



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

THIAGO BENTO DOS SANTOS

TRANSIÇÕES DE FASE DE NÃO EQUILÍBRIO EM REDES DE  
KLEINBERG

FORTALEZA

2017

THIAGO BENTO DOS SANTOS

TRANSIÇÕES DE FASE DE NÃO EQUILÍBRIO EM REDES DE KLEINBERG

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho.

FORTALEZA  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S239t Santos, Thiago Bento dos.

Transições de fase de não equilíbrio em redes de Kleinberg / Thiago Bento dos Santos. – 2017.  
80 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho.

1. Transição de fase de não equilíbrio. 2. Expoentes críticos. 3. Crossover. 4. Biestabilidade. 5. Redes de Kleinberg. I. Título.

CDD 530

---

**THIAGO BENTO DOS SANTOS**

**TRANSIÇÕES DE FASE DE NÃO EQUILÍBRIO EM REDES ESPACIALMENTE  
INCORPORADAS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 20 / 01 / 2017 .

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. José Soares de Andrade Júnior

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. André Auto Moreira

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Francisco George Brady Moreira

Universidade Federal de Pernambuco (UEPE)

---

Dr. Marcelo Leite Lyra

Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

*Aos meus pais e  
irmã*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à meus pais, Antônio e Jaidê, e à minha irmã, Andréa. Sem eles não poderia ter chegado até aqui. E à Kyvia Neyvan por todo carinho e companheirismo.

Aos professores André Auto Moreira e José Soares de Andrade Júnior por toda ajuda e motivação, assim como à todos os professores do Instituto de Física que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

Ao Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho por toda dedicação, paciência e excelente orientação.

Ao Cnpq e à Capes, pela ajuda financeira aos projetos e bolsas do programa de Pós graduação.

À todos os amigos e colegas do grupo de sistemas complexos e de todo Instituto de Física, em especial aos amigos Emanuel Memória, José Cardoso, Felipe Operti, Rilder Pires, Samuel Morais, Calebe Alves, Janete Brito, Rubens Soares, Nailson Vasconcelos, Emanuel Fontelles e Wagner Sena. Aos amigos da UFAL, professor Italo Nunes de Oliveira e Rosa Carolina por estarem sempre presente. Aos meus amigos e irmãos de longa data, especialmente à Renata Simplício, Silvano Damasceno e Guilherme Melo. Ao amigo Samuel Gameiro e sua família, por me acolherem.

## RESUMO

Estudamos por meio de simulações de Monte Carlo e análises de escala de tamanho finito as transições de fase que os modelos do votante majoritário e do processo de contato descrevem em redes de Kleinberg. Tais estruturas são construídas a partir de uma rede regular onde conexões de longo alcance são adicionadas aleatoriamente seguindo a probabilidade  $P_{ij} \sim r^{-\alpha}$ , sendo  $r_{ij}$  a distância Manhattan entre dois nós  $i$  e  $j$  e o expoente  $\alpha$  um parâmetro de controle [J. M. Kleinberg, Nature 406, 845 (2000)]. Nossos resultados mostram que o comportamento coletivo desses sistemas exibe uma transição de fase contínua, do tipo ordem-desordem para o votante majoritário e ativo absorvente para o processo de contato, no parâmetro crítico correspondente. Tal parâmetro é monotônico com o expoente  $\alpha$ , sendo crescente para o votante majoritário e decrescente para o processo de contato. O comportamento crítico dos modelos apresenta uma dependência não trivial com o expoente  $\alpha$ . Precisamente, considerando as funções de escala e os expoentes críticos, concluímos que os sistemas passam pelo fenômeno de crossover entre duas classes de universalidade. Para  $\alpha \leq 3$ , o comportamento crítico é descrito pelos expoentes de campo médio enquanto que para  $\alpha \geq 4$  os expoentes pertencem à classe de universalidade de Ising 2D, para o modelo do votante majoritário, e à classe da percolação direcionada no caso do processo de contato. Finalmente, na região  $3 < \alpha < 4$  os expoentes críticos variam continuamente com o parâmetro  $\alpha$ .

Revisamos o processo de contato simbiótico aplicando um método alternativo para gerarmos estados quase estacionários. Desta forma, realizamos simulações de Monte Carlo em grafos completos, aleatórios, redes espacialmente incorporadas e em redes regulares. Observamos que os resultados para o grafo completo e redes aleatórias concordam com as soluções das equações de campo médio, com a presença de ciclos de histerese e biestabilidade entre as fases ativa e absorvente. Para redes regulares, comprovamos a ausência de biestabilidade e comportamento histerético, implicando em uma transição de fase contínua para qualquer valor do parâmetro que controla a interação simbiótica. E por fim, conjecturamos que a transição de fase descrita pelo processo de contato simbiótico será contínua ou descontínua se a topologia de interesse estiver abaixo ou acima da dimensão crítica superior, respectivamente.

**Palavras-chave:** Transição de fase de não equilíbrio, Expoentes críticos, Crossover, Biestabilidade, Redes de Kleinberg.

## ABSTRACT

We study through Monte Carlo simulations and finite-size scaling analysis the nonequilibrium phase transitions of the majority-vote model and the contact process taking place on spatially embedded networks. These structures are built from an underlying regular lattice over which long-range connections are randomly added according to the probability,  $P_{ij} \sim r^{-\alpha}$ , where  $r_{ij}$  is the Manhattan distance between nodes  $i$  and  $j$ , and the exponent  $\alpha$  is a controlling parameter [J. M. Kleinberg, Nature 406, 845 (2000)]. Our results show that the collective behavior of those systems exhibits a continuous phase transition, order-disorder for the majority-vote model and active-absorbing for the contact process, at a critical parameter, which is a monotonous function of the exponent  $\alpha$ . The critical behavior of the models has a non-trivial dependence on the exponent  $\alpha$ . Precisely, considering the scaling functions and the critical exponents calculated, we conclude that the systems undergoes a crossover between distinct universality classes. For  $\alpha \leq 3$  the critical behavior in both systems is described by mean-field exponents, while for  $\alpha \geq 4$  it belongs to the 2D Ising universality class for majority-vote model and to Directed Percolation universality class for contact process. Finally, in the region where the crossover occurs,  $3 < \alpha < 4$ , the critical exponents vary continuously with the exponent  $\alpha$ .

