



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO NAILSON FARIAS DE VASCONCELOS

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE BILHARES NA PRESENÇA DE
CAMPOS EXTERNOS

FORTALEZA

2017

FRANCISCO NAILSON FARIAS DE VASCONCELOS

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE BILHARES NA PRESENÇA DE CAMPOS
EXTERNOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

FORTALEZA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- V45e Vasconcelos, Francisco Nailson Farias de.
Estudo das propriedades de bilhares na presença de campos externos / Francisco Nailson Farias de Vasconcelos. – 2017.
59 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.
1. Sistemas dinâmicos . 2. Bilhares. 3. Campo externo. I. Título.

CDD 530

FRANCISCO NAILSON FARIAS DE VASCONCELOS

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE BILHARES NA PRESENÇA DE CAMPOS
EXTERNOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Welington de Sousa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

*Dedico este trabalho
à minha família, em
especial os meus
pais. E à minha
querida namorada.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre abrir portas em meu caminho. Meus amados pais, Valmir e Neíla, por não medirem esforços para garantir uma boa educação para mim e meu irmão Nailton. Agradeço também à minha amada Keilla, por estar ao meu lado me apoiando no decorrer de todos esses anos.

Agradeço ao meu orientador, professor Ascânio Dias Araújo, pela boa vontade em me orientar, mesmo não me conhecendo ou sendo aluno da casa. Por suas orientações, preocupações e cobranças, que muitas da vezes instigam a busca em fazer algo sempre melhor.

Um agradecimento mais que especial deve ser dado ao meu querido amigo Rilder, uma pessoa com a qual aprendi milhares de coisas no decorrer desses dois anos, ensinamentos e idéias que levarei pro resto da vida. Ao meu amigo Samuel, por sempre sugerir dicas e meios para otimização deste trabalho. E aos demais amigos do grupo: Felipe, Thiago, Leandro, Emanuel, Calebe e Wagner, pelo companheirismo, grandes conversas e troca de idéias que me fizeram amadurecer como nunca.

Aos meus amigos Rodrigo, Raul, David, João Paulo, Ana luiza, Rivânia e principalmente Stanley, por estarem sempre disponíveis para ajudar de alguma forma. Pela boa convivência e bons momentos durante este período.

Também fico muito grato ao departamento de Física-UFC, por me acolher tão bem, e fazer me sentir em casa. Ao CNPq, pelo incentivo e financiamento (ininterrupto) de nossa pesquisa.

Enfim, gostaria de agradecer (como é de praxe) à todos aqueles, que de uma forma ou de outra, contribuíram com o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O estudo de propriedades caóticas de alguns sistemas complexos vem se desenvolvendo amplamente a partir do avanço tecnológico proporcionado pelos computadores. Dentre esses sistemas, podemos ressaltar os bilhares, que devido à sua simplicidade e enorme aplicabilidade vem se destacando dentre os demais modelos. Neste trabalho, estudamos as propriedades de alguns bilhares sujeitos à ação de um campo externo. Aqui, o campo externo é representado por meio de um campo de velocidade que é obtido a partir do escoamento de um fluido. Este fluido exerce uma força de arrasto sobre a partícula que encontra-se confinada pela fronteira que define o bilhar. Ao contrário dos outros trabalhos realizados com bilhares, propomos uma abordagem totalmente numérica levando em consideração vários fatores que poderiam influenciar na dinâmica da partícula, como por exemplo, a força elástica que a partícula sofre ao colidir com a fronteira, o regime de escoamento do fluido e o efeito do arraste na trajetória da partícula, causado por uma força que é proporcional a uma potência da velocidade na forma $F \propto v^\gamma$. A partir desta abordagem, foi possível observar um decaimento na energia da partícula, que se deu de forma linear ($\gamma = 1.0$), polinomial do segundo grau ($\gamma = 1.5$) e exponencial ($\gamma = 2.0$). Além disso, quando analisamos o espaço de fase dos sistemas (bilhares), o efeito do parâmetro dissipativo contribuiu para o surgimento de um mar de caos em alguns casos, e ainda, para o surgimento de um atrator, cujo efeito é oriundo também da ação do campo externo.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Bilhares, Campo Externo.

ABSTRACT

The study of the chaotic properties of some complex systems has been largely developed from the technological advancement provided by computers. Among these systems, we can highlight the billiards, which, due to their simplicity and enormous applicability, they have stood out among the other models. In this work, we study the properties of some billiards, when subject to the action of an external field. Here the external field is represented by a velocity field, which is obtained from the flow of a fluid. Such fluid exerts a drag force on the particle bounded by the boundary defining the billiard. In contrast to the other works done with billiards, we propose a totally numerical approach, taking into account several factors that could exercise influence on the particle dynamics, such as the elastic force that the particle suffers when it collides with the boundary, the outflow regime of the fluid, and the drag effect on the trajectory of the particle, caused by a force that is proportional to a potential of the velocity in the form $F \propto v^\gamma$. From this approach we could observe a decay on the energy of the particle, which occurred in a linear form ($\gamma = 1.0$), polynomial of the second degree ($\gamma = 1.5$) and exponential ($\gamma = 2.0$). Moreover, as we analyzed the phase space of the systems (billiards), the effect of the dissipation parameter contributed to the emerging of a sea of chaos in some cases, and also to the appearance of an attractor, whose effect also originates from the action of the external field.

Keywords: Dynamical Systems, Billiards, External Field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Movimento de um ponto no espaço e fase para um sistema integrável com dois graus de liberdade.	15
Figura 2 – Representação esquemática de um bilhar.	17
Figura 3 – Variáveis necessárias para a construção de um mapeamento feito em bilhares.	19
Figura 4 – Características de um bilhar circular	20
Figura 5 – Espaço de fase de um bilhar.	21
Figura 6 – Características de um bilhar elíptico.	22
Figura 7 – Bilhares caóticos	23
Figura 8 – Influência do número de Stokes sob o comportamento da trajetória da partícula com relação às linhas do escoamento.	25
Figura 9 – Regimes de escoamento	26
Figura 10 – Campo de velocidade	28
Figura 11 – Representação de como alguns pontos do campo estão distribuídos.	29
Figura 12 – Propriedades da triangulação.	30
Figura 13 – Identificação de um triângulo referente à uma dada posição (x, y)	31
Figura 14 – Esquema da interpolação.	32
Figura 15 – Influência do campo de velocidade na trajetória da partícula.	34
Figura 16 – Variáveis necessárias para a construção do espaço de fase.	35
Figura 17 – Espaço de fase para um bilhar circular.	37
Figura 18 – Espaço de fase para o bilhar elíptico.	38
Figura 19 – Gráfico da velocidade da partícula em função do número de colisões.	39
Figura 20 – Espaço de fase para o bilhar, $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$	42
Figura 21 – Espaço de fase para o bilhar, $Re = 10^2$ e $Stk = 10$	43
Figura 22 – Espaço de fase para o bilhar elíptico, $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$	45
Figura 23 – Espaço de fase para o bilhar elíptico, $Re = 10^2$ e $Stk = 10$	46
Figura 24 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 1$	48
Figura 25 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$	49
Figura 26 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 10$	50
Figura 27 – Diferença média entre as soluções - bilhar elíptico. $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$	52
Figura 28 – Diferença média entre as soluções - bilhar elíptico. $Re = 10^2$ e $Stk = 10$	53
Figura 29 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $\gamma = 2.0$	54

Figura 30 - Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $\gamma = 2.0$. . 55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SISTEMAS DINÂMICOS	13
2.1	Formalismo Hamiltoniano	13
2.2	Sistemas Integráveis	14
2.3	Expoentes de Lyapunov	16
3	BILHARES	17
3.1	Descrição	17
3.2	Mapeamento em Bilhares	18
3.3	Classificação Quanto à Dinâmica	20
3.3.1	Bilhares Integráveis	20
3.4	Bilhares Não-integráveis	22
4	MÉTODOS	24
4.1	Equação Diferencial que Descreve o Sistema	24
4.2	O Campo de Velocidade	27
4.3	Triangulação e Interpolação	29
4.4	Integração Numérica	33
4.5	Papel da Solução Numérica na Obtenção de Resultados	33
4.6	Determinação do Caos	36
5	RESULTADOS	37
5.1	Bilhar Circular e Elíptico - Caso Conservativo	37
5.2	Resultados Numéricos para o Bilhar Circular com Campo Ex- terno	40
5.3	Resultados Numéricos para o Bilhar Elíptico com Campo Externo	44
5.4	Distância entre Soluções - Bilhar Circular	47
5.5	Distância entre Soluções - Bilhar Elíptico	51
5.6	Influência do número de Stokes	53
6	CONCLUSÕES	56
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Os modelos que tentam descrever a evolução temporal de sistemas físicos são baseados em equações diferenciais de movimento, que na grande maioria das vezes podem ser descritos pelo formalismo Newtoniano (segunda lei de Newton). Porém, alguns problemas podem surgir ocorrem devido à presença de não linearidade nas equações ou pelo fato de não ser possível obter uma solução analítica, como por exemplo, no problema dos três corpos estudado pelo físico e matemático Henry Poincaré (1854-1912) [1], dando início ao estudo da dinâmica de sistemas não-lineares. Posteriormente, com o advento da tecnologia e o desenvolvimento de computadores modernos, surgiu a capacidade de abordar os sistemas não lineares de outra maneira, fazendo uso da solução numérica em casos nos quais a solução analítica era bastante complicada ou inviável. Com esse tipo de abordagem tornou-se possível observar a existência de comportamentos irregulares, ou aperiódicos, e com dependência sensível às condições iniciais. Estes fatos que deram início a um novo campo de estudo na Física, chamado de Teoria do Caos. Para entender fenômenos dessa natureza e seus mecanismos, os físicos procuraram desenvolver modelos simplificados que permitissem de alguma maneira, uma melhor compreensão destes fenômenos. Alguns desses modelos são os “bilhares”, os quais dependendo de suas geometrias podem descrever movimentos caóticos ou regulares ou uma composição desses.

Além de ser um dos instrumentos mais simples no estudo de sistemas caóticos, os bilhares vêm apresentando uma enorme flexibilidade com relação às aplicações em problemas cujo comportamento pretende-se estudar. Com aplicações nas áreas de química [2], fenômenos de transferência de calor [3], supercondutores [4], nanoestruturas [5], entre outros. Há também diversos trabalhos envolvendo bilhares submetidos a campos externos conservativos, como em [6], onde observa-se os efeitos da ação do campo no espaço de fase do sistema.

O presente trabalho faz uma abordagem totalmente numérica de bilhares (circulares e elípticos) submetidos à presença de um campo externo. Campo este aqui representado por meio do escoamento de um fluido na região definida pela fronteira do bilhar. Devido à presença deste fluido, surge uma força de arrasto que atua sobre a partícula. Essa força é proporcional a uma potência da velocidade $F \propto v^\gamma$, onde γ é o parâmetro que controla a intensidade da dissipação. Com isso, estudamos a dinâmica da partícula quando sujeita aos efeitos do campo externo em diferentes regimes de escoamento, bem como para variações no parâmetro dissipativo γ , junto com outros parâmetros que definem a inércia da partícula. Para isso, consideramos alguns fatores que de extrema importância

para tratar o problema da forma mais real possível, como por exemplo, calculando a força elástica durante da colisão da partícula com a fronteira, e resolvendo instantaneamente a equação diferencial que rege a dinâmica do sistema. Construímos ainda os espaços de fase dos sistemas, quando sujeitos à variações dos parâmetros citados anteriormente. E calculamos ainda a divergência entre condições iniciais muito próximas, ambas com a finalidade de identificar algum comportamento caótico nos bilhares estudados.

Começaremos com o Capítulo 2, onde abordaremos algumas noções básicas a respeito de sistemas dinâmicos. Descreveremos um pouco o formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica, juntamente com algumas noções fundamentais de integrabilidade de um sistema dinâmico. Por fim, apresentaremos uma ferramenta fundamental e bastante utilizada na determinação de caos em sistemas dinâmicos, que são os expoentes de Lyapunov. Em seguida, o Capítulo 3 está dedicado totalmente à caracterização de bilhares. Primeiramente será feita uma abordagem histórica. Em seguida partiremos para a definição, onde será explicado detalhadamente o que é um bilhar, construiremos o mapa que geralmente é utilizado na literatura, e por fim, classificaremos alguns bilhares de acordo com sua dinâmica. Já no Capítulo 4, abordaremos detalhadamente o modelo proposto nesta dissertação. Esclareceremos a natureza do campo de velocidade aplicado aos bilhares, juntamente com todo o tratamento numérico com ele realizado. Em seguida explanaremos a equação diferencial que envolve o problema, sua solução, e o papel da solução numérica na obtenção dos resultados. No capítulo 5 serão discutidos os principais resultados encontrados. Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao caso conservativo, de forma a demonstrar a confiabilidade do modelo, resgatando o que já é conhecido na literatura. Em seguida serão discutidos os resultados da ação do campo na dinâmica dos bilhares estudados, tanto qualitativamente, quanto quantitativamente. Finalmente, algumas considerações finais, conclusões e perspectivas serão mostradas no capítulo 6.

A maioria das pesquisas desenvolvidas nesta dissertação de Mestrado, resultaram de publicações científicas que serão citadas no decorrer do texto. Os resultados aqui apresentados foram obtidos via simulação numérica, onde foram executados com a utilização do sistema Linux, compiladores, programas de visualização gráfica e editores de imagens, como Xmgrace, Gnuplot, Inkscape, etc. A linguagem de programação utilizada variou entre C, Shell Script e Python, dependendo do algoritmo utilizado.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Este capítulo faz um breve apanhado sobre alguns dos principais conceitos em sistemas dinâmicos, que terão papel importante na compreensão dos capítulos posteriores. Discutiremos um pouco sobre o formalismo hamiltoniano e abordaremos o conceitos de sistemas dinâmicos integráveis, não integráveis e mistos. Por fim, será discutida a questão da sensibilidade às condições iniciais de um sistema caótico, que é medida por meio dos expoentes de Lyapunov.

2.1 Formalismo Hamiltoniano

Tentar entender como as coisas evoluem com o passar do tempo, sempre foi uma grande motivação ao longo do desenvolvimento da ciência. Para isso, os físicos frequentemente encontram uma maneira elegante de descrever modelos que representem tais sistemas. Foi assim com Galileu Galilei [7, 8], como o emprego do método científico, passando por Isaac Newton [9], com um formalismo elaborado com experimentos e um conjunto de leis, que baseadas em equações diferenciais descrevem uma gama de sistemas físicos estudados até os dias de hoje.

Outra maneira comum de representar equações que descrevam a dinâmica de sistemas, é utilizando o formalismo Hamiltoniano, onde o estado do sistema é descrito pelo conjunto de N coordenadas generalizadas $q = (q_1, q_2 \dots q_n)$ e seus N momentos conjugados $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$, sendo que N denomina o número de graus de liberdade do sistema, cuja evolução temporal é dada pelo conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, conhecidas como equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}. \quad (2.1)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i}. \quad (2.2)$$

Onde $H(q, p)$ é uma função conhecida como Hamiltoniana, que na maioria dos casos representa a Energia total dos sistema[10].

Além de ser tratado de forma contínua, em sistemas dinâmicos o tempo pode ser considerado como uma variável discreta. Quando o mesmo é tomado como discreto, as soluções são obtidas por meio de mapas, e o conjunto de todas as soluções é conhecido como espaço de fase [10].

Entende-se por espaço de fase como sendo o espaço formado pelas coordenadas

generalizadas (q) e por seus momentos conjugados (p). Fisicamente as trajetórias no espaço de fase representam os estados possíveis de um sistema mecânico. Trajetórias no espaço de fase são conhecidas como órbitas.

2.2 Sistemas Integráveis

A noção de integrabilidade está associada à possibilidade de se resolver explicitamente as equações de movimento de um sistema mecânico. Para tal feito, um sistema mecânico é dito integrável quando o número de graus de liberdade é compatível com o número de constante de movimento. Estas constantes de movimento precisam ser independentes entre sí, ou seja, implica que o parêntese de Poisson [11] entre elas seja nulo. Desta maneira, podemos realizar uma transformação canônica [11] de variáveis $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$, de tal forma que a nova Hamiltoniana (\tilde{H}) dependa somente de \tilde{p} , que implica em $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0$. A escolha de uma transformação em que os novos momentos tornam-se constantes de movimento é arbitrária. Podemos então sugerir que as novas variáveis de transformação canônicas sejam as variáveis ação-ângulo $(\tilde{q}, \tilde{p}) \rightarrow (I, \theta)$ [12], que resultam em novas equações de movimento:

$$\frac{dI}{dt} = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H(\tilde{I})}{\partial I} = \omega(I). \quad (2.3)$$

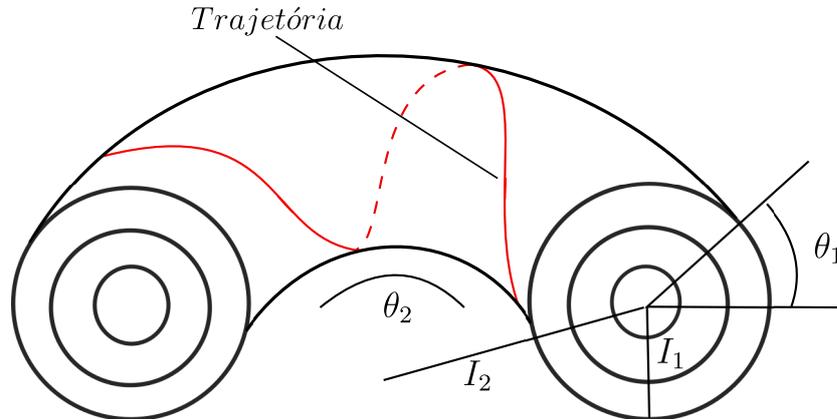
Sendo que as soluções de (2.3) dadas respectivamente por:

$$I(t) = I(0). \quad (2.4)$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega[I(0)]t. \quad (2.5)$$

A representação geométrica das soluções acima se dão através de um toro N-dimensional, sendo a variável ação os raios constantes e a variável ângulo uma variável cíclica que evolui temporalmente, conforme a figura 1.

Figura 1 – Movimento de um ponto no espaço e fase para um sistema integrável com dois graus de liberdade.



Fonte: Elaborado pelo autor. O movimento ocorre sobre um toro $I_1 = \text{const.}$, $I_2 = \text{const.}$.

As trajetórias sobre o toro podem ser analisadas quanto à sua periodicidade ou quase-periodicidade através das frequências $\omega_i(I)$ [11]. Quando estivermos tratando de uma trajetória periódica esta obedece a seguinte condição de ressonância $\vec{m} \cdot \vec{\omega}_i = 0$, onde \vec{m} é um vetor de valores inteiros. Para casos bidimensional, a condição de ressonância torna-se:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (2.6)$$

Os toros racionais são encontrados quando a razão entre as frequências é um número racional. Assim quando uma órbita completar m_1 voltas em θ_1 e m_2 voltas em θ_2 , a órbita se fecha sobre si mesma, e temos uma órbita periódica [13]. No caso em que a equação (2.6) não é satisfeita, lidamos com o caso quase-periódico, chamados toros irracionais, onde as órbitas nunca fecham sobre si mesmas.

De acordo com as equações (2.4) e (2.5), pequenos desvios nas condições iniciais de um sistema integrável crescem linearmente com o tempo, e diz-se que o movimento de sistemas integráveis é regular. Uma consequência direta disso é que o espaço de fase do sistema apresenta trajetórias regulares [14]. Já os sistemas não-integráveis podem, em certas regiões do espaço de fase, apresentar uma dependência muito sensível às condições iniciais, onde pequenos desvios nas condições iniciais podem crescer exponencialmente com o tempo, tornando impossível fazer previsões sobre o comportamento futuro do sistema, mesmo a curto prazo. Tal movimento é dito irregular ou caótico. Como consequência, o espaço de fase é coberto por um variado de pontos distribuídos aleatoriamente, às vezes chamados de “mar de caos”. Assim, caos é “uma propriedade privativa de sistemas não-integráveis” [11].

