Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Mestrado em Matemática

GRUPOS COM CLASSE DE CONJUGAÇÃO VERBAL LIMITADA

Valéria Gerônimo Pedrosa

Fortaleza
2010

VALÉRIA GERÔNIMO PEDROSA

GRUPOS COM CLASSE DE CONJUGAÇÃO VERBAL LIMITADA

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério.

Fortaleza
2010

Pedrosa, Valéria Gerônimo

P414g Grupos com classe de conjugação verbal limitada /

Valéria Gerônimo Pedrosa - Fortaleza: 2010.

81f.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2010.

1- Álgebra

CDD 512

Aos meus pais pelo apoio irrestrito em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

Embora uma dissertação seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, há contributos de naturezas diversas que não podem nem devem deixar de ser realçados. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente a Deus, por ter me dado forças para superar mais esse desafio.

Ao meu orientador José Robério, por quem tenho enorme apreço e admiração, agradeço não somente pela matemática que ele me ensinou mas pela humildade e paciência que sempre teve comigo.

A professora Marinês Guerreiro, por ter aceito o convite para vir de tão longe participar da minha banca e também por suas valiosas correções, as quais, sem dúvidas, enriqueceram bastante esse trabalho.

Aos meus pais Vera Lúcia e Francisco Gerônimo por terem me dado o dom da vida e por sempre acreditarem em mim, mesmo quando nem eu acreditava.

Aos meus irmãos Verônica, Viviane e Thiago agradeço pelo reconhecimento do meu trabalho e pelo orgulho com que sempre falam de mim. Obrigada por cada momento que tivemos juntos e saibam que apesar da distância sempre estive com vocês.

Ao meu cunhado Jailson, pela alegria e dedicação e por ter me dado uma das maiores felicidades da minha vida, minha sobrinha VITÓRIA.

Ao meu Tiaguim do Paulista, por todos os momentos de felicidade que ele me proporcionou durante essa longa caminhada.

Agradeço a todos os meus professores da Urca, pois é por eles que hoje estou aqui.

Ao meu “Pai Científico”, Carlos Alberto, que me orientou não apenas matemáticamente falando, mas também para a vida. Obrigada por ter acreditado em mim desde o primeiro momento e por um dia ter me dito que eu era sua amiga não somente sua aluna.

Ao professor Paulo César que sempre me incentivou e desde o primeiro contato confiou que eu seria capaz. Obrigada pelo primeiro livro de matemática universitária (de álgebra, vale ressaltar) que foi você quem me deu.

A minha amiga-irmã, Sabrina Alves, com quem vivi momentos que jamais serão esquecidos. Com quem compartilhei segredos e parte da minha vida. A amiga das amigas, a única com quem eu tenho “conexão bluetooth”.

As minhas amigas Anniciele, Dângela, Mônica e Danielly, pelos bons momentos que sempre me proporcionaram estando perto ou longe.

A minha amiga Rosilda que esteve comigo e me apoiou numa fase que precisei bastante.

As minhas amigas da UFC, Vânia, Shirley e Priscila com as quais passei dias a fio, inclusive sábados, estudando. Obrigada pelo estudo e pelas ótimas risadas.

Agradeço as minhas amigas Allana e Aurineide por sempre me escutarem e me aconselharem, a estas também agradeço pelas conversas descontraídas e pelas boas gargalhadas.

A Andrea pelo carisma e pela paciência com que sempre nos recebe naquele departamento.

Ao CNPQ pelo apois financeiro, pois sem ele esse sonho talvez não tivesse se realizado.

“ Veja, não diga que a canção está perdida. Tenha fé em Deus, tenha fé na vida. Tente outra vez”.
(Tente outra vez - Raul Seixas)

Resumo

Seja F um grupo livre e seja $w \in F$. Dado um grupo G, denotaremos por G_w o conjunto de todos os w-valores em G e por $w(G) = \langle G_w \rangle$ o subgrupo verbal de G correspondente a w. Uma palavra w é chamada limitadamente concisa se, para cada grupo G tal que $|G_w| \leqslant n$, tivermos $|w(G)| \leqslant c$, onde c é um inteiro que depende somente de n. Mostraremos que se w é uma palavra limitadamente concisa e G é um grupo tal que $|x^{G_w}| \leqslant m$ para todo $x \in G$, então $|x^{w(G)}| \leqslant d$ para todo $x \in G$, onde $d = d(m, w)$ é um inteiro dependendo somente de m e w.

Abstract

Let F be a free group and let $w \in F$. For a group G, let G_w denote the set of all w-values in G and $w(G) = \langle G_w \rangle$ the verbal subgroup of G corresponding to w. A word w is called boundedly concise if, for each group G such that $|G_w| \leqslant n$, we have $|w(G)| \leqslant c$, for some integer c depending only on n. We will show w is a word boundedly concisa and G is a group such that $|x^{G_w}| \leqslant m$ for all $x \in G$, then $|x^{w(G)}| \leqslant d$ such that $x \in G$ and a some interger $d = d(m, w)$ depending only on m and w.

Sumário

Introdução

Seja G um grupo. Para subconjuntos X, Y de G, escrevemos X^{Y} para denotar o conjunto
$$\{x^y; x \in X \text{ e } y \in Y\},$$
onde $x^y = y^{-1}xy$ é o conjugado do elemento $x \in X$ pelo elemento $y \in Y$. O grupo G é dito ser um **FC-grupo** se $x^G = \{x^g; g \in G\}$ é finito para todo $x \in G$ se além de finito o número de elemetos de x^G for limitado por uma constante que independe da escolha do x, diremos que G é um **BFC-grupo**.

Em [3] *B.H Neumann* mostrou que um grupo G é um BFC-grupo se, e somente se, o subgrupo derivado G' é finito. Esse resultado será demonstrado minunciosamente no Capítulo 1 por se tratar de um aliado na demonstração de outros resultados bastante úteis ao longo desse trabalho.

Dizemos que um subgrupo H de G está **FC-mergulhado** em G se x^H é finito para todo $x \in G$.

Ainda, um subgrupo H de G está **BFC-mergulhado** em G se x^H é finito para todo $x \in G$ e o números de elementos em x^H é limitado por uma constante que não depende da escolha do x.

Em [1] *Franciose, de Giovanni e Shumyatsky* introduziram uma generalização verbal de FC-grupos.
Seja G um grupo e $w = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$, com $x_i \neq x_{i+1}$ e $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$ uma palavra que pode ser vista como uma função de n variáveis definida em G. Sejam $g_1, \ldots, g_n$ elementos de um grupo G, definimos o valor da palavra w em

$(g_1, \ldots, g_n)$ por $w(g_1, \ldots, g_n) = g_1^{\epsilon_1}, \ldots, g_n^{\epsilon_n}$.
Denotamos por $G_w = \{w(g_1, \ldots, g_n); g_i \in G\}$ o conjunto constituído por todos os w-valores de G e por $w(G) = \langle G_w \rangle$ o subgrupo verbal de G correspondente a palavra w.
P. Hall formulou a seguinte pergunta:

Se o conjunto G_w for finito, será que o subgrupo verbal $w(G)$ é também finito?

P. Hall(sem publicação) e *Turner-Smith* em [9] mostraram que algumas das palavras mais conhecidas satisfazem o questionamento proposto por *P. Hall*. Entre elas, as palavras centrais inferiores, definidas pelas equações $\gamma_1(x) = x$ e $\gamma_{k+1} = [\gamma_k, \gamma_1]$ e as palavras derivadas, definidas pelas equações $\delta_0(x) = x$ e $\delta_k = [\delta_{k-1}, \delta_{k-1}]$. Porém em 1991, A. Yu. O'lshanskii em [4] mostrou que existem palavras que não são concisas.

Diremos que uma palavra w é **concisa** se ela satisfaz o questionamento levantado por P. Hall.

Um grupo G é chamado **FC(w)-grupo** se x^{G_w} é finito, para todo $x \in G$. Similarmente, dizemos que G é uma **BFC(w)-grupo** se x^{G_w} é finito, para todo $x \in G$, e o número de elementos em x^{G_w} é limitado por uma constante que independe da escolha de x.

Exemplos de $FC(w)$-grupos (respectivamente, $BFC(w)$-grupos) são dados por grupos G em que o subgrupo verbal $w(G)$ está FC-mergulhado (respectivamente, BFC-mergulhado) em G.

Se w é uma palavra concisa, então G é um $FC(w)$-grupo se, e somente se, o subgrupo verbal $w(G)$ está FC-mergulhado em G.
Este resultado é o teorema pricipal da dissertação de mestrado [5].

Agora é natural que se queira dar uma caracterização similar para os $BFC(w)$-grupos.

Chamaremos w uma palavra **limitadamente concisa** se, e somente se, é concisa e, em qualquer grupo G tal que G_w é finito, a ordem de $w(G)$ é limitada por uma função que depende somente do número $|G_w|$.

"Não sabemos no entanto se toda palavra concisa é limitadamente concisa."

Nosso principal objetivo nesse trabalho é demonstrar o seguinte teorema de *Pavel Shumyatsky, Alexei Krasilnikov e Sérgio Brazil* [8].

Teorema 0.1. *Seja* w *uma palavras limitadamente concisa. Um grupo* G *é um* $BFC(w)$*-grupo se, e somente se,* $w(G)$ *está* BFC*- mergulhado em* G.

A prova desse teorema é baseada na idéia utilizada para demonstrar o clássico lema de Dietzmann o qual enunciaremos agora

Lema 0.1 (Dietzmann)**.** *se* $x \in G$ *é um elemento de ordem* n *tal que* $|x^G| = m$*, então a ordem do subgrupo* $\langle x^G \rangle$ *é no máximo* n^m.

Esse lema será demonstrado na Seção 1 do Capítulo 2.

Para provar o Teorema 0.1 vamos utilizar um "efeito dominó"que consiste em provar uma série de lemas (e ou, proposições) que culminam com a demonstração do teorema em questão.

O Capítulo 1 foi feito, em sua totalidade, para dar suporte aos capítulos posteriores. Nele constam resultados básicos de Teoria dos Grupos. Dentre os quais podemos destacar o Teorema de Schur, O Homomorfismo Transfer bem como uma breve explanação sobre as séries: normal, derivada e central.

No Capítulo 2 faremos um estudo detalhado sobre FC-grupos, BFC-grupos, $FC(w)$-grupos e $BFC(w)$-grupos. Nele também desmonstraremos os principais resultados de *R. Baer*, *B.H Neumann* a respeito dos FC-grupos e dos BFC-grupos. É neste capítulo que está o principal resultado deste trabalho, pois é nele em que será demonstrado o teorema 0.1.

Finalmente, no Capítulo 3 mostraremos que as palavras não-comutador, as palavras centrais inferior e as palavras derivadas são limitadamente concisas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo dar suporte ao desenvolvimento e entendimento dos resultados principais deste trabalho. Faremos uma breve revisão da teoria básica de grupos necessária, demonstraremos alguns resultados como o Teorema de Schur e o Teorema de Dietzmann e introduziremos os conceitos de FC-grupos e BFC-grupos, dentre outros que servirão como alicerce aos capítulos posteriores.

1.1 Classes Laterais

Seja G um grupo e H um subgrupo de G (notação: $H \leqslant G$), podemos definir em G a seguinte relação de equivalência

$$x \sim y \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H. \tag{1.1}$$

Dessa forma a classe de equivalência contendo $x \in G$ será o subconjunto

$$xH = \{xh; h \in H\},$$

que será chamado classe lateral à esquerda de H contendo x. De modo análogo, definimos a classe lateral à direita de H contendo x como o conjunto

$$Hx = \{hx; h \in H\}.$$

OBSERVAÇÕES:

1. Duas classes laterais à esquerda (ou à direita) ou são iguais ou são disjuntas e G é a união de todas elas.

2. Todas as classes laterais de H têm a mesma cardinalidade de H em virtude da bijeção

$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & xH \\ h & \longmapsto & xh. \end{array}$$

Definição 1.1. *Um subconjunto* $T \subset G$ *é dito um* **transversal** *(à esquerda de* H *em* G*) quando* G *se escreve como a união disjunta*

$$G = \dot{\bigcup_{t \in T}} tH.$$

Assim, para cada $g \in G$*, existem únicos* $t \in T$*,* $h \in H$ *tais que* $g = th$*.*

Um transversal (à direita) pode ser definido de modo análogo.
Denotaremos a cardinalidade de um conjunto X por $|X|$. Como definição, temos o seguinte:

- $|X| = |Y|$ se existe uma bijeção $f : X \to Y$;

- $|X| \leqslant |Y|$ se existe uma injeção $f : X \to Y$;

- $|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$.

Proposição 1.1. *Se* A_i*, com* $i \in I$*, são conjuntos disjuntos com* $|A_i| = |A|$ *então*

$$\left| \dot{\bigcup_{i \in I}} A_i \right| = |\ I\ | \cdot |A|.$$

Prova: Considere $f_i : A \to A_i$ uma bijeção, para cada $i \in I$, e defina $\phi : I \times A \to \dot{\bigcup_{i \in I}} A_i$ por $\phi(i, a) = f_i(a)$. É fácil ver que ϕ é bijetiva.
De fato:

- ϕ é sobrejetiva, por construção.

- Para mostrar que ϕ é injetiva consideraremos dois casos:

  1. $i = j$: Se $\phi(i, a) = \phi(i, b)$, ou seja, $f_i(a) = f_i(b)$, então $a = b$ desde que f_i é bijeção. Portanto $(i, a) = (i, b)$ e dai ϕ é injetiva
  2. $i \neq j$: Se $(i, a) \neq (j, b)$ então $\phi(i, a) = f_i(a) \in A_i$ e $\phi(j, b) = f_j(b) \in A_j$, como $A_i \cap A_j = \emptyset$ temos $f_i(a) \neq f_j(b)$ e, portanto, $\phi(i, a) \neq \phi(j, b)$. Logo, ϕ é injetiva.

Daí segue a igualdade $\left|\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i\right| = |I \times A| = |\ I\ | \cdot |A|$.

Definição 1.2. *Definimos o* **índice de H em G** *como sendo a cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda (ou à direita) de* H *em* G*, o qual denotaremos por* $|G : H|$.

Observação 1.2: Observe que se T é um transversal, então $|G : H| = |T|$, pois em um transversal aparece um e somente um representante de cada classe.

Proposição 1.2 (Lagrange)**.** *Se* G *é um grupo finito e* $H \leqslant G$ *então* $|H|$ *é um divisor de* $|G|$*, isto é,*

$$|G| = |G : H| \cdot |H|.$$

Prova: Como $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} tH$, pela Proposição 1.1, $|G| = |T| \cdot |H|$ e da Observação 1.1, temos $|T| = |G : H|$, se T é um transversal de H em G. Portanto, $|G| = |G : H| \cdot |H|$.

De uma forma mais geral temos:

Proposição 1.3. *Se* $H \leqslant K \leqslant G$. *Então* $|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|$

Prova: Podemos escrever: $G = \dot{\bigcup\limits_{t \in T}} tK$ e $K = \dot{\bigcup\limits_{u \in U}} uH$ onde T é um transversal de K em G e U é um transversal de H em K. Provaremos então que:

$$G = \dot{\bigcup_{t \in T, u \in U}} tuH$$

Para isso, vamos mostrar que as classes laterais tuH são distintas duas a duas e daí o conjunto $\{\ tu;\ t \in T \ \text{ e } \ u \in U\ \}$ é um transversal de H em G.

Se tivéssemos $tuH \cap t_1u_1H \neq \emptyset$, então existiria $b \in tuH \cap t_1u_1H$. Portanto,

$$\begin{aligned} b &= tuh_1 \ \text{ e } \ b = t_1u_1h_2 \\ &\Rightarrow tuh_1 = t_1u_1h_2 \\ &\Rightarrow uh_1h_2^{-1}u_1^{-1} = t^{-1}t_1 \in K \end{aligned}$$

Daí $t(t^{-1}t_1) \in tK$ e daí $t_1 \in tK$, o que implica $t_1K = tK$.

Como T é um transversal temos $t = t_1$ e, portanto, $uH = u_1H$ o que implica $u = u_1$, desde que U é um transversal de H em K. Isso significa que a união é disjunta. Logo,

$$|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|.$$

Observe que no caso em que $H = 1$ e G é finito, teremos o Teorema de Lagrange.

Proposição 1.4 (Poincaré)**.** *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subgrupos de G com índice finito, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ tem índice finito em G.*

Prova: Defina:

$$\begin{aligned} \varphi : \{g\bigcap_{i=1}^{n} A_i\ ;\ g \in G\} &\longrightarrow \{gA_1\ ; g \in G\} \times \cdots \times \{gA_n; g \in G\} \\ g\bigcap_{i=1}^{n} A_i &\longmapsto (gA_1, \ldots, gA_n) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ é injetiva, e assim teremos

$$|\{g\bigcap_{i=1}^{n} A_i\}| \leqslant |\{gA_1/g \ \in \ G\} \times \cdots \times \{gA_n/g \ \in \ G\}|,$$

ou seja, $|G : \bigcap_{i=1}^{n} A_i| \leqslant \prod_{i=1}^{n} |G : A_i|$ e a proposição estará demonstrada.

De fato: $(gA_1, \ldots, gA_n) = (\overline{g}A_1, \ldots, \overline{g}A_n) \Leftrightarrow$
$gA_1 = \overline{g}A_1, \ldots, gA_n = \overline{g}A_n \Leftrightarrow g = \overline{g}h \ ; \ h \ \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow g\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{g}\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$

1.2 Subgrupos Clássicos

Nessa seção iremos relembrar algumas definições e propriedades bem conhecidas dentro da Teoria de Grupos. Seja G um grupo,

- Se $x \in G$, definimos a **ordem de** x, indicada por $o(x)$, como o menor natural t tal que $x^t = 1$. Caso não exista esse natural, diremos que a ordem de x é infinita.

- Se $x, g \in G$, **o conjugado de** x **por** g será $x^g = g^{-1}xg$.

- Se $x \in G$, a **classe de conjugação** de x é o subconjunto

$$x^G = \{x^g \ ; \ g \in G\}.$$

- Se $N \leqslant G$, **um subgrupo conjugado** a N é dado por

$$N^x = x^{-1}Nx = \{x^{-1}nx; \ n \in N\}, \quad \text{para algum } x \in G.$$

  Caso $N^x = N$, para todo $x \in G$, diremos que N é **normal** em G e denotaremos $N \trianglelefteq G$.