We revisit the symbiotic contact process considering a proper method to generate the quasistationary state. We perform Monte Carlo simulations on complete and random graphs that are in accordance with the mean-field solutions. Moreover, it is observed hysteresis cycles between the absorbing and active phases with the presence of bistable regions. For regular square lattice, we show that bistability and hysteretic behavior are absent, implying that model undergoes a continuous phase transition for any value of the parameter that controlled the symbiotic interaction. Finally, we conjecture that the phase transition undergone by the symbiotic contact process will be continuous or discontinuous if the topology considered is below or above of the upper critical dimension, respectively.

**Keywords:** Nonequilibrium phase transition, Critical exponents, Crossover, Bistability, Kleinberg networks.



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Sistema como três microestados, 1, 2, 3, no estado estacionário com distribuição de probabilidade  $P_t(c = 1) = P_t(c = 2) = P_t(c = 3)$ . Em (a) o sistema satisfaz o balanço detalhado, uma vez que as transições entre quaisquer dois microestados são igualmente prováveis, não havendo um fluxo de probabilidade resultante. Já em (b), onde as transições só ocorrem em um sentido ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ), há um fluxo de probabilidade, então dizemos que o sistema é de não equilíbrio. . . . . 19
- Figura 2 – Experimento de Rayleigh-Bénard. Uma camada horizontal de um fluido viscoso, está limitada acima e abaixo por banhos térmico com temperatura  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, onde  $T_1 < T_2$ . Mesmo no estado estacionário, essa diferença de temperatura gera um fluxo de energia e as diferenças na densidades do fluido fazem surgir correntes de convecção na presença de um campo gravitacional  $g$ . O experimento é um exemplo de estado estacionário em um sistema fora do equilíbrio. . . . . 20
- Figura 3 – Construção da rede de Kleinberg a partir de uma rede quadrada regular. Após escolhermos o sítio  $i$  sorteamos, com uma probabilidade proporcional à  $r^{-\alpha}$ , uma distância  $r$ , definida como a distância Manhattan. Então é adicionada uma conexão de longo alcance direcionada de  $i$  para um sítio  $j$  a uma distância  $r$ . . . . . 25
- Figura 4 – Esquema de divisão da rede em camadas, no qual cada camada  $l$  contém os nós cuja distância até o nó central é de  $2^l$ . Usamos a definição de distância Manhattan, que é soma das diferenças da coordenadas  $x$  e  $y$  entre o nó central e um nó na camada  $l$ . . . . . 26
- Figura 5 – Reprodução dos resultados das simulações do modelo do votante majoritário na rede quadrada regular. (a) O parâmetro de ordem  $M$  em função de  $q$  para diferentes tamanhos do sistema. Podemos identificar a transição entre o estado ordenado,  $M \neq 0$ , e o estado desordenado,  $M = 0$ . (b) O valor do ponto crítico  $q_c$  é determinado pelo cruzamento das curvas do cumulante de Binder para diferentes tamanhos do sistema. . . . . 28

Figura 6 – Parâmetro de ordem em função do ruído para a rede quadrada regular e para redes espacialmente incorporadas com diferentes valores de $\alpha$ . Note que o ponto crítico da transição tem seu valor máximo para $\alpha = 0$ e diminui a medida que $\alpha$ cresce, tendo seu valor limite no ponto crítico na rede quadrada. . . . .	31
Figura 7 – Diagrama de fase do modelo do votante majoritário na rede de Kleinberg. O parâmetro crítico $q_c$ diminui monotonicamente com o parâmetro de controle $\alpha$ . Os valores críticos permanecem sempre acima do valor $q_c = 0.075$ da rede regular quadrada (linha tracejada). . . . .	32
Figura 8 – Cumulante de Binder calculado no ruído crítico $q_c$ . A linha vermelha pontilhada corresponde ao valor de campo médio ( $U^* = 0.2705208$ ) e a linha azul tracejada corresponde ao valor para a classe de universalidade de Ising 2D $U^* = 0.61069014(1)$ . Para alguns pontos a barra de erro é menor que os símbolos. Um mínimo de $U(q_c)$ em $\alpha = 2$ é derivado da condição de navegação ótima com conhecimento local. O regime de Ising 2D é recuperado para $\alpha \geq 4$ . . . . .	33
Figura 9 – Dependência da suscetibilidade crítica para $\alpha = 3.0$ (círculos), 3.2 (quadrados), 3.8 (triângulos), 4.0 (estrelas). As linhas contínuas são os ajustes dos dados cujas inclinações são os expoentes $\gamma/\bar{\nu}$ . Os valores dos expoentes estão expostos na tabela 1. . . . .	34
Figura 10 – Dependência dos expoentes críticos $\beta/\bar{\nu}$ e $\gamma/\bar{\nu}$ com o parâmetro $\alpha$ . O expoente $\bar{\nu} = 2$ para todos os valores de $\alpha$ . . . . .	35
Figura 11 – Colapso dos dados da magnetização para sistemas com tamanhos $N = 1000$ (círculos), 22500 (asteriscos), 40000 (quadrados), 62500 (triângulos) e 90000 (losangos). (a) Curva universal para $\alpha = 3$ é consistente com os expoentes de campo médio: $\beta = 1/2$ , $\gamma = 1$ , $\bar{\nu} = 2$ . Para $\alpha = 4$ , o colapso dos dados foi obtido usando os expoentes de Ising: $\beta = 1/8$ , $\gamma = 7/4$ e $\bar{\nu} = 2$ . . . . .	36
Figura 12 – Colapso dos dados da suscetibilidade no ponto crítico em função de $\alpha$ . Os expoentes usados são $\gamma/\bar{\nu} = 0.5$ para $\alpha \leq 3$ , $\gamma/\bar{\nu} = 0.875$ para $\alpha \geq 4$ e para $3 < \alpha < 4$ foram usados os expoentes listados na tabela 1. Note que há um máximo na flutuação em $\alpha = 3$ . . . . .	37