Em sistemas dinâmicos, além de alguns apresentarem dinâmica regular e ou-

tros, caótica, existe também uma aclasse que posse apresentar um misto das duas dinâmicas em seu espaço de fase, como por exemplo em [15].

Outro tipo de comportamento, que ocorre geralmente em sistemas dissipativos, é o surgimento de atratores no espaço de fase. Atratores representam soluções estacionárias de um sistema dinâmico dissipativo e constituem-se de um ponto ou um conjuntos de pontos para os quais as órbitas convergem em tempos suficientemente longos [16].

2.3 Expoentes de Lyapunov

Como dito anteriormente, a sensível dependência às condições iniciais é uma das fortes características de um sistema dinâmico caótico. E uma das maneiras de se caracterizar tal comportamento é fazendo o cálculo dos expoentes de Lyapunov [10].

Além da ausência de periodicidade, ou regularidade, que observa-se na evolução dos pontos de uma órbita caótica, existe uma extrema sensibilidade às condições iniciais: duas condições iniciais muito próximas levam a órbitas que afastam-se com o passar do tempo, até perder qualquer correlação mútua.

É um fato importante que este afastamento ocorre a uma taxa exponencial, que para um sistema discreto, composto por n iterações pode ser dado por:

$$|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda n}. \quad (2.7)$$

onde λ é o expoente ao qual nos referimos como o expoente de Lyapunov da órbita. Que pode ser explicitado linearizando a equação anterior com a aplicação do logaritmo neperiano em ambos lados [10], obtendo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right). \quad (2.8)$$

de moto a determinar a sensibilidade às condições iniciais de uma determinada órbita.

Se λ for positivo, temos uma marca registrada da ocorrência de caos. Por outro lado, quando não houver divergência entre as condições iniciais ou essa divergência for linear dizemos que o sistema não é sensível às condições iniciais (caracterizado por expoentes de Lyapunov negativos ou nulos).

Podemos verificar isso facilmente, olhando para a equação anterior e verificando que se $\lambda = 0$, a distância entre as condições iniciais permanece constante ao longo das iterações, ao passo que $\lambda < 0$ leva às condições iniciais a uma aproximação conforme passa o número de iterações n .

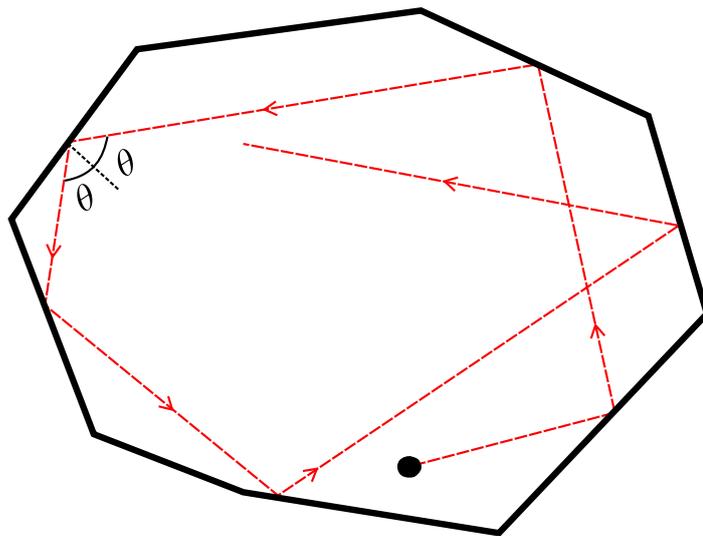
3 BILHARES

Este capítulo traz uma contextualização sobre o campo de pesquisa relacionado com bilhares, abordando uma variedade de modelos que são encontrados na literatura. Construiremos o mapa bidimensional que tradicionalmente é utilizado para descrever a dinâmica de bilhares conservativos, em seguida classificaremos os bilhares de acordo com a sua dinâmica (regular ou caótica), contextualizando algumas aplicações.

3.1 Descrição

Bilhares são sistemas dinâmicos onde uma ou mais partículas são confinadas e movem-se em uma região fechada do espaço, colidindo com a fronteira que delimita essa região, sendo estudados primeiramente por Birkhoff [17], com o intuito de verificar uma maneira geométrica de estudar os problemas propostos por Poincaré. O tipo de colisão e o contorno da fronteira, que podem ser estática ou dinâmica [18], depende do que se pretende estudar. Geralmente as colisões são consideradas elásticas, alterando somente as componentes da velocidade da partícula após cada colisão. Durante as colisões, a trajetória da partícula respeita a condição de reflexão na qual o ângulo de incidência que a partícula faz com o vetor normal à fronteira na hora da colisão é igual ao ângulo refletido, como mostra a Fig. 2

Figura 2 – Representação esquemática de um bilhar.



Fonte: Elaborado pelo autor. A partícula confinada sofre uma série de colisões (geralmente elásticas) com a fronteira, realizando reflexões especulares.

Um fato interessante sobre os bilhares está relacionado ao fato da forma da fronteira do bilhar ser essencial para caracterizar a sua dinâmica (i.e., o modo como o sistema evolui com o passar do tempo), que pode ser classificada como regular (integrável), completamente caótica (não-integrável) e mista (onde dinâmicas regular e caótica coexistem em um mesmo sistema).

Como dito anteriormente, em sistemas dinâmicos, o tempo pode ser tomado como contínuo ou discreto. Quando o mesmo é tomado como discreto, as soluções são obtidas por meio de mapas, e o conjunto de todas as soluções é conhecido como espaço de fase.

Para se caracterizar a dinâmica dos bilhares, em vez de olhar para cada trajetória da partícula, podemos fazer uma análise qualitativa da dinâmica do sistema, olhando para o seu espaço de fase. Na próxima seção detalharemos quais são as variáveis relevantes para descrever o mapa que resultará no espaço de fase, além de caracterizar as órbitas intrínsecas de cada bilhar.

3.2 Mapeamento em Bilhares

Em bilhares, a caracterização da dinâmica é descrita através de mapas bidimensionais não lineares $T(q_n, p_n) = (q_{n+1}, p_{n+1})$, onde n representa a n -ésima colisão da partícula com a fronteira, ou seja, a dinâmica é caracterizada observando o estado da partícula apenas em cada colisão.

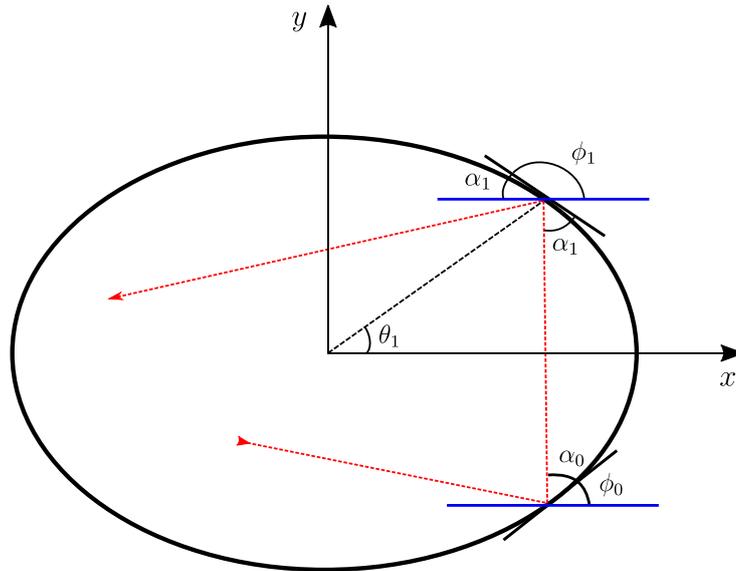
O método mais tradicional de se mapear bilhares, e que pode ser encontrado de forma bem clara em [20], consiste em determinar as variáveis θ_n , que é a posição angular da partícula, medida no sentido anti-horário em relação ao eixo horizontal positivo e α_n , o ângulo de reflexão medido com relação à reta tangente à fronteira. Ambas as variáveis são determinadas a partir de outro ângulo, o ϕ_n , que é o ângulo que a reta tangente à fronteira no instante da colisão faz com o eixo horizontal positivo, conforme ilustrado na Fig. 3.

É importante ressaltar, que nesse método considera-se que durante o intervalo entre as colisões a partícula move-se ao longo de uma linha reta, ou seja, não há nenhuma influência de um campo externo, e os valores de θ e α considerados, são apenas aqueles determinados no instante da colisão.

Segundo [20], o raio que delimita a fronteira é dada em coordenadas polares por:

$$R(\theta, p, e, \epsilon) = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)} \right] + \epsilon \cos(p\theta), \quad (3.1)$$

Figura 3 – Variáveis necessárias para a construção de um mapeamento feito em bilhares.



Fonte: Elaborado pelo autor. Desta forma, o mapeamento torna-se tipo $T(\theta_n, \alpha_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$, realizado em cada interação da partícula com a fronteira, que é determinada pelo índice n .

onde a combinação dos parâmetros e e ϵ é responsável pela forma oval, elíptica, ou por uma perturbação na fronteira. Temos por exemplo que a forma circular é dada por ($e = 0$ e $\epsilon = 0$) e a elíptica ($e \neq 0$ e $\epsilon = 0$). Delimitada a fronteira, a posição da partícula pode ser determinada em coordenadas polares por:

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n) \sin(\theta_n). \quad (3.2)$$

$$X(\theta_n) = R(\theta_n) \cos(\theta_n). \quad (3.3)$$

Com isso, dada uma condição inicial (α_n, θ_n) o valor de ϕ_n pode ser determinado através da expressão:

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)} \right]. \quad (3.4)$$

Portanto, o mapa que descreve a dinâmica do modelo é dado por:

$$T : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) = Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} \quad (3.5)$$

, onde o valor de θ_{n+1} pode ser obtido numericamente quando $F(\theta_{n+1}) = 0$, valor esse que possibilita encontrar α_{n+1} , após isso iteramos o mapa novamente.

Entendido o método tradicional de mapeamento em bilhares, podemos agora

analisar o espaço de fase de alguns bilhares cuja dinâmica já é conhecida pela literatura.

3.3 Classificação Quanto à Dinâmica

3.3.1 Bilhares Integráveis

Primeiramente vamos ao caso do bilhar circular, que é integrável, pois apresenta duas constantes de movimento para os dois graus de liberdade. As constantes de movimento são a Energia da partícula, pois não há nenhum campo externo e as colisões com a fronteira são elásticas, e o momento angular da partícula calculado com relação ao centro do círculo.

Uma forte característica do bilhar circular é que o valor atribuído inicialmente a α permanece constante durante todas as reflexões da partícula. Isso determina o tipo de órbita que a partícula vai descrever no espaço de fase. A consequência disso é que a partícula pode explorar todos os valores de θ enquanto o valor de α permanece constante (Fig. 4).

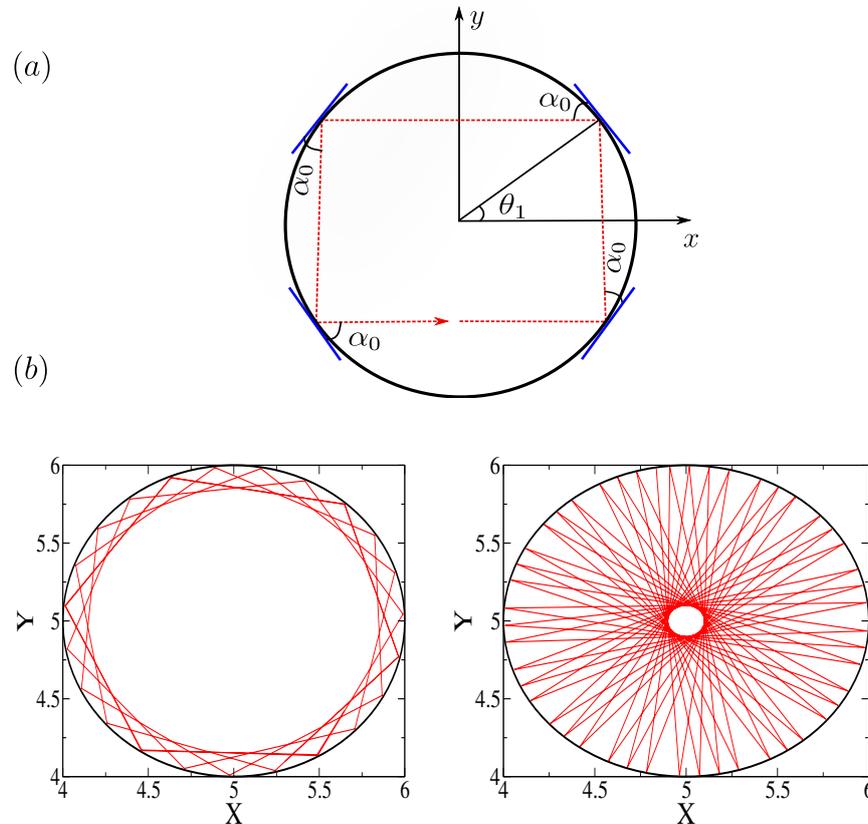
Como dito anteriormente, sistemas integráveis apresentam regularidade em seu espaço de fase. No caso do bilhar circular o espaço de fase é composto por segmentos de reta, conforme representado na Fig. 5.

Outro exemplo de bilhar integrável, é o bilhar elíptico. Ele também possui duas constantes de movimento, uma delas é a energia do sistema, a outra é o produto do momento angular calculado em relação a cada foco da elipse [15].

Diferentemente do bilhar circular, o elíptico apresenta duas grandes ilhas limitadas por uma separatriz e um conjunto de curvas invariantes do tipo spanning em seu espaço de fase. Isso se deve ao fato do bilhar apresentar dois tipos de órbitas, classificadas como libração e rotação, cujos conceitos podem ser esclarecidos de uma maneira mais formal em [11].

De uma maneira geral, orbitas de rotação (órbitas das curvas invariantes) são aquelas em que a partícula pode visitar qualquer valor de θ . Órbitas de libração (órbitas que formam ilhas) são aquelas em que a trajetória da partícula fica confinada entre os focos da elipse Fig. 6. E as separatrizes são as curvas que se encontram no limite entre os casos anteriores, que ocorrem devido às condições iniciais, onde a partícula passa por um dos focos, colide com a elipse, passa pelo outro foco, e assim sucessivamente.

Figura 4 – Características de um bilhar circular



Fonte: Elaborado pelo autor. (a) Trajetória de uma partícula em um bilhar circular. Nesse tipo de fronteira, dado um valor inicial (α_0), a condição de reflexão e a simetria da fronteira fazem com que esse valor inicial permaneça constante a cada colisão, variando apenas a coordenada polar θ . (b) Exemplos de duas trajetórias para o bilhar circular.

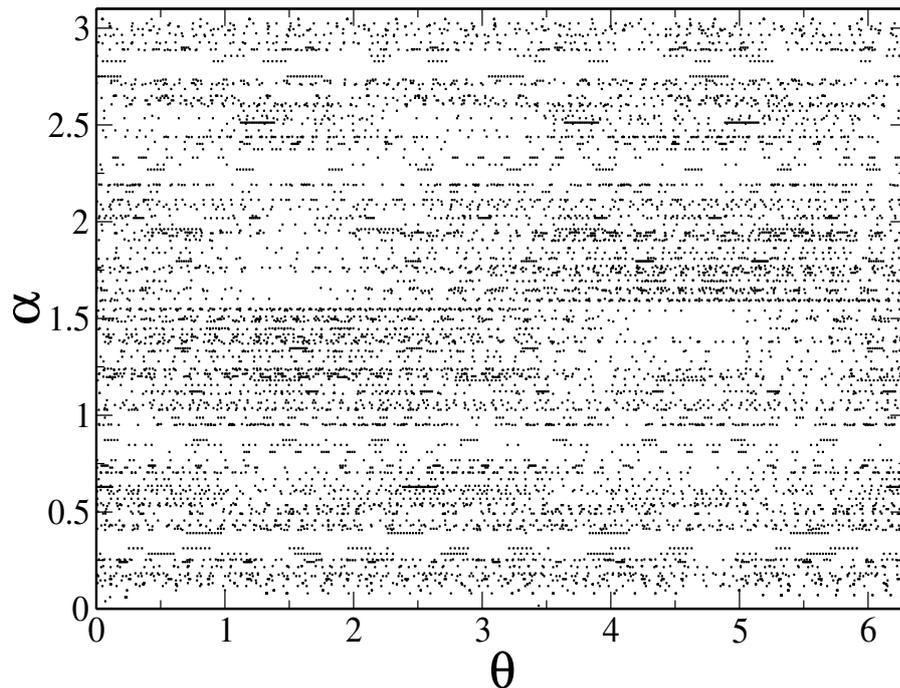
3.4 Bilhares Não-integráveis

Como exemplo de bilhares com dinâmica caótica podemos citar os bilhares que aparecem nos trabalhos de Sinai [21] e Bunimovich [22]. Esses trabalhos foram os primeiros a mostrar que o comportamento caótico pode surgir em um problema aparentemente simples, que é o de uma partícula confinada.

O bilhar de Sinai é formado por uma fronteira quadrada que dentro se encerra um disco com o qual a partícula também realizará colisões. O disco central faz com que a dinâmica do bilhar perca a regularidade, apresentando comportamento caótico.

Este bilhar é utilizado no estudo do comportamento de moléculas em um gás composto por várias esferas pequenas que colidem entre si e com a fronteira, conhecido como gás de Lorentz [23]. Já o bilhar de Bunimovich, também conhecido como bilhar *stadium*, é composto por dois semi-círculos ligados por duas semi-retas. A energia total é

Figura 5 – Espaço de fase de um bilhar.



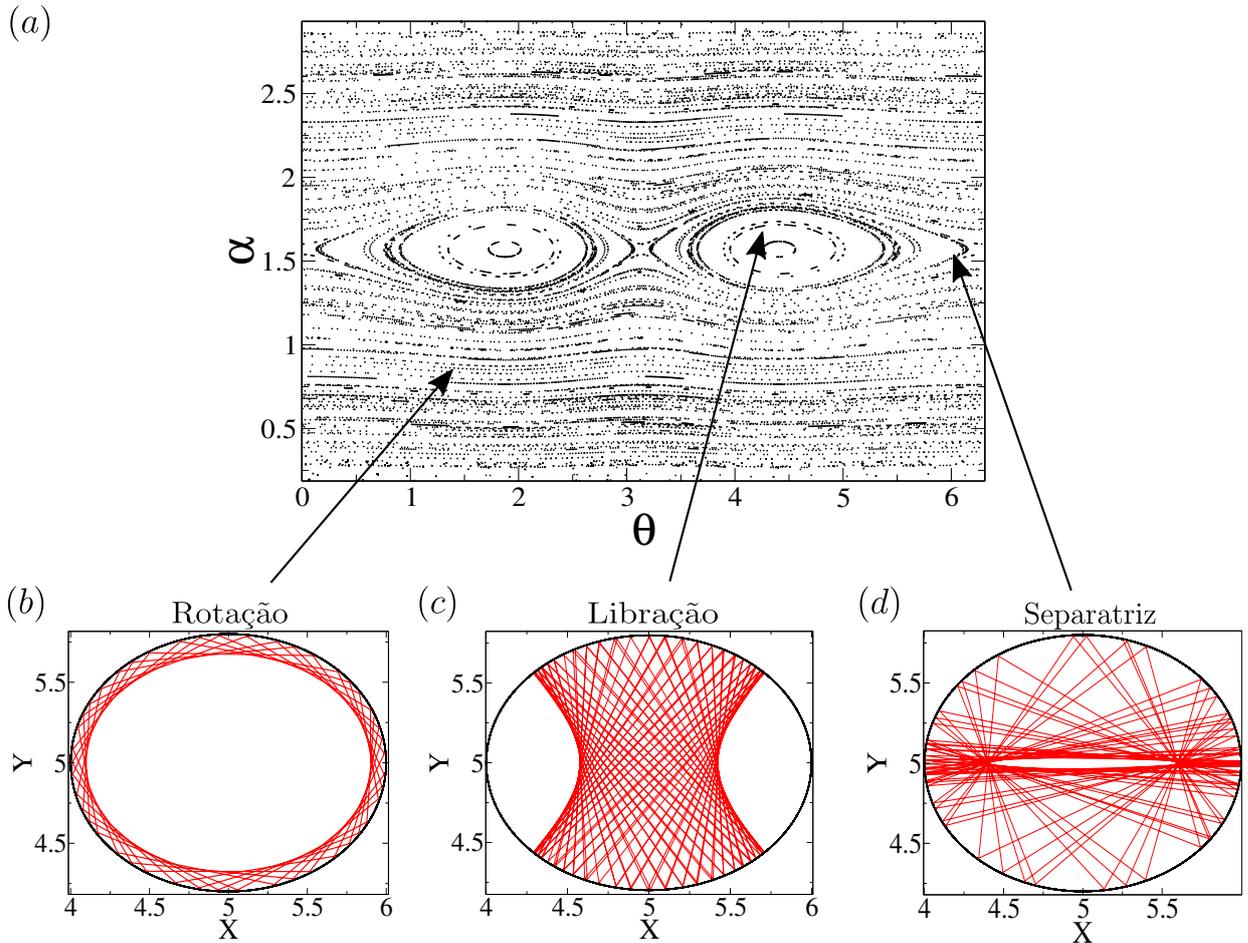
Fonte: Elaborado pelo autor. Representação do espaço de fase de um bilhar circular sujeito à várias condições iniciais para α e θ .

a única constante de movimento que o sistema possui, o momento angular poderia ser conservado, assim como no bilhar circular, mas as semi-retas não permitem tal conservação. O bilhar de Sinai e o de Bunimovich estão representados na Fig. 7.

