

Diego Ximenes Macedo

**Informação de Fisher e entropia de Shannon
de osciladores com massa dependente da
posição**

Fortaleza - CE, Brasil

Fevereiro de 2017.

Diego Ximenes Macedo

**Informação de Fisher e entropia de Shannon
de osciladores com massa dependente da
posição.**

Tese de Doutorado apresentada ao
Departamento de Física da Universidade
Federal do Ceará.

Orientador:

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DOUTORADO EM FÍSICA

Fortaleza - CE, Brasil

Fevereiro de 2017.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M12i Macedo, Diego Ximenes.
Informação de Fisher e entropia de Shannon de osciladores com massa dependente da posição / Diego Ximenes Macedo. – 2017.
65 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.
1. Massa dependente da posição. 2. Informação de Fisher. 3. Entropia de Shannon. I. Título.
CDD 530
-

DIEGO XIMENES MACEDO

**INFORMAÇÃO DE FISHER E ENTROPIA DE SHANNON DE OSCILADORES COM
MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 16 / 02 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Ilde Guedes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Dr. Carlos Chesman de Araújo Feitosa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Dr. Ewerton Wagner Santos Caetano
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer os meus pais Gessia Ximenes de Araújo e Vilemar Ximenes Macedo pela dedicação que tiveram comigo durante toda a minha vida. A minha esposa, as minhas sobrinhas e a minha filha pela alegria que proporcionam em minha vida. Por isso, este trabalho é dedicado a elas.

Não menos importante para a realização deste trabalho foi meu orientador Ilde Guedes de Silva ao qual agradeço pela paciência que teve em me orientar durante o doutorado. Gostaria de agradecer também a todos os professores e funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Finalmente gostaria de agradecer toda a minha família, mas em especial aos meus tios Gerardo, Maria do Carmo, Maria Eliene e Maria Elieuda pelo muito que me ajudaram. Por fim gostaria de dar o maior agradecimento de todos: à Deus nosso criador.

“Ensinando os homens aprendem”

(Sêneca)

Resumo

Neste trabalho estudamos clássica e quanticamente o oscilador harmônico com massa dependente da posição (OHMDP). Na parte clássica, utilizamos a transformação de Legendre para encontrar a hamiltoniana do sistema. A seguir definimos duas funções a e a^* para escrevermos a hamiltoniana do OHMDP de uma forma mais simples. Utilizando a álgebra de Poisson encontramos as expressões para a posição e o momento. Por fim, através de uma transformação canônica veremos como relacionar as equações do OHMDP com aquelas do oscilador harmônico simples (OHS). Na parte quântica, escrevemos a hamiltoniana do OHMDP em termos de operadores A_a^- e A_a^+ . Em seguida, vamos supor que estes operadores satisfaçam a mesma relação de comutação que os operadores abaixamento e levantamento do OHS. Analisando que condição deve ser satisfeita para que os osciladores OHMDP clássico e quântico tenham o mesmo potencial, encontramos uma forma simplificada da hamiltoniana do OHMDP. Em seguida, transformamos a equação de Schrödinger (ES) para o OHMDP na ES para o OHS. Assim, obtemos a função de onda do OHMDP em termos da função de onda do OHS. Estudaremos dois sistemas com massa dependente da posição, a saber: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$ e $m_2(x) = m_0 \tanh^2(x/\lambda)$, vemos que quando $\lambda \rightarrow 0$, recaímos no OHS. Para cada sistema encontraremos a posição e o momento (estudo clássico), bem como a função de onda (estudo quântico). Para os dois sistemas analisaremos também o comportamento da incerteza na posição, incerteza no momento, produto de incerteza, informação de Fisher e entropia de Shannon, para o estado fundamental, em função do parâmetro de deformação λ .

Abstract

In this work we study from both classical and quantum point of view the position dependent mass harmonic oscillator (PDMHO). Classically, we use the Legendre transformation to find the Hamiltonian of the system. Next, we define two functions, a and a^* , to simplify the hamiltonian of the PDMHO. By using the Poisson algebra we find the expressions for the position and moment. At last, by using a canonical transformation we relate the equations of the PDMHO to those of the simple harmonic oscillator (SHO). Quantically, we write the Hamiltonian of the PDMHO in terms of the operators A_a^- and A_a^+ . Next, we consider that these operators satisfy the same algebra that those of the SHO. By assuming that both the classical and quantum PDMHO have the same form, we are able to find a simple form for the PDMHO Hamiltonian. Finally, by transforming the Schrödinger equation (SE) of the PDMHO into that of the SHO, we can write the wave function of the PDMHO in terms of that of the SHO. We will study two time-dependent systems, namely $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$ and $m_2(x) = m_0 \tanh^2(x/\lambda)$, we observe that as $\lambda \rightarrow 0$, they tend to a simple harmonic oscillator. For each system we find the position and momentum (classical study), as well as the wave-function (quantum study). For both systems we analyze the the position e momentum uncertainty, the product uncertainty, the fisher information and Shannon entropy, for the ground state, as a function of the parameter λ .

Sumário

1	Introdução	13
2	Oscilador harmônico simples	17
2.1	Tratamento clássico	17
2.1.1	Equações de Hamilton	17
2.1.2	Transformações canônicas	19
2.1.3	Parêntese de Poisson	20
2.1.4	Oscilador harmônico simples	21
2.2	Tratamento quântico	25
2.2.1	Autovalores e autoestados	25
2.2.2	Função de onda	28
2.2.3	Valores médios	29
3	Oscilador harmônico com massa dependente da posição: tratamento clássico	31
3.1	Considerações gerais	31
3.2	Exemplos de osciladores harmônicos deformados	34
3.2.1	Exemplo 1	35
3.2.1	Exemplo 2	38
2.2.3	Discussão	41
4	Oscilador harmônico com massa dependente da posição: tratamento quântico	43
4.1	Considerações gerais	43
4.2	Exemplos de osciladores harmônicos deformados	47
4.2.1	Exemplo 1	47
4.2.2	Exemplo 2	49

4.2.3 Discussão	51
5 Informação de Fisher e entropia de Shannon	52
5.1 Informação de Fisher	52
5.2 Entropia de Shannon	53
5.3 Resultados e discussões	53
Conclusões	60
Apêndice A (artigo publicado)	62
Referências	63

Lista de Figuras

Figura 2.1: (a) Posição do oscilador harmônico simples em função do tempo para uma energia igual a 1, (b) Mesmo que (a), mas para o momento do oscilador, (c) Diagramas de fases do oscilador harmônico simples, $E = 0.5$ (- -), $E = 1.0$ (- -) e $E = 2.0$ (— —). Para todos os gráficos tomamos $\phi = 0$.

Figura 2.2: (a) Função de onda do estado fundamental $n = 0$, (b) Densidade de probabilidade do estado fundamental $n = 0$. Nos gráficos usamos a Eq. (2.71) e o fato que $\rho_0(X) = |\phi_0(X)|^2$.

Figura 3.1: Em todos os gráficos temos que $\phi = 0$ e $m_0 = a = 1$ (a) Função massa $m_1(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Potencial $V_1(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. (g) Posição $x_1(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (h) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 1$. (i) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 5$. (j) Momento $p_1(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (l) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 1$. (m) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 5$. (n) Diagrama de fase para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (o) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 1$. (p) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 5$. (q) Diagrama de fase para $\lambda = 1$ e $E = 0,1$. (r) Mesmo que (q), mas para $E = 1$. (s) Mesmo que (q), mas para $E = 5$.

Figura 3.2: Em todos os gráficos temos que $\phi = 0$ e $m_0 = 1$ (a) Função massa $m_2(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Potencial $V_2(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. (g) Posição $x_2(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (h) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 1$. (i) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 5$. (j) Momento $p_2(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (l) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 1$. (m) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 5$. (n) Diagrama de fase para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (o) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 1$. (p) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 5$. (q) Diagrama de fase para $\lambda = 1$ e $E = 0,1$. (r) Mesmo que (q), mas para $E = 1$. (s) Mesmo que (q), mas para $E = 5$.

Figura 4.1: Em todos os gráficos tomamos $m_0 = a = 1$ (a) Função de onda $\psi_0^{(1)}(x)$ para $\lambda = 0,1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Densidade de probabilidade $\rho_0^{(1)}(x)$ para $\lambda = 0,1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. Para os gráficos utilizamos as eqs. (4.28) e (4.29).

Figura 4.2: Em todos os gráficos tomamos $m_0 = 1$ (a) Função de onda $\psi_0^{(2)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Densidade de probabilidade $\rho_0^{(2)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. Para os gráficos utilizamos as eqs. (4.32) e (4.33).

Figura 5.1: Nos quatro gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Função $m_1(x)$, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (b) Função $m_2(x)$, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (c) Função de onda do estado fundamental para o sistema 1, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (d) Função de onda do estado fundamental para o sistema 2, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$.

Figura 5.2: Nos seis gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Informação de Fisher na representação de posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 1. (b) Mesmo que (a), mas para a informação de Fisher na representação de momento. (c) Mesmo que (a), mas para o produto de Fisher. (d) Incerteza na posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 1. (e) Mesmo que (d), mas para a incerteza no momento. (f) Mesmo que (d), mas para o produto de incerteza.

Figura 5.3: Nos seis gráficos tomamos $m_0 = 1$. (a) Informação de Fisher na representação de posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 2. (b) Mesmo que (a), mas para a informação de Fisher na representação de momento. (c) Mesmo que (a), mas para o produto de Fisher. (d) Incerteza na posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 2. (e) Mesmo que (d), mas para a incerteza no momento. (f) Mesmo que (d), mas para o produto de incerteza.

Figura 5.4: Nos dois gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Entropia de Shannon do estado fundamental para o sistema 1. (b) Entropia de Shannon do estado fundamental para o sistema 2. Linha traçada corresponde a $1 + \ln\pi$.

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas os sistemas com massa dependente da posição despertaram grande interesse da comunidade científica. Isso se deve, principalmente, ao fato que estes sistemas são utilizados para descrever muitos sistemas quânticos como, por exemplo: semicondutores não homogêneos [1-4], líquidos quânticos [5], pontos quânticos [6], cristais quânticos [7], entre outros sistemas [8-21].

Dentro do escopo da Mecânica Quântica, o estudo de sistemas com massa dependente da posição, por si só, já é muito interessante. Na formulação inicial da teoria, estes sistemas apresentam uma dificuldade, pois, o operador energia cinética na forma padrão ($\frac{p^2}{2m}$), quando $m = m(x)$, é claramente não hermitiano, por isso, devemos ter cuidado ao escrevê-lo. Em virtude disso, várias hamiltonianas têm sido apresentadas para descrever sistemas com massa dependente da posição, entre as quais [13-14, 22]:

$$H = T + V = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{m^2(x)} p^2 + p^2 \frac{1}{m^2(x)} \right] + V, \quad (1.1)$$

$$H = T + V = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{m(x)}} p^2 \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \right] + V, \quad (1.2)$$

$$H = T + V = \frac{1}{2} \left[p \frac{1}{m(x)} p \right] + V, \quad (1.3)$$

e

$$H = T + V = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{m(x)}} p \frac{1}{\sqrt{m(x)}} p \right] + V. \quad (1.4)$$

Neste trabalho estudaremos o oscilador harmônico com massa dependente da posição, cuja hamiltoniana é dada por

$$H = T + V = \frac{1}{2} m^a(x) p m^{2b}(x) p m^a(x) + V, \quad (1.5)$$

onde $a + b = -\frac{1}{2}$ e V é o potencial.

Algumas técnicas têm sido utilizadas para estudar este problema, as principais são: transformação canônica de ponto [22-32] e mecânica quântica supersimétrica [33-37]. Neste trabalho, procuraremos encontrar as soluções clássicas e quânticas através da analogia com o oscilador harmônico simples e utilizando as duas técnicas mencionadas anteriormente.

Estudaremos dois sistemas com massa dependente da posição, a saber: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$ e $m_2(x) = m_0 \tanh^2(x/\lambda)$. Para cada um encontraremos a posição e o momento (análise clássica) e a função do onda (análise quântica), bem como analisaremos o comportamento da incerteza na posição, incerteza no momento, produto de incerteza, informação de Fisher e entropia de Shannon. Abaixo um breve histórico sobre a Teoria da Informação.

A origem da Teoria da Informação é atribuída ao matemático e engenheiro Claude Shannon no seu artigo “A Mathematical Theory of Communication” de 1948 [38]. Um dos principais conceitos na teoria da informação é o de entropia definida como sendo uma medida da incerteza do valor obtido por uma variável aleatória, ou seja, está associada com a quantidade de “informação” que obtemos com o conhecimento do valor da variável aleatória. Formulada para resolver problemas relacionados a engenharia de telecomunicações em 1948, a entropia de Shannon, desde então, vem influenciando estudos nas mais variadas áreas do conhecimento, como a química, a física, a matemática e a biologia [39]. Na física muitos estudos tem sido realizados [40-42], principalmente na mecânica quântica.

Para sistemas com massa constante muitos trabalhos foram realizados para estudar a entropia de Shannon. Beckner, Bialynicki-Birula e Mycielski encontraram a relação de incerteza entrópica [43], sendo utilizada hoje em dia como uma alternativa a relação de incerteza de Heisenberg. Em 1994, Yáñez, Van Assche e Dehesa [44] encontraram a entropia de Shannon para o oscilador harmônico isotrópico e o átomo de hidrogênio de dimensão D. Majerník e Opatrný [45], em 1996, encontraram a entropia de Shannon para os estados estacionários quânticos do oscilador harmônico simples em função de sua energia e determinaram a correspondente relação de incerteza entrópica. Eles investigaram também a evolução temporal da entropia de Shannon para estados não

estacionários. Em 2011, Ghasemi, Hooshmandasl e Tavassoly [46] calcularam a entropia de Shannon para o oscilador harmônico isotônico. Eles observaram o efeito de compressão em alguns autoestados. Em 2014, Dong et al. [47] obtiveram a entropia de Shannon para um poço de potencial simétrico quadrado. Outros resultados interessantes para diferentes sistemas quânticos podem ser obtidos na Refs. [48-52].

A informação de Fisher tem sido objeto de muito estudo na Física, desde a sua definição em 1925 [53]. Podemos citar, por exemplo, Romera, Sánchez-Moreno e Dehesa [54-55], que em 2005, encontraram a informação de Fisher para uma partícula em um potencial central. Em 2007, Patil e Sen [56] encontraram a relação de incerteza para o oscilador isotrópico e o potencial de Coulomb. Omiste, Yánéz e Dehesa [57], em 2010, analisaram as propriedades da teoria da informação para “half-line one-dimensional Coulomb potential”. Em 2011, Bouvrie, Angulo e Dehesa [58] estudaram a teoria da informação para potencial tipo delta de Dirac. Vários outros resultados interessantes podem ser encontrados nas Refs. [59-66].

Pelo exposto acima ficou claro que o estudo de sistemas com massa dependente da posição, bem como, a teoria da informação são de grande interesse na Física. Contudo, poucos estudos tem sido realizados envolvendo os dois assuntos. Por isso, neste trabalho estudaremos a informação de Fisher e a entropia Shannon para dois sistemas com massa dependente da posição.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no próximo capítulo faremos uma revisão do estudo clássico e quântico do oscilador harmônico simples. Encontraremos sua posição e momento, bem como a função de onda.

No Capítulo 3 estudaremos o oscilador harmônico com massa dependente da posição do ponto de vista clássico. Utilizaremos a álgebra de Poisson para encontrar a posição e o momento do oscilador harmônico com massa dependente da posição em função da posição e momento do oscilador harmônico simples. Como aplicação, estudaremos dois sistemas com massa dependente da posição.