Figura 13	Reprodução dos resultados das simulações do processo de contato na rede quadrada regula. (a) A densidade $\rho$ em função da taxa de criação $\lambda$ para diferentes tamanhos do sistema. Podemos identificar a transição entre o estado absorvente, $\rho = 0$ , e o estado ativo, $\rho \neq 0$ . (b) O valor do ponto crítico $\lambda_c$ é determinado pelo cruzamento das curvas do cumulante $\kappa$ para diferentes tamanhos do sistema. . . . .	39
Figura 14	Diagrama de fase do processo de contato na rede de Kleinberg. O parâmetro crítico $\lambda_c$ cresce monotonicamente com o parâmetro de controle $\alpha$ . Os valores críticos permanecem sempre abaixo do valor $\lambda_c = 1.649$ da rede regular quadrada (linha tracejada). . . . .	41
Figura 15	Cumulante crítico $\kappa_c$ calculado no ruído crítico $\lambda_c$ . A linha vermelha pontilhada corresponde ao valor de campo médio ( $\kappa = 0.6232(2)$ ), e a linha azul tracejada corresponde ao valor para a classe de universalidade de percolação direcionada 2D ( $\kappa = 0.3257(5)$ ). Um máximo de $\kappa(\lambda_c)$ em $\alpha = 2$ é derivado da condição de navegação ótima com conhecimento local. O regime de percolação direcionada 2D é recuperado para $\alpha \geq 4$ . . . . .	42
Figura 16	Dependência do parâmetro de ordem crítico para $\alpha = 3.0$ (círculos), 3.2 (quadrados), 3.5 (losangos), 3.7 (triângulos) e 4.0 (asteriscos). As linhas contínuas são os ajustes dos dados, os quais correspondem aos expoentes $\beta/\bar{\nu}_\perp$ , os valores estão expostos na tabela 2. . . . .	43
Figura 17	Dependência do expoente crítico $\beta/\bar{\nu}$ com o parâmetro $\alpha$ . . . . .	44
Figura 18	Colapso dos dados da densidade de sítios ativos para sistemas com tamanhos $N = 10000$ (círculos), 22500 (quadrados), 40000 (triângulos) e 62500 (asteriscos). (a) Curva universal para $\alpha = 3$ é consistente com os expoentes de campo médio: $\beta = 1$ e $\bar{\nu} = 2$ . (b) Para $\alpha = 4$ , o colapso dos dados foi obtido usando os expoentes de percolação direcionada: $\beta = 0.583(4)$ e $\bar{\nu} = 1.516(9)$ . . . . .	45
Figura 19	Colapso dos dados da densidade de sítios ativos no ponto crítico em função de $\alpha$ . Os expoentes usados são $\beta/\bar{\nu} = 1/2$ para $\alpha \leq 3$ , $\beta/\bar{\nu} = 0.385(6)$ para $\alpha \geq 4$ e para $3 < \alpha < 4$ foram usados os expoentes listados na tabela 2. Note que há um máximo na flutuação em $\alpha = 3$ . . . . .	46

- Figura 20 – A figura mostra a transição entre os possíveis estados que um sítio pode assumir. O sítio “ $AB$ ” representa o estado onde há duas partículas interagindo simbioticamente. Com uma taxa  $\mu$ , o sítio pode mudar para os estados onde apenas uma partícula, “ $A$ ” ou “ $B$ ”, ocupa o sítio. Os sítios ocupados com apenas uma partícula se tornam vazios com taxa unitária. Um sítio vazio é ocupado com taxa  $\lambda n_a$  (ou  $\lambda n_b$ ) por uma partícula  $A$  (ou uma partícula  $B$ ). Não há possibilidade de um sítio passar direto do estado vazio para o estado duplamente ocupado ou vice-versa. . . . . 48
- Figura 21 – Soluções da aproximação de campo médio para processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$ . A reta horizontal tracejada em  $\rho = 0$ , no intervalo  $0 \leq \lambda \leq 1$ , é a solução na qual o sistema se encontra no estado absorvente. A curva superior, traço pontilhada é a solução na qual o sistema se encontra no estado ativo estável e a curva contínua é a solução instável. . . . . 51
- Figura 22 – O fluxo na vizinhança dos pontos fixos em um sistema dinâmico com duas variáveis. Os pontos fixos podem assumir as seguintes formas: (a) nó estável, (b) nó instável, (c) ponto de sela, (d) espiral estável e (e) espiral instável. . . . . 54
- Figura 23 – Plano  $\tau \times \Delta$ , onde  $\tau$  é o traço e  $\Delta$  é o determinante da matriz Jacobiana. Esse plano está dividido em cinco regiões pelas retas  $\Delta = 0$  ( $\forall \tau$ ),  $\tau = 0$  e pela parábola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ . Dependendo do par de parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$ , o sistema pode ter pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável (I), nó instável (II), espiral estável (III), espiral instável (IV) ou ponto de sela (V). O tipo de equilíbrio a qual as soluções de campo médio para o processo de contato com simbiose para  $\mu = 0.25$  pertence é indicado pela região onde se encontram as curvas. A linha tracejada vermelha corresponde à solução  $(P_1^0, P_2^0)$  absorvente. O ponto (a), equivale à solução em  $\lambda = 0$ , de modo que a solução  $(P_1^0, P_2^0)$  apresenta pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável até o ponto  $c$ , em  $\lambda = 1$ , passando a possuir pontos fixos com equilíbrio do tipo ponto de sela. A solução  $(P_1^+, P_2^-)$  instável é descrita pela linha verde contínua, e é limitada entre o ponto  $c$  e o ponto  $b$ , em  $\lambda = \lambda_c$ , que tem pontos fixos com equilíbrio do tipo ponto de sela. A solução  $(P_1^-, P_2^+)$  estável possui pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável. . . . . 55