Vimos então, que a fronteira caracteriza a dinâmica do bilhar (regular ou caótica), e que o comportamento caótico ocorre mesmo na ausência de forças externas.

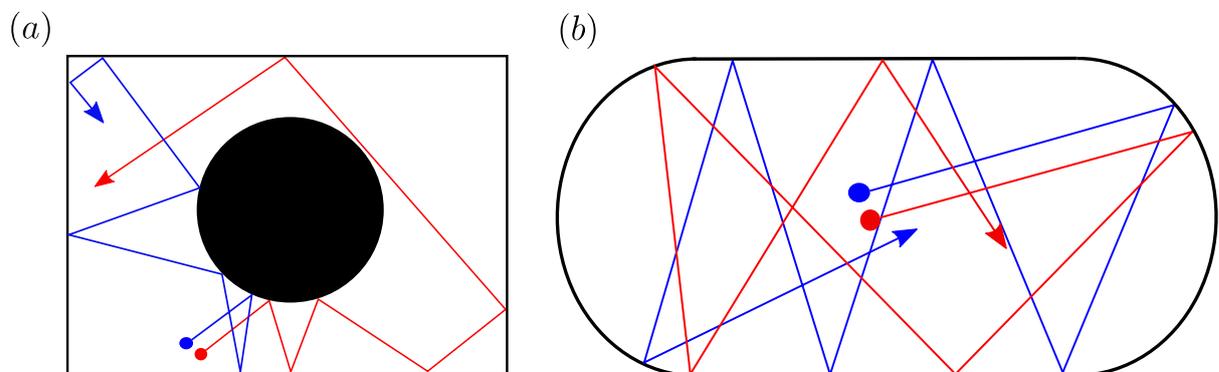
Os métodos apresentados até aqui são utilizados para descrever sistemas livres de forças externas, onde considera-se que a trajetória da partícula é retilínea no intervalo entre as colisões. Como veremos em detalhes, os bilhares estudados neste trabalho não estão livres dessa condição, pois diferentemente dos bilhares clássicos citados anteriormente, os estudados neste trabalho estarão sujeitos a ação de um campo externo (campo de velocidade) que proporcionará uma força de arrasto viscoso sobre a partícula. Por conta destes fatos, a trajetória da partícula entre as colisões não será necessariamente uma reta. A consequência disso é que a descrição do sistema teve de ser feita numericamente, por meio de integração da equação de movimento da partícula, calculando a força elástica entre a partícula e a fronteira. Para este caso devemos reencontrar uma maneira diferente de encontrar as variáveis que descrevem o espaço de fase do sistema. Os procedimentos realizados para descrever tal abordagem estão discutidos de forma detalhada no próximo capítulo.

Figura 6 – Características de um bilhar elíptico.



Fonte: Elaborado pelo autor. (a) Espaço de fase de um bilhar elíptico. (b) Trajetória de rotação, onde a partícula pode visitar todos os valores de θ , tocando numa elipse confocal. (c) Trajetória de libração, onde a partícula toca repetidamente uma hipérbole confocal. (d) Curva que separa os dois tipos de trajetórias.

Figura 7 – Bilhares caóticos



Fonte: Elaborado pelo autor. (a) Bilhar de Sinai. (b) Bilhar stadium. Ambos apresentam uma dinâmica caótica. As figuras representam duas trajetórias de uma partícula sujeita a duas condições iniciais muito próximas. Rapidamente as partículas apresentam trajetórias que diferem entre si, característica presente em sistemas caóticos.

4 MÉTODOS

Neste capítulo descreveremos o modelo escolhido para representar os bilhares com a presença de um campo externo. Apresentaremos a equação diferencial que descreve o comportamento da partícula na presença do campo dentro da fronteira que define o bilhar. Discutiremos sobre a natureza do campo de velocidade e sua solução, que é apresentada conjuntamente com a solução da equação diferencial que define o movimento da partícula. Por fim, esclareceremos a importância das soluções na caracterização da dinâmica do sistema.

4.1 Equação Diferencial que Descreve o Sistema

O objetivo em se introduzir um campo externo é observar os efeitos de arraste do escoamento do fluido sob bilhares cuja dinâmica no caso conservativo já eram conhecidas como integráveis. Diferentemente da maneira tradicional que investiga a existência de caos em bilhares, por meio de variações na fronteira, neste trabalho optamos por manter a forma da fronteira, introduzimos variações no campo externo e investigamos os efeitos destas variações sobre a dinâmica da partícula.

Quando um corpo se movem em um fluido, surge uma força denominada força de arrasto, que produz uma resistência sobre a partícula, dissipando parte de sua energia cinética [24]. Essa força depende da geometria do corpo, das propriedades do fluido e também da velocidade do corpo em relação ao fluido.

Como os bilhares estudados nesse trabalho estão submetidos a um campo externo representado pelo campo de velocidade relativo entre a velocidade da partícula e a velocidade local do fluido que representa o escoamento de um fluido, a partícula estará sujeita a uma força de arrasto viscoso que depende da velocidade relativa entre eles, pois além da partícula estar em movimento, o campo está escoando. Temos então que a força que atua sobre ela é dada pela equação:

$$\vec{F} = F_D(\vec{v}_f - \vec{v}_p)^\gamma. \quad (4.1)$$

A força de arrasto é sempre oposta à direção do movimento da partícula; portanto, realiza trabalho negativo, isto é, absorve energia do corpo em movimento. \vec{v}_f representa a velocidade do fluido, \vec{v}_p a velocidade da partícula, F_D o coeficiente de arrasto e γ é parâmetro que pode assumir qualquer valor real positivo. O coeficiente F_D é dado

por :

$$F_D \sim \frac{Re}{Stk}. \quad (4.2)$$

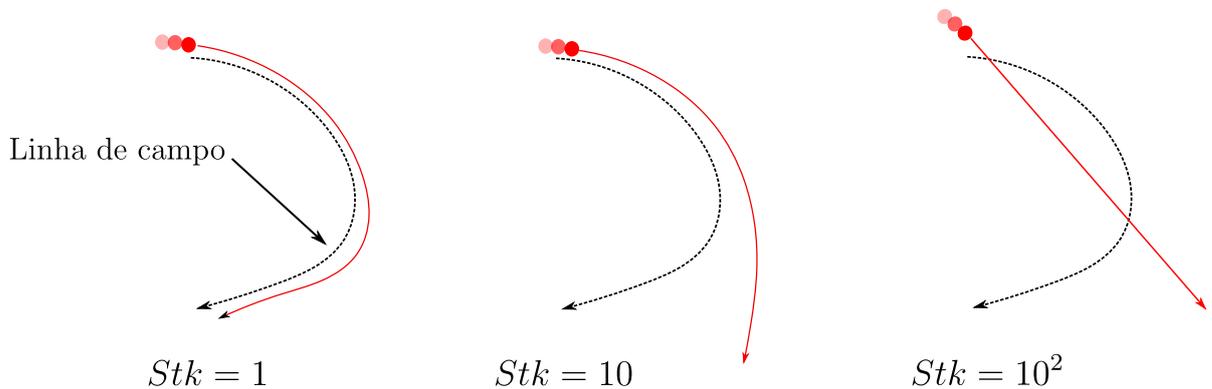
O parâmetro (Stk) é conhecido como número de Stokes [26], um número adimensional que determina o comportamento de uma partícula quando suspensa em um fluido, este número define a razão entre dois tempos característicos, o da partícula e o do escoamento do fluido. Este número está relacionado diretamente com a densidade da partícula (ρ_p) e também com seu diâmetro (d_p), além de outros parâmetros como a velocidade do fluido (v_f), sua viscosidade (μ) e um comprimento característico presente no escoamento.

O número de Stokes pode ser representado, de acordo com os parâmetros acima, da seguinte forma:

$$Stk \sim \frac{\rho_p d_p^2 v_f}{18\mu D}. \quad (4.3)$$

A importância desse número neste trabalho se deve ao seguinte fato. O número de Stokes determina o comportamento balístico da partícula, ou seja, quanto maior o seu valor, maior será a inércia da partícula. A consequência direta disso é que, dependendo de sua inércia, a partícula pode ou não seguir as linhas de campo, ou seja, este número define o quanto uma partícula pode adequar sua trajetória ao escoamento do fluido, conforme a Fig.(8)

Figura 8 – Influência do número de Stokes sob o comportamento da trajetória da partícula com relação às linhas do escoamento.

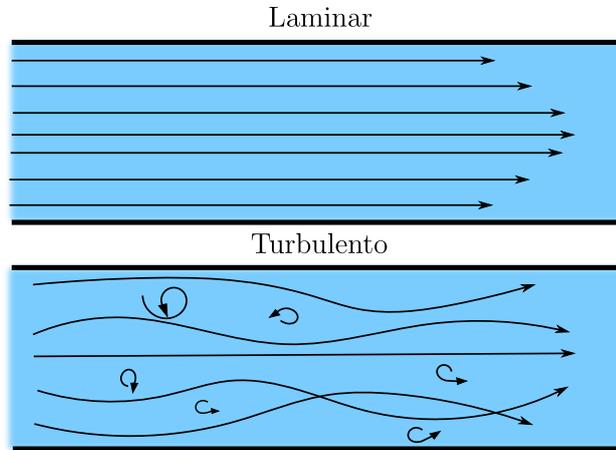


Fonte: Elaborado pelo autor. Podemos perceber que o número de Stokes é responsável por determinar o quão a partícula seguirá as linhas do campo de velocidade. A linha vermelha representa a trajetória da partícula e a preta representa uma linha de campo.

Outro número importante que se encontra na relação 4.2, é o número de

Reynolds (Re) [26], um número adimensional que determina o regime de escoamento de um fluido, que pode ser classificado como laminar ou turbulento Fig.(9).

Figura 9 – Regimes de escoamento



Fonte: Elaborado pelo autor. Representação dos regimes laminar e turbulento de escoamento, ambos determinados pelo número de Reynolds.

Veremos posteriormente a relevância desses dois números sobre as trajetórias das partículas no interior da região definida pelo bilhar. Mas antes, discutiremos a solução da equação diferencial que governa a trajetória da partícula no interior do fluido confinado dentro do bilhar.

Conhecendo as forças que atuam no sistema, a segunda lei de Newton do movimento $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ descreve totalmente o comportamento da partícula, nos fornecendo a sua posição e velocidade durante toda a sua evolução temporal, sabendo que a única força que atua na partícula é a força de arrasto imposta pela resistência do fluido, temos então que a equação de movimento da partícula pode ser escrita na forma:

$$-F_D(\vec{v}_f - \vec{v}_p)^\gamma = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.4)$$

De posse da equação diferencial, o próximo passo veio a ser a sua solução numérica, mas para isso foi preciso atentar-se ao fato de que, a equação diferencial depende da velocidade do fluido em cada posição referente à posição da partícula, tornando essa informação essencial no processo de integração. Porém, a solução para o campo de velocidade obtido por meio da integração numérica da equação de Navier Stokes, é discreta. A solução é obtida sobre uma malha discreta triangular, entretanto, torna-se necessário encontrar uma solução contínua dentro da região que define o bilhar.

A próxima subseção faz uma melhor abordagem sobre o campo de velocidade, sua natureza e sobre o tratamento dispendido para torná-lo contínuo.

4.2 O Campo de Velocidade

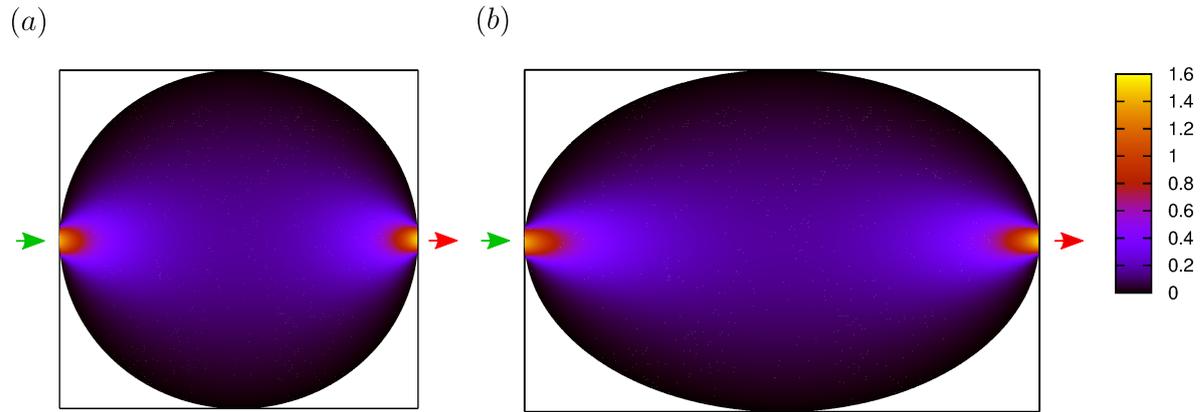
A solução para o campo de velocidade consiste basicamente em um arquivo de dados gerado pelo software *ANSYS FLUENT*¹, que resolve numericamente a equação de Navier-Stokes [27] para diferentes regimes de escoamento. Cada célula do do grid que compõe a malha utilizada para a obtenção da solução, contém informações sobre as componentes da velocidade do fluido \vec{v}_{fx} e \vec{v}_{fy} , referentes às posições específicas dentro do bilhar, tornando possível a representação de um escoamento direcionado. A solução obtida corresponde ao escoamento de um fluido através de uma região delimitada por um contorno que é o mesmo contorno do bilhar estudado, ou seja, se o bilhar for circular, o campo é gerado de tal forma em que o escoamento escorre dentro de uma região circular.

A Fig.10 mostra uma representação esquemática dos bilhares em estudo, na condição onde existe um fluido escoando através de uma região que define o bilhar. O fluido escoar da esquerda para a direita, conforme indicado pelas setas na figura. A ilustração também representa a intensidade do campo de velocidade em regiões dentro dos bilhares.

Nesta condição, a velocidade do fluido no interior do bilhar é uma função da posição sobre o plano xy, conforme representado na Fig. 11. Vale ressaltar que para o

¹*ANSYS FLUENT* é um software de modelagem física, capaz de simular fenômenos como transferência de calor, turbulência, escoamentos, entre outros. Mais detalhes em [28]

Figura 10 – Campo de velocidade

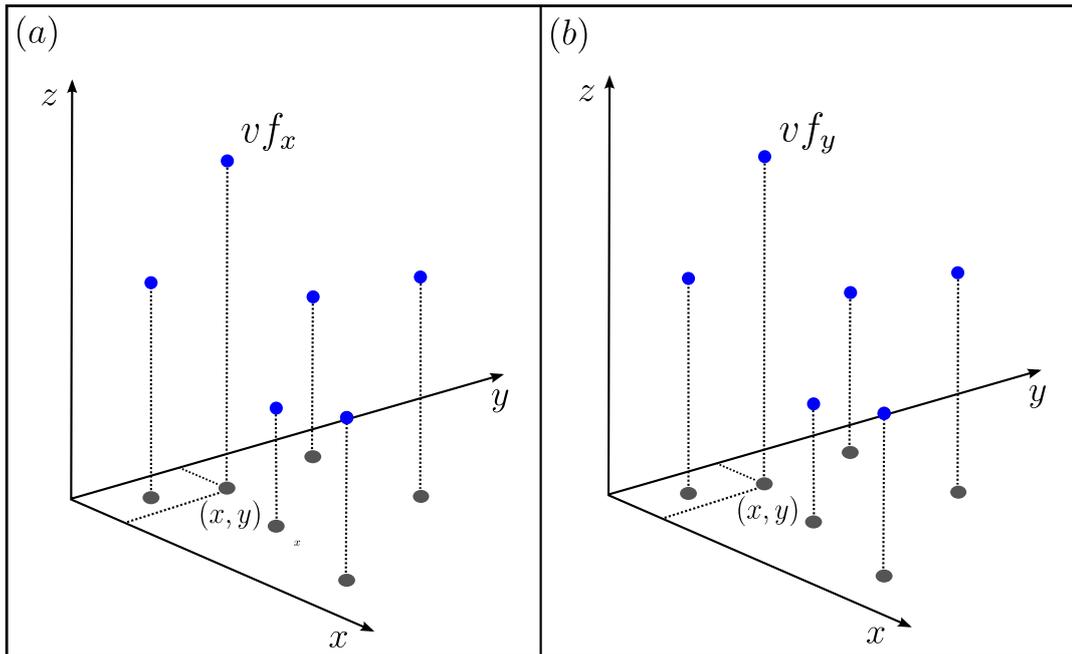


Fonte: Elaborado pelo autor. Representação da intensidade do campo de velocidade dentro de cada bilhar, na qual se observa que as regiões de entrada (seta verde) e saída (seta vermelha) do fluido são as regiões cujo o campo é mais intenso. (a) bilhar circular (b) bilhar elíptico.

estudo do bilhar, ou seja, o movimento das partículas foi imposto uma condição onde as partículas não poderiam sair da região definida pelo bilhar, e a entrada e saída foram utilizadas apenas para representar o escoamento do fluido na região de interesse.

Como o nosso campo de velocidade é vetorial, tínhamos as coordenadas (\vec{x}, \vec{y}) , e associado à elas, as componentes \vec{v}_{f_x} e \vec{v}_{f_y} da velocidade do fluido.

Figura 11 – Representação de como alguns pontos do campo estão distribuídos.



Fonte: Elaborado pelo autor. Para cada ponto (x, y) dentro do bilhar (pontos escuros) tínhamos suas respectivas componentes de velocidade. Ambas representadas pela cor azul. (a) Componente x. (b) Componente y.

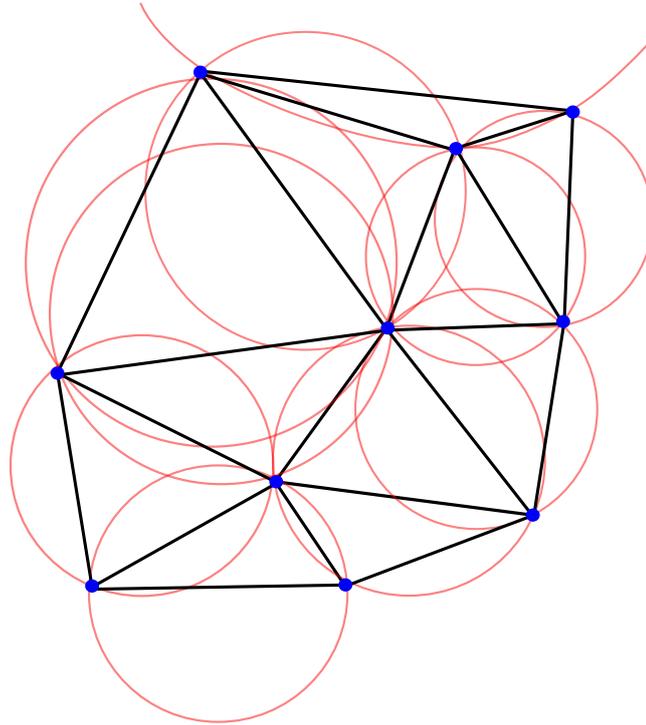
Como foi dito anteriormente, o campo de velocidade era discreto, por tal motivo foi proposto a utilização do método de interpolação dos dados durante a integração, para que pudéssemos obter valores das componentes da velocidade do fluido referentes a qualquer posição que a partícula estivesse dentro do bilhar.