Depois do estudo clássico, no Capítulo 4, analisaremos o oscilador harmônico com massa dependente da posição do ponto de vista da mecânica quântica. Inicialmente escreveremos a hamiltoniana da Eq. (1.5) em função de operadores de abaixamento e levantamento, e utilizando a álgebra de Dirac encontraremos que $a = b = -\frac{1}{4}$. Com estes

valores de a e b determinaremos a forma da hamiltoniana do oscilador harmônico com massa dependente da posição. Depois disso, através de uma transformação canônica de ponto, obteremos a função de onda do oscilador harmônico com massa dependente da posição em termos da função de onda do oscilador harmônico simples. Em seguida analisaremos os mesmos sistemas que foram considerados no estudo clássico.

O Capítulo 5 é destinado ao estudo da informação de Fisher e entropia de Shannon para os dois sistemas com massa dependente da posição estudados em capítulos anteriores.

A última parte é destinada as conclusões.

Capítulo 2

Oscilador Harmônico Simples

Neste capítulo estudaremos o oscilador harmônico simples, ou seja, o oscilador harmônico com massa constante. Começaremos o capítulo com o estudo clássico, primeiro falaremos das equações de Hamilton, em seguida falaremos dos conceitos de transformações canônicas e dos parênteses de Poisson para, em seguida, analisarmos o oscilador harmônico simples classicamente.

Depois do estudo clássico, faremos um estudo do oscilador harmônico do ponto de vista da mecânica quântica. Começaremos definindo operadores de levantamento e abaixamento. Em seguida, encontraremos os autovalores, as autofunções, os valores médios e o produto de incerteza para este sistema.

2.1 Tratamento Clássico

2.1.1 Equações de Hamilton

Consideremos inicialmente a função energia, integral de Jacobi ou, simplesmente, a hamiltoniana do sistema [67], cuja definição é dada pela equação abaixo:

$$H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \quad (2.1)$$

sendo q_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) as coordenadas generalizadas e L a lagrangiana do sistema. Definindo o momento canônico p_k por

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.2)$$

a hamiltoniana passa a ser

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (2.3)$$

Agora considerando H como função de q_k , p_k e t , tomando q_k e p_k como variáveis independentes, podemos escrever que

$$dH = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (2.4)$$

contudo da Eq. (2.3) encontramos que

$$dH = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.5)$$

Utilizando as equações de Lagrange $\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \right]$ e a definição de momento canônico, Eq. (2.2), na equação anterior obtemos que

$$dH = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.6)$$

Finalmente comparando as Eqs. (2.4) e (2.6) encontramos que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (2.7)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.9)$$

As duas primeiras são chamadas equações de Hamilton e a terceira é uma importante relação entre a hamiltoniana e a lagrangiana. As variáveis q_k e p_k são chamadas, respectivamente, de coordenadas canônicas e momentos canônicos. O espaço cartesiano formado pelas coordenadas e momentos é chamado espaço de fase. Um ponto do espaço de fase informa o estado do sistema, ou seja, as posições e velocidades das partículas.

Vamos agora encontrar a derivada total da função energia. Usando o fato que H é função de q_k , p_k e t temos que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.10)$$

onde usamos as equações de Hamilton. Agora usando as Eqs. (2.9) e (2.10) obtemos que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.11)$$

ou seja, a derivada total da hamiltoniana é igual a sua derivada parcial, que é igual a derivada parcial da lagrangiana. Sendo assim, se a lagrangiana não apresenta dependência temporal explícita, a hamiltoniana, também, não apresenta. Outra coisa interessante é que se H não depende explicitamente do tempo sua derivada total em relação ao tempo é nula.

Vamos agora encontrar a relação entre a hamiltoniana e a energia do sistema. Na situação em que a energia cinética é função puramente quadrática das velocidades e a energia potencial independe das velocidades, então a hamiltoniana é a energia do sistema, como podemos ver abaixo.

$$\sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = 2T, \quad (2.12)$$

onde usamos o teorema de Euler para funções homogêneas [67]. Com este resultado e usando a Eq. (2.1) temos que

$$H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - (T - V) = T + V, \quad (2.13)$$

ou seja, para as condições descritas acima a hamiltoniana coincide com a energia do sistema. Além do mais, estas condições são apenas suficientes, portanto, concluímos que elas podem não ser satisfeitas e mesmo assim a hamiltoniana coincidir com a energia do sistema.

2.1.2 Transformações Canônicas

Uma transformação de coordenadas no espaço de fase será canônica se preservar a forma canônica das equações de Hamilton. Considere as variáveis canônicas (q_k, p_k) , que satisfazem as equações de Hamilton, Eqs. (2.7) e (2.8). Queremos encontrar uma transformação de coordenadas inversível

$$Q_k = Q_k(q_k, p_k, t), P_k = P_k(q_k, p_k, t), \quad (2.14)$$

de tal forma que exista uma nova função, $K(Q_k, P_k, t)$, que satisfaça as equações abaixo

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad (2.15)$$

e

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}. \quad (2.16)$$

Assim, a nova função deve satisfazer as equações de Hamilton nas novas coordenadas. Isso é possível se, e somente se, existir uma função Φ , tal que

$$K(Q_k, P_k, t) = H(q_k, p_k, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.17)$$

A função Φ é chamada de função geratriz, e ela funciona como uma ligação entre as coordenadas iniciais e as coordenadas finais. Existem vários tipos de funções geratrizes dependendo do problema em questão.

Portanto, para se transformar uma hamiltoniana em outra hamiltoniana, cujas equações de Hamilton tenham uma solução mais fácil, primeiro encontramos uma transformação inversível, depois a função geratriz, e por fim, a nova hamiltoniana. Usaremos esse procedimento no próximo capítulo para transformar a hamiltoniana do oscilador harmônico com massa dependente da posição na hamiltoniana do oscilador harmônico simples.

2.1.3 Parênteses de Poisson

Consideremos inicialmente a derivada total de uma função F que é função das coordenadas, momentos e do tempo

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.18)$$

usando as equações de Hamilton encontramos que

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.19)$$

o somatório desta equação é a definição do parêntese ou colchete de Poisson $\{F, H\}$ de F e H , com isso temos que

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \text{ com } \{F, H\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \quad (2.20)$$

Com isso, concluímos que para uma função F ser uma constante ou integral de movimento (sua derivada total em relação ao tempo ser zero) tem que seu parêntese de Poisson com a hamiltoniana ser nulo e ela não depender explicitamente do tempo, ou a soma dos dois ser zero. Para a hamiltoniana como sua derivada total em relação ao tempo é igual à derivada parcial, concluímos que se não houver dependência temporal explícita a hamiltoniana é uma constante de movimento.

Para finalizar vamos falar de um importante teorema: uma transformação de coordenadas no espaço de fase é canônica se e somente se [67]

$$\{Q_i, Q_j\}_{(q,p)} = 0, \quad (2.21)$$

$$\{P_i, P_j\}_{(q,p)} = 0, \quad (2.22)$$

e

$$\{Q_i, P_j\}_{(q,p)} = \delta_{ij}. \quad (2.23)$$

Usaremos este resultado no próximo capítulo para demonstrar que uma transformação de coordenadas é canônica.

2.1.4 Oscilador Harmônico Simples

Consideremos inicialmente a hamiltoniana do oscilador harmônico simples com massa e frequência unitárias [67] (para este trabalho podemos sem perda de generalidade, tomar valores unitários para estas grandezas).

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2} = T + V. \quad (2.24)$$

Das equações de Hamilton encontramos que

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} = P, \quad (2.25)$$

e

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -X, \quad (2.26)$$

para resolver estas equações acopladas o procedimento usual é: derivamos a primeira e depois usamos a segunda para eliminar dP/dt , esse procedimento produz

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -X, \quad (2.27)$$

cuja solução é

$$X(t) = A\cos(t) + B\sin(t), \quad (2.28)$$

onde A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais. Para encontrar $P(t)$ usamos a Eq. (2.25), de onde encontramos que

$$P(t) = -A\sin(t) + B\cos(t). \quad (2.29)$$

Considerando que em $t = 0$, X tem valor X_0 e P tem valor P_0 as Eqs. (2.28) e (2.29) tornam-se

$$X(t) = X_0\cos(t) + P_0\sin(t), \quad (2.30)$$

$$P(t) = -X_0\sin(t) + P_0\cos(t). \quad (2.31)$$

Existe outro método elegante para resolver estas equações [67]. Primeiro vamos definir funções A e A^* da seguinte forma

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP), \quad (2.32)$$

e

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP), \quad (2.33)$$

de tal forma que

$$H = AA^* = A^*A, \quad (2.34)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*), \quad (2.35)$$

e

$$P = \frac{-i}{\sqrt{2}}(A - A^*). \quad (2.36)$$

Usando a definição do parêntese de Poisson é fácil demonstrar que

$$i\{A, A^*\} = 1, \quad (2.37)$$

$$i\{H, A\} = -A, \quad (2.38)$$

e

$$i\{H, A^*\} = A^*. \quad (2.39)$$

Com as duas últimas equações podemos construir integrais de movimento como mostrado abaixo

$$Q = Ae^{it} = \frac{e^{it}}{\sqrt{2}}(X + iP), \quad (2.40)$$

e

$$Q^* = A^*e^{-it} = \frac{e^{-it}}{\sqrt{2}}(X - iP), \quad (2.41)$$

de tal forma que $H = QQ^* = Q^*Q$. A hamiltoniana neste caso é uma quantidade conservada, sendo a própria energia do sistema. Como Q e Q^* são complexo conjugado um do outro concluímos que

$$Q = \sqrt{E}e^{-i\phi}, \quad (2.42)$$

$$Q^* = \sqrt{E}e^{i\phi}, \quad (2.43)$$

sendo E a energia do sistema e ϕ uma fase, determinada por uma condição inicial. Agora usando as Eqs. (2.42) e (2.43) nas Eqs. (2.40) e (2.41) encontramos que

$$X(t) = \sqrt{2E}\cos(t + \phi), \quad (2.44)$$

e

$$P(t) = -\sqrt{2E}\sin(t + \phi). \quad (2.45)$$

Novamente encontramos a posição e o momento em termos de duas constantes. Na primeira situação em termos da posição e momento iniciais, agora em termos de uma fase e da energia do sistema. Utilizaremos estes resultados da álgebra de Poisson do oscilador harmônico simples quando formos trabalhar com o oscilador harmônico com

massa dependente da posição. Das Eqs. (2.44) e (2.45) vemos que as trajetórias no espaço de fase são circunferências concêntricas de raio $\sqrt{2E}$. Abaixo plotamos a posição e o momento do oscilador para $E = 1$. Plotamos também algumas trajetórias no espaço de fase para alguns valores da energia. Em todos os gráficos tomamos $\phi = 0$.

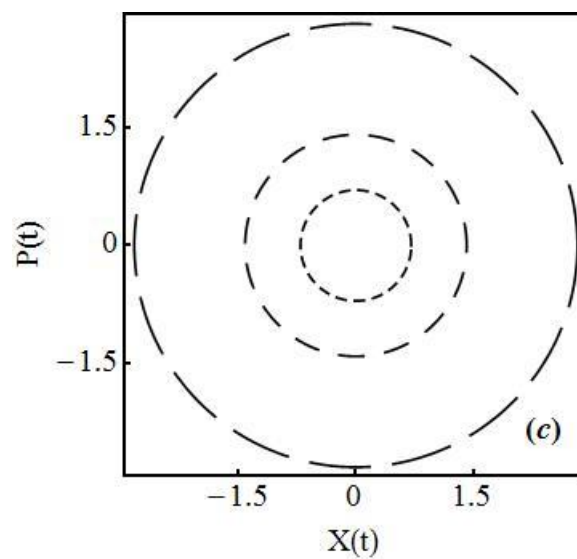
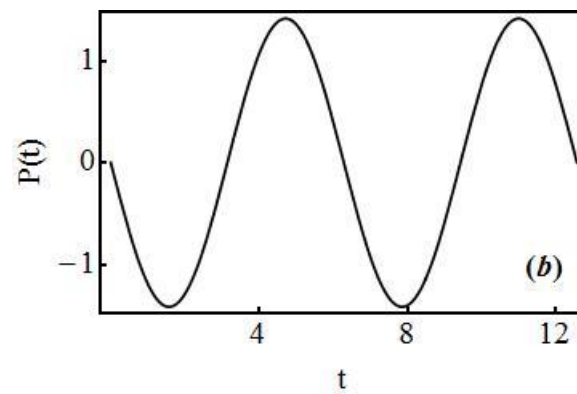
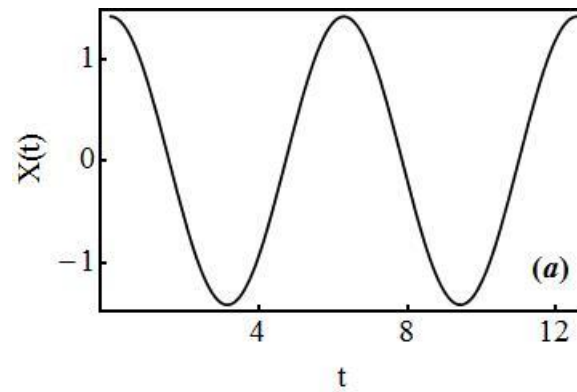


Figura 2.1: (a) Posição do oscilador harmônico simples em função do tempo para uma energia igual a 1, (b) Mesmo que (a), mas para o momento do oscilador, (c) Diagramas de fases do oscilador harmônico simples, $E = 0.5$ (- -), $E = 1.0$ (- -) e $E = 2.0$ (— —). Para todos os gráficos tomamos $\phi = 0$.

2.2 Tratamento Quântico

2.2.1 Autovalores e autoestados

Consideremos inicialmente a hamiltoniana do oscilador harmônico simples (como no caso clássico, podemos sem perda de generalidade considerar a frequência e a massa unitária)

$$H = T + V = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2}, \quad (2.46)$$

onde X e P são os operadores posição e momento, respectivamente, que satisfazem a seguinte relação de comutação [68]

$$[X, P] = i, \quad (2.47)$$

onde tomamos $\hbar = 1$ (neste trabalho utilizaremos este valor para \hbar). $T = \frac{P^2}{2}$ é a energia cinética e $V = \frac{X^2}{2}$ é o potencial.

Dada a hamiltoniana, Eq. (2.46), queremos encontrar os autovalores E_n e autoestados $|n\rangle$ da equação de Schrödinger independente do tempo

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.48)$$

Para encontrar os autovalores e autoestados é conveniente definirmos dois operadores não hermitianos

$$a = \frac{X+iP}{\sqrt{2}}, \quad (2.49)$$

e

$$a^+ = \frac{X-iP}{\sqrt{2}}, \quad (2.50)$$

de tal forma que

$$[a, a^+] = 1. \quad (2.51)$$

Agora usando as Eqs. (2.46), (2.49) e (2.50) é fácil mostrar que

$$H = a^+a + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2}, \quad (2.52)$$

onde $N = a^+a$ é o operador número. Considerando um autoestado de N com autovalor n , temos que

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.53)$$

Uma vez que H é uma função linear de N , ambos podem ser diagonalizados simultaneamente, com isso encontramos que

$$H |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.54)$$

logo os autovalores de energia são dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.55)$$

Agora usando a definição do operador número e a relação de comutação da Eq. (2.51) obtemos que

$$[N, a] = -a, \quad (2.56)$$

$$[N, a^+] = a^+, \quad (2.57)$$

como resultado destas duas últimas equações obtemos facilmente que

$$Na^+ |n\rangle = (n + 1)a^+ |n\rangle, \quad (2.58)$$

$$Na |n\rangle = (n - 1)a |n\rangle. \quad (2.59)$$

Estas relações implicam que $a^+ |n\rangle$ é autoestado de N com autovalor $(n + 1)$, da mesma forma $a |n\rangle$ é autoestado de N com autovalor $(n - 1)$. Assim concluímos que $a |n\rangle$ e $|n - 1\rangle$ são proporcionais, pois têm o mesmo autovalor, com isso podemos escrever que

$$a |n\rangle = c |n-1\rangle, \quad (2.60)$$

onde c é uma constante. Desta última equação concluímos que

$$\langle n|a^+a|n\rangle = |c|^2 \rightarrow |c|^2 = n, \quad (2.61)$$

escolhendo c real e positivo, temos que

$$a |n\rangle = \sqrt{(n-1)} |n-1\rangle. \quad (2.62)$$

Utilizando o mesmo procedimento é fácil mostrar que

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1\rangle. \quad (2.63)$$

Assim vemos que o operador a atuando no estado $|n\rangle$ leva no estado $|n-1\rangle$ e o operador a^+ leva no estado $|n+1\rangle$. Por esse motivo, estes operadores são chamados de operador de abaixamento e operador de levantamento, respectivamente.