- Figura 24 Diagrama de fases obtido das equações de campo médio. Na região absorvente as populações de ambas espécies estão extintas. Na região ativa, há uma fração macroscópica das duas populações. Na região biestável podemos encontrar o sistema nos dois estados, ativo ou absorvente, dependendo do estado inicial do sistema. A transição entre estado absorvente e o estado ativo, para  $\mu > 0.5$ , é contínua (linha contínua). Já para  $\mu < 0.5$ , as transições são descontínuas. A linha tracejada marca a transição entre o estado ativo para o absorvente e a linha pontilhada é a transição entre o estado absorvente e o estado ativo. A seta indica o caminho percorrido na figura (21) no diagrama de fases. . . . . 56
- Figura 25 Processo de contato com simbiose em um grafo completo, com  $\mu = 0.25$  numa rede com  $N = 4 \times 10^4$  sítios, onde as medidas são realizadas em 60 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo. Aqui, utilizamos o método de Dickman *et al.*, onde o sistema, ao atingir o estado absorvente, é recolocado em um estado ativo visitado anteriormente. Em (a), vemos que o sistema apresenta a descontinuidade prevista pela teoria de campo médio apenas partindo de um estado inicial ativo, longe do estado absorvente. Mas iniciando-se na região absorvente, o sistema não retorna para o estado ativo do processo de contato com simbiose, com as duas espécies presentes. Como vemos em (b), partindo do estado quase absorvente, o sistema segue como um processo de contato ordinário, com apenas uma das espécies, enquanto a outra permanece extinta. . . . . 59
- Figura 26 Resultado da simulação do processo de contato com simbiose em um grafo completo em uma rede com  $N = 4 \times 10^4$  sítios, e  $\mu = 0.25$  (símbolos). As medidas foram realizadas em 60 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo. Realizamos as medidas de modo que o estado final de sistema em  $\lambda$  é o inicial em  $\lambda + \Delta\lambda$  (ou  $\lambda - \Delta\lambda$ ). Em bom acordo com a teoria de campo médio, a curva de histerese obtida pode ser observada seguindo o sentido indicado pelas setas, onde vemos a região de biestabilidade entre as linhas verticais pontilhadas. . . . . 60
- Figura 27 Diagrama de fases obtido da simulação do processo de contato com simbiose em um grafo aleatório (símbolos) utilizando o método onde o estado absorvente é perturbado. Os círculos escuros são as transições no sentido decrescente de  $\lambda$ , os círculos claros são as transições no sentido crescente de  $\lambda$ . Comparando esse resultado com a teoria de campo médio (linhas), podemos notar uma boa concordância. . . . . 61

- Figura 28 – Resultado da simulações do processo de contato para  $\mu = 0.25$  em uma rede aleatória de Erdős–Rényi com  $N = 4 \times 10^4$  (símbolos) com (a)  $k = 20$  e (b)  $k = 6$ , feitas em 60 amostras de  $10^5$  passos de Monte Carlo para um transiente de  $5 \times 10^4$ . As soluções analíticas para os dois casos, (a)  $k = 20$  e (b)  $k = 6$ , estão representados pelas linhas pontilhada vermelha, contínua verde e tracejada azul, que correspondem às soluções ativa, instável e absorvente, respectivamente. Em (a), para  $k = 20$ , há uma boa concordância entre o resultado numérico e o analítico. . . . . 62
- Figura 29 – Densidade de partículas de uma rede quadrada de tamanho linear  $L = 140$  com valor de  $\mu = 0.25$ , para 50 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo, usando o Método 1 para gerar o estado quase estacionário. . . . . 64
- Figura 30 – Densidade de partículas do processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$  em redes quadradas de tamanhos lineares  $L = 100$  (triângulos) e  $L = 200$  (círculos). O sistema é iniciado em um valor de  $\lambda \gg \lambda_c$  e após  $5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo, o valor do parâmetro de controle é reduzido de  $\Delta\lambda = 0.001$ , de modo que o estado inicial de cada  $\lambda$  é o estado final do valor anterior de  $\lambda$ . Após atingir um valor  $\lambda \ll \lambda_c$ , passamos a incrementar  $\lambda$  de  $\Delta\lambda = 0.001$  seguindo o processo inverso até alcançar o valor inicial de  $\lambda$ . . . . . 65
- Figura 31 – Densidade de partículas do processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$  em um rede quadrada de tamanho linear  $L = 100$ . O sistema é iniciado em um valor de  $\lambda \gg \lambda_c$  e a cada  $5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo (triângulos) o valor de  $\lambda$  é reduzido de  $\Delta\lambda = 0.001$  de modo que o estado inicial de cada  $\lambda$  é o estado final do valor anterior de  $\lambda$ . Após atingir um valor  $\lambda \ll \lambda_c$ , passamos a incrementar  $\lambda$  de  $\Delta\lambda = 0.001$  seguindo o processo inverso até alcançar o valor inicial de  $\lambda$ . O mesmo procedimento é realizado mas com incrementos, ou decremento, em  $\lambda$  a cada  $10 \times 10^4$  (círculos) passos de Monte Carlo. . . . . 66