Antes de começarmos a interpolação propriamente dita, tornou-se necessário gerar uma malha com os pontos do campo por meio da triangulação de Delaunay[29], para que pudéssemos utilizar de suas propriedades e interpolar os pontos conhecidos.

4.3 Triangulação e Interpolação

A geração de malhas utilizando propriedades da triangulação de Delaunay é uma das mais eficientes, pois ela tem como característica principal a maximização do menor ângulo de cada triângulo gerado, evitando assim, triângulos com ângulos internos muito pequenos. Outra característica fundamental dessa triangulação é que nenhum ponto pode estar contido dentro da circunferência formada pelos vértices de qualquer triângulo, como mostra a Fig. 12

Figura 12 – Propriedades da triangulação.



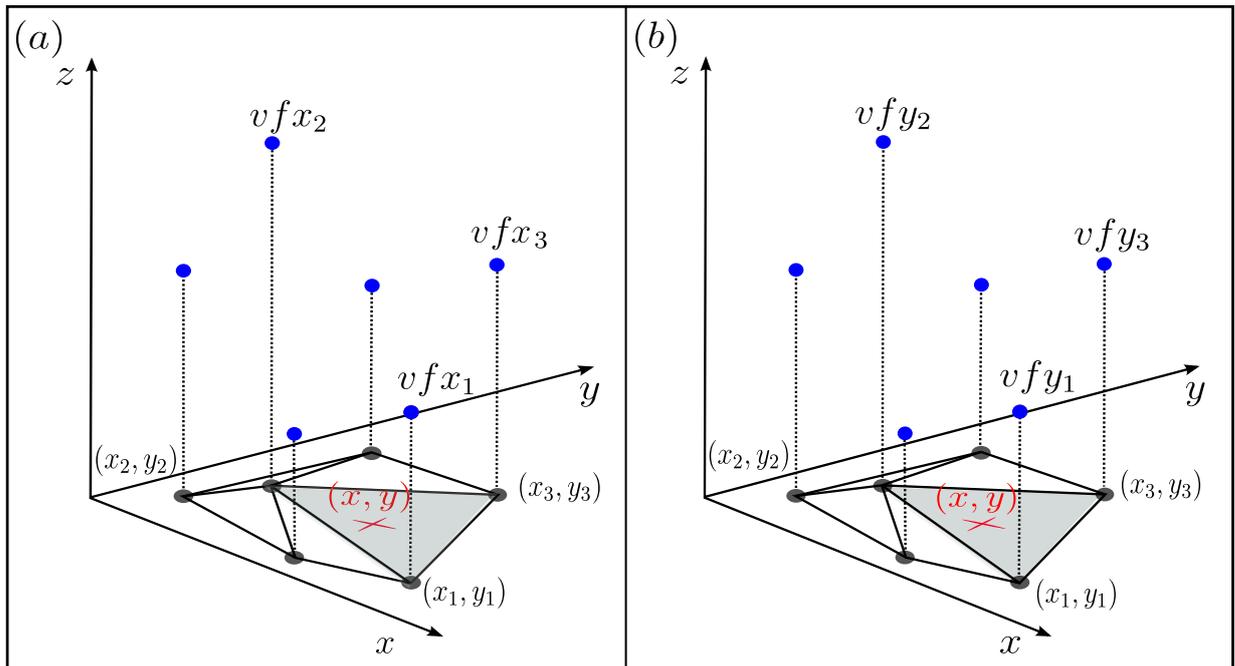
Fonte: Elaborado pelo autor. Uma das propriedades fundamentais na triangulação e Delaunay é que nenhum ponto pode estar contido dentro das circunferências descritas pelos vértices dos triângulos. Na figura representamos como essa propriedade é satisfeita e o resultado obtido.

Após a triangulação de Delaunay ter sido realizada, cada ponto do campo de velocidade tornou-se um vértice da triangulação. Com isso, tornou-se possível conhecer quais os vértices pertencentes a qualquer triângulo dentro da malha. Tal informação apresentou-se muito importante para a elaboração do próximo passo, a interpolação.

Com a ajuda da triangulação de Delaunay, pudemos utilizar a equação do plano para interpolar os valores de velocidade do fluido dentro do bilhar, fazendo uma projeção do triângulo a uma altura z do plano xy . Dada qualquer posição (x, y) da partícula durante a integração, é possível identificar instantaneamente a qual triângulo essas coordenadas pertencem. Sabendo o triângulo, automaticamente sabemos os valores de velocidade correspondentes a cada vértice, conforme a Fig. 13.

De posse dessas informações, utilizou-se a equação do plano para cada vértice do triângulo a uma altura z , com o intuito de encontrar qual o plano que passa por estes três pontos. Fazendo o procedimento duas vezes a cada passo de integração. Conseguimos interpolar as componentes x e y da velocidade na forma:

Figura 13 – Identificação de um triângulo referente à uma dada posição (x, y) .



Fonte: Elaborado pelo autor. Dada as coordenadas, o triângulo ao qual elas pertencem é identificado. Sabendo isso, os vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) do triângulo são reconhecidos e conseqüentemente os seus respectivos valores de velocidade do fluido, aqui representados pelas componentes x (Figura a) e y (Figura b) das velocidades nos três vértices.

Para a componente x , temos:

$$ax_1 + by_1 + c = vfx_1. \quad (4.5)$$

$$ax_2 + by_2 + c = vfx_2. \quad (4.6)$$

$$ax_3 + by_3 + c = vfx_3. \quad (4.7)$$

E para a componente y ,

$$ax_1 + by_1 + c = vfy_1. \quad (4.8)$$

$$ax_2 + by_2 + c = vfy_2. \quad (4.9)$$

$$ax_3 + by_3 + c = vfy_3. \quad (4.10)$$

O sistema de equações lineares nos permitiu encontrar os coeficientes (a, b, c) da equação do plano que passa pelos três vértices. Com isso, voltamos a equação do plano para cada componente:

componente x:

$$vfx = ax + by + c, \quad (4.11)$$

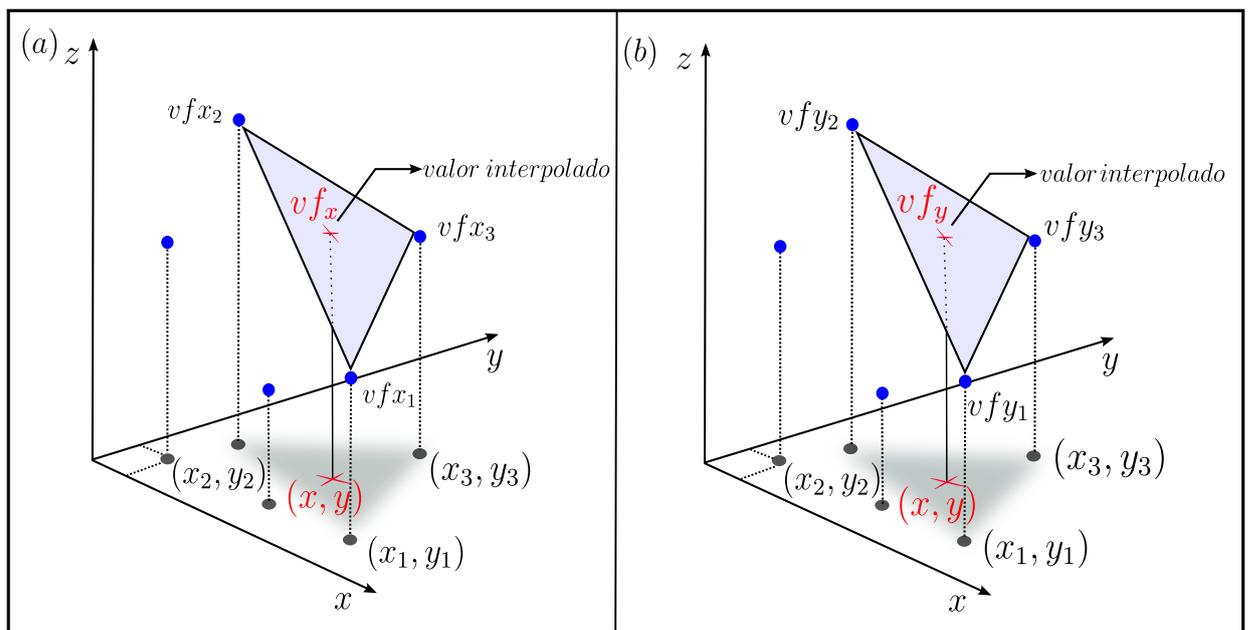
componente y:

$$vfy = ax + by + c. \quad (4.12)$$

Com base nessas equações, podemos encontrar o valor de z , que é o valor da componente da velocidade interpolado, dado um ponto (x, y) , conforme mostrado na Fig.

14

Figura 14 – Esquema da interpolação.



Fonte: Elaborado pelo autor. Conhecidos os coeficientes a , b e c , e dado os pontos x e y , as equações 4.11 e 4.12 nos retornam os valores interpolados das componentes x (Figura a) e y (Figura b) da velocidade do fluido, que se encontram dentre aqueles três valores das componentes conhecidas previamente.

Com isso, o campo de velocidade que a priori era discreto, tornou-se contínuo, pois pudemos associar valores de velocidade a qualquer ponto dado dentro do bilhar.

De posse dessa informação que nos faltava, nossa equação diferencial que descreve o movimento da partícula dentro do bilhar, tornou-se integrável. A próxima subseção trata dos métodos numéricos utilizados para a integração da equação, para o movimento da partícula.

4.4 Integração Numérica

Com o problema da descontinuidade do campo solucionado, a velocidade do fluido passou a ser obtida em qualquer posição referente às posições da partícula durante sua trajetória. Consequentemente, o processo de integração numérica tornou-se viável. Para integrar nossa equação diferencial, utilizamos o algoritmo de Beeman com modificações predictor-corrector, que segundo a literatura, é indicado para casos onde a força depende da velocidade, além de ser um método preciso. Duas fórmulas são usadas em conjunto para a velocidade. A primeira para prever um novo valor de velocidade em um instante de tempo $t + \Delta t$, e a outra para corrigir a predição. Sendo assim, as soluções são dadas por:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{2}{3}a(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}a(t - \Delta t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4). \quad (4.13)$$

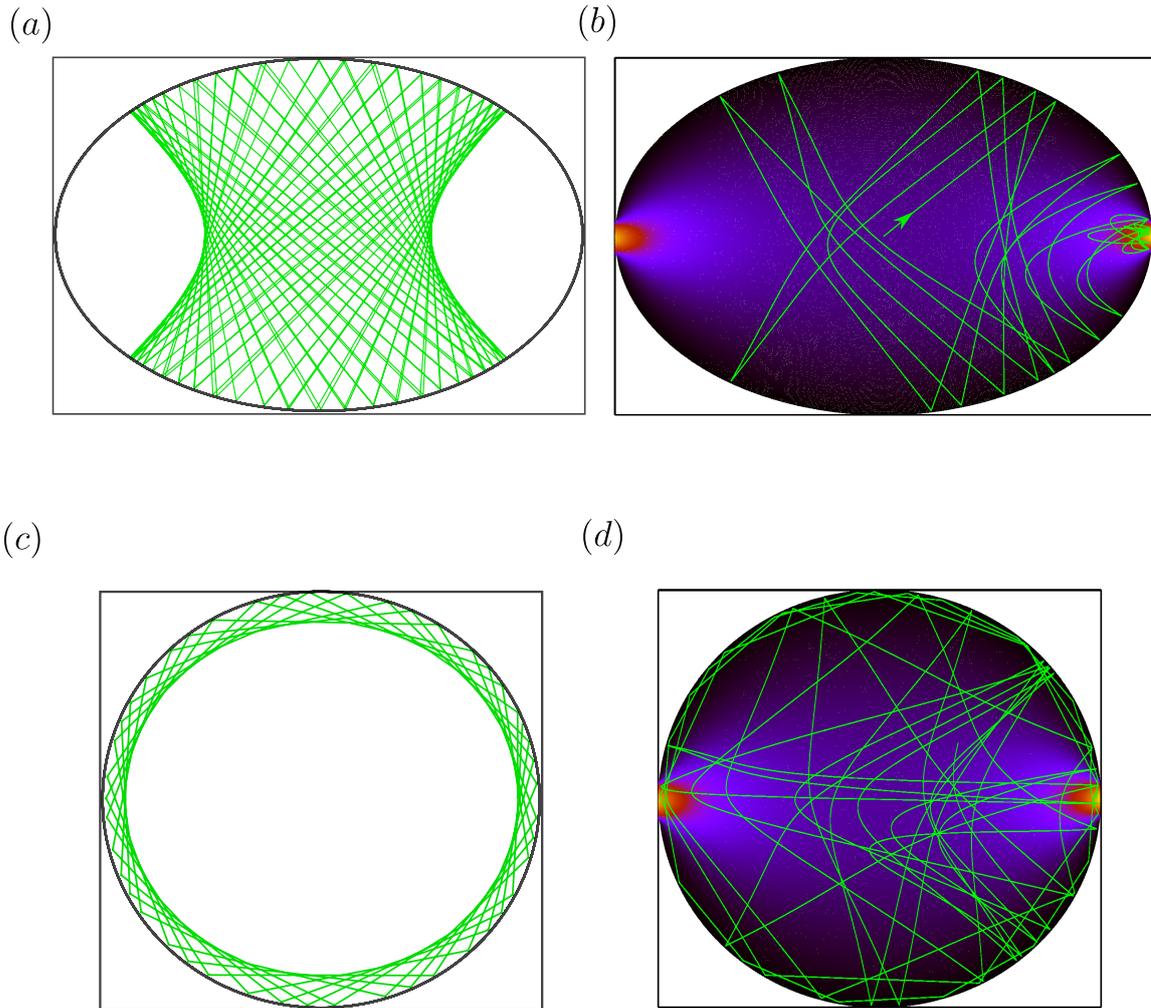
$$v(t + \Delta t)(predicted) = v(t) + \frac{3}{2}a(t)\Delta t - \frac{1}{2}a(t - \Delta t)\Delta t + O(\Delta t^3). \quad (4.14)$$

$$v(t + \Delta t)(corrected) = v(t) + \frac{5}{12}a(t + \Delta t)\Delta t + \frac{2}{3}a(t)\Delta t - \frac{1}{12}a(t - \Delta t)\Delta t + O(\Delta t^3). \quad (4.15)$$

4.5 Papel da Solução Numérica na Obtenção de Resultados

Intuitivamente, com o ajuste de condições iniciais a trajetória da partícula tenderá a seguir as linhas de campo. A Fig.(15) mostra um caso de como a partícula se comporta dentro do bilhar, quando submetida ao campo.

Figura 15 – Influência do campo de velocidade na trajetória da partícula.



Fonte: Elaborado pelo autor. (a) Representação da trajetória da partícula em um bilhar elíptico conservativo. (b) Mesmas condições iniciais, porém, com o campo aplicado, alterando a trajetória retilínea da partícula e atraindo a mesma para a região de saída do fluido. (c) Bilhar circular conservativo. (d) Bilhar circular com o campo de velocidade.

Conhecer velocidade e posição da partícula dentro da fronteira a cada passo de integração se tornou essencial na obtenção de resultados. Vimos no capítulo anterior a importância do espaço de fase para a compreensão da dinâmica de um bilhar, e que o mesmo era determinado pelo conjunto de pares (θ, α) , obtidos em cada colisão da partícula com a fronteira.

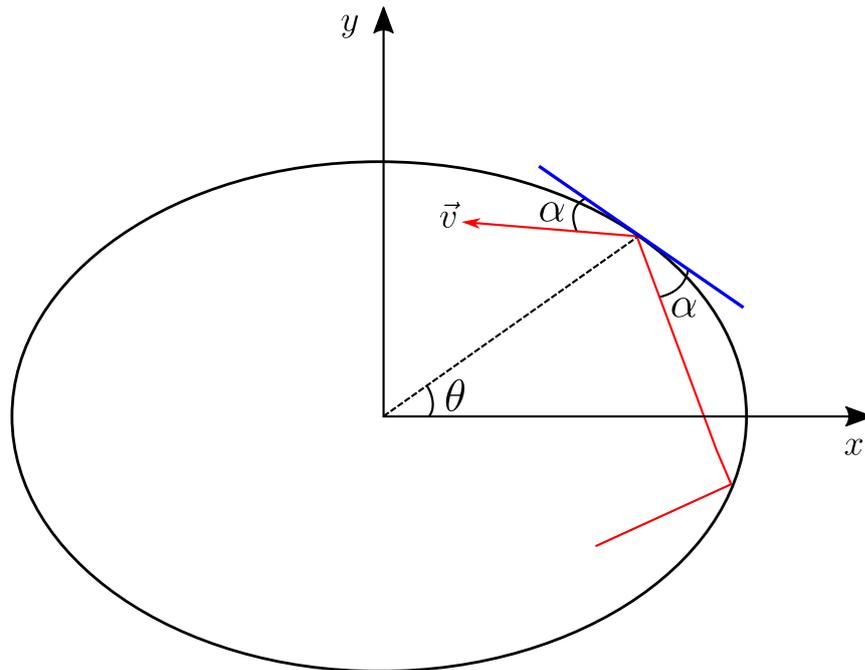
Como o método proposto neste trabalho é diferente do citado no capítulo anterior, devido ao campo de velocidade alterar a trajetória retilínea da partícula entre as colisões (como mostramos na figura anterior), a maneira de se determinar as variáveis (θ, α) também foi diferente.

O valor de θ , medido com relação ao semi-eixo positivo, foi calculado a cada passo de integração, porém, os valores coletados foram apenas aqueles no momento da colisão, sendo representados por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_p}{x_p}\right). \quad (4.16)$$

Onde x_p e y_p são as coordenadas da partícula no momento da colisão. Já o valor de α é determinado pelo ângulo que o vetor velocidade da partícula faz com o vetor tangente à fronteira após cada colisão, conforme a Fig. 16

Figura 16 – Variáveis necessárias para a construção do espaço de fase.



Fonte: Elaborado pelo autor. O ângulo θ é determinado em cada colisão, juntamente com o ângulo α , que é o ângulo que o vetor velocidade da partícula faz com o vetor tangente à fronteira após cada colisão. Para tornar o problema mais real, foi calculada uma força elástica sobre a partícula no momento do choque com a fronteira.

Com as informações citadas até agora, pudemos então descrever e classificar de forma totalmente numérica a dinâmica desse novo sistema, observando o comportamento de seu espaço de fase quando submetido à mudanças nos parâmetros que controlam as características tanto do fluido, como da partícula.

4.6 Determinação do Caos

Nos capítulos anteriores, ficou esclarecido que a divergência de forma exponencial entre as soluções, dada por duas condições iniciais próximas, caracteriza o comportamento caótico do sistema. O método tradicional para se determinar os expoentes de lyapunov em bilhares pode ser encontrado de forma mais detalhada em [30].

Resumidamente, o método baseia-se na utilização da matriz jacobiana, formada a partir das equações 2.5, equações estas que levam o par canônico (θ_n, α_n) para $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$.

Como neste trabalho não temos o mapa propriamente dito, e sim a resolução numérica de equações diferenciais, propôs-se um método alternativo e numérico para se calcular a divergência entre as soluções.