- Se $x \in G$, **o centralizador** de x em G é o subgrupo formado pelos elementos em G que comutam com x, indicado por

$$C_G(x) = \{g \in G; x^g = x\}.$$

- Se $H \subseteq G$, **o centralizador** de H em G é o subgrupo

$$C_G(H) = \{g \in G; h^g = h, \ \forall \ h \in H\} = \bigcap_{h \in H} C_G(h)$$

- **O centro do grupo** G é o subgrupo formado pelos elementos de G que comutam com todos os outros elementos de G, isto é,

$$Z(G) = C_G(G) \trianglelefteq G.$$

- Se $H \leqslant G$, definimos **o normalizador de** H **em** G como sendo o subgrupo $N_G(H) = \{g \in G; H^g = H\}$. Note que $H \trianglelefteq N_G(H) \leqslant G$.

- Se $x, y \in G$, definimos o **comutador de** x **e** y como por

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Assim, para $x, y, z \in G$, escrevemos

$$[x, y, z] = [[x, y], z].$$

Proposição 1.5. *Sejam* $x, y, z \in G$ *então temos as seguintes propriedades:*

(i) $[x, y]^{-1} = [y, x]$;

(ii) $[x, yz] = [x, z] \cdot [x, y]^z$;

(iii) $[xy, z] = [x, z]^z \cdot [y, z]$;

(iv) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;

(v) $[x, y^{-1}, z]^y \cdot [y, z^{-1}, x]^z \cdot [z, x^{-1}, y]^x = 1$.

Prova: (i),(ii),(iii) e (iv) decorrem direto da definição de comutador. Vamos provar **(v)**.
Tome $u = xzx^{-1}yx$, $v = yxy^{-1}zy$ e $w = zyz^{-1}xz$. Note o seguinte:

$$[x, y^{-1}, z]^y = u^{-1}v \ \ , \ \ [y, z^{-1}, x]^z = v^{-1} \ \text{ e } \ [z, x^{-1}, y]^x = w^{-1}.$$

Portanto, temos

$$[x, y^{-1}, z]^y \cdot [y, z^{-1}, x]^z \cdot [z, x^{-1}, y]^x = 1.$$

$\blacksquare$

Definição 1.3. *Seja* G *um grupo e seja* $X \subset G$. *O* **subgrupo gerado por** X *é definido por*

$$\langle X \rangle = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n};\ x_i \in X,\ e_i = \pm 1\}.$$

Definição 1.4. *Seja* G *uma grupo, definimos o* **subgrupo derivado** G' *como o subgrupo gerado por todos os comutadores de* G*, isto é,*

$$G' = \langle [x, y]; x, y \in G \rangle.$$

Observe que $G' \trianglelefteq G$.

- Se $H, K \subset G$, definimos $[H, K] = \langle\ [h, k]; h \in H \text{ e } k \in K\ \rangle$.
- Um grupo K é de torção, quando $o(x) < \infty$, para todo $x \in K$.

Definição 1.5. *Seja* G *um grupo e* $N \trianglelefteq G$. *O conjunto das classes à direita de* N *em* G *(ou à esquerda), é um grupo com a operação* $Nx \cdot Ny = Nxy$ *ou, equivalentemente,* $xN \cdot yN = xyN$. *Tal grupo é chamado* **quociente de** G **por** N *e é denotado por* $\dfrac{G}{N}$.

Proposição 1.6. *Se* $N \trianglelefteq G$*, então* $\dfrac{G}{N}$ *é abeliano se, e somente se,* $G' \leqslant N$.

Prova: $\Rightarrow\rfloor$ Sejam $a, b \in G$ quaisquer. Como $\dfrac{G}{N}$ é abeliano, $aN \cdot bN = bN \cdot aN$. Então

$$abN = baN \ \Rightarrow\ (ba)^{-1}ab \in N \Rightarrow\ a^{-1}b^{-1}a\ b = [a, b] \in N.$$

Portanto,

$$G' = \langle [a, b]\ ;\ a, b \in G \rangle \leqslant N.$$

$\Leftarrow\rfloor$ Suponhamos agora $G' \leqslant N$.

Sejam $aN, bN \in \dfrac{G}{N}$ quaisquer. Como $[a, b] \in N$ para quaisquer $a, b \in G$, temos que $[a, b]N = N$.

Como $[a, b]N = a^{-1}N \cdot b^{-1}N \cdot aN \cdot bN$, temos $aN \cdot bN = bN \cdot aN$.

$\blacksquare$

Proposição 1.7. *Seja* G *um grupo, considere os subgrupos* $K, H, N \trianglelefteq G$*, tal que* $N \leqslant H$*, então:*

(i) $\left[\dfrac{H}{N}, \dfrac{G}{N}\right] = \dfrac{[H, G]N}{N}$

(ii) $[HK, G] = [H, G] \cdot [K, G]$

(iii) *Se* $H \trianglelefteq K$ *e* $\dfrac{K}{H} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{H}\right)$ *então* $\dfrac{KN}{HN} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{HN}\right)$

Prova: **(i)** Observe que para $h \in H$ e $g \in G$ temos:

$$[hN, gN] = h^{-1}Ng^{-1}NhNgN = [h, g]N, \quad \text{portanto} \quad \left[\frac{H}{N}, \frac{G}{N}\right] \subseteq \frac{[H, G]N}{N}.$$

Por outro lado, seja $yN \in \dfrac{[H, G]N}{N}$, logo $y \in [H, G]N$ e portanto $y = xm$

onde $x \in [H, G]$ e $m \in N$. Assim,

$$yN = xNmN = xN \in \left[\frac{H}{N}, \frac{G}{N}\right].$$

(ii) Considere $h \in H, k \in K$ e $g \in G$ arbitrários, então temos

$$[hk, g] = [h, g]^k[k, g] \in [H, G][K, G], \text{ pois } [H, G] \trianglelefteq G.$$

Assim, $[HK, G] \subseteq [H, G][K, G]$.
Por outro lado, temos

$$[H, G] \subseteq [HK, G] \text{ e } [K, G] \subseteq [HK, G].$$

Logo $[H, G][K, G] \subseteq [HK, G]$.

(iii) Como $\dfrac{K}{H} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{H}\right)$ temos $[K, G] \leqslant H$ e, como $N \trianglelefteq G$, podemos afirmar

que $[N, G] \leqslant N$. Portanto, $[KN, G] = [K, G][N, G] \leqslant HN$
Logo

$$\frac{KN}{HN} \leqslant Z\left(\frac{G}{HN}\right).$$

$\blacksquare$

1.3 Série Normal e Nilpotência

Definição 1.6. *Uma sequência* $(G_0, G_1, \ldots, G_r)$ *de subgrupos normais de um grupo* G *é chamada* **uma série normal de** G *se*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G.$$

Chamamos os grupos quocientes G_i/G_{i-1}, $1 \leqslant i \leqslant r$, *de fatores da série normal.*
Quando nem todos os subgrupos G_i*'s são normais em G, dizemos que*

$$(S): \ 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \triangleleft G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G,$$

é **série subnormal de G***.*

Definição 1.7. *Dizemos que um grupo* G *é* **nilpotente***, se existe uma série normal:*

$$(S): \ 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

tal que $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$, *para todo* $i = 0, \ldots, n-1$.

Observação: Se $G_i \trianglelefteq G$, então

$$\frac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\frac{G}{G_i}\right) \ \Leftrightarrow \ [G_{i+1}, G] \leqslant G_i.$$

De fato, suponhamos $[G_{i+1}, G] \leqslant G_i$. Então, dados $g_{i+1}G_i \in G_{i+1}/G_i$ e $gG_i \in G/G_i$ quaisquer, temos:

$$(g_{i+1}^{-1}G_i)\ (g^{-1}G_i)\ (g_{i+1}G_i)\ (gG_i) = (g_{i+1}^{-1}\ g^{-1}\ g_{i+1}\ g)G_i = G_i.$$

Logo $(g_{i+1}G_i)\ (gG_i) = (gG_i)\ (g_{i+1}G_i)$ para todo $g \in G$ e assim $g_{i+1}G_i \in Z(G/G_i)$.

Reciprocamente, tome $[g_{i+1}, g] \in [G_{i+1}, G]$, como $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ temos

$$[g_{i+1}, g]G_i = [g_{i+1}G_i, gG_i] = G_i.$$

Daí $[g_{i+1}, g] \in G_i$ e $[G_{i+1}, G] \leqslant G_i$.

Teorema 1.1. *Se G é nilpotente e* $H \leqslant G$*, então H é nilpotente.*

Prova: Seja

$$(S):\ 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

uma série normal de G, com $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$, para cada i.

Considere $H_i = G_i \cap H$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Como $G_i \trianglelefteq G$, então $H_i \trianglelefteq H$.

Além disso, $H_i \leqslant H_{i+1}$, para cada $i = 1, \ldots, n$..

Veja que

$$[H_{i+1}, H] \ = \ [G_{i+1} \cap H, H] \ \leqslant \ [G_{i+1}, G] \ \leqslant \ G_i$$

Como $[H_{i+1}, H] \ \leqslant \ H$ segue que $[H_{i+1}, H] \leqslant G_i \cap H = H_i$.

■

1.4 Série Derivada e Solubilidade

Chamaremos de $G^{'}$ o subgrupo derivado de um grupo G, gerado por todos os comutadores $[a, b]$, com $a, b \in G$. Para todo inteiro positivo, vamos definir ,recursivamente, o n-ésimo subgrupo derivado de G (com a notação G^n) da seguinte forma:

$$G^0 = G, \qquad G^1 = G^{'} = [G, G], \qquad G^2 = [G^{'}, G^{'}],$$
$$G^n = (G^{n-1})^{'} = [G^{n-1}, G^{n-1}]$$

A série $G = G^0 \geqslant G^1 \geqslant G^2 \geqslant \cdots$ é chamada **série derivada de** G.

Definição 1.8. *Diz-se que um grupo* G *é solúvel, se existe uma série*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ *é abeliano, para todo* $i = 0, \ldots, n-1$.

Teorema 1.2. *Um grupo* G *é solúvel se, e somente se,* $G^n = 1$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Suponha que o grupo G é solúvel, então existe uma série

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que cada $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é abeliano.

Afirmação: $G^i \leqslant G_{r-i}$para cada$i = 0, 1, \ldots, n$.

Para $i = 0$ temos $G^0 = G = G_n$.

Para $i = 1$ temos $\dfrac{G_n}{G_{n-1}} = \dfrac{G}{G_{n-1}}$ abeliano, o que implica pela Proposição 1.6, $G' \leqslant G_{n-1}$.

Suponha $G^{i-1} \leqslant G_{n-(i-1)}$. Como $\dfrac{G_{n-(i-1)}}{G_{n-i}}$ é abeliano, então $(G_{n-(i-1)})' \leqslant G_{n-i}$.

De $G^{i-1} \leqslant G_{n-(i-1)}$ podemos concluir que $(G^{i-1})' \leqslant (G_{n-(i-1)})'$ e, portanto,

$G^{i-1} \leqslant G_{n-i}$, ou seja, $G^i \leqslant G_{n-i}$.

Tomando $i = n$ temos $G^n \leqslant G_0 = 1$ então $G^n = 1$

Reciprocamente, considere a série:

$$1 = G^n \trianglelefteq G^{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G^0 = G$$

Como, para cada $0 \leqslant i \leqslant n$ $\dfrac{G^{n-(i+1)}}{G^{n-i}}$ é abeliano, G é solúvel.

■

1.5 Séries Centrais

Definição 1.9. *Seja* G *um grupo. Existe uma série crescente de subgrupos de* G *onde, para cada* $i \geqslant 0$*, definimos*

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq Z_n(G) \trianglelefteq \cdots,$$

com $\dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right)$*. Esta é chamada* **série central superior de G.**

Teorema 1.3. *Um grupo* G *é nilpotente se, e somente se,* $Z_n(G) = G$*, para algum* $n \geqslant 0$

Prova: $\Rightarrow$] Suponha que G seja nilpotente, então existe uma série normal,

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ para todo$i = 0, \ldots, n-1$.

Afirmação: $G_i \leqslant Z_i(G)$, para cada $i \geqslant 0$.

De fato, para $i = 0$, temos $G_0 = 1 = Z_0(G)$.
Suponha que o resultado vale para todo $i < n$, ou seja, $G_i \leqslant Z_i(G)$.

Sendo $Z_n(G), G_n, G_{n+1} \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G_{n+1}}{G_n} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ segue da Proposição 1.7

que $\dfrac{Z_i(G)G_{i+1}}{Z_i(G)G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)G_i}\right)$. Para $i < n$, com $G_i \leqslant Z_i(G)$, temos $Z_i(G)G_i = Z_i(G)$. Logo $\dfrac{Z_i(G)G_{i+1}}{Z_i(G)} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right) = \dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)}$.

Portanto,

$$Z_i(G)G_{i+1} \leqslant Z_{i+1}(G) \quad \Rightarrow \quad G_{i+1} \leqslant Z_{i+1}(G),$$

e isto prova nossa afirmação.

$\Leftarrow$] Suponha $Z_n(G) = G$, para algum $n \geqslant 0$.
Então $1 = Z_0(G) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq Z_n(G) = G$ é série normal de G.

Além disso, $\dfrac{Z_{i+1(G)}}{Z_i(G)} = Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right)$. Logo G é nilpotente.

$\blacksquare$

Dado um grupo G, definimos, recursivamente,

$$\gamma_1(G) = G \ , \ \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G], \ldots, \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Afirmação: $\gamma_i(G) \trianglelefteq G,$ para todo $i \geqslant 1$.

Usaremos indução sobre i para verificar essa afirmação.
Para $i = 1$, $\gamma_1(G) = G \trianglelefteq G$.
Suponhamos válido para $i = n$ e mostremos para $i = n + 1$.
Seja $g \in G$ qualquer. Como $\gamma_n(G) \trianglelefteq G$, temos

$$\gamma_{n+1}(G)^g = [\gamma_n(G)^g, G^g] = [\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G),$$

o que prova nossa afirmação, ou seja, $\gamma_{n+1}(G) \trianglelefteq G$.
Desse modo,

$$\gamma_{n+1}(G) \trianglelefteq \gamma_n(G), \text{para todo } n \geqslant 1$$

Definição 1.10. *A série normal decrescente de subgrupos de* G*,*

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq G' = \gamma_2(G) \trianglerighteq \ \cdots \ \gamma_n(G) \trianglerighteq \gamma_{n+1} \trianglerighteq \ \cdots$$

é chamada **série central inferior de G.**

Teorema 1.4. *Um grupo* G *é nilpotente se, e somente se,* $\gamma_n(G) = 1$*, para algum* $n \geqslant 1$.

Prova: $\Rightarrow$] Suponha que G é nilpotente, então existe uma série normal,

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_k = G$$

com $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ para cada $i = 0, \ldots, k - 1$.

Afirmação: $\gamma_{j+1}(G) \leqslant G_{k-j}$para todo$j \geqslant 0$

Usaremos indução sobre $j \geqslant 0$

Para $j = 0$, $\gamma_1(G) = G = G_k$.
Suponhamos válido para $j = n$, ou seja, $\gamma_{n+1}(G) \leqslant G_{k-n}$.
Como $\gamma_{n+1}(G) \leqslant G_{k-n}$, segue que

$$\gamma_{n+2}(G) = [\gamma_{n+1}(G), G] \leqslant [G_{k-n}, G] \leqslant G_{k-n-1} = G_{k-(n+1)}.$$

Portanto, $\gamma_{(n+1)+1}(G) \leqslant G_{k-(n+1)}$.

E assim concluímos que $\gamma_{j+1}(G) \leqslant G_{k-j}$, para todo $j \geqslant 0$.

Tomando $j = k$ temos $\gamma_{k+1}(G) \leqslant G_0 = 1$, e portanto, $\gamma_{k+1}(G) = 1$.

$\Leftarrow$] Suponha $\gamma_n(G) = 1$ para algum $n \geqslant 1$. Assim,

$$\gamma_1(G) = G \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \gamma_{n-1}(G) \trianglerighteq \gamma_n(G) = 1$$

é uma série normal de G.
Além disso,

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} = Z\left(\frac{G}{\gamma_{i+1}(G)}\right)$$

Logo G é nilpotente.

■

1.6 Representação Permutacional

Dado X um conjunto não-vazio qualquer, denotamos por S_X o conjunto de todas as funções $f : X \to X$ bijetoras. É fácil ver que S_X com a operação de composição de funções é um grupo, o qual chamamos de **grupo simétrico**, ou **grupo de permutações** de X. Quando $| X | = n < \infty$, escrevemos $S_X = S_n$ e este será o grupo de permutações de n símbolos, cuja ordem é $n!$.

Definição 1.11. *Uma* **representação permutacional** *(ou ação) de um grupo* G *sobre um conjunto X é um homomorfismo* $\varphi : G \to S_X$.

Denotaremos a imagem de cada elemento $g \in G$ por $\varphi(g)$ ou φ_g.

Com respeito ao estudo de uma ação φ de um grupo G sobre um conjunto X, definimos os seguintes conjuntos:

- Se $x \in X$, definiremos o estabilizador de x como sendo:

$$G_x = \{g \in G \ ; \ \varphi(g)(x) = x\}$$

- Se $x \in X$, definimos a órbita de x por:

$$Gx = \{\varphi(g)(x) \ ; \ g \in G\}$$

- Para cada $g \in G$, denotaremos por X_g o conjunto dos pontos fixos de $\varphi(g)$. Isto é,

$$X_g = \{x \in X \ ; \ \varphi(g)(x) = x\}$$

- $X_G = \{x \in X \ ; \ \varphi(g)(x) = x, \ \forall g \in G\}$

Dada $\varphi : G \to S_X$ uma ação de um grupo G sobre um conjunto X, definimos em X a seguinte relação:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ y = \varphi(g)(x), \text{ para algum } g \in G.$$

Veja que:

(i) $x \sim x$, já que $\varphi(1)(x) = x$;

(ii) Se $x \sim y$, então $y = \varphi(g)(x)$, para algum $g \in G$. Daí $x = \varphi(g^{-1})(y)$ e $y \sim x$;

(iii) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então temos: $y = \varphi(g_1)(x)$ e $z = \varphi(g_2)(y)$, com $g_1, g_2 \in G$. Portanto, $z = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(x)) = \varphi(g_1 g_2)(x)$ implicando que $x \sim z$.