Para encontrar os possíveis valores de n , primeiro vamos encontrar o módulo de $a |n\rangle$, que é dado por

$$\langle n|a^+a|n\rangle = n \geq 0, \quad (2.64)$$

portanto concluímos que n deve ser um real não negativo, pois o mesmo é o módulo do estado $a |n\rangle$. Da Eq. (2.62) concluímos que n deve ser um inteiro não negativo, pois caso contrário aplicações sucessivas do operador abaixamento conduzirá a valores negativos de n , o que não é permitido de acordo com a Eq. (2.64). Com isso finalmente obtemos os autovalores de energia, dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0,1,2,3 \dots \quad (2.65)$$

Da Eq. (2.62) encontramos que

$$a |0\rangle = 0, \quad (2.66)$$

ou seja, o estado fundamental é um autoestado do operador a com autovalor nulo. Usando a Eq. (2.63) podemos aplicar o operador a^+ sucessivamente no estado fundamental $|0\rangle$ para produzir o estado $|n\rangle$, desse procedimento encontramos que

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.67)$$

2.2.2 Função de onda

Para encontrar a função de onda do oscilador harmônico simples temos que resolver a equação de Schrödinger independente do tempo [68] como mostrada abaixo

$$H\phi_n(X) = E_n\phi_n(X) \rightarrow -\frac{d^2\phi_n(X)}{dX^2} + \frac{(X)^2}{2}\phi_n(X) = E_n\phi_n(X), \quad (2.68)$$

onde usamos o fato que na representação de posição o operador P atua como $-i\frac{d}{dX}$.

Existe, porém, um método mais simples para encontrar a função de onda do oscilador harmônico simples que resolver a equação de autovalor. Este método é ilustrado a seguir. Primeiro usamos a Eq. (2.66), para determinar a função de onda do estado fundamental como mostrado abaixo

$$\langle X'|a|0\rangle = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\langle X'|(X + iP)|0\rangle = 0 \rightarrow \left(X' + \frac{d}{dX'}\right)\phi_0(X') = 0, \quad (2.69)$$

onde $\phi_0(X') = \langle X'|0\rangle$ é a função de onda do estado fundamental. Resolvendo esta equação diferencial encontramos que

$$\phi_0(X') = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(\frac{-(X')^2}{2}\right). \quad (2.70)$$

Para encontrar a função de onda dos demais estados utilizamos a Eq. (2.67) de onde obtemos que

$$\phi_n(X) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(\frac{-(X)^2}{2}\right) H_n(X), \quad (2.71)$$

onde $H_n(X)$ são os polinômios de Hermite.

Abaixo plotamos a função de onda e a densidade de probabilidade $\rho_0(X) = |\phi_0(X)|^2$ para o estado fundamental.

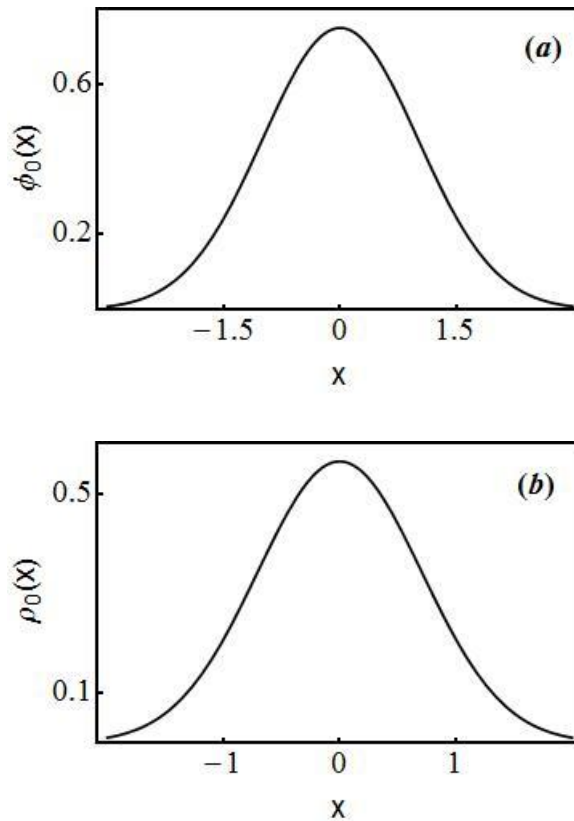


Figura 2.2: (a) Função de onda do estado fundamental $n = 0$, (b) Densidade de probabilidade do estado fundamental $n = 0$. Nos gráficos usamos a Eq. (2.71) e o fato que $\rho_0(X) = |\phi_0(X)|^2$.

2.2.3 Valores médios

Para encontrar os valores médios primeiro vamos usar as Eqs. (2.49) e (2.50) para encontrar que

$$X = \frac{(a^+ + a)}{\sqrt{2}}, \quad (2.72)$$

$$P = \frac{i(a^+ - a)}{\sqrt{2}}, \quad (2.73)$$

os operadores posição e momento em termos de a e a^+ . Destas duas últimas equações encontramos facilmente os valores médios de X e P que são dados por

$$\langle n|X|n\rangle = \frac{\langle n|a^+ + a|n\rangle}{\sqrt{2}} = 0, \quad (2.74)$$

e

$$\langle n|P|n\rangle = \frac{i\langle n|a^+ - a|n\rangle}{\sqrt{2}} = 0, \quad (2.75)$$

ou seja, os valores médios de X e P são nulos, o que é esperado, pois a e a^+ quando atuam em $|n\rangle$ diminuem ou aumentam o estado em uma unidade, e como os autoestados da hamiltoniana são ortogonais o produto escalar final é zero.

Agora usando as Eqs. (2.62), (2.63), (2.72) e (2.73) obtemos os valores médios abaixo

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.76)$$

e

$$\Delta P^2 = \langle P^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.77)$$

por fim das Eqs. (2.76) e (2.77) encontramos o produto de incerteza dado por

$$\Delta X \Delta P = \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.78)$$

que é sempre maior ou igual a $1/2$, ocorrendo o menor valor para o estado fundamental $n = 0$.

Capítulo 3

Oscilador Harmônico Com Massa Dependente da Posição: Tratamento Clássico

Neste capítulo estudaremos classicamente o oscilador harmônico com massa dependente da posição. Começaremos encontrando a hamiltoniana do sistema, em seguida, como para o oscilador harmônico simples, definiremos duas funções a e a^* em termos das quais poderemos escrever a hamiltoniana de uma forma mais simples. Logo após, utilizando a álgebra de Poisson, encontraremos a posição e o momento do oscilador e através de uma transformação canônica veremos como passar do oscilador com massa dependente da posição para o oscilador harmônico simples.

Para finalizar, estudaremos dois sistemas, a saber: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$ e $m_2(x) = m_0 \tanh^2(x/\lambda)$. Onde m_0 , a e λ são constantes positivas. Para os dois casos vemos que quando $\lambda \rightarrow 0$ obtemos o oscilador harmônico simples, por esse motivo, chamaremos estes osciladores harmônicos com massa dependente da posição de osciladores harmônicos deformados.

3.1 Considerações Gerais

Inicialmente consideremos a lagrangiana de um sistema com massa dependente da posição

$$L = T - V = \frac{m(x)\dot{x}^2}{2} - V(x). \quad (3.1)$$

Nesta expressão T é a energia cinética, $V(x)$ é a energia potencial, $m(x)$ é uma função qualquer da posição que representa a massa do sistema, x a posição do oscilador e \dot{x} a sua velocidade. Como a energia cinética não é função puramente quadrática da

velocidade, pois depende da posição, não podemos concluir que a energia é igual à hamiltoniana. Para encontrar a hamiltoniana do sistema precisamos usar a transformação de Legendre como foi exposto no capítulo anterior. Primeiro encontramos o momento canônico usando a Eq. (2.2)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(x)\dot{x}, \quad (3.2)$$

agora usando a Eq. (2.1) encontramos que

$$h = \dot{x}p - L = \frac{m(x)\dot{x}^2}{2} + V(x) = T + V. \quad (3.3)$$

Ou seja, mesmo as condições não sendo satisfeitas a hamiltoniana coincide com a energia do sistema. Como a mesma não apresenta dependência temporal explícita é conservada.

Agora para trabalhar com o oscilador harmônico com massa dependente da posição vamos usar a mesma álgebra de Poisson que foi utilizada no oscilador harmônico com massa constante. Primeiro vamos definir funções a e a^* da seguinte forma [31-32]

$$a = w(x) + \frac{ip}{\sqrt{2m(x)}}, \quad (3.4)$$

e

$$a^* = w(x) - \frac{ip}{\sqrt{2m(x)}}, \quad (3.5)$$

onde $w(x)$ é uma função da posição a ser determinada. Com isso temos que

$$h = aa^* = a^*a = \frac{p^2}{2m(x)} + [w(x)]^2, \quad (3.6)$$

logo concluímos que

$$V(x) = [w(x)]^2. \quad (3.7)$$

Agora vamos encontrar o parêntese de Poisson de a e a^* , da definição Eq. (2.20) temos que

$$\{a, a^*\} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a^*}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial a^*}{\partial x} = -i \sqrt{\frac{2}{m(x)}} \frac{dw}{dx}, \quad (3.8)$$

comparando este resultado com a Eq. (2.37) e supondo que a e a^* tenham o mesmo parêntese de Poisson que A e A^* do oscilador harmônico simples obtemos que

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{\frac{m(x)}{2}} \rightarrow w(x) = \left(\int \sqrt{\frac{m(t)}{2}} dt + w_0 \right), \quad (3.9)$$

onde w_0 é uma constante de integração. Assim usando a Eq. (3.7) concluimos que

$$V(x) = [w(x)]^2 = \left(\int \sqrt{\frac{m(t)}{2}} dt + w_0 \right)^2, \quad (3.10)$$

ou seja, dada a função massa temos a forma do potencial $V(x)$. Tomaremos o valor de w_0 adotando que $V(x=0) = 0$. Vemos desta última equação que quando a massa é constante recaímos no oscilador harmônico simples. Outra coisa interessante que obtemos usando as Eqs. (3.3) – (3.5) é que

$$i\{h, a\} = -a, \quad (3.11)$$

e

$$i\{h, a^*\} = a^*. \quad (3.12)$$

Destas duas últimas equações podemos encontrar integrais de movimento como o exposto abaixo

$$q = ae^{it} = \frac{e^{it}}{\sqrt{2}}(x + ip), \quad (3.13)$$

e

$$q^* = a^*e^{-it} = \frac{e^{-it}}{\sqrt{2}}(x - ip). \quad (3.14)$$

Destas equações concluimos imediatamente que $h = aa^* = E$, onde E é a energia do sistema. Como q e q^* são complexo conjugado um do outro podemos encontrar que

$$q = \sqrt{E}e^{-i\phi}, \quad (3.15)$$

e

$$q^* = \sqrt{E}e^{i\phi}, \quad (3.16)$$

onde ϕ é uma fase constante. Assim, encontramos um resultado análogo ao encontrado no oscilador harmônico simples. Agora usando as Eqs. (3.4), (3.5), (3.13) – (3.16) encontramos que

$$w(x) = \sqrt{E} \cos(t + \phi) \rightarrow x(t) = w^{-1}[\sqrt{E} \cos(t + \phi)], \quad (3.17)$$

e

$$p(t) = -\sqrt{2Em[x(t)]} \text{sen}(t + \phi). \quad (3.18)$$

Logo, através das Eqs. (3.17) e (3.18) podemos determinar a posição e o momento do oscilador harmônico com massa dependente da posição. As soluções encontradas podem ser harmônicas ou não, isso vai depender da forma da função massa.

Para finalizar esta seção consideremos a seguinte transformação de coordenadas no espaço de fase

$$X(x) = \sqrt{2}w(x), \quad (3.19)$$

$$P(x, p) = p/\sqrt{m(x)}. \quad (3.20)$$

Vemos facilmente que esta transformação é canônica, pois $\{x, p\} = 1$. Com esta transformação de coordenadas vemos que é possível transformar a hamiltoniana do oscilador com massa dependente da posição, Eq. (3.3), na hamiltoniana do oscilador com massa constante, Eq. (2.24). Vemos assim, uma estreita relação entre o sistema com massa constante e o sistema com massa dependente da posição. Observamos, também, que das Eqs. (3.19) e (3.20) obtemos a posição e o momento do oscilador com massa dependente da posição em função da solução do oscilador harmônico simples. Mesmo resultado que obtemos anteriormente usando as constantes de movimento q e q^* .

3.2 Exemplos de osciladores harmônicos deformados

Para ilustrar o formalismo desenvolvido anteriormente, nesta seção vamos analisar dois exemplos de osciladores harmônicos deformados. Para cada oscilador encontraremos a posição e o momento, bem como plotaremos estas grandezas e o diagrama de fase.

3.2.1 Exemplo 1: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$

Começaremos utilizando a Eq. (3.9) para determinar a função $w(x)$

$$w_1(x) = \frac{1}{\lambda a} \sqrt{\frac{m_0}{2}} \arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right), \quad (3.21)$$

agora utilizando as Eqs. (3.10), (3.17) e (3.18) encontramos que

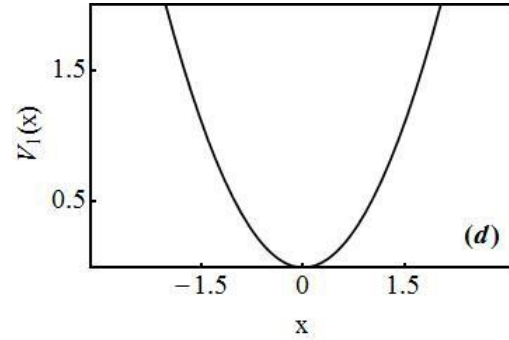
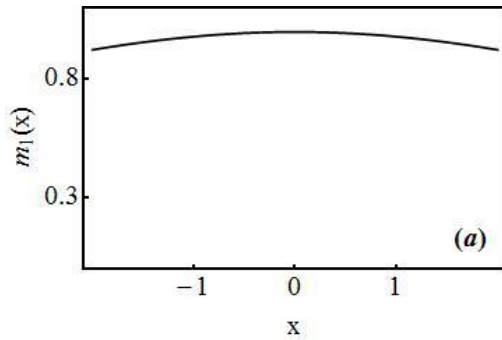
$$V_1(x) = \frac{m_0}{2(\lambda a)^2} \left[\arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \right]^2, \quad (3.22)$$