Seja uma condição inicial (x_0, y_0) nas coordenadas da partícula dentro do bilhar, associamos à ela uma condição inicial próxima (x, y) . Acompanhamos a evolução das soluções a cada passo de integração, de modo que a distância entre as soluções (λ) seja dada por:

$$\lambda = \sqrt{((x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2)}. \quad (4.17)$$

Como podemos ver, o parâmetro λ pode assumir apenas valores positivos, e indo a zero quando as soluções coincidirem. Dessa forma, podemos observar a diferença entre as soluções quando o bilhar está submetido à passagem do fluido, já que no caso conservativo, como a dinâmica dos bilhares estudados são regulares, $\lambda = 0$.

Para garantir que o a distância entre as soluções não seja apenas uma propriedade local do bilhar (que ocorre apenas em determinadas posições), foram realizadas simulações com várias condições iniciais diferentes, e para cada condição diferente, uma condição próxima, de tal forma que pudéssemos montar um ensemble de condições iniciais para determinamos a diferença média $\langle \lambda \rangle$ de todas elas.

5 RESULTADOS

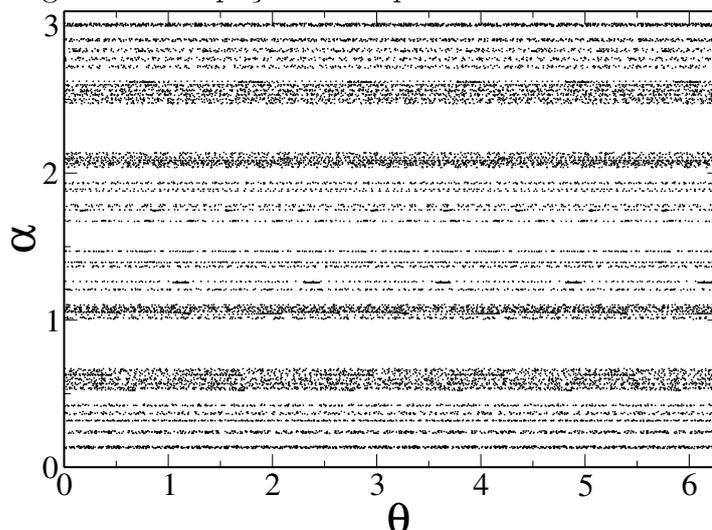
Neste capítulo discutiremos os principais resultados obtidos em nosso trabalho. Iniciaremos com o caso conservativo, que a priori parecerá meio redundante, mas que servirá para demonstrar a confiabilidade do método aqui aplicado. Analizaremos os casos em que a fronteira do bilhar é circular, juntamente com a elíptica para dois valores de excentricidade. Por fim, classificaremos a dinâmica do sistema quanto à sua caoticidade ou regularidade.

5.1 Bilhar Circular e Elíptico - Caso Conservativo

Uma maneira bastante eficaz para estimar a confiabilidade de um novo método empregado na análise de um sistema físico, é basicamente testar o limite em que o sistema recupera um modelo já bem estabelecido pela literatura. No nosso caso, o que existia de conhecido na literatura, eram os bilhares circular e elíptico, como discutido no Cap.2. Ambos os casos apresentavam a Energia do sistema como uma constante de movimento e uma regularidade no espaço de fase.

A Fig.(17) mostra o espaço de fase típico de um bilhar circular conservativo, construído agora, utilizando o método proposto neste trabalho. O mapa foi elaborado com base em 150 condições iniciais diferentes, referentes à posição e ângulo de saída com que a partícula é lançada.

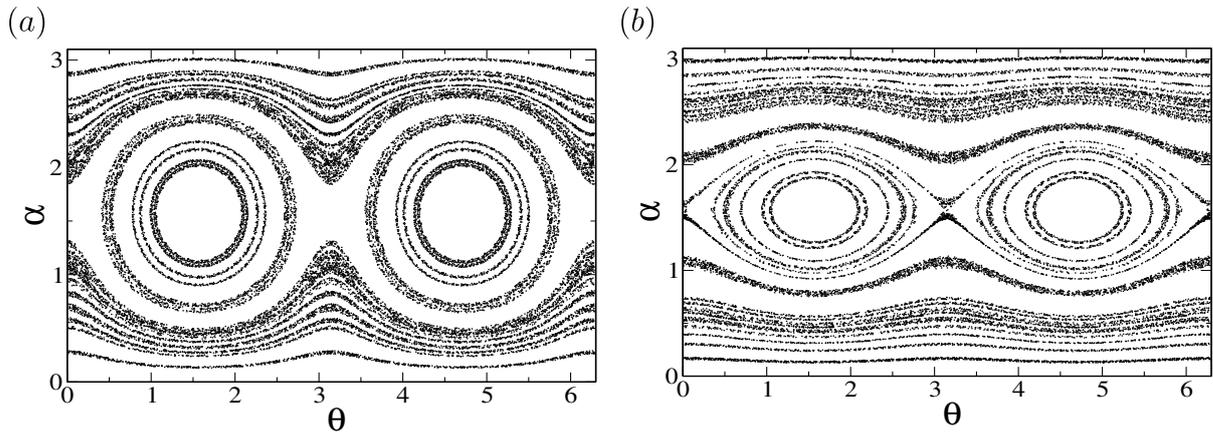
Figura 17 – Espaço de fase para um bilhar circular.



Fonte: Elaborado pelo autor. Elaborado com 150 condições iniciais diferentes. Como visto em capítulos anteriores, o espaço de fase para um bilhar circular é composto por segmentos de retas que representam a conservação do momento angular.

No caso do do bilhar elíptico, que é integrável, vimos que no caso conservativo seu espaço de fase é composto por ilhas de estabilidade e por curvas invariantes, ambos gerados pelos movimentos de rotação e libração da partícula. A Fig.(18) mostra o caso conservativo para o espaço de fase de um bilhar elíptico com duas excentricidades distintas.

Figura 18 – Espaço de fase para o bilhar elíptico.



Fonte: Elaborado pelo autor. Obidos a partir de 150 condições iniciais diferentes em ambos os casos. Como podemos observar, o espaço de fase para o bilhar elíptico conservativo é composto por ilhas de estabilidade e também por curvas invariantes. (a) Excentricidade 0.5. (b) Excentricidade 0.8.

Uma vez testada a confiabilidade do nosso método, podemos parti para a análise dos resultados considerando a mesma geometria para os bilhares, porém, incluindo o campo externo, que no nosso caso trata-se de um fluido escoando através da região definida pela fonteira de cada bilhar.

Nos concentraremos a partir de agora no efeito do arraste do campo sobre a partícula. Como vimos anteriormente, a partícula perderá uma parcela de sua energia devido à ação da força de arraste ,que não é conservativa. Uma consequência direta desta interação da partícula com o fluido, é que a partícula será arrastada, e seguirá as linhas de campo quando estiver com velocidade inferior à do fluido localmente, ficando ao final do processo, aprisionada próxima ao canal de saída, com sua velocidade praticamente constante, conforme a Fig.15(b).

Além da força ser dissipativa, observou-se que a partícula sofre uma considerável influência quando modifica-se o parâmetro que controla a dissipação com relação a velocidade, γ , o qual dependendo de uma combinação com os demais parâmetros (Reynolds e Stokes) é possível determinar o tipo de decaimento que a energia da partícula irá sofrer em função do tempo.

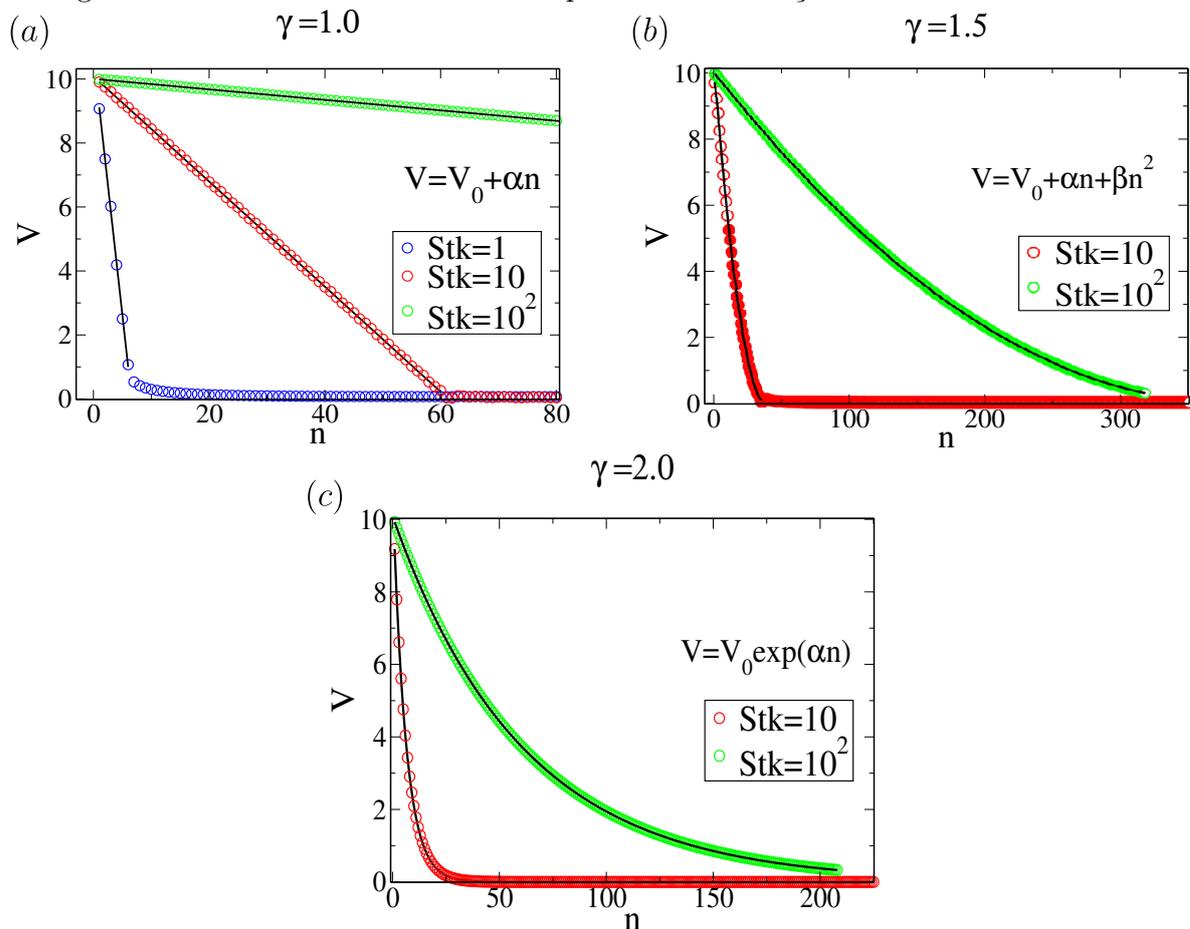
Um fato interessante observado, foi que, para regimes de escoamento com baixo Reynolds, o valor do número de Stokes foi reponsável por um aumento ou decréscimo

no número de colisões da partícula com a fronteira, porém não influenciou no tipo de decaimento que a energia da partícula sofreu.

Os gráficos a seguir mostram os diferentes decaimentos na velocidade da partícula após cada colisão com a fronteira. Cada gráfico corresponde a um valor específico de γ , cada um com um número de Stokes diferente. Foi possível observar um decaimento do tipo linear para $\gamma=1.0$, polinomial do segundo grau para $\gamma=1.5$ e exponencial para $\gamma=2.0$.

Além disso, algumas curvas para a velocidade em função do número de colisões, atingem uma região de platô constante, que se deve ao fato da partícula ficar aprisionada na região de saída do escoamento, conforme mencionado. Quando a partícula possui uma inércia elevada (geralmente ocasionada por um valor elevado no número de Stokes), a mesma requererá de um tempo maior até ser atraída para a região de saída do fluido, do que se estivesse com uma inércia significativamente menor.

Figura 19 – Gráfico da velocidade da partícula em função do número de colisões.



Fonte: Elaborado pelo autor. Cada gráfico é referente à um valor de γ , todos com um escoamento realizado para o mesmo valor de Reynolds ($Re=1.0$). (a) Decaimento linear para três valores de Stokes: $Stk = 1.0$ ($\alpha = -1.6$), $Stk = 10$ ($\alpha = -0.16$) e $Stk = 10^2$ ($\alpha = -0.01$). (b) Polinomial do segundo grau para: $Stk = 10$ ($\alpha = -5 * 10^{-2}$ e $\beta = 6.7$) e $Stk = 10^2$ ($\alpha = -0.52$ e $\beta = 6 * 10^{-3}$) e (c) Exponencial para: $Stk = 10$ ($\alpha = -0.1$) e $Stk = 10^2$ ($\alpha = -1 * 10^{-2}$).

É importante ressaltar que, como as colisões entre a partícula e a fronteira do bilhar são elásticas, o fato da partícula apresentar valores de velocidade cada vez menores após as colisões, se deve puramente à ação do fluido entre as colisões. É notório também que para um tempo de simulação suficientemente grande, todas as curvas convergirão ao mesmo platô, pois a partícula perderá velocidade e será aprisionada. O nosso interesse reside na região de transição até o momento em que a partícula atinge a zona de saída do fluido, ficando aprisionada. Os casos em que $Stk=1.0$ para $\gamma=1.5$ e $\gamma=2.0$ não foram plotados devido ao fato da partícula ter sido aprisionada logo no momento do lançamento, devido à sua baixa inércia e também ao termo de dissipação não ser linear, fato que contribui para uma redução mais acentuada no valor da velocidade.

As intensas acelerações e desacelerações que a partícula sofreu nas colisões durante as simulações com alto Reynolds, não geraram padrões no decaimento de sua energia. Isso se deve diretamente à ação constante do fluido, principalmente quando a partícula visitou as suas regiões de escoamento mais intensas (próximo às regiões de entrada e saída do fluido).

5.2 Resultados Numéricos para o Bilhar Circular com Campo Externo

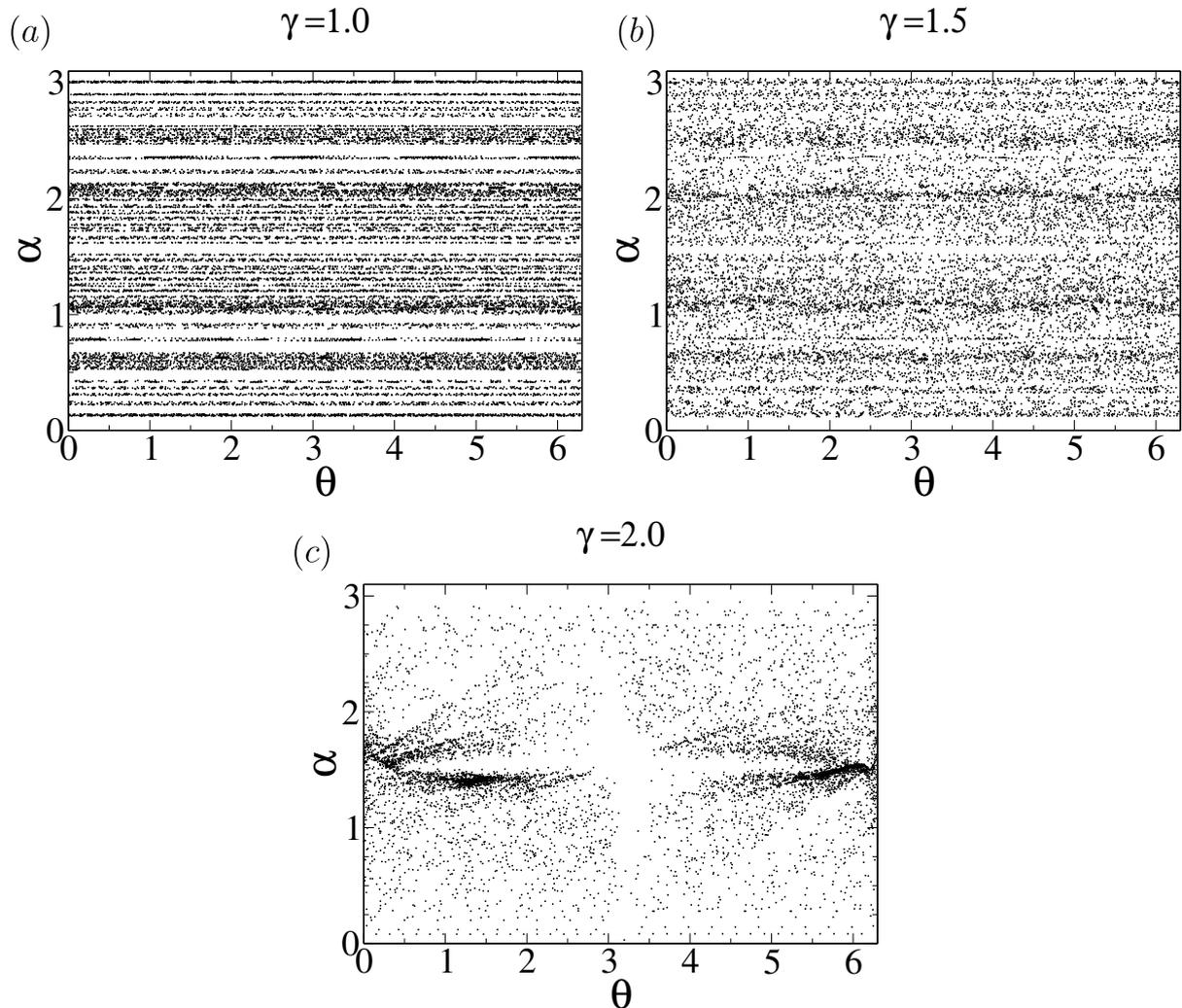
Como visto, mudanças no regime de escoamento (alto e baixo Reynolds), na inércia da partícula e no termo dissipativo da força, alteram drasticamente a dinâmica do bilhar. E esta é a motivação principal do trabalho, alterar a dinâmica de bilhares devido à ação de fatores externos e classificar esta nova dinâmica em função de parâmetros ecânicos.

Vimos em capítulos anteriores que o bilhar circular é composto por segmentos de reta que representam a conservação do momento angular, pois, para cada posição angular da partícula o cálculo do momento angular naquele ponto apresentou-se constante. Essa conservação já não ocorre quando a partícula sofre a ação do campo, pois a componente do momento será alterada entre e durante as colisões, além da energia também não ser mais uma constante de movimento.

Um aspecto interessante a respeito desta nova dinâmica é que os ângulos de incidência e reflexão serão alterados devido ao arraste do fluido, e conseqüentemente algumas regularidades irão desaparecer no espaço de fase do sistema.

Como primeiro exemplo, a Fig.(20) traz o espaço de fase para o bilhar circular com valores fixos de Reynolds e Stokes, variando apenas o parâmetro γ . Podemos perceber que com o número de Stokes bastante elevado e com a linearidade da força, $\gamma = 1.0$ (Fig.20(a)), o espaço de fase permanece com uma estrutura semelhante ao caso conservativo, pois o alto valor de Stokes é responsável por manter a partícula em linha reta, conservando o momento angular. Porém, com o aumento do parâmetro γ a dissipação

passa a ser mais efetiva, fazendo com que a velocidade da partícula seja reduzida mais rapidamente, fato esse que leva ao seu aprisionamento na região de saída do escoamento. Isso ocorre nos casos das Fig.20(b), onde a partícula, com velocidade mais baixa devido ao expoente γ , sofre de forma moderada a ação do fluido, que apesar de não ficar aprisionada durante o tempo de simulação, propiciou uma leve dispersão no espaço de fase. Já no caso da Fig.20(c), com uma dissipação mais forte, o espaço de fase foi coberto por um mar de caos, destruindo os segmentos de reta inicialmente encontrados no caso conservativo. Além disso, a partícula começou a ser atraída para a região próxima à saída do fluido ($\theta=0$ e $\theta=2\pi$) e deixou de visitar a região em $\theta=\pi$, região de entrada do fluido, deixando a suspeita do surgimento de um possível atrator caótico.

Figura 20 – Espaço de fase para o bilhar, $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$.

Fonte: Elaborado pelo autor. Os espaços de fase foram construídos a partir de 150 condições iniciais, os mapas representam a dinâmica do bilhar quando submetido a: (a) $\gamma = 1.0$. O elevado valor de Stokes e a linearidade da força dissipativa garantiram a estabilidade do espaço de fase durante o tempo de simulação. (b) $\gamma = 1.5$. O termo dissipativo faz com que a partícula perca velocidade mais rapidamente e sofra uma ação mais intensa do fluido, causando dispersão nos pontos do espaço de fase e (c) $\gamma = 2.0$. Faz com que a partícula entre em movimento completamente desordenado, gerando um mar de caos no espaço de fase, destruindo qualquer padrão observado anteriormente.

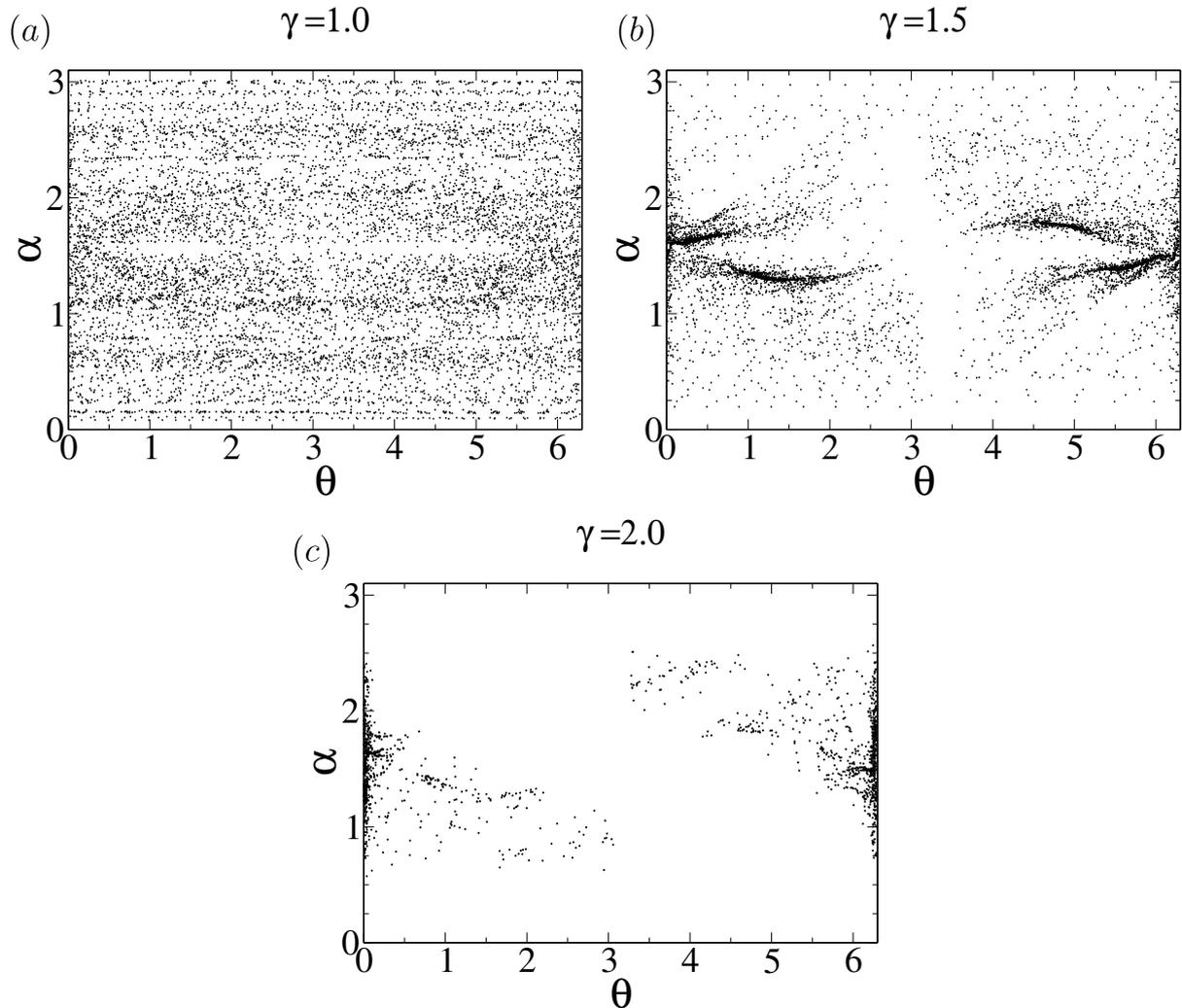
Como mencionado anteriormente, atratores constituem-se de um ponto ou um conjunto de pontos para os quais as órbitas convergem em tempos suficientemente longos. Este é um fato muito interessante, e que começou a surgir mais especificamente na figura Fig.20(c), onde apesar do mar de caos, as órbitas começaram a convergir para uma determinada região, que no caso seria a região de saída do fluido.

Para evidenciar este comportamento de forma mais clara, a figura a seguir mostra os espaços de fases, também para o caso de um bilhar circular, porém agora considerando um número de Stokes menor, mantendo fixo o número de Reynolds em relação

aos casos da figura anterior.

A razão para uma redução no número de Stokes foi deixar mais evidente a presença de um atrator caótico no bilhar estudado, pois a partícula colide muito menos quando sua inércia é menor e as órbitas no espaço de fase convergem mais rapidamente para faixa de atração.

Figura 21 – Espaço de fase para o bilhar, $Re = 10^2$ e $Stk = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor. Elaborados com 150 condições iniciais, os mapas representam a dinâmica do bilhar quando submetido a: (a) $\gamma = 1.0$. Agora com um valor de Stokes menor, mesmo com a ação de uma força linear, a partícula sofre a ação do campo, pois o regime de escoamento é turbulento, causando irregularidade nas órbitas e difundindo o espaço de fase. (b) $\gamma = 1.5$. O espaço de fase é tomado pelo mar de caos, a partícula começa a ser atraída para a região de saída do fluido e raramente colide na região onde o fluido entra no bilhar. (c) $\gamma = 2.0$. Com baixo Stokes, a partícula tende a seguir mais facilmente as linhas de campo, principalmente quando a dissipação é maior. A consequência disso é que todas as órbitas tendem à faixa de atração no espaço de fase.

Como podemos observar, a estrutura do espaço de fase do bilhar circular pode ser alterada quando o mesmo está submetido à ação de um campo externo, no caso investi-

gado aqui trata-se de um fluido escoando através da região do bilhar. Este comportamento diferente do caso convencional pode ser intensificado alterando o parâmetro que controla a dependência da força dissipativa com a velocidade. Conhecendo que o bilhar elíptico apresenta uma maior riqueza de detalhes na estrutura de seu espaço de fase, optamos também por estudá-lo na presença de um campo externo. O nosso objetivo consiste basicamente em observar as mudanças encontradas nas ilhas de estabilidade e também das curvas invariantes que são característicos no caso conservativo.

5.3 Resultados Numéricos para o Bilhar Elíptico com Campo Externo

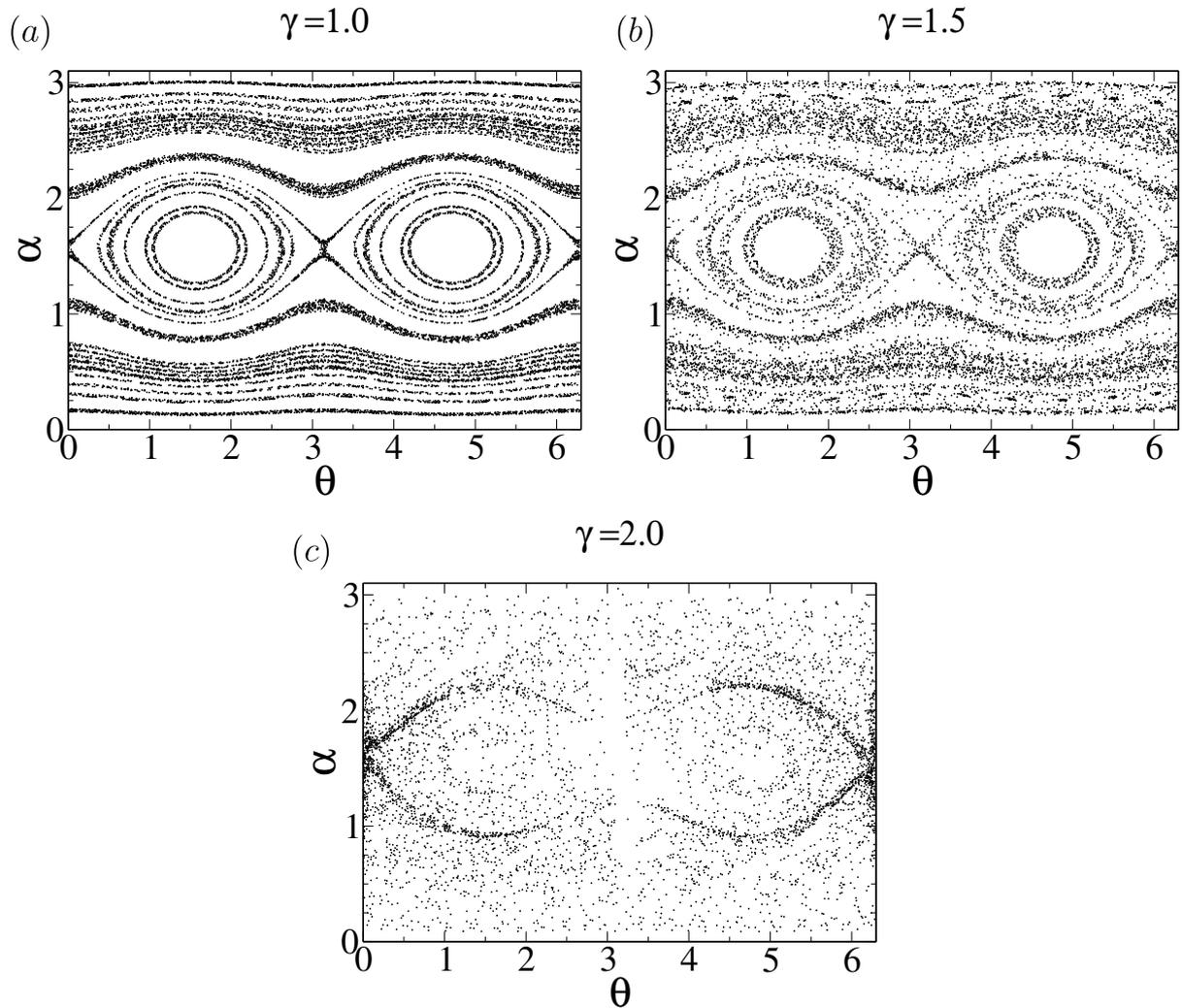
O bilhar elíptico, que é integrável no caso conservativo, apresenta a Energia total e o produto do momento angular, calculado com relação a cada foco, como constantes de movimento. Assim como no caso do bilhar circular, a Energia no caso elíptico também não será mais conservada devido à ação da força.

Discutiremos aqui os efeitos da presença do campo externo no espaço de fase de um bilhar elíptico. O método aqui aplicado, nos permitiu mudar a excentricidade da elipse, conforme mostrado para o caso conservativo. Porém, as propriedades observadas para diferentes excentricidades foram basicamente as mesmas, no que se refere à ação do campo de velocidade. Pensando nisso, nos atentaremos a partir de agora somente à um valor de excentricidade.

A figura 22 mostra o espaço de fase de um bilhar elíptico submetido ao campo de velocidade, obtidos utilizando o mesmo valor de Stokes e Reynolds, variando apenas o parâmetro que controla a força, obtido quando consideramos o número de Stokes elevado, conforme feito no caso circular.

No caso da Fig.22(a), o comportamento balístico da partícula fez com que a estrutura do espaço de fase seja preservada, mantendo a formação de curvas invariante e ilhas de estabilidade, igualmente ao espaço de fase encontrado no caso conservativo. Conforme o aumento do parâmetro γ , como na Fig.22(b), fica perceptível que o sistema começa a perder a estabilidade, mesmo considerando um elevado valor do número de Stokes. Já na Fig.22(c) o termo dissipativo é responsável por dar origem ao mar de caos no espaço de fase, além do fato das órbitas começarem a ser atraídas para a faixa no espaço de fase correspondente à saída do fluido, assim como no caso do bilhar circular.

Figura 22 – Espaço de fase para o bilhar elíptico, $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$.

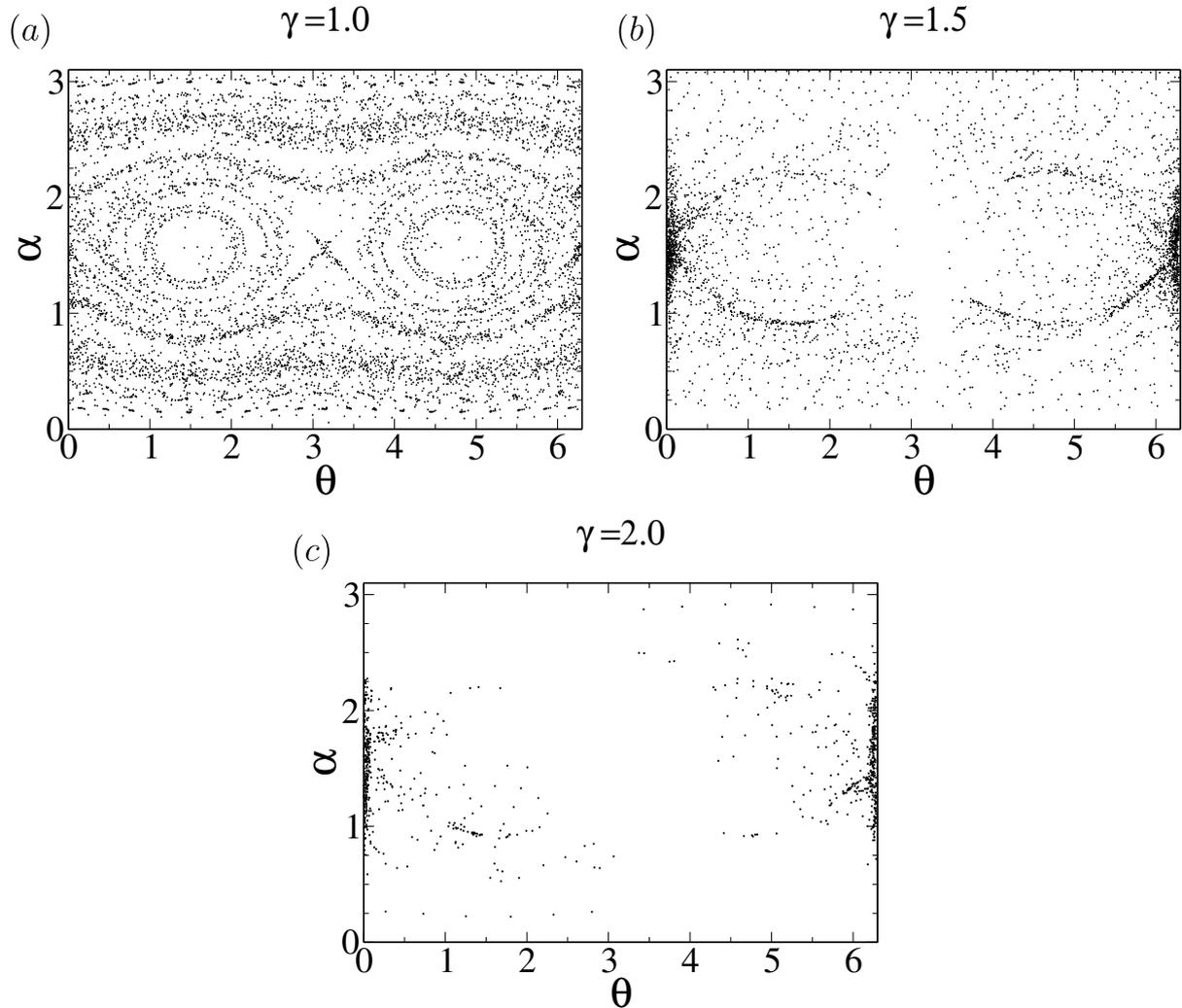


Fonte: Elaborado pelo autor. Elaborados a partir de 150 condições iniciais, os mapas representam a dinâmica do bilhar elíptico quando submetido a: (a) $\gamma = 1.0$. O elevado valor para o número de Stokes é responsável por manter as órbitas características do caso conservativo. (b) $\gamma = 1.5$. O espaço de fase começa a se difundir mesmo com um alto valor de Stokes, pois a dissipação se tornou mais intensa devido ao parâmetro que o controla. (c) $\gamma = 2.0$. As órbitas começam a convergir para a região de atração no espaço de fase, que no bilhar consiste na região de saída no escoamento do fluido.

É fato que quando o número de Stokes é menor, a partícula fica muito mais propícia a seguir o campo de velocidade. Também é notório que independente dos parâmetros inicialmente estabelecidos, para tempos suficientemente longos, a partícula ficará aprisionada quando perder boa parte de sua energia cinética, ou seja, o sistema possui um atrator onde todas as órbitas no espaço de fase convergirão para uma determinada faixa, conforme ilustrado na Fig.(c).

Este comportamento é bastante interessante porque tal fato ocorre independente da geometria do bilhar, seja no bilhar circular, representado pela Fig.(21) ou no bilhar elíptico, como mostra a Fig.(23).

Figura 23 – Espaço de fase para o bilhar elíptico, $Re = 10^2$ e $Stk = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor. Elaborados com 150 condições iniciais, os mapas representam a dinâmica do bilhar quando submetido a: (a) $\gamma = 1.0$. Agora com um valor do número de Stokes menor, mesmo com a ação de uma força linear, a partícula sofre a ação do campo, pois o regime de escoamento é turbulento, causando irregularidade nas órbitas e difundindo o espaço de fase. (b) $\gamma = 1.5$. O espaço de fase é tomado pelo mar de caos, a partícula começa a ser atraída para a região de saída do fluido e raramente colide na região onde o fluido entra no bilhar. (c) $\gamma = 2.0$. Com baixo Stokes, a partícula tende a seguir mais facilmente as linhas de campo, principalmente quando a dissipação é maior. A consequência disso é que todas as órbitas tendem à faixa de atração no espaço de fase.

A priori vimos que os efeitos causados pela ação do campo externo são notórios, que se dão desde mudanças na energia da partícula, até alterações na estrutura do espaço de fase (tanto no caso circular, quanto para o elíptico).

Com excessão do caso do decaimento da velocidade da partícula, as demais análises da dinâmica foi feita de forma qualitativa (observando a estrutura do espaço de fase para cada caso). No entanto, é importante a existência de uma análise que leve em consideração aspectos quantitativos que nos permitam classificar de forma mais consistente a nova dinâmica proposta neste trabalho.

Como a caoticidade é uma característica puramente de sistemas não integráveis, e como tínhamos que os sistemas apresentados neste trabalho, quando sofrem a ação do campo perdem sua integrabilidade (devido à não conservação da energia e momento), supomos a existência de um comportamento caótico em nossos bilhares. E como dito no primeiro capítulo, a sensibilidade às condições iniciais e a divergência entre condições próximas das soluções são fortes características de um sistema caótico, e que os expoentes de Lyapunov são os parâmetros que confirmam tais hipóteses. Tendo em vista esses aspectos, resolvemos então propor uma maneira de medir a divergência entre as soluções numéricas. Tal descrição a cerca da divergência entre as soluções é dada na próxima subseção.

5.4 Distância entre Soluções - Bilhar Circular

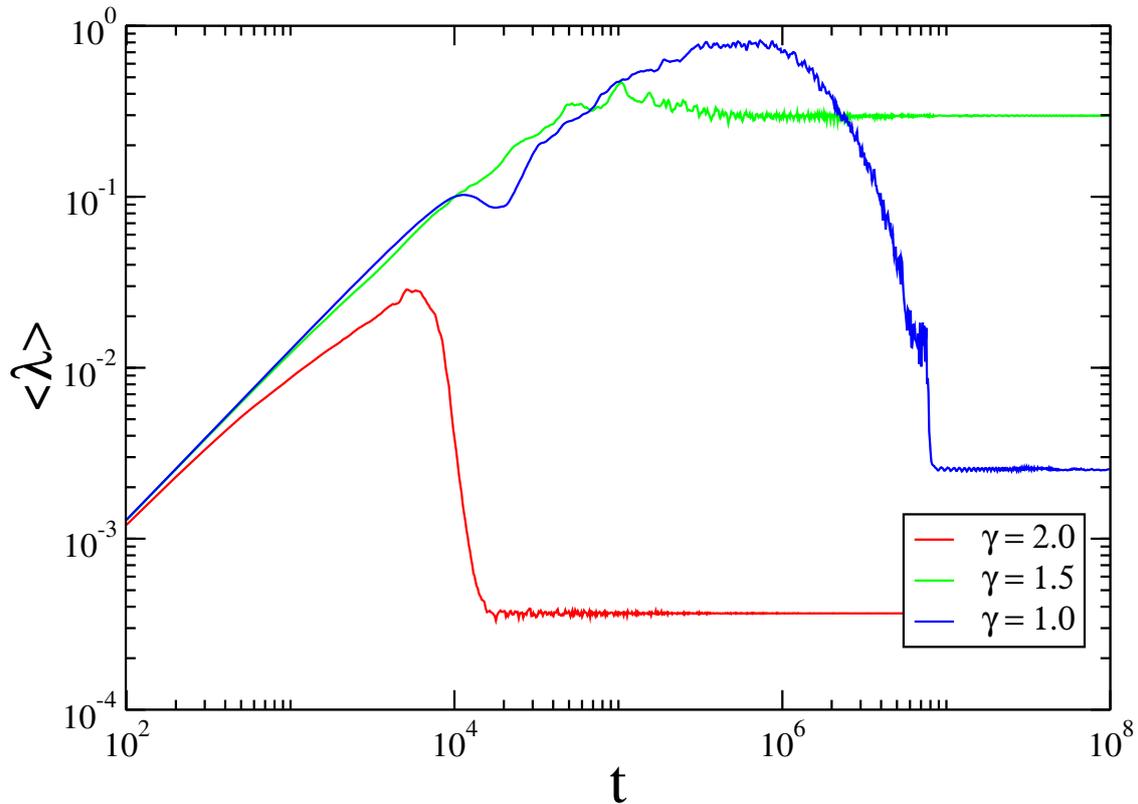
No capítulo anterior, vimos que no método utilizado neste trabalho para descrever os bilhares, a priori não nos permitiu determinar os expoentes de Lyapunov propriamente dito, pelo fato de não podermos montar uma matriz jacobiana e calcularmos seu determinante, já que a matriz é montada a partir de elementos que constituem o mapa que descreve a dinâmica do bilhar. Porém, calculamos a distância entre condições iniciais, definida aqui como $\lambda = \sqrt{((x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2)}$, distância essa que nos possibilita determinar se há ou não, divergência no tempo entre as soluções.

Para o caso do bilhar circular, foram feitas simulações com número de Reynolds (Re) fixo, variando apenas o número de Stokes (Stk) e o parâmetro dissipativo γ . Representaremos aqui, de ordem crescente (com relação ao número de Stokes) os resultados obtidos para os três expoentes γ .

A Fig.(24) representa a diferença média entre condições iniciais dadas no bilhar circular. As condições iniciais foram dadas de tal forma que pudéssemos variar cada parâmetro isoladamente, mantendo os demais fixos, nos possibilitando assim, observar com clareza a influência de cada um sobre o parâmetro λ . Os parâmetros mantidos fixos foram o número de Reynolds e Stokes, assim como no caso do espaço de fase, variando apenas o expoente que controla a intensidade da força dissipativa.

A forma correta de interpretar as curvas é dada da seguinte forma: Como estamos medindo uma distância entre as soluções, o afastamento entre as mesmas corresponde

Figura 24 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 1$.



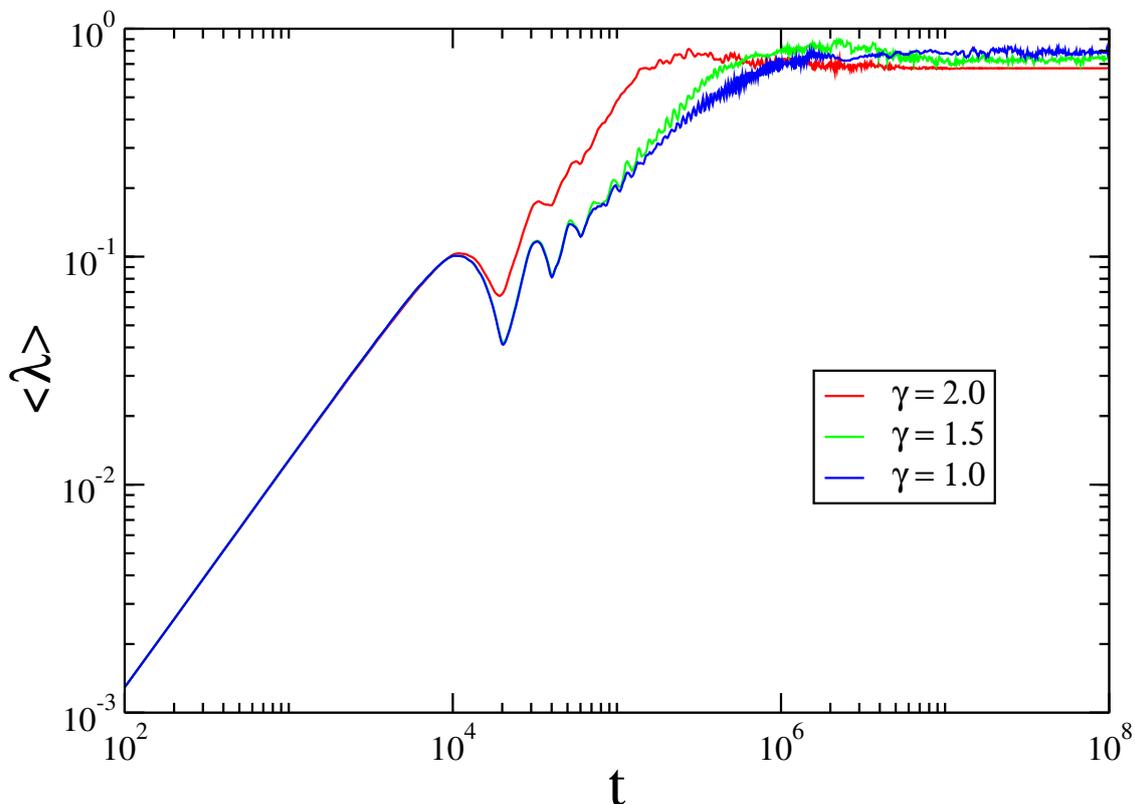
Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar circular, variando apenas o parâmetro dissipativo da força. Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Com expoente 0.95 para $\gamma = 1.0$, 0.92 para $\gamma = 1.5$ e 0.76 $\gamma = 2.0$. A simulação foi realizada com 120 condições iniciais, relacionadas à posições dentro do bilhar e ângulos de lançamento da partícula. Para cada evolução temporal relacionadas à uma condição inicial, foram realizada 10^8 iteradas.

em um aumento no eixo ($\langle \lambda \rangle$) do gráfico. E quando as soluções se aproximarem cada vez mais, teremos que ($\langle \lambda \rangle$) tenderá a um platô constante. Platô constante este, que surgiu nos casos da figura acima. Vemos que as curvas que convergem mais rapidamente ao platô, são aquelas que possuem o maior valor referente a γ , que se deve ao fato do expoente determinar a forma de decaimento da energia da partícula com o passar do tempo. Por exemplo, quando o expoente da força é quadrático, vimos que a energia da partícula decai exponencialmente. Isso faz com que, para quaisquer condições iniciais dadas, a partícula seja atraída mais rapidamente para a região de saída do fluido, convergindo todas as soluções para essa região. A consequência direta disso é que a diferença entre todas elas tenda a zero para intervalos de tempo suficientemente longos.

O surgimento de platôs se dá por conta de atratores caóticos presentes em cada sistema, onde independentemente dos parâmetros e condições iniciais atribuídos, para um tempo suficientemente longo, todas as órbitas do espaço de fase convergirão. Porém, antes disso, observamos que logo no início da evolução temporal do sistema, a diferença média entre as soluções começou a divergir em forma de lei de potência.

Observamos também que, quanto maior for o número de Stokes, maior será o tempo necessário para a partícula seja arrastada até a região referente ao canal de saída. Isso requer um número maior de iterações na simulação para que as curvas caiam em um platô. A Fig.25 representa a distância média entre as soluções, referentes ao primeiro caso do bilhar circular (Fig.20).

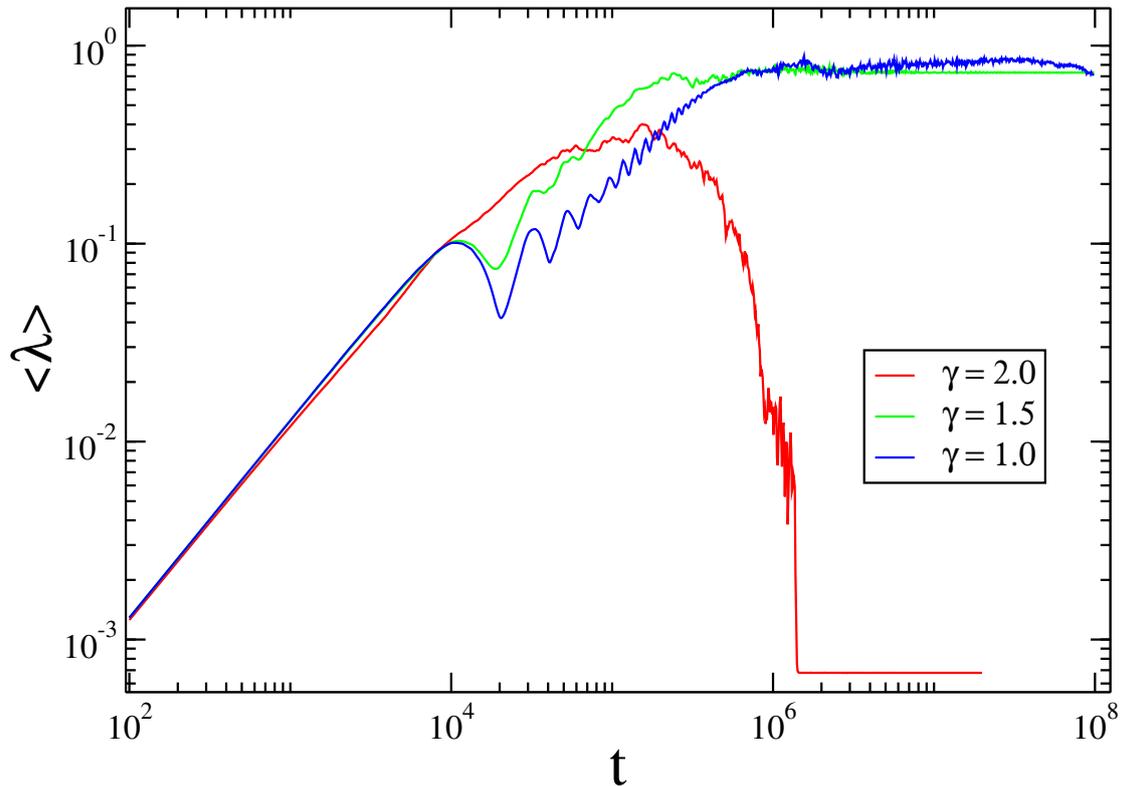
Figura 25 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$.



Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar circular, variando apenas o parâmetro dissipativo da força. Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Com expoente 0.96 para $\gamma = 1.0$, $\gamma = 1.5$ e $\gamma = 2.0$. A simulação foi realizada com 120 condições iniciais, relacionadas à posições dentro do bilhar e ângulos de lançamento da partícula. Para cada evolução temporal relacionadas à uma condição inicial, foram realizada 10^8 iterações.

Assim como no caso anterior, podemos observar uma divergência durante um intervalo de tempo inicial. Esse tipo de comportamento também foi observado no caso da Fig.26 (que é referente ao caso da Fig.21). A divergência inicial que observamos, foi a responsável pela difusão das órbitas no espaço de fase da seção anterior.

Figura 26 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $Stk = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar circular, variando apenas o parâmetro dissipativo da força. Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Com expoente 0.97 para $\gamma = 1.0$, $\gamma = 1.5$ e $\gamma = 2.0$. A simulação foi realizada com 120 condições iniciais, relacionadas à posições dentro do bilhar e ângulos de lançamento da partícula. Para cada evolução temporal relacionadas à uma condição inicial, foram realizada 10^8 iteradas.

Nos casos citados até aqui, vimos que, independente das condições iniciais dadas, as soluções começam a divergir, mas convergem por conta do atrator. Isso ocorre devido ao escoamento do fluido ser ordenado, ou seja, um escoamento que se dá para uma região preferencial. Se tivéssemos um fluido confinado, com com um campo de velocidade totalmente desordenado, provavelmente as soluções não convergiriam após a divergência, não gerando platôs. Observamos também, que os casos onde $\gamma = 2.0$, as curvas ficaram mais suscetíveis ao platô gerado pelo atrator, estes casos são justamente os quais foram observados mais claramente a presença do atrator nos espaços de fase apresentados an-

teriormente. Nos demais casos, os platôs não foram observados por conta do número de iteradas na simulação ter sido insuficiente, apesar das simulações terem ocorrido entre 10^8 e 10^{10} iteradas. Mas como dito anteriormente, a convergência sempre acontece para um tempo suficientemente longo, e para qualquer parâmetro atribuído.

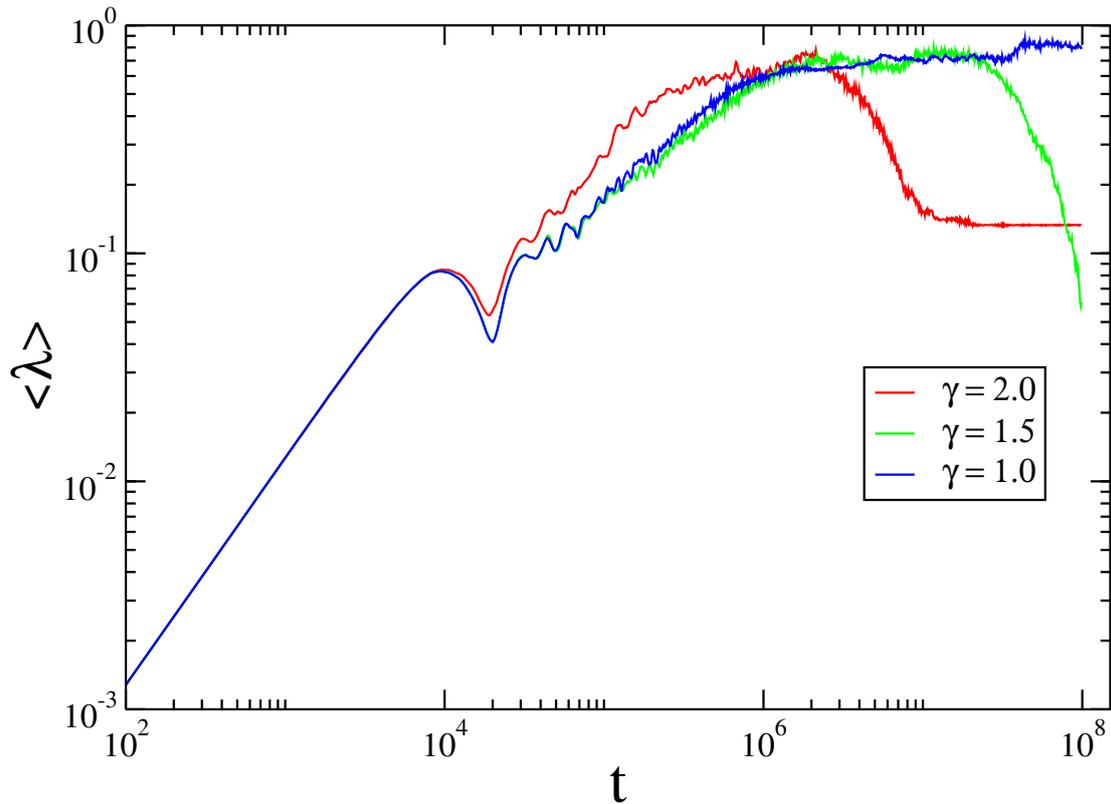
Outro aspecto que chama a atenção quando analisamos a divergência das soluções quanto ao parâmetro γ que controla a intensidade da dissipação, é o fato do expoente que controla a divergência em lei de potência ser sensível apenas para o caso de baixo valor para o número de Stokes. Quando o número de Stokes é baixo, a partícula fica mais vulnerável aos valores da velocidade do fluido, pois a mesma tende a se adaptar mais facilmente a este campo. Portanto a diferença nas condições iniciais são fatores importantes na trajetória da partícula na condição de baixo número de Stokes. Este aspecto acaba por conduzir a partícula para regiões diferenciadas, fazendo com que o $\langle \lambda \rangle$ tenha seu comportamento em lei de potência para diferentes expoentes. Na condição de número de Stokes elevado este aspecto perde sua influência, uma vez que a partícula não segue com tanta facilidade as linhas do campo escoando, apresentando basicamente a mesma divergência para os parâmetros γ .

5.5 Distância entre Soluções - Bilhar Elíptico

Apresentaremos aqui, assim como no caso do bilhar circular, a distância média entre as soluções. A Fig.27 (que é ferente à Fig.22), assim como nos casos passados, λ representa a média das distâncias para várias condições iniciais, só que agora considerando o bilhar elíptico.

O que podemos observar, foi que, diferentemente do caso circular, o caso elíptico necessitou de um número consideravelmente menor de iteradas para que algumas curvas convergissem aos platôs. Como por exemplo no caso em que $\gamma=2.0$, em que a convergência ocorreu por volta de 10^4 iteradas, diferentemente do caso circular, que a tal ponto o sistema não chegou a convergir. O que é possível observar com relação à esse aspecto, foi que a geometria (excentricidade da elipse) contribuiu para a convergência ao platô para o $\langle \lambda \rangle$.

Figura 27 – Diferença média entre as soluções - bilhar elíptico. $Re = 10^2$ e $Stk = 10^2$.

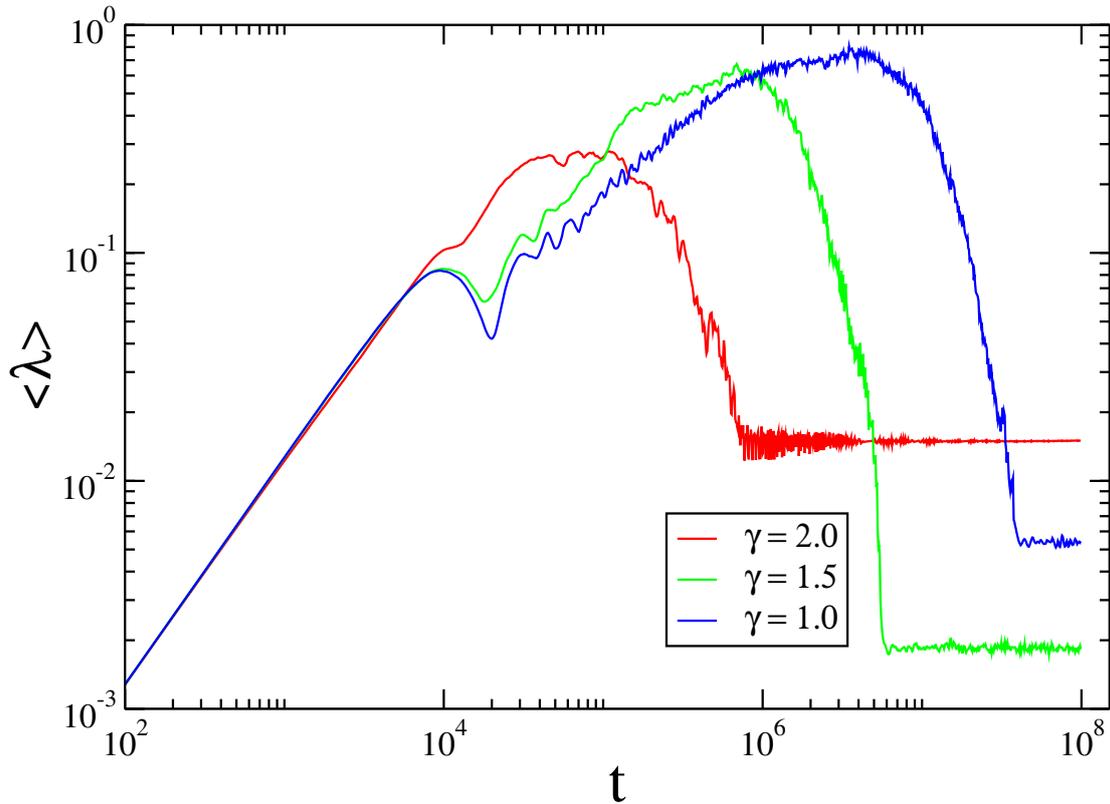


Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar elíptico, variando apenas o parâmetro dissipativo da força. Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Com expoente 0.93 para $\gamma = 1.0$, $\gamma = 1.5$ e $\gamma = 1.0$. A simulação foi realizada com 120 condições iniciais, relacionadas à posições dentro do bilhar e ângulos de lançamento da partícula. Para cada evolução temporal relacionadas à uma condição inicial.