Portanto, " $\sim$ " é uma relação de equivalência.

A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto:

$$\bar{x} = \{\varphi(g)(x) \ ; \ g \in G\} = Gx \quad \text{(órbita de } x\text{)}$$

Teorema 1.5. *Seja* $\varphi : G \to S_X$ *uma ação de um grupo G sobre um conjunto X. Então:*

(i) $G_x \leqslant G$

(ii) $|\, Gx \,| = |\, G : G_x \,|$.

Prova: (i) Como $\varphi(1)(x) = x, \ \forall \ x \in X$, temos $1 \in G_x$. Daí $G_x \neq \emptyset$.
Dados $g_1, g_2 \in G_x$, temos $\varphi(g_1)(x) = x$ e $\varphi(g_2)(x) = x$.
Assim,

$$\varphi(g_1 g_2^{-1})(x) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2^{-1})(x)) = \varphi(g_1)(x) = x \qquad \Rightarrow \ g_1 g_2^{-1} \in G.$$

Como g_1 e g_2 foram tomados arbitrariamente em G_x, o resultado segue.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \{gG_x \ ; \ g \in G\} \ &\longrightarrow \ Gx \\ gG_x \quad &\longrightarrow \ \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Suponhamos $aG_x = bG_x$. Então $a = bz$, com $z \in G_x$.

Daí, teremos

$$\phi(aG_x) = \varphi(a)(x) = \varphi(bz)(x) = \varphi(b)(\varphi(z)(x)) = \varphi(b)(x) = \phi(bG_x).$$

Logo ϕ está bem definida. Claramente ϕ é sobrejetora.
Além disso,

$$\begin{aligned}\phi(aG_x) = \phi(bG_x) &\Rightarrow \varphi(a)(x) = \varphi(b)(x)\\ &\Rightarrow \varphi(b^{-1})(\varphi(a)(x)) = x\\ &\Rightarrow \varphi(b^{-1}a)(x) = x\end{aligned}$$

Portanto, $b^{-1}a \in G_x$ e assim $aG_x = bG_x$. Logo ϕ é injetiva.
Assim concluímos que φ é uma bijeção, daí temos $| G : G_x |=| Gx |$.

$\blacksquare$

Exemplo: Seja G um grupo e definamos

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow S_G\\ g &\longrightarrow \varphi(g) : x \to gxg^{-1}\end{aligned}$$

É fácil verificar que φ é ação de G sobre si mesmo.
Note que $Gx = \{gxg^{-1}\ ;\ g \in G\} = \{x^{g^{-1}}\ ;\ g \in G\} = x^G$.
Além disso,

$$G_x = \{g \in G\ ;\ x^{g^{-1}} = x,\ \forall x \in G\} = C_G(x).$$

Assim, pelo teorema anterior, temos

$$| G : C_G(x) | = | x^G | .$$

1.7 O Homomorfismo Transfer

Seja G um grupo e $H \leqslant G$ com $\mid G : H \mid= n$. Fixemos um transversal $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de H em G de modo que

$$G = \bigcup_{1}^{n} Ht_i.$$

Para cada $x \in G$, a classe Ht_ix é uma das classes $Ht_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ (já que $Ht_1, \ldots, Ht_n$ são todas as classes $\grave{a}$ direita de H, e são disjuntas.)
Denotamos então:

$$Ht_ix = Ht_{(i)x}$$

Note que $i \ \rightarrow\ (i)x$ é uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vejamos a injetividade:

$$\begin{aligned}(i)x = (j)x \ &\Rightarrow\ Ht_{(i)x} = Ht_{(j)x}\\ &\Rightarrow\ Ht_ix = Ht_jx\\ &\Rightarrow\ Ht_i = Ht_j\\ &\Rightarrow\ i = j\end{aligned}$$

Já que $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é uma transversal de H em G. Logo $i \ \rightarrow\ (i)x$ é bijeção, pois é injetiva de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nele mesmo.
Além disso, sendo $Ht_ix = Ht_{(i)x}$ temos que $t_ixt_{(i)x}^{-1} \in H$, para cada $x \in G$.

Poderíamos perguntar: Dados G grupo e $H \leqslant G$, podemos sempre exibir um grupo A abeliano e $\theta : H \ \rightarrow\ A$ um homomorfismo?

A resposta é sim!

Vimos anteriormente que dados G um grupo e $N \trianglelefteq G$, tem-se:

$$\frac{G}{N} \text{ abeliano } \Leftrightarrow\ G' \leqslant N$$

Logo, para qualquer $H \leqslant G$, $\dfrac{H}{H'}$ é abeliano. (Lembre que $H' \lhd H$.)

Daí basta tomarmos $\begin{aligned}\theta : H &\longrightarrow H/H',\\ h &\longmapsto hH'\end{aligned}$ o homomorfismo canônico.

Definição 1.12 (Homomorfismo Transfer). *Seja* G *um grupo,* $H \leqslant G$*,* A *um grupo abeliano qualquer e* $\theta : G \to A$ *um homomorfismo de grupos. O transfer de* θ *é a aplicação definida por*

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1}).$$

Como A é abeliano, a ordem dos fatores no produto é irrelevante.

Lema 1.1. *Sobre a aplicação transfer* θ^**, temos:*

(i) θ^* *é homomorfismo, o qual chamamos de Homomorfismo Transfer;*

(ii) θ^* *independe do transversal escolhido para* H *em* G*.*

Prova: **(i)** Da definição, temos

$$Ht_{(i)xy} = Ht_i xy = H(t_i x)y = Ht_{((i)x)y}$$

$$\therefore \; t_{(i)xy} = t_{((i)x)y}, \quad \forall \; x, y \in G \tag{1.2}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\theta^*(xy) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i xy t_{(i)xy}^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i xy t_{((i)x)y}^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1} t_{(i)x} y t_{((i)x)y}^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1}) \theta(t_{(i)x} y t_{((i)x)y}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1}) \prod_{i=1}^{n} \theta(t_{(i)x} y t_{((i)x)y}^{-1}) \\
&= \theta^*(x)\theta^*(y)
\end{aligned}$$

(ii) Seja $\{t_1', t_2', \ldots, t_n'\}$ um outro transversal de H em G.

Suponha $Ht_i' = Ht_i$, para cada i (caso contrário, reorganizamos os t_i's).

Assim, $t_i' = h_i t_i$, para algum $h_i \in H$. Além disso,

$$t_i' = h_i t_i \;\Rightarrow\; t_i' x = h_i t_i x \;\Rightarrow\; Ht_i' x = Ht_i x \;\Rightarrow\; Ht_{(i)x}' = Ht_{(i)x}$$

Logo $t'_{(i)x} \in Ht_{(i)x}$. Portanto, $t'_{(i)x} = h_{(i)x}t_{(i)x}$ com $h_{(i)x} \in H$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta^*(x) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(t'_i x t'^{-1}_{(i)x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i t_i x (h_{(i)x}t_{(i)x})^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i t_i x t^{-1}_{(i)x} h^{-1}_{(i)x}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i)\ \theta(t_i x t^{-1}_{(i)x})\ \theta(h^{-1}_{(i)x}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i)\ \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t^{-1}_{(i)x})\ \prod_{i=1}^{n} \theta(h^{-1}_{(i)x}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i)\ \prod_{i=1}^{n} \theta(h^{-1}_{(i)x})\ \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t^{-1}_{(i)x}) \quad \text{(pois A é abeliano)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t^{-1}_{(i)x})
\end{aligned}$$

Observe que nas duas últimas igualdades, usamos o fato de que $i \to (i)x$ é uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$.

Lema 1.2 (Cálculo de θ^*). *Considere o homomorfismo $\theta : H \to A$, onde $H \leqslant G$ e A é abeliano.*
Se $|G : H| = n$, para cada $x \in G$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $l_1, l_2, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{n} (s_i x^{l_i} s_i^{-1}),$$

com $s_i \in G$ e $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

Prova: Fixado $s_1 \in G$, consideremos as classes $Hs_1, Hs_1x, Hs_1x^2 \ldots$
Como há somente um número finito de classes laterais, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Hs_1x^n = Hs_1$.
Seja l_1 o primeiro natural em que isso ocorre.

Então, temos o ciclo:

$$Hs_1, Hs_1x, Hs_1x^2, \ldots, Hs_1x^{l_1} = Hs_1$$

Se estas não forem todas as classes laterais de H, tomamos uma nova classe, Hs_2 tal que $Hs_2 \neq Hs_1x^i$, para todo $i = 0, \ldots, l_{k-1}$, e procedemos de maneira análoga.
Considerando l_2 o primeiro natural tal que $Hs_2x^{l_2} = Hs_2$, temos as classes:

$$Hs_2,\ Hs_2x,\ Hs_2x^2, \ldots, Hs_2x^{l_2-1}$$

Se ainda assim não tivermos todas as classes laterais de H, repetimos esse processo até que isso ocorra. Desse modo, encontramos várias cadeias não intersectantes de classes laterais.

Seja

$$Hs_k,\ Hs_kx,\ Hs_kx^2, \ldots, Hs_kx^{l_k-1},$$

a última delas.

Como $Hs_1, \ldots, Hs_1x^{l_1-1}, Hs_2, \ldots, Hs_2x_2^{l_2-1}, \ldots, Hs_k, \ldots, Hs_kx_k^{l_k-1}$ são todas as classes, temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

Vimos no Lema anterior que θ^* independe do transversal. Considere então o seguinte transversal de H em G:

$$T = \{s_1, s_1x, \ldots, s_1x^{l_1-1}, s_2, s_2x, \ldots, s_2x^{l_2-1}, \ldots, s_k, s_kx, \ldots, s_kx^{l_k-1}\}.$$

Façamos :

$$\begin{gathered}
t_1 = s_1, t_2 = s_1x, \ldots,\ t_{l_1} = s_1x^{l_1-1} \\
t_{l_1+1} = s_2,\ t_{l_1+2} = s_2x, \ldots,\ t_{l_1+l_2} = s_2x^{l_2-1} \\
\vdots \\
t_{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}+1} = s_k,\ t_{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}+2} = s_kx, \ldots,\ t_{\sum l_i} = t_n = s_kx^{l_k-1}
\end{gathered}$$

Veja que:

$$\begin{gathered}
Ht_{(1)x} = Ht_1x = Hs_1x = Ht_2 \\
Ht_{(2)x} = Ht_2x = Hs_1x^2 = Ht_3 \\
\vdots \\
Ht_{l_1x} = Ht_{l_1}x = Hs_1x^{l_1} = Hs_1 = Ht_1 \\
Ht_{(l_1+1)x} = Ht_{l_1+1}x = Hs_2x = Ht_{l_1+2} \\
Ht_{(l_1+2)x} = Ht_{l_1+2}x = Hs_2x^2 = Ht_{l_1+3} \\
\vdots \\
Ht_{(l_1+l_2)x} = Ht_{l_1+l_2}x = Hs_2x^{l_2} = Hs_2 = Ht_{l_1+1} \\
\vdots \\
Ht_{(l_1+\cdots+l_{k-1}+1)x} = Ht_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}x = Hs_2x = Ht_{l_1+\cdots+l_{k-1}+2} \\
\vdots \\
Ht_{(\sum l_i)x} = Ht_{\sum l_i}x = Ht_nx = Hs_kx^{t_k} = Hs_k = Ht_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}
\end{gathered}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(i)x &= i+1, \quad \text{para todo } \; i \neq l_j \\
(l_j)x &= j, \quad \text{para todo } \; j = 1, \ldots, k-1 \\
(l_1 + \cdots + l_j)x &= l_1 + \cdots + l_{j-1} + 1, \quad \text{para todo } \; j = 1, \ldots, k-1.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\theta^*(x) = & \prod_{i=1}^{l_1+\cdots+l_k} \theta(t_ixt_{(i)x}^{-1}) \\
= & \; \theta(t_1xt_2^{-1})\, \theta(t_2xt_3^{-1}) \; \cdots \; \theta(t_{l_1+\cdots+l_k}xt_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}^{-1}) \\
= & \; \theta(t_1x^{l_1}t_1^{-1})\, \theta(t_{l_1+1}x^{l_2}t_{l_1+1}^{-1}) \; \cdots \; \theta(t_{l_1+\cdots+l_k}xt_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}^{-1}) \\
= & \; \theta(s_1x^{l_1}s_1^{-1})\, \theta(s_2x^{l_2}s_2^{-1}) \; \cdots \; \theta(s_kx^{l_k}s_k^{-1}) \\
= & \prod_{i=1}^{k} (s_ix^{l_i}s_i^{-1})
\end{aligned}$$

■

1.8 O Teorema de Schur

O objetivo desta seção é a demonstração do *Teorema de Schur*, o qual usaremos bastante neste trabalho. Antes, vejamos dois lemas que nos serão necessários.

Lema 1.3. *Seja G um grupo e* $H \leqslant Z(G)$ *tal que* $| G : H |= n$. *Então, o homomorfismo transfer da função* $\theta : H \to H$, *com* $\theta(h) = h$, *para todo* $h \in H$ *é a função* $\theta^*(x) = x^n$.

Prova: Usando o Lema 1.2, temos:

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} \theta(s_i x^{l_i} s_i^{-1})$$

Agora,

$$\begin{aligned} s_i x^{l_i} s_i^{-1} \in H \leqslant Z(G) \quad &\Rightarrow \quad s_i x^{l_i} s_i^{-1} = z \in Z(G) \\ &\Rightarrow \quad x^{l_i} = s_i^{-1} z s_i = z \in Z(G) \end{aligned}$$

Assim,

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} x^{l_i} = x^{l_1 + \cdots + l_k} = x^n$$

■

Lema 1.4. *Se G é finitamente gerado e* $H \leqslant G$ *com* $| G : H |= n$, *então H é finitamente gerado.*

Prova: Seja $T = \{1 = t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal de H em G.

Definimos, para cada $x \in G$, $Ht_i x = Ht_{(i)x}$.

Assim, $t_i x = h(i, x) t_{(i)x}$, com $h(i, x) \in H$.

Além disso, como visto em (1.2), $t_{(i)xy} = t_{((i)x)y}$. Logo,

$$\begin{aligned} t_i xy &= (t_i x)y = (h(i,x)t_{(i)x})y = h(i,x)(t_{(i)x}y) \\ &= h(i,x)h((i)x,y)t_{((i)x)y} \\ &= h(i,x)h((i)x,y)t(i)xy \end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar a igualdade

$$t_i xyz = h(i,x)\ h((i)x,y)\ h((i)xy,z)\ t_{(i)xyz}.$$

Mais geralmente, temos

$$t_i(x_1 \cdots x_s) = h(i,x_1)\ h((i)x_1,x_2)\ \cdots\ h((i)x_1x_2\cdots x_{s-1},x_s)\ t_{(i)x_1\cdots x_s}.$$

Seja $G = \langle X \rangle$ com X finto.

Tomemos um elemento $x \in H$ qualquer.

Como $H \leqslant G$, $x = x_1 \cdots x_n$, onde $x_i \in X \cup X^{-1}$.

Como $t_1 = 1$ e $x \in H$, temos $Ht_1 = H = Hx = Ht_1x = Ht_{(1)x}$, portanto, $(1)x = 1$. Daí

$$x = t_1 x = t_1(x_1 \cdots x_n)$$

$$= h(1,x_1)\ h((1)x_1,x_2)\cdots\ h((1)x_1x_2\cdots x_{s-1},x_s)\ t_{(1)x_1x_2\cdots x_s}$$

$$= h(1,x_1)\ h((1)x_1,x_2)\ \cdots\ h((1)x_1x_2\ \cdots\ x_{s-1}x_s)$$

Portanto, $H = \langle h(j,x)\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant n \ \text{ e } \ x \in X \cup X^{-1} \rangle$ e H é finitamente gerado.

■

Finalmente, podemos provar o **Teorema de Schur**.

Teorema 1.6 (Schur)**.** *Se* $\dfrac{G}{Z(G)}$ *é finito, então* G' *é finito. Além disso, se* $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = n$*, então* $x^n = 1$*, para todo* $x \in G'$*, isto é,* $o(x) \mid n$*, para todo* $x \in G'$*.*

Prova: Do Lema 1.3, sabemos que

$$\begin{aligned} \theta^* : \ G &\to Z(G) \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

é um homomorfismo. Daí, pelo Primeiro Teorema dos Homomorfismos, temos

$$\frac{G}{Nuc\theta^*} \simeq \theta^*(G) \leqslant Z(G).$$

Logo $\dfrac{G}{Nuc\theta^*}$ é abeliano e $G' \leqslant Nuc\theta^* = \{x \in G; x^n = 1\}$.

Assim, para qualquer $x \in G'$, tem-se, $x^n = 1$.

Seja $\dfrac{G}{Z(G)} = \{t_1Z(G), t_2Z(G), ..., t_nZ(G)\}$.

Dados $x, y \in G$ quaisquer, para $xZ(G), yZ(G) \in \dfrac{G}{Z(G)}$, existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $xZ(G) = t_iZ(G)$ e $yZ(G) = t_jZ(G)$.

Portanto, $x = t_iz_i$ e $y = t_jz_j$, com $z_i, z_j \in Z(G)$.

Desse modo:

$$\begin{aligned} [x, y] = [t_iz_i, t_jz_j] &= (t_iz_i)^{-1}(t_jz_j)^{-1}(t_iz_i)(t_jz_j) \\ &= z_i^{-1}t_i^{-1}z_j^{-1}t_j^{-1}t_i\ z_i\ t_j\ z_j \\ &= t_i^{-1}t_j^{-1}t_i\ t_j \\ &= [t_i, t_j] \end{aligned}$$

e temos $G' = \langle [t_i, t_j] \ ; \ 1 \leqslant i, j \leqslant n \rangle$, o que implica que G' é finitamente gerado.