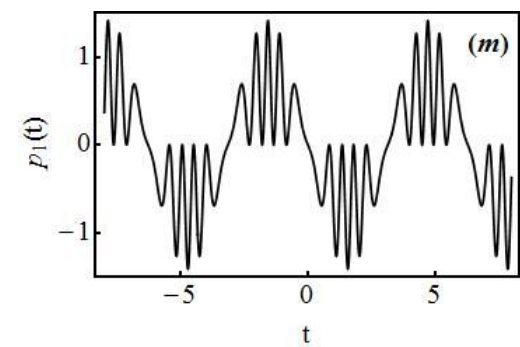
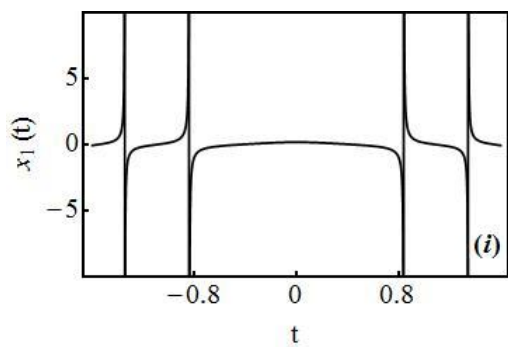
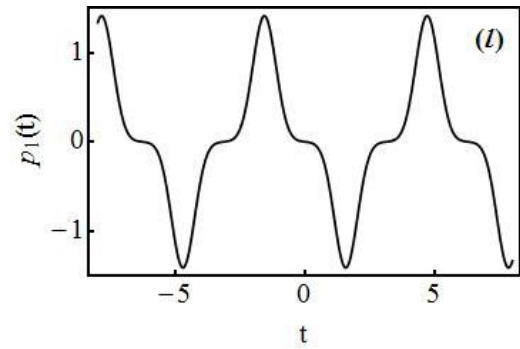
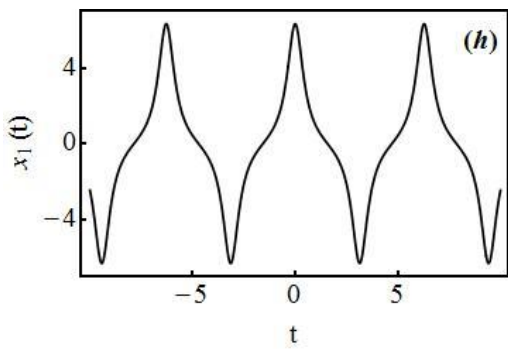
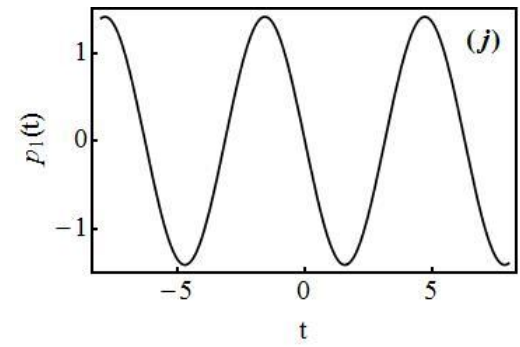
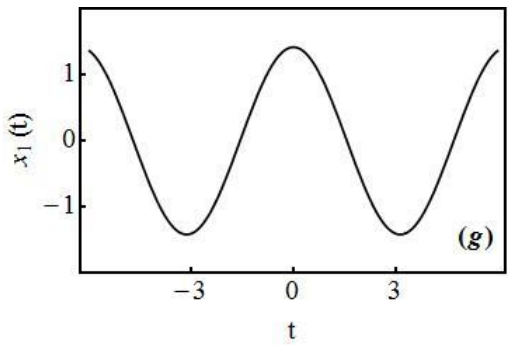
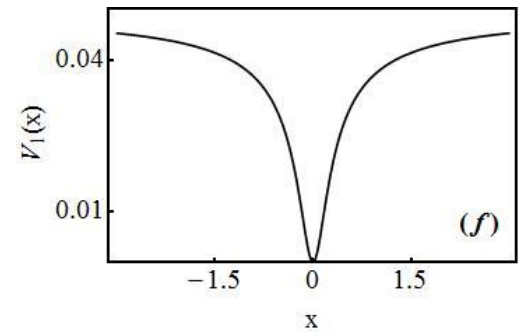
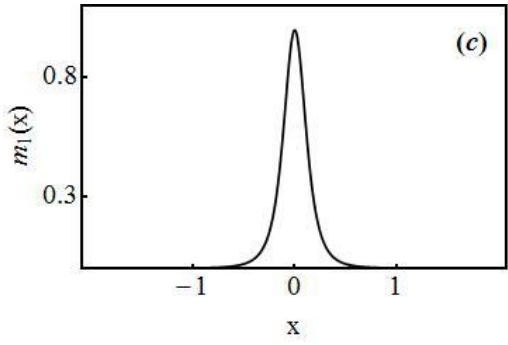
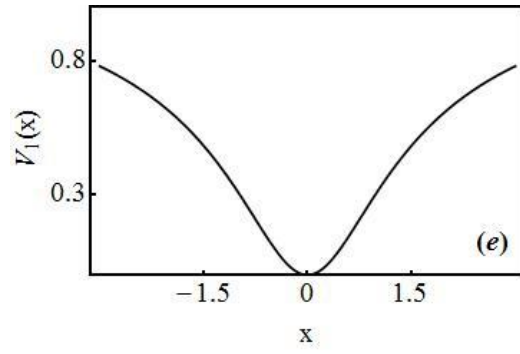
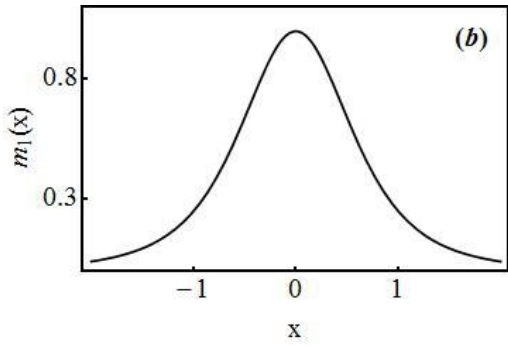
$$x_1(t) = \frac{a}{\lambda} \tan\left(\sqrt{\frac{2E}{m_0}} \lambda a \cos(t + \phi)\right), \quad (3.23)$$

e

$$p_1(t) = \frac{-\sqrt{2Em_0} \operatorname{sen}(t + \phi)}{a^2 \sec^2\left(\sqrt{\frac{2E}{m_0}} \lambda a \cos(t + \phi)\right)}. \quad (3.24)$$

Abaixo plotamos a função massa, o potencial, a posição e o diagrama de fase para alguns valores da energia e do parâmetro de deformação λ . Em todos os gráficos tomamos $\phi = 0$ e $m_0 = a = 1$.





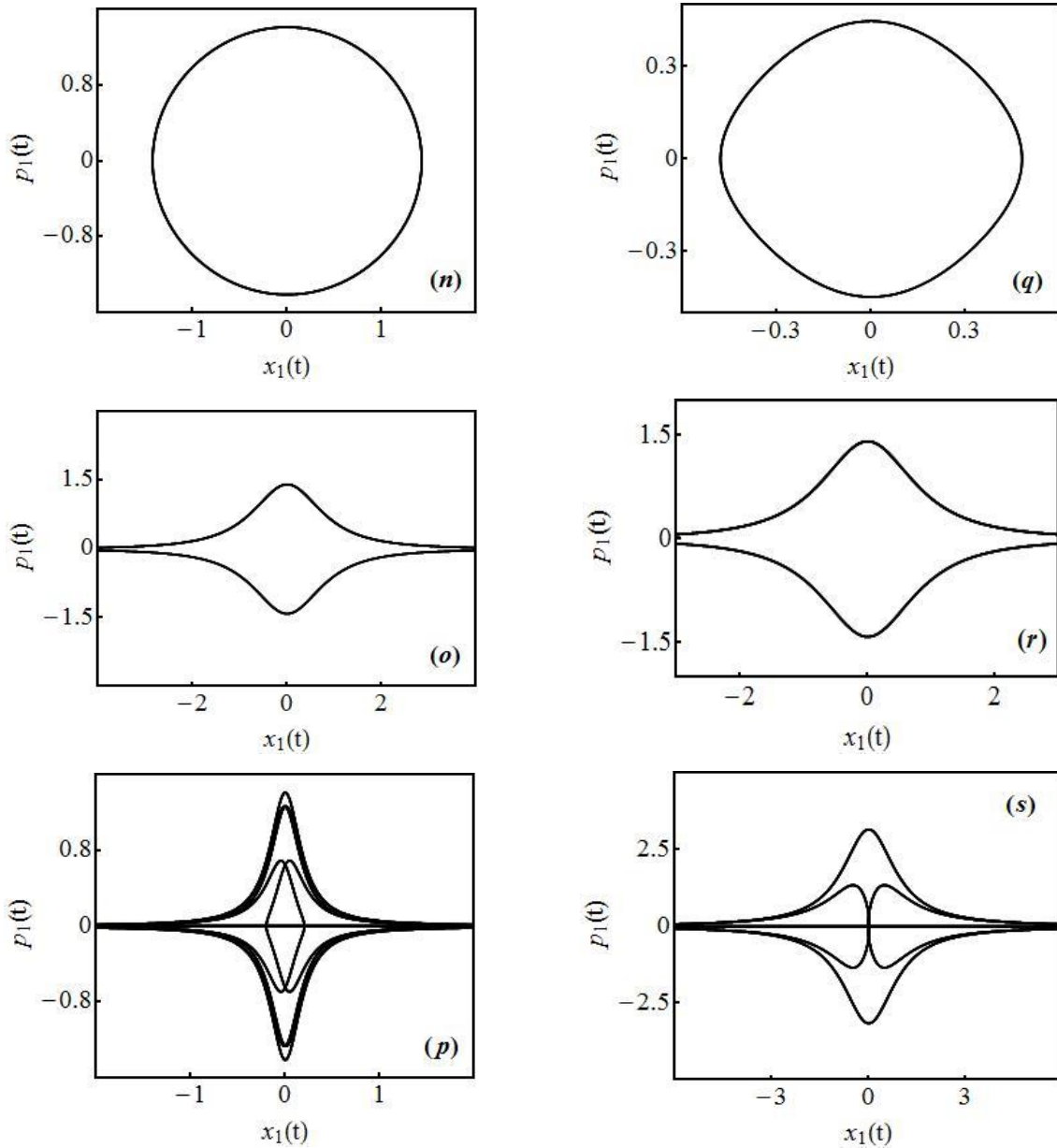


Figura 3.1: Em todos os gráficos temos que $\phi = 0$ e $m_0 = a = 1$ (a) Função massa $m_1(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0, 1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Potencial $V_1(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0, 1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. (g) Posição $x_1(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0, 1$. (h) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 1$. (i) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 5$. (j) Momento $p_1(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0, 1$. (l) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 1$. (m) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 5$. (n) Diagrama de fase para $E = 1$ e $\lambda = 0, 1$. (o) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 1$. (p) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 5$. (q) Diagrama de fase para $\lambda = 1$ e $E = 0, 1$. (r) Mesmo que (q), mas para $E = 1$. (s) Mesmo que (q), mas para $E = 5$.

3.2.2 Exemplo 2: $m_2(x) = m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

Como no exemplo anterior começaremos utilizando a Eq. (3.9) para determinar a função $w(x)$

$$w_2(x) = S(x)\lambda\sqrt{\frac{m_0}{2}}\ln\left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad (3.25)$$

agora utilizando as Eqs. (3.10), (3.17) e (3.18) encontramos que

$$V_2(x) = \frac{m_0\lambda^2}{2}\ln^2\left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad (3.26)$$

$$x_2(t) = \lambda \operatorname{arccosh}\left\{\exp\left[\frac{\sqrt{\frac{2E}{m_0}}|\cos(t+\phi)|}{\lambda}\right]\right\}, \quad (3.27)$$

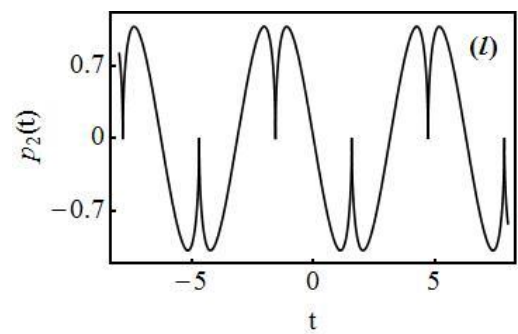
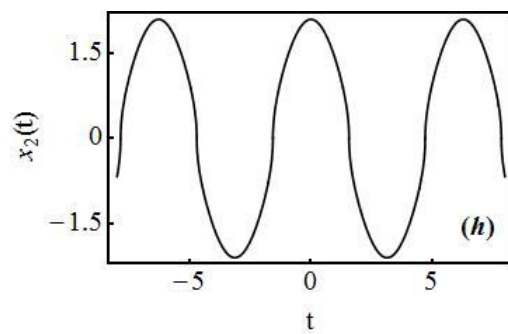
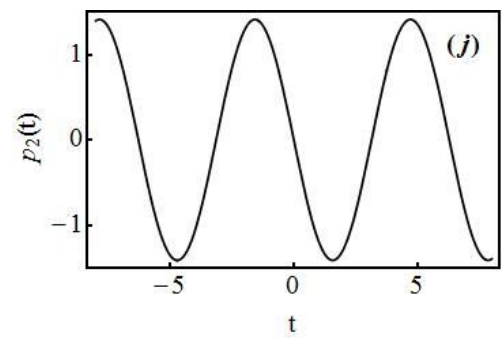
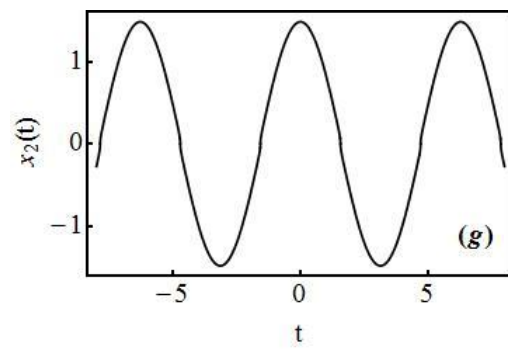
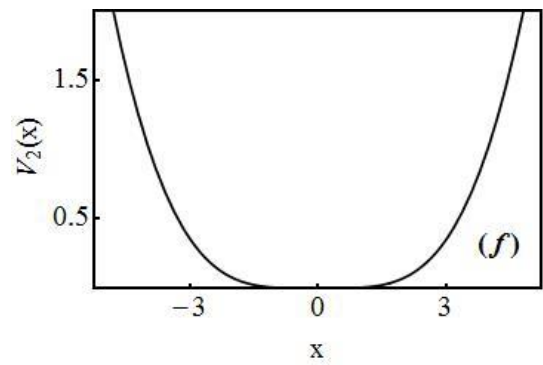
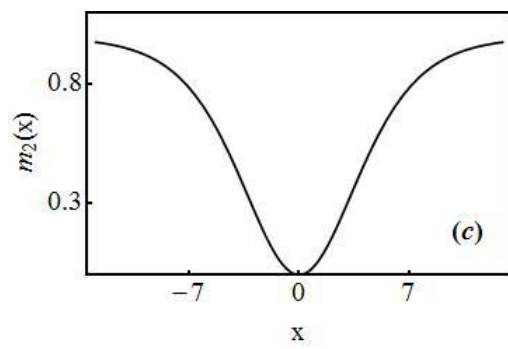
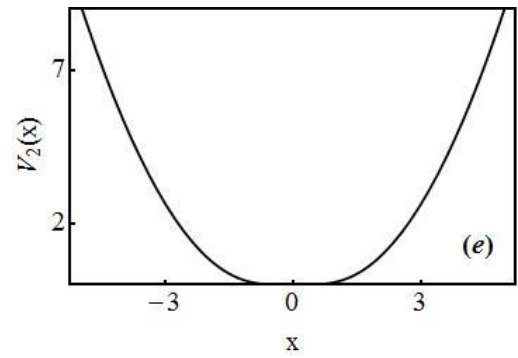
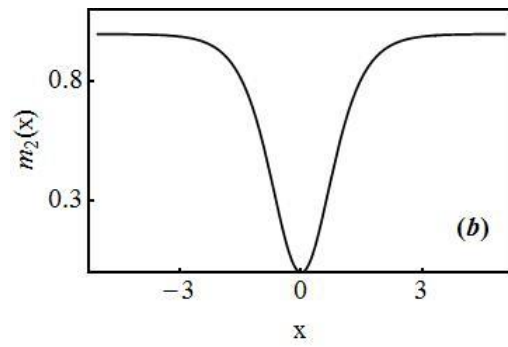
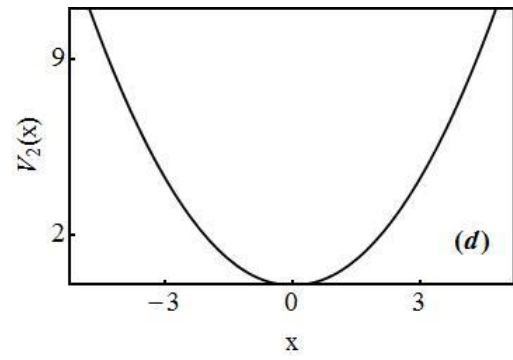
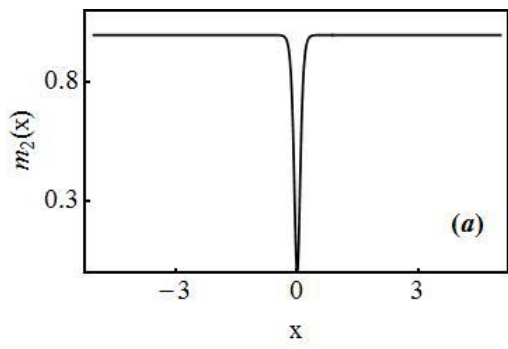
e

$$p_2(t) = -\sqrt{2m_0E}\operatorname{sen}(t + \phi)\left|\tanh\left\{\operatorname{arccosh}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\frac{2E}{m_0}}|\cos(t+\phi)|}{\lambda}\right)\right]\right\}\right|, \quad (3.28)$$

onde $S(x)$ é a função escada

$$S(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Abaixo plotamos a função massa, o potencial, a posição e o diagrama de fase para alguns valores da energia e do parâmetro de deformação λ . Em todos os gráficos tomamos $\phi = 0$ e $m_0 = 1$.



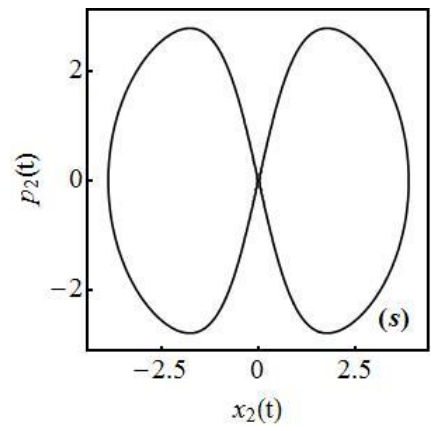
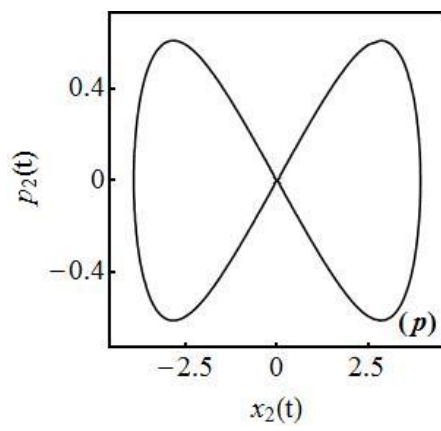
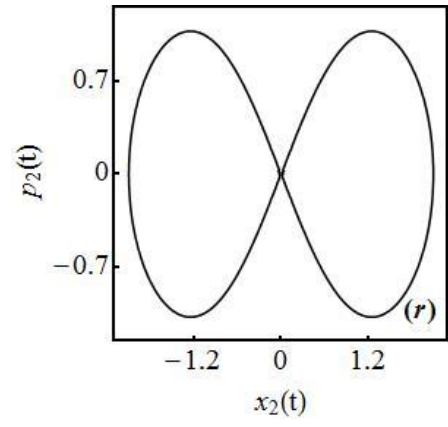
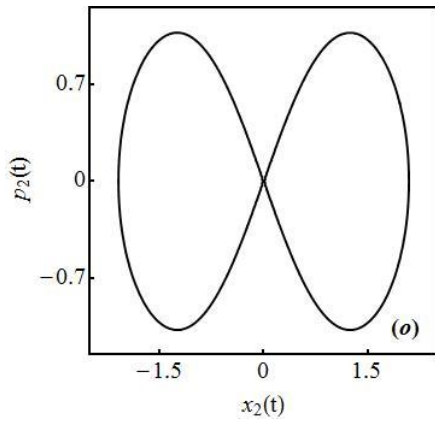
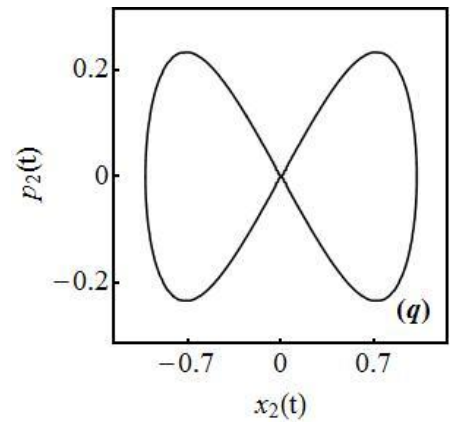
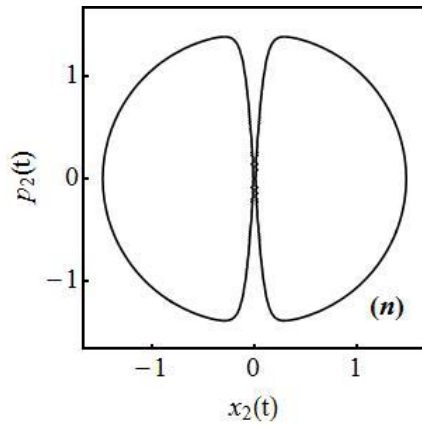
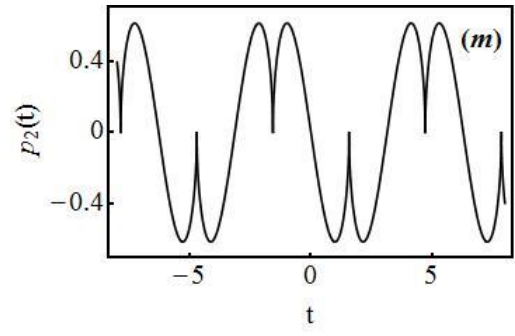
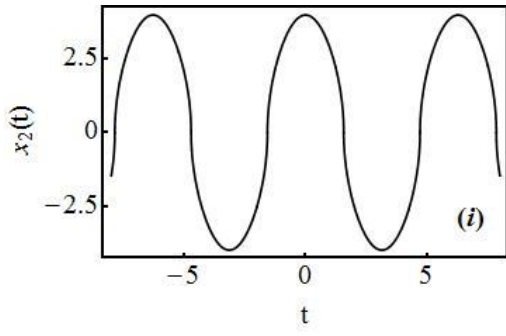


Figura 3.2: Em todos os gráficos temos que $\phi = 0$ e $m_0 = 1$ (a) Função massa $m_2(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Potencial $V_2(x)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. (g) Posição $x_2(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (h) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 1$. (i) Mesmo que (g), mas para $\lambda = 5$. (j) Momento $p_2(t)$ para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (l) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 1$. (m) Mesmo que (j), mas para $\lambda = 5$. (n) Diagrama de fase para $E = 1$ e $\lambda = 0,1$. (o) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 1$. (p) Mesmo que (n), mas para $\lambda = 5$. (q) Diagrama de fase para $\lambda = 1$ e $E = 0,1$. (r) Mesmo que (q), mas para $E = 1$. (s) Mesmo que (q), mas para $E = 5$.

3.2.3 Discussão

Para os dois casos estudados no limite que $\lambda \rightarrow 0$, a posição, o momento e o potencial tendem a posição, ao momento e ao potencial do oscilador harmônico simples, Eqs. (2.44), (2.45) e (2.24), respectivamente.

Analisando os gráficos vemos que para o menor valor de λ (deformação quase desprezível) todos os gráficos têm um comportamento muito semelhante ao oscilador harmônico simples. À medida que aumentamos λ , os gráficos passam a ter um comportamento muito diferente do oscilador harmônico simples, ou seja, a deformação destrói completamente o caráter harmônico dos sistemas. Concluimos, assim, que para pequenos valores de λ poderíamos utilizar a teoria das pequenas vibrações para analisar os sistemas, porém, à medida que esta grandeza aumenta de valor a teoria não mais se aplica e teríamos que usar o formalismo desenvolvido neste capítulo, uma vez que o mesmo se aplica para qualquer valor de λ .

Analisando os diagramas de fase das Figs. 3.1 (n) e 3.2 (n) vemos que para pequenos valores da energia o comportamento é quase harmônico. À medida que aumentamos o seu valor o comportamento harmônico é destruído. Isso se deve ao fato que para pequenos valores da energia temos, também, pequenos valores da posição e do momento, e analisando a função massa concluimos que para pequenos valores da posição a massa é aproximadamente constante, ou seja, temos aproximadamente um oscilador harmônico. Quando aumentamos o valor da energia, as variáveis canônicas passam a ter

valores maiores e, conseqüentemente, a função massa passar a variar e oscilador deixa de ser harmônico.

Capítulo 4

Oscilador Harmônico Com Massa Dependente da Posição: Tratamento Quântico

Neste capítulo estudaremos quanticamente o oscilador harmônico com massa dependente da posição. Inicialmente, escreveremos a hamiltoniana apresentada no capítulo 1 em função de operadores A_a^- e A_a^+ . Em seguida, suporemos que estes operadores satisfaçam a mesma relação de comutação que os operadores abaixamento e levantamento do oscilador harmônico simples. Com isso, e analisando que condições devem ser satisfeitas para que os osciladores clássico e quântico tenham o mesmo potencial obtemos que $a = b = -\frac{1}{4}$. Com estes valores de a e b encontramos a forma da hamiltoniana do oscilador harmônico com massa dependente da posição.

Logo após, transformaremos a equação de Schrödinger do oscilador harmônico com massa dependente da posição na equação de Schrödinger do oscilador harmônico simples, e, assim, obteremos a função de onda do oscilador harmônico com massa dependente da posição em função da função de onda do oscilador harmônico simples.

Depois destas considerações gerais analisaremos os dois sistemas de massa que foram considerados classicamente. Para cada sistema encontraremos a função de onda e a densidade de probabilidade.

4.1 Considerações gerais

Começaremos trabalhando com a hamiltoniana apresentada no capítulo 1, Eq. (1.5), que é dada por

$$H_a(x) = T_a(x) + V_a(x) = \frac{1}{2} m^a(x) p m^{2b}(x) p m^a(x) + V_a(x), \quad (4.1)$$

onde $a + b = -\frac{1}{2}$.

Como no caso do oscilador harmônico simples vamos supor que a hamiltoniana possa ser escrita em função de operadores de levantamento e abaixamento, da seguinte forma

$$H_a(x) = A_a^+ A_a^- + \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

onde,

$$A_a^- = \frac{i}{\sqrt{2}} m^b(x) p m^a(x) + w_a(x), \quad (4.3)$$

e

$$A_a^+ = \frac{-i}{\sqrt{2}} m^a(x) p m^b(x) + w_a(x), \quad (4.4)$$

sendo $w_a(x)$ uma função do operador posição, chamada de super potencial [31-32].

Usando a relação de comutação entre x e p , Eq. (2.47), encontramos que

$$A_a^- = \frac{ip}{\sqrt{2m(x)}} [1 + a \ln(m)] + w_a(x), \quad (4.5)$$

$$A_a^+ = \frac{-ip}{\sqrt{2m(x)}} [1 + b \ln(m)] + w_a(x), \quad (4.6)$$

Para encontrar a relação entre o potencial e o super potencial usamos as Eqs. (4.2), (4.5) e (4.6), de onde obtemos que

$$V_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{(4a+1)}{2} w_a(x) \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} [\ln m(x)] - \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} w_a(x) \right\} + w_a^2(x) + \frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

onde utilizamos o fato que na representação de posição o operador p atua como $-i \frac{d}{dx}$.

Agora encontramos o comutador de A_a^- e A_a^+ que é dado por

$$[A_a^-, A_a^+] = \frac{(4a+1)}{2} \frac{1}{\sqrt{2m(x)}} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2m(x)}} \frac{d}{dx} [\ln m(x)] \right\} + \sqrt{\frac{2}{m(x)}} \frac{dw_a(x)}{dx}. \quad (4.8)$$

Supondo que estes operadores satisfaçam a mesma relação de comutação que os operadores de abaixamento e levantamento do oscilador harmônico simples, obtemos a relação entre o super potencial e a massa, dada por

$$w_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int \sqrt{m(x)} dx - \frac{(4a+1)}{4} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} [\ln m(x)] + w_0 \right\}, \quad (4.9)$$

sendo w_0 uma constante de integração. Usando este resultado na Eq. (4.7) encontramos que

$$V_a(x) = \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{m(x)} dx + V_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(4a+1)}{4} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} [\ln m(x)] - \left[\frac{(4a+1)}{4} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} [\ln m(x)] \right]^2 \right\}, \quad (4.10)$$

onde V_0 é uma constante, determinada pelo nível zero de potencial. Determinaremos V_0 adotando que $V(x = 0) = 0$.

Analisando esta última equação, vemos que o potencial é diferente do potencial clássico, Eq. (3.10). Esta diferença deve-se aos dois últimos termos, porém se $a = -\frac{1}{4}$ os dois potenciais ficam iguais e dados por

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{m(x)} dx + V_0 \right)^2. \quad (4.11)$$

Usando as Eqs. (4.1), (4.11) e o fato que $a = b = -\frac{1}{4}$ obtemos a hamiltoniana do oscilador harmônico quântico com massa dependente da posição dada por

$$H(x, p) = \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} p \frac{1}{\sqrt{m(x)}} p \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} + \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{m(x)} dx + V_0 \right)^2. \quad (4.12)$$

Das Eqs. (4.3) e (4.4) encontramos os operadores de abaixamento e levantamento dados por

$$A^- = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} p \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \sqrt{m(x)} dx + w_0 \right), \quad (4.13)$$

e,

$$A^+ = \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} p \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \sqrt{m(x)} dx + w_0 \right). \quad (4.14)$$

Devido às propriedades algébricas de A^- e A^+ encontramos as seguintes relações

$$A^- \psi_0(x) = 0, \quad (4.15)$$

$$A^- \psi_n(x) = \sqrt{n-1} \psi_{n-1}(x), \quad (4.16)$$

$$A^+ \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x), \quad (4.17)$$

e

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^+)^n A^- \psi_0(x), \quad (4.18)$$

ou seja, como no oscilador harmônico simples a função de onda do estado fundamental é obtida pela aplicação do operador de abaixamento, e os demais estados são encontrados por aplicações sucessivas do operador levantamento no estado fundamental. Também em virtude das propriedades algébricas destes operadores obtemos que o oscilador harmônico com massa dependente da posição tem a mesma energia do oscilador harmônico simples, portanto

$$H(x, p) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad \rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.19)$$

Para finalizar esta seção consideremos a seguinte transformação canônica de ponto [31-32]

$$X = X(x) = \int \sqrt{m(x)} dx, \quad (4.20)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt[4]{m(x)} \phi_n[X(x)], \quad (4.21)$$

utilizando esta transformação de coordenadas na equação de autovalor e usando a hamiltoniana da Eq. (4.12) encontramos que

$$-\frac{d^2 \phi_n(X)}{dX^2} + \frac{(X+V_0)^2}{2} \phi_n(X) = E_n \phi_n(X), \quad (4.22)$$

ou seja, a equação de autovalor do oscilador harmônico simples, Eq. (2.68), quando $V_0 = 0$. Logo usando as Eqs. (2.71), (4.20) e (4.21) obtemos a função de onda do oscilador harmônico com massa dependente da posição em função da função de onda do oscilador harmônico simples

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{m(x)} \exp \left[-\frac{[(\int \sqrt{m(x)} dx) + V_0]^2}{2} \right] H_n \left[\int \sqrt{m(x)} dx + V_0 \right]. \quad (4.23)$$

Assim como no caso clássico é possível transformar do oscilador harmônico com massa dependente da posição no oscilador harmônico simples.

Usando as Eqs. (4.20) e (4.21) podemos demonstrar que a função de onda $\psi_n(x)$ é ortogonal e normalizada. Primeiro da Eq. (4.20) vemos que

$$dx = \frac{1}{\sqrt{m(x)}} dX, \quad (4.24)$$

agora usando este resultado na Eq. (4.21) obtemos que

$$\int |\psi_n(x)|^2 dx = \int \sqrt{m(x)} |\phi_n(X)|^2 \frac{1}{\sqrt{m(x)}} dX = \int |\phi_n(X)|^2 dX, \quad (4.25)$$

ou seja, a função de onda $\psi_n(x)$ é ortogonal e normaliza, como a função de onda $\phi_n(X)$ do oscilador harmônico simples.

4.2 Exemplos de osciladores harmônicos deformados

Para ilustrar o formalismo desenvolvido anteriormente, nesta seção vamos analisar os dois exemplos de osciladores harmônicos deformados que foram considerados classicamente. Para cada oscilador encontraremos a função de onda e a densidade de probabilidade.

4.2.1 Exemplo 1: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$

Primeiro encontramos o potencial utilizando a Eq. (4.11)

$$V_1(x) = \frac{m_0}{2(\lambda a)^2} \left[\arctan \left(\frac{\lambda x}{a} \right) \right]^2, \quad (4.26)$$

que é igual ao potencial clássico. Com o potencial encontramos a hamiltoniana usando a Eq. (4.12) dada por

$$H_1(x, p) = \frac{\sqrt{[(\lambda x)^2 + a^2]}}{\sqrt[4]{m_0}} p \frac{[(\lambda x)^2 + a^2]}{\sqrt{m_0}} p \frac{\sqrt{[(\lambda x)^2 + a^2]}}{\sqrt[4]{m_0}} + \frac{m_0}{2(\lambda a)^2} \left[\arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \right]^2 \quad (4.27)$$

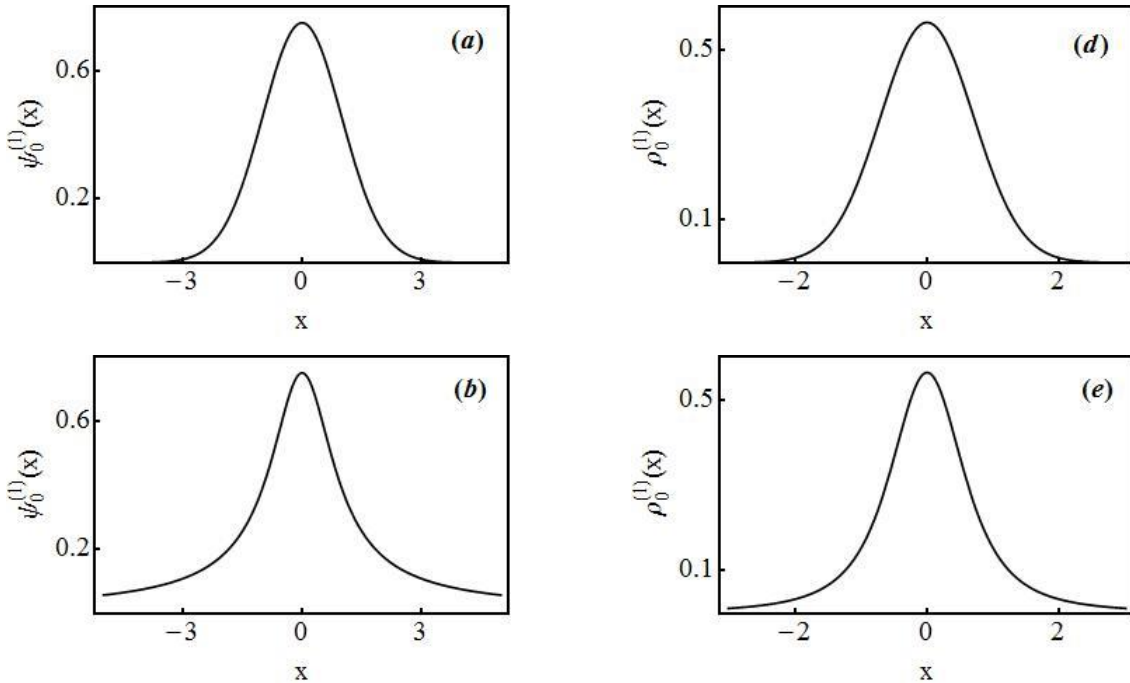
e através da Eq. (4.23) obtemos a função de onda

$$\psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\sqrt[4]{m_0}}{\sqrt{[(\lambda x)^2 + a^2]}} \exp\left\{-\frac{m_0}{2(\lambda a)^2} \left[\arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \right]^2\right\} H_n\left[\frac{\sqrt{m_0}}{(\lambda a)} \arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\right], \quad (4.28)$$

e com a função de onda encontramos a densidade probabilidade

$$\rho_n^{(1)}(x) = \left| \psi_n^{(1)}(x) \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \frac{\sqrt{m_0}}{[(\lambda x)^2 + a^2]} \exp\left\{-\frac{m_0}{(\lambda a)^2} \left[\arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \right]^2\right\} H_n^2\left[\frac{\sqrt{m_0}}{(\lambda a)} \arctan\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\right]. \quad (4.29)$$

Abaixo plotamos a função de onda e a densidade de probabilidade para o estado fundamental. Nos gráficos escolhemos $m_0 = a = 1$ e diferentes valores do parâmetro de deformação λ .



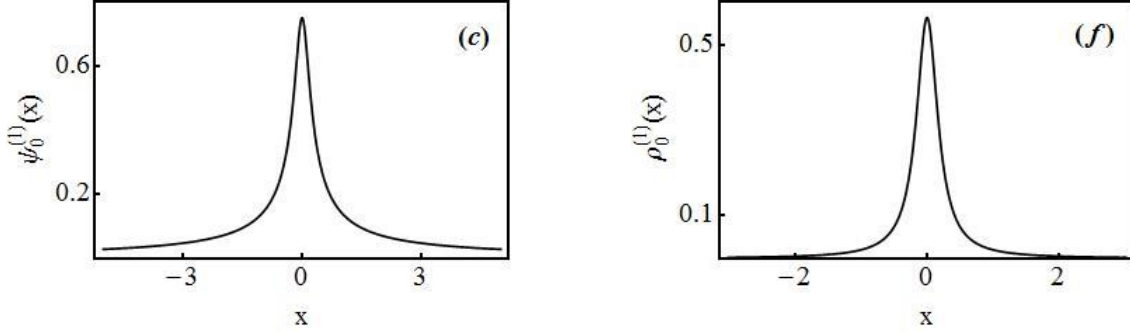


Figura 4.1: Em todos os gráficos tomamos $m_0 = a = 1$ (a) Função de onda $\psi_0^{(1)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d) Densidade de probabilidade $\rho_0^{(1)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. Para os gráficos utilizamos as eqs. (4.28) e (4.29).

4.2.2 Exemplo 2: $m_2(x) = m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

Como no caso anterior primeiro encontramos o potencial utilizando a Eq. (4.11)

$$V_2(x) = \frac{m_0 \lambda^2}{2} \ln^2 \left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right], \quad (4.30)$$

com o potencial obtemos a hamiltoniana usando a Eq. (4.23)

$$H_2(x, p) = \frac{1}{\sqrt[4]{m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}} p \frac{1}{\sqrt[4]{m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}} p \frac{1}{\sqrt[4]{m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}} + \frac{m_0 \lambda^2}{2} \ln^2 \left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right], \quad (4.31)$$

e através da Eq. (4.23) obtemos a função de onda

$$\psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{m_0 \tanh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)} \exp \left[\frac{-m_0 \lambda^2}{2} \ln^2 \left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \right] H_n \left[\sqrt{m_0} \lambda \ln \left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \right], \quad (4.32)$$

e com a função de onda encontramos a densidade probabilidade

$$\rho_n^{(2)}(x) = \left| \psi_n^{(2)}(x) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{n n!}} \sqrt{m_0 \tanh^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)} \exp \left[-m_0 \lambda^2 \ln^2 \left[\cosh \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right] \right] H_n^2 \left[\sqrt{m_0} \lambda \ln \left[\cosh \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right] \right]. \quad (4.33)$$

Como no exemplo 1, abaixo plotamos a função de onda e a densidade de probabilidade para o estado fundamental. Nos gráficos escolhemos $m_0 = 1$ e diferentes valores do parâmetro de deformação λ .

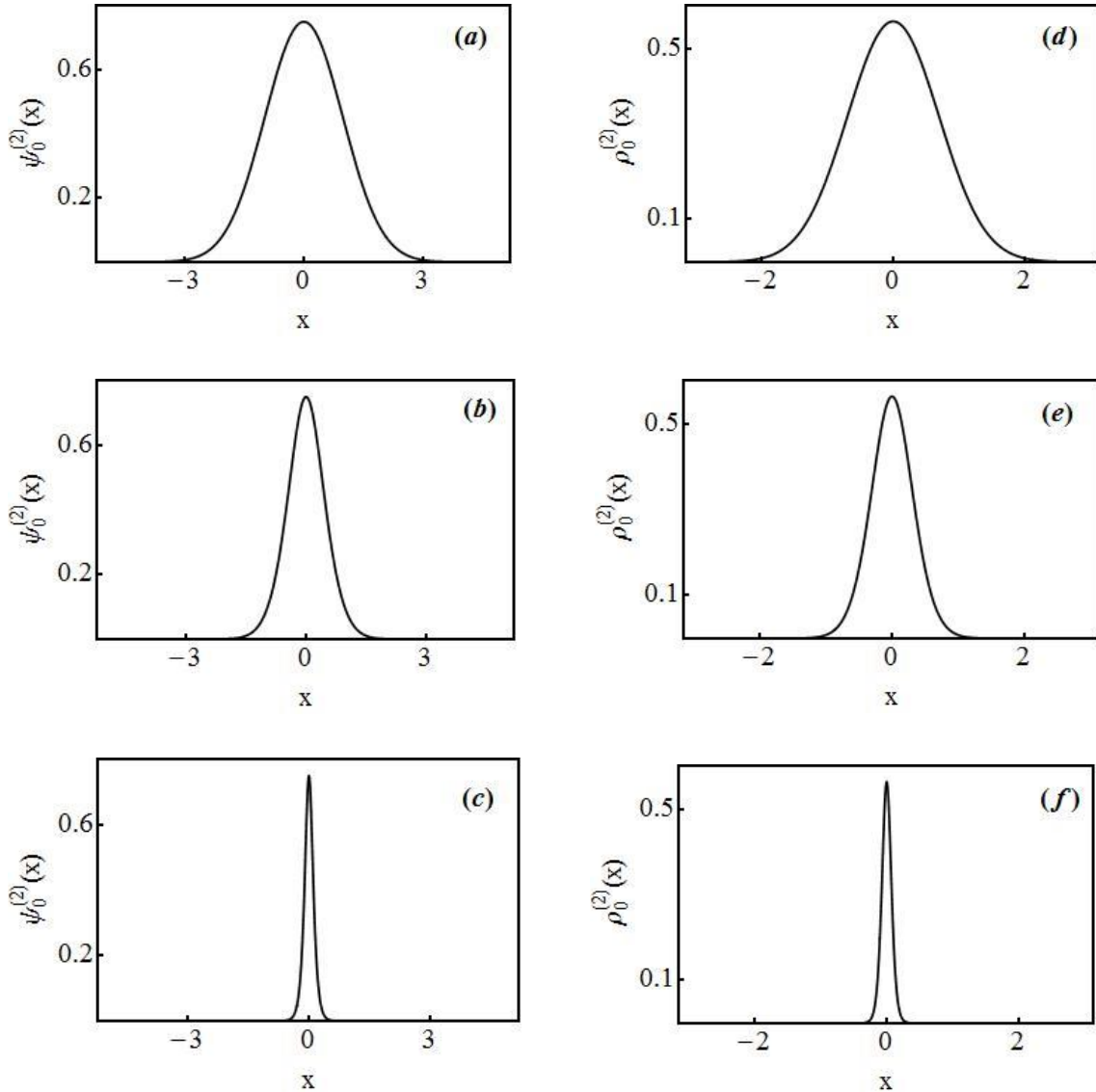


Figura 4.2: Em todos os gráficos tomamos $m_0 = 1$ (a) Função de onda $\psi_0^{(2)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (b) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 1$. (c) Mesmo que (a), mas para $\lambda = 5$. (d)

Densidade de probabilidade $\rho_0^{(2)}(x)$ para $\lambda = 0.1$. (e) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 1$. (f) Mesmo que (d), mas para $\lambda = 5$. Para os gráficos utilizamos as eqs. (4.32) e (4.33).

4.2.3 Discussão

Para os dois sistemas analisados, no limite que $\lambda \rightarrow 0$ a função de onda tende a função de onda do oscilador harmônico simples, Eq. (2.71). Resultado análogo ao encontrado no estudo clássico.

Analisando os gráficos vemos que para o menor valor de λ (deformação quase desprezível) todos os gráficos têm um comportamento muito semelhante ao oscilador harmônico simples. Ou seja, a função de onda e a densidade de probabilidade são praticamente iguais à função de onda e a densidade de probabilidade do oscilador harmônico simples. Logo para pequenos valores de λ podemos analisar os exemplos utilizando a teoria da perturbação independente do tempo. Contudo, à medida que a deformação aumenta os gráficos passam a ter um comportamento diferente do oscilador harmônico simples, e conseqüentemente, a teoria da perturbação independente do tempo não se aplica mais. Assim, teríamos que usar o formalismo desenvolvido neste capítulo, uma vez que o mesmo se aplica para qualquer valor de λ .

Capítulo 5

Informação de Fisher e entropia de Shannon

Neste capítulo estudaremos a informação de Fisher e a entropia de Shannon. Inicialmente apresentaremos a teoria relacionada com estas duas grandezas, as definições e as principais relações associadas a informação de Fisher e a entropia de Shannon. Em seguida, estudaremos o comportamento destas grandezas para os dois osciladores harmônicos deformados estudamos anteriormente e, veremos também como a informação de Fisher e a entropia de Shannon estão relacionadas com a incerteza na posição, incerteza no momento e o produto de incerteza. Verificaremos também a compressão na posição e no momento.

5.1 Informação de Fisher

A informação de Fisher de um observável x unidimensional com densidade de probabilidade $P_n(x)$ é definida por [69]:

$$F_{n x} = \int P_n(x) \left[\frac{d \ln P_n(x)}{dx} \right]^2 dx > 0. \quad (5.1)$$

Considerando um sistema quântico descrito pela função de onda $\psi_n(x)$. A densidade de probabilidade é $P_n(x) = |\psi_n(x, t)|^2$, logo a informação de Fisher na representação de posição pode ser escrita como

$$F_{n x} = 4 \int \psi_n^{*'}(x) \psi_n'(x) dx + \int \left[\frac{\psi_n'(x)}{\psi_n(x)} - \frac{\psi_n^{*'}(x)}{\psi_n^*(x)} \right]^2 |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (5.2)$$

onde $\psi_n'(x) = \frac{d\psi_n(x)}{dx}$.

A correspondente informação de Fisher na representação de momento pode ser escrita como

$$F_{np} = 4 \int \phi_n^{*'}(p) \phi_n'(p) dp + \int \left[\frac{\phi_n'(p)}{\phi_n(p)} - \frac{\phi_n^{*'}(p)}{\phi_n^*(p)} \right]^2 |\phi_n(p)|^2 dp, \quad (5.3)$$

sendo $\phi_n(p)$ dado por

$$\phi_n(p) = \int \frac{dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \psi_n(x), \quad (5.4)$$

ou seja, a função de onda na representação de momento e $\phi_n'(p) = \frac{d\phi_n(p)}{dp}$.

Utilizaremos as Eqs. (5.2) e (5.3) para estudar a informação de Fisher, no estado fundamental, para os dois osciladores deformados discutidos anteriormente.