Já no caso da Fig.28, além da contribuição da fronteira, temos a diminuição no número de Stokes, que também contribuiu para a convergência das curvas. Observa-se que com os mesmo parâmetros externos do caso circular, o tempo de divergência foi menor.

Além dos casos abordados anteriormente, que evidenciam o efeito do parâmetro dissipativo na divergência ou na convergência das soluções, podemos observar nos gráficos a seguir, o efeito gerados por mudanças no número de Stokes, fixando-se o parâmetro γ .

Figura 28 – Diferença média entre as soluções - bilhar elíptico. $Re = 10^2$ e $Stk = 10$.



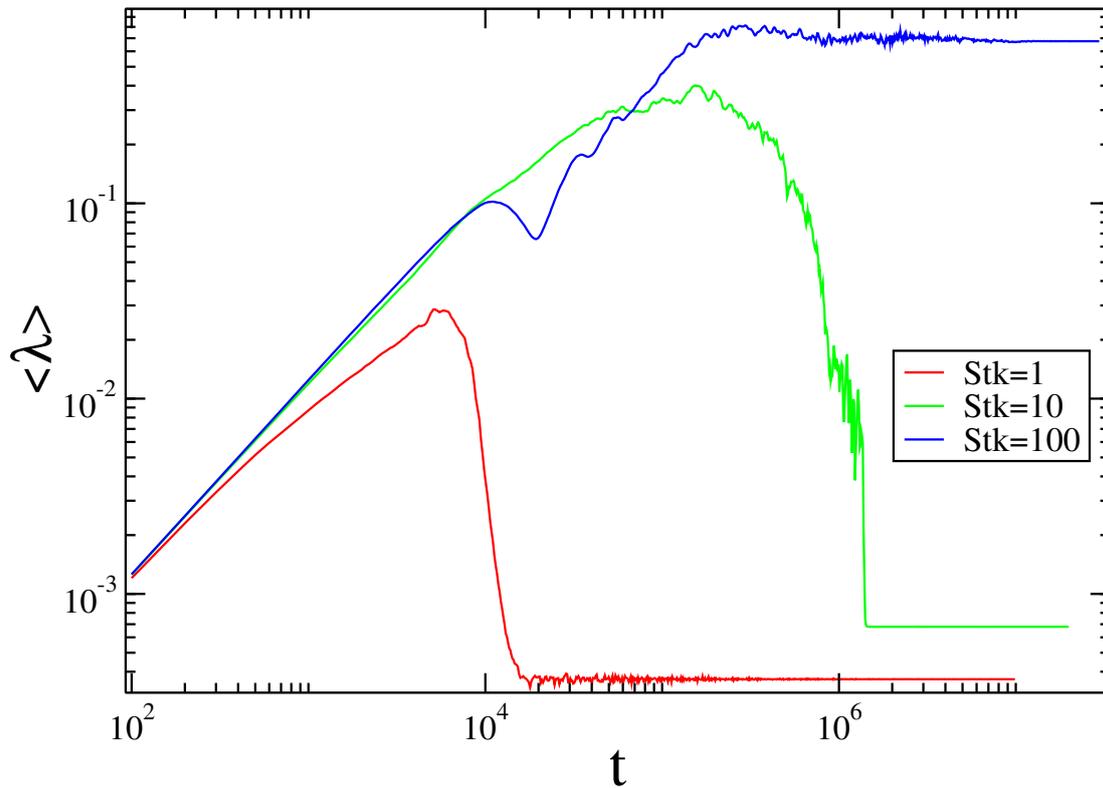
Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar elíptico, variando apenas o parâmetro dissipativo da força. Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Com expoente 0.94 para $\gamma = 1.0$, $\gamma = 1.5$ e $\gamma = 1.0$. A simulação foi realizada com 120 condições iniciais, relacionadas à posições dentro do bilhar e ângulos de lançamento da partícula. Para cada evolução temporal relacionadas à uma condição inicial.

5.6 Influência do número de Stokes

Como já sabemos que o número de Stokes em nosso trabalho é basicamente o responsável por tentar manter a integrabilidade do sistema, e que seu valor afeta diretamente no número de colisões e no tempo que leva para a partícula ficar aprisionada, resolvemos então observar os efeitos de sua variação na divergência entre as soluções, mantendo agora o parâmetro γ constante. O intuito de se fazer essa variação, foi de se observar algum comportamento característico nas curvas, que dependa diretamente desse parâmetro.

A Fig.(29) representa a divergência entre as soluções para três diferentes valores de Stokes em um bilhar circular, ambos são para $\gamma = 2.0$ (valor de maior dissipação).

Figura 29 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $\gamma = 2.0$.

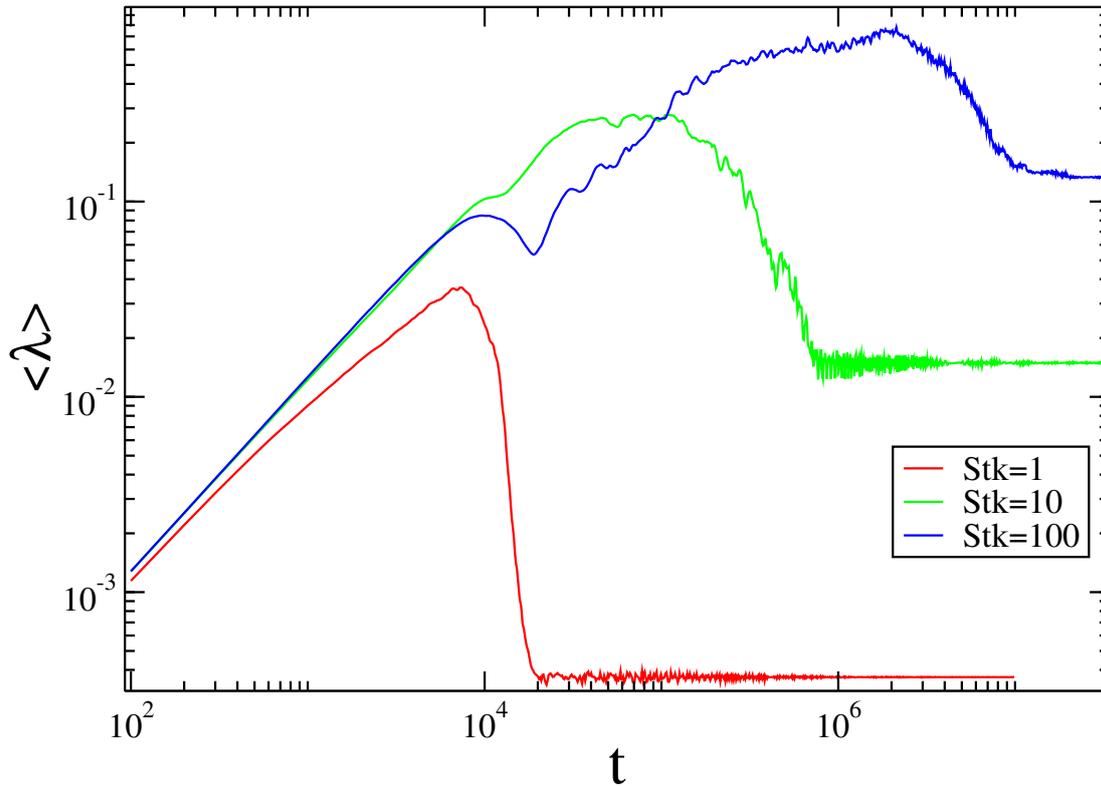


Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar circular, variando apenas o número de Stokes (Stk). Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Observa-se ainda, que a convergência ao platô se dá mais rapidamente nos casos em que o número de Stokes é cada vez menor.

Podemos observar que quanto maior for o termo de inércia da partícula, mais tempo levará para a partícula ficar aprisionada, e conseqüentemente, será necessário um intervalo de tempo maior para as curvas convergirem ao platô. E como dito anteriormente, além da dependência do número de Stokes, o parâmetro γ também influencia no tempo de convergência entre as curvas, logo, podemos concluir que uma combinação $Stk=1$ e $\gamma = 2.0$, é a que faz com que a partícula seja atraída mais rapidamente pelo atrator.

Já o caso em que se apresenta uma maior resistência a esse aprisionamento, é dado pela combinação $Stk=100$ e $\gamma = 1.0$, isso independente da geometria do bilhar. Na caso do bilhar elíptico, que está representado pela Fig.(30), as conclusões a cerca do comportamento das curvas são as mesmas, além do fato da excentricidade influenciar no aprisionamento da partícula, conforme vimos anteriormente.

Figura 30 – Diferença média entre as soluções - bilhar circular. $Re = 10^2$ e $\gamma = 2.0$.



Fonte: Elaborado pelo autor. A figura representa a distância média ($\langle \lambda \rangle$) entre as soluções em função do passo de integração (t), para um bilhar elíptico, variando apenas o número de Stokes (Stk). Antes da convergência das curvas, foi observado uma divergência média entre as soluções, que se deram em forma de lei de potência. Observa-se ainda, que a convergência ao platô se dá mais rapidamente nos casos em que o número de Stokes é cada vez menor.

A principal influência do número de Stokes na divergência média das soluções, foi que, para ambas as geometrias este fator de inércia foi responsável também por causar mudanças no tamanho da divergência média entre as soluções. Esse fato pode ser observado principalmente nas regiões onde se encontram os platôs, pois para cada valor de Stokes simulado, obtivemos uma divergência final diferente ou seja, um aumento no número de Stokes acarreta em uma divergência final maior entre as soluções.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos os bilhares circulares e elípticos com a presença de um campo externo, aqui representado por meio do escoamento de um fluido através da região definida pela fronteira do bilhar. A existência deste escoamento proporcionou uma interação entre a partícula e o fluido, propiciando um comportamento não trivial para a trajetória da partícula. Este comportamento apresentou-se sensível aos parâmetros que controlam o regime de escoamento, a interação entre a partícula e o fluido e o comportamento inercial da partícula.

As trajetórias das partículas apresentaram um comportamento bastante diferenciado quando analisado em função do parâmetro γ que controla a dissipação da energia cinética da partícula. Quando analisamos a velocidade da partícula no tempo, observamos um decaimento do tipo linear, um do tipo quadrático e outro do tipo exponencial para os seguintes valores: $\gamma = 1.0$, $\gamma = 1.5$ e $\gamma = 2.0$; respectivamente. Estes comportamentos foram observados independentemente dos regimes de escoamento (Re) e do fator de inércia da partícula (Stk).

O presente trabalho visou duas diferentes abordagens no estudo dos bilhares com dissipação. A primeira na forma qualitativa, com a análise do espaço de fase, e a segunda de forma quantitativa, procurando medir a distância entre as soluções oriundas de condições iniciais muito próximas.

Tanto no caso do bilhar circular, quanto no elíptico, a integrabilidade do espaço e fase foi mantida nos casos em que o número de Stokes foi máximo ($Stk = 10^2$) e o parâmetro dissipativo atribuído era unitário, como mostram os casos da Fig.20(a) e Fig.22(a), pois quando a dissipação aumenta, a partícula deixa de seguir suas órbitas características no espaço de fase, independentemente do regime de escoamento ou do número de Stokes atribuído. Pode-se perceber ainda, que o aumento do parâmetro γ provocou o aparecimento de um mar de caos no espaço de fase (especialmente nos casos em que $\gamma = 2.0$). Em regimes de escoamento de alto Reynolds ($Re=10^2$) e pequenos valores de Stokes ($Stk = 10$ e $Stk = 1$), tornou-se possível observar uma nítida convergência das órbitas para uma certa zona do espaço de fase, formando assim, uma faixa de pontos (Fig.21(c) e Fig.23(c)), nos levando a identificar um atrator global presente no sistema. Vale ressaltar também, que foram realizadas simulações com regimes de escoamentos em baixo Reynolds ($Re = 10^1$, por exemplo), mas não foram observados efeitos significativos na dinâmica da partícula.

Com relação às análises quantitativas, o nosso parâmetro $\langle \lambda \rangle$ foi utilizado

para tentar determinar a distância entre as soluções oriundas de condições iniciais muito próximas. No caso do bilhar circular, observamos a divergência entre as soluções, para todos os casos apresentados, mas que por conta do atrator, seguiram para um regime de saturação para tempos suficientemente longos (como mostra a Fig.24, por exemplo). O fato que mais contribuiu para essa convergência das órbitas ao atrator, foi a ação do termo dissipativo da força, γ , pois quando seu valor foi acrescido, o tempo necessário para as curvas saturarem em um platô constante apresentou-se menor. Já o caso do bilhar elíptico, que também apresentou uma divergência inicial em todos os casos, além da influência do parâmetro γ na saturação das curvas, a excentricidade da fronteira contribuiu para que a partícula ficasse aprisionada mais rapidamente.

No caso em que $\langle \lambda \rangle$ foi obtido através de variações no número de Stokes, mantendo γ fixo, observou-se que o termo de inércia também é responsável por aumentar, e também diminuir o tempo de convergência das curvas aos platôs. Observamos também que as combinações $\gamma = 2.0$ e $\text{Stk}=1.0$ são responsáveis por uma convergência mais rápida, e que $\gamma = 1.0$ e $\text{Stk}=100$ fazem com que a partícula não se alinhe facilmente com as linhas de campo, ocasionando um tempo maior de divergência antes das curvas chegarem ao platô. Foi observado ainda que mudanças no número de Stokes afetam na aproximação média entre as soluções no final da simulação (principalmente nos regimes de saturação), pois, para elevados valores de Stokes, observamos um afastamento médio final cada vez maior.

O presente trabalho, além de apresentar um método bastante eficiente ao tornar um sistema discreto em um sistema contínuo, pode ainda abranger o estudo de uma classe de bilhares. Bilhares estes que são ditos não integráveis, cujo mapa que os descreve especificamente, ainda não foi deduzido, para que pudéssemos abrir mão da integração numérica. Apesar disso, o mesmo trouxe resultados bastante expressivos, principalmente na análise qualitativa do espaço de fase, que corroboraram na identificação de um atrator no sistema. Atrator esse que se tornou o principal responsável pelo regime de saturação das curvas referentes ao parâmetro λ , pois se o escoamento do campo de velocidade não tivesse uma região preferencial, provavelmente tal saturação não surgiria.

A perspectiva a cerca do trabalho são diversas, vão desde a aplicação do método de triangulação de campos discretos em problemas de fluidodinâmica ou então continuando com o estudo de bilhares, com um problema tridimensional, ou então, encontrar uma solução analítica para o problema fruto deste trabalho, para que possamos reduzir o tempo de simulação e determinarmos os próprios expoentes de Lyapunov.

REFERÊNCIAS

- [1] POINCARÉ, Henri. *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*. **Gauthier-Villars, 1899.**
- [2] GASPARD, Pierre; RICE, Stuart A. *Scattering from a classically chaotic repellor*. **The Journal of chemical physics**, v. 90, n. 4, p. 2225-2241, 1989.
- [3] G. Casati and Baowen Li. *Heat conduction in one dimensional systems: Fourier law, chaos, and heat control*. **Non-Linear Dynamics and Fundamental Interactions, NATO Science Series II, 213, (2006)..**
- [4] PERSSON, E. et al. *Observation of resonance trapping in an open microwave cavity*. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 12, p. 2478, 2000.
- [5] H. D. Graf, H. Lengeler, C. H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt, e H. A. Weidenmuller. *Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics*. **Phys. Rev. Lett.**, 69, 1296, (1992)..
- [6] CASTALDI, Bruno. *Investigando o efeito de campos elétrico e magnético em um sistema dissipativo pulsante. Dissertação (mestrado em Física)*. **Universidade Estadual Paulista, 2014.**
- [7] GALILEI, Galileo. *Sidereus Nuncius: O mensageiro das estrelas*. **Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.**
- [8] *O ensaiador*. **Nova Cultural, 1999.**
- [9] NEWTON, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. **Univ of California Press, 1999.**
- [10] MARION, Jerry B. *Classical dynamics of particles and systems*. **Academic Press, 2013.**
- [11] LEMOS, Nivaldo A. *Mecânica analítica*. **Editores Livraria da Física, 2007.**
- [12] Livorati, André Luiz Prando . *Influência do fenômeno de stickiness em alguns sistemas dinâmicos clássicos. Tese (Doutorado em Física)* **Universidade de São Paulo, 2015.**
- [13] Manchein, Cesar. *Duas partículas clássicas confinadas num bilhar unidimensional e interagindo via potencial de Yukawa. Dissertação (Mestrado em Física)* **Universidade Federal do Paraná, 2006.**
- [14] CHERNOV, Nikolai; MARKARIAN, Roberto. *Chaotic billiards*. **American Mathematical Soc., 2006.**
- [15] BERRY, Michael V. *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'*. **European Journal of Physics**, v. 2, n. 2, p. 91, 1981.

- [16] VIANA, R. L. *Introdução à dinâmica não-linear e caos. Dissertação (Mestrado em Física) Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná-UFPR, Curitiba, 2011.*
- [17] BIRKHOFF, George D. *On the periodic motions of dynamical systems. Acta Mathematica, v. 50, n. 1, p. 359-379, 1927.*
- [18] BOTARI, Tiago. *Aceleração de Fermi em bilhares com fronteiras dependentes do tempo descritas por osciladores não lineares: caso conservativo e dissipativo. APA, 2012.*
- [19] DE SÁ TELES, Renato et al. *Bilhares: aspectos clássicos e quânticos. 2012.*
- [20] OLIVEIRA, Diego FM; LEONEL, Edson D. *On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary. American Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 15, n. 4, p. 1092-1102, 2010.*
- [21] SINAI, Ya G. *Dynamical systems with elastic reflections. Russ. Math. Surveys, vol.25, p.137-189, 1970.*
- [22] BUNIMOVICH, Leonid A. *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Commun. Math. Phys., vol.78, p.479-497, 1981.*
- [23] BOUCHAUD, Jean-Philippe; LE DOUSSAL, Pierre. *Numerical study of ad-dimensional periodic Lorentz gas with universal properties. Journal of statistical physics, v. 41, n. 1-2, p. 225-248, 1985.*
- [24] K.R. Symon. *Mecânica. Journal of statistical physics, Editora Campus, 1982.*
- [25] PRUISNER, Daniel Cromer—Lynn. *Snow, Rain, and the Stokes Number. APA.*
- [26] KOCH, Donald L.; HILL, Reghan J. *Inertial effects in suspension and porous-media flows. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 33, n. 1, p. 619-647, 2001.*
- [27] DOBEK, Steven. *Fluid Dynamics and the Navier-Stokes Equation. University of Maryland, 2012.*
- [28] FLUENT, Ansys. *12.0 Theory Guide. Ansys Inc, v. 5, 2009.*
- [29] SHEWCHUK, Jonathan Richard. *Lecture notes on Delaunay mesh generation. Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, 1999.*
- [30] BIZÃO, Rafael Amatte. *Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de supressão da aceleração de Fermi no bilhar elíptico-ovoide com fronteira dependente do tempo. Dissertação (Mestrado em Física) 2013. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, 2013.*