Como $Z(G) \lhd G$, segue, do Segundo Teorema dos Isomorfismos que:

$$\frac{Z(G)G'}{Z(G)} \simeq \frac{G'}{Z(G) \cap G'} \, .$$

Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, dash] & \\
 & Z(G)G' \arrow[dl, dash, double] \arrow[dr, dash] & \\
Z(G) \arrow[dr, dash] & & G' \arrow[dl, dash, double] \\
 & Z(G) \cap G' &
\end{tikzcd}$$

Por outro lado,

$$\infty \; > | \, G : Z(G) \, | = | \, G : Z(G)G' \, | \, | \, Z(G)G' : Z(G) \, | > | \, Z(G)G' : Z(G) \, |$$

Logo, $| \, G' : Z(G) \cap G' \, | < \; \infty$.

Como G' é finitamente gerado, pelo Lema 1.4, $Z(G) \cap G'$ também é.
Além disso, sendo $Z(G) \cap G'$ subgrupo de $Z(G)$ e de G' este é abeliano e de torção.
Logo, pelo do Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados, temos

$$Z(G) \cap G' \; = \; A_1 \times \cdots \times A_n,$$

onde os A_i's são subgrupos cíclicos finitos. Portanto, $Z(G) \cap G'$ é finito.

Finalmente,

$$| \, G' \, | = | \, G' : Z(G) \cap G' \, | \, | \, Z(G) \cap G' \, | < \; \infty$$

o que conclui nossa demonstração.

$\blacksquare$

Capítulo 2

FC-grupos e BFC-grupos

Apresentaremos a partir de agora os conceitos de FC-grupos, BFC-grupos, FC(w)-grupos e BFC(w)-grupos, bem como alguns resultados relevantes sobre tais grupos que servirão de apoio para a demonstração do teorema principal acerca de BFC(w)-grupos, o qual será demonstrado na última seção deste capítulo.

2.1 FC-grupos e BFC-grupos

Seja G um grupo. Se X e Y são subconjuntos não-vazios de G, escreveremos X^Y para denotar o conjunto:

$$X^Y = \{x^y; x \in X, y \in Y\}.$$

Note ainda que $C_G(\langle x^G \rangle) = C_G(x^G)$. Além disso $\langle x^G \rangle \trianglelefteq G$, o que implica $C_G(x^G) \trianglelefteq G$, já que o centralizador de um subgrupo normal é normal.

Definição 2.1. *Um grupo G é dito um* FC**-grupo** *se, para cada $x \in G$, tem-se x^G finito.*

$\boxed{\textit{Obs}\text{: A sigla FC vem do inglês : “finite conjugate”.}}$

Sobre a classe de conjugação x^G lembramos que:

$$|x^G| = |G : C_G(x)|$$

A proposição a seguir é uma caracterização dos FC-grupos.

Proposição 2.1. *Um grupo* G *é um* FC*-grupo se, e somente se,* $\dfrac{G}{C_G(x^G)}$ *é finito, para cada* $x \in G$.

Prova: $\Rightarrow\rfloor$ Suponhamos G um FC-grupo.

Dado $x \in G$, seja $x^G = \{x_1, \ldots, x_s\}$. Então,

$$| G : C_G(x_i) | = | x_i^G | = | x^G | = s.$$

Pela Proposição 1.4 (Poincaré), temos:

$$| G : C_G(x^G) | = \left| G : \bigcap_{i=1}^{s} C_G(x_i) \right| \leqslant \prod_{i=1}^{s} | G : C_G(x_i) | < \infty,$$

isto é ,

$$\frac{G}{C_G(x^G)} \text{ é finito.}$$

$\Leftarrow\rfloor$ Para cada $x \in G$ temos $C_G(x^G) \leqslant C_G(x) \leqslant G$. Logo

$$| x^G | = | G : C_G(x) | \leqslant | G : C_G(x^G) | < \infty \quad \forall\, x \in G,$$

portanto, G é um FC-grupo.

■

Proposição 2.2. *Se* G *é um* FC*-grupo, então* $\dfrac{G}{Z(G)}$ *é de torção.*

Prova: Tome $x \in G$, como G é um FC-grupo, temos

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = n.$$

Para simplificar a notação faça $C = C_G(x)$. Logo $|x^G| = |G : C| = n$.

Seja $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal de C em G, daí:

$$G = \dot{\bigcup_{i=1,\ldots,n}} Ct_i.$$

Assim $G = \langle C, t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$. Considere agora $H = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i^G)$.

Observe que H tem índice finito em G, pela Proposição 1.4 (Poincaré), já que G é um FC-grupo. Além disso, como vimos no início dessa seção, cada $C_G(t_i^G) \trianglelefteq G$ e daí $H \trianglelefteq G$, pois é interseção de subgrupos normais. Logo

$$\frac{G}{H} \quad \text{é finito}$$

Logo existirá um natural m tal que

$$(xH)^m = H \Rightarrow x^m \in H \Rightarrow x^m t_i = t_i x^m, \text{ para todo } \quad i = 1, \ldots, n, \text{ já que}$$
$$H = \cap C_G(t_i^G), \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

E ainda, em particular,

$$x^m c = cx^m, \text{ para todo } c \in C$$

Portanto, $x^m \in Z(G)$ o que implica $o(xZ(G)) \leqslant m$, para todo $x \in G$.

■

Teorema 2.1 (B.H Neumann). *Seja G um FC-grupo e considere $T(G) = \{x \in G; o(x) < \infty\}$. Então $G' \subseteq T(G)$ e $T(G) \leqslant G$. Além disso, se G for finitamente gerado, $T(G)$ será finito.*

Prova: Tome $x \in G'$. Daí, para $a_i, b_i \in G$,

$$x = [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n].$$

Note que $[a, b]^{-1} = [b, a]$. Veja que $x \in H'$, onde $H = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \rangle$.

Como H é um FC-grupo finitamente gerado temos que

$$Z(G) = \bigcap_{c \in \{a_i, b_i\}_{i=1}^{n}} C_H(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{Z(H)} \quad \text{é finito;}$$

já que $|H : C_H(c)| < \infty$, para todo $c \in \{a_i, b_i\}_{i=1}^{n}$. Pelo Teorema de Schur, $H^{'}$ é finito, o que implica $o(x) < \infty$, ou seja, $x \in T(G)$ e, portanto, $G^{'} \subseteq T(G)$. Note que acima foi dito algo interessante, que decorre da Proposição 2.2

$$\boxed{\text{FC-grupo finitamente gerado } G = \langle X \rangle \Rightarrow \frac{G}{Z(G)} \text{ finito}}$$

Vamos provar agora que $T(G) \leqslant G$. É claro que $T(G) \neq \emptyset$. Tome $x, y \in G$ com $o(x) = m$ e $o(y) = n$. Lembre-se que $G^{'} \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{G'}$ é abeliano. Daí teremos:

$$(xG^{'})^m = x^m G^{'} = G^{'} \text{ e } (yG^{'})^n = x^n G^{'} = G^{'}$$

$$\Rightarrow (xy)^{mn} G^{'} = (xyG^{'})^{mn} = (xG^{'}.yG^{'})^{mn} = (xG^{'})^{mn}(yG^{'})^{mn} = G^{'}$$
$$\Rightarrow (xy)^{mn} \in G^{'}$$

Como $G^{'} \subseteq T(G)$, existirá $t \in \mathbb{N}$ tal que

- $(xy)^{mnt} = 1 \Rightarrow o(xy) < \infty \Rightarrow xy \in T(G)$

Como $o(x) = o(x^{-1})$ segue que

- $x^{-1} \in T(G)$ para todo $x \in T(G)$.

Portanto, $T(G) \leqslant G$. Finalmente, se G for finitamente gerado, faça $G = \langle X \rangle$. Daí teremos, pelo *Teorema de Schur*,

$$\frac{G}{Z(G)} \quad \text{finito} \overset{\text{Schur}}{\Longrightarrow} \quad G^{'} \quad \text{finito}$$

Já vimos que $G^{'} \leqslant T(G)$. Com isso $\dfrac{T(G)}{G'}$ será abeliano finitamente gerado (pois G é finitamente gerado e $\dfrac{G}{G'}$ é abeliano) e de torção. Logo $\dfrac{T(G)}{G'}$ será finito. Concluímos então que:

$$|T(G)| = |T(G) : G^{'}|.|G^{'}| < \infty.$$

$\blacksquare$

Definição 2.2. *Diremos que* G *é um* BFC*-grupo (do inglês: BFC= bounded finite conjugate) se existe um natural* n *tal que* $|x^G| \leqslant n$*, para todo* $x \in G$*. Em outras palavras, as classes de conjugação são uniformemente limitadas.*

Observe que, quando um grupo G possuir centro de índice finito, G será um BFC-grupo pois, para $x \in G$, teremos:

$$|x^G| = |G : C_G(x)| \leqslant |G : Z(G)|$$

O teorema a seguir caracteriza os grupos com classes de conjugação uniformemente limitadas.

Teorema 2.2 (B. H. Neumann)**.** *Um grupo* G *é um* BFC*-grupo se, e somente se,* G' *for finito.*

Prova: $\Leftarrow\rfloor$ Suponha $|G'| = m$. Seja $x \in G$ um elemento arbitrário. Devemos mostrar que $|x^G| \leqslant |G'|$. De fato, defina a função

$$\begin{aligned} \varphi : \ x^G &\longrightarrow \quad G' \\ x^g &\longmapsto \quad [x, g] \end{aligned}$$

Note que φ é bem definida, pois:

$$x^g = x^h \Rightarrow x^{-1}x^g = x^{-1}x^h \Rightarrow [x, g] = [x, h].$$

Além disso, veja que φ é injetiva:

$$[x, g] = [x, h] \Rightarrow x^{-1}x^g = x^{-1}x^h \Rightarrow x^g = x^h.$$

Logo $|x^G| \leqslant |G'| = m$.

$\Rightarrow\rfloor$ Suponha que G seja um BFC-grupo, ou seja, que exista $d \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x^G| \leqslant d, \quad \text{para todo } \ x \in G.$$

Seja $a \in G$ tal que a realiza essa cota máxima, isto é,

$$|a^G| = d.$$

Sabemos que $|G : C_G(a)| = |a^G| = d$.
Seja $\{t_1, \ldots, t_d\}$ um transversal de $C_G(a)$ em G, assim teremos

$$a^G = \{a^{t_1}, \ldots, a^{t_d}\}.$$

Note que $a^{t_1}, \ldots, a^{t_d}$ são os d conjugados de a em G. De fato,
$a^{t_i} = a^{t_j} \quad \Rightarrow \quad a^{t_i t_j^{-1}} = a \quad \Rightarrow \quad t_i t_j^{-1} \in C_G(a) \quad \Rightarrow \quad t_i C_G(a) = t_j C_G(a)$
Logo $t_i = t_j$ o que é um absurdo, pois $\{t_1, \ldots, t_d\}$ é um transversal de $C_G(a)$ em G.
Como cada $|G : C_G(t_i)| < \infty$ (pois $|G : C_G(t_i)| = |t_i^G|$ e G é um BFC-grupo), segue que $|G : C| < \infty$, onde $C = \bigcap_{i=1}^{d} C_G(t_i)$.

Assim, faça

$$|G : C| = k$$

e tome $\{s_1, \ldots, s_k\}$ um transversal de C em G. Seja

$$N = \langle a, s_1, \ldots, s_k \rangle^G = \langle a^G, s_1^G, \ldots, s_k^G \rangle.$$

Note que $N \trianglelefteq G$, daí N será um FC-grupo finitamente gerado e, pelo Teorema 2.1

$$T(N) = \{x \in N; o(x) < \infty\} \quad \text{é finito.}$$

Veja agora que se $x \in C$, então

$$(xa)^{t_i} = x^{t_i} a^{t_i} = x a^{t_i} \quad \text{pois } C \leqslant C_G(t_i).$$

Concluímos, portanto, que

$$(xa)^G = \{x a^{t_i}, x a^{t_2}, \ldots, x a^{t_d}\},$$

pois $|(xa)^G| \leqslant d$ e todos os $x a^{t_i}$ são distintos.
Assim, para qualquer $y \in C$, temos $(xa)^y = x a^{t_i}$ para algum i, e isso nos dá

$$\begin{aligned} x^y a^y = x a^{t_i} \quad &\Rightarrow \quad x^y = x a^{t_i} (a^{-1})^y \\ &\Rightarrow \quad x^{-1} x^y = a^{t_i} (a^{-1})^y \\ &\Rightarrow \quad [x, y] = a^{t_i} (a^{-1})^y \quad \in N \end{aligned}$$

Portanto, $C' \leqslant N$. Veja ainda que

$$G = \langle C, s_1, \dots, s_k \rangle \leqslant NC \leqslant G, \text{ o que implica que } G = NC.$$

Usando as propriedades dos comutadores (lembre-se que $N \trianglelefteq G$):

$$G^{'} = [G, G] = [NC, G] = [N, G][C, G].$$

Veja que $[N, G] \leqslant N$, pois N é normal. Daí

$$[N, G][C, G] \leqslant N[C, NC].$$

Agora observe que $[C, NC] = \langle [c, nc_1] = [c, c_1][c, n]^{c_1}, \text{ com } c, c_1 \in C \text{ e } n \in N \rangle \leqslant C^{'}N$, já que $[C, n]^{c_1} \subset N$, pois $N \trianglelefteq G$. Daí

$$G^{'} \leqslant NC^{'}N \leqslant N.$$

Pelo *Teorema de Neumann*, $G^{'} \subset T(G)$, portanto,

$$G^{'} \subseteq T(G) \cap N = T(N) \quad \text{que é finito}$$
$$\text{Logo} \quad G^{'} \quad \text{é finito.}$$

■

A prova do Teorema Principal desse trabalho é baseada na idéia usada na demonstração do clássico *Lema de Dietzmann* o qual demostraremos agora.

Definição 2.3. *Seja* X *um subconjunto de* G*. Dizemos que* X *é* **normal** *se, para qualquer* $x \in X$*,* $x^g \in G$ *para todo* $g \in G$*.*

Lema 2.1 (Lema de Dietzmann)**.** *Em qualquer grupo* G*, um subconjunto normal finito* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *com* $o(x_i) < \infty$*, para todo* $i = 1, \dots, n$*, gera um subgrupo normal finito com no máximo* $\prod_{i=1}^{n} o(x_i)$ *elementos.*

Prova: Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ um subconjunto normal e $H = \langle X \rangle$

Afirmação: $H \trianglelefteq G$

De fato, tome $h \in H$ e $g \in G$ arbitrários.
Se $h \in H$, então $h = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, onde $m_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \in X$,
Então

$$\begin{aligned} h^g &= g^{-1}hg = g^{-1}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}g \\ &= g^{-1}x_1^{m_1}(g^{-1}g)\cdots(g^{-1}g)x_n^{m_n}g \\ &= (x_1^{m_1})^g(x_2^{m_2})^g\cdots(x_n^{m_n})^g \\ &= (x_1^g)^{m_1}(x_2^g)^{m_2}\cdots(x_n^g)^{m_n} \quad \in \langle X\rangle = H \quad \text{para todo } g \in G \end{aligned}$$

Portanto, $H \trianglelefteq G$

Resta mostrar que H é finito. Para isso tomaremos um elemento arbitário $1 \neq h \in H$ e estudaremos as possibilidades de se escrever este elemento como combinação dos $x_i's \in X$. Se estas forem finitas então , necessariamente, H será finito.

Se $h \in H$, então $h = x_{\alpha_1}^{m_1}\cdots x_{\alpha_r}^{m_r}$, onde $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$

Em geral existem muitas formas de se expressar h, entre elas consideraremos as de menor comprimento, digamos r.

Além disso, entre essas expressões de menor comprimento existe uma que aparece primeiro na ordem *lexicográfica* (a ordem do dicionário)

Esta é a ordem em que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *precede* $(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ *se* $\alpha_i = \alpha_i'$ *para* $i < s$ *e* $\alpha_s < \alpha_s'$*, para algum* $s \leqslant r$.

Denote esta primeira expressão por $h = y_1y_2\cdots y_r$, onde $y_i = x_{\alpha_i}^{m_i}$.

Nosso principal objetivo é mostrar que os fatores de h estão ordenados de modo que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$.

Os únicos dois casos em que isso não ocorreria seriam

Caso 1: $\alpha_i = \alpha_j$, para $i < j$.

Seja

$$h = y_1 \cdots y_{i-1} y_i y_{i+1} \cdots y_{j-1} y_j y_{j+1} \cdots y_r \tag{2.1}$$

Perceba que podemos mover y_j para a esquerda, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} h &= y_1 \cdots y_{i-1} y_i (y_j y_j^{-1}) y_{i+1} (y_j y_j^{-1}) \cdots (y_j y_j^{-1}) y_{j-1} (y_j y_j^{-1}) y_j y_{j+1} \cdots y_r \\ &= y_1 \cdots y_{i-1} (y_i y_j) y_{i+1}^{y_j} \cdots y_{j-1}^{y_j} y_{j+1} \cdots y_r \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Note que (2.2) tem comprimento menor que r.

De fato, como $y_i = x_{\alpha_i}^{m_i}$ e $y_j = x_{\alpha_j}^{m_j}$ e estamos supondo $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k$ então

$$y_i y_j = x_{\alpha_k}^{m_i} x_{\alpha_k}^{m_j} = x_{\alpha_k}^{m_k} = y_k \quad \text{onde} \quad 1 \leqslant k \leqslant r$$

Mas isso contraria a minimalidade do comprimento r de h. Portanto, todos $\alpha_i' s$ são diferentes.

Caso 2: Suponha $\alpha_i > \alpha_{i+1}$. Escreva

$$h = y_1 \cdots y_i y_{i+1} \cdots y_r \quad \text{onde} \quad y_i = x_{\alpha_i}^{m_i}. \tag{2.3}$$

Observe que, dessa forma, não temos a ordenação crescente de índices, o que vamos fazer então, é inverter as posições de, da seguinte forma: $x_{\alpha_i}^{m_i}$ e $x_{\alpha_{i+1}}^{m_{i+1}}$

$$\begin{aligned} h &= y_1 \cdots (y_{i+1} y_{i+1}^{-1}) y_i y_{i+1} \cdots y_r \\ &= y_1 \cdots y_{i+1} y_i^{y_{i+1}} \cdots y_r \\ &= x_{\alpha_1}^{m_1} \cdots x_{\alpha_{i+1}}^{m_{i+1}} (x_{\alpha_i}^{m_i})^{y_{i+1}} \cdots x_{\alpha_r}^{m_r} \end{aligned}$$

Agora temos a ordem crescente nos índices, no entanto esta expressão precede (2.3) na ordenação de r-uplas.

$$x_{\alpha_1}^{m_1} \cdots x_{\alpha_{i+1}}^{m_{i+1}} (x_{\alpha_i}^{m_i})^{y_{i+1}} \cdots x_{\alpha_r}^{m_r} < x_{\alpha_1}^{m_1} \cdots x_{\alpha_i}^{m_i} x_{\alpha_{i+1}}^{m_{i+1}} \cdots x_{\alpha_r}^{m_r}$$

Mas isso é um absurdo, pois (2.3) é a primeira expressão que aparece na ordem de r-uplas (*ordem lexicográfica*). Então devemos ter $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ e, portanto, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$.

Essa conclusão nos auxilia a dizer que as possibilidades de se expressar h são no máximo

$$\prod_{i=1}^{n} o(x_i).$$

De fato, basta observar que dado $h \in H$, $h = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ onde $m_i \in \mathbb{Z}$ e $m_i \leqslant o(x_i)$.

■

Definição 2.4. *Um subgrupo* H *de* G *está* FC-**mergulhado** *em* G *se* x^H *é finito, para todo* $x \in G$.

Definição 2.5. *Um subgrupo* H *de* G *está* BFC-**mergulhado** *em* G *se* x^H *é finito, para todo*$x \in G$ *e o número de elementos de* x^H *é limitado por uma constante que independe da escolha de x.*

Exemplos de FC-grupos (respectivamente, BFC-grupos) são dados por grupos G nos quais o subgrupo verbal $w(G)$ está FC-mergulhado (respectivamente, BFC-mergulhado) em G.

2.2 FC(w)-grupos e BFC(w)-grupos

Seja w uma palavra em n variáveis. Nessa seção apresentaremos os conceitos de FC(w)-grupo e BFC(w)-grupo, que são generalizações de FC-grupos e BFC-grupos, respectivamente, com relação à palavra w. O primeiro conceito foi apresentado em [1] por *S. Franciosi, F. de Giovanni e P. Shumyatsky.* e o segundo em [8] por *S. Brazil, A. Krasilnikov e P. Shumyatsky.*

Uma **palavra** é uma expressão nas variáveis x_i da seguinte forma

$$w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n},$$

onde $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, com $x_i \neq x_{i+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.
Dada uma palavra w e um grupo G, podemos avaliar w nos elementos de G.

Exemplo: Seja w a palavra comutador e G um grupo qualquer. Então $w(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$, com $g_i \in G$, para $i = 1, 2$.

Definição 2.6. *Sejam* G *um grupo e* $w = w(g_1, \ldots, g_s)$*, onde* $g_1 \in G$*, denotaremos por*

$$G_w = \{w(g_1, g_2, \ldots, g_n)/g_i \in G\}$$

o conjunto de todos os w**-valores em G***, e por* $w(G)$ *o* **subgrupo verbal** *de* G *correspondente a palavra* w*. Em outras palavras,* $w(G)$ *é o subgrupo gerado pelo conjunto* G_w*, ou seja,* $w(G) = \langle G_w \rangle$*.*

Definição 2.7. *Uma palavra* w *é dita* **concisa** *se, para cada grupo* G *tal que* G_w *é finito, tivermos* $w(G)$ *também finito.*

Definição 2.8. *Uma palavra* w *é dita* **limitadamente concisa** *se, para cada grupo* G *tal que* $|G_w| \leqslant m$*, tivermos* $|w(G)| \leqslant c$*, para algum inteiro* $c = c(m)$ *dependendo somente de* m*.*

Definição 2.9. *O grupo* G *é um* $FC(w)$*-grupo se* x^{G_w} *é finito, para cada elemento* $x \in G$*, ou ainda,* G *é um* $FC(w)$*-grupo se* G_w *está* FC*-mergulhado em* G*.*

Proposição 2.3. *Se* G *é um grupo tal que o subgrupo verbal* $w(G)$ *está* FC*-mergulhado em* G*, então* G *é um* $FC(w)$*-grupo.*

Prova: Temos $G_w \subset w(G)$. Assim, $x^{G_w} \subset x^{w(G)}$. Como $x^{w(G)}$ é finito, para todo $x \in G$, temos que x^{G_w} também é finito, logo G é $FC(w)$-grupo.

■

A recíproca da proposição acima é verdadeira se a palavra w for concisa. Na verdade essa recíproca é o teorema que enunciaremos agora e cuja demonstração, que omitiremos aqui, é parte fundamental da Dissertação de Mestrado [5].

Teorema 2.3. *Se* w *é uma palavra concisa e* G *um* $FC(w)$*-grupo então o subgrupo verbal* $w(G)$ *está* FC*-mergulhado em* G*.*

Prova: Ver referência [5].

Definição 2.10. *Diremos que* G *é um* $\mathsf{BFC}(w)$**-grupo** *se* x^{G_w} *é finito e limitado por uma constante* m*, para todo* $x \in G$*. Em outras palavras,* G *é um* $\mathsf{BFC}(w)$*-grupo se* G_w *está* BFC*-mergulhado em* G*. O menor limite* m *é chamado o* **índice do** $\mathsf{BFC}(w)$**-grupo** G*.*

2.3 Prova do Teorema Principal

O principal objetivo desse trabalho é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Seja* w *uma palavra limitadamente concisa. Um grupo* G *é um* $\mathsf{BFC}(w)$*-grupo se, e somente se,* $w(G)$ *está* BFC*-mergulhado em* G*.*

Para isso iremos demonstrar uma série de lemas que nos levarão a demonstração desse teorema.

Definição 2.11. *Usaremos o termo* $\{a, b, c, \ldots\}$**-limitado** *para significar limitado superiormente por alguma função que depende somente dos parâmetros* $a, b, c, \ldots$*.*

Definição 2.12. *Seja* G *um grupo e* $H \leqslant w(G)$*. Dizemos que* H *tem* w*-índice finito, se existem* $g_1, \ldots, g_m \in w(G)$ *tais que:*

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Hg_i$$

Se m *for minimal com tal propriedade, dizemos que* H *tem* w*-índice* m*.*

Lema 2.2. *Seja* G *um grupo. Se* H *e* K *são subgrupos de* $w(G)$ *com* w*-índices* m *e* n*, respectivamente, então a interseção* $H \cap K$ *tem* w*-índice finito no máximo* mn*.*

Prova: Suponha que H e K tenham w-índices m e n respectivamente, então existem $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ elementos de $w(G)$, tais que:

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Hx_i \qquad \text{e} \qquad G_w \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} Ky_j$$

Portanto,

$$G_w \subseteq (\bigcup_{i=1}^{m} Hx_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} Ky_j) \subseteq \bigcup_{i,j}(Hx_i \cap Ky_j) = \bigcup_{i,j}(Hz_{ij} \cap Kz_{ij}) = \bigcup_{i,j}(H \cap K)z_{ij}$$

Onde $z_{ij} \in Hx_i \cap Ky_j$
Vamos verificar que a última igualdade é verdadeira,
$\subseteq\rfloor$ Tome $g \in Hz_{ij} \cap Ky_{ij} \neq \varnothing$ então $g = hz_{ij} = kz_{ij}$, portanto $h = k = l$ então $g = lz_{ij}$ onde $l \in H \cap K \therefore g \in (H \cap K)z_{ij}$
$\supseteq\rfloor$ Tome $g \in (H \cap K)z_{ij} \Rightarrow z = lz_{ij}$ onde $l \in H \cap K$
$\therefore l \in H \Rightarrow g = lz_{ij} \in Hz_{ij}$ e $l \in K \Rightarrow g = lz_{ij} \in Kz_{ij}$
$\therefore g \in Hz_{ij} \cap Kz_{ij}$. Daí segue a igualdade como queríamos mostrar.
Como $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, segue que $1 \leqslant ij \leqslant mn$ e, portanto, $H \cap K$ tem w-índice no máximo mn.

$\blacksquare$

Corolário 2.1. *Seja* G *um grupo. Se* $H_1, \ldots, H_s$ *são subgrupos de* $w(G)$ *com* w*-índices* $m_1, \ldots, m_s$*, respectivamente, então a interseção* $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$ *tem* w*-índice no máximo* $m_1 \cdots m_s$.

Prova: Faremos uma prova por indução sobre $s \geqslant 2$

- O resultado vale para s=2, (pelo Lema 2.2).
- Suponha que vale o resultado para $s - 1$, isto é, $H_1 \cap \ldots \cap H_{s-1}$ tem w-índice no máximo $m_1 \ldots m_{s-1}$.Assim,

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_1 \cdots m_{s-1}} (H_1 \cap \ldots \cap H_{s-1})x_i.$$

Seja $H_s \leqslant w(G)$ com w-índice m_s, então $G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_s} H_s y_i$.
Devemos mostrar que existem $z_1, \ldots, z_{m_1 \cdots m_s}$ tais que:

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_1 \cdots m_s} (H_1 \cap \ldots \cap H_s)z_i$$

Para isso basta fazer $H_1 \cap \ldots \cap H_{s-1} = H$ e $H_s = K$. Então, pelo Lema 2.2, temos

$$G_w \subseteq \bigcup_{i,j}(Hx_i \cap Ky_j) = \bigcup_{i,j}(Hz_{ij} \cap Kz_{ij}) = \bigcup_{i,j}(H \cap K)z_{ij}$$

onde $z_{ij} \in Hx_i \cap Ky_j$. Desde que $1 \leqslant i \leqslant m_1 \cdots m_{s-1}$ e $1 \leqslant j \leqslant m_s$, segue que $1 \leqslant ij \leqslant m_1 \cdots m_s$, portanto, $H \cap K = H_1 \cap \ldots \cap H_{s-1} \cap H_s$ tem w-índice no máximo $m_1 \cdots m_s$.

■

Lema 2.3. *Um grupo* G *é um* $BFC(w)$*-grupo de índice* m *se, e somente se,* $C_{w(G)}(x)$ *tem* w*-índice no máximo* m*, para todo* $x \in G$*.*

Prova: $\Rightarrow\rfloor$ Suponha que G é um $BFC(w)$-grupo tal que $|x^{G_w}| \leqslant m$, para todo $x \in G$. Então, para cada $x \in G$, existem $g_1, \ldots, g_s \in G_w$ dois a dois distintos tais que

$$x^{G_w} = \{x^{g_1}, \ldots, x^{g_s}\}, \qquad \text{onde} \qquad 1 \leqslant s \leqslant m$$

Se mostrarmos que $G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x)g_i$, então $C_{w(G)}(x)$ terá w-índice no máximo s.

Para isso, tome $h \in G_w$ um w-valor qualquer. Assim,

$$x^h \in x^{G_w} \Rightarrow x^h = x^{g_i},$$

para algum $1 \leqslant i \leqslant m$.

Portanto,

$$\begin{aligned} h^{-1}xh = g_i^{-1}xg_i &\Rightarrow hh^{-1}xhg_i^{-1} = hg_i^{-1}xg_ig_i^{-1} \\ &\Rightarrow xhg_i^{-1} = hg_i^{-1}x \\ &\Rightarrow hg_i^{-1} \in C_{w(G)}(x) \\ &\Rightarrow h \in C_{w(G)}(x)g_i. \end{aligned}$$

Como h foi tomado arbitrariamente, temos $G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x)g_i$. Desde que $1 \leqslant s \leqslant m$, segue que $C_{w(G)}(x)$ tem w-índice no máximo m, para todo

$x \in G$.

$\Leftarrow]$ Reciprocamente, suponha que $C_{w(G)}(x)$ tenha w-índice no máximo m, para todo $x \in G$. Então existem $g_1, \ldots, g_s \in w(G)$, com $1 \leqslant s \leqslant m$, tais que

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x)g_i.$$

Dessa forma, dado $h \in G_w$, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $h \in C_{w(G)}(x)g_i$. Daí

$$\begin{aligned} hg_i^{-1} \in C_{w(G)}(x) &\Rightarrow xhg_i^{-1} = hg_i^{-1}x \\ &\Rightarrow h^{-1}xhg_i^{-1}g_i = h^{-1}hg_i^{-1}xg_i \\ &\Rightarrow x^h = x^{g_i} \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, s\}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $x^{G_w} = \{x^{g_1}, \ldots, x^{g_s}\}$ é finito, para todo $x \in G$, e não excede m, isto é, G é um $BFC(w)$-grupo.

■

Lema 2.4. *Seja w uma palavra limitadamente concisa e $G = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ um grupo finitamente gerado. Se G é um $BFC(w)$-grupo tal que $|x^{G_w}| \leqslant m$, para todo $x \in G$, então o índice de $w(G) \cap Z(G)$ em $w(G)$ é $\{w, m\}$-limitado.*

Prova: Primeiro vamos mostrar que

$$w(G) \cap Z(G) = \bigcap_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x_i). \tag{2.4}$$

Tome $y \in w(G) \cap Z(G)$, então $y \in w(G)$ e $y \in Z(G)$, assim $y \in C_{w(G)}(x_i)$, para todo $i = 1, \ldots, s$, logo $y \in \bigcap_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x_i)$.

Por outro lado, se $y \in \bigcap_{i=1}^{s} C_{w(G)}(x_i)$, então $y \in w(G)$ e, além disso, $yx_i = x_iy$, para todo $i = 1 \ldots, s$. Resta verificar se $yg = gy$, para g tomado arbitráriamente em G, o que implicará $y \in Z(G)$.
De fato, dado $g \in G$ arbitrário, temos

$$yg = y(x_1^{\alpha_1}\dots x_s^{\alpha_s}) \underbrace{=}_{yx_i^{\alpha_i} = x_i^{\alpha_i}y} (x_1^{\alpha_1}\dots x_s^{\alpha_s})y = gy.$$

Portanto, $y \in Z(G)$ e daí $y \in w(G)\cap Z(G)$.

Agora provaremos o Lema 2.4

Seja G um BFC(w)-grupo de índice m. Pelo Lema 2.3, $C_{w(G)}(x_i)$ tem w-índice no máximo m, para todo $x_i, i = 1,\dots,s$.
Pelo Lema 2.1 e pela igualdade (2.4), segue que $w(G)\cap Z(G)$ tem w-índice no máximo m^s.
Faça $H = w(G)\cap Z(G)$. Observe que $H \trianglelefteq G$, pois $H \leqslant Z(G)$, então podemos considerar

$$K = \frac{G}{H}.$$

Considere w uma palavra limitadamente concisa definida da seguinte forma

$$w = x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n},\ \text{com } x_i \neq x_j \text{ e } l_i \in \mathbb{Z}.$$

Seja K_w o conjunto dos w-valores de K, vamos verificar que

$$K_w = \{Hg;\ g \in G_w\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} w(Hg_1,\dots,Hg_n) = (Hg_1)^{l_1}\cdots(Hg_n)^{l_n} &= Hg_1^{l_1}\cdots Hg_n^{l_n} \\ &= H(g_1^{l_1}\cdots g_n^{l_n}) \\ &= H\underbrace{w(g_1,\dots,g_n)}_{g\ \in G_w} \end{aligned}$$

Afirmação: K_w é finito e limitado.
Como $H = w(G)\cap Z(G)$ tem w-índice no máximo m^s, temos que

$$G_w \subseteq \bigcup_{i=1}^{m^s} Hg_i.$$

Portanto, dado $Hg \in K_w$, com $g \in G_w$, segue que

$$g \in \bigcup_{i=1}^{m^s} Hg_i \quad\Rightarrow\quad g \in Hg_i,\ \text{para algum i } \in \{1,\dots,m^s\} \quad\Rightarrow\quad Hg = Hg_i.$$

Portanto, $|K_w| \leqslant m^s$.

Sendo w uma palavra limitadamente concisa, segue da definição que $w(K) = \langle K_w \rangle$ é também finito e limitado por uma constante que depende somente de m e w, ou seja,

$$|w(K)| \leqslant c(m^s, w).$$

Observe que

$$\frac{w(G)}{H} = \{Hg; g \in w(G)\} = \langle Hg; g \in G_w \rangle = \langle K_w \rangle = w(K),$$

Logo $|w(G) : w(G) \cap Z(G)| = \left| \dfrac{w(G)}{w(G) \cap Z(G)} \right| = |w(K)| \leqslant c(m^s)$,

Ou seja, o índice de $w(G) \cap Z(G)$ em $w(G)$ é limitado superiormente por uma função que só depende de w e m, portanto, é $\{w, m\}$-limitado.

■

Lema 2.5. *Seja* w *uma palavra limitadamente concisa,* G *um* $BFC(w)$*-grupo de índice* m *e* $y \in G_w$*. Então existe um inteiro positivo* n*,* $\{w, m\}$*-limitado tal que* $y^n \in Z(G)$.

Prova: Seja $x \in G$ um elemento arbitrário de G e seja $y = w(g_1, \ldots, g_s) \in G_w$, onde $g_i \in G$. Defina o subgrupo:

$$E = \langle x, g_1, \ldots, g_s \rangle.$$

Então $x \in E$ e $y \in E_w = \{w(h_1, \ldots, h_s);\ h_i \in E\} \subseteq w(E)$.
Como $E \subseteq G$ segue que E é um $BFC(w)$-grupo finitamente gerado.
Desde que $|\ x^{G_w}\ | \leqslant m$ para todo $x \in G$, segue que $|x^{E_w}| \leqslant m$ para todo $x \in E$.
Assim, pelo Lema 2.4, o índice de $w(E) \cap Z(E)$ é $\{w, m\}$-limitado, ou seja,

$$\left| \frac{w(E)}{w(E) \cap Z(E)} \right| = |\{(w(E) \cap Z(E))g; \quad g \in w(E)\}| \leqslant c(w, m)$$

Logo, deve existir um inteiro $n \leqslant c(w, m)$ tal que y^n comuta com x. De fato, basta considerar n como sendo a ordem de $(w(E) \cap Z(E))y$, então:

$$(w(E) \cap Z(E))y^n = [(w(E) \cap Z(E))y]^n = w(E) \cap Z(E)$$

Portanto $y^n \in w(E) \cap Z(E)$ e , em particular, $y^n \in Z(E)$. Como $x \in E$, temos $y^n x = xy^n$. Como x foi tomado arbitrário em G, concluímos que $y^n \in Z(G)$.

$\blacksquare$

Agora vamos assumir que w é uma palavra limitadamente concisa e G é um $BFC(w)$-grupo.

Considere, como no Lema 2.5, G um $BFC(w)$-grupo de índice m, ou seja, $|x^{G_w}| \leqslant m$, para todo $x \in G$.

Seja x um elemento arbitrário de G e $u_1, \ldots, u_k = 1$ elementos de G_w tais que

$$x^{G_w} = \{x^{u_1}, x^{u_2}, \ldots, x^{u_k} = x\}.$$

Como $|x^{G_w}| \leqslant m$, segue que $k \leqslant m$.

Escolha arbitrariamente um elemento $h \in w(G)$.

Afirmação: h pode ser escrito como um produto de alguns elementos de G_w e um elemento de $Z(G)$.

De fato, pelo Lema 2.5, dado $y \in G_w$, existe um inteiro n, $\{w, m\}$-limitado tal que $y^n \in Z(G)$.

Faça $\overline{G} = \dfrac{G}{Z}$, onde $Z = Z(G)$, então $\overline{G}_w = \{gZ;\ g \in G_w\}$

Tome $\overline{y} \in \overline{G}_w$. Então $\overline{y} = yZ$, portanto, $(\overline{y})^n = (yZ)^n = y^n Z = Z$.

Isso significa que todo w-valor de $\overline{G}$ tem ordem finita módulo $Z(G)$ e, assim, todo elemento de $w(\overline{G})$ é um produto finito de elementos de $\overline{G}_w$.

Perceba que $w(\overline{G}) = \dfrac{w(G)Z}{Z} = \langle \overline{G}_w \rangle = \langle \overline{y};\ y \in G_w \rangle$.

Assim, dado $h \in w(\overline{G})$ temos $\overline{h} = \overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r = \overline{y_1 \cdots y_r}$.

Daí $hZ = (y_1 \cdots y_r)Z$ e, portanto, $h = y_1 \cdots y_r z; z \in Z$, como queríamos demonstrar.

Lema 2.6. *Seja* $h = zd_1 \dots d_q$, *onde* $z \in Z(G)$ *e* $d_1 \dots d_q \in G_w$. *Então*

$$x^h = x^{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_q}}$$

para certos $i_1, \dots, i_q$ *tais que* $1 \leqslant i_1, i_2, \dots, i_q \leqslant k$.

Prova: Usaremos indução sobre $q \geqslant 1$.

- Se q=1, então o Lema é de fato verdadeiro pois, para $h = zd_1$, temos

  $$x^h = x^{zd_1} = (zd_1)^{-1}x(zd_1) = d_1^{-1}z^{-1}xzd_1 = d_1^{-1}xd_1 = x^{d_1} = x^{u_i},$$

  para algum $1 \leqslant i \leqslant k$.

- Suponha que o Lema seja verdadeiro para elementos de $w(G)$ que podem ser escritos como produto de no máximo $q-1$ elementos de G_w. Já temos também que: $x^{d_1} = x^{u_i}$, para algum $1 \leqslant i \leqslant k$.
  Daí,

  $$\begin{aligned} x^h &= x^{zd_1 \cdots d_q} = (zd_1 \cdots d_q)^{-1}x(zd_1 \cdots d_q) \\ &= d_q^{-1} \cdots d_1^{-1}(z^{-1}xz)d_1 \cdots d_q \\ &= d_q^{-1} \cdots d_1^{-1}xd_1 \cdots d_q \\ &= (d_1 \cdots d_q)^{-1}x(d_1 \cdots d_q) = x^{d_1 \cdots d_q} \\ &= (x^{d_1})^{d_2 \cdots d_q} \\ &= (x^{u_i})^{d_2 \cdots d_q} = x^{u_i d_2 (u_i^{-1} u_i) d_3 (u_i^{-1} u_i) \cdots (u_i^{-1} u_i) d_q (u_i^{-1} u_i)} \\ &= x^{d_2' d_3' \cdots d_q' u_i} \qquad \text{onde} \quad d_j' = u_i d_j u_i^{-1} \end{aligned}$$

Note que $d_j' = u_i d_j u_i^{-1} \in G_w$, para todo j. De fato:

$$d_j' = u_i d_j u_i^{-1} = d_j^{u_i^{-1}} = (g_1^{l_1} \cdots g_n^{l_n})^{u_i^{-1}} = (g_1^{u_i^{-1}})^{l_1} \cdots (g_n^{u_i^{-1}})^{l_n} = \underbrace{w(g_1^{u_i^{-1}} \cdots g_n^{u_i^{-1}})}_{\in G_w}$$

Pela hipótese de indução,

$$x^{d_2' d_3' \cdots d_q'} = x^{u_{i_1} \cdots \, u_{i_{q-1}}},$$

para certos $i_1, \dots, i_{q-1}$, logo

$$x^h = x^{d_2' d_3' \cdots d_q' u_i} = x^{u_{i_1} \cdots \, u_{i_{q-1}} u_i},$$

como queríamos demonstrar.

■

Vamos definir agora, um tipo de ordem lexicográfica do final para o início, análoga aquela que definimos para provar o Lema de Dietzmann .

Defina uma ordem $<$ sobre o conjunto de todos os produtos da forma: $u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_q}$ $(q \geqslant 1, 1 \leqslant i_s \leqslant k \quad \forall \ \ s)$ como segue.
Escreva,

$$u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_q} < u_{i'_1}u_{i'_2}\cdots u_{i'_{q'}}$$

Se e somente se uma das seguintes condições forem satisfeitas:

i) $q < q'$

ii) $q = q'$ e existir um inteiro $t \leqslant q$ tal que $i_t < i'_t$ e $i_s = i'_{s'}$, $\forall \ s > t$.

Suponha agora que $u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_q}$ é o menor produto dos elementos $u_{i_1}\cdots u_{i_k}$ tal que:

$$x^h = x^{u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_q}}$$

Devemos mostrar que $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots \geqslant i_q$.
De fato, suponha por absurdo que $i_n < i_{n+1}$, para algum $1 \leqslant n \leqslant q$. Então teremos

$$x^h = x^{u_{i_1}\cdots u_{i_{n-1}}u_{i_n}u_{i_{n+1}}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q}} = x^{u_{i_1}\cdots u_{i_{n-1}}u' u_{i_n}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q}},$$

onde $u' = u_{i_n}u_{i_{n+1}}u_{i_n}^{-1} \ \in \ G_w$. Portanto,

$$x^h = \left(x^{u_{i_1}\cdots u_{i_{n-1}}u'}\right)^{u_{i_n}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q}}$$

Pelo Lema 2.6 temos:

$$x^{u_{i_1}\cdots u_{i_{n-1}}u'} = x^{u_{i'_1}\cdots u_{i'_n}u_{i'_{n+1}}}$$

Para certos $i'_1, \ldots, i'_{n-1}, i'_{n+1}$. Daí

$$x^h = x^{u_{i'_1}\cdots u_{i'_n}u_{i'_{n+1}}u_{i_n}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q}}$$

Mas isso é uma contradição com a escolha do produto $u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_q}$ como sendo o menor, pois

$$u_{i'_1}\cdots u_{i'_n}u_{i'_{n+1}}u_{i_n}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q} < u_{i_1}\cdots u_{i_{n-1}}u_{i_n}u_{i_{n+1}}u_{i_{n+2}}\cdots u_{i_q}$$

já que estamos supondo $i_n < i_{n+1}$. Logo

$$x^h = x^{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_q}},$$

onde $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots \geqslant i_q$, ou equivalentemente,

$$x^h = x^{u_{k-1}^{l_{k-1}} \cdots u_1^{l_1}}$$

para inteiros não negativos $l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ onde $k \leqslant m$.

Pelo Lema 2.5, existe um inteiro positivo n, $\{w, m\}$-limitado tal que $y^n \in Z(G)$, para cada $y \in G_w$. Assim, podemos assumir $0 \leqslant l_i < n$, para todo i. Isso significa que existem, no máximo, n^{m-1} possibilidades para expressar x^h, pois

$$|\{u_{k-1}^{l_{k-1}} \cdots u_1^{l_1}\}| \leqslant n^{m-1}$$

e, portanto,

$$|x^{w(G)}| \leqslant n^{m-1}.$$

Isso significa que $w(G)$ está BFC-mergulhado em G, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, suponha que o subgrupo verbal $w(G)$ está BFC-mergulhado em G, vamos mostar que G é um BFC(w)-grupo.

De fato, temos $G_w \subset w(G)$. Assim, $x^{G_w} \subset x^{w(G)}$, como $x^{w(G)}$ é finito e limitado por uma constante que independe da escolha do x, temos que x^{G_w} também é finito e limitado por essa mesma constante, logo G é BFC(w)-grupo.

■

Capítulo 3

Palavras Limitadamente Concisas

Nesse capítulo mostraremos que algumas das palavras mais comuns são limitadamente concisas.

3.1 Palavra Não Comutador

Vamos iniciar este capítulo mostrando que toda palavra não comutador é limitadamente concisa.

- Uma palavra é chamada **não comutador** se, vista como um elemento de um grupo livre F, não pertence ao subgrupo derivado F'.

Suponha $w(x_1, \ldots, x_n)$ uma palavra não comutador. Então, para algum $i = 1, \ldots, n$, a soma dos expoentes de x_i em w é não-nula. Digamos que esta soma seja $r > 0$.
Dado um grupo G, suponha que G_w seja finito com no máximo m w-valores, ou seja, $|G_w| \leqslant m$.

Faça as seguintes substituições:

Substitua x_i por $g \in G$ e x_j por 1, para todo $j \neq i$.

Dessa forma w assume o valor g^r que pertencerá a G_w para todo $g \in G$.

Logo $(g^r)^s \in G_w$, para todo s, pois $(g^r)^s = (g^s)^r = (h)^r \in G_w$.

Daí concluímos que $\langle g^r \rangle \subseteq G_w$ e, portanto, $|\langle g^r \rangle| \leqslant m$. Assim,

$$o(g^r) = m' \leqslant m \quad \Rightarrow \quad \circ(g) = rm^{'} \leqslant rm,$$

ou seja, todo elemento $g \in G$ tem ordem finita.

Observemos agora que G_w é um subconjunto normal finito, vimos acima que w assume o valor g^r que pertencerá a G_w, para todo $g \in G$. Devemos verificar que $(w(x_1, \ldots, x_n))^y \in G$, para todo $y \in G$. De fato,

$$\begin{aligned} (w(x_1, \ldots, x_n))^y &= (g^r)^y = y^{-1}gy = y^{-1}\underbrace{g \cdots g}_{r}y = y^{-1}g(yy^{-1}) \cdots (yy^{-1})gy \\ &= \underbrace{g^y \cdots g^y}_{r} = (g^y)^r \in G_w. \end{aligned}$$

Além disso, provamos que todo elemento de G_w tem ordem no máximo mr. Assim, pelo Lema 2.1 (Dietzmann),

$$\langle G_w \rangle = w(G) \text{ tem no máximo } (mr)^m \text{ elementos.}$$

Perceba que a finitude de G_w implica na finitude de $w(G)$ e esta depende apenas de m, portanto, w é limitadamente concisa.

3.2 Palavra Central Inferior

Agora vamos mostrar que a palavra central inferior também é limitadamente concisa.

Para um número natural $k \geqslant 1$, as **palavras centrais inferiores** γ_k são definidas recursivamente por:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x \\ \gamma_2(x_1, x_2) &= [x_1, x_2] \\ &\vdots \\ \gamma_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) &= [\gamma_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}] \end{aligned}$$

Claramente, o subgrupo verbal de um grupo G que corresponde a γ_k é precisamente o k-ésimo termo da **série central inferior de** G, definida da seguinte forma:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G], \ldots, \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Denotaremos por $X_k(G)$ o conjunto de todos os γ_k-valores, ou seja:

$$X_k(G) = \{[g_1, \ldots, g_k]; \quad g_i \in G\}$$

O conjunto X_k em geral não é um subgrupo, pois o produto de dois elementos de $X_k(G)$ pode não pertencer a $X_k(G)$. Vale ressaltar, no entanto, que o conjunto X_k é simétrico, ou seja, $x \in X_k$ se, e somente se, $x^{-1} \in X_k$.

De fato, tome $x = [x_1, \ldots, x_k] = [[x_1, \ldots, x_{k-1}], x_k]$,
então

$$\begin{aligned} x^{-1} &= [x_k, [x_1, \ldots, x_{k-1}]] = x_k^{-1}[x_1, \ldots, x_{k-1}]^{-1}x_k[x_1, \ldots, x_{k-1}] \\ &= x_k^{-1}[x_1, \ldots, x_{k-1}]^{-1}(x_k^{-1})^{-1}[x_1, \ldots, x_{k-1}](x_k^{-1}x_k) \\ &= x_k^{-1}[[x_1, \ldots, x_{k-1}], x_k^{-1}]x_k = x_k^{-1}[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{-1}]x_k \\ &= [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{-1}]^{x_k} \quad \in \quad X_k(G), \end{aligned}$$

pois $X_k(G)$ é um subconjunto normal.

O próximo teorema mostra que as palavras γ_k são limitadamente concisas.

Teorema 3.1. *Sejam* m *um inteiro positivo e* G *um grupo tal que* $|X_k| = m$*. Então*

$$|\gamma_k(G)| \leqslant m^{m-1}$$

Na demonstração desse teorema utilizaremos o Lema que iremos demonstrar agora.

Lema 3.1. *Seja* G *um grupo e considere* $a, b \in G$*. Seja* $k \geqslant 2$ *um inteiro. Então*

$$[a, b^k] = [a, b]^k[a, b, b][a, b^2, b] \cdots [a, b^{k-1}, b]$$

Prova: Usaremos indução sobre $k \geqslant 2$.

Vamos verificar inicialmente que:

$$[x, yz] \underbrace{=}_{(1)} [x, z][x, y]^z \underbrace{=}_{(2)} [x, z][x, y][x, y, z] \tag{3.1}$$

A igualdade (1) foi mostrada na Proposição 1.5, (iii) então resta verificar (2), ou seja, $[x, y]^z = [x, y][x, y, z]$

Observe que

$$\begin{aligned} [x, y, z] = [[x, y], z] = [x^{-1}y^{-1}xy, z] &= (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1}z^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)z \\ &= (y^{-1}x^{-1}yx)z^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)z, \end{aligned}$$

Logo

$$[x, y][x, y, z] = [x, y](y^{-1}x^{-1}yx)z^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)z = [x, y]^z$$

$$\text{e assim} \quad [x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z].$$

Portanto, se $k = 2$, o lema é válido, basta fazer $y = z = b$ e $x = a$ em (3.1), isto é,

$$[a, b^2] = [a, b][a, b][a, b, b] = [a, b]^2[a, b, b].$$

Suponha que vale para $k - 1$, ou seja,

$$[a, b^{k-1}] = [a, b]^{k-1}[a, b, b][a, b^2, b] \cdots [a, b^{k-2}, b] \tag{3.2}$$

Então:

$$\begin{aligned} [a, b^k] &= [a, b^{k-1}b] \underbrace{=}_{(3.1)} [a, b][a, b^{k-1}]^b = [a, b][a, b^{k-1}][a, b^{k-1}, b] \\ &\underbrace{=}_{(3.2)} [a, b][a, b]^{k-1}[a, b, b][a, b^2, b] \cdots [a, b^{k-2}, b][a, b^{k-1}, b] \\ &= [a, b]^k[a, b, b][a, b^2, b] \cdots [a, b^{k-1}, b] \end{aligned}$$

■

Assuma as hipóteses do Teorema 3.1.

Seja $X_k = \{c_1 = 1, c_2, \ldots, c_m\}$. Defina uma ordem $<$ sobre o conjunto de todos os produtos da forma $c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q}$ ($q \geqslant 1$, $2 \leqslant i_j \leqslant m$, para todo $j = 1, \ldots, q$) do seguinte modo:

$$c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q} < c_{i'_1}c_{i'_2}\cdots c_{i'_{q'}}$$

Se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $q < q'$

(ii) $q = q'$ e existe um inteiro t, $1 \leqslant t \leqslant q$, tal que $i_t < i'_t$ e
$i_s = i'_s$, para todo $s < t$.

Desde que X_k é simétrico, qualquer elemento h de $\gamma_k(G)$ pode ser escrito como um produto de elementos de X_k.

Seja $h = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q}$ o menor destes produtos de elementos não triviais de X_k. Mostremos que $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_q$.

De fato, suponha que $i_j > i_{j+1}$, para algum j, então teríamos

$$h = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q} = c_{i_1}\cdots c_{i_{j-1}}c_{i_{j+1}}c'c_{i_{j+2}}\cdots c_{i_q}$$

onde $c' = c_{i_{j+1}}^{-1}c_{i_j}c_{i_{j+1}} = c_{i_j}^{c_{i_{j+1}}} \in X_k$, pois X_k é um conjunto normal, o que contraria a escolha do produto $h = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q}$ como sendo o menor, pois

$$c_{i_1}\cdots c_{i_{j-1}}c_{i_j}c_{i_{j+1}}c_{i_{j+2}}\cdots c_{i_q} > c_{i_1}\cdots c_{i_{j-1}}c_{i_{j+1}}c'c_{i_{j+2}}\cdots c_{i_q},$$

já que por hipótese $i_j > i_{j+1}$.

Assim , para cada $h \in \gamma_k(G)$, temos
$h = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_q}$, com $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_q$, isto é,

$$h = c_1^{l_1}c_2^{l_2}\cdots c_m^{l_m},$$

para inteiros não-negativos $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Afirmação: Para qualquer $b \in G$, existe um inteiro positivo $n \leqslant m$ tal que b^n centraliza X_{k-1}.

Tome $w \in X_{k-1}$ e considere o conjunto

$$M = \{[w, b^i]; \quad 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

Perceba que $M \subseteq X_k$, e que X_k possui $m - 1$ elementos não triviais já que $X_k = \{c_1 = 1, c_2, \ldots, c_m\}$.

Então devemos ter $[w, b^n] = 1$, para algum $n \leqslant m$, ou $[w, b^i] = [w, b^j]$, para certos i , j tais que $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

- Se o primeiro caso ocorrer, a afirmação está provada.
- Ocorrendo o segundo temos: $w^{-1}b^{-i}wb^i = w^{-1}b^{-j}wb^j \Rightarrow b^{-i}wb^i = b^{-j}wb^j$, então: $w = b^ib^{-j}wb^jb^{-i} = b^{-(j-i)}wb^{j-i} = w^{b^{(j-i)}}$, ou seja, $[w, b^n] = 1$, para $n = j - i$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$

Agora estamos em condições de completar a prova do teorema.

Seja h um elemento arbitrário de $\gamma_k(G)$ e seja $h = c_2^{l_2}c_3^{l_3} \cdots c_m^{l_m}$ o menor produto escolhido anteriormente. Vamos verificar que $0 \leqslant l_i < m$, para todo $2 \leqslant i \leqslant m$.
Suponha, por absurdo, que $l_i \geqslant m$, para algum i.
Seja $c_i = [w, b]$, onde $w = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}]$ e $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b \in G$.

Então, pela afirmação anterior, existe um inteiro positivo $n \leqslant m$ tal que:

$$[w, b^n] = 1.$$

Pelo Lema 3.1, temos

$$1 = [w, b^n] = [w, b]^n[w, b, b][w, b^2, b] \cdots [w, b^{n-1}, b]$$

E, portanto, $[w, b]^n = d_1 \cdots d_{n-1}$, onde os $d_i{}'s \in X_k$.

O mesmo ocorre para m, ou seja: $c_i^m = [w, b]^m = d_1 \cdots d_{m-1}$ para certos $d_i{}'s \in X_k$. Portanto,

$$\begin{aligned} h &= c_2^{l_2} \cdots c_{i-1}^{l_{i-1}} c_i^{l_i} (c_i^{-m} c_i^m) c_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots c_m^{l_m} \\ &= c_2^{l_2} \cdots c_{i-1}^{l_{i-1}} c_i^{l_i - m} (d_1 d_2 \cdots d_{m-1}) c_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots c_m^{l_m} \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1} \in X_k$.
Isto é uma contradição com a escolha do produto

$$h = c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_q} = c_2^{l_2} c_3^{l_3} \cdots c_m^{l_m}$$

Porque o produto (3.3) contém $q - 1$ termos e, portanto, é menor que $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_q}$.

Dessa forma, para cada elemento $h \in \gamma_k(G)$, temos:

$$h = \underbrace{c_2^{l_2} c_3^{l_3} \cdots c_m^{l_m}}_{m-1}$$

onde $0 \leqslant l_i < m$ para cada $2 \leqslant i \leqslant m$. Isso significa que $\mid \gamma_k(G) \mid \leqslant m^{m-1}$, como queríamos demonstrar.

■

3.3 Palavra Derivada

Seja k um inteiro não negativo. Nosso próximo objetivo é mostrar que as **palavras derivadas** δ_k, definidas recursivamente pelas equações:

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= x \\ \delta_1(x_1, x_2) &= [\delta_0(x_1), \delta_0(x_2)] \\ &\vdots \\ \delta_k(x_1, \ldots, x_{2^k}) &= [\delta_{k-1}(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \ldots, x_{2^k})], \end{aligned}$$

são limitadamente concisas.

Dado um grupo G, denote por $Y_k = Y_k(G)$ o conjunto de todos os δ_k-comutadores em G, isto é,

$$Y_k = Y_k(G) = \{\delta_k(g_1, g_2, \ldots, g_{2^k}); g_i \in G\}.$$

Seja $T^k(G)$ o subgrupo de G gerado por todos os subgrupos cíclicos contidos em Y_k.
Faça $T_1^k(G) = T^k(G)$ e, para $i = 1, 2, \ldots$, defina

$$T_{i+1}^k(G)\text{como sendo a pré-imagem em } G \text{ de } T^k\left(\frac{G}{T_i^k(G)}\right),$$

ou seja,

- $T^k(G) = T_1^k(G) = \langle x \in G / \langle x\rangle \subseteq Y_k(G)\rangle$
- $\dfrac{T_{i+1}^k(G)}{T_i^k(G)} = T^k\left(\dfrac{G}{T_i^k(G)}\right) \leqslant \left\langle Y_k\left(\dfrac{G}{T_i^k(G)}\right)\right\rangle$

Portanto,

$$T_{i+1}^k(G) = \left\langle x \in G / \left\langle xT_i^k(G)\right\rangle \subseteq Y_k\left(\frac{G}{T_i^k(G)}\right)\right\rangle$$

Lema 3.2. *Seja G um grupo solúvel com comprimento derivado* $k+1$.
Então $T_{2^k}^k(G) = G^{(k)}$

Prova: Usaremos indução sobre $k \geqslant 0$.
Perceba que o Lema é válido para $k = 0$ pois:

$$T_{2^0}^0(G) = T_1^0(G) = T^0(G) = \langle x \in G / \langle x\rangle \subseteq Y_0(G) = G\rangle = G = G^{(0)}$$

Vamos verificar que para $k = 1$ o Lema também é válido e depois provaremos, por indução, para um k qualquer.
Precisamos mostrar que $T_2(G) = G'$.
Do Lema 3.1, sabemos que $[a, b^2] = [a, b]^2[a, b, b]$ para qualquer G.
Temos

$$\frac{T_2(G)}{T_1(G)} = \left\langle xT_1 \;/\; \langle xT_1\rangle \subseteq Y_1\left(\frac{G}{T_1}\right)\right\rangle.$$

Como

$$Y_1\left(\frac{G}{T_1}\right) = \{gT_1 \;/\; g \in Y_1(G)\} = Y_1(G)T_1(G),$$

segue que $T_2(G) = \langle x \in G \;/\; \langle x\rangle \subseteq Y_1(G)T_1(G)\rangle$ e é claro que $T_2(G) \subseteq G'$.

Reciprocamente, se $x = [a, b] \in G'$, então $[x^2, b] = [x, b]^x[x, b] = [x, b]^2$ pois $G^{(2)} = 1$ e $x \in G'$, daí $[x, b] \in T_1(G)$.
Observe que,

$$[a, b^2] = [a, b]^2[a, b, b] = [a, b]^2[x, b] \Rightarrow [a, b]^2 = [a, b^2][x, b]^{-1} \in Y_1(G)T_1(G).$$

Seguindo, recursivamente, esse processo podemos concluir que

$$\langle x\rangle \subseteq Y_1(G)T_1(G)$$

e, portanto, $x \in T_2(G)$.
Suponha que o lema vale para $k - 1$, ou seja,

$$T^{k-1}_{2^{k-1}}(G) = G^{(k-1)},$$

para qualquer grupo com comprimento derivado k.
Vamos mostrar que vale para k.
Se aplicarmos a hipótese de indução para G' no lugar de G conluímos que:

$$T^{k-1}_{2^{k-1}}(G') = (G')^{(k-1)} = G^{(k)}$$

Fazendo o mesmo para o quociente $\frac{G}{G^{(k)}}$, temos

$$T^{k-1}_{2^{k-1}}\left(\frac{G}{G^{(k)}}\right) = \left(\frac{G}{G^{(k)}}\right)^{k-1} = \frac{G^{(k-1)}}{G^{(k)}}$$

Defina

$$\begin{aligned} R_i &= T^{k-1}_i(G'), && \text{se } 1 \leqslant i \leqslant 2^{k-1} \text{ e} \\ \frac{R_i}{G^{(k)}} &= T^{k-1}_{i-2^{k-1}}\left(\frac{G}{G^{(k)}}\right), && \text{se } 2^{k-1} \leqslant i \leqslant 2^k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{R_{2^k}}{G^{(k)}} = T^{k-1}_{2^k-2^{k-1}}\left(\frac{G}{G^{(k)}}\right) = T^{k-1}_{2^{k-1}}\left(\frac{G}{G^{(k)}}\right) = \frac{G^{(k-1)}}{G^{(k)}},$$

portanto,

$$R_{2^k} = G^{(k-1)}$$

OBS: Para simplificar a notação escreva: $T_i = T^k_i(G)$.

Mostraremos inicialmente, por indução sobre i, que $T_i \leqslant G^{(k)}$

- Para $i = 1$, temos

$$T_1^k = \langle x; \langle x\rangle \subseteq Y_k(G)\rangle \leqslant \langle Y_k\rangle = G^{(k)} \quad \Rightarrow \quad T_1 \leqslant G^{(k)}.$$

- Suponha que vale para $i-1$, ou seja, $T_{i-1} \leqslant G^{(k)}$. Devemos verificar que vale para i.

$$\frac{T_i}{T_{i-1}} \leqslant \left\langle Y_k\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)\right\rangle = \frac{\langle Y_k\rangle T_{i-1}}{T_{i-1}} = \frac{G^{(k)}T_{i-1}}{T_{i-1}} = \frac{G^{(k)}}{T_{i-1}} \;\Rightarrow\; T_i \leqslant G^{(k)}.$$

Em particular, temos:

$$T_{2^k} \leqslant G^{(k)}$$

Agora resta provar que $G^{(k)} \leqslant T_{2^k}$ e daí o Lema estará demonstrado.
Perceba que isto é equivalente a mostrar que

$$[R_i, G^{(k-1)}] \leqslant T_i$$

De fato, como $R_{2^k} = G^{(k-1)}$, então para $i = 2^k$ temos

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] = [R_{2^k}, G^{(k-1)}] \leqslant T_{2^k}$$

e assim teremos a igualdade $G^{(k)} = T_{2^k}$.

Novamente usaremos indução sobre i. Para mostrar que $[R_1, G^{(k-1)}] \leqslant T_1$, escolha arbitrariamente $x \in Y_{k-1}(G^{'})$.
tal que $\langle x\rangle \subseteq Y_{k-1}(G^{'})$ e $y \in Y_{k-1}(G)$

Perceba que $x \in G^{(k)}$, pois $\langle x\rangle \subseteq Y_{k-1}(G^{'}) \subseteq \langle Y_{k-1}(G^{'})\rangle = G^{(k)}$

Desde que $G^{(k)}$ é um subgrupo normal abeliano de G, para qualquer j temos

$$[x, y]^j = [x^j, y] \quad \in \quad [Y_{k-1}(G^{'}), Y_{k-1}(G)] \subseteq Y_k(G) \quad \forall \; j \; \in \; \mathbb{Z}.$$

OBS: A igualdade $[x, y]^j = [x^j, y]$ pode ser mostrada por indução sobre j, utilizando apenas a definição de comutador e o fato que G^k é um subgrupo normal abeliano de G.

Lembre que $T_1(G) = \langle x; \langle x \rangle \subseteq Y_k(G) \rangle$.
Como $[x,y]^j \in Y_k(G)$ $\forall$ $j \in \mathbb{Z}$, então $\langle [x,y] \rangle \subseteq Y_k(G)$ e assim $[x,y] \in T_1(G)$.

Desde que R_1 e $G^{(k-1)}$ são gerados, respectivamente, pelos elementos x e y descritos acima, segue que

$$[R_1, G^{(k-1)}] \leqslant T_1(G).$$

Suponha $i \geqslant 2$ e $[R_{i-1}, G^{(k-1)}] \leqslant T_{i-1}$ como sendo a nossa hipótese de indução.

OBS: Se mostrarmos o lema para o quociente $\dfrac{G}{T_{i-1}}$, ou seja,

$$\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)^{(k)} \leqslant T^k_{2^k}\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)$$

podemos concluir que $G^{(k)} \leqslant T^k_{2^k}(G)$.
De fato, como

$$T_{i-1} \leqslant G^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{T_{i-1}} \qquad \text{e}$$

$$T_{i-1} \leqslant T^k_{2^k}(G) \quad \Rightarrow \quad T^k_{2^k}\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \frac{T^k_{2^k}(G)}{T_{i-1}},$$

Temos

$$\frac{G^{(k)}}{T_{i-1}} = \left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)^{(k)} \leqslant T^k_{2^k}\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \frac{T^k_{2^k}(G)}{T_{i-1}}.$$

Portanto,

$$G^{(k)} \leqslant T^k_{2^k}(G).$$

Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que $R_{i-1}(G) \leqslant Z(G^{(k-1)})$.
De fato:

$$\left[R_{i-1}\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right), \left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)^{(k-1)}\right] = \left[\frac{R_{i-1}}{T_{i-1}}, \frac{G^{(k-1)}}{T_{i-1}}\right] = \frac{[R_{i-1}(G), G^{(k-1)}]T_{i-1}}{T_{i-1}} = \overline{1}$$

Isso significa que

$$R_{i-1}\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) \leqslant Z\left(\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right)^{(k-1)}\right).$$

Com base na observação feita acima, passando ao quociente $\dfrac{G}{T_{i-1}}$ podemos assumir que $R_{i-1}(G) \leqslant Z(G^{(k-1)})$.

Temos dois casos a serem analisados:

CASO 1: $2 \leqslant i \leqslant 2^{k-1}$.

Escolha arbitrariamente $x \in Y_{k-1}(G^{'})$ tal que $\langle x \rangle \subseteq Y_{k-1}(G^{'})R_{i-1}$ e $y \in Y_{k-1}(G)$. Como $x \in G^{(k)}$ e $G^{(k)}$ é subgrupo normal abeliano de $G^{(k-1)}$, podemos mostrar por indução que

$$[x, y]^j = [x^j, y], \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

e então concluir que

$$[x, y]^j = [x^j, y] \in [Y_{k-1}(G^{'}), Y_{k-1}(G)] \subseteq Y_k(G), \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Daí

$$[x, y]T_{i-1} \in Y_k\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \{gT_{i-1}; g \in Y_k\}.$$

Como

$$T_1\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \left\langle wT_{i-1} \in \frac{G}{T_{i-1}};\ \langle wT_{i-1} \rangle \subseteq Y_k(G)T_{i-1} \right\rangle,$$

segue que

$$[x, y]T_{i-1} \in T_1\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \frac{T_i}{T_{i-1}}.$$

Portanto,

$$[x, y] \in T_i.$$

Desde que R_i e $G^{(k-1)}$ são gerados, respectivamente, pelos x e y descritos acima, temos

$$[R_i, G^{(k-1)}] \leqslant T_i.$$

CASO 2: $i > 2^{k-1}$.

Escolha arbitráriamente x de $Y_{k-1}(G)$ tal que $\langle x \rangle \subseteq Y_{k-1}(G)R_{i-1}$ e $y \in$

$Y_{k-1}(G)$.

Observe que, para $i = 2^{k-1} + 1$, temos:

$$R_{i-1} = R_{2^{k-1}+1-1} = R_{2^{k-1}} = T^{k-1}_{2^{k-1}}(G) = (G')^{(k-1)} = G^{(k)}.$$

Como estamos supondo $R_{i-1} \leqslant Z(G^{(k-1)})$ segue que

$$[R_{i-1}, G^{(k-1)}] = 1.$$

Daí

$$\begin{aligned} [R_{i-1}, G^{(k-1)}] &= [R_{2^{k-1}}, G^{(k-1)}] = [G^{(k)}, G^{(k-1)}] \\ &= [[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], G^{(k-1)}] = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] = 1 \end{aligned}$$

Portanto $G^{(k-1)}$ é nilpotente de classe no máximo 2, ou seja:

$$(G^{(k-1)})' \leqslant Z(G^{(k-1)}).$$

Daí

$$G^{(k)} \leqslant Z(G^{(k-1)}).$$

Com isso podemos concluir novamente que $[x, y]^j = [x^j, y],$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Desde que $x^j \in Y_{k-1}(G)R_{i-1}$ e $R_{i-1} \leqslant Z(G^{k-1})$ temos, para todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$[x, y]^j = [x^j, y] \in [Y_{k-1}(G)R_{i-1}, Y_{k-1}(G)] \leqslant [Y_{k-1}(G), Y_{k-1}(G)] = Y_k(G).$$

Assim,

$$[x, y]T_{i-1} \in T_1\left(\frac{G}{T_{i-1}}\right) = \frac{T_i}{T_{i-1}} \quad \Rightarrow \quad [x, y] \in T_i \quad \Rightarrow \quad [R_i, G^{(k-1)}] \leqslant T_i.$$

■

Teorema 3.2. *Seja* m *um inteiro positivo e* G *um grupo tal que* $|Y_k| = m$. *Então*

$$| G^{(k)} | \leqslant (m!)^m.$$

Prova: CASO 1: Suponha inicialmente que G é um grupo solúvel com comprimento derivado $k+1$ e $|Y_k| = m$

Do Lema anterior concluímos que $G^{(k)}$ tem uma série

$$1 = T_0^k(G) \leqslant T_1^k(G) \leqslant \ldots \leqslant T_{2^k}^k(G) = G^{(k)}$$

Por simplicidade de notação, escrevemos:

$$1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \ldots \leqslant S_t = G^{(k)}, \quad \text{(com } t = 2^k\text{)},$$

onde $\dfrac{S_{i+1}}{S_i}$ é finito com $S_{i+1} \subseteq Y_k S_i$, para cada $i = 0, \ldots, k$.

Vamos verificar inicialmente que $\dfrac{S_{i+1}}{S_i}$ é finito.

- $S_1 = T_1^k(G) = \langle\ x\ ;\ \langle x\rangle \subseteq Y_k(G)\rangle = \langle\ x\ ;\ x^s \in Y_k(G),\ \ \forall\ s\ \in \mathbb{Z}\rangle$

Como $|\ Y_k(G)\ |= m$ segue que $o(x^s) < \infty$, para todos $\in\ \mathbb{Z}$. Em particular $o(x) < \infty$ e pelo *Lema de Dietzmann* concluímos que S_1 é finito, pois é gerado por um conjunto normal finito cujos elementos são todos de torção.

- $\dfrac{S_{i+1}}{S_i} = \dfrac{T_{i+1}^k(G)}{T_i^k(G)} = T_1^k\left(\dfrac{G}{T_i^k(G)}\right) = \left\langle \langle xT_i^k\rangle\ ;\ \langle xT_i^k\rangle \subseteq Y_k\left(\dfrac{G}{T_i^k}\right)\right\rangle$

Desde que $Y_k\left(\dfrac{G}{T_i^k}\right) = \{gT_i^k\ \ ;\ g \in Y_k(G)\}$ então $\left|Y_k\left(\dfrac{G}{T_i^k}\right)\right| \leqslant \infty$ e, portanto, a ordem de $\langle xT_i^k\rangle$ é finita.

Novamente pelo *Lema de Dietzmann*, concluímos que $\dfrac{S_{i+1}}{S_i}$ é finito.

Vamos mostrar que $S_{i+1} \subseteq Y_k S_i$. Temos

$$S_{i+1} = \left\langle x\ ;\ \langle xS_i\rangle \subseteq Y_k\left(\frac{G}{S_i}\right)\right\rangle, \quad \text{onde} \quad Y_k\left(\frac{G}{S_i}\right) = \{\ gS_i\ ;\ g \in Y_k(G)\}.$$

Perceba que $xS_i = gS_i$, para algum $g \in Y_k(G)$. Assim, $x \in gS_i$ e daí $S_{i+1} \subseteq Y_k(G)S_i$, para cada i. Então

$$\left|\frac{S_1}{S_0}\right| \left|\frac{S_2}{S_1}\right| \cdots \left|\frac{S_t}{S_{t-1}}\right| = \left|G^k\right|. \tag{3.4}$$

Afirmação: $\left|\dfrac{S_1}{S_0}\right| + \left|\dfrac{S_2}{S_1}\right| + \cdots + \left|\dfrac{S_t}{S_{t-1}}\right| \leqslant m - 1 + t.$

Vamos mostrar que, para cada elemento não trivial $f \in \dfrac{S_{i+1}}{S_i}$; $0 \leqslant i \leqslant t-1$, existe $v \in Y_k \setminus \{1\}$ tal que $f = vS_i$.
Considere a aplicação

$$\Psi : Y_k \setminus \{1\} \longrightarrow B = \left(\frac{S_1}{S_0} - \overline{1}\right) \dot\cup \left(\frac{S_2}{S_1} - \overline{1}\right) \dot\cup \cdots \dot\cup \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} - \overline{1}\right).$$

Dado $v \in Y_k \setminus \{1\}$ existe i tal que $v \in S_{i+1} \setminus S_i$, para $i = 0, \ldots, t-1$, pois $Y_k \subseteq G^k = S_t$. Defina $\psi(v) = vS_i$.

Dado $f \in B$, temos $f \in \dfrac{S_{i+1}}{S_i} - \overline{1}$, para algum i, e assim $f = xS_i$, onde $x \in S_{i+1} \setminus S_i$.
Como $S_{i+1} \subseteq Y_k S_i$, segue que $x = vs_i$, logo $f = vS_i$, para $v \in Y_k \setminus \{1\}$,

ou seja, dado $f \in B$ existe $v \in Y_k \setminus \{1\}$ tal que $\psi(v) = vS_i = f$. Portanto $\psi : Y_k \setminus \{1\} \longrightarrow B$ é sobrejetiva.
Isso implica que $|\, B \,| \leqslant |Y_k \setminus \{1\}| = m - 1$.

Observe que $|\, B \,| = \left|\dfrac{S_1}{S_0} - \overline{1}\right| + \left|\dfrac{S_2}{S_1} - \overline{1}\right| + \cdots + \left|\dfrac{S_t}{S_{t-1}} - \overline{1}\right|.$

Portanto,

$$\left|\frac{S_1}{S_0}\right| + \left|\frac{S_2}{S_1}\right| + \cdots + \left|\frac{S_t}{S_{t-1}}\right| \leqslant m - 1 + t. \tag{3.5}$$

Relembre a Desigualdade Entre as Médias Aritmética e Geométrica

$$\boxed{(a_1 \cdots a_n)^{1/t} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{t}}$$

Logo de (3.4) e (3.5) temos

$$\left(\left|\frac{S_1}{S_0}\right|\left|\frac{S_2}{S_1}\right| \cdots \left|\frac{S_t}{S_{t-1}}\right|\right)^{1/t} \leqslant \frac{\left|\frac{S_1}{S_0}\right| + \left|\frac{S_2}{S_1}\right| + \cdots + \left|\frac{S_t}{S_{t-1}}\right|}{t},$$

ou seja, $|G^{(k)}|^{1/t} \leqslant \dfrac{m-1+t}{t}$.

- Se $t = 1$ então $|G^{(k)}| \leqslant m \leqslant (m!)^m$
- Se $t \geqslant 2$ então $\left| \dfrac{S_1}{S_0} \right| \geqslant 2, \left| \dfrac{S_2}{S_1} \right| \geqslant 2 \dots \left| \dfrac{S_t}{S_{t-1}} \right| \geqslant 2.$

Observe que:

$$2t \leqslant \left| \frac{S_1}{S_0} \right| + \left| \frac{S_2}{S_1} \right| + \cdots + \left| \frac{S_t}{S_{t-1}} \right| \leqslant m - 1 + t$$
$$\Rightarrow \quad 2t \leqslant m - 1 + t \ \Rightarrow \ t \leqslant m - 1 \ \text{ e } \ t \geqslant 2$$

Daí:

$$\left|G^{(k)}\right|^{1/t} \leqslant \left(\frac{m-1+t}{t}\right) \Rightarrow \left(\left|G^{(k)}\right|^{1/t}\right)^t \leqslant \left(\frac{m-1+t}{t}\right)^t$$

$$\left|G^{(k)}\right| \leqslant \left(\tfrac{m-1+t}{t}\right)^t \underbrace{\leqslant}_{t\leqslant m-1} \left(\tfrac{m-1+t}{t}\right)^{m-1} \underbrace{\leqslant}_{t\geqslant 2} \left(\tfrac{m-1+t}{2}\right)^{m-1} \underbrace{\leqslant}_{t\leqslant m-1} (m-1)^{m-1}$$

$$\boxed{\text{Observe que : } m - 1 \leqslant (m!) \Rightarrow (m-1)^{m-1} \leqslant (m!)^{m-1} \leqslant (m!)^m}$$

Portanto,

$$\left|G^{(k)}\right| \leqslant (m!)^m$$

CASO 2: Suponha G um grupo qualquer com $|Y_k| = m$.

$$\boxed{\text{OBS: } \quad Y_k \text{ é um conjunto normal então } Y_k^G = Y_k}$$

Vamos mostrar que $\left|G^{(k)} : Z(G^{(k)})\right| \leqslant m!$.
Considere a ação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G^{(k)} &\longrightarrow S_{Y_k} \\ g &\longrightarrow \varphi_g : x \longrightarrow gxg^{-1} \end{aligned}$$

Como $Y_k^G = Y_k$ temos $gxg^{-1} \in Y_k$.

- φ_g está bem definida. De fato:
  $x = y \ \Rightarrow \ gxg^{-1} = gyg^{-1} \Rightarrow \varphi_g(x) = \varphi_g(y)$.
- φ é bijeção
  φ é injetiva, pois $\varphi_g(x) = \varphi_g(y) \Rightarrow gxg^{-1} = gyg^{-1} \Rightarrow x = y$
  φ é sobrejetiva, pois é injetiva de Y_k em Y_k e Y_k é finito.

- $\mathrm{Nuc}\varphi = \{\, g \in G^{(k)} \,;\, \varphi_g = I_d \} = \{ g \in G^{(k)} \,;\, gxg^{-1} = x \,\forall\, x \in Y_k \}$ $= Z(G^{(k)})$.

Agora, pelo Primeiro Teorema dos Isomorfismos, temos

$$\frac{G^{(k)}}{Z(G^{(k)})} \backsimeq Im(\varphi) \leqslant S_{Y_k}$$

Logo,

$$\left|\frac{G^{(k)}}{Z(G^{(k)})}\right| \Big| |S_{Y_k}| = |S_m| = m! \quad \Rightarrow \quad \left|G^{(k)} : Z(G^{(k)})\right| = \frac{\left|G^{(k)}\right|}{\left|Z(G^{(k)})\right|} \leqslant m!$$

Segue do Teorema 1.6 (*Schur*) que $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}]$ tem expoente no máximo $m!$.

Observe que $Y_{k+1} \subseteq Y_k$ (Basta usar indução sobre k).

Suponha que $\left|Y_{k+1}\right| = l$ onde $l \leqslant m$. Como $G^{(k+1)} = \langle Y_{k+1} \rangle$, $Y_{k+1}^G = Y_{k+1}$ e $G^{(k+1)}$ tem expoente no máximo $m!$, segue que todos os seus elementos tem ordem finita no máximo $m!$.
Logo, pelo *Lema de Dietzmann*, temos

$$|G^{(k+1)}| \leqslant (m!)^l.$$

Como o grupo quociente $\dfrac{G}{G^{(K+1)}}$ é solúvel com comprimento derivado $k+1$, veja também que

$$\left|Y_k(\frac{G}{G^{(k+1)}})\right| \leqslant m - l + 1$$

De fato:

$$\begin{aligned} Y_k\left(\frac{G}{G^{(k+1)}}\right) &= \{gG^{(k+1)} \,; g \in Y_k(G)\} \\ &= \{g_1G^{(k+1)}, g_2G^{(k+1)}, \ldots, g_lG^{(k+1)}, g_{l+1}G^{(k+1)}, \ldots, g_mG^{(k+1)}\} \end{aligned}$$

Como $g_1, \ldots, g_l \in Y_{k+1} \subseteq G^{(K+1)}$ segue que:

$$g_1G^{(k+1)} = g_2G^{(k+1)} = \cdots = g_lG^{(k+1)} = G^{(k+1)},$$

E daí

$$\left|Y_k(\frac{G}{G^{(k+1)}})\right| \leqslant m - l + 1.$$

Então, pelo CASO 1, podemos concluir que:

$$|\frac{G^{(k)}}{G^{(k+1)}}| \leqslant ((m-l+1)-1)^{((m-l+1)-1)} = (m-l)^{(m-l)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|G^{(k)}\right| = \left|\frac{G^{(k)}}{G^{(k+1)}}\right|\left|G^{(k+1)}\right| &\leqslant (m-l)^{(m-l)}(m!)^{l} \\ &\leqslant (m!)^{m-l}(m!)^{l} \\ &\leqslant (m!)^{m} \end{aligned}$$

E isso completa a prova do teorema.

■

3.4 Um $BFC(w)$-grupo G com $w(G)$ não FC-mergulhado.

Uma palavra w é chamada **verbose** se não é concisa.

Sabemos que se w é uma palavra concisa e x^{G_w} é finito, então $x^{w(G)}$ também é finito, resultado mostrado em [1] por Silvana Franciosi, Francesco Giovanni e Pavel Shumyatsky.

Este teorema pode ser utilizado para construção de uma palavra verbose. Com efeito, Ivanov [7] construiu um grupo 2-gerado livre de torção A, com $\frac{A}{Z(A)}$ infinito de expoente p^2m, onde p é primo maior que 5000 e n é ímpar maior que 10^{10}. Também, a palavra $v(x, y) = [[x^{pn}, y^{pn}], y^{pn}]^n$ toma somente dois valores em A e $Z(A) = \langle v_0 \rangle$ onde v_0 é o valor não-trivial de v em A (isto é, $Av = \{1, v_0\}$).

Seja A o grupo acima e $B = \langle b \rangle$ com $o(b) = 2$. Considere $G(A \times A) \rtimes_\theta B$ onde

$$\begin{aligned} \theta : \; B &\longrightarrow Aut(A \times A) \\ b &\longmapsto \theta(b) : (x, y) \to (y, x) \end{aligned}$$

então

$$G = \{(x, y)^{b^i} / x, y \in A \text{ e } i = 0, 1\} \text{ e } (x, y)^b = (y, x)$$

Defina $n(x,y)=\nu(x^2,y^2)$. Mostraremos que $|G_w|\leqslant 4$ e que $b^{w(G)}$ é infinito, com isso $w(G)$ também é infinito e portanto w não pode ser concisa.

Para isso, faça $K = A\times A$. Então

$$\begin{aligned} K_\nu &= \{\nu((x,x'),(y,y'))/x,y,x',y'\in A\} \\ &= \{(\nu(x,y),\nu(x',y'))/x,y,x',y'\in A\} \\ &= \{(1,1),(1,\nu_0),(\nu_0,1),(\nu_0,\nu_0)\} \end{aligned}$$

Agora, $\dfrac{G}{K}\simeq B$ e portanto $\left|\dfrac{G}{K}\right|=2$. Daí $g^2\in K$ para todo $g\in G$. Sendo $w(x,y)=\nu(x^2,y^2)$ segue-se que $G_n\subseteq K_\nu$, ou seja, $|G_w|\leqslant 4$.

Seja m um inteiro positivo ímpar e

$$N=\langle(\nu_0,1)^m,(1,\nu_0)^m\rangle=\langle(\nu_0^m,1),(1,\nu_0)^m\rangle$$

Como $Z(A)=\langle\nu_0\rangle$, temos que K centraliza N. Agora, $(\nu_o^m,1)^b=(1,\nu_0^m)$ e $(1,\nu_0^m)^b=(\nu_0^m,1)$. Isso mostra que B normaliza N e portanto $N\trianglelefteq G$. Por outro lado, como $\dfrac{K}{N}$ tem expoente ímpar p^2mn temos $\left\{z^2/z\in\dfrac{G}{N}\right\}=\dfrac{K}{N}$. De fato, sabemos que $g^2\in K$, para todo $g\in G$. Logo,

$$\{z^2\ /\ g\in\frac{G}{N}\}\subseteq\frac{K}{N}.$$

Reciprocamente, se $a\in\dfrac{K}{N}$, então $1=a^{p^2mn}=a^{2l+1}$ e assim $a=(a^{-l})^2=z^2$, onde $z=a^{-l}$, portanto, $\{z^2\ /\ z\in\dfrac{G}{N}\}=\dfrac{K}{N}$, observe que essa igualdade nos permite concluir que

$$\left(\frac{G}{N}\right)_w=\left(\frac{K}{N}\right)_\nu.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left(\frac{G}{N}\right)_w &= \{w(gN,g_1N)/g,g_1\in G\}= \\ &= \{\nu(g^2N,g_1^2N)/g,g_1\in G\}\subseteq \\ \left(\frac{K}{N}\right)_\nu &= \{\nu(xN,yN)\ /\ x,y\in K\}= \\ &= \{\nu(z^2N,z_1^2N)\ /\ z,z_1\in K\}=\ \left(\frac{G}{N}\right)_w \end{aligned}$$

Assim, $(\nu_0, 1)N \in \left(\dfrac{G}{N}\right)_w$ e $b^{(\nu_0,1)^k}N \in (bN)^{w(\frac{G}{N})}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, $((\nu_0, 1)(1, \nu_0)^{-1})N$ tem ordem m em $\dfrac{G}{N}$, pois

$$(\nu_0, 1)(1, \nu_0^{-1}) = (\nu_0, \nu_0^{-1}) = (1, \nu_0^{-1})(\nu_0, 1),$$

portanto,

$$((\nu_0, 1)(1, \nu_0^{-1}))^m = (\nu_0^m, \nu_0^{-m}) \in N.$$

Além disso, se $(\nu_0, \nu_0^{-1}) \in N$, então $(\nu_0^l, \nu_0^{-1}) \in N$, portanto, $\nu_0^l = (\nu_0^m)^t$, sendo $l = mt$ já que A é livre de torção.

Observe que $b^{(\nu_0,1)^k}N = (\nu_0, 1)^{-k}b(\nu_0, 1)^kN = b((\nu_0, 1)(1, \nu_0)^{-1})^kN$, visto que

$$(1, \nu_0)(\nu_0^{-k}, 1)b^{-1}(\nu_0^{-k}, 1)b(\nu_0^k, 1) = (\nu_0^{-k}, \nu_0^k)(1, \nu_0^{-k})(\nu_0^k, 1) = (1, 1) \in N.$$

Como, $o((\nu_0, 1)(1, \nu_0)^{-1}) = m$, segue que $|\{b^{(\nu_0,1)^k}N \ / \ k \in \mathbb{Z}\}| = m$ e assim $|(bN)^{w(\frac{G}{N})}| \geqslant m$, portanto, $|b^{w(G)}| \geqslant m$, e sendo m arbitrário, segue que $b^{w(G)}$ é infinito.

$\blacksquare$

Concluímos nosso trabalho destacando que não sabemos ainda se existe palavra concisa que não seja limitadamente concisa. Um caminho para obter uma tal palavra seria, possivelmente, através do Teorema 2.4.
Com efeito, se conseguirmos uma palavra w e um grupo G tais que $|x^{G_w}| \leqslant m$, para todo $x \in G$ e $x^{w(G)}$ finito, mas não limitado por uma constante dependendo apenas da palavra w e de m, ou seja, $c = c(w, m)$, então w é concisa mas não é limitadamente concisa. Mas, certamente este não é um problema fácil.

Referências Bibliográficas

[1] FRANCIOSI, Silvana; GIOVANNI, Francesco; SHUMYATSKY, Pavel. On group with finite verbal conjugacy classes. *Houston Journal of Mathematics*, v. 28, p. 683-689, 2002.

[2] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 326 p. (Projeto Euclides)

[3] NEUMANN, B.H. Groups with finite classes of conjugate elements. *Proceeding of the London Mathematical Society*, v. 3, p. 178, 1995.

[4] OL'SHANSKII, A.Yu. *Geometry of defining relations in groups*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991. 505 p.

[5] PEREIRA, Valberto Rômulo Feitosa, *Grupos verbalmente FC*. 2004. 70f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Curso de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará.

[6] ROBINSON, Derek Jonh Scott. *A Course in the theory of groups*. 2^{nd} ed. New York: Springer-Verlag, 1996. 499 p. (Graduate texts in mathematics, 80)

[7] SERGEI, V. Ivanov, P. Hall's finitess conditions for verbal subgroups. *Soviet Mathematical*, v. 33, p. 59-70, 1989.

[8] SHUMYATSKY, Pavel; KRASILNIKOV, Alexei; BRAZIL, Sergio. Groups with bounded verbal conjugacy classes. *Journal of Group Theo - ry* , v. 9, p. 127-137, 2006.

[9] TURNER-SMITH, R.F. Finitess Conditions for verbal subgroups. *Journal of The London Matematical Spciety*. v. 41, p. 166-176, 1966.