De acordo com as inequações de Cramer-Rao [70-71] as relações entre incerteza na posição, incerteza no momento e informação de Fisher são dadas por

$$F_x \geq \frac{1}{\Delta x^2}, F_p \geq \frac{1}{\Delta p^2}. \quad (5.5)$$

5.2 Entropia de Shannon

As entropias de Shannon na representação de posição e momento são definidas, respectivamente, por [48]:

$$S_x = - \int dx |\psi_n(x)|^2 \ln |\psi_n(x)|^2, \quad (5.6)$$

$$S_p = - \int dp |\phi_n(p)|^2 \ln |\phi_n(p)|^2. \quad (5.7)$$

Beckner, Bialynicki-Birula e Mycielski [43] encontraram a relação de incerteza entrópica para a entropia de Shannon dada por

$$S = S_x + S_p \geq (1 + \ln \pi). \quad (5.8)$$

5.3 Resultados e discussões

Nesta seção analisaremos a informação de Fisher e a entropia de Shannon para os dois sistemas com massa dependente da posição estudados em capítulos anteriores, a saber: $m_1(x) = m_0/[(\lambda x)^2 + a^2]^2$ e $m_2(x) = m_0 \tanh^2(x/\lambda)$. Sendo m_0 , a e λ são

constantes positivas. O estudo será em função do parâmetro de deformação λ e para o estado fundamental.

Antes de analisarmos a informação de Fisher e a entropia de Shannon, plotamos as funções massas para diferentes valores do parâmetro de deformação λ . Analisando as figuras 5.1 (a) e (b) observamos que as massas dos sistemas 1 e 2 apresentam comportamentos diferentes, para o sistema 1 a medida que λ aumenta a massa diminui a largura e para o sistema 2 ocorre o inverso, a largura aumenta à medida que λ aumenta. Plotamos também as funções de onda para diferentes valores de λ . Observamos das figuras 5.1 (c) e (d) que apresentam comportamentos diferentes, para o sistema 1, a largura à meia altura aumenta com o aumento de λ , e para o sistema 2 ocorre o contrário, a medida que λ aumenta a largura à meia altura diminui.

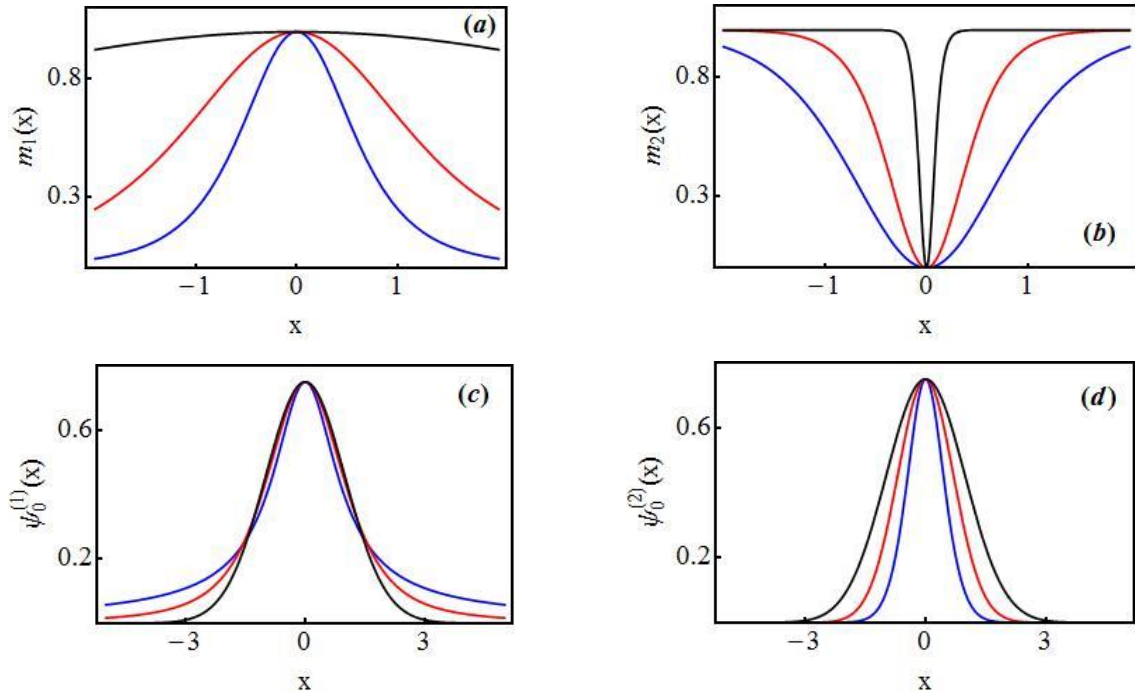


Figura 5.1: Nos quatro gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Função $m_1(x)$, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (b) Função $m_2(x)$, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (c) Função de onda do estado fundamental para o sistema 1, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$. (d) Função de onda do estado fundamental para o sistema 2, preto $\lambda = 0.1$, vermelho $\lambda = 0.5$ e azul $\lambda = 1$.

Abaixo plotamos, para o estado fundamental, a informação de Fisher na representação de posição (F_x), a informação de Fisher na representação de momento (F_p), o produto de informação de Fisher ($F_x F_p$), a incerteza na posição (Δx), a incerteza no momento (Δp) e o produto de incerteza ($\Delta x \Delta p$) para o sistema 1. Nos gráficos utilizamos a função de onda dada pela Eq. (4.28) e as Eqs. (5.2) e (5.3) para a informação de Fisher.

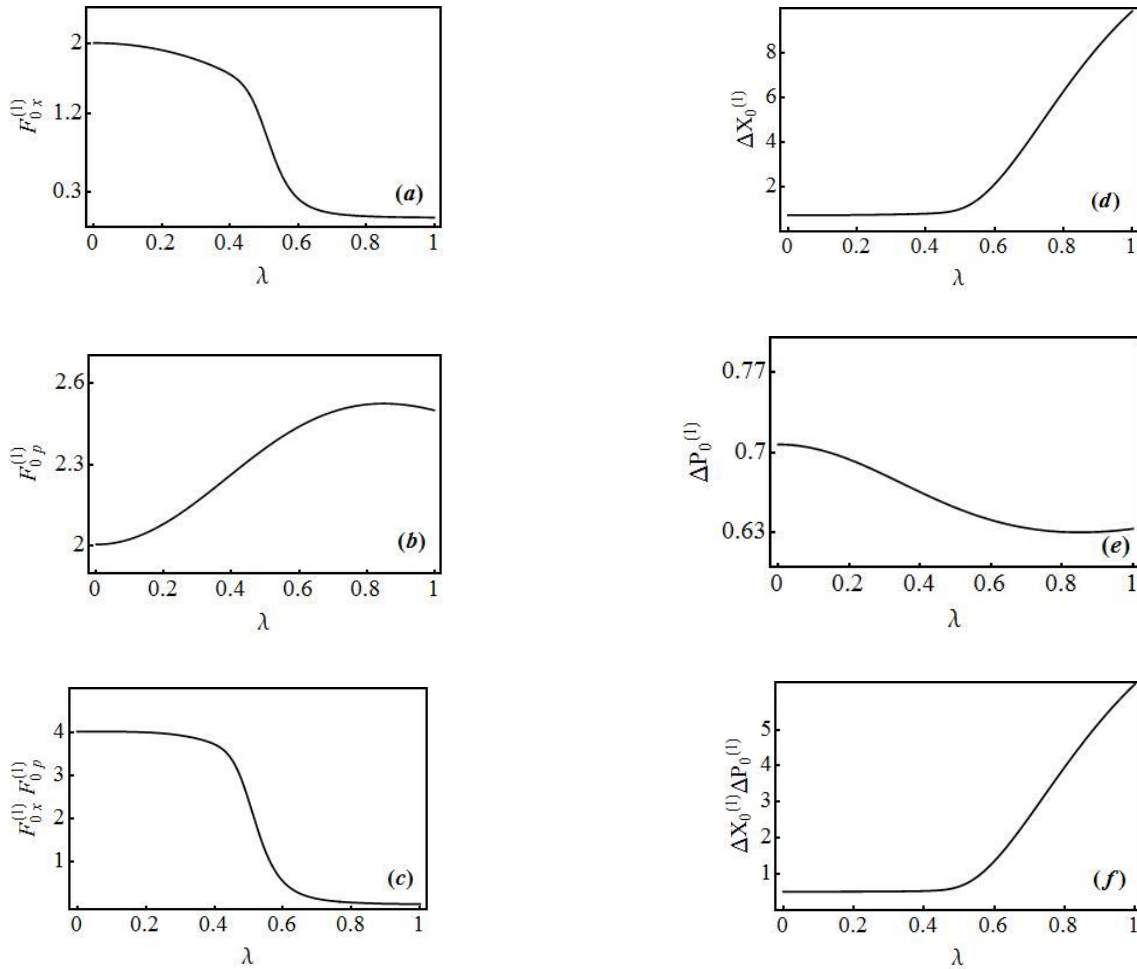
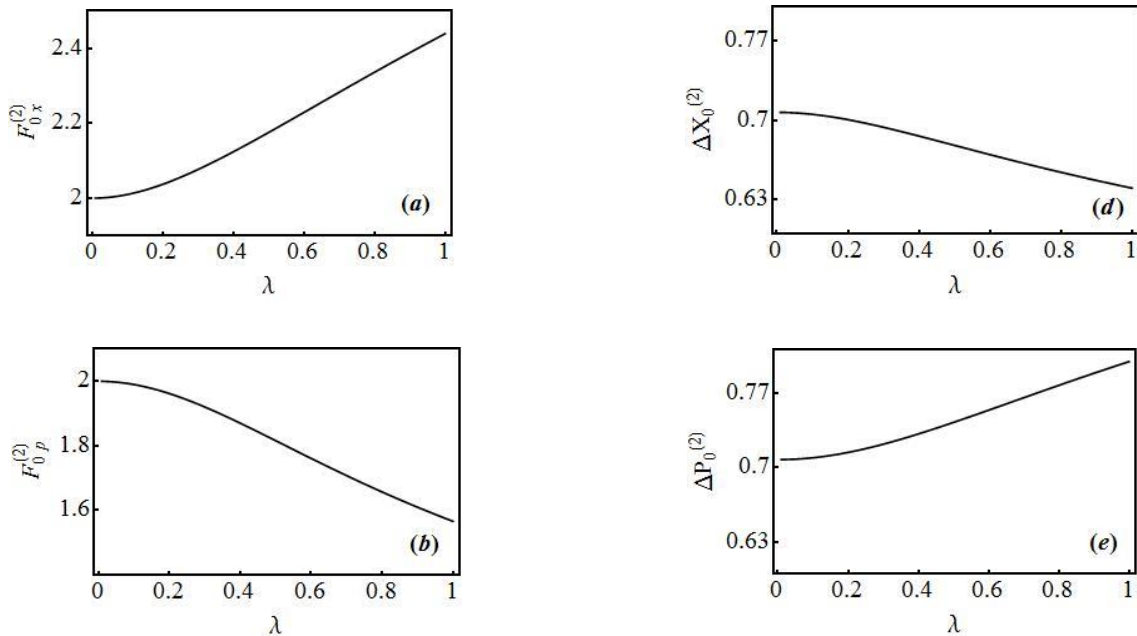


Figura 5.2: Nos seis gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Informação de Fisher na representação de posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 1. (b) Mesmo que (a), mas para a informação de Fisher na representação de momento. (c) Mesmo que (a), mas para o produto de Fisher. (d) Incerteza na posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 1. (e) Mesmo que (d), mas para a incerteza no momento. (f) Mesmo que (d), mas para o produto de incerteza.

Pelos gráficos da Fig. 5.2 observamos que a informação de Fisher na posição decresce (Fig. 5.2 a), enquanto a informação de Fisher no momento cresce (Fig. 5.2 b) e o produto de Fisher decresce (Fig. 5.2 c). Podemos entender este comportamento analisando a incerteza na posição (Fig. 5.2 d), incerteza no momento (Fig. 5.2 e) e o produto de incerteza (Fig. 5.2 f), para o sistema 1, as seguintes relações são verificadas: $F_x = \frac{1}{\Delta x^2}$, $F_p = \frac{1}{\Delta p^2}$ e $F_x F_p = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta p^2}$, ou seja, as relações de Cramer-Rao [43] para a igualdade. Assim, a informação de Fisher na posição decresce, enquanto a incerteza na posição cresce, a informação de Fisher do momento cresce, enquanto a incerteza no momento decresce, o produto de Fisher decresce, enquanto o produto de incerteza cresce.

Analisando a função de onda para o sistema 1 (Fig. 5.1 c), observamos que a medida que λ aumenta a largura à meia altura aumenta, logo Δx deve aumentar também, conforme a Fig. 5.2 e. Para $\lambda = 0$, $\Delta x = \Delta p = 0.707$, $\Delta x \Delta p = 0.50$, valores iguais ao oscilador harmônico simples, como deveria ser. Contudo para $\lambda > 0$, $\Delta x > 0.707$ e $\Delta p < 0.707$, mostrando o fenômeno de compressão no momento p .

Como para o sistema 1, abaixo plotamos, para o estado fundamental, a informação de Fisher na representação de posição (F_x), a informação de Fisher na representação de momento (F_p), o produto de informação de Fisher ($F_x F_p$), a incerteza na posição (Δx), a incerteza no momento (Δp) e o produto de incerteza ($\Delta x \Delta p$). Nos gráficos utilizamos a função de onda dada pela Eq. (4.32) e as Eqs. (5.2) e (5.3) para a informação de Fisher.



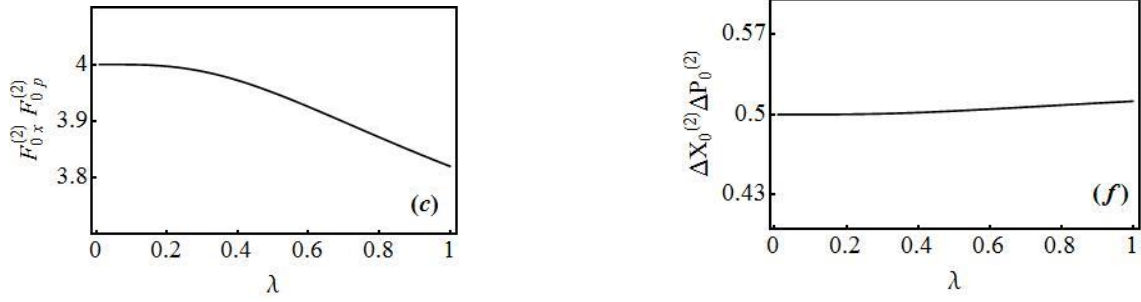


Figura 5.3: Nos seis gráficos tomamos $m_0 = 1$. (a) Informação de Fisher na representação de posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 2. (b) Mesmo que (a), mas para a informação de Fisher na representação de momento. (c) Mesmo que (a), mas para o produto de Fisher. (d) Incerteza na posição (estado fundamental) em função do parâmetro de deformação λ para o sistema 2. (e) Mesmo que (d), mas para a incerteza no momento. (f) Mesmo que (d), mas para o produto de incerteza.

Pelos gráficos da Fig. 5.3 observamos que a informação de Fisher na posição cresce (Fig. 5.3 a), enquanto a informação de Fisher no momento decresce (Fig. 5.3 b) e o produto de Fisher decresce (Fig. 5.3 c). Como para o sistema 1, podemos entender em comportamento analisando a incerteza na posição (Fig. 5.3 d), incerteza no momento (Fig. 5.3 e) e o produto de incerteza (Fig. 5.3 f), para o sistema 2, as seguintes relações são verificadas: $F_x = \frac{1}{\Delta x^2}$, $F_p = \frac{1}{\Delta p^2}$ e $F_x F_p = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta p^2}$, ou seja, as relações de Cramer-Rao [43] para a igualdade. Assim, a informação de Fisher na posição cresce, enquanto a incerteza na posição decresce, a informação de Fisher do momento decresce, enquanto a incerteza no momento cresce, o produto de Fisher decresce, enquanto o produto de incerteza cresce.

Analisando a função de onda para o sistema 2 (Fig. 5.1 d), observamos que a medida que λ aumenta a largura à meia altura diminui, logo Δx deve diminuir também, conforme a Fig. 5.3 e. Para $\lambda = 0$ $\Delta x = \Delta p = 0.707$, $\Delta x \Delta p = 0.50$, valores iguais ao oscilador harmônico simples, como para o sistema 1. Contudo para $\lambda > 0$, $\Delta x < 0.707$ e $\Delta p > 0.707$, mostrando o fenômeno de compressão na posição x .

Para finalizarmos, abaixo plotamos a entropia de Shannon, para o estado fundamental, para os sistemas 1 e 2. Nos gráficos usamos as Eqs. (5.6) - (5.8).

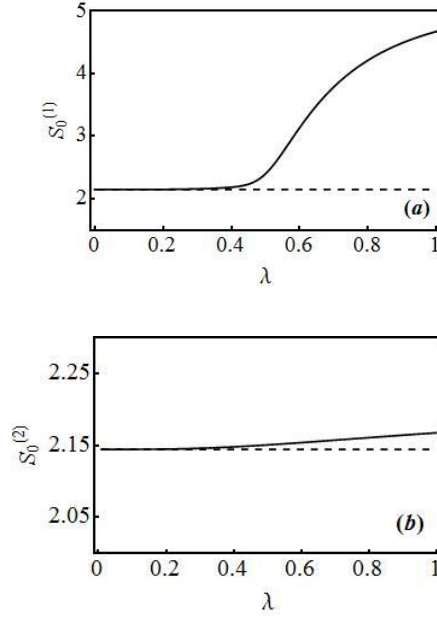


Figura 5.4: Nos dois gráficos tomamos $a = m_0 = 1$. (a) Entropia de Shannon do estado fundamental para o sistema 1. (b) Entropia de Shannon do estado fundamental para o sistema 2. Linha tracejada corresponde a $1 + \ln \pi$.

Verificamos que para os dois sistemas a relação de incerteza entrópica é satisfeita, ou seja, a entropia de Shannon é maior ou igual a $1 + \ln \pi$. Para pequenos valores de λ a igualdade é satisfeita (entropia do oscilador harmônico simples $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 1 + \ln \pi$), porém, a medida que λ aumenta a entropia dos dois sistemas aumenta também.

De acordo com as Refs. [42, 72] a entropia de Shannon e a informação de Fisher são relacionados por:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2\pi e} \exp(S), \quad (5.9)$$

usando as Eqs. (5.5) encontramos que

$$S \geq 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p), \quad (5.10)$$

para o estado fundamental, os dois sistemas satisfazem a igualdade de Cramer-Rao, como discutido anteriormente, logo

$$S_0 = 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_0 x F_0 p). \quad (5.11)$$

Mostrando que quando a informação de Fisher diminua a entropia de Shannon aumenta e vice – versa.

Conclusões

Neste trabalho estudamos dois sistemas com massa dependente da posição. Inicialmente fizemos um estudo clássico, obtemos a posição e o momento para os dois sistemas. Verificamos que para pequenos valores de λ , os sistemas se comportam como osciladores harmônicos simples, contudo à medida que o parâmetro de deformação aumenta o caráter de oscilador harmônico simples é completamente destruído.

Em seguida, analisamos os dois sistemas quanticamente. Devido a massa depender da posição o operador energia cinética padrão $[P^2/2m(x)]$ não é hermitiano. Para encontrar o operador energia cinética hermitiano usamos a analogia entre o oscilador harmônico simples e o oscilador com massa dependente da posição, e o fato que os sistemas clássico e quântico tenham o mesmo potencial, com isso, obtemos que $a = b = -1/4$. Depois que encontramos o operador energia cinética, analisamos os dois sistemas com massa dependente da posição do caso clássico e encontramos as respectivas funções de onda. Um resultado muito importante é que todos os sistemas estudados são isoenergéticos, ou seja, têm a mesma energia.

Com as funções de onda dos dois sistemas com massa dependente da posição, estudamos a incerteza na posição, incerteza no momento, produto de incerteza, informação de Fisher e entropia de Shannon, para o estado fundamental, para os dois sistemas. Verificamos que os dois sistemas têm comportamentos diferentes.

Para o sistema 1 a informação de Fisher na posição decresce, para o sistema 2 cresce, para a informação de Fisher no momento ocorre o oposto, cresce para o sistema 1 e decresce para o sistema 2. Como vimos este comportamento pode ser explicado pela inequação de Cramer – Rao, que para os dois sistemas satisfaz a igualdade, ou seja, $F_x = \frac{1}{\Delta x^2}$, $F_p = \frac{1}{\Delta p^2}$. Observamos também efeito de compressão para o momento no sistema 1 e para a posição no sistema 2.

Verificamos que para os dois sistemas a relação de incerteza entrópica é satisfeita, ou seja, a entropia de Shannon é maior ou igual a $1 + \ln\pi$. Outra coisa interessante que encontramos foi que para o estado fundamental $S_0 = 1 + \ln 2\pi -$

$\frac{1}{2}\ln(F_{0x}F_{0p})$. Mostrando que quando a informação de Fisher aumenta a entropia de Shannon diminui, e vice versa.

Para finalizar, gostaríamos de apresentar algumas perspectivas deste trabalho. Poderemos acrescentar um termo anarmônico ao sistema (proporcional a $1/x^2$) e estudar a influência deste termo nas grandezas entropia e informação. Poderemos também acrescentar um campo elétrico para verificar se os sistemas continuam isoespectrais, enfim, são muitas as extensões deste trabalho.



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa



Fisher information and Shannon entropy of position-dependent mass oscillators



D.X. Macedo^{a,b,*}, I. Guedes^b

^a Departamento de Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Crateús, 63700-000, Crateús, CE, Brazil

^b Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Campus do PICI, Caixa Postal 6030, 60455-760, Fortaleza, CE, Brazil

HIGHLIGHTS

- Wave functions for position-dependent mass oscillators.
- Fisher information and Shannon entropy for the oscillators.
- Observation of squeezing effect in either position or momentum.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 September 2014

Received in revised form 6 March 2015

Available online 24 April 2015

Keywords:

Fisher information

Shannon entropy

Position-dependent mass

ABSTRACT

We calculate the Fisher information and the Shannon entropy for three position-dependent mass oscillators. These systems can be seen as deformed harmonic oscillators in the sense that when the deformation parameter (λ) goes to zero, they are identical to the constant mass harmonic oscillator. For two out of the three oscillators we observe that as λ increases the position Fisher information (F_x) increases while the momentum Fisher information (F_p) decreases. On the other hand, the Shannon entropy always increases for the three systems with increasing λ . Discussion about squeezing effect in either position or momentum due to the λ variation and a relation between the product of Fisher information and the Shannon entropy are also presented.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Fisher information is a quality of an efficient measurement procedure used for estimating ultimate quantum limits. It also measures the system entropy (degree of disorder) and determines the uncertainty relations of constant mass quantum system. For instance, in 2005, Romera, Sánchez-Moreno and Dehesa [1] calculated the Fisher information of single-particle systems with a central potential. In 2006, these authors derived the uncertainty relation for Fisher information of D -dimensional single-particle systems with central potentials [2]. In 2007, Patil and Sen [3] found the uncertainty relations for modified isotropic harmonic oscillator and Coulomb potentials. In 2010, Omiste, Yánéz and Dehesa [4] studied the information properties of the half-line Coulomb potential. In 2011, Bouvrie, Angulo and Dehesa [5] calculated the entropy and complexity properties of Dirac-delta-like potentials. Other interesting results can be found in Refs. [6–13].

The entropy introduced by Claude E. Shannon in 1948 [14], was firstly employed to study fundamental limits on signal processing operations. Later on, it was used in many areas of Physics [15]. For instance, in Quantum Mechanics it was

* Corresponding author at: Departamento de Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Crateús, 63700-000, Crateús, CE, Brazil. Tel.: +55 8596662875.

E-mail address: diegoximenes@fisica.ufc.br (D.X. Macedo).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.04.003>

0378-4371/© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

Referências

1. R. Balian, D. Bessis e G. A. Mezincescu, *Phys. Rev. B* **51**, 17624 (1995).
2. G. T. Einevoll e P. C. Hemmer, *J. Phys. C* **21**, L1193 (1988).
3. O. von Roos, *Phys. Rev B* **27**, 7547 (1983).
4. G. Bastard, *Phys. Rev. B* **24**, 5693 (1981).
5. F. A. de Saavedra, J. Boronat, A. Polls e A. Fabrocini, *Phys. Rev. B* **50**, 4248 (1994).
6. L. Serra e E. Lipparini, *Europhys. Lett.* **40**, 667 (1997).
7. R. A. Morrow e K. R. Brownstein, *Phys. Rev. B* **30**, 678 (1984).
8. K. C. Yung e J. H. Yee, *Phys. Rev. A* **50**, 104 (1994).
9. J. M. L. Leblond, *Phys. Rev. A* **52**, 1845 (1995).
10. R. N. C. Filho, M. P. Almeida, G. A. Farias e J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. A* **84**, 050102 (2011).
11. S. H. Mazharimousavi, *Phys. Rev. A* **85**, 034102 (2012).
12. S. H. Mazharimousavi, *Phys. Rev. A* **89**, 049904 (2014).
13. A. Ganguly, S. Kuru, J. Negro e L. M. Nieto, *Phys. Lett. A* **360**, 228 (2006).
14. J. F. Carinena, M. F. Ranada e M. Santander, *Ann. Phys.* **322**, 434 (2007).
15. J. R. F. Lima, M. Vieira, C. Furtado e F. Moraes, *J. Math. Phys.* **53**, 072101 (2012).
16. L. Dekar, L. Chetouani e T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **39**, 2551 (1998).
17. B. Gönül e M. Hoçak, *J. Math. Phys.* **47**, 102101 (2006).
18. C. Quesne, *J. Math. Phys.* **49**, 022106 (2008).
19. B. Midya, B. Roy e R. Roychoudhury, *J. Math. Phys.* **51**, 022109 (2010).
20. M. Çapak e B. Gönül, *J. Math. Phys.* **52**, 122103 (2011).
21. G. Lévai e O. Özer, *J. Math. Phys.* **51**, 092103 (2010).
22. A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. A* **66**, 042116 (2002).
23. B. Midya e B. Roy, *Phys. Lett. A* **373**, 4117 (2009).
24. C. S. Jia, L. Z. Yi e Y. Sun, *J. Math. Chem.* **43**, 435 (2008).
25. M. Aktas e R. Sever, *J. Mah. Chem.* **43**, 92 (2008).
26. C. Tezcan e R. Sever, *J. Math. Chem.* **42**, 387 (2007).
27. O. Mustafa e S. H. Mazharimousavi, *Phys. Lett. A.* **358**, 259 (2006).
28. L. Jiang, L. Z. Yi e C. S. Jia, *Phys. Lett. A* **345**, 279 (2005).

29. J. Yu e S. H. Dong, Phys. Lett. A **325**, 194 (2004).
30. S. K. Moayedi, A. F. Jalbout e M. Solimannejad, J. Mol. Struc. **663**, 15 (2003).
31. S. C. y Cruz, J. Negro e L. M. Nieto, Phys. Lett. A **369**, 400 (2007).
32. S. C. y Cruz, J. Negro e L. M. Nieto, J. Phys.: Condensed Matter Series **128**, 012053 (2008).
33. A. R. Plastino, A. Rigo, M. Casas, F. Garcias e A. Plastino, Phys. Rev. A **60**, 4318 (1999).
34. J. F. Carinena, M. F. Ranada e M. Santander, Rep. Math. Phys. **54**, 285 (2004).
35. B. Roy e P. Roy, Phys. Lett. A **340**, 70 (2005).
36. T. K. Jana e P. Roy, Mod. Phys. Lett. A **25**, 2915 (2010).
37. B. Gönül, O. Özen, B. Gönül e F. Üzgün, Mod. Phys. Lett. A **17**, 2453 (2002).
38. C. E. Shannon, The Mathematical Theory of Communication. Univ. Illinois Press, Urbana, Illinois (1948).
39. J. G. C. Berlinck, As duas primeiras leis. Editora Unesp, São Paulo (2013)
40. J. S. Ruiz e J. S. Dehesa, J. Comp. And Appl. Math. **182**, 150 (2005).
41. R. Leipnik, Information and Control **2**, 64 (1959).
42. A. J. Stam, Information and Control **2**, 101 (1959).
43. I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski, Comm. Math. Phys. **44**, 129 (1975).
44. R. J. Yáñez, W. Van Assche, J. S. Dehesa, Phys. Rev. A **50**, 3065 (1994).
45. V. Majerník, T. Opatrný, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2187 (1996).
46. A. Ghasemi, M. R. Hooshmandasl, M. K. Tavassoly, Phys. Scr. **84**, 035007 (2011).
47. S. Dong, Guo-Hua Sun, Shi-Hai Dong, J.P. Draayer, Phys. Lett. A **378**, 124 (2014).
48. H. G. Laguna, R. P. Sagar, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 025307 (2012).
49. Guo-Hua Sun, Shi-Hai Dong, N. Saad, Ann. Phys **525**, **934**(2013).
50. L. Rudnicki, P. Sánchez-Moreno, J. S. Dehesa, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 225303 (2012).
51. V. Majerník, E. Majerníková, S. Shpyrko, Cent. Eur. J. Phys. **3**, 393 (2003).
52. Á. Guerrero, P. Sánchez-Moreno, J. S. Dehesa, Phys. Rev. A **84**, 042105 (2011).
53. R. A. Fisher, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, 700 (1925).
54. E. Romera, P. Sánchez-Moreno, J. S. Dehesa, Chem. Phys. Lett. **414**, **468** (2005).
55. E. Romera, P. Sánchez-Moreno, J. S. Dehesa, J. Math. Phys. **47**, 103504 (2006).
56. S. H. Patil, K. D. Sen, Phys. Lett. A **362**, **109** (2007).

57. J. J. Omiste, R. J. Yáñez, J. S. Dehesa, *J. Math. Chem.* **47**, 911 (2010).
58. P. A. Bouvrie, J. C. Angulo, J.S. Dehesa, *Physica A* **390**, 2215(2011).
59. S. López-Rosa, J. Montero, P. Sánchez-Moreno, J. Venegas, J. S. Dehesa, *J. Math. Chem.* **49**, 971(2011).
60. P. Sánchez-Moreno, A. R. Plastino, J. S. Dehesa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065301 (2011).
61. S. Abdel-Khalek, *Quantum Inf. Process.* **12**, 3761 (2013).
62. R. López-Ruiz, J. Sañudo, *Phys. Lett. A* **377**, **2556** (2013).
63. K. Berrada, S. Abdel-Khalek, A. S. F. Obada, *Phys. Lett. A* **376**, 1412 (2012).
64. Á. Nagy, E. Romera, S. B. Liu, *Phys. Lett. A* **377**, **286** (2013).
65. A. S. F. Obada, S. Abdel-Khalek, K. Berrada, M. E. Shaheen, *Physica A* **392**, 6624 (2011).
66. P. Sánchez-Moreno, R. González-Férez, J. S. Dehesa, *New J. Phys.* **8**, 330 (2006).
67. N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
68. C. C. Tannoudji, B. Diu e F. Iolae, *Quantum Mechanics*, Editora John Wiley, Nova Jersey, 2004.
69. A. L. Martín, J. C. Angulo, J. Antolín, *Physica A* **392**, 5552 (2013).
70. E. Romera, J. S. Dehesa, *Phys. Rev. A* **50**, 256 (1994).
71. A. Dembo, T. M. Cover, J. A. Thomas, *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**, 1501 (1991).
72. V. Aguiar and I. Guedes, *Physica A* **401**, 159 (2014).