma^2 - 3\gamma + 1)r^4 - 2(8\gamma^2 - 23\gamma + 8)r^3s + (8\gamma^2 - 56\gamma + 27)r^2s^2 \right. \\ & \left. + 22(\gamma - 1)rs^3 + 7s^4 \right] A^2 s^{2\gamma} - 3(b_0^2 r^2 s^2 - 2b_0^2 r s^3 + b_0^2 s^4) (r - s)^{2\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \left[4(2\gamma - 1)r^5 - 2(7\gamma - 6)r^4s + (6\gamma - 11)r^3s^2 + 3r^2s^3 \right] A^2 s^{2\gamma} \\ & - (b_0^2 r^3 s^2 - b_0^2 r^2 s^3) (r - s)^{2\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left[4(2\gamma^2 - \gamma)r^6 - 2(8\gamma^2 - 9\gamma)r^5s + (8\gamma^2 - 24\gamma + 1)r^4s^2 \right. \\ & \left. + 2(5\gamma - 1)r^3s^3 + r^2s^4 \right] A^2 s^{2\gamma} - (b_0^2 r^4 s^2 - 2b_0^2 r^3 s^3 + b_0^2 r^2 s^4) (r - s)^{2\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

As equações acima devem ser válidas para todo $r > s$. O termo independente de r na segunda equação é $(3A^2 + b_0^2)s^{2\gamma+3}$, o qual nunca é zero. Portanto n não pode ser um.

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} & 3b_0^2 r^2 r^{2\gamma} s^2 - [4(2\gamma^2 - 3\gamma + 1)r^4 \\ & - 2(8\gamma^2 - 15\gamma + 4)r^3s + (8\gamma^2 - 18\gamma + 7)r^2s^2] A^2 s^{2\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$b_0^2 r r^{2\gamma} s^2 - [4(2\gamma - 1)r^3 - 2(7\gamma - 4)r^2s + 3(2\gamma - 1)rs^2] A^2 s^{2\gamma} = 0, \quad (4.28)$$

$$b_0^2 r^2 r^{2\gamma} s^2 - [4(2\gamma^2 - \gamma)r^4 - 2(8\gamma^2 - 5\gamma)r^3s + (8\gamma^2 - 6\gamma + 1)r^2s^2] A^2 s^{2\gamma} = 0. \quad (4.29)$$

Novamente as equações acima precisam ser válidas para todo $r > s$. A única solução

possível é $A = b_0$ e $\gamma = 1/2$. Portanto

$$\begin{aligned} b^\mu(r) &= b_0 \left(\frac{r}{r-s}, \sqrt{\frac{s}{r}}, 0, 0 \right) \\ b_\mu(r) &= b_0 \left(-1, \frac{\sqrt{sr}}{r-s}, 0, 0 \right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Tal solução respeita os limites (4.1), além de ser $b_\mu b^\mu = -b_0^2$, mas podem existir outras soluções que também respeitem esses limites. Também é possível a existência de outras hipóteses, além do campo de bumblebee no espaço de Schwarzschild, que levem a outras soluções que respeitem os limites (4.1) e (4.2).

4.3 Campo paralelamente transportado na direção radial

Finalmente vamos impor que o campo de bumblebee é paralelamente transportado na direção radial, ou $r^a \nabla_a b^b = 0$, com $r^\mu = (0, 1, 0, 0)$, como é imposto no trabalho publicado em 2005 pelos autores Bertolami e Páramos [7]. Nele, o autor considera primeiramente um campo de bumblebee puramente radial, depois um campo de componentes radial e temporal e por último um campo de componentes temporal e axial, sem considerar os limites (4.1). O resultado é uma modificação no raio de Schwarzschild. Em nosso caso, a primeira consequência de tal imposição é que

$$\begin{aligned} b^t &= b_0 e^{(1-\Phi)/2}, \\ b^r &= 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde b_0 é uma constante.

A componente t da equação (3.7) é

$$\left(1 + \frac{\xi}{\kappa} \right) \left(\rho' - 2 \frac{\Phi''}{\Phi'} - \frac{4}{r} \right) - \frac{\xi}{\kappa} \Phi' = 0. \tag{4.32}$$

Ao solucionarmos a equação acima, encontramos uma constante de movimento, que definiremos por Λ_0 , escrita como

$$\rho = 2 \ln \left(\frac{r^2}{s} \Phi' \right) + \frac{\xi/\kappa}{1 + \xi/\kappa} \Phi + \Lambda_0. \tag{4.33}$$

Desejamos que no limite $b_0 \rightarrow 0$ a métrica convirja para a métrica de Schwarzschild, ou seja, para $b_0 \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \ln \left(1 - \frac{s}{r} \right) \Rightarrow \Phi' = \frac{s}{r^2} e^\rho, \\ \rho &= -\Phi. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.33), temos:

$$\Lambda_0 = -\rho - \frac{\xi/\kappa}{1 + \xi/\kappa} \Phi = \left(1 - \frac{\xi/\kappa}{1 + \xi/\kappa} \right) \Phi.$$

Para que o termo acima seja constante, é necessário que $\frac{1}{1+\xi/\kappa} = 0$, ou $\lim_{b_0 \rightarrow 0} \xi = \pm\infty$. Apesar do absurdo continuemos o raciocínio. Então $\xi = \xi(b_0)$ e $\Lambda_0 = \Lambda_0(b_0)$, com a primeira função divergindo e a segunda tendendo a zero quando b_0 tende a zero. Por simplicidade tomamos $e^{\Lambda_0} \equiv L^2$, com $\lim_{b_0 \rightarrow 0} L^2 = 1$. A métrica é portanto

$$d\mathcal{S}^2 = -e^\Phi dt^2 + \frac{L^2 r^4}{s^2} (\Phi')^2 e^{\frac{\xi/\kappa}{1+\xi/\kappa} \Phi} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Finalmente apliquemos a equação (3.8). A componente r - r da equação em questão, no limite $b_0 \rightarrow 0$, é

$$8r^4(\Phi')^2 - 8rs^2\Phi' - 8s^2 = 0,$$

o que nos dá a relação

$$\Phi' = \frac{s^2 \pm s\sqrt{s^2 + 4r^2}}{2r^3}.$$

Veja que nenhuma das duas igualdades acima concorda com a métrica de Schwarzschild. Portanto não podemos impor que o campo de bumblebee é paralelamente transportado ao longo da direção radial se tomarmos como hipótese os limites (4.1).

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Ao longo do capítulo 2, tratamos o espaço-tempo como uma variedade quadri-dimensional dotada de métrica Lorentziana, deduzimos as equações geométricas que determinam a dinâmica do espaço-tempo, que são a equação da geodésica e a equação de Einstein, e descrevemos o Espaço de Schwarzschild, onde derivamos a métrica de Schwarzschild e ilustramos o colapso de uma galáxia. No capítulo 3, falamos das transformações de Galileu, de Lorentz e de CPT, ilustramos um exemplo de quebra de simetria espontânea por um campo escalar, apresentamos o Modelo Padrão Estendido (SME), o modelo de violação de simetria de Lorentz elaborado pelos autores Kostelecky e Samuel, e apresentamos o modelo de bumblebee, um modelo de quebra de simetria de Lorentz gerado por um quadri-vetor de valor esperado de vácuo não-nulo. No capítulo 4, mostramos a existência de uma solução de vácuo que admite a presença de um campo vetorial de valor esperado de vácuo não-nulo em um espaço de Schwarzschild, o que está de acordo com a tão precisa lei do inverso quadrado gravitacional. Também mostramos que em um espaço-tempo estático, isotrópico e homogêneo, não é admitido a existência de um campo de bumblebee paralelamente transportado na direção radial, haja vista a solução não concordar com a métrica de Schwarzschild no limite de o campo ser nulo.

Como perspectiva, podemos buscar correções quânticas da força gravitacional devido à presença do campo de bumblebee encontrado (4.30). Também podemos buscar novas soluções para as equações (3.7) e (3.8), ainda respeitando os limites (4.1), ou mesmo provar que a solução (4.30) é única, dados os limites citados. Além disso, podemos também buscar possíveis aplicações no contexto cosmológico, analisando se a presença de um campo de bumblebee como apresentado na seção 4.2 geraria algum fenômeno físico observado, mas não previsto classicamente, como o aumento de massa em algumas regiões, por exemplo.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” 1905.
- [2] A. Einstein, “‘the field equations of gravitation’,” *On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light* 1 *On the Electrodynamics of Moving Bodies* 10 *The Development of Our Views on the Composition and Essence of Radiation* 11 *The Field Equations of Gravitation* 19 *The Foundation of the Generalised Theory of Relativity* 22, p. 19, 1915.
- [3] V. A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 39, pp. 683–685, Jan 1989.
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Cpt violation and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 55, no. 11, p. 6760, 1997.
- [5] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 11, p. 116002, 1998.
- [6] V. A. Kostelecký, “Gravity, lorentz violation, and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 69, no. 10, p. 105009, 2004.
- [7] O. Bertolami and J. Páramos, “Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous lorentz symmetry breaking,” *Physical Review D*, vol. 72, no. 4, p. 044001, 2005.
- [8] D. Capelo and J. Páramos, “Cosmological implications of bumblebee vector models,” *Physical Review D*, vol. 91, no. 10, p. 104007, 2015.
- [9] T. S. Developers, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.3)*, 2016. <http://www.sagemath.org>.
- [10] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, vol. 1. Wiley New York, 1972.
- [12] B. P. Schmidt, “Nobel lecture: Accelerating expansion of the universe through observations of distant supernovae,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 84, no. 3, p. 1151, 2012.

- [13] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory,” *arXiv preprint physics/9905030*, 1999.
- [14] R. Bluhm and V. A. Kostelecký, “Spontaneous lorentz violation, nambu-goldstone modes, and gravity,” *Physical Review D*, vol. 71, no. 6, p. 065008, 2005.
- [15] “Transformação de Lorentz.” https://en.wikibooks.org/wiki/Special_Relativity/Mathematical_transformations. Acessado em: 2016-08-22.
- [16] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl, and L. F. Urrutia, “Quantum gravity and spin-1/2 particle effective dynamics,” *Physical Review D*, vol. 66, no. 12, p. 124006, 2002.
- [17] D. Sudarsky, L. Urrutia, and H. Vucetich, “Observational bounds on quantum gravity signals using existing data,” *Physical review letters*, vol. 89, no. 23, p. 231301, 2002.
- [18] D. Sudarsky, L. Urrutia, and H. Vucetich, “Bounds on stringy quantum gravity from low energy existing data,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 2, p. 024010, 2003.
- [19] G. Amelino-Camelia, “Quantum-gravity phenomenology: Status and prospects,” *Modern Physics Letters A*, vol. 17, no. 15n17, pp. 899–922, 2002.
- [20] Y. J. Ng, “Selected topics in planck-scale physics,” *Modern Physics Letters A*, vol. 18, no. 16, pp. 1073–1097, 2003.
- [21] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 21, p. 211601, 2003.
- [22] N. E. Mavromatos, “Theoretical and phenomenological aspects of cpt violation,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, vol. 214, pp. 1–6, 2004.
- [23] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, “Derivation of lorentz invariance and three space dimensions in generic field theory,” *arXiv preprint hep-ph/0211106*, 2002.
- [24] J. D. Bjorken, “Cosmology and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 67, no. 4, p. 043508, 2003.
- [25] C. P. Burgess, J. M. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G. D. Moore, “Loop-generated bounds on changes to the graviton dispersion relation,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2002, no. 03, p. 043, 2002.
- [26] A. R. Frey, “String theoretic bounds on lorentz-violating warped compactification,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2003, no. 04, p. 012, 2003.
- [27] J. M. Cline *et al.*, “Asymmetrically warped compactifications and gravitational lorentz violation,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2004, no. 03, p. 032, 2004.

- [28] “Quebra de simetria espontânea em um campo escalar real.” <https://universe-review.ca/R15-12-QFT21.htm>. Acessado em: 2016-08-22.
- [29] Y. Nambu *Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra*, 190, 1968.
- [30] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [31] C. M. Will and K. Nordtvedt Jr, “Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. i. preferred-frame theories and an extended ppn formalism,” *The Astrophysical Journal*, vol. 177, p. 757, 1972.
- [32] R. W. Hellings and K. Nordtvedt Jr, “Vector-metric theory of gravity,” *Physical Review D*, vol. 7, no. 12, p. 3593, 1973.