- Figura 32 – Densidade de sítios ativos em função do tempo medido em passos de Monte Carlo, onde o sistema é iniciado em diferentes densidades  $\rho_0$  em uma rede quadrada de tamanho  $L = 200$  e  $\mu = 0.25$ . Para o valores  $\rho_0 = 2$  e  $\rho_0 = 0.2$ , com um valor  $\lambda = \lambda_c + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon = 0.0127$ , o sistema vai para o estado estacionário ativo sem passar pelo estado absorvente. Já para os valores  $\rho_0 = 0.02$  e  $\rho_0 = 0.002$  o sistema cai no estado absorvente antes de saltar para o estado estacionário. Independente do estado inicial, o sistema acaba em um estado estacionário com densidade finita. O estado absorvente é apenas transiente, ou seja, não é estável. . . . . 67
- Figura 33 – Densidade de sítios ativos em função do tempo medido em passos de Monte Carlo, onde o sistema é iniciado em diferentes densidades  $\rho_0$  e valores  $\lambda = \lambda_c + \varepsilon$  em um (a) grafo completo e em (b) uma rede aleatória com  $k = 4$ , ambas de tamanho  $N = 40000$  e com  $\mu = 0.25$ . Nos dois casos, o estado estacionário do sistema depende do estado inicial. Para os valores maiores de  $\rho_0$ , o sistema relaxa para um estado estacionário onde a densidade de partículas no sistema tem um valor finito, mas para densidades iniciais mais baixas, o estado estacionário do sistema é o estado absorvente, o qual persiste indefinidamente. Esse resultado indica que o estado absorvente é estável e que há biestabilidade. . . . . 68
- Figura 34 – Suscetibilidade calculada a partir da definição (4.49) para diferentes topologias. (a) Processo de contato ordinário em uma rede quadrada de tamanho  $L = 200$  possui uma transição contínua do estado absorvente para o ativo, não apresentando descontinuidade na suscetibilidade. (b) Processo de contato com simbiose na rede quadrada de tamanho  $L = 200$  exibe transição contínua no ponto crítico, diferentemente da (c) rede aleatória com  $k = 12$  e do (d) grafo completo, ambas apresentando descontinuidade no ponto crítico, indicando uma transição de primeira ordem. Todas as médias foram obtidas sobre  $10^5$  passos de Monte Carlo em 100 amostras. 69
- Figura 35 – Densidade de partículas no processo de contato com simbiose em função da taxa de criação  $\lambda$  para  $\mu = 0.25$ , onde a dinâmica foi realizado sobre a construção de Kleinberg com  $N = 40000$  sítios. Para os valores de (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 2$ , e (c)  $\alpha = 3$ , podemos observar transições descontínuas assim como uma região biestável. Já para os valores (d)  $\alpha = 4$  e (e)  $\alpha = 5$  uma transição contínua entre o estado absorvente e o ativo é observada, e sem a presença de biestabilidade. . . . . 72

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	TRANSIÇÃO DE FASE E CRITICALIDADE . . . . .	18
2.1	Equação Mestra . . . . .	18
2.2	Transição de fase contínua em sistemas de não equilíbrio . . .	19
2.2.1	Expoentes críticos e universalidade . . . . .	20
2.3	Transição de fase descontínua . . . . .	23
3	MUDANÇA DE CLASSE DE UNIVERSALIDADE EM SISTEMAS DE NÃO EQUILÍBRIO . . . . .	24
3.1	Redes de Kleinberg . . . . .	24
3.2	Modelo do Votante Majoritário . . . . .	27
3.2.1	Aproximação de campo médio . . . . .	29
3.3	Mudança de classe de universalidade no modelo do votante majoritário . . . . .	30
3.4	O processo de contato . . . . .	37
3.4.1	Aproximação de Campo Médio . . . . .	39
3.5	Mudança de classe de universalidade para o processo de contato	41
4	PROCESSO DE CONTATO COM SIMBIOSE . . . . .	47
4.1	Modelo . . . . .	47
4.2	Aproximação de Campo Médio . . . . .	48
4.3	Análise da estabilidade das soluções e diagrama de fases . . .	51
4.4	Simulação e resultados . . . . .	57
4.4.1	Resultados para o grafo completo . . . . .	58
4.4.2	Resultados para a rede aleatória . . . . .	60
4.4.3	Resultados na rede quadrada . . . . .	63
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	70
	APÊNDICE A . . . . .	73
	REFERÊNCIAS . . . . .	79



## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das redes complexas já tem um papel muito importante em diversas áreas, principalmente devida à aplicabilidade dos modelos de redes não apenas na física, mas também na química, na biologia, em telecomunicações, sociologia, dentre outros ramos das ciências exatas, tecnológicas e humanas [1, 2, 3, 4]. Em geral, os sistemas onde o estudo das redes complexas se aplica são muito grandes no número de elementos interagentes, com uma grande quantidade de graus de liberdade. Uma maneira de analisar tais sistemas é através da Mecânica Estatística, a qual nos permite estudar as propriedades fundamentais sem a necessidade de conhecer todos os detalhes do sistema.

Um dos interesses no estudo das redes complexas reside na análise de transições de fase de modelos descritos nesses sistemas. A geometria da rede pode causar alterações no tipo da transição, contínua ou descontínua, uma mudança nas suas características universais, e até mesmo fazendo com que a transição deixe de existir.

Algumas técnicas analíticas podem ser utilizadas para estudar as transições de fase em redes complexas. A aproximação de campo médio é um método utilizado para reduzir o problema de vários elementos ao de um único corpo interagindo com um campo que representa a média das interações com todos os sítios adjacentes, fornecendo estimativas sobre as propriedades físicas de interesse. Temos ainda que, com os avanços na computação, as simulações numéricas tem sido uma das principais ferramentas no estudo de redes complexas, cada vez maiores e mais complexas.

A interação entre seres de espécies diferentes tem sido determinante na definição dos rumos da evolução, provocando extinções devido à competição por recursos, ou o sucesso dos organismos que cooperam e denominamos estas relações como simbiose. Espécies que aprenderam a cooperar têm mais chances de permanecerem vivas em condições adversas. Porém, a dependência causada pela simbiose pode tornar os indivíduos extremamente vulneráveis quando a relação é desfeita. Um argumento como este pode ser utilizado para justificar o desequilíbrio que ocorre quando uma espécie é eliminada de um sistema ecológico, o que pode acarretar na extinção de outras espécies que mantinham relações simbióticas com a primeira. Se pensarmos em sistemas ecológicos como redes complexas onde os seres se relacionam, podemos usar as ferramentas da mecânica estatística para estudar como essas relações, que podem ser interpretadas como as conexões da rede, interferem no comportamento geral do ecossistema. Por exemplo, alguns vírus, como os causadores da dengue, chikungunya e zica, dependem de um vetor para infectar o seu hospedeiro final. No caso dos vírus citados, o mosquito *Aedes aegypti* é o

responsável pela transmissão, de modo que a relação entre eles beneficia o vírus, mas não causa nenhum prejuízo ao mosquito. Ainda não há vacina para nenhuma dessas doenças, sendo assim, a estratégia adotada pelos órgãos de saúde para erradicar esses vírus tem sido a de eliminar o vetor, e dessa forma interromper o ciclo de transição. Recentemente, após a Copa do Mundo de Futebol de 2014, o Brasil foi assolado por uma epidemia do vírus da zica, o qual se espalhou rapidamente por todo o país. Uma das principais suspeitas é que esse vírus tenha chegado durante os jogos através de torcedores que vieram da África, continente que já vinha enfrentado a doença há décadas. Apesar da presença do vetor em praticamente todo o país, a rapidez com que o vírus da zica se espalhou por todas as regiões foi surpreendente. Assim como a doença provavelmente chegou a Brasil por meio do transporte aéreo ou marítimo, a rede de tráfego intenso no Brasil, principalmente durante a Copa do Mundo de Futebol, pode ter sido a responsável por alastrar a doença tão rapidamente. Entender os efeitos que as redes de transporte causam ao conectar cidades geograficamente distantes sobre a propagação de doenças, pode nos ajudar a criar estratégias de controle de epidemias.

Nesta Tese, estudamos como a geometria da rede afeta as transições de fase em diferentes sistemas. Iniciaremos fazendo um breve revisão sobre transições de fase em sistemas de não equilíbrio a fim de introduzirmos os conceitos de classe de universalidade, expoentes críticos e funções universais. Em seguida faremos um breve comentário sobre as transições descontínuas. Veremos como as propriedades universais das transições de fases dos modelos do votante majoritário e do processo de contato são alteradas devido às ligações de longo alcance das redes de Kleinberg. E por fim, estudaremos os efeitos das interações simbióticas introduzidas no processo de contato em geometrias regulares e aleatórias.

## 2 TRANSIÇÃO DE FASE E CRITICALIDADE

### 2.1 Equação Mestra

Um sistema estocástico clássico de muitas partículas é descrito por todas as possíveis configurações do sistema. O sistema evolui no tempo por transições instantâneas e espontâneas entre duas configurações  $c \rightarrow c'$  quaisquer, com uma dada taxa de probabilidade  $\omega_{c \rightarrow c'}$ . Desta forma, um modelo estocástico é completamente descrito pelo conjunto dos estados acessíveis e pelas respectivas taxas de transição [5, 6, 7].

Definindo  $P_c(t)$  como a probabilidade de encontrar o sistema em uma determinada configuração  $c$ , temos que a evolução temporal desta probabilidade é obtida através da seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dt}P_c(t) = \sum_{c'} \omega_{c' \rightarrow c} P_{c'}(t) - \sum_c \omega_{c \rightarrow c'} P_c(t), \quad (2.1)$$

denominada de equação mestra e que determina a dinâmica do sistema. O primeiro termo no lado direito da equação 2.1 se refere ao aumento na probabilidade de encontrar o sistema no estado  $c$ , enquanto o segundo termo se refere a diminuição dessa probabilidade. Tais termos se contrapõem durante o processo de evolução temporal mantendo a distribuição de probabilidade normalizada [5, 6].

A Mecânica Estatística de equilíbrio se baseia na premissa de que todo sistema isolado no estado estacionário maximiza a entropia [7]. Isto quer dizer que o sistema evolui de modo que todos os estados acessíveis têm a mesma probabilidade de serem atingidos, desde que a única restrição seja que a probabilidade seja normalizada. Do ponto de vista microscópico, no equilíbrio toda transição deve ser equivalente ao seu processo reverso, nesse caso o princípio do balanço detalhado é obedecido,

$$\omega_{c' \rightarrow c} P_{c'}(t) = \omega_{c \rightarrow c'} P_c(t), \quad (2.2)$$

ou seja, o fluxo da distribuição de probabilidade  $\frac{d}{dt}P_c(t) = 0$  [5, 8]. Na figura (1a), temos um esquema da dinâmica de um sistema de equilíbrio com três microestados acessíveis. As taxas de transição entre os microestados são iguais,  $P_t(c = 1) = P_t(c = 2) = P_t(c = 3)$ , e as transições ocorrem em qualquer direção. Já para um sistema de não equilíbrio, no qual a condição de balanço detalhado não é satisfeita, há um fluxo resultante de probabilidade entre os microestados, mesmo no estado estacionário. Como vemos na figura (1b), as transições entre os microestados não são igualmente prováveis. Observe que as probabilidades de transição ainda são iguais, porém as transições somente ocorrem

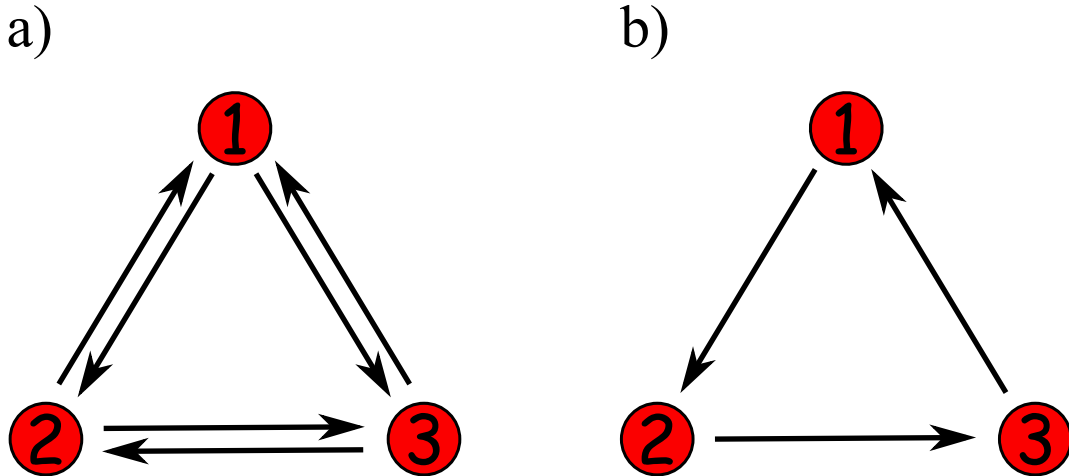


Figura 1 – Sistema como três microestados, 1, 2, 3, no estado estacionário com distribuição de probabilidade  $P_t(c = 1) = P_t(c = 2) = P_t(c = 3)$ . Em (a) o sistema satisfaz o balanço detalhado, uma vez que as transições entre quaisquer dois microestados são igualmente prováveis, não havendo um fluxo de probabilidade resultante. Já em (b), onde as transições só ocorrem em um sentido ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ), há um fluxo de probabilidade, então dizemos que o sistema é de não equilíbrio.

em uma dada direção [8, 9, 10].

## 2.2 Transição de fase contínua em sistemas de não equilíbrio

Uma das principais motivações para estudar transições de fase de não equilíbrio é o fato de a maioria das transições de fase na natureza ocorrerem em condições de não equilíbrio. Na realidade transições de equilíbrio são exceções [6]. Uma consequência da condição de balanço detalhado não ser satisfeita, é que equilíbrios termodinâmicos não são atingidos. Desta forma nem a temperatura nem a energia livre podem ser definidas [6, 11]. De fato, em sistema de não equilíbrio temos fluxos de quantidades físicas, tais como massa, carga e energia, mesmo no estado estacionário.

Por exemplo, considere o experimento de Rayleigh-Bénard [12] que analisa os fluxos de massa e energia no estado estacionário. Tal experimento consiste de uma camada horizontal de fluido acoplada a dois banhos térmicos com temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , como mostra a figura (2). Na condição em que  $T_1 < T_2$ , o sistema atingirá um estado estacionário onde haverá um fluxo de energia  $K_E$  no sentido  $T_2 \rightarrow T_1$ . Por outro lado, há um fluxo de massa em ambos sentidos devido ao efeito do campo gravitacional  $g$  sobre as diferentes densidades do fluido, criando assim correntes de convecção. À medida que a diferença de temperatura entre os banhos térmicos aumenta, o sistema passa por uma transição de fase com a formação de diferentes padrões de convecção [12]. Observe que as correntes de massa e energia não surgem no caso em que os banhos térmicos têm a mesma temperatura,  $T_1 = T_2$ , e desta forma, o sistema atingiria um estado estacionário

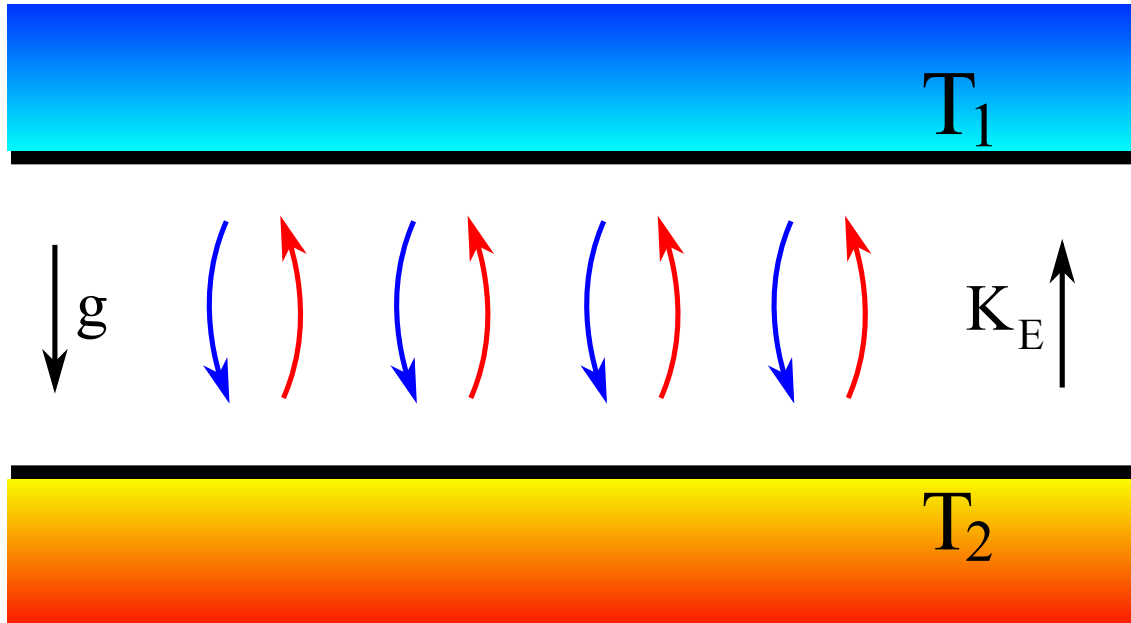


Figura 2 – Experimento de Rayleigh-Bénard. Uma camada horizontal de um fluido viscoso, está limitada acima e abaixo por banhos térmico com temperatura  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, onde  $T_1 < T_2$ . Mesmo no estado estacionário, essa diferença de temperatura gera um fluxo de energia e as diferenças na densidades do fluido fazem surgir correntes de convecção na presença de um campo gravitacional  $g$ . O experimento é um exemplo de estado estacionário em um sistema fora do equilíbrio.

de equilíbrio.

Em nenhum dos casos, equilíbrio ou não equilíbrio, é possível determinar um microestado do sistema, mas no equilíbrio podemos encontrar a probabilidade  $P(c)$  de encontrar o sistema em um dado microestado  $c$ . Para isso é utilizado a distribuição de probabilidade de Boltzmann [7]

$$P_{eq}(c) = Z^{-1} e^{-\frac{E(c)}{kT}}, \quad (2.3)$$

sendo  $Z$  a função de partição,  $E(c)$  é a energia do microestado  $c$  e  $k$  é constante de Boltzmann. Uma expressão similar para não equilíbrio não pode ser encontrada, uma vez que não temos uma temperatura característica do sistema. Em geral, a probabilidade  $P_{neq}(c)$  de encontrar um sistema de não equilíbrio em um microestado  $c$  é determinada pela dinâmica e pelo acoplamento com o banho térmico. Desta forma, o sistema não pode ser apenas descrito em termos da distribuição  $P_{neq}$ , mas também deve ser levado em conta as correntes de probabilidades no espaço de fase [13].

### 2.2.1 Expoentes críticos e universalidade

As transições de fase são caracterizadas por uma mudança no parâmetro de ordem à medida que variamos um determinado parâmetro de controle. Talvez a principal

propriedade do parâmetro de ordem seja a de possuir valor nulo na fase desordenada, ou de maior simetria, e valores não nulos na fase ordenada, ou de menor simetria [5]. Considere que na região crítica uma determinada função termodinâmica  $f(\varepsilon)$  descreve o comportamento de um grandeza física do sistema, sendo  $\varepsilon$  uma grandeza adimensional que determina a distância até o parâmetro crítico de controle  $t_c$ , dado por  $\varepsilon = (t - t_c)/(t_c)$ . Na região crítica estas funções termodinâmicas são proporcionais às potências de  $\varepsilon$ . Em particular, o parâmetro de ordem e sua suscetibilidade apresentam as seguintes dependências

$$\psi \sim (\varepsilon)^\beta, \quad (2.4)$$

$$\chi \sim (\varepsilon)^{-\gamma}. \quad (2.5)$$

O comprimento de correlação descreve como as variáveis microscópicas de estado em diferentes pontos do sistema se relacionam e possui uma dependência com  $\varepsilon$  semelhantes as equações (2.4) e (2.5), sendo descrita por  $\xi \sim (\varepsilon)^{-\nu}$ . Temos ainda que, no limite termodinâmico, o comprimento de correlação diverge no ponto crítico ( $\xi \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Porém, em sistemas finitos seu valor esta limitado ao tamanho  $L$  do sistema, implicando em

$$\xi \sim L \sim \varepsilon^{-\nu}. \quad (2.6)$$

A partir das equações (2.4), (2.5) e (2.6) podemos construir as seguintes relações de escala

$$\psi_L \sim L^{-\beta/\nu}, \quad (2.7)$$

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}, \quad (2.8)$$

$$|\varepsilon| \sim L^{-1/\nu}, \quad (2.9)$$

que descrevem como essas grandezas escalam com o tamanho do sistema. Uma vez que várias dessas grandezas estão relacionadas entre si, os expoentes críticos não são independentes uns dos outros, de modo que conhecendo dois expoentes é possível determinar os demais através das relações de escala [6, 7]

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (2.10)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1), \quad (2.11)$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (2.12)$$

$$2 - \alpha = \nu d, \quad (2.13)$$

sendo  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\eta$  os expoentes relacionados ao calor específico, à variação de pressão na isoterma crítica e à função de correlação, respectivamente, e  $d$  é a dimensão efetiva do sistema. Os expoentes não descrevem apenas o comportamento nas proximidades do ponto crítico, eles também caracterizam uma propriedade universal das transições de fase. Um grupo de sistemas distintos que passam por uma transição contínua e apresentam o mesmo conjunto de expoentes críticos compõem uma classe de universalidade [5, 9, 7]. Como mostram as leis de escala, os expoentes críticos dependem da dimensão efetiva do sistema, porém há uma dimensão crítica superior  $d_c$  a partir da qual os expoentes passam a ter os valores previstos pela teoria de campo médio, qualquer que seja  $d \geq d_c$ . Uma maneira de encontrar  $d_c$  é através do critério de Ginzburg, o qual nos permite determinar a dimensão onde ocorre a mudança entre duas classes de universalidade.

Para que a aproximação de campo médio seja auto-consistente na fase ordenada, as flutuações no parâmetro de ordem em um dado volume de correlação precisam ser muito menores que o próprio parâmetro de ordem,

$$\xi^{-d}\chi \ll \psi^2. \quad (2.14)$$

No regime de campo médio temos que

$$\xi \sim (\varepsilon)^{-\nu_{MF}}, \quad (2.15)$$

$$\psi \sim (\varepsilon)^{\beta_{MF}}, \quad (2.16)$$

$$\chi \sim (\varepsilon)^{-\gamma_{MF}}, \quad (2.17)$$

são as relações entre as respectivas grandezas físicas e os expoentes críticos  $\nu_{MF}$ ,  $\beta_{MF}$  e  $\gamma_{MF}$ . Aplicando estas relações à desigualdade (2.14), obtemos

$$\varepsilon^{2\beta_{MF} - d\nu_{MF} + \gamma_{MF}} \gg 1. \quad (2.18)$$

Para que esta relação seja satisfeita  $2\beta_{MF} - d\nu_{MF} + \gamma_{MF} < 0$ , conseqüentemente temos que a dimensão efetiva é

$$d > \frac{2\beta_{MF} + \gamma_{MF}}{\nu_{MF}}. \quad (2.19)$$

A teoria de campo médio só é válida até o limite que

$$d_c = \frac{2\beta_{MF} + \gamma_{MF}}{\nu_{MF}}, \quad (2.20)$$

de modo que para valores  $d < d_c$  o valor dos expoentes críticos dependem da dimensionalidade do sistema.

A mudança de classe de universalidade é conhecida como o fenômeno de crossover e do ponto de vista da teoria de grupo de renormalização é a competição entre dois pontos fixos, um correspondendo ao regime clássico de campo médio e o segundo ao regime não clássico que determina o comportamento assintótico nas proximidades do ponto crítico [6].

### 2.3 Transição de fase descontínua

As transições contínuas são de grande interesse, principalmente devido as suas propriedades de universalidade. Porém, frequentemente transições descontínuas são observadas na natureza. Um dos mais cotidianos exemplos de tais transições são as mudanças entre os estados sólido, líquido e gasoso. Alguns fