



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RONDINELLY OLIVEIRA

WORMHOLE DO HALO CENTRAL DA GALÁXIA E MODOS  
QUASE-NORMAIS

FORTALEZA

2017

RONDINELLY OLIVEIRA

WORMHOLE DO HALO CENTRAL DA GALÁXIA E MODOS QUASE-NORMAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

O51w Oliveira, Rondinely.

Wormhole do halo central da galáxia e modos quase-normais / Rondinely Oliveira. – 2017.  
79 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientação: Prof. Dr. Victor Santos.

1. Ondas gravitacionais. 2. Wormhole. 3. Potencial de Reege-Wheeler. 4. Modos quase-normais. 5. Wormhole do halo central. I. Título.

CDD 530

---

RONDINELLY OLIVEIRA

WORMHOLE DO HALO CENTRAL DA GALÁXIA E MODOS QUASE-NORMAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 20/01/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luís José Silveira de Sousa  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do  
Ceará (IFCE)

*Aos Meus Pais e  
familiares*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida pela orientação e paciência e do mesmo modo ao Victor Santos. Aos meus amigos e colegas que me ajudaram e apoiaram, Lorena, Davi, Rafael, Diego, Adevaldo, Sofia(colega), Sophia(prima), Pedro, Matheus, Adaías, Michel, Romário, Leonardo, Jamael, Jamile, Celso, Nathanaell, Amanda e Max. A Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e tecnológico - Funcap.

## RESUMO

Wormholes são estruturas exóticas que podem ligar regiões longínquas do espaço e por isso são bastante visados como objeto de pesquisa. Pode-se mostrar que buracos negros possuem modos de vibração amortecidos, os chamados de modos quase-normais. Esses modos são responsáveis por irradiar as ondas gravitacionais para espaço. Isso se deve ao fato de pequenas perturbações na métrica poderem ser descritas pelas equações de Einstein, em forma de equações de onda. Esse comportamento é semelhante para wormholes, onde devemos encontrar um potencial de Regge-Wheeler associado a equação de onda. Nosso objetivo nesse trabalho será tentar ver se é possível encontrarmos um potencial do tipo Regge-Wheeler para um wormhole, que se supõem ser sustentado pela matéria escura na região dos halos galácticos. E por consequência, verificarmos se é possível determinar modos quase-normais usando o método *WKB*, para esse wormhole em particular.

**Palavras-chave:** Ondas Gravitacionais. Wormhole. Potencial de Regge-Wheeler. Modos Quase-normais. Wormhole do Halo Central.

## ABSTRACT

Wormholes are exotic structures that can connect distant regions of space and therefore are highly targeted as a research object. It can be shown that black holes have damped vibration modes, The so-called quasi-normal modes. These modes are responsible for radiating gravitational waves to space. This is due to the fact that small disturbances in the metric can be described by Einstein's equations, in the form of wave equations. This behavior is similar for wormholes, where we must find a Regge-Wheeler potential associated with the wave equation. Our goal in this work will be to see if it is possible to find Regge-Wheeler potential for a wormhole, Which are supposed to be sustained by dark matter in the region of galactic halos. And consequently, Verify if it is possible to determine quasi-normal modes using the WKB method, for that particular wormhole.

**Keywords:** Gravitational Waves. Wormhole. Regge-Wheeler Potential. Quasi-Normal Modes. Central Halo Wormhole.



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do potencial $V(r)$ radial para diversos $l$ e $n$ . . . . .	61
Tabela 2 – Correspondes velocidades $v^\phi$ em $Km/s$ , para seus respectivos raios $r$ em $Kpc$ com base em uma massa de <i>Virial</i> total de $3 \cdot 10^{12} M_\odot$ . . . . .	67
Tabela 3 – Modos quase-normais do potencial devido a um perturbação escalar para os valores $l = 1, l = 2, l = 3$ . . . . .	73
Tabela 4 – Modos quase-normais do potencial devido a um perturbação tensorial para os valores $l = 2, l = 3$ . . . . .	73

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Cone de luz em um espaço bidimensional, mais uma dimensão temporal .	21
Figura 2 – No referencial $S'$ o raio de luz se propaga em linha reta, no referencial $S$ o raio se curva . . . . .	23
Figura 3 – Representação de como anéis de partículas são afetados pela presença de uma onda gravitacional, que se propaga de modo perpendicular ao plano das partículas. Na parte superior temos a influencia da polarização direta $h_+$ , e na parte inferior temos a influencia da polarização transversal $h_\times$ .	40
Figura 4 – Diminuição orbital do PSR B1913 + 16, os pontos indicam a mudança do período da orbita em varias épocas distintas. A curva representa os valores teóricos calculados pela relatividade geral . . . . .	45
Figura 5 – Nesse gráfico temos a comparação entre diferentes fontes de ondas gravitacionais de fundo estocástico. Vemos duas regiões de pesquisa $S4$ e $S5$ , para os experimentos do LIGO na faixa de $100 Hz$ . O futuro projeto de interferômetro no espaço, o LISA, deve cobrir uma distribuição espectral mais diversificada para uma grande faixa de frequência. Além de vermos as predições para os modelos inflacionários, CMB, BBN. . . . .	47
Figura 6 – Aqui temos uma representação esquemática de um detector de massa ressonante. Onde vemos um oscilador harmônico $Q_N$ de massa $M$ com frequência $\omega_N$ acoplado a um ressonador $Q_K$ de frequência $\omega_k$ que atua como um amplificador para $\xi_N$ . Por sua vez o sistema de massa ressonante esta acoplado a um transdutor elétrico . . . . .	48
Figura 7 – Nessa imagem vemos Joseph Weber configurando seu detector cilíndrico, com modo de ressonância sensível a ondas gravitacionais com frequência próxima a $1660 Hz$ . Esse dispositivo funcionava à temperatura ambiente e utilizava cristais piezoelétricos para transmitir os possíveis sinais de ondas gravitacionais presentes no detector . . . . .	49
Figura 8 – Representação esquemática do funcionamento do <i>LIGO</i> , (FONTE: LIGO collaboration) . . . . .	54

Figura 9 – Visão esquemática do wormhole de Morris-Thorne. O wormhole é descrito por uma métrica esférica e estática. $l$ é coordenada própria do observador. O trajeto que vai de $+\infty$ a $-\infty$ , representa o processo de viagem de um observador em uma região do espaço, até o mergulho no wormhole e sua emersão em outra região	Fonte Morris-Thorne, 1988 . . . . .	55
Figura 10 – Via Láctea, vista do plano de rotação, nesse esquema vemos a extensão dos halos, sendo regiões em forma esférica que irradia a partir do centro da galáxia. A maior parte da matéria que compõe a galáxia, se concentra nessa região, com uma massa estimada em mais ou menos $1,2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$	. . . . .	63
Figura 11 – O gráfico mostra o comportamento da função forma $b(r)$ dada pela equação (4.41), com os parâmetros definidos for $\rho_s = 0.05$ , $r_s = 1 Kpc$	. . . . .	64
Figura 12 – Vemos o gráfico da velocidade de rotação dos corpos que orbitam a Via Láctea, em função da distância com relação a distância como é observado. E o gráfico teórico da orbitas keplerianas, claramente vemos como a distribuição da matéria bariônica e da matéria escura muda radicalmente os valores predito pela mecânica newtoniana. (Extraído de astro.if.ufrgs.br)	. . . . .	65
Figura 13 – Nesse gráfico vemos a distribuição de velocidades de rotação de um corpo (no caso o sol) em função da distancia radial. O gráfico mostra ainda o que devíamos esperar para o caso se houvesse apenas matéria comum e o que é realmente observado, devido a presença de matéria escura. (Extraído de astro.if.ufrgs.br)	. . . . .	66
Figura 14 – curva de rotação previsto pela equação (4.44), onde os parâmetros são dados por: $\alpha = 0.0006$ , $\beta = 0.00082$ , $k_1 = 1$ , $k_2 = 1$	. . . . .	67
Figura 15 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 0$ , devido a uma perturbação escalar.	. . . . .	70
Figura 16 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 1$ , devido a uma perturbação escalar.	. . . . .	70
Figura 17 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 2$ , devido a uma perturbação escalar.	. . . . .	70
Figura 18 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 3$ , devido a uma perturbação escalar.	. . . . .	70
Figura 19 – Gráfico da superposição do potencial de Regge-Wheeler para perturbação escalar, com $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$	. . . . .	71
Figura 20 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 0$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga $r^*$	. . . . .	71
Figura 21 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 1$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga $r^*$	. . . . .	71
Figura 22 – Potencial de Regge-Wheeler para $l = 2$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga $r^*$	. . . . .	72

Figura 23 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 3$ , devido a uma perturbação esca- lar, com relação à coordenada tartaruga $r^*$ . . . . .	72
Figura 24 –Superposição dos potenciais $V$ para perturbação escalar em função de $r^*$ , com $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$ . . . . .	72
Figura 25 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 0$ , devido a uma perturbação tensorial.	72
Figura 26 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 1$ , devido a uma perturbação tensorial.	72
Figura 27 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 2$ , devido a uma perturbação tensorial.	73
Figura 28 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 3$ , devido a uma perturbação tensorial.	73
Figura 29 –Gráfico da superposição do potencial de Regge-Wheeler para perturbação tensorial, com $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$ . . . . .	73
Figura 30 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 0$ , devido a uma perturbação ten- sorial, com relação à coordenada tartaruga $r^*$ . . . . .	74
Figura 31 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 1$ , devido a uma perturbação ten- sorial, com relação à coordenada tartaruga $r^*$ . . . . .	74
Figura 32 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 2$ , devido a uma perturbação ten- sorial, com relação à coordenada tartaruga $r^*$ . . . . .	74
Figura 33 –Potencial de Regge-Wheeler para $l = 3$ , devido a uma perturbação ten- sorial, com relação à coordenada tartaruga $r^*$ . . . . .	74
Figura 34 –Superposição dos potenciais $V$ para perturbação tensorial em função de $r^*$ , com $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$ . . . . .	74

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$\Lambda_{\nu}^{\mu}$	Matriz das transformações de Lorentz
$g$	Determinante da métrica de $g_{\mu\nu}$
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Símbolo de Christoffel
$R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}$	Tensor de Riemann-Christoffel
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor momento-energia
$j_{\nu}$	Quadricorrente

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	FORMALISMO DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .	18
2.1	Relatividade Restrita . . . . .	18
2.2	Relatividade Geral . . . . .	23
3	ONDAS GRAVITACIONAIS E WORMHOLES . . . . .	32
3.1	Ondas Gravitacionais . . . . .	32
3.2	Polarização de Ondas Gravitacionais . . . . .	37
3.3	Fontes de Ondas Gravitacionais . . . . .	41
3.4	Detectores de Ondas Gravitacionais e a Sensibilidade dos Métodos	47
3.4.1	Detectores de Massa Ressonante . . . . .	48
3.4.2	Detectores de Feixe . . . . .	51
3.5	Introdução aos Wormholes . . . . .	53
4	POTENCIAL DE REGGE-WHEELER DE WORMHOLES TRANS- PONÍVEIS . . . . .	57
4.1	Potencial de um Campo Escalar . . . . .	57
4.2	Perturbação de uma Métrica Geral . . . . .	58
4.3	Equação de Regge-Wheeler Para Métrica do Wormhole . . . . .	60
4.4	Wormhole do Halo Central da Galáxia . . . . .	62
4.5	Método WKB e os Potenciais de Regge-Wheeler do Wormhole do Halo Central . . . . .	67
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	75
	REFERÊNCIAS . . . . .	77

## 1 INTRODUÇÃO

A relatividade foi sem dúvida um dos maiores feitos da história da humanidade atribuída a um único homem. Essa teoria mudou radicalmente o modo de se pensar em física e conseqüentemente o modo de se pensar de toda a sociedade. Isso se deu, pela forma como a relatividade unificou os conceitos de espaço e tempo, que outrora estavam separados. Já que, os trabalhos de Galileu, Newton e outros grandes expoentes da física concebiam espaço e tempo como entidades separadas. Mais precisamente, o tempo era algo imutável para qualquer observador físico, todos os observadores marcariam a mesma duração de tempo para um experimento que fosse realizado em qualquer referencial. Do mesmo modo, comprimentos medidos em um referencial particular deve sempre ser mesmo em qualquer outro referencial. Porém a luz, cujo comportamento é regido pelas equações de Maxwell, parecia não se ajustar as equações de Newton de um modo geral. Einstein foi o primeiro a ter êxito em conciliar a dinâmica de corpos em movimento com formalismo do eletromagnetismo [1]. Inicialmente a relatividade, chamada de relatividade restrita, lidava com o comportamento do espaço-tempo de referenciais a velocidade constante. Posteriormente essa teoria foi generalizada para incluir referenciais acelerados de modo a incluir a gravidade nessa família, lançando mão do princípio da equivalência [2]. Com a teoria da relatividade bem formulada foi possível, além de permitir correções na teoria newtoniana, mostrar existência de fenômenos novos. Um desses fenômenos, que corresponde a uma solução das equações de Einstein, descoberta pelo alemão Karl Schwarzschild em 1916, mostra a existência de um buraco negro. Particularmente a solução de Schwarzschild, descreve uma métrica com simetria esférica e estático [3]. Posteriormente, outras soluções foram encontradas, como a métrica de Kerr, que descreve um buraco negro em rotação e Kerr-Newman para um buraco negro em rotação e carregado [4].

Uma das mais notáveis predições da relatividade foi a existência de ondas gravitacionais, resultante diretamente da linearização das equações de campo de Einstein. Basicamente as ondas gravitacionais são perturbações no espaço-tempo que se propagam na velocidade da luz, irradiando assim energia de sua fonte. Podemos tomar o eletromagnetismo como exemplo, para o caso de termos cargas aceleradas e vemos como estas emitem radiação eletromagnética. Do mesmo modo, massas aceleradas podem emitir ondas gravitacionais. Ainda de modo análogo a radiação eletromagnética, a radiação gravitacional possui polarizações, para uma escolha conveniente de *gauge*, o chamado de *TT*. Temos a polarização direta  $h_+ = A_+ e^{-i[\omega(t-z/c)+\phi_+]}$  e polarização transversal  $h_\times = A_\times e^{-i[\omega(t-z/c)+\phi_\times]}$ , o efeito dessas polarizações podem ser vistos com um grupo de

partículas teste [5]. Naturalmente, grandes corpos massivos em altas acelerações devem produzir quantidades significativas de radiação gravitacional. Tais como, sistemas binários de estrelas de nêutrons, explosões de supernovas, bem como alguns sistemas binários de anãs brancas. De modo mais extremo, temos os binários de buracos negros ou binário constituído de um buraco negro e uma estrela, como o sistema *V404 Cygni*<sup>1</sup>. Sistemas esses podendo conter massa de alguns sóis a bilhões de sóis. Sistemas binários desse tipo constituem as mais poderosas fontes de ondas gravitacionais do universo atual. Como foi dito antes, corpos acelerados devem irradiar energia em forma de ondas gravitacionais, logo esperamos que os sistemas binários tenham os períodos de suas orbitas reduzidos, como no famoso caso do sistema binário *PSR 1913+16* [6]. Então com base na teoria, temos dois modos de observar as ondas gravitacionais, de modo direto e indireto. Indiretamente, pela observação da taxa de decrescimento do período das orbitas, devido a perda de energia por irradiação de ondas gravitacionais. Diretamente, pela construção de detectores sensíveis à elas. Basicamente há dois tipos de detectores de ondas gravitacionais, são eles: detectores de massa ressonante e detectores de feixe interferométrico. Detectores de massa ressonante foram os primeiros tipos de detectores a serem construídos para tal finalidade. Detectores de massa ressonante, constituem de uma massa metálica, geralmente, conectada a sensores, cujos os modos de ressonância de quadrupolo são sensibilizados pela onda gravitacional. Joseph Weber em 1960 foi o primeiro a construir detectores de massa ressonante, utilizando um cilindro de alumínio com sensibilidade de  $1660\text{ Hz}$  [7]. Atualmente, os modernos detectores de massa ressonante são constituídos de por uma esfera metálica resfriada à temperaturas ultracriogênicas (da ordem de  $mK$ ), isso reduz o ruído térmico ao máximo. Os mais proeminentes detectores de massa ressonante até recentemente são *Auriga* e o *Nautilus*, ambos na Itália, e o *Mário Schenberg* no Brasil. Esses modernos instrumentos estão habilitados a detectar ondas gravitacionais das diversas fontes que já citamos, com amplitudes esperadas de até  $h \sim 10^{-21}$ . O outro tipo de detector é o de feixe interferométrico. O princípio por trás desses detectores, reside na forma como um feixe de luz fica fora de sincronia com seu feixe irmão devido a ação direta das ondas gravitacionais. o feixe é recombinado com o feixe irmão, surgindo daí as franjas de interferência. A sensibilidade dos interferômetros de feixe esta diretamente relacionada com o tamanho da cavidade de confinamento do feixe,  $\Delta L = hL$ . O *Ligo* é o expoente atual da detecção de ondas gravitacionais, sendo o responsável pela primeira detecção de ondas gravitacionais, o conhecido evento *GW150914* [8], devido a fusão de dois buracos negros.

De um modo geral, temos mãos tecnologias funcionais para detecção de ondas

---

<sup>1</sup>SpaceToday.com.br



gravitacionais proveniente de diversas fontes do cosmos, isso implica que podemos analisar fontes mais exóticas. Algumas fontes peculiares são as ondas gravitacionais primordiais, resultantes das grandes flutuações na densidade da matéria e da energia, Cordas cósmicas e wormholes. Nesse trabalho focaremos sobre apenas sobre os wormholes e como detectá-los. Os wormholes são túneis hipotéticos no espaço-tempo que conectam duas regiões do universo. As primeiras descrições sobre wormholes forma os wormholes de Schwarzschild, também conhecido como “ponte Einstein-Rose”[9]. Contudo em 1962 J.A.Wheeler e R.W.Fuller, mostram que essa tipo de wormhole é instável e intransponível [10]. O artigo de M.S.Morris, K.S.Thorne de 1988 [11], mostra como é possível a existência de wormholes transponíveis. Para se chegar a esse tipo de solução, Morris e Thorne partiram de uma métrica que a princípio permitiria ser transponível, para em seguida obterem as condições para tal. As condições encontradas, mostram que wormholes transponíveis possuem ao longo de toda sua extensão uma tensão radial que supera densidade de energia  $\tau > \rho c^2$ . Qualquer sistema com essa propriedade viola as condições de energia clássica, que implica a necessidade de uma matéria exótica, funcionando como fonte. A exigência de matéria exótica não necessariamente inviabiliza a existência de wormholes. O feito Casimir, por exemplo, também viola a condição forte de energia, assim como os wormholes, o problema reside em se determinar a natureza dessa matéria exótica [12].

Como já discutimos, massas aceleradas produzem ondas gravitacionais de natureza quadrupolar. Podemos generalizar essa afirmação, para regiões do espaço-tempo em que a densidade de momento e energia estejam flutuando. De fato, para a solução de *Schwarzschild*, ou o buraco negro esférico e estático, a métrica pode ser perturbada por algum campo de matéria e de energia. Como sabemos pequenas perturbações sobre sistemas em equilíbrio estável, produzem oscilações em torno do ponto de equilíbrio. T.Regge e J.Wheeler (1957) foram os primeiros a analisar a estabilidade do horizonte de eventos para solução de *Schwarzschild* [13]. Nesse trabalho Regge e Wheeler, mostram que o comportamento das ondas gravitacionais, obedece a uma equação do tipo de *Schrödinger*,  $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V(r, l)\right) \phi(r, t) = 0$ , reduzindo o problema ao espalhamento de ondas por barreira de potencial. Onde a coordenada *tortoise* é uma função  $r^* = r^*(r)$  unívoca, para o intervalo de  $(+\infty, -\infty)$ . Ainda nesse trabalho as perturbações são divididas em polares e radiais, e estas podem ser pares ou ímpares, onde cada setor possuem um potencial associado. Posteriormente F.J. Zerilli, (1970) expandiu um pouco mais esse trabalho, deduzindo corretamente o potencial efetivo para paridade par[14]. E V.Moncrief contribuiu para essa linha de pesquisa ao considerar a estabilidade do buraco negro carregado de Reissner-Nordström [15]. Resta perguntarmos qual a natureza das oscilações das ondas gravitacionais?. Sabemos que sistemas simples e isolados ao serem perturbados,

vibram apenas em frequências distintas ou frequência de ressonância. As frequências de ressonância, também chamada de modos de vibração. De sorte que as vibrações podem ser tomadas como superposição linear, finita ou infinita dos modos normais do sistema, formando assim um conjunto completo. Se o sistema for um sistema dissipativo, o que ocorre na maioria dos casos, temos que considerar um fator de amortecimento. Estrelas de Neutrôns, buracos negros, etc, são sistemas dissipativos, portanto quando irradiam energia na forma de ondas gravitacionais, suas frequências de oscilação têm que ser amortecida. C.V.Vishveshwara foi o primeiro a observar oscilações amortecidas para o buraco negro, os chamando de modos quase normais (MQN)[16]. Naturalmente que wormholes são sistemas dissipativos e desse modo podem ser caracterizados pelos (MQN). Nesse ponto se tentarmos encontrar os (MQN) para um wormhole, é possível tratar de modo análogo aos (MQN) para solução de *Schwarzschild*. Nesse trabalho a motivação para se determinar os (MQN) reside nos trabalhos de *Farook Rahamana, P. Salucci* [17]. Trabalhos esses, que tentam modelar a existência de wormholes na região dos halos centrais de matéria escura. A função forma  $b(r)$  do wormhole esta relacionada com a densidade de matéria e energia, no nosso caso específico a maior contribuição provem da densidade de matéria escura. Já a função *redshift*  $\Lambda(r)$  pode ser relacionada com as configurações das velocidades em função da distância. Então a proposta de que o halo central da nossa galáxia sustenta wormholes instiga a busca de seus possíveis modos quase normais. Essa proposta será o objetivo desse trabalho, para tal intuito precisamos determinar uma equação de onda com base na métrica do wormhole específico. Isso pode ser feito utilizando o formalismo de S. Chandrasekhar [18], for ser relativamente mais simples que outras abordagens. Basicamente utilizamos uma métrica suficientemente geral para permitir qualquer tipo de perturbação e isso permite deduzirmos as equações de onda para os setores radiais e polares. Uma vez em mãos das equações de onda, podemos utilizar a aproximação *WKB* de terceira ordem, dada por S.Iyer e C.M.Will [19], para extrair os modos quase normais.

Esse trabalho, esta dividido em quatro capítulos, mais as conclusões e perspectivas. No primeiro, temos a introdução, onde expomos os argumentos iniciais que nos motivaram a desenvolver todo trabalho. O segundo capítulo traz uma introdução à relatividade restrita e geral, com leve discurso da trajetória de Einstein nesse campo. No terceiro capítulo, intitulado de ondas gravitacionais e wormholes, trazemos uma discussão sobre as principais fontes de ondas gravitacionais e dispositivos para detecta-las e por último fazemos uma introdução básica sobre wormholes. No quarto capítulo apresentamos os rudimentos para cálculo dos modos quase normais do wormhole galáctico, utilizando o caso de *Schwarzschild* feito por S.Chandrasekhar como exemplo.

## 2 FORMALISMO DA RELATIVIDADE GERAL

### 2.1 Relatividade Restrita

A teoria geral da relatividade é uma das mais bem comprovadas teorias físicas atuais, devido a exaustivos experimentos que a comprovaram com grande precisão. Sua origem remonta ao ano de 1905, em Berna na Suíça, onde na ocasião Albert Einstein (Ulm, 14 de março de 1879-Princeton 18 de abril de 1955) trabalhando no escritório de patentes suíço, elaborou uma série de quatro artigos impactantes que mudaram o curso da física, o *annus mirabilis*. Esses artigos eram, primeiro o efeito fotoelétrico, Einstein argumentou que a luz concebida como onda até então, se comporta como partículas, implicando em uma distribuição discreta do espectro de energia, fazendo uso direto da teoria quântica de Max Planck (Kiel, 23 de abril de 1858-Göttingen, 4 de outubro de 1947). O segundo artigo sobre consequências do movimento browniano, que tratava de um método mecânico-estatístico para se determinar o tamanho de átomos, ajudando a consolidar a teoria atômica. O terceiro artigo, intitulado de teoria especial da relatividade, Einstein mostrava como o espaço e o tempo depende do observador, ao invés de o tempo e o espaço serem invariantes e independentes um do outro, devido a concepção newtoniana (vamos focar nesse ponto mais adiante). O quarto artigo era uma consequência do artigo da relatividade especial, que ele mostrava que existe uma equivalência entre energia e a massa inercial,  $E = mc^2$  [2], sendo esta a mais famosa equação da física devido as suas tremendas implicações para o desenvolvimento de novas tecnologias do século XX.

O terceiro artigo de Albert Einstein, sendo o mais importante e revolucionário para física, nele Einstein mostra que a percepção de tempo e de espaço depende do referencial inercial adotado. Para mostrar isso Einstein estabelece dois postulados, o primeiro diz que as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial adotado e o segundo diz que a velocidade da luz é invariante também para qualquer referencial inercial, isso garante que as chamadas transformações de Lorentz represente corretamente movimentos a velocidade constante entre os referenciais inerciais. Para ficar mais claro as implicações que levam a teoria da relatividade como um todo, vamos fazer uma pequena digressão ao contexto histórico da física do final do século XIX. Em meados de 1666, Isaac Newton (Woolsthorpe 4 de janeiro de 1643 - Kensington 31 de março 1727) concebeu os rudimentos da teoria da gravitação e as três leis de movimento, posteriormente publicadas na *principia*, constituindo a obra mais fundamental e poderosa da ciência até então[20]. A mecânica desenvolvida por Newton foi capaz de descrever desde a dinâmica de fenômenos

cotidianos, a dinâmica do corpos celestes, sendo que junto com as leis da termodinâmica constituem as ferramentas teóricas para revolução industrial. As leis de Newton estabeleceram que não há referencial absolutamente em repouso, no qual podemos medir todo movimento no universo. Ainda pelas leis de Newton, vemos que um partícula material pode-se se mover com velocidade arbitraria e que o tempo é o espaço são parâmetros independentes. Nada fugia a essa regra, até os trabalhos sobre o eletromagnetismo no século XIX.

Em 1865, o físico britânico James Clerk Maxwell (Edimburgo, 13 de junho de 1831 - Cambridge, 5 novembro de 1879) unificou as teorias parciais que até então descreviam os fenômenos elétricos e magnéticos em um conjunto de quatro equações. Onde Maxwell define o conceito de campo eletromagnético, de modo mais matemático. Pelas equações de Maxwell, podemos derivar uma equação de onda para propagação de campos eletromagnéticos a uma velocidade específica, que depende exclusivamente das constante permissividade elétrica  $\varepsilon$  e magnética  $\mu$ ,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ . Essa equação mostra que a velocidade da ondas eletromagnéticas é sempre uma constante no meio em que se mede as constantes  $\varepsilon$  e  $\mu$ , isso implica na não dependência do referencial. Maxwell percebeu que a velocidade de propagação dos campos eletromagnéticos é mesma que a velocidade da luz, logo uma constante. Então as leis do electromagnetismos estão claramente em desacordo com a mecânica Newtoniana. Para tentar conciliar isso, foi proposto o conceito de éter, uma substancia hipotética que preenchia todo o espaço, eliminado o vácuo, na qual a velocidade da luz se propaga e é uma constante. Desse modo temos um referencial em que a luz tem velocidade constante, mas que obedece a composição de velocidade de Galileu. Em outras palavras o éter representava uma referencial absoluto.

Contudo em 1887, Albert Michelson, posteriormente o primeiro americano a ganhar o prêmio Nobel, e Edward Morley [21], realizaram um experimento bem metuculozo e complicado. Usando um interferômetro a eles foram capazes de medir qual deveria ser a velocidade com a qual a terra devia ter em relação ao éter. O experimento foi realizado em diferentes épocas do ano, já que a terra se move a diferentes velocidades ao executar sua trajetória ao redor do sol. Eles constataram que nenhuma alteração no padrão de interferência foi produzida. Mesmo quando se orientava o experimento de diversos modos possíveis, não se observava qualquer influencia da composição de velocidade da trajetória da terra com a velocidade da luz. A velocidade da luz era constante em qualquer direção do espaço, claramente o conceito de éter devia ser revisto. Varias propostas foram apresentadas entra 1887 e 1905 para salvar o éter, entre elas temos a contração de Lorentz-Fitzgerald[22], propunha-se que os comprimentos deveria se contrair na direção paralela ao movimento do corpo em relação ao éter. Desse modo, Lorentz introduziu a

expressão de para mensurar essa contração;

$$l \rightarrow l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.1)$$

essa proposta se ocorreu em 1904. Em 1905, Einstein assumiu que a hipótese do éter era supérflua, já que em sua teoria da relatividade restrita preserva-se a contração de comprimento de Lorentz. Admitindo-se que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial e isso ainda leva ao feito adicional da dilatação do tempo.

Einstein conseguiu sintetizar toda sua teoria da relatividade especial, através do grupo de Lorentz, obviamente devido aos trabalhos de Lorentz discutido acima. As transformações de referencias, no formalismo da relatividade restrita é da forma;

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (2.2)$$

onde  $x^{\nu}$  representa as coordenadas do referencial inercial em repouso e  $x'^{\nu}$  representa as coordenadas do referencial inercial se movendo com velocidade  $v$  constante. Onde definimos as coordenadas como:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.3)$$

Percebemos que tratamos o tempo como uma nova coordenada análoga às coordenadas espaciais. Agora  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  é definida como,

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

, onde tomamos  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $\beta = v/c$ . A equação (1.4) apresenta corretamente o grupo de transformações de coordenadas de um referencial para outro, admitindo-se os dois postulados proposto por Einstein. Fica evidente que, pelas novas leis da cinemática da relatividade restrita, eventos que são simultâneos para observadores em um mesmo referencial, não o são entre observadores em referenciais distintos que se movem com velocidade constante com relação aos demais. Curiosamente o grande matemático francês Henri Poincaré (Nancy, 29 de abril de 1854 - Paris, 17 de junho de 1912) apresentou poucas semanas depois da publicação dos trabalhos de Einstein e de forma independente, o mesmo grupo de Lorentz. Em uma trabalho de 1900 Poincaré discutia o recuo que um objeto sofre ao emitir um jato de radiação, como prediz a teoria eletromagnética de Maxwell, ele constatou que jato emitido possui uma massa inercial de  $u/c^2$  [2]. Apesar

disso, Einstein foi o primeiro a dar a interpretação física correta para as transformações de Lorentz, Poincaré nunca aceitou o conceito inerente à relatividade restrita.

Com a relatividade restrita de Einstein, podemos definir uma quantidade que é invariante sobre as transformações de Lorentz, definida como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.5)$$

que representa um deslocamento no espaço-tempo, podendo ser escrito de modo mais compacto como<sup>1</sup>,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.6)$$

Estamos escolhendo as letras gregas  $\mu, \nu, \kappa, \lambda$  para representar os sistemas de coordenadas gerais e as letras gregas  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  para sistema de coordenadas locais, ou  $x, y, z, t$ . Então de modo geral;

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  representa a métrica de Minkowski, ou métrica plana devido a Hermann Minkowski. Hermann Minkowski (Kaunas, 22 de junho de 1864 - Göttingen, 12 de janeiro de 1909) foi um matemático alemão que por volta de 1907, concluiu que a relatividade restrita podia ser entendida de modo mais geral e simplificado, introduzindo um espaço de quatro dimensões. E naturalmente, as transformações de Lorentz (equação 1.2) representam rotações nesse espaço de modo que todos os eventos observados em um referencial inercial estão dentro ou na hipersuperfície do cone.

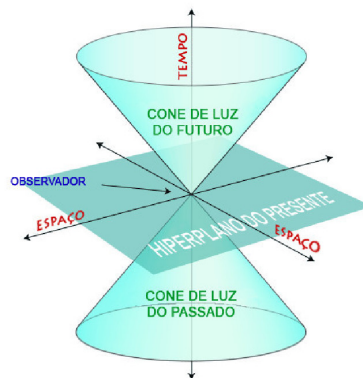


Figura 1: Cone de luz em um espaço bidimensional, mais uma dimensão temporal

De modo geral, o espaço-tempo contínuo representa uma variedade pseudo-riemanniana, onde nesse espaço todos os pontos são eventos que podem estar ou não fisicamente conectados. Se imaginarmos que um evento  $E_1$  se inicia em um instante  $t_0$  e em ponto  $P_0$  e evolui temporalmente para um evento  $E_1$  em um instante  $t_1$ , num ponto

<sup>1</sup>Aqui estamos usando a notação de Einstein, onde os somatórios são omitidos quando houver índices repetidos

$P_1$ , então dizemos que existe uma linha(chamada de linha mundo) que conecta esses dois eventos. Uma rápida olhada na equação 1.5, mostra que podemos distinguir três casos possíveis:  $ds^2 > 0$  é dito ser um intervalo do tipo tempo, todos os eventos desse tipo são conectados por linhas mundo causais. Esses eventos, usualmente representam partículas massivas e estão todos contidos no interior do cone de luz.  $ds^2 = 0$  é um intervalo do tipo luz, onde as linhas mundo que uni os eventos causais desse tipo estão contidas exclusivamente sobre a hipersuperfície, partículas sem massa representam esses eventos. E por fim  $ds^2 < 0$ , representam eventos que ocorrem fora do cone de luz, portanto são eventos que não estão ligados por relações de causa e efeito. Em outras palavras, suas linhas mundo não estão relacionadas com nenhum evento físico em nosso universo. Minkowski definiu ainda pela equação (1.5) o conceito de tempo próprio, dado por,  $ds = cd\tau$  e escolhendo  $c = 1$  por convenção, ficamos:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.8)$$

O tempo propio é o tempo medido pelo observador que executa a trajetória que liga um evento  $E_0$  ao evento  $E_1$ , logo para eventos do tipo luz, o tempo próprio é nulo, isso significa que tempo não passa para um observador que se move na velocidade da luz.

Embora brilhantes, o artigo de Einstein sobre a relatividade teve pouco destaque, obviamente a comunidade científica em geral não entendia as implicações revolucionárias do trabalho de Einstein. Apenas Max Planck conseguiu mensurar a importância da relatividade, como uma maneira inteira nova de se ver a realidade. Como vimos, embora Einstein não tenha sido o único a chegar a teoria da relatividade, Lorentz e Poincaré também desenvolveram sua própria teoria da relatividade, apenas Einstein deu a devida interpretação física. Lorentz simplesmente não conseguiu abandonar o conceito do éter e Poincaré não podia aceitar as implicações filosóficas mais profundas da relatividade. O diferencial de Einstein, foi a maneira radical de abandonar as concepções clássicas. E em 1907 Einstein escreveu um artigo de revisão sobre a relatividade para o jornal de ciências *Jahrbuch*, acontece que Einstein sabia que a teoria da relatividade tinha uma limitação, ela não se aplica para referenciais acelerados, essa falta de generalidade era ruim para uma teoria física. Já que em seu entendimento Einstein buscava teoria completa da dinâmica relativista e não somente do ponto de vista cinemático. Ele já considerava isso desde 1905 após completar seus artigos, de modo que uma teoria da relatividade que incluía corpos acelerados, obrigatoriamente incluiria a gravidade. Porém, ele não tinha, como é de se esperar, nenhuma noção de como generalizar sua teoria para incluir referenciais acelerados até 1907. Foi somente nesse ano que lhe ocorreu o que ele chama de "o pensamento mais feliz da minha vida". Einstein imaginou o que acontece com uma pessoa que esta

em queda livre. Para essa pessoa ela não sentiria a força da gravidade, ou seja, para um referencial com aceleração equivalente ao campo gravitacional, observa-se ausência de forças gravitacionais. Imediatamente Einstein percebeu que poderia generalizar esse raciocínio, que todo referencial acelerado é equivalente à presença de um campo gravitacional. Desse modo podemos sempre encontrar um referencial acelerado na presença de campo gravitacional, tal que o campo localmente seja nulo. Esse é o princípio da equivalência, que deu uma forma de incluir a gravidade dentro da tentativa de generalização da teoria da relatividade.

## 2.2 Relatividade Geral

Com o princípio da equivalência em mãos Einstein, pode concluir que campos gravitacionais devem curvar um raio de luz. Se imaginarmos um referencial  $S'$  completamente isolado (um elevador por exemplo) e este está se movendo com uma aceleração de módulo  $a$  com relação a um referencial  $S$ . Se um raio de luz for emitido dentro do elevador, para o observador no referencial  $S'$  o raio se propaga em linha reta, vai de um ponto  $A$  a um ponto  $B$  de mesma altura sem nenhuma alteração. Mas para um observador no referencial  $S$  observa-se que o raio atinge um ponto ligeiramente abaixo  $B$ . Já que a luz leva um tempo  $\overline{AB}/c$  para se deslocar, mas nesse mesmo intervalo de tempo o elevador já se deslocou por uma certa distância. Pelo princípio da equivalência, podemos substituir o elevador acelerado por um campo gravitacional equivalente, aí Einstein concluiu que um campo gravitacional deve curvar a trajetória de raio de luz que passa por ele. Ainda em 1907, Einstein trabalhava em um problema que mostrava como a gravitação

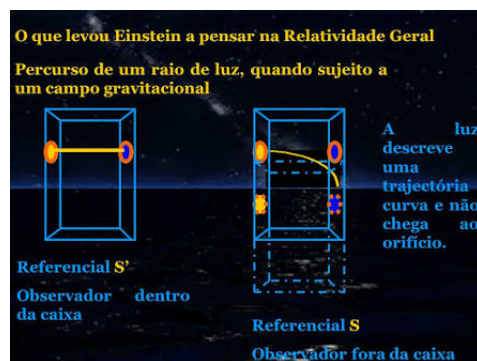


Figura 2: No referencial  $S'$  o raio de luz se propaga em linha reta, no referencial  $S$  o raio se curva

se relaciona com sua nova teoria. Ele salienta que um campo eletromagnético é a fonte não apenas de energia, mas também de uma quantidade igual de energia gravitacional [2]. Em sua argumentação, Einstein considera que um corpo sofra um acréscimo de energia  $E$ , segundo a relatividade restrita devido esse acréscimo de energia o mesmo corpo sofre



um aumento de massa inercial de  $E/c^2$ . Então é razoável supor que há um aumento correspondente na massa gravitacional. Se esse não fosse o caso teria de haver uma lei de conservação da massa gravitacional que levaria a não conservação de massa inercial, e não é o que acontece. Seguindo essa mesma linha de raciocínio, Einstein mostra que um campo gravitacional influi no fluxo de energia de um ponto emissor para um ponto receptor. Para verificarmos isso, suponhamos que haja um receptor de luz  $S_1$  na origem de um referencial  $\Sigma$  e considere um emissor  $S_2$  a uma distância  $h$  ao longo do eixo  $z$  também em  $\Sigma$ . Considerando agora um referencial  $\Sigma'$  em repouso no instante em que radiação luminosa  $E_2$  é emitido de  $S_2$  para  $S_1$ , essa radiação chegara a  $S_1$  após um intervalo de tempo  $h/c$  (consideramos que o tempo em  $\Sigma$  é verificado no referencial inercial  $\Sigma'$ ). Mas nesse instante a velocidade de  $S_1$  em relação a  $\Sigma'$  é  $v = \gamma h/c$ , portanto a energia que chegara em  $S_1$  não é mais  $E_2$  é uma energia maior  $E_1$  dada por

$$E_1 = E_2 \left( 1 + \frac{v}{c} \right) = E_2 \left( 1 + \frac{\gamma h}{c^2} \right). \quad (2.9)$$

Agora se trocarmos a aceleração do referencial  $\Sigma$  por um campo gravitacional, obviamente podemos substituir  $\gamma h$  por  $\Delta\Phi$ , que resulta finalmente,

$$E_1 = E_2 \left( 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) \quad (2.10)$$

em que  $\Delta\Phi = \phi_2 - \phi_1$ . O primeiro fator do segundo termo da equação (1.10) representa uma massa gravitacional, mostrando desse modo o efeito gravitacional da energia. De modo análogo Einstein lida com o desvio para o vermelho, onde uma fonte emite uma frequência  $\nu_2$  que é captada por receptor  $\nu_1$

$$\nu_1 = \nu_2 \left( 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right). \quad (2.11)$$

Einstein mostra como calcular a deflexão de um raio de luz proveniente do infinito, pela influencia de campo gravitacional;

$$\alpha = \frac{2GM}{Dc^2}, \quad (2.12)$$

onde  $\alpha$  é medido em radianos e  $D$  é a distância de maior aproximação da fonte do campo gravitacional. Quatro anos mais tarde Einstein multiplica a equação acima por um fator de dois. Pela equação (1.12) Einstein escreve para vários observatórios astronômicos. A proposta era tentarem medir essa deflexão dos raios de luz de estrelas próximos do sol no momento de eclipse, já que o brilho reduzido do sol permitiria essa observação. Em 1914 uma expedição foi realizada, mas devido a eclosão da primeira guerra mundial, não pode

ser concluída, somente em 1921 que os primeiros resultados foram obtidos.

Em 1912, já em Zurique, Einstein sabia que para generalizar a teoria da relatividade teria que se valer da geometria diferencial, mais especificamente a geometria riemanniana. Ele mostrou que uma descrição genérica de referencias acelerados necessitava de dez potencias, isso mostrava que ele devia usar o formalismo tensorial, ao invés dos escalares. Agora com base na geometria riemanniana, a equação (1.7) pode ser reescrita como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.13)$$

onde as quantidades  $g_{\mu\nu}$  devem ser consideradas campos dinâmicos, que de algum modo devem descrever a gravitação. Einstein buscou equações que dependiam da métrica dinâmica e continham a informação sobre a geometria curva do espaço-tempo. Essas equações foram conseguidas através da colaboração com o matemático Marcel Grossman (Budapeste, 9 de abril de 1878 - Zurique, 7 de setembro de 1936). Na colaboração Einstein e Grossman, as duas principais referencias foram o artigo de 1901 de Ricci e de seu aluno de Levi-Civita <sup>2</sup>, e o trabalho "On the transformation of homogeneous differential forms of the second degree", de Christoffel [23]. Grossman apresenta o formalismo pormenorizado da geometria de Riemann e do seu cálculo tensorial, de modo que Einstein é apresentado à derivada covariante

$$V^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\nu \quad (2.14)$$

onde a quantidade  $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$  é um não-tensor, chamado de símbolo de Christoffel;

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (2.15)$$

Uma consequência da derivação covariante que prendeu Einstein por algum tempo:

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0. \quad (2.16)$$

É interessante notar que a equação acima mostra que a forma como medimos distâncias no espaço-tempo é invariante sobre derivação covariante. Um outro resultado importante obtido em 1914, foi a equação geodésica do movimento, para isso considere uma partícula se movendo exclusivamente sobre a influencia do campo gravitacional. De acordo com o princípio da equivalência existe um sistema de coordenadas  $\xi^\alpha$  livre de forças, no qual;

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (2.17)$$

Considerando agora um observador em outro sistema de coordenadas  $x^\mu$ , vemos que a

---

<sup>2</sup>G.Ricci e T.Levi-Civita, Math. Ann.,54,125,1901.

partícula obedece a equação de movimento,<sup>3</sup>

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.18)$$

Podemos interpretar essa quantidade (chamada de símbolo de Christoffel ou conexão afim) como o quão não-inercial é o referencial em que observamos a força atuando sobre a partícula. Ainda sobre a equação (2.18), nos chama a atenção que essa equação descreve a dinâmica de uma partícula em um campo gravitacional do ponto de vista da relatividade.

Aqui podemos fazer uma conexão com a teoria Newtoniana. Usando a equação (2.18), considerando um campo fraco estacionário, onde uma partícula se move a velocidades não-relativista. Então  $dt/d\tau$  predomina sobre o termo  $dx/d\tau$ , (lembrando que  $c = 1$ ), logo obtemos;

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (2.19)$$

Como o campo é supostamente estacionário, então as derivadas temporais são nulas, logo ficamos;

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}, \quad (2.20)$$

a métrica pode ser escrita como;

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

Logo, reescrevendo a equação (2.20) fica,

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}, \quad (2.22)$$

podemos ver facilmente que  $dt/d\tau$  é uma constante, e dessa forma obtemos após dividir a equação (2.19) por  $d^2x/d\tau^2$  e inserindo na equação (2.22)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00}. \quad (2.23)$$

A equação clássica de Newton é dado por;

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\nabla\phi, \quad (2.24)$$

comparando as duas últimas equações concluímos que,

$$h_{00} = 2\phi + k \quad (2.25)$$

como o campo vai a zero no infinito,  $k$  se anula, então da equação (2.21) temos finalmente

---

<sup>3</sup>Para uma demonstração detalhada veja S.Weinberg, Gravitation and Cosmology, Nova York, Wiley, 1972, pag 70

que,

$$g_{00} = 1 + 2\phi. \quad (2.26)$$

As últimas equações tratadas, nos mostra como encontramos o limite newtoniano como um caso particular da teoria da relatividade. Isso é fundamental para qualquer teoria que tente uma explicação mais ampla da natureza de algum fenômeno. O fato da equação (2.18) se reduzir ao caso especial newtoniano, evidencia que a formulação covariante da gravitação, era o caminho certo para inclui-lá no domínio da relatividade. Ainda sim Einstein precisava determinar as equações de campo da gravitação, que teriam de cumprir a forma genérica:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Onde  $G_{\mu\nu}$  é um tensor de segunda ordem, composto por termos de derivada primeira e de segunda ordem do tensor fundamental  $g_{\mu\nu}$ . E o termo  $T_{\mu\nu}$ , chamado de tensor momento-energia multiplicado por uma constante  $\kappa$ . O tensor momento-energia representa a fonte do campo gravitacional, podendo ser qualquer tipo de matéria, inclusive outros campos, como o campo eletromagnético. Naturalmente o termo  $G_{\mu\nu}$  contem a configuração do espaço-tempo, como sua curvatura. Era exatamente o que Einstein precisava, campos tensoriais que contem a informação sobre a curvatura. Em seguida a essas argumentações, Marcel Grossman apresenta a Einstein o tensor mais importante da futura teoria, o tensor de quatro índices hoje conhecido como tensor de Riemann-Christoffel<sup>4</sup>

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \quad (2.28)$$

O tensor de Riemann-Christoffel descreve a curvatura do espaço-tempo, sendo esse uma generalização da curvatura de Gauss [24] em dimensões mais altas, isto é, em dimensões  $D \geq 3$  não se pode representar de modo simples um ponto da variedade por um único número. Portanto, para um espaço de dimensão arbitraria, sua curvatura será completamente discreta pelo tensor de quatro índices de Riemann-Christoffel. Podemos contrair o índice contravariante do tensor Riemann-Christoffel com tensor métrico, que resulta [25];

$$g_{\sigma\lambda} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = R_{\mu\nu\kappa\sigma}. \quad (2.29)$$

Esse tensor é simétrico com relação a permutação de dois índices,

$$R_{\mu\nu\kappa\sigma} = R_{\kappa\sigma\mu\nu}, \quad (2.30)$$

---

<sup>4</sup>An Introduction to GENERAL RELATIVITY, R. Aldrovandi and J. G. Pereira, March-April/2004, pag 53

e ainda anti-simétrico com relação a uma permutação de um índice,

$$R_{\mu\nu\kappa\sigma} = -R_{\nu\mu\kappa\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\kappa} = R_{\nu\mu\kappa\sigma}. \quad (2.31)$$

Observamos também a ciclicidade,

$$R_{\mu\nu\kappa\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\kappa} + R_{\mu\kappa\sigma\nu} = 0. \quad (2.32)$$

Embora o tensor de Riemann-Christoffel contenha toda a informação que necessitamos sobre o espaço em consideração, tensores desse tipo, são demasiadamente complexos para se trabalhar. Para contornar isso, Einstein usou um tensor mais simples obtido a partir da contração tensor de Riemann-Christoffel. Um tensor mais simples pode ser obtido pela contração do índices contravariante e covariante, esse é tensor de curvatura de Ricci,<sup>5</sup>

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} \quad (2.33)$$

Sendo o tensor de Ricci uma simplificação, é natural que ele contenha menos informação que o tensor Riemann-Christoffel, por sorte ele ainda contem a curvatura do espaço em termos de derivadas primeira e segunda do tensor fundamental. O tensor de Ricci ainda pode ser contraído com o tensor métrico contravariante para obter o escalar de curvatura, que aparece de modo explícito nas equações de Einstein

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} = R. \quad (2.34)$$

Finalmente Einstein tinha como obter a forma das equações de campo da gravitação, onde obviamente se reduziria a equação de Newton-Poisson,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.35)$$

como caso limite de campo fraco. Contudo inicialmente Einstein cometeu erros de argumentação, ao afirmar que como a derivada covariante é generalização do operador gradiente e a generalização de  $\phi$  é  $g_{\mu\nu}$ . Mas da equação (2.16) mostra que o tensor métrico é nulo sobre derivação covariante, de modo que o tensor de Ricci não pode compor o lado esquerdo da equação equação (2.27). Essa dificuldade pode ser evitada pelas identidades de Bianchi, onde são dadas em termos do tensor de Ricci e pelo escalar de curvatura. Para mostrarmos isso considere o tensor de Riemann-Christoffel escrito como:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} \right). \quad (2.36)$$

<sup>5</sup>Geometria Riemanniana, notas de aula, Rodney José Biezuner, UFMG, departamento de matemática, pag 122

Permutando  $\nu$ ,  $\kappa$  e  $\eta$  ciclicamente obtemos as identidades de Bianchi;

$$R_{\lambda\mu\xi\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0, \quad (2.37)$$

se contraírmos a equação acima sucessivamente com o tensor métrico obtemos;

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\eta}^{\mu}R \right)_{;\mu} = 0. \quad (2.38)$$

Quando Einstein deduziu suas equações ele ainda não conhecia as identidades de Bianchi, ele adotou uma abordagem diferente que resultava em termos do tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Antes da versão final oficialmente anunciada por Einstein, ele teve de enfrentar sérios problemas com sua teoria. Suas equações não contabilizava corretamente o movimento de rotação e além disso não eram inteiramente covariantes. Essas falhas se traduziam no fato de suas equações não serem capazes de explicar a anomalia do periélio mercúrio. Nesse período, Einstein encontrava-se na Alemanha e lutava para corrigir sua teoria. Lá o grande matemático David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862-Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) após ver algumas palestras de Einstein, tentou buscar a sua própria versão da teoria. Mas Einstein foi bem sucedido em reparar as falhas da sua teoria. E finalmente 25 novembro de 1915, Einstein chegou ao resultado:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Aqui observamos que derivação covariante do lado esquerdo da equação implica na conservação do tensor momento-energia. E como se queria, a equação (2.39) se reduz a equação de Newton-Poisson, para campo fraco  $T_{00} \simeq \rho$  e  $g_{00} \simeq 1 + 2\phi$ . As equações (2.39) descrevem satisfatoriamente os campos gravitacionais, como uma curvatura do espaço-tempo devido a presença de campos matérias ou de energia, tais como planetas, estrelas, galáxias etc. Devido ao carácter não linear, podemos mostrar que a curvatura do espaço em si produz gravidade, mesmo na ausência da matéria. Podemos ainda escrever o tensor de Ricci em termos do tensor momento-energia, tomando o traço da equação (2.39) dado por,

$$R = -8\pi GT, \quad (2.40)$$

resulta que

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.41)$$

Se estivermos considerando uma região do espaço livre de fonte de campos, teremos que o tensor de momento-energia é nulo, isso implica diretamente da última equação que o

tensor de curvatura de Ricci seja nulo,

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.42)$$

Esse caso particular simplifica os problemas nos quais temos de calcular os campos gravitacionais pelas equações de Einstein. Onde também teremos como consequência, que  $R = 0$ . Podemos mostrar que, mesmo que tensor de Ricci seja nulo, não necessariamente quer diz que  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$  seja nulo. Em outras palavras, mesmo com ausência de fonte o espaço-tempo pode ser curvo, como consequência do carácter não linear das equações de campo. Nos casos em que  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = 0$ , estamos lidando obviamente com espaços sem curvatura, e como sabemos são os espaços de Minkowski. Vale ainda ressaltar que as equações de Einstein são na maioria dos casos muito difíceis de se resolver, pois estamos lidando com sistemas de equações diferenciais parciais não lineares, com poucos exemplos de soluções analíticas.

O tensor momento-energia, membro direito da equação (2.39) representa, como já vimos, a fonte do campos gravitacionais. Com  $T_{00} = \rho$  representando a densidade de energia e os outros termos são  $T_{ik}$  representando as componentes de cisalhamento. O termo  $T_{i0} = T_{0i}$  representa o fluxo de massa relativística pela hipersuperfície  $x^i$  equivalente a densidade da  $i$ -ésima componente da densidade linear. E  $T_{ii}$  representa as componentes da pressão. Algumas semanas depois de Einstein completar sua teoria, Hilbert apresenta a sua própria versão da teoria. Mesmo que muitos e inclusive o próprio Hilbert tenha atribuído a Einstein a criação da teoria de relatividade geral. A solução proposta por Hilbert tem uma importante contribuição para formalismo da relatividade geral. Sua abordagem consiste numa formulação variacional das equações, onde tomamos<sup>6</sup>;

$$S[g] = \int \sqrt{-g} [R + \mathcal{L}_m] d^4x, \quad (2.43)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica e  $\mathcal{L}_m$  representa o lagrangiano dos campos de matéria. Fazendo a variação dos termos em relação a métrica, obtemos

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\rho\sigma}} = \int \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} \frac{g^{\mu\nu}}{g^{\rho\sigma}} R_{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} g^{\nu\mu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} d^4x + \int \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\rho\sigma}}. \quad (2.44)$$

Considerando o primeiro termo,

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta(-g)}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta(\exp[tr \ln g])}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (\exp[tr \ln g]) \frac{\delta [tr \ln g]}{\delta g^{\rho\sigma}} =$$

<sup>6</sup>An Introduction to GENERAL RELATIVITY, R. Aldrovandi and J. G. Pereira, March-April/2004, pag 79

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)tr \frac{\delta \ln g}{\delta g^{\rho\sigma}} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)tr \left[ g^{-1} \frac{\delta g}{\delta g^{\rho\sigma}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g) \left[ g^{\mu\nu} \frac{g_{\mu\nu}}{g^{\rho\sigma}} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g) \left[ g_{\mu\nu} \frac{g^{\mu\nu}}{g^{\rho\sigma}} \right] = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

. Podemos mostrar que o terceiro termo da equação (2.44) consiste de uma divergência total e por isso se anula na fronteira, e o último termo podemos desenvolvê-lo do seguinte modo;

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}}\mathcal{L}_m + \sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}\mathcal{L}_m + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\rho\sigma}} \right].$$

Esse último resultado é atribuído ao tensor momento-energia, reunindo todos termos resultantes, obteremos;

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - T_{\mu\nu} \right] = 0 \quad (2.45)$$

Que são as equações de campo de Einstein. A equação (2.43) é conhecida como ação de Einstein-Hilbert <sup>7</sup>, e é natural que as equações de campo de Einstein possam derivar do princípio variacional. Já que do ponto de vista físico, elas tentam descrever a dinâmica dos campos gravitacionais. Logo após completar suas equações, Einstein viu a necessidade de se adicionar um termo extra. Uma vez que suas equações apontavam para expansão ou contração do universo. Esse termo extra teria o papel de torna as equações de campo estáticas, sendo esse termo dado por uma constante multiplicada pelo tensor métrico, e desse modo as equações de campo ficam,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Podemos dizer que a constante cosmológica  $\lambda$  tem a equivalência da energia intrínseca de vácuo que é definido como <sup>8</sup>;

$$\lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_{vac} \quad (2.47)$$

Devemos observar que a constante deve ser bem pequena para que o limite newtoniano seja satisfeito. Sabemos que Einstein abandonou essa constante, após as primeiras observações, devida a Edwin Powell Hubble (Marsfield, 20 de novembro de 1889 - San Marino, 28 de setembro de 1953) que indicavam que o universo estava em expansão.

---

<sup>7</sup>Aqui omitimos a constante que aparece na equação (2.39), mas pode ser introduzida facilmente nas equações

<sup>8</sup>[www.if.ufrgs.br/thaisa/cosmologia/ConstanteCosmologica](http://www.if.ufrgs.br/thaisa/cosmologia/ConstanteCosmologica)



### 3 ONDAS GRAVITACIONAIS E WORMHOLES

Nesse capítulo, mostraremos como as equações de campo de Einstein, naturalmente preveem a existência de ondas gravitacionais e como a natureza dessa radiação é quadripolar. Veremos quais são os principais tipos de fontes de radiação gravitacional do universo e suas características. E definiremos por quais processos essas radiações são geradas. E os principais dispositivos que permitem detectar as ondas gravitacionais.

#### 3.1 Ondas Gravitacionais

Ondas são perturbações de qualquer natureza que se propagam transportando energia e informação, com a condição de que a onda deve se propagar a uma certa velocidade. Maxwell, ao unificar eletricidade e magnetismo mostra que suas equações implicam em uma equação de onda, com velocidade de propagação da luz. De modo mais formal, as equações de Maxwell escritas na forma covariante [26];

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^\nu \quad (3.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $J_\nu = \{c\rho, j_x, j_y, j_z\}$  é a quadricorrente. Pode-se mostrar que o tensor momento-energia será dado

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\kappa\rho} F^{\kappa\rho} \right]. \quad (3.2)$$

Expondo os termos da equação (3.1),

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\mu \partial^\nu A_\mu = \frac{1}{c} j_\nu, \quad (3.3)$$

e fixando o gauge de Lorentz,  $\partial_a A^a = 0$  obtemos a equação de onda do campo eletromagnético,

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = \frac{1}{c} j_\nu. \quad (3.4)$$

No caso particular onde não há correntes e cargas a equação de onda se torna,

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$  é o D'Alambertiano. Naturalmente a equação (3.5) tem como solução,

$$A_\mu = C_\mu e^{ik_a x^a} \quad (3.6)$$

Das equações de Einstein podemos mostra que eles derivam uma equação do

tipo onda, análoga as equações de Maxwell. Comumente devemos lineariza as equações de Einstein para chegarmos nas equações de onda. Para isso, consideramos uma perturbação da métrica do espaço plano, de modo que podemos escrever,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

onde sabemos que  $\eta_{\mu\nu}$  é métrica de Minkowski e  $h_{\mu\nu}$  é perturbação da métrica. É conveniente ressaltarmos que o espaço de Minkowski é caracterizado por uma região de campo fraco. Isso pode ser generalizado para o caso de campo gravitacional qualquer [3], onde  $|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$ . A intenção é reescrever as equações de Einstein em termos do fator perturbativo  $h_{\mu\nu}$ . Considerando que a métrica covariante<sup>1</sup>,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

substituindo as equações(3.7) e (3.8) na equação (2.15) chegamos a,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \cong \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma} \left( \frac{\partial h_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) + h(o^2). \quad (3.9)$$

Esse é forma linearizada da conexão afim, onde os termos do membro esquerdo são todos de primeira ordem e desprezamos os termos de ordem mais alta [27]. Agora do tensor de Ricci, equação (2.33), substituindo na equação acima, vem que;

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \partial_a \partial^a h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^{\beta} - h_{\nu,\beta\mu}^{\beta} \right). \quad (3.10)$$

O índice superior do tensor de curvatura, indica que estamos tomando até a primeira ordem da expansão. Do resultado da equação (3.10) obteremos por contração o escalar de curvatura até primeira ordem,

$$R_{\mu}^{\mu} = R = \partial_a \partial^a h - h_{\mu\beta}^{\mu\beta}. \quad (3.11)$$

Tomando a equação (2.41) e substituindo na equação (3.10) obteremos

$$\left( \partial_a \partial^a h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^{\beta} - h_{\nu,\beta\mu}^{\beta} \right) = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad (3.12)$$

comumente escrevemos;

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda}. \quad (3.13)$$

Observamos que a dinâmica das flutuações da métrica dependem diretamente da fonte,

$$\left( \partial_a \partial^a h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^{\beta} - h_{\nu,\beta\mu}^{\beta} \right) = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR BURACOS NEGROS PRÉ-GALÁCTICOS, INPE-15221-TDI/1314, Eduardo dos Santos Pereira pag 137

essa equação, na forma que esta, se torna difícil de resolver, mas podemos simplificar o problema através da mudança de coordenada;

$$x^\mu \rightarrow x^{\cdot\mu} = x^\mu + \varepsilon^\mu(x). \quad (3.15)$$

Devemos considerar, por questão de coerência, que  $\varepsilon^\mu(x)$  tem a mesma magnitude da perturbação  $h_{\mu\nu}$  e a métrica nesse novo sistema de coordenadas é;

$$g^{\cdot,\mu\nu} = \frac{\partial x^{\cdot\mu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\cdot\nu}}{\partial x^\rho} g^{\lambda\rho}. \quad (3.16)$$

Então a perturbação será dada,

$$h^{\cdot,\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\mu(x)}{\partial x^\rho} \eta^{\rho\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\rho} \eta^{\rho\mu}. \quad (3.17)$$

Agora os termos covariantes da perturbação são;

$$h_{\cdot\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu(x)}{\partial x^\mu}, \quad (3.18)$$

a equação (3.18) representa uma transformação de gauge, como sabemos tais transformações mostram que determinadas grupos de equações são invariantes sobre essas transformações. Logo, a equação (3.14) é invariante sobre a transformação de gauge (3.18), mas essa escolha nos permite adicionar infinitos graus de liberdade, permitindo assim infinitas soluções. Contudo se fixarmos um sistema particular de coordenadas, podemos eliminar esse problema. O sistema harmônico de coordenadas, constitui uma das possibilidades e é expressa por:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (3.19)$$

Pela condição harmônica expressa acima, temos da equação (3.9)

$$h_{\nu,\mu}^\mu = \frac{1}{2} h_{,\nu} \quad (3.20)$$

observamos que a equação (3.18) não satisfaz a equação (3.20), mas se introduzirmos a relação;

$$\square \varepsilon_\nu \equiv \frac{\partial h_\nu^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\nu}. \quad (3.21)$$

Então  $h_{\mu\nu}$  satisfaz a equação (3.20), aplicando isso à equação (3.14) obtemos uma equação de onda;

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (3.22)$$

claro que no vácuo teremos;

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.23)$$

As soluções que satisfazem as equações (3.22) e (3.23) admitem o princípio da superposição, pois agora as equações estão linearizados [28]. De modo análogo às equações clássicas do eletromagnetismo que tratam de cargas aceleradas, as chamadas equações de Jefimenko dos potenciais retardados [29]. Então a solução geral da equação da equação (3.22) são:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.24)$$

Mostraremos que a equação (3.24) representa uma emissão quadripolar de ondas gravitacionais, uma vez que o termo de monopolo é nulo devido a conservação de massa da fonte e o termo dipolo também é nulo devido a conservação de momento. Considerando as dimensões da fonte como,  $R = |\mathbf{x}'|$ , são muitas pequenas em comparação com a distancia da fonte,  $r = |\mathbf{x}|$ , até o ponto de recepção, logo obtermos;

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq |\mathbf{x}| - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \quad (3.25)$$

Onde consideramos que  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$ , desse modo podemos escrever;

$$h^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3\mathbf{x}' T^{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}'). \quad (3.26)$$

Levando em conta a conservação do tensor momento-energia [30],

$$T_{,0}^{00} + T_{,k}^{0k} = 0, \quad (3.27)$$

$$T_{,0}^{0i} + T_{,k}^{ik} = 0, \quad (3.28)$$

e ainda que

$$\int (T^{ik} x^j)_{,k} d^3x = \int T_{,k}^{ik} x^j d^3x + \int T^{ij} d^3x. \quad (3.29)$$

Pelo teorema de Gauss o lado esquerdo da equação acima é nulo,

$$\int T^{ij} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (T^{i0} x^j + T^{j0} x^i) d^3x, \quad (3.30)$$

de modo análogo, temos ainda,

$$\int (T^{0k} x^i x^j)_{,k} d^3x = \int T_{,k}^{0k} x^i x^j d^3x + \int (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x. \quad (3.31)$$

Aplicando novamente o teorema de Gauss;

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^l x^k d^3x = \int T^{lk} d^3x, \quad (3.32)$$

como sabemos para campo fraco  $T^{00} \simeq \rho$ , de imediato podemos escrever,

$$h^{lk} = -\frac{2G}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(x') x'^l x'^k d^3x' \right]_{t-r}. \quad (3.33)$$

Pela definição de tensor de quadrupolo vem,

$$Q^{lk} \equiv \int (3x'^l x'^k - r'^2 \delta^{lk}) \rho(x') d^3x', \quad (3.34)$$

e finalmente podemos escrever  $h^{lk}$  como;

$$h^{lk} = -\frac{2G}{3r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{lk} + \delta^{lk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho(x') d^3x' \right]. \quad (3.35)$$

Para descrever a energia irradiada pela fonte de ondas gravitacionais, devemos considerar o tensor momento-energia do campo gravitacional:

$$t_\mu^\nu = \partial_\mu h^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu h^{\alpha\beta})} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (3.36)$$

onde a densidade lagrangiana será dada por;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left( \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2\partial^\mu h_{\mu\nu} \partial_\lambda h^{\lambda\nu} + 2\partial^\mu h_{\mu\nu} \partial^\nu h - \partial_\mu h \partial^\mu h \right). \quad (3.37)$$

Considerando que não há fluxo de massa na fonte, então o segundo termo do segundo membro da equação (3.35) se anula; agora o fluxo radial através de uma superfície será dado por:

$$t_s^0 n^s = \frac{G}{36\pi r^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q_{km}}{\partial t^3} n^l n^m + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \right)^2 \right]. \quad (3.38)$$

A energia total emitida por unidade de ângulo sólido por unidade de tempo é dado por  $-r^2 t_s^0 n^s$ , logo teremos,

$$-\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q_{km}}{\partial t^3} n^l n^m + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \right)^2 \right]. \quad (3.39)$$

Levando em conta as identidades abaixo;

$$\frac{1}{4\pi} \int n^l n^m d\Omega = \frac{1}{3} \delta^{lm}, \quad (3.40)$$

e que

$$\frac{1}{4\pi} \int n^l n^m n^m n^o d\Omega = \frac{1}{15} \left( \delta^{kl} \delta^{km} + \delta^{km} \delta^{lo} + \delta^{k0} \delta^{lm} \right). \quad (3.41)$$

Diretamente da equação (3.39) podemos escrever em unidades relativísticas;

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \frac{\partial^3 Q_{kl}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q_{km}}{\partial t^3}, \quad (3.42)$$

essa última equação mostra a potência de uma fonte emitindo ondas gravitacionais e vemos também a natureza quadripolar dessa radiação.

### 3.2 Polarização de Ondas Gravitacionais

Mostraremos agora que as ondas gravitacionais admitem dois estados polarizados de modo análogo as equações do electromagnetismo. São esses estados de polarização pelos quais podemos medir diretamente suas amplitudes e também como esses estados afetam a matéria. Para determinarmos as polarizações tomaremos uma solução genérica dada por:

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{R} \left[ A_{\mu\nu} e^{ik_a x^a} \right] \quad (3.43)$$

onde estamos considerando a parte real da solução. Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, consideraremos a onda gravitacional se propagando apenas na direção  $z$ , disso vem que;

$$k^\mu = (k, 0, 0, k). \quad (3.44)$$

Por essa definição e substituindo a equação (3.43) na equação (3.23) encontramos a expressão:

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad ; \quad A_{\mu\nu} k^\nu = 0. \quad (3.45)$$

Claramente a equação (3.45) mostra que as componentes da amplitude são todas ortogonais as componentes do quadrivetor de onda, com isso podemos obter relações entre alguns termos,

$$A_{\mu 0} = A_{\mu 3}. \quad (3.46)$$

Agora, pela escolha de gauge que estamos adotando, equação (3.18), nos permite introduzirmos um quadrivetor arbitrário  $U^\mu$  de modo que podemos impor,

$$A_{\mu\nu} U^\mu = 0. \quad (3.47)$$

Se atribuirmos a  $U^\mu$  um quadrivetor velocidade representado uma partícula teste e se considerarmos que essa partícula esteja sobre a influencia de uma onda gravitacional. E em seguida procurando um referencial onde a partícula esteja em repouso, o quadrivetor velocidade é escrito como;

$$U^\mu = \delta_0^\mu \quad (3.48)$$

Disso pelas equações (3.46) e (3.47) concluimos

$$A_{\mu 0} = A_{\mu 3} = 0. \quad (3.49)$$

O significado físico da última equação diz que, não há perturbação dos componentes da métrica na direção de propagação, ou seja, as perturbações da métrica sempre são transversais a direção de propagação. Aplicando a condição de gauge sobre  $A^{\mu\nu}$  vem;

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^\mu k^\nu - \varepsilon^\nu k^\mu + \eta^{\mu\nu} (\varepsilon^a k_a) \varepsilon \quad (3.50)$$

pelos equações (3.44) e (3.49) encontramos as relações;

$$\begin{aligned} A'^{00} &= -k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) & A'^{11} &= A^{11} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) \\ A'^{01} &= -k\varepsilon_1 & A'^{12} &= A^{12} \\ A'^{02} &= k\varepsilon_2 & A'^{22} &= A^{22} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.51)$$

com base na escolha do gauge, podemos fazer,  $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0$ ,  $\varepsilon^0 + \varepsilon^3 = 0$  e  $\varepsilon^0 = -\varepsilon^3$ . Então resolvendo o sistema (3.51), determinamos que;

$$A'^{11} + A'^{22} = 0 \quad e \quad A'^{12} = -A^{12} \quad (3.52)$$

pelo fato de termos  $A'^{11} + A'^{22} = 0$ , implicando diretamente em traço nulo  $Tr h = h_{\beta}^{\beta}$ . Mostrando mais uma vez que as perturbações são transversais a direção de propagação. Como a matriz das perturbações possui traço nulo, denominamos isso de calibre "*Transverse-traceless Gauge*" conhecido como calibre TT. Mais explicitamente, expressamos as componentes perturbadas da matriz como:

$$\|h_{\mu\nu}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Reescrevendo agora a equação (3.44) como;

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{R}(h_+ e_{\mu\nu}(+) + h_\times e_{\mu\nu}(\times)) e^{ik_a x^a}, \quad (3.54)$$

onde a componente de polarização  $e_{\mu\nu}(+)$  é chamada de polarização direta e  $e_{\mu\nu}(\times)$ , é chamada de polarização transversal, cujos os termos são dadas por;

$$e_{\mu\nu}(+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{\mu\nu}(\times) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Se tivermos um conjunto de partículas, das quais não estejam na mesma direção de propagação das ondas gravitacionais. Iremos verificar que essas partículas serão afetadas de dois modos distintos. Essa constatação é fundamental para medirmos a existência dessas ondas. Para visualizarmos isso de um modo mais simples, temos duas partículas contidas em plano transversal a direção de propagação. Quando a onda gravitacional passa por elas, esperamos que elas comecem a oscilar devido a própria oscilação do espaço tempo. Que podemos entender como a presença de uma força de maré, dada por;

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2} = R^\mu_{\rho\delta\gamma} v^\rho v^\delta \eta^\gamma, \quad (3.56)$$

onde  $\eta^\mu$  é o quadrivetor posição das partículas testes. Pelo referencial em que as partículas estão em repouso e levando em conta o limite newtoniano, encontramos;

$$\frac{d^2\eta^i}{dt^2} \simeq R^i_{00j} \eta^j, \quad (3.57)$$

Pelo gauge adotado e pela teoria linearizada, o tensor de Riemann é escrito como;

$$R^i_{0j0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^i_{TT}, \quad (3.58)$$

desse modo a equação (3.57) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\eta^k}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^k_{TT} \eta^j. \quad (3.59)$$

Concluimos que a força que duas partículas experimentam pela passagem de uma onda gravitacional transversal é dada por;

$$f^k \simeq -m \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^k_{TT} \eta^j. \quad (3.60)$$

Com base na equação (3.54) podemos expressar as componentes da força para o caso da polarização direta, que resulta em;

$$f^x \simeq \frac{1}{2} h_+ \omega^2 \cos[\omega(t-z)] \eta^x, \quad f^y \simeq -\frac{1}{2} h_+ \omega^2 \cos[\omega(t-z)] \eta^y. \quad (3.61)$$



Obviamente como estamos considerando que as partículas estão livres de ações externas, com exceção da ação das próprias ondas gravitacionais, eles devem oscilar com a mesma frequência das ondas interagentes. Notamos que o divergente das forças de polarização direta são nulas. De modo análogo obteremos o mesmo resultado para a polarização transversal. Na figura 3 temos uma representação gráfica do efeito da polarização de ondas.

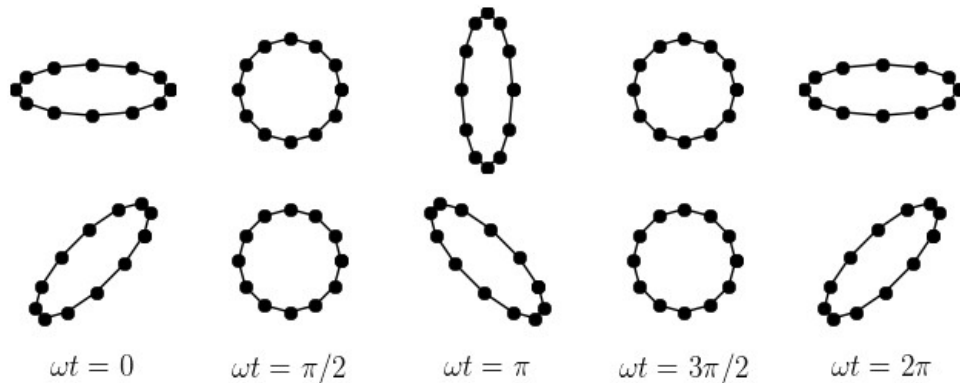


Figura 3: Representação de como anéis de partículas são afetados pela presença de uma onda gravitacional, que se propaga de modo perpendicular ao plano das partículas. Na parte superior temos a influencia da polarização direta  $h_+$ , e na parte inferior temos a influencia da polarização transversal  $h_\times$

Ainda é interessante observarmos as características da energia que as ondas gravitacionais transportam. Contudo não podemos determinar a densidade de energia apenas com o comprimento de onda, mas podemos considerar um conjunto amplo de comprimentos de onda em um região. Com isso, podemos provar que o tensor momento energia da teoria linearizada no gauge  $TT$  é dado por [27];

$$t_{\mu\nu}^{GW} = \frac{1}{32\pi} \frac{c^2}{G} \omega^2 \langle (\partial_\mu h_{ij}^{TT}) (\partial_\nu h_{ij}^{TT}) \rangle. \quad (3.62)$$

Ali estamos considerando o valor médio dos vários comprimentos de onda em consideração. Por simplificação levamos em conta apenas o caso especial em que a onda se propaga na direção  $z$  e das componentes não nulas, nos leva a;

$$t_{00}^{GW} = \frac{t_{zz}^{GM}}{c^2} = -\frac{t_{0z}^{GM}}{c} = \frac{1}{32\pi} \frac{c^2}{G} \omega^2 (h_+ + h_\times), \quad (3.63)$$

como sabemos  $t_{00}^{GW}$  é a densidade de energia, conseqüentemente  $t_{zz}^{GM}$  é a densidade de momento do fluxo e  $t_{0z}^{GM}$  é a energia propagada na direção  $z$  por unidade de área e tempo. Não podemos deixar de observar que a densidade de energia depende diretamente das polarizações direta e transversal. Em outras palavras, a densidade de energia irradiada pela fonte de ondas gravitacionais carrega informação da fonte.

### 3.3 Fontes de Ondas Gravitacionais

Na seção anterior mostramos que de modo análogo as cargas elétricas aceleradas emitindo ondas eletromagnéticas. As massas aceleradas tendem a causar flutuações no espaço-tempo como ondas que se propagam no próprio espaço. Naturalmente que grandes e massivos corpos celestes, como sistemas binários de estrelas ou buracos negros devem emitir, grandes quantidades de radiação gravitacional. Sendo desse modo locais ideias para se detectar ondas gravitacionais. Com essa motivação, é que nessa seção iremos conhecer os principais modos de detectar as ondas gravitacionais de modo direto e bem como as enormes dificuldades inerentes de se realizar essas medidas<sup>2</sup>.

Temos que determinar quais as frequências típicas que devemos esperar para fontes mais comuns de ondas gravitacionais. Considerando alguns corpos celestes, os movimentos associados com as massas desses corpos são responsáveis por contribuir para emissão de ondas gravitacionais, tais como pulsação e rotação. Contudo, muitas vezes podemos determinar a frequência de oscilação considerando a frequência natural auto-gravitacional do corpo, dada por;

$$f_0 = \sqrt{\frac{G\bar{\rho}}{4\pi}} \quad (3.64)$$

onde  $\bar{\rho}$  representa a densidade do corpo. Embora essa fórmula seja claramente do domínio Newtoniano, ainda representa uma boa aproximação para se determinar sua frequência natural [31], com isso reescrevemos (3.64) como;

$$f_0 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3GM}{R^3} \right)^{1/2} \simeq 1kHHz \left( \frac{10M_\odot}{M} \right) \quad (3.65)$$

Com base na equação (3.65), encontraremos para uma estrela de nêutrons de  $1,4M_\odot$  e raio de  $10km$  uma frequência de  $f_0 = 1,97kHHz$ , já para um buraco negro de  $10M_\odot$  e raio de  $30km$ , teremos uma frequência de  $1kHHz$ . A frequência cai com o aumento da massa, tanto que para um super buraco negro de  $2,5 \cdot 10^6 M_\odot$  teremos  $f_0 = 4mHz$ . Para os corpos mais comuns, como as estrelas gigantes, estrelas de nêutrons e buracos negros, as frequência de oscilação devem estar entre  $1 a 10^4 Hz$ . Estando esse intervalo ao alcance da maioria dos detectores terrestres. Olhando a equação (3.42), notaremos que a ordem de grandeza do fator de escala é de  $L_0 = c^5/G = 3,6 \cdot 10^{52}$ , uma luminosidade milhares de vezes maior que a luminosidade de todas as estrelas do universo observável. Embora essa luminosidade na verdade seja uma fração de  $L_0$ . Por exemplo o evento detectado pelo LIGO tinha uma luminosidade no instante da colisão de 7 vezes toda a energia produzida pelas estrelas do universo [32]. Pode-se estimar a luminosidade aparente de fonte de ondas

<sup>2</sup>Surpreendentemente, no dia 12 de Fevereiro de 2016, foi anunciado que um sinal de ondas gravitacionais foi encontrado pelo LIGO nos Estados Unidos, comentaremos isso posteriormente nessa seção

gravitacionais, se olharmos para equação (3.35) podemos reescreva-la como;

$$h_{jk} = \frac{2}{r} \frac{d^2 Q_{jk}}{dt^2}. \quad (3.66)$$

Em seguida combinando isso com a equação (3.39) chega-se à equação da luminosidade aparente,

$$F \sim \frac{|\dot{h}|^2}{16\pi}. \quad (3.67)$$

A relação acima pode ser usada para se determinar a amplitude da radiação gravitacional, se conhecermos a taxa de emissão de energia da fonte em forma de ondas gravitacionais. Considerando que a fonte esteja a uma distância  $r$ , emitindo uma energia  $E$  durante um período  $T$  e com frequência determinada  $f$ . E notando ainda que  $\dot{h} = 2\pi fh$ , mas  $F$  pode ser dado de modo alternativo como  $F \sim E/4\pi r^2 T$ , isso leva a;

$$h \sim \frac{1}{\pi r f} \sqrt{E/T}. \quad (3.68)$$

É mais conveniente, contudo utilizarmos a amplitude efetiva, levando em conta a soma sobre todos os ciclos;

$$h_{eff} \sim \frac{1}{\pi r} \sqrt{E/f}. \quad (3.69)$$

Notamos que a amplitude efetiva é inversamente proporcional frequência de emissão. Como o fluxo a uma distância grande pode ser muito fraco, esperamos que a amplitude seja pequena.

Podemos imaginar que até corpos acelerados típicos do nosso cotidiano possam produzir ondas gravitacionais. Mas intuitivamente devemos saber que a intensidade dessas ondas sejam bem fracas. Por exemplo, tomemos duas massas com  $10^3 \text{ kg}$  cada, conectadas por um eixo de  $10 \text{ m}$ . Onde as mesmas podem girar de modo assimétrico em torno do eixo com frequência de  $20 \text{ Hz}$ , com isso estima-se que a amplitude desse sistema seja  $h \sim 5 \cdot 10^{-43}$  [31]. Esse valor é muitas ordem de grandezas menor que a sensibilidade dos instrumentos. Mas se tivermos massas da ordem de estrelas massivas e rápidas o bastante, teremos como medir as amplitudes eventuais ondas gravitacionais. Se a estrela entre em colapso de modo assimétrico e em alta rotação, as simulações preveem que supernovas desse tipo devem consumir entre  $10^{-7}$  a  $10^{-5}$  de sua massa. Sendo que uma parte significativa será emitida em forma de ondas gravitacionais. Então podemos estimar a amplitude com base na equação (3.68), para tomemos uma super-nova conhecida de nossa galáxia. Estando a uma distância de  $10 \text{ kpc}$  e emitindo uma energia de  $10^{-7}$  com frequência de  $1 \text{ kHz}$ . Sabendo-se que essa super-nova teve um burst com duração de  $1 \text{ ms}$ , logo por

comparação outro super-nova terá uma amplitude aproximada;

$$h \sim 6 \cdot 10^{-21} \left( \frac{E}{10^{-7} M_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{1ms}{T} \right)^{1/2} \left( \frac{1kHz}{f} \right) \left( \frac{10kpc}{r} \right). \quad (3.70)$$

Pulsares são eventos extremos o bastante para produzir ondas gravitacionais com amplitude perceptíveis para os instrumentos atuais, desde que estejam próximos o suficiente. Para estimar a amplitude para esse tipo de evento, utilizamos agora uma estrela de nêutrons de massa  $M$  e raio  $R$  que rotaciona assimetricamente com frequência  $f$ . Essa assimetria esta diretamente associada aos jatos de emissão do pulsar. Podemos considerar a assimetria como um tipo de colisão de uma massa  $m$  sobre a superfície da estrela de nêutrons. Desse modo se uma estrela possui um momento de inercia de  $2MR^2/5$ , então a fração assimétrica será dada por  $\epsilon = 5m/2M$  Usando uma aproximação grosseira dada por;

$$h \sim \frac{2Mv^2}{r} \quad (3.71)$$

então para o pulsar teremos;

$$h \sim \frac{16}{5} \frac{\pi^2 R^2 f^2 \epsilon M}{r}, \quad (3.72)$$

com respectiva luminosidade dada por;

$$L \sim \frac{16}{125} (2\pi f)^6 \epsilon^2 M^2 R^4. \quad (3.73)$$

Estima-se que a crosta de estrelas de nêutrons não suportem um fator de assimetria maior do que  $\epsilon \sim 10^{-6}$  [33]. As equações (3.72) e (3.73) ainda podem ser usadas para ondas gravitacionais produzidas por processo de acreção sobre a superfície da estrela de nêutrons. Um exemplo bem conhecido é o pulsar do caranguejo, com uma amplitude esperada de  $h \sim 1,5 \cdot 10^{-24}$  a uma distância de  $20 kpc$  [34]. Para um sistema binário de estrelas, ambas com mesma  $m$  com uma separação orbital  $R$ , a radiação gravitacional para esse sistema será emitida, como nos outros casos já citados, pelo movimento de massa não esfericamente simétrica. Considere que a massa em movimento não esfericamente simétrica seja expressa pela relação:

$$(Mv^2)_{\text{não esférica}} = M(\Omega R)^2 = \frac{M^2}{R}, \quad (3.74)$$

com  $\Omega$  sendo a velocidade angular orbital e  $M$  é massa da parte não esférica, E por simplificação estamos considerando as orbitas circulares. Se olharmos a equação (3.71) obteremos a amplitude da onda gravitacional para o sistema binário de estrelas;

$$h \sim \frac{2}{r} M^{5/3} \Omega^{2/3}. \quad (3.75)$$

Um dos pulsares mais famoso é o pulsar das binárias *PSR B1993+16* [6], que rendeu um

prêmio Nobel para seus descobridores, Russell Hulse e Joseph Taylor pela sua descoberta em 1974. Sendo um dos pulsares mais brilhantes que se conhece. O pulsar *PSR 1993+16* constitui um laboratório ideal para se testar efeitos relatividades, entre eles a verificação indireta da emissão de ondas gravitacionais. Segunda o que vimos até aqui, é de se esperar que o sistema perda energia por emissão de ondas gravitacionais. E por consequência tenha o seu período de orbita diminuído, cuja variação com tempo é calculada por;

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5} \left( \frac{2\pi\mathcal{M}}{P_b} \right)^{5/3}, \quad (3.76)$$

com  $\mathcal{M} = \mu^{3/5}M^{2/5}$ , onde  $\mu$  é a massa reduzida. O tempo de duração da orbita do sistema, o chamado de tempo chirp, é dado por;

$$t_{chirp} = \frac{5M}{96} \frac{1}{v} \left( \frac{M}{R} \right)^{-4} \quad (3.77)$$

com  $v = \mu/M$ . O tempo  $t_{chirp}$  esta relacionado com período da orbita  $P_b$  e a taxa de variação do período da orbita  $\dot{P}_b$ . Pelo fato de o tempo total da existência da orbita ser a razão da energia cinética pela luminosidade emitida  $t_{chirp} = Mv^2/rL_b$

$$t_{chirp} = \frac{P_b}{\dot{P}_b} \sim 1,9 \cdot 10^{18}s. \quad (3.78)$$

Com isso podemos inferir que  $\dot{P}_b = 1,5 \cdot 10^{-14}s$ , mas se compararmos com o valor observado  $\dot{P}_O = -(2,4184 \pm 0,00009) \cdot 10^{-12}$ , essa discrepância se deve ao fato de estarmos considerando um orbita circular dentro do regime Newtoniano. Mas podemos refinar o cálculo levando em conta a excentricidade da orbita  $e$ , e com base na referencia[6] teremos;

$$\dot{P}_b = -\frac{192}{5}\pi \left( \frac{2\pi\mathcal{M}}{P_b} \right)^{5/3} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{90}e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2}. \quad (3.79)$$

Usando uma excentricidade observada atualmente de  $e = 0,62$ , computamos para a equação (3.79) um valor de  $\dot{P}_T = -(2,40242 \pm 0,00002) \cdot 10^{-12}$ . Sendo esse um valor muito mais preciso que obtido para a orbita circular. Ainda é possível melhorar esse valor teórico levando em consideração que o sistema de binárias estão se movendo de modo acelerado em direção ao centro da galáxia. Plotando os dados para mudança de período da orbita com tempo [35]; Um forte candidato para fontes observáveis de ondas gravitacionais são os **MACHOS** “Massive Compact Halo Objects”, sendo estes um dos possíveis contribuinte para a matéria escura. Acredita-se que os **MACHOS** sejam constituídos de mini-buracos negros com massa inferior a  $1M_\odot$  compondo sistemas binários. Esses mini-buracos negros devem ter surgido no universo primordial, numa época de elevadas densidade de matéria e energia. Estima-se que devem existir cerca de  $\sim 5 \cdot 10^8$  sistemas

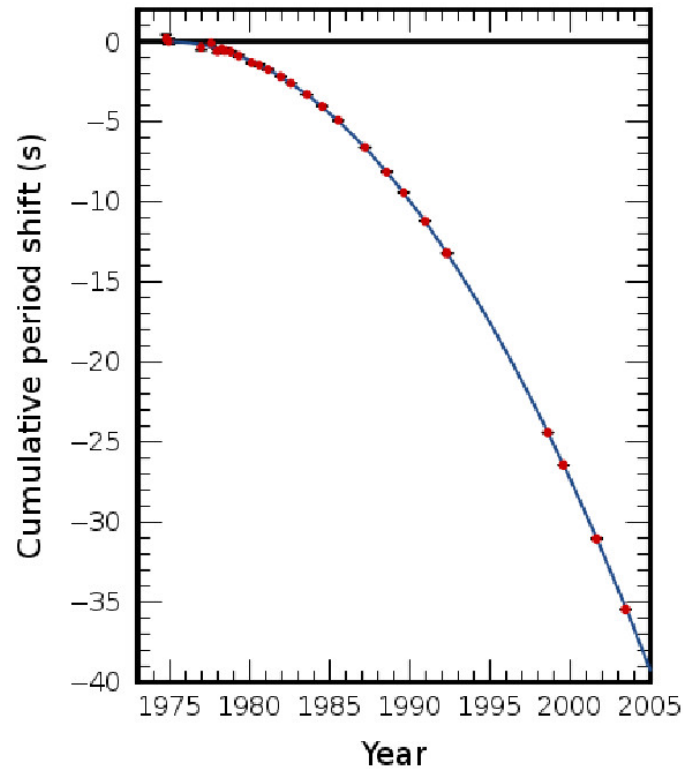


Figura 4: Diminuição orbital do PSR B1913 + 16, os pontos indicam a mudança do período da órbita em várias épocas distintas. A curva representa os valores teóricos calculados pela relatividade geral

binários de mini-buracos negros com massa entre  $0,5M_{\odot}$  e  $1M_{\odot}$  no halo da nossa galáxia. Porém a taxa de coalescência é prevista como sendo baixa, com tempo estimado da ordem da idade do universo. Resultando num evento de fusão de binário de um a cada 500 anos!, isso torna uma detecção dentro de nossa galáxia improvável. Mas se considerarmos os mini-buracos negros no espaço intergaláctico, dentro de um volume esférico de  $1.6Mpc$  de raio, espera-se uma taxa de eventos 3 por ano. Melhorando bastante as chances de se registrar esses eventos [36]. Podemos citar também as estrelas quarks, objetos hipotéticos mais extremos que as estrelas de nêutrons que estão na iminência de colapsar para um buraco negro. Acredita-se que esses objetos sejam resultantes de super novas do tipo *II* ou ainda de hipernovas. Logo como vimos, processos que dão origem as estrelas quarks deverão emitir pulsos de ondas gravitacionais. Tornando os detectores de ondas gravitacionais poderosas ferramentas para estudar objetos astronômicos exóticos.

Para distâncias muito grandes, da ordem da escala cosmológica, as fontes discretas de ondas gravitacionais se superpõem, de modo a formarem um fundo estocástico de radiação gravitacional. Isso é semelhante a radiação cósmica de fundo. Os modelos cosmológicos mostram que ondas gravitacionais surgiram a partir do Big Bang, constituindo um fonte isotrópica de radiação gravitacional primordial. Outra possível contribuição

para fontes isotrópicas, são as chamadas cordas cósmicas e sistemas binários de estrelas de nêutrons em fusão, bem como super buracos negros. Os discos de acreção de estrelas de nêutrons são os representantes mais comuns de fontes não isotrópicas [37]. É comum relacionarmos a intensidade das ondas gravitacionais primordiais de fundo com a densidade crítica do universo  $\rho_{crit}$ . Escrevendo primeiramente uma parametrização que leva em conta a densidade crítica  $\rho_{crit} = 3H_0^2 c^2 / 8\pi G$  e o logaritmo da frequência:

$$\Omega_{gw}(f) = \frac{1}{\rho_{crit}} \frac{d\rho(f)}{d \ln(f)}. \quad (3.80)$$

A amplitude de oscilação das ondas gravitacionais de fundo  $h(f)$  esta relacionada com a chamada densidade de potencia espectral  $h(f) = (S_{gw}(f))^{1/2}$ :

$$S_{gw}(f) = \frac{3H_0^2 c^2}{10\pi^2} \frac{\Omega(f)}{f^3}. \quad (3.81)$$

Disso, devemos obter para a amplitude;

$$h(f) = (5.6 \cdot 10^{-22}) h_{100} (\Omega(f))^{1/2} \left( \frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{3/2} H z^{-1/2} \quad (3.82)$$

com  $h_{100} = H_0 / (100 \text{ Km/s/Mpc})$ . Devemos ter em mente que  $h(f)$  é um valor médio, devido às flutuações para as diversas fontes que compõe a radiação gravitacional de fundo. Podemos construir um gráfico para distribuição dos valores de  $\Omega(f)$ . A partir desse gráfico (figura 5), vemos que linha vermelha contínua representa a densidade de energia das ondas gravitacionais em relação a abundância de elementos predito pela nucleossíntese do Big Bang (BBN). Essa curva ainda coincide ampla gama de valores para a densidade de energia da radiação de micro-ondas de fundo. Temos ainda duas outras regiões, onde as pesquisas com LIGO se concentram. Outra linha interessante apresentado no gráfico, é o comportamento de  $\Omega(f)_{gw}$  para a influencia da inflação cósmica e como essa esta relacionada com a radiação cósmica de fundo (CMB). Vale ainda comenta uma possível fonte isotrópica exótica, as chamadas de cordas cósmicas. As cordas cósmicas foram preditas teoricamente por Tom Kibble em 1970. Definidas como um defeito topológico unidimensional resultante da quebra de simetria por transição de fase, semelhante as rachaduras que aparecem na cristalização de muitas substâncias [38]. Os modelos teóricos mostram que cordas cósmicas apesar de muito finas são muito extensas e incrivelmente massivas, por isso acabam por distorcer o espaço ao seu redor. Ainda é possível mostrar que oscilações de cordas cósmicas, por conterem uma enorme densidade, produzem poderosos pulsos de ondas gravitacionais. Uma ampla distribuição do espectro está concentrada num intervalo de poucos décimos de milionésimos de  $Hz$ . Mas acima de  $\Omega_{gw} \sim 10^{-6}$

teremos uma distribuição sobre uma faixa ampla de frequências <sup>3</sup>.

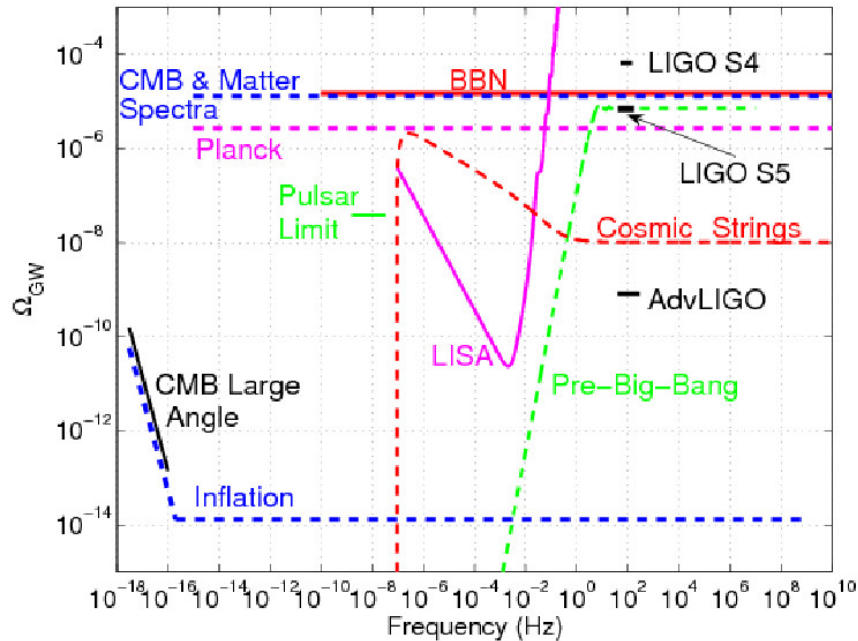


Figura 5: Nesse gráfico temos a comparação entre diferentes fontes de ondas gravitacionais de fundo estocástico. Vemos duas regiões de pesquisa  $S4$  e  $S5$ , para os experimentos do LIGO na faixa de  $100\text{ Hz}$ . O futuro projeto de interferômetro no espaço, o LISA, deve cobrir uma distribuição espectral mais diversificada para uma grande faixa de frequência. Além de vermos as previsões para os modelos inflacionários, CMB, BBN.

### 3.4 Detectores de Ondas Gravitacionais e a Sensibilidade dos Métodos

Nessa seção discutiremos os principais métodos que são utilizados para se detectar os sinais de ondas gravitacionais das mais diversas fontes provenientes do cosmos. Como sabemos a intensidade da força gravitacional é muito fraca em comparação com as outras forças. Tornando as impressões de ondas gravitacionais muito tênues, como vimos na seção anterior. Os detectores devem ser construídos com alto refinamento, para serem sensíveis o bastem, além de terem de eliminar muitas fontes de ruído equiparáveis ao sinal de interesse. Existem basicamente dois tipos de detectores de ondas gravitacionais, apesar que para cada tipo temos vários modos de arquitetura. São os detectores de massa ressonante e os detectores de feixe. Os detectores de massa ressonante registram a energia ressonante de vibração do aparelho devida as ondas gravitacionais. Já os detectores de feixe, as ondas gravitacionais interagem diretamente com feixes de luz em interferência.

<sup>3</sup><http://inspirehep.net/record/1184320/plots>



### 3.4.1 Detectores de Massa Ressonante

Os detectores de massa ressonante, consistem em uma massa sólida de forma esférica ou cilíndrica que funcionam como antena para o sinal. Sempre que uma onda gravitacional for capaz de impressionar a antena, será quando a onda tiver a mesma frequência dos modos quadripolares da antena. Formalmente esses tipos de detectores podem ser descritos como uma oscilador harmônico amortecido e forçado. Relembrando das equações (3.58) e (3.60):

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{2}l_0h_{xx,00}^{TT} + f_N \quad (3.83)$$

sendo que a função  $\xi$  nos diz o intervalo de deslocamento que antena experimenta. As forças de amortecimento advém da própria tendência da estrutura de dissipar a energia absorvida. O termo forçado constitui a contribuição da onda gravitacional mais um termo  $f_N$ , representando os termos de ruído [5]. As primeiras gerações de detectores usavam cristais piezoelétricos, para tentar extrair os possíveis sinais presentes na antena, operando à temperatura ambiente. Na geração mais recente a massa ressonante esta conectada por vários transdutores de sinais elétricos, que convertem as vibrações mecânicas em sinais elétricos amplificados para serem processados e analisados posteriormente. Para

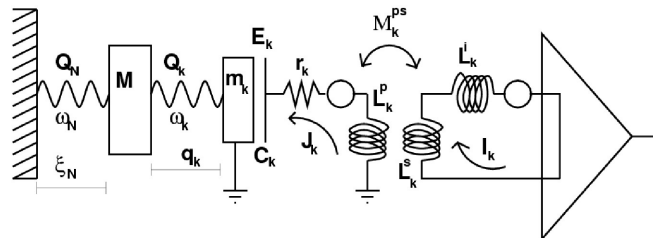


Figura 6: Aqui temos uma representação esquemática de um detector de massa ressonante. Onde vemos um oscilador harmônico  $Q_N$  de massa  $M$  com frequência  $\omega_N$  acoplado a um ressonador  $Q_K$  de frequência  $\omega_k$  que atua como um amplificador para  $\xi_N$ . Por sua vez o sistema de massa ressonante está acoplado a um transdutor elétrico

os detectores lidarem com sinais extremamente ínfimos, devem se eliminar os ruídos de diversas fontes, para isso, costuma-se resfriar o sistema a temperaturas ultra-baixas (da ordem  $\sim mK$ ). Veremos adiante as diversas fontes de ruído [39]. Um dos primeiros a elaborar detectores de massa ressonante, foi o físico Joseph Weber da universidade de Maryland em 1960 [40]. O dispositivo consistia de um cilindro de alumínio com 2 m de comprimento e 1 m de diâmetro com frequência de ressonância 1660 Hz. Utilizando sensores piezoelétricos de precisão, para época, o dispositivo de Weber tinha sensibilidade de captar amplitudes de vibração da ordem  $\sim 10^{-16}m$ . Em 1969 Weber usando dois detectores separados por uma distância de 1000 Km, registrou um sinal em ambos os aparelhos condizente, segundo Weber, a uma onda gravitacional. Mas todos os testes

feitos, por outros centros de pesquisa deram resultados nulos [41]. A moderna geração de



Figura 7: Nessa imagem vemos Joseph Weber configurando seu detector cilíndrico, com modo de ressonância sensível a ondas gravitacionais com frequência próxima a  $1660 \text{ Hz}$ . Esse dispositivo funcionava à temperatura ambiente e utilizava cristais piezoelétricos para transmitir os possíveis sinais de ondas gravitacionais presentes no detector

antenas de massa ressonante em barra, utilizam sofisticados transdutores de sinal com baixo ruído térmico e ótimos isolamentos ante-vibrações externa. Além disso é fundamental que os detectores sejam confinados e resfriados as menores temperaturas possíveis, para reduzir o ruído térmico. Os principais detectores de massa ressonante em barra foram **Allegro**, localizado na Louisiana (USA) constituído de uma massa de  $2296 \text{ kg}$  de alumínio resfriado a  $4,3 \text{ k}$ . **Niobe**, Perth (Austrália) constituído de uma massa de  $1500 \text{ kg}$  de nióbio resfriado a  $4 \text{ k}$ . **Nautilus**, Roma (Itália) com massa de alumínio de  $2260 \text{ kg}$  resfriado por hélio líquido a  $130 \text{ mK}$ . **Auriga** Padova (Itália) também constituído de uma massa de alumínio  $2230 \text{ kg}$  resfriados a  $200 \text{ mK}$ . Esses grandes detectores de barra juntamente com outros tipos de detectores formavam uma rede de colaboração de pesquisa. Infelizmente sem evidências de medições de ondas gravitacionais, levou boa parte desses experimentos a serem encerrados nos anos 2000, Apenas o **Nautilus** e **Auriga** continuam operando em conjunto com os experimentos **LIGO** e **Virgo**.

Pode-se mostrar que massas esféricas representam melhor configuração que outros designs, pois ela maximiza a energia absorvida pela antena. O físico Robert Lull Forward, foi o primeiro a propor a construção de detectores esféricos no início dos anos 1970. Apesar de os detectores esféricos serem superiores aos detectores de barra, as dificuldades técnicas para sua construção são bem maiores. Tanto que os primeiros só entraram em operação no início dos anos de 1990. Os detectores de massa esféricos tem seu principal componente um esferóide, onde basicamente as oscilações das ondas gravitacionais efetivas sempre vão ser a superposição dos cinco modos quadrupolares degenerados. O fato de os modos serem degenerados significa que ambos tem a mesma frequência de oscilação.

Podemos dessa forma tratar os modos como antenas distintas em diferentes direções. Logo necessitamos de pelo menos cinco transdutores de sinais para serem capazes de mensurar a informação contida na onda gravitacional, devido aos modos de vibração. Quando a onda interage com detector, ela transfere energia para seus modos de vibração. mesmo que o pulso da onda cese, o sistema ainda continuará vibrando. Permitindo uma melhor análise para amplitude e a fase da onda, já que com isso diminuimos o ruído aleatório. Existem ainda os ressonadores associados à antena de massa ressonante, que funcionam como amplificadores do sinal captado pela antena. Eles compõem sistemas que vibram a mesma frequência que antena, como tal representa uma possível fonte de ruído para as medições. Inevitavelmente todo o dispositivo está sobre a influencia de flutuações rando-mica da matéria, o chamado de movimento browniano. Além dos próprios transdutores e ressonadores acoplados contribuirão para o ruído. Devemos levar em conta também as vibrações provenientes de abalos sísmicos que produzam sinal dentro do intervalo de sensibilidade dos detectores. Como sabemos o ruído browniano é proveniente das vibrações térmicas da rede cristalina que acabam por excitar os seus modos normais. É possível expressar a dimensão do ruído térmico em termos da amplitude das ondas gravitacionais [41]:

$$h_B \approx \left( \frac{kT\tau_i}{M\omega L^2} \right)^{1/2}. \quad (3.84)$$

Onde  $\tau_i$  é o chamado de tempo de integração, que está associada aos períodos de oscilação da rede cristalina.  $L$  é o comprimento característico, que depende da forma do detector. Observamos que o ruído, com era de se esperar, cai com a temperatura e também o ruído será menor quanto maior a massa. Pode-se evitar termos de trabalhar com  $\tau_i$ , tomando a raiz quadrada da media da amplitude do ruído;

$$\langle \delta l^2 \rangle^{1/2} \approx \left( \frac{kT}{4\pi^2 M f^2} \right)^{1/2}, \quad (3.85)$$

sendo  $\delta l^2 = h_B L$ . Usando como exemplo um detector de massa ressonante típico, com massa  $M \sim 1000 \text{ Kg}$ , comprimento  $L \sim 3$ . Dentro de um intervalo de frequências entre  $500 \text{ Hz}$  a  $1500 \text{ Hz}$ , operando em temperaturas ultra-criogênicas de  $100 \text{ mK}$ . Disso encontramos uma valor de ruído de  $\langle \delta l^2 \rangle^{1/2} \sim 6 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ . Esse valor é muito maior que o valor esperado para muitas fontes conhecidas, tornando a detecção inviável. Mas felizmente podemos levar em conta o fator de qualidade  $Q$ . O fator de qualidade é uma propriedade do material, definido como proporcionalmente à razão entre a energia armazenada no ciclo e a energia dissipada no ciclo. Ou como a razão entre a frequência de ressonância e largura de banda  $Q = f_0/\Delta f$ . Considerando (3.84), com fator de correção  $Q$  e para um

valor típico de  $Q = 10^6$ , teremos;

$$\langle \delta l^2 \rangle^{1/2} \approx \left( \frac{kT}{4\pi^2 M f^2 Q} \right)^{1/2} \sim 6 \cdot 10^{-21} m, \quad (3.86)$$

representa um valor dentro do esperado. Obviamente há um limite tanto para  $Q$  como para  $M$ , limitando desse modo a melhoria na resolução do sinal que se pode medir. Desse modo também, mesmo que possamos fazer a temperatura próxima ao zero absoluto, há um limite de natureza quântica que impede de sempre podermos melhorar a precisão do instrumento. De fato o princípio da incerteza garante que mesmo há temperatura nula haverá flutuações aleatórias presente nos instrumentos de medida, essa ruído é estimado para os mesmos parâmetros de antes;

$$\langle \delta l^2 \rangle^{1/2} = \left( \frac{\hbar}{2\pi M f} \right)^{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-21} m \quad (3.87)$$

. O último resultado mostra o limite de resolução para o detector com as configurações que definimos antes. Mesmo assim ainda podemos determinar outras viráveis associadas as ondas gravitacionais que podem ser mais refinadas "espremendo-se" a incerteza nos dados.

### 3.4.2 Detectores de Feixe

Os detectores de feixe são constituídos de braços perpendiculares, onde feixes de *laser* proveniente de uma mesma fonte são cruzados para ocorrer interferência. Mais precisamente, temos um emissor de feixe *laser*, sendo este dividido em dois feixes perpendiculares. Por sua vez esses feixes são refletidos e combinados de modo a sofrerem interferência, na qual o padrão de interferência é devidamente registrado. Como sabemos, se uma onda gravitacional atua sobre um dos braços do detector o caminho que o feixe percorre deve se alterar, produzindo uma variação da fase e por consequentemente leva uma oscilação no padrão de interferência. Vale salientar que detectores desse tipo não se limitam a feixes de luz visível, qualquer tipo de fonte de radiação eletromagnética coerente pode ser utilizada. Inclusive ,em princípio poderias utilizar de feixes de onda de matéria. Há dois modos de se posicionar os detectores de feixe: os detectores baseados na superfície da terra e os detectores orbitais. Os detectores orbitais têm a vantagem de serem menos suscetíveis aos ruídos típicos da terra, embora estando em orbita esses detectores sofrem uma maior influência de raios cósmicos que também podem ser fontes de ruído. Atualmente, há apenas exemplares terrestres, mas há projetos para se lançar futuramente sondas sensíveis às ondas gravitacionais, com o projeto *LISA* [42].

Podemos achar uma relação que mensure o efeito da passagem da onda gra-

vitacional sobre o detector. Considerando que haja um relógio sincronizado com o feixe emitido por um dos braços de comprimento  $L$  sobre ausência da ondas gravitacionais. Suponhamos que esse relógio associado ao feixe emitido meça um tempo próprio  $t$  e o receptor do feixe meça um tempo próprio  $t_r$ , na ausência de ondas gravitacionais os tempos  $t$  e  $t_r$  serão iguais. Mas se uma onda gravitacional incide com polarização  $h_+$  com ângulo  $\theta$  em relação ao plano que contem os braços do detector, a taxa de variação do feixe de chegada  $dt_r$  em relação a taxa do feixe saída  $dt$  é dado por [31];

$$\frac{dt_r}{dt} = 1 + \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) \{h_+[t + (1 - \cos\theta)L] - h_+\}. \quad (3.88)$$

Como já dissemos a interferência ocorre quando os feixes são refletidos, devemos então considerar o efeito da onda gravitacional sobre o feixe refletido ou de retorno, que será dado por;

$$\frac{dt_{retorno}}{dt} = 1 + \frac{1}{2} \{(1 - \cos\theta)h_+(t + 2L) - (1 + \cos\theta)h_+ + 2\cos\theta h_+[t + L(1 - \cos\theta)]\}. \quad (3.89)$$

Claro que se a onda gravitacional afeta os braços do detector do mesmo modo não veremos qualquer impressão da onda, felizmente isso ocorre somente para uma geometria muito espacial. Quase sempre a onda observada contem polarizações e direções distintas para os dois braços. Como esse sistema depende da medida de ínfimas variações nas franjas de interferência, isso implica na necessidade de relógios de alta precisão. Atualmente os melhores relógios possuem uma imprecisão de 1 parte em  $10^{16}$ , isso possibilita uma medida de amplitude  $h \sim 10^{-15}$ . Se o comprimento  $L$  do detector for aproximadamente do mesmo tamanho que o comprimento da onda, como é o caso da maioria dos detectores desse tipo, a equação (3.89) se reduzirá a;

$$\frac{dt_{retorno}}{dt} = 1 + \text{sen}^2\theta L \dot{h}(t)_+. \quad (3.90)$$

Ainda podemos usar uma forma mais compacta de escrever a taxa de retorno do sinal de modo que podemos relacionar o sinal de retorno para os dois braços e como este depende da direção da fonte da onda. Para isso, consideramos um sistema de coordenadas unitários  $\hat{e}_x^R$  e  $\hat{e}_y^R$ , sobre o plano que contém a fonte e definindo a amplitude em termos das polarizações;

$$\mathbf{h}(t) = h_+(t)e_+ + h_\times(t)e_\times. \quad (3.91)$$

Onde as polarizações em termos das coordenadas são dados por;

$$e_+ = (\hat{e}_x^R \otimes \hat{e}_x^R - \hat{e}_y^R \otimes \hat{e}_y^R), \quad e_\times = (\hat{e}_x^R \otimes \hat{e}_y^R + \hat{e}_y^R \otimes \hat{e}_x^R) \quad (3.92)$$

logo a equação (3.89) será dada por;

$$\left(\frac{dt_{\text{retorno}}}{dt}\right)_{x\text{-braço}} = 1 + L\hat{e}_x\mathbf{h}(t)\hat{e}_x \quad (3.93)$$

de modo análogo para o braço  $y$ ;

$$\left(\frac{dt_{\text{retorno}}}{dt}\right)_{y\text{-braço}} = 1 + L\hat{e}_y\mathbf{h}(t)\hat{e}_y. \quad (3.94)$$

As duas últimas expressões não depende da escolha de coordenadas e do posicionamento dos braços do detector. Disso vemos que a resposta do detector por interferometria é dada por;

$$\left(\frac{d\delta t_{\text{retorno}}}{dt}\right) = \left(\frac{dt_{\text{retorno}}}{dt}\right)_{x\text{-braço}} - \left(\frac{dt_{\text{retorno}}}{dt}\right)_{y\text{-braço}} = L\hat{e}_x\mathbf{h}(t)\hat{e}_x - L\hat{e}_y\mathbf{h}(t)\hat{e}_y \quad (3.95)$$

compactando essa última expressão, ficamos

$$\left(\frac{d\delta t_{\text{retorno}}}{dt}\right) = \mathbf{d} : \dot{h}. \quad (3.96)$$

A equação (3.39) constitui uma poderosa expressão para o tempo de resposta do detector. Sendo valida para qualquer tipo de interferômetro, dependendo apenas da orientação com as ondas atuam. Detectores desse tipo constituem as chamadas **antena padrão**. Vale citar ainda o *LIGO* (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) constituindo dois aparatos, um localizado em Livingston, Louisiana e outro perto de Richland, Washington, cada um com braços em forma de  $L$  com  $4\text{ km}$  de comprimento. O ligo foi o primeiro instrumento humano a detectar ondas gravitacionais. Descoberta anunciada em 11 de fevereiro de 2016 [43].

### 3.5 Introdução aos Wormholes

Wormholes são uma das soluções possíveis das equações de Einstein, onde duas regiões do espaço estão conectadas por um túnel. Túnel esse resultante da própria deformação do espaço. Mais precisamente, wormholes podem ser definidos com um defeito topológico, que torna duas regiões conexas [12]. Já em 1917, poucos meses da publicação da teoria da relatividade geral de Einstein, *Schwarzschild* apresentou uma solução para equações de campo da relatividade. Notou-se que esse tipo de solução presenta duas regiões unidas por um túnel. Posteriormente, Einstein em colaboração com Nathan Rosen, descreveram como uma singularidade podia ser tratada por um por uma partícula no espaço-tempo. Eles notaram que essas soluções são como duas folhas unidas pela partícula, que nesse caso se comporta com o uma ponte, as chamadas “pontes de Einstein - Rosen”.

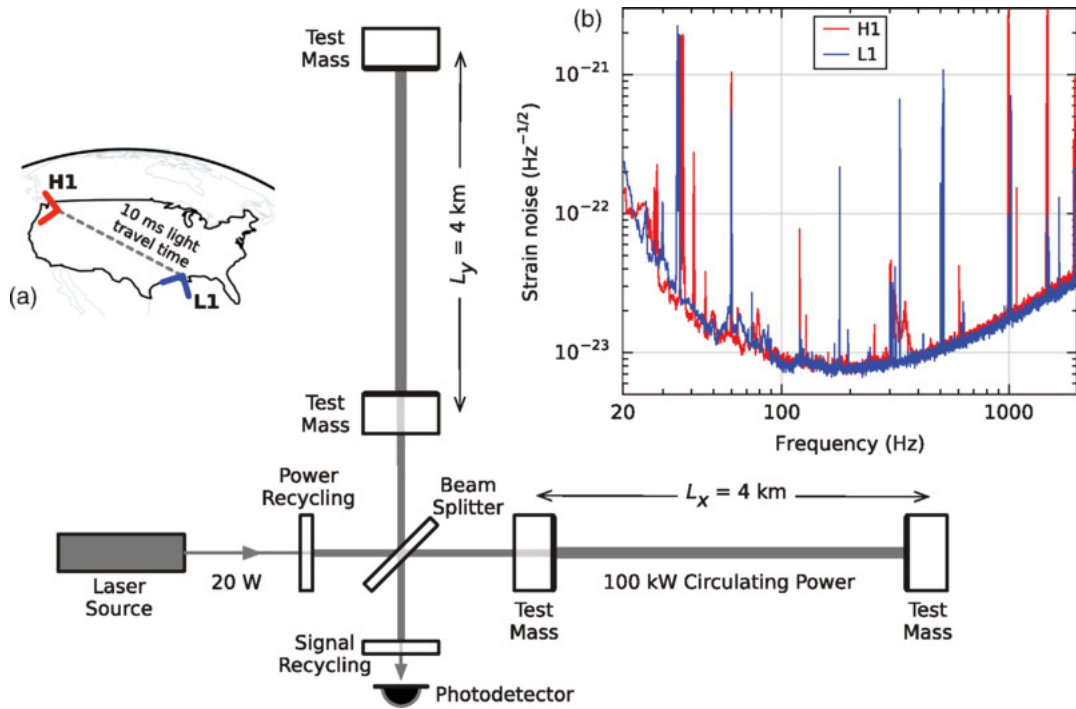


Figura 8: Representação esquemática do funcionamento do *LIGO*, (FONTE: LIGO collaboration)

Uma descrição mais detalhada dessas estruturas pode ser encontrada em [44]. Contudo mostrou-se, que as “pontes de Einstein-Rosen” são instáveis demais, para existirem. E em 1957 foi com que o termo “wormholes”, foi cunhado por Jonh Archibald Wheeler. Wheeler imaginou como a métrica plana, exceto em duas regiões, que se conectavam. Ainda em seus trabalhos, sobre gravitação quântica, os wormholes surgiam como uma consequência natural das flutuações quânticas de vácuo.

Foi somente em 1988, Michael S. Morris e Kip S. Thorne, publicaram um artigo sobre a viabilidade de wormholes atravessáveis. Artigo esse influenciado diretamente da novel de Carl Segam, contato [11]. Ao contrário de outros trabalhos, que focavam em buscar diretamente soluções das equações que represente túneis no espaço-tempo. O trabalho de Michael S. Morris e Kip S. Thorne, supõem uma solução que descreve um wormhole atravessável, e desse modo apenas analisam as condições para se ter tal métrica. Então eles propuseram uma métrica esférica e estática na forma:

$$ds^2 = e^{2\Lambda} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta^2) \quad (3.97)$$

onde  $\Lambda(r)$  e  $b(r)$  são funções arbitrárias, conhecidas como função forma é *redshift*. Essa solução deve ser livre de singularidades, para que seja possível viagens pelo wormhole. Por isso é necessário que  $g_{tt} = e^{2\Lambda} \neq 0$ , ou seja, é possível estabelecer geodésicas de causa e efeito ao longo do wormhole. A função forma garante que haja uma garganta

com raio mínimo  $r_0$ , de modo que  $b(r_0) = r_0$ . Sendo assim,  $r$  varia de  $+\infty$  até um valor mínimo  $r_0$  e depois tende a  $-\infty$ . Por outro lado, o observador é descrito pela coordenada radial própria  $l$ , que varia de  $\pm l$  nas regiões assintoticamente planas a  $l = 0$  dentro da garganta, como mostra a figura 9. Ainda é necessário que wormhole tenha a característica

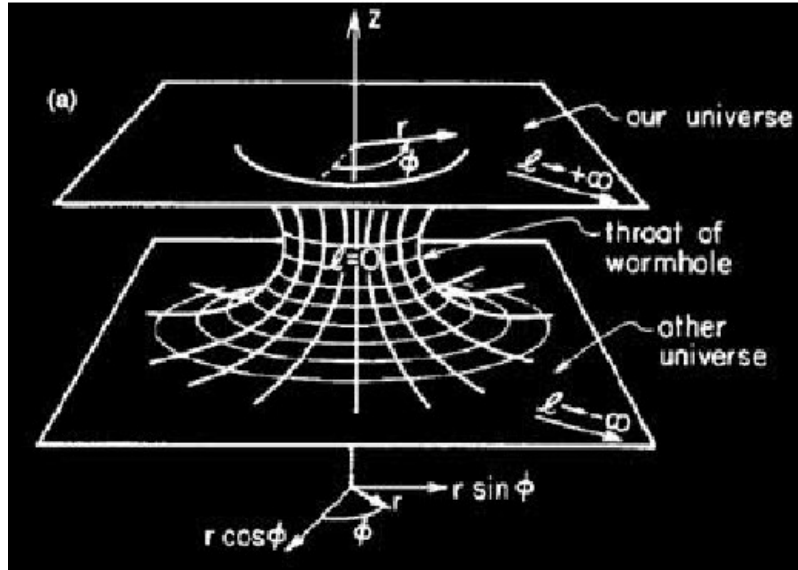


Figura 9: Visão esquemática do wormhole de Morris-Thorne. O wormhole é descrito por uma métrica esférica e estática.  $l$  é coordenada própria do observador. O trajeto que vai de  $+\infty$  a  $-\infty$ , representa o processo de viagem de um observador em uma região do espaço, até o mergulho no wormhole e sua emersão em outra região. Fonte: Morris-Thorne, 1988

de alargamento de barreira  $r > r_0$ , satisfeita por;

$$\frac{d^2r}{dz^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0, \quad (3.98)$$

que é como já vimos a condição de raio mínimo. Em outras palavras, as funções  $b(r)$  e  $b(r)'$ , devem satisfazer a equação (3.98), para que wormhole seja estável. Substituindo as componentes da métrica do wormhole nas equações de Einstein (2.39) e considerando que as componentes do tensor momento-energia são  $T_{tt} = \rho(r)$ ,  $T_{rr} = \tau(r)$ ,  $T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p(r)$ , obtemos:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi} \frac{b'}{r^2}, \quad (3.99)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Lambda'}{r} \right], \quad (3.100)$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \left[ \Lambda'' + (\Lambda')^2 - \frac{b'r - b}{2r^2(1 - \frac{b}{r})} \Lambda' - \frac{b'r - b}{2r^3(1 - \frac{b}{r})} \Lambda' + \frac{\Lambda'}{r} \right]. \quad (3.101)$$

As equações (3.99) a (3.101) nos dizem como a densidade  $\rho(r)$ , tensão radial  $\tau(r)$  e pressão



$p(r)$  estão relacionadas diretamente com as funções  $\Lambda(r)$  e  $b(r)$ . Se definirmos a quantidade:

$$\xi(r) = \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|}, \quad (3.102)$$

e pela equação (3.98), concluímos que  $\xi(r) > 0$ . Logo o wormhole é dominado por tensão que excede a densidade de energia, e como consequência violam as condições de energia clássica da relatividade. A matéria que sustentam os wormholes, portanto não deve ser composta de matéria ordinária mas de uma matéria exótica.

## 4 POTENCIAL DE REGGE-WHEELER DE WORMHOLES TRANSPONÍVEIS

Nesse capítulo, nosso objetivo será encontrar a equação de onda de Regge-Wheeler para a métrica do wormhole em analogia aos buracos negros de *Schwarzschild* [13] e de *Kerr*. Primeiramente mostraremos o caso da equação de Regge-Wheeler para um campo escalar sem massa tendo como *background* a métrica do wormhole de Morris-Thorne. Em seguida aplicaremos o método para perturbação geral das equações de Einstein, dado por CHANDRASEKHAR [18]. Isso nos permite encontrar uma equação mestra da qual derivamos a equação Regge-Wheeler. Na seção seguinte, apresentamos as condições pelas quais nos permite definir as funções  $b(r)$  e  $\Lambda(r)$  dos wormholes nos halos centrais da galáxia. Por fim definiremos o método *WKB* que permite calcularmos os modos quase-normais. Investigaremos se esse método é satisfatório para o intuito de se determinar os modos quase-normais dos wormholes dos halos centrais da galáxia.

### 4.1 Potencial de um Campo Escalar

Nosso objetivo em todo esse capítulo será encontrar uma equação do tipo onda para equações da perturbação e com isso determinar uma expressão para o potencial associado. Um vez que possamos encontrar o potencial  $V$  é possível determinar as frequências de oscilação  $\omega$ . Explicitamente a métrica de um wormhole transponível é;

$$ds^2 = e^{2\Lambda} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Tomemos como exemplo um campo escalar  $\Phi$ , onde a equação de onda na ausência de massa será dada por: [17]

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi] = 0, \quad (4.2)$$

representando um espalhamento de onda. Admitindo uma solução com variáveis separadas do tipo:

$$\Phi = Y_{l_0 m}(\theta, \phi) \frac{U_{l_0}(r, t)}{r}, \quad (4.3)$$

e substituindo a equação (4.2) na equação (4.1) obteremos após um trabalho algébrico que;

$$\left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_{l_0 m} = l_0(l_0 + 1)Y_{l_0 m}. \quad (4.4)$$

E para a parte radial;

$$\ddot{U}_{l_0} + \frac{\partial^2 U_{l_0}}{\partial r^{*2}} = V_{l_0} U_{l_0}. \quad (4.5)$$

É fácil ver que a equação (4.4) é uma equação de onda do tipo de *Schrödinger*, onde usamos a transformação de coordenada *tortoise*

$$\frac{\partial}{\partial r^*} = e^\Lambda \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.6)$$

e com o potencial representado por;

$$V(r, l) = e^{2\Lambda} \left[ \frac{l_0(l_0 + 1)}{r^2} - \frac{b'r - b}{2r^3} + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \Lambda' \right]. \quad (4.7)$$

Esse potencial associado permite que possamos determinar as frequências de oscilação dos modos quase normais do campo  $\Phi$ , posteriormente veremos como calcular essas frequências.

## 4.2 Perturbação de uma Métrica Geral

Há muitos tipos possíveis de métricas na relatividade geral, e muitas delas são assimétricas e não estáticas. Porém, as mais conhecidas e obviamente as mais fáceis de se analisar são as métricas com simetria e estáticas. Como sabemos solução de *schwarzschild* representa uma métrica estática e com simetria esférica e as soluções de *Kerr* e *Kerr-Newman* sendo métricas estacionárias e assimétricas. Se tivermos que lidar com perturbações sobre métricas quaisquer, até das mais simples, iremos necessitar de uma formulação geral da métrica. Essa métrica geral é dada, na notação de *Chandrasekhar*, por [18]:

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi} \left( d\phi - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - q_1 dt \right)^2 - e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2, \quad (4.8)$$

essa métrica é claramente dinâmica e assimétrica devido aos termos  $q_1, q_2, q_3$  e  $\nu, \psi, \mu_2, \mu_3$ . Logo esses termos são responsáveis pelas perturbações que ocorrem sobre uma métrica. Tomemos como exemplo a métrica de *Schwarzschild* não perturbada, nessa caso;

$$x^2 = r, \quad x^3 = \theta, \quad e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2M}{r} = \frac{\Delta}{r^2}, \quad e^{\mu_3} = r, \quad e^\psi = r \sin\theta,$$

$$\text{com } q_1 = q_2 = q_3 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 2Mr - r^2. \quad (4.9)$$

E razoável considerarmos que as pequenas flutuações dos campos de energia e matéria iram produzir termos não nulos  $q_1, q_2, q_3$ . E também, essas flutuações resultam em pequenos incrementos nas funções  $\nu, \mu_2, \mu_3$ , e  $\psi$ . Podemos diferenciar dois tipos de perturbações, as perturbações radiais e as angulares. As perturbações radiais são caracterizadas pelos termos  $q_2, q_3$ , e  $\omega$  não nulos. Tais perturbações podem ser interpretadas como um tipo

de arrasto que um observador em ponto do espaço caracterizado pela métrica perturbada sofre, contudo esses termos não tem efeito algum sobre a rotação. Já as perturbações angulares além do feito de arrasto possuem efeitos sobre a rotação. Contudo nesse trabalho investigaremos apenas as perturbações polares.

Ainda no exemplo da métrica de *schwarzschild* vamos determinar a equação de tipo onda para as perturbações radiais. Isso servirá de base para calcular as equações de onda para a perturbação da métrica do wormhole. Segundo [18] as componentes do tensor de *Ricci* de uma métrica geral responsáveis pela perturbação radial são:

$$R_{12} = \frac{1}{2}e^{-2\psi-\nu-\mu_3} \left[ (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{32})_{,3} - (e^{3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2} Q_{02})_{,0} \right], \quad (4.10)$$

$$R_{13} = \frac{1}{2}e^{-2\psi-\nu-\mu_2} \left[ (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,2} - (e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{03})_{,0} \right]. \quad (4.11)$$

Logo as equações que descrevem as perturbações radiais são:

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,3} = -(e^{3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2} Q_{02})_{,0} \quad \text{com} \quad \delta R_{12} = 0, \quad (4.12)$$

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,2} = (e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{03})_{,0} \quad \text{com} \quad \delta R_{13} = 0, \quad (4.13)$$

onde definimos  $Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A}$  e  $Q_{A0} = q_{A,0} - q_{1,A}$  para  $(A, B = 2, 3)$  ou  $(A, B = r, \theta)$  e o índice 0 é referente a derivada temporal. Se substituirmos os termos da equação (4.9) nas equações (4.12) e (4.13) e adotando a seguinte convenção  $Q = \Delta \sin^3 \theta Q_{23}$  obteremos;

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(q_{1,2} - q_{2,0})_{,0} \quad (4.14)$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = (q_{1,3} - q_{3,0})_{,0}. \quad (4.15)$$

Considerando que agora os termos perturbativos possuam dependência temporal, na forma  $e^{i\omega t}$ , desse modo as equações (4.14) e (4.15) são reescritas como;

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -i\omega q_{1,2} - \omega^2 q_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = i\omega q_{1,3} + \omega^2 q_3. \quad (4.17)$$

Agora se derivarmos a equação a equação (4.16) em relação a  $\theta$  e a equação (4.17) em relação a  $r$  e somando ambas equações, eliminamos a dependência de  $q_1$  e obteremos a

equação diferencial mestra:

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \omega^2 \frac{r^4}{\Delta} Q = 0. \quad (4.18)$$

Uma vez que a função  $Q$  depende somente das variáveis  $\theta$  e  $r$ ; podemos tentar uma separação de variáveis da seguinte forma;

$$Q(r, \theta) = Q(r) C(\theta)_{l+2}^{-3/2} \quad (4.19)$$

onde  $C_n^\nu$  são chamadas funções de *Gegenbauer*, definidas por:

$$\left[ \frac{d}{d\theta} \left( \sin^{2\nu} \frac{d}{d\theta} \right) + n(n+2\nu) \sin^{2\nu} \theta \right] C_n^\nu(\theta) = 0. \quad (4.20)$$

Substituindo a equação (4.19) na equação (4.18) obteremos;

$$\Delta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \omega^2 Q - \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} Q = 0, \quad (4.21)$$

aqui a expressão  $\mu$  é escrita em termos do momento angular  $l$ , como  $\mu^2 = (l-1)(l+1)$ . Para encontrarmos uma equação do tipo onda, temos que fazer a seguinte mudança de função  $Q(r) = r Z(r)$  e introduzindo a coordenada *tortoise*  $\frac{d}{dr^*} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr}$ , logo a equação (4.21) fica:

$$\frac{d^2 Z}{dr^{*2}} + \omega^2 Z + \frac{\Delta^2}{r^5} [(\mu^2 + 2)r - 6M] Z = 0. \quad (4.22)$$

O que corresponde de fato a equação de onda do tipo;

$$\frac{d^2 Z}{dr^{*2}} + (\omega^2 - V) Z = 0 \quad \text{com} \quad V = -\frac{\Delta^2}{r^5} [(\mu^2 + 2)r - 6M], \quad (4.23)$$

o potencial, nesse caso depende dos parâmetros  $l$  e  $M$ . Interpretamos o  $Z$ , tanto do setor radial como polar, como sendo ondas que se propagam no espaço-tempo transportando energia do buraco negro para infinito <sup>1</sup>. Se variarmos esses parâmetros, podemos obter o comportamento dos modos quase normais em função de  $l$  e  $M$ . A equação (4.23) representa a equação de onda de Regge-Wheeler que descreve as ondas gravitacionais radiais para horizonte de eventos do buraco negro de *Schwarzschild*

### 4.3 Equação de Regge-Wheeler Para Métrica do Wormhole

Nesse seção tentaremos obter a equação de onda do tipo Regge-Wheeler que descreve o comportamento das ondas gravitacionais de um wormhole. Tentaremos fazer isso de modo análogo ao que fizemos para caso da métrica de *Schwarzschild*.

---

<sup>1</sup>modos quase-normais e a correspondência ADS/ CPF, tese de doutorado, Alex dos Santos Miranda, universidade federal de santa Maria, 2008

-	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
$r/M$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 9$
2.0	0	0	0
2.1	0.03394	0.09872	0.18511
2.2	0.06147	0.17417	0.32443
2.3	0.08362	0.23156	0.42881
2.4	0.10127	0.27488	0.50637

Tabela 1: Valores do potencial  $V(r)$  radial para diversos  $l$  e  $n$ 

Iniciaremos nossa argumentação fazendo a relação entre a métrica de *Chandrasekhar* e a métrica do wormhole. Da equação equação (4.1) e da equação (4.8), encontramos;

$$e^{2\nu} = e^{2\Lambda(r)}, e^\psi = r \sin\theta, e^{-2\mu_2} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) = \frac{\Delta}{r^2}, e^{\mu_3} = r^2, \quad (4.24)$$

logo diretamente desses termos e pela as equações (12) e (13) obteremos;

$$(r \sin^3\theta \sqrt{\Delta} e^\Lambda Q_{23})_{,3} = -(r^3 \sin^3\theta \sqrt{\Delta} e^{-\Lambda} Q_{02})_{,0} \quad \text{com} \quad \delta R_{12} = 0 \quad (4.25)$$

$$(r \sin^3\theta \sqrt{\Delta} e^\Lambda Q_{23})_{,2} = (r^3 \sin^3\theta \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-\Lambda} Q_{03})_{,0} \quad \text{com} \quad \delta R_{13} = 0. \quad (4.26)$$

Fazendo a convenção  $Q = r \sin^3\theta \sqrt{\Delta} e^\Lambda Q_{23}$ , para facilitar a manipulação dos termos, encontramos que;

$$\frac{e^\Lambda}{r^3 \sin^3\theta \sqrt{\Delta}} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(q_{1,2} - q_{2,0})_{,0} \quad (4.27)$$

$$\frac{\sqrt{\Delta} e^\Lambda}{r^3 \sin^3\theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = (q_{1,3} - q_{3,0})_{,0}. \quad (4.28)$$

Novamente assumindo que os termos perturbativos possuem dependência temporal na forma  $e^{i\omega t}$  e derivando (2.27) em relação  $\theta$  e (2.28) em relação a  $r$ , obtemos;

$$\frac{e^\Lambda}{r^3 \sqrt{\Delta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3\theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) = -i\omega q_{1,2,3} - \omega^2 q_{2,3}, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{\sin^3\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{\Delta} e^\Lambda}{r^3} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = i\omega q_{1,3,2} + \omega^2 q_{3,2}. \quad (4.30)$$

Agora somando a (4.29) com a equação (4.30), encontramos que:

$$\frac{1}{\sin^3\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{\Delta} e^\Lambda}{r^3} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{e^\Lambda}{r^3 \sqrt{\Delta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3\theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) = (-q_{2,3} + q_{3,2})\omega^2. \quad (4.31)$$

Após alguma manipulação algébrica, encontramos a equação diferencial mestra para perturbação radial da métrica do wormhole;

$$r e^\Lambda \sqrt{\Delta} \left( \frac{\sqrt{\Delta} e^\Lambda}{r^3} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{e^{2\Lambda}}{r^2} \sin^3\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3\theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \omega^2 Q = 0. \quad (4.32)$$

Essa equação é fundamental para encontrarmos a equação de onda de Regge-Whiller, como já vimos. Olhando para as equações (4.18) e (4.32), não é difícil ver que as duas possuem os mesmos termos dependente de  $\theta$ , devido a simetria esférica das métricas de *Schwarzschild* e wormhole. Com isso a equação mestra pode ser reescrita como;

$$re^\Lambda \sqrt{\Delta} \left( \frac{\sqrt{\Delta} e^\Lambda}{r^3} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) - \frac{e^{2\Lambda}}{r^2} \mu^2 Q + \omega^2 Q = 0, \quad (4.33)$$

onde usamos a mesma separação de variáveis da equação (4.19). Lembrando que o termo  $\mu^2 = (l-1)(l+2)$  provém das funções de *Gegenbauer*, sendo  $l$  os termos de momento angular como já havíamos discutido. Para encontrarmos uma equação do tipo onda, a partir da equação mestra (4.33) temos que fazer a seguinte muda de função  $Q(r) = r Z(r)$ . Após fazermos isso e introduzindo a coordenada *tortoise*  $\frac{d}{dr^*} = e^\Lambda \sqrt{\Delta} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ , e com um pouco de álgebra podemos mostrar que encontraremos a seguinte equação;

$$\frac{d^2 Z}{dr^{*2}} + \omega^2 Z - \frac{e^{2\Lambda}}{r^3} \left[ \frac{3\Delta}{r} - \Delta \Lambda' - \frac{1}{2} \Lambda' + \mu^2 r \right] Z = 0. \quad (4.34)$$

Essa é a equação de onda de Regge-Whieeler que queríamos encontrar para métrica do wormhole com o potencial explicitamente dado por:

$$V(r, l) = \frac{e^{2\Lambda}}{r^3} \left[ \frac{3\Delta}{r} - \Delta \Lambda' - \frac{1}{2} \Lambda' + \mu^2 r \right], \text{ ou} \quad (4.35)$$

$$V(r, l) = e^{2\Lambda} \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{b'r - 5b}{2r^3} - \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \Lambda' \right] \quad (4.36)$$

Em essência esse potencial é que nos permite determinar se é possível calcular diretamente os modos quase-normais de qualquer wormhole, em especial usando o método *WKB*. Para isso, primeiro devemos construir as funções  $b(r)$  e  $\Lambda(r)$  e com isso termos uma expressão particular e explicita do potencial. Com esse intuito é que introduziremos como o wormhole do halo central da galáxia pode ser definido.

#### 4.4 Wormhole do Halo Central da Galáxia

Nessa seção, tentaremos definir as condições que devem sustentar wormholes nos halos centrais da galáxia, com base nos trabalhos Farook Rahaman, P. Salucci[17],[45]. Com isso poderemos construir as funções  $\Lambda(r)$  e  $b(r)$  necessárias para uma expressão explicita do potencial.

Das várias partes que compõem a Via Láctea que podemos distinguir, a região dos halos é uma das maiores estruturas. Os halos são regiões esféricas que se estendem para além do disco de rotação. Essa região contém poucas estrelas e bem como gás é

poeira formando os aglomerados globulares. Apesar da pouca matéria visível, os halos contém uma massa estimada em  $(1, 2_{-0,5}^{1,8} \cdot 10^{12} M_{\odot})$  quase 90% de toda a massa da Via Láctea[46]. Essa imensa massa só pode ser explicada pela existência de matéria escura. Cujas presença só pode ser mostrada por efeito gravitacional sobre a matéria bariônica. A figura (10), mostra esquematicamente a posição dos halos com relação a galáxia.

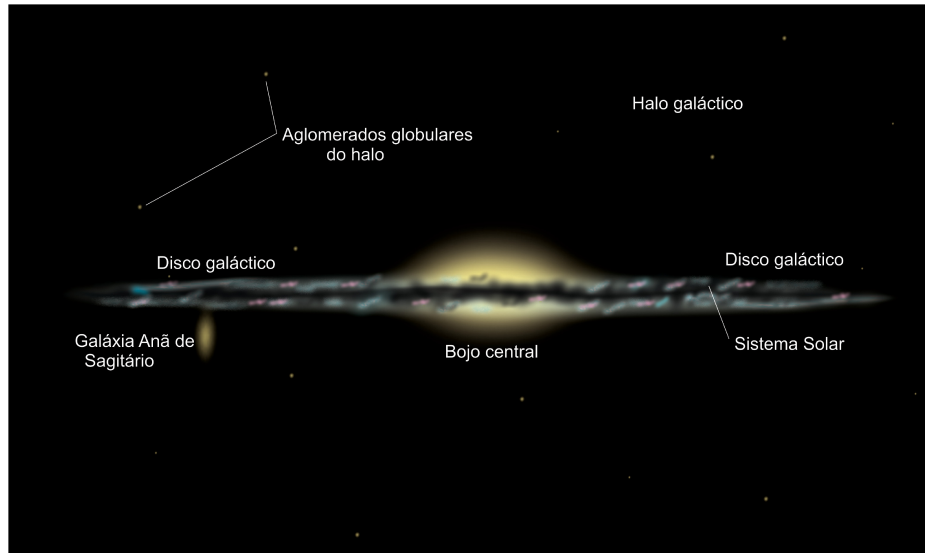


Figura 10: Via Láctea, vista do plano de rotação, nesse esquema vemos a extensão dos halos, sendo regiões em forma esférica que irradia a partir do centro da galáxia. A maior parte da matéria que compõe a galáxia, se concentra nessa região, com uma massa estimada em mais ou menos  $1, 2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$

São nesses halos que um dos últimos trabalhos de *Farook Rahaman, G.C.Shit, Banashree Sen, Saibal Ray*, sobre a possível existência de wormholes na região dos halos se concentra [47]. Dito de outro modo, descreveremos como a geometria do espaço-tempo dessa região da galáxia pode ser dada por um wormhole. Para tentar responder essa pergunta, vamos primeiro definir o perfil de densidade da distribuição de matéria escura. Segundo *Navarro*, o perfil de distribuição da matéria escura fria (*CDM*) é dado por [48]:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (4.37)$$

onde  $\rho_s$  e  $r_s$  são a densidade de escala e o raio de escala, usados nas simulações para delimitar as condições iniciais. A equação (4.37), serve como base para analisarmos o comportamento da matéria escura em diversas regiões dos halos. Entretanto podemos utilizar outros perfis aproximados, segundo a região dos halos que temos interesse de considerar. Para as regiões centrais dos halos, podemos usar um perfil de densidade baseado na curva universal de rotação, (*UCR*), na sigla inglesa), que prediz uma densidade em



função de  $r$ :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r^3}{(r + r_0)(r^2 + r_0^2)}. \quad (4.38)$$

Essa última expressão se baseia intrinsecamente na análise observacional do movimento orbital de estrelas poeira e gás dessa região. Tanto as equações (4.37) e (4.38) podem ser usadas para construir a função forma  $b(r)$  do wormhole. Nessa abordagem inicial usaremos apenas a equação (4.37), como sabemos a função forma  $b(r)$  esta relacionada com a densidade de matéria por:

$$\frac{b'(r)}{r^2} = 8\pi\rho(r), \quad (4.39)$$

onde  $b'(r) = \frac{db(r)}{dr}$  e lembrando que estamos adotando a convenção  $G = 1$ ,  $c = 1$ . Então integrando a equação (4.39), obteremos;

$$b(r) = 8\pi\rho_s r_s^3 \left[ \ln \left( 1 + \frac{r}{r_s} \right) + \frac{1}{\frac{r}{r_s} + 1} \right] + C, \quad (4.40)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Pode se mostrar que a constante de integração  $C$  nesse caso é nula, com base [45]. E ainda nesse artigo, se quisermos especificar completamente a função forma  $b(r)$ , podemos usar  $\rho_s = 0.05$ ,  $r_s = 1 \text{ Kpc}$ . No caso estamos considerando que o raio da garganta  $r_0$  é diferente do raio de escala  $r_s$ . De fato, no artigo [45] encontramos  $r_0 = 1.7192$ , que satisfaz a condição  $b(1.7192) = 1.7192$ . Para esses valores, (4.40) fica explicitamente definida:

$$b(r) = 1.2566 \left[ \frac{1}{1+r} + \ln(r+1) \right], \quad (4.41)$$

cujo comportamento pode se visto no gráfico da figura 11. Precisamos agora determinar a

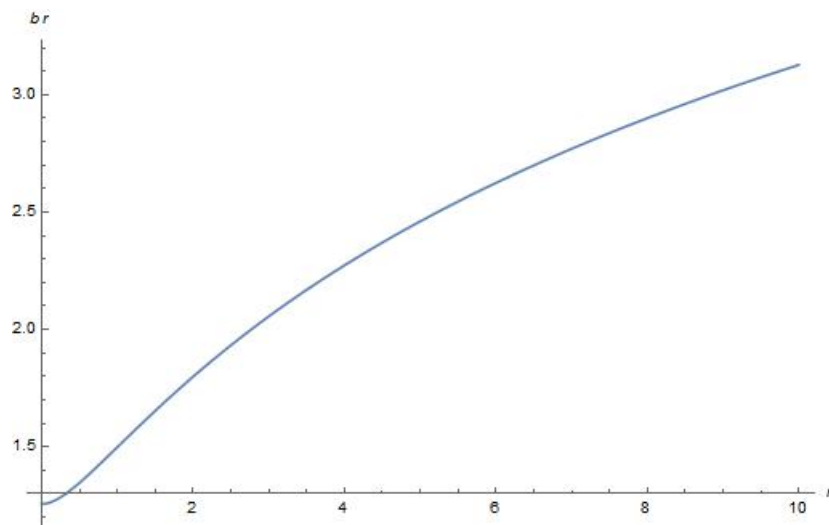


Figura 11: O gráfico mostra o comportamento da função forma  $b(r)$  dada pela equação (4.41), com os parâmetros definidos for  $\rho_s = 0.05$ ,  $r_s = 1 \text{ Kpc}$ .

função *redshift*  $\Lambda(r)$ , isso pode ser conseguido através das características do movimento da matéria dos halos. Isto é, o movimento dos corpos em torno galáxia depende estritamente da distribuição da matéria que compõe a galáxia. Vale a pena, dizer que o movimento dos corpos que orbitam a galáxia compõe um movimento diferencial, ou seja, a velocidade de rotação é diferente para cada valor de  $r$ , ao contrário se fosse um corpo rígido. Embora o sistema solar também apresente movimento diferencial, a forma como os corpos orbitam a galáxia é bem distinta da do sistema solar. Isso se deve pela forma como a matéria da que compõe a galáxia afeta o movimento corpos que nela orbitam. As figuras 12 e 13 exemplificam isso. Novamente, segundo *Chandrasekhar* [18], a velocidade tangencial  $v^\phi$

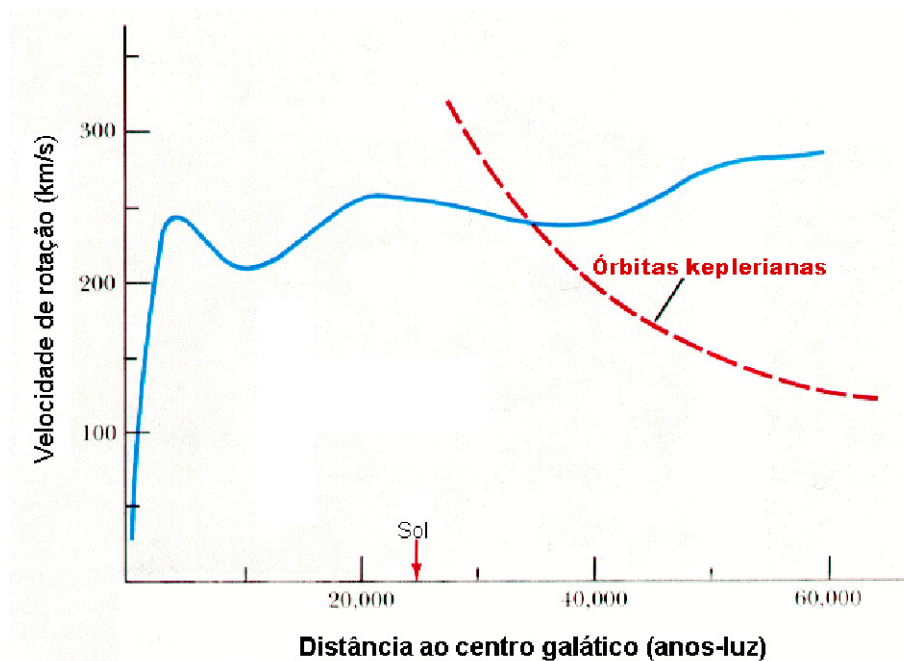


Figura 12: Vemos o gráfico da velocidade de rotação dos corpos que orbitam a Via Láctea, em função da distância com relação a distância como é observado. E o gráfico teórico da orbitas keplerianas, claramente vemos como a distribuição da matéria bariônica e da matéria escura muda radicalmente os valores predito pela mecânica newtoniana. (Extraído de astro.if.ufrgs.br)

de corpos que seguem uma geodésica, esta relacionado com a função *redshift* por:

$$e^{2\Lambda} = Br^l, \quad (4.42)$$

com  $l = 2(v^\phi)^2$  e a constante de integração é dada por  $B = 1/r_s^l$ . Então, para encontramos uma expressão explícita de  $\Lambda(r)$  é necessário tentarmos encontrar uma expressão que relacione a velocidade de rotação com distância radial. Uma das soluções possíveis é plotar um polinômio das velocidades em função da distância, com base na tabela (2), de modo que obtemos um polinômio de quinto grau para as velocidades:

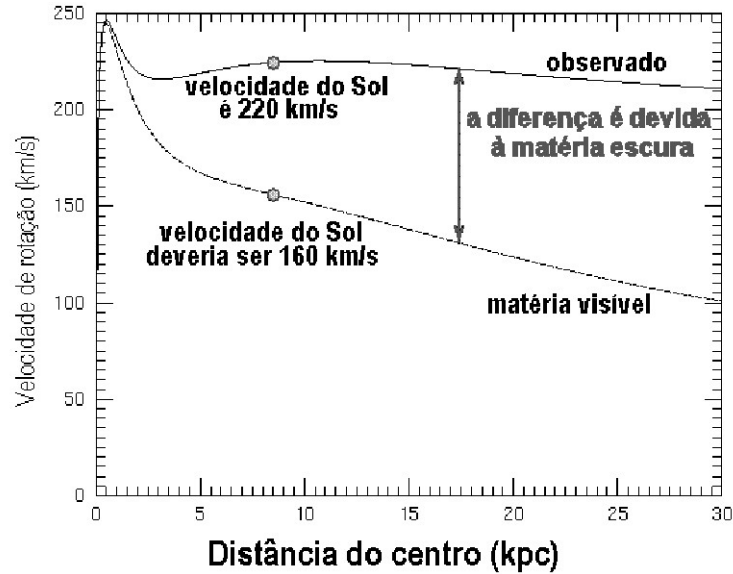


Figura 13: Nesse gráfico vemos a distribuição de velocidades de rotação de um corpo (no caso o sol) em função da distancia radial. O gráfico mostra ainda o que devíamos esperar para o caso se houvesse apenas matéria comum e o que é realmente observado, devido a presença de matéria escura. (Extraído de astro.if.ufrgs.br)

$$v^\phi = 3 \cdot 10^{-6} \left( 1,1 \cdot 10^{-7} r^5 - 3 \cdot 10^{-3} r^4 + 3,1 \cdot 10^{-2} - 1,4 r^2 + 28 r + 64 \right). \quad (4.43)$$

Porém os autores, *Farook Rahaman, P. Salucci*, [17] deduzem uma expressão analítica para a distribuição de velocidades, dada por:

$$v^\phi = \alpha \exp(-k_1 r) + \beta [1 - \exp(-k_2 r)]. \quad (4.44)$$

Ao se construir o gráfico da equação (4.44) e comparando com a curva observada da figura 13, concluímos que a equação (4.44) representa uma boa aproximação. Com base na equação (4.42) e  $B = 1/r_s$ , podemos escrever;

$$e^{2\Lambda} = \left( \frac{r}{r_s} \right)^l, \quad (4.45)$$

logo a função  $\Lambda(r)$  fica definida for:

$$\Lambda(r) = (v^\phi)^2 \ln \left( \frac{r}{r_s} \right). \quad (4.46)$$

Temos que mencionar que a equação (4.46), não se aproxima do eixo dos  $r$  de maneira assintótica, (na verdade  $\Lambda(R)$ , cresce ilimitadamente com  $r$ ), de modo que  $e^{2\Lambda}$  também não o faz. Como sabemos a métrica do wormhole se torna assintoticamente plana com  $r \rightarrow 0$ . Então devemos aqui sugerir um corte para expressão (4.46), onde a partir de uma certa distância a função  $e^{2\Lambda}$  cai suavemente. Para os valores particulares dos parâmetros

$R(kpc)$	$v^\phi(Km/s)$	$R(kpc)$	$v^\phi(Km/s)$
0.1	10.053	34.1	234.623
1.1	74.467	36.1	233.891
2.1	118.223	38.1	233.390
3.1	151.113	40.1	232.918
4.1	196.099	43.1	232.873
5.1	211.331	45.1	232.910
8.1	231.975	48.1	233.078
10.1	243.475	51.1	233.313
12.1	249.072	55.1	233.652
15.1	250.930	57.1	233.811
18.1	248.817	60.1	233.886
21.1	246.519	68.1	234.295
24.1	241.671	70.1	234.334
27.1	238.589	73.1	234.347

Tabela 2: Correspondes velocidades  $v^\phi$  em  $Km/s$ , para seus respectivos raios  $r$  em  $Kpc$  com base em uma massa de *Virial* total de  $3 \cdot 10^{12}M_\odot$

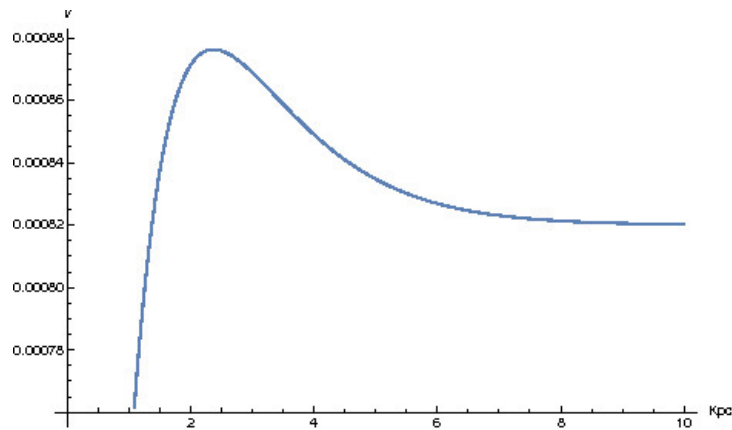


Figura 14: curva de rotação previsto pela equação (4.44), onde os parâmetros são dados por:  $\alpha = 0.0006$ ,  $\beta = 0.00082$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$

definidos na figura 14, permite encontrarmos uma expressão explícita de  $\Lambda$ :

$$\Lambda(r) = \left[ 0.0006 r e^{-r} + 0.00082(1 - e^r) \right]^2 \ln(r). \quad (4.47)$$

Então com as equações (4.41) e (4.47), temos uma construção razoável para as funções forma  $b(r)$  e a função *redshift*  $\Lambda(r)$ , que a princípio nos permite construir o potencial de Regge-Wheeler. Claro que essas expressões são bem particulares e que nos servem como demonstração. Tanto que poderias livremente escolher novos parâmetros para a equações (4.39) e (4.42) segundo a conveniência.

#### 4.5 Método WKB e os Potenciais de Regge-Wheeler do Wormhole do Halo Central

Os modos normais de oscilação são de enorme importância para estudo de corpos em vibração, devido a perturbação de alguma natureza, em muitas áreas de pesquisa. A astrofísica e cosmologia são algumas delas. Buracos negros experimentam vibrações

ressoantes, quando são levemente afastado do equilíbrio. E como sabemos essas vibrações são de natureza gravitacional que se propagam pelo espaço. Pelo fato de corpos como os buracos negros irradiarem sua energia, eles devem constituir um sistema amortecido, e como tal devem ser caracterizado por frequências complexas. De modo que, o espectro de oscilação é discreto e por isso comumente chamado de modos quase-normais. Onde a parte real das frequências complexas representam a oscilação propriamente dita e enquanto a parte imaginaria dá conta do amortecimento do sistema das ondas gravitacionais. Desse modo é interessante termos em mãos um método, que permita calcular os modos quase-normais para sistemas como, buracos-negros e por analogia wormholes. Um método particularmente simples, porém muito poderoso, é o método *WKB* (*Wentzel-Kramers-Brillouin*), este constitui uma método aproximado para resolução de equações diferenciais. E também oferece uma algoritmo semianalítico, para determinar os modos quase-normais. Nas seções 4.2 e 4.3 vimos que as perturbações da métrica de *Schwarzschild* e de wormhole, podem ser descritas por equações de onda semelhante a equação de *Schrödinger* da mecânica quântica;

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0 \quad (4.48)$$

Vimos que essas equações são conhecidas como equações de Regge-Wheeler. O método *WKB* é construído com base na expansão de Taylor do potencial  $Q(x)$  em torno do ponto de máximo  $x_0$ . Onde a variável  $x$  é associada a coordenada *tortoise*  $r^*$ , com domínio de  $-\infty$ , correspondendo ao horizonte de eventos, a  $+\infty$ , correspondendo a espaço. O potencial  $Q(x)$  deve satisfazer a condição de contorno, na qual  $Q(x) = \text{constante}$ , em  $\pm\infty$  e ter um ponto de máximo em  $x_0$ . Logo os coeficientes da expansão de Taylor de terceira ordem de  $Q(x)$  é dado por [19]:

$$\frac{iQ_0}{(2Q_0'')^{1/2}} - \Lambda(n) + \Omega(n) = n + \frac{1}{2}$$

$$n = \begin{cases} 0, & 1, 2 \dots, & Re \omega > 0 \\ -1, & -2 \dots & Re \omega < 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

onde os termos;

$$\Lambda(n) = \frac{1}{(2Q_0'')^{1/2}} \left[ \frac{1}{8} \left[ \frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right] \left[ \frac{1}{4} + \alpha^2 \right] - \frac{1}{288} \left[ \frac{Q_0^{(3)}}{Q_0''} \right] (7 + 60\alpha^2) \right] \quad (4.50)$$

e

$$\Omega(n) = \frac{n + \frac{1}{2}}{2Q_0''} \left[ \frac{5}{6912} \left[ \frac{Q_0^{(3)}}{Q_0''} \right]^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left[ \frac{Q_0^{(3)2} Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right] (51 + 100\alpha^2) \right]$$

$$+ \frac{1}{2304} \left[ \frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right]^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left[ \frac{Q_0^{(3)} Q_0^{(5)}}{Q_0''^2} \right] (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left[ \frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} \right] (5 + 4\alpha^2) \Bigg]. \quad (4.51)$$

Aqui os dois traços e os superíndices da forma  $(n)$  representam deriva de  $Q$  em relação a coordena *tortoise*  $r^*$  no seu ponto de máximo  $x_0$ . O termo  $\alpha \equiv \frac{1}{2} + n$ , com sendo  $n$  um inteiro que representa os modos de ressonância. No caso especial, em que  $Q(x)$  é da forma:

$$Q(x) = \omega^2 - V(x), \quad (4.52)$$

ou seja, no caso do potencial ser independente das frequências. Quando isso ocorre, pode-se mostrar que as frequências de oscilação complexa são escritas como:

$$\omega^2 = \left[ V_0 - i(-2V_0'')^{1/2} \Lambda(n) \right] - i \left( n + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} \left[ 1 + \frac{\Omega(n)}{n + \frac{1}{2}} \right]. \quad (4.53)$$

Uma vez que o potencial  $V$  for bem definido, podemos diretamente através de um método computacional calcular as frequências dos modos quase-normais, dado pela equação (4.53). Notemos que, quando se implementa a equação (4.53), junto das equações (4.50) e (4.51) em algum programa de cálculo, como no *SageMath*, podemos trocar a derivada em coordenada tartaruga  $\frac{d}{dr^*}$ , pela derivada original  $\frac{d}{dr}$ . Onde ambas as derivadas estão relacionadas por  $\frac{d}{dr^*} = e^\Lambda \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{d}{dr}$ , ou seja basta fazer a regra da cadeia. Contudo antes de ser possível aplicar o método *WKB*, devemos verificar se o potencial  $V$  satisfaz as condições de contorno assintótica e se o potencial apresenta máximo.

Substituindo as equações (4.41) e (4.47) na equação (4.7) e com ajuda do *SageMath*, podemos traçar os potenciais, para o caso da perturbação escalar, com os respectivos valores  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$ . Observamos que o potencial para  $l = 0$  é essencialmente negativo, sendo que  $V \rightarrow -\infty$  para  $r \rightarrow 0$ , enquanto  $V \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow +\infty$ . Já para os valores de  $l = 1, l = 2, l = 3$  os potenciais apresentam o mesmo comportamento. Onde há uma região na qual o potencial é praticamente paralelo ao eixo vertical e outra em que o potencial decresce suavemente para  $r \rightarrow 0$ . Agora temos que construirmos o potencial  $V$  em função da coordenada tartaruga  $r^*$ . Para isso basta construirmos um conjunto grande o bastante de pontos  $(V(r^*), r^*(r))$ . Já que a relação entre a coordenada de  $r^*$  e  $r$  é dada por:

$$r^* = \int \frac{1}{e^\Lambda \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} dr, \quad (4.54)$$

logo para um respectivo valor de  $r$  podemos encontrar um ponto  $(V(r^*), r^*(r))$ . Agora expressando os gráficos o potencial  $V$  com relação a  $r^*$ ; observamos que pelas figuras 20

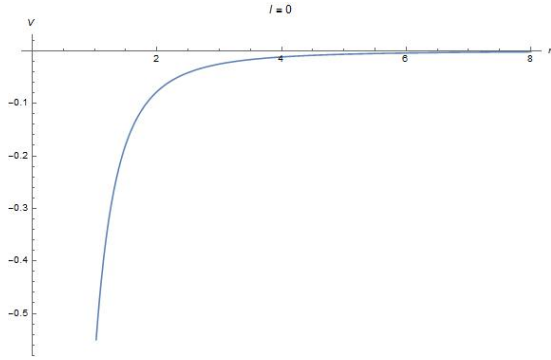


Figura 15: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 0$ , devido a uma perturbação escalar.

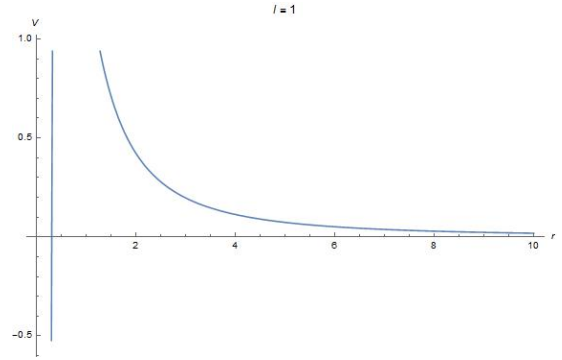


Figura 16: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 1$ , devido a uma perturbação escalar.

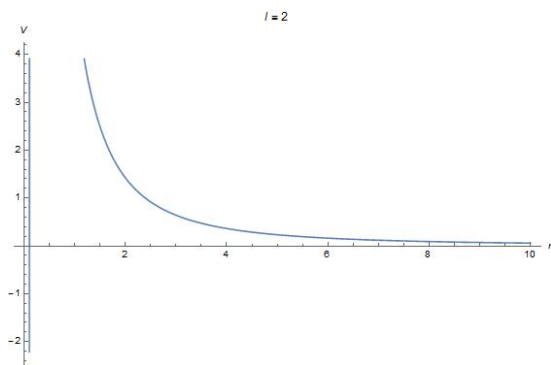


Figura 17: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 2$ , devido a uma perturbação escalar.

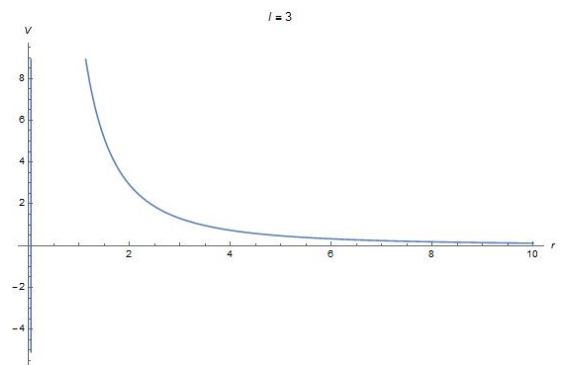


Figura 18: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 3$ , devido a uma perturbação escalar.

a 23, o potencial é de fato um potencial sino, com exceção do potencial para  $l = 0$ , que é um sino invertido. Aplicando a equação (4.53) para calcular os modos quase-normais, obteremos para os  $l = 1, l = 2, l = 3$ , sendo que para cada  $l$  encontraremos uma frequência para cada valor  $n$ . Por sua vez os valores de  $n$ , associamos aos modos de oscilação, sendo que usaremos os para em nosso cálculo apenas os valores  $n : -2, -1, 0, 1, 2$ . Então encontramos os modos quase-normais que podem ser vistos na tabela 3. Do mesmo modo se substituirmos as equações (4.41) e (4.47) na equação do potencial para perturbações tensoriais, equação (4.36), encontraremos os potenciais para os ( $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$ ), como podemos observar nos gráficos das figuras 25 a 28. Vemos que os gráficos das figuras 25 e 26, têm o mesmo comportamento de  $V \rightarrow -\infty$  a medida que  $r \rightarrow 0$ . Porém para um certo ponto o gráfico da figura 26 se torna positivo e passa por um máximo e tende a zero com  $r \rightarrow +\infty$ . Enquanto que o gráfico da figura 27 cresce rapidamente até atingir um máximo para em seguida decrescer suavemente com  $r \rightarrow +\infty$ . Já para o gráfico da figura 28 temos uma região do gráfico paralelo e para um outra temos que o potencial decresce suavemente. Observamos que após construirmos os gráficos do potencial  $V$  em função da coordenada tartaruga  $r^*$ , representados pelas figuras 30 a 33, o gráfico da figura

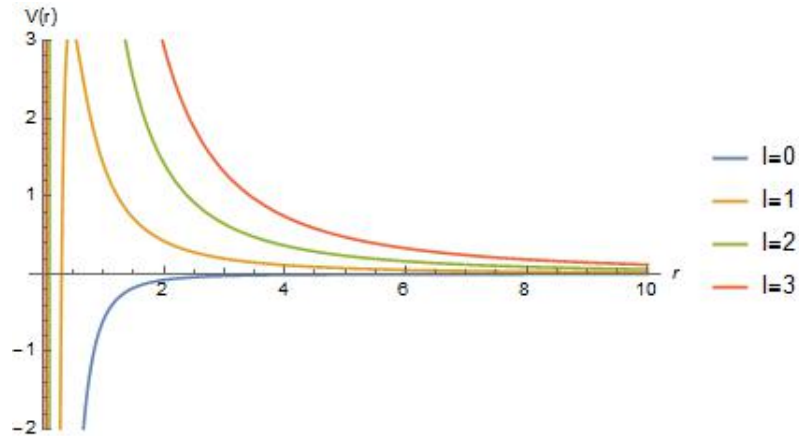


Figura 19: Gráfico da superposição do potencial de Regge-Wheeler para perturbação escalar, com  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$

30 representa um sino invertido. Já gráfico da figura 31 representa uma curva semelhante a um sino invertido, mas com duas concavidades, enquanto que os gráficos das figuras 32 e 33 representa o potencial sino de fato. Com auxílio da equação (4.53) calculamos os modos quase-normais para o potencial da perturbação tensorial equação (4.36).

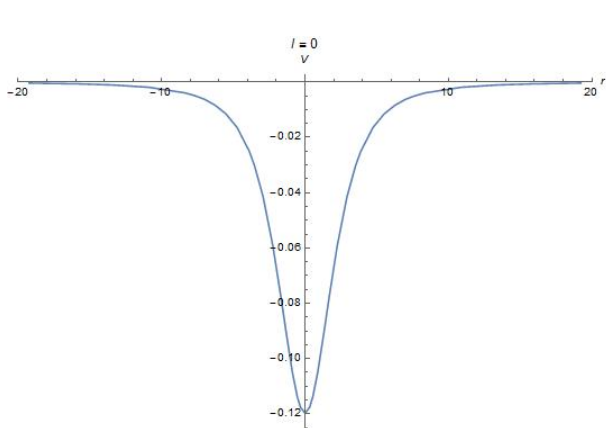


Figura 20: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 0$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

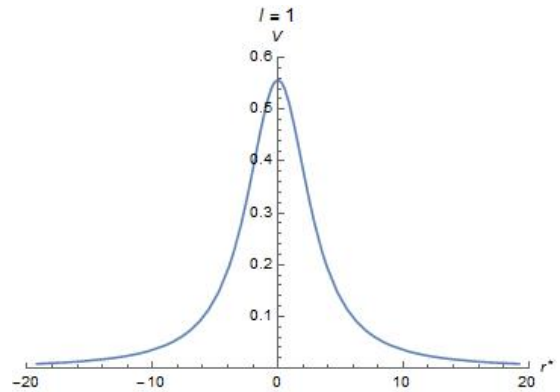


Figura 21: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 1$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .



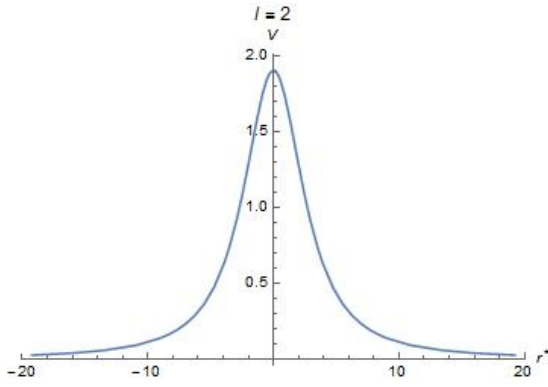


Figura 22: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 2$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

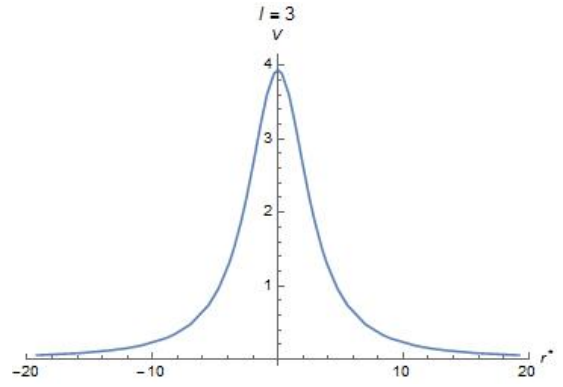


Figura 23: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 3$ , devido a uma perturbação escalar, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

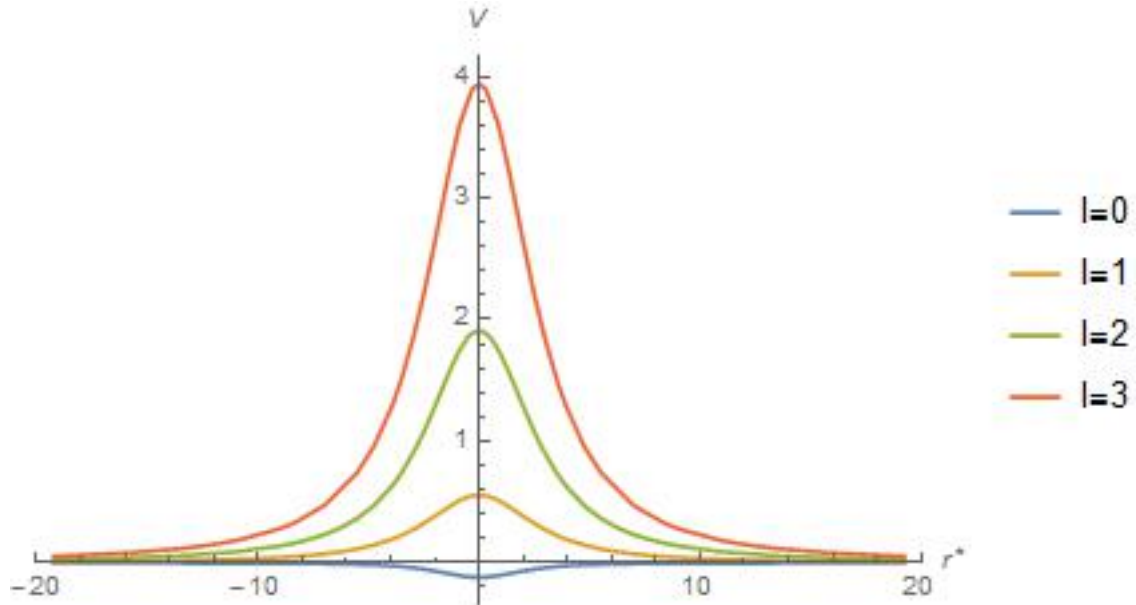


Figura 24: Superposição dos potenciais  $V$  para perturbação escalar em função de  $r^*$ , com  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$

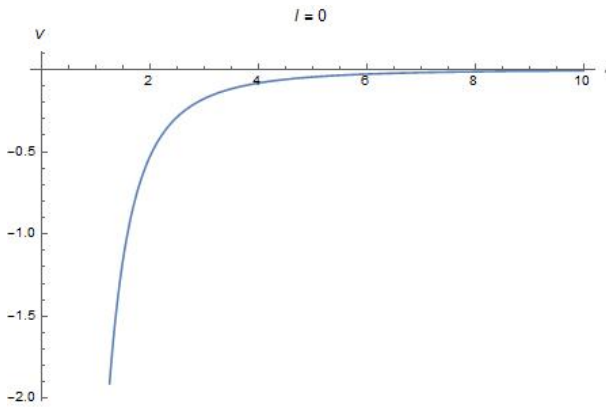


Figura 25: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 0$ , devido a uma perturbação tensorial.

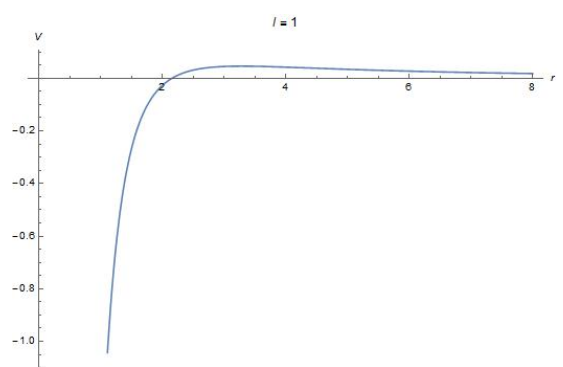


Figura 26: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 1$ , devido a uma perturbação tensorial.

-	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$n = -2$	$0.98476 + 0.20764 i$	$1.57790 + 0.42117 i$	$2.14284 + 0.49885 i$
$n = -1$	$0.80675 + 0.14135 i$	$1.42223 + 0.18172 i$	$2.01437 + 0.19207 i$
$n = 0$	$0.79503 - 0.03477 i$	$1.41640 - 0.12838 i$	$2.00980 - 0.13590 i$
$n = 1$	$0.97106 - 0.12780 i$	$1.55220 - 0.31903 i$	$2.11821 - 0.37903 i$
$n = 2$	$1.24622 + 0.18683 i$	$1.74232 - 0.30410 i$	$2.28418 - 0.47992 i$

Tabela 3: Modos quase-normais do potencial devido a um perturbação escalar para os valores  $l = 1, l = 2, l = 3$

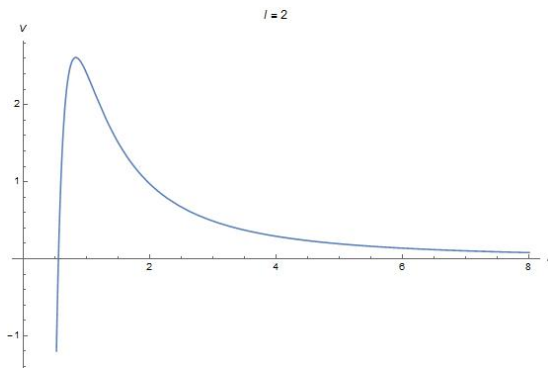


Figura 27: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 2$ , devido a uma perturbação tensorial.

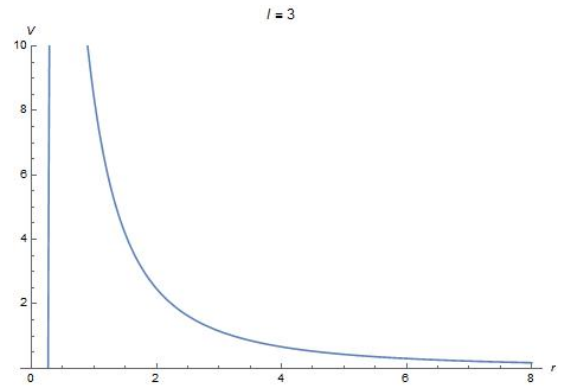


Figura 28: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 3$ , devido a uma perturbação tensorial.

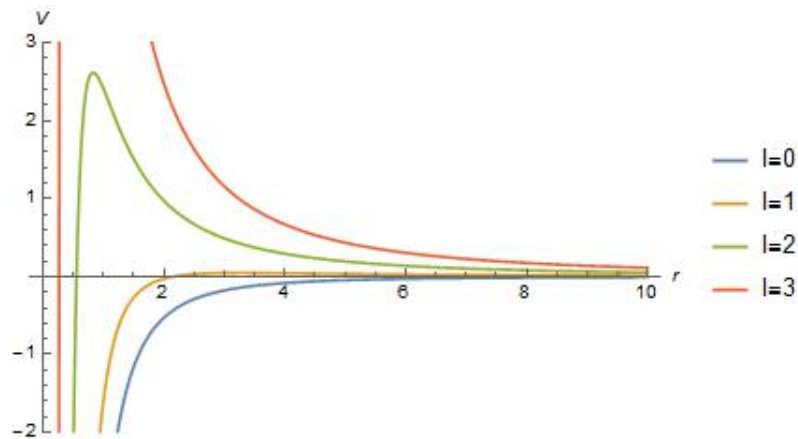


Figura 29: Gráfico da superposição do potencial de Regge-Wheeler para perturbação tensorial, com  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$

-	$l = 2$	$l = 3$
$n = -2$	$1.28599 + 0.33985 i$	$1.96292 + 0.46312 i$
$n = -1$	$1.14737 + 0.14801 i$	$1.83603 + 0.17997 i$
$n = 0$	$1.14440 - 0.12291 i$	$1.83203 - 0.13318 i$
$n = 1$	$1.27333 - 0.28826 i$	$1.94197 - 0.36423 i$
$n = 2$	$1.44805 - 0.26665 i$	$2.10780 - 0.45198 i$

Tabela 4: Modos quase-normais do potencial devido a um perturbação tensorial para os valores  $l = 2, l = 3$

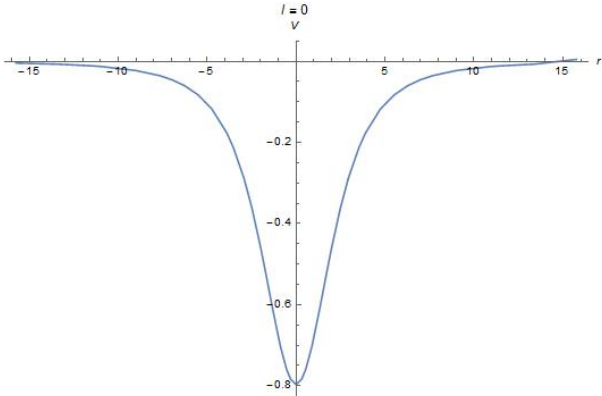


Figura 30: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 0$ , devido a uma perturbação tensorial, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

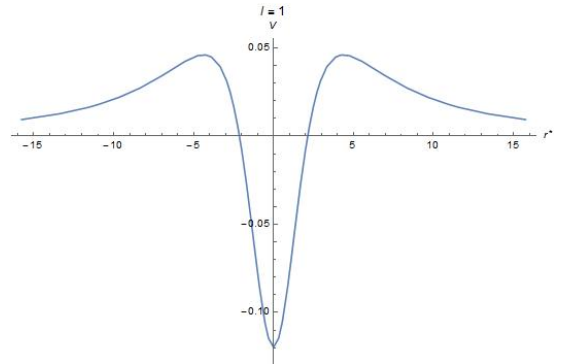


Figura 31: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 1$ , devido a uma perturbação tensorial, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

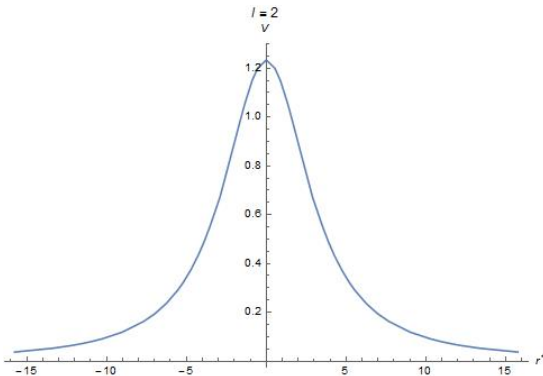


Figura 32: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 2$ , devido a uma perturbação tensorial, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

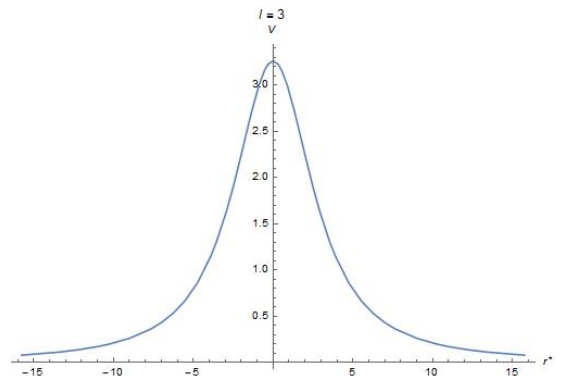


Figura 33: Potencial de Regge-Wheeler para  $l = 3$ , devido a uma perturbação tensorial, com relação à coordenada tartaruga  $r^*$ .

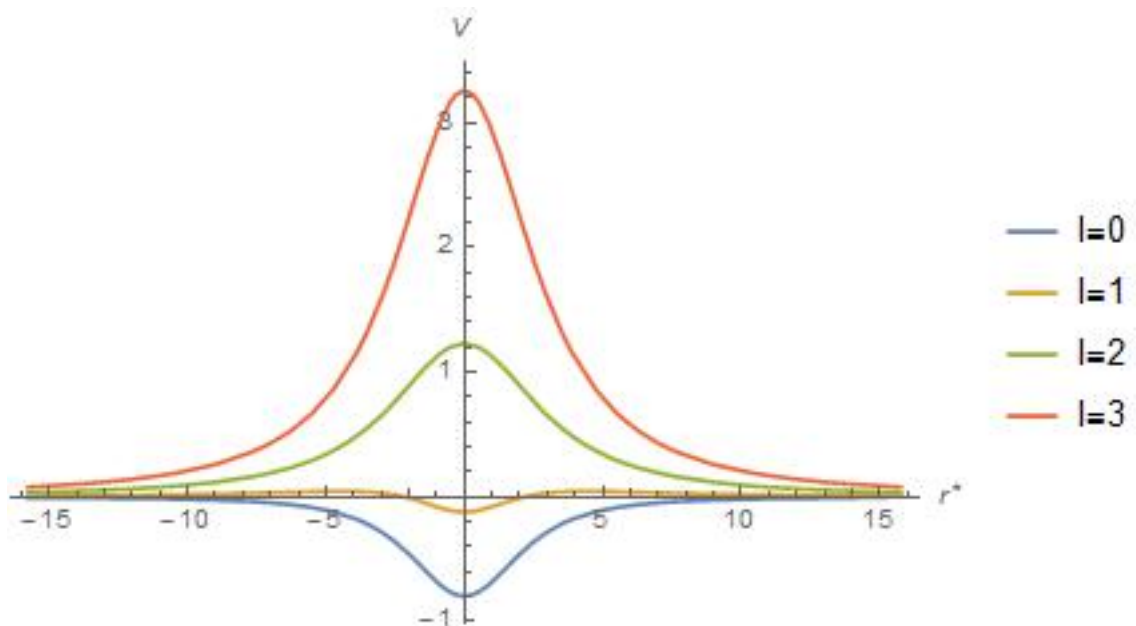


Figura 34: Superposição dos potenciais  $V$  para perturbação tensorial em função de  $r^*$ , com  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3$

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A proposta desse trabalho, como vimos, foi determinar os potenciais de Regge-Wheeler para wormhole hipotético localizado nos halos centrais de matéria escura. Para em seguida determinar os modos quase-normais, pelo método *WKB*. Desse modo, utilizamos o modelo de (*Navarro-Frenk - White*) para o perfil de distribuição de matéria escura. Com isso, conseguimos determinar uma expressão para a função forma  $b(r)$  do wormhole, equação (4.41). Em seguida utilizando a equação (4.44), que nos diz a distribuição de velocidades de rotação  $v^\phi$  da matéria que orbita o centro da galáxia em função da distância. Obtivemos a função *redshift*  $\Lambda(r)$  a partir de (4.44), resultando a expressão (4.47). A equação (4.44) como dissemos antes, representa um boa aproximação para os corpos em rotação ao redor do centro da galáxia. Por isso essa expressão deve proporcionar uma melhor aproximação para se determinar  $\Lambda(r)$ . No paço seguinte, definimos o método semi-analítico *WBK*, que no permite calcular numericamente os modos quase-normais dado algum potencial. Sendo que o potencial em questão devia satisfazer as condições de contorno. Tais condições exigem que potencial deva ter um comportamento assintótico no intervalo  $-\infty, +\infty$ . Mesmo que tenham valores distintos para o eixo  $x$  e possuir um máximo nesse intervalo. Após construirmos os gráficos dos potenciais de Regge-Wheeler, para as funções  $b(r)$  e  $\Lambda(r)$  e montamos os gráficos dos potenciais tartaruga correspondente. Observamos que os potenciais possuem o requisito de serem assintótico em ambos os lados e possuem um máximo, mais precisamente obtivemos um potencial sino, para a maioria dos casos. No caso do potencial para perturbação escalar, equação (4.7), constatamos que apenas o potencial para  $l = 0$  apresenta uma curva sino invertida, por isso não possui máximo. Contudo para os valores seguinte,  $l = 1, l = 2, l = 3$ , observamos que os potenciais cumprem os requisitos para determinarmos os modos quase-normais. Do mesmo modo para o potencial resultante da perturbação tensorial, equação (4.36), apenas os casos de  $l = 0$  e  $l = 1$ , os potenciais tartaruga não representam uma curva sino com um máximo único. A partir de  $l = 2$  os potenciais tartaruga representam uma curva sino. Com isso podemos aplicar o método *WKB*, de modo que obtivemos alguns valores dos modos quase-normais para o caso da perturbação escalar, tabela 3, e para perturbação tensorial, tabela 4.

Então cumprimos a proposta desse trabalho, sobre a investigação dos modos quase normais do wormhole do halo central da galáxia. Observamos assim, que os modelos de distribuição de matéria escura fria de *Navarro* e distribuição de velocidades dos corpos na região dos halos, nos permitiram determinar os modos quase-normais satisfatoriamente.

Embora, como já havíamos discutido, os modos quase-normais não carreguem toda a informação contido pela fonte emissora, ainda assim possuem informações crucias sobre a natureza da fonte. Isso motiva a investigação dos modos quase-normais como ferramenta de exploração de varias estruturas exóticas. Muito recentemente com a detecção de ondas gravitacionais por parte do LIGO, a pesquisa com ondas gravitacionais tem aumentado consideravelmente. De modo que a determinação dos modos quase-normais servira de guia para construção da astronomia gravitacional. Como propostas futuras continuaremos a tentar investigar os modos quase-normais para outras métricas bem como tentarmos construir o potencial de Regge-Wheeler para o setor polar da nossa métrica do wormhole. Uma proposta um pouco mais ambiciosa será determinar os modos quase-normais para estruturas construídos a partir do formalismo da gravitação quântica em loop.

## REFERÊNCIAS

- [1] S. Hawking, *Uma breve história do tempo*. Editora Intrínseca, 2015.
- [2] A. Pais and F. Parente, *"Sutil é o Senhor...": A ciência ea vida de Einstein*. Nova Fronteira, 1995.
- [3] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [4] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, USA, 1899.
- [5] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [6] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, "Relativistic binary pulsar b1913+ 16: thirty years of observations and analysis," *arXiv preprint astro-ph/0407149*, 2004.
- [7] O. D. Aguiar, "Past, present and future of the resonant-mass gravitational wave detectors," *Research in Astronomy and Astrophysics*, vol. 11, no. 1, p. 1, 2011.
- [8] B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, "Astrophysical implications of the binary black hole merger gw150914," *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 818, no. 2, p. L22, 2016.
- [9] A. Shatskii, "Einstein-rosen bridges and the characteristic properties of gravitational lensing by them," *Astronomy Reports*, vol. 48, no. 7, pp. 525–533, 2004.
- [10] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, "Causality and multiply connected space-time," *Phys. Rev.*, vol. 128, pp. 919–929, Oct 1962.
- [11] M. S. Morris and K. S. Thorne, "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity," *American Journal of Physics*, vol. 56, no. 5, pp. 395–412, 1988.
- [12] S. d. S. Silva *et al.*, "Teorema de imersão de nash aplicado ao estudo do wormhole atravessável," 2012.
- [13] T. Regge and J. A. Wheeler, "Stability of a schwarzschild singularity," *Physical Review*, vol. 108, no. 4, p. 1063, 1957.
- [14] F. J. Zerilli, "Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations," *Physical Review Letters*, vol. 24, no. 13, p. 737, 1970.
- [15] V. Moncrief, "Odd-parity stability of a reissner-nordström black hole," *Physical Review D*, vol. 9, no. 10, p. 2707, 1974.
- [16] C. Vishveshwara, "Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole," *Nature*, vol. 227, no. 5261, pp. 936–938, 1970.
- [17] F. Rahaman, P. Salucci, P. K. Kuhfittig, S. Ray, and M. Rahaman, "Possible existence of wormholes in the central regions of halos," *Annals of Physics*, vol. 350, pp. 561–567, 2014.

- [18] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, vol. 69. Oxford University Press, 1998.
- [19] S. Iyer and C. M. Will, “Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering,” *Physical Review D*, vol. 35, no. 12, p. 3621, 1987.
- [20] S. Hawking, *Os gênios da ciência: sobre os ombros de gigantes*. Campus, 2005.
- [21] R. S. Shankland, “Michelson-morley experiment,” *American Journal of Physics*, vol. 32, no. 1, pp. 16–35, 1964.
- [22] A. Grünbaum, “The falsifiability of the lorentz-fitzgerald contraction hypothesis,” *The British journal for the philosophy of science*, vol. 10, no. 37, pp. 48–50, 1959.
- [23] E. Christoffel, “Ueber die transformation der homogenen differentialausdrücke zweiten grades, j. für die reine und angew,” *Math*, vol. 70, pp. 46–70, 1969.
- [24] B. O’neill, *Elementary differential geometry*. Academic press, 2006.
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, vol. 1. Wiley, 1998.
- [26] N. A. Lemos, *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [27] E. dos Santos Pereira, “Fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados por buracos negros pre-galacticos,” Master’s thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2008.
- [28] A. L. Tiec and J. Novak, “Theory of gravitational waves,” *arXiv preprint arXiv:1607.04202*, 2016.
- [29] D. J. Griffiths, “Eletrodinâmica; 3ª edição,” 2011.
- [30] J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [31] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, “Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 12, no. 1, p. 2, 2009.
- [32] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [33] G. Ushomirsky, C. Cutler, and L. Bildsten, “Deformations of accreting neutron star crusts and gravitational wave emission,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 319, no. 3, pp. 902–932, 2000.
- [34] B. Abbott, R. Abbott, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, R. Amin, S. Anderson, W. Anderson, M. Arain, *et al.*, “Beating the spin-down limit on gravitational wave emission from the crab pulsar,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 683, no. 1, p. L45, 2008.

- [35] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor, “Timing measurements of the relativistic binary pulsar psr b1913+ 16,” *The Astrophysical Journal*, vol. 722, no. 2, p. 1030, 2010.
- [36] J. L. Melo, “Sistemas de isolamento vibracional e de acoplamento antena-transdutores para o protótipo de um detector de ondas gravitacionais,” *São José dos Campos. Tese (Doutorado em Ciência Espacial/Astrofísica). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*, 2002.
- [37] K. Riles, “Gravitational waves: Sources, detectors and searches,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 68, pp. 1–54, 2013.
- [38] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 2000.
- [39] F. da Silva Bortoli, *Sistemas Vibracionais do Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2011.
- [40] J. Weber, “Gravitational radiation,” *Physical Review Letters*, vol. 18, no. 13, p. 498, 1967.
- [41] L. A. N. de Paula, *Otimização do Sistema de Transdução Paramétrica do Detector de Ondas Gravitacionais Mario Schenberg*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2013.
- [42] M. Peterseim, D. Robertson, K. Danzmann, H. Welling, and P. Bender, “Lisa interferometer sensitivity to spacecraft motion,” *Advances in Space Research*, vol. 25, no. 6, pp. 1143–1147, 2000.
- [43] B. Abbott, R. Abbott, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, R. Amin, S. Anderson, W. Anderson, M. Arain, *et al.*, “Ligo: the laser interferometer gravitational-wave observatory,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 72, no. 7, p. 076901, 2009.
- [44] N. J. Popławski, “Radial motion into an einstein–rosen bridge,” *Physics Letters B*, vol. 687, no. 2, pp. 110–113, 2010.
- [45] F. Rahaman, P. K. F. Kuhfittig, S. Ray, and N. Islam, “Possible existence of wormholes in the galactic halo region,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 2, p. 2750, 2014.
- [46] G. Battaglia, A. Helmi, H. Morrison, and e. o. Harding, “The radial velocity dispersion profile of the galactic halo: constraining the density profile of the dark halo of the milky way,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 364, no. 2, pp. 433–442, 2005.
- [47] F. Rahaman, G. Shit, B. Sen, and S. Ray, “Could wormholes form in dark matter galactic halos?,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 361, no. 1, p. 37, 2016.
- [48] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. White, “A universal density profile from hierarchical clustering,” *The Astrophysical Journal*, vol. 490, no. 2, p. 493, 1997.
- [49] F. Nesti and P. Salucci, “The dark matter halo of the milky way, ad 2013,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2013, no. 07, p. 016, 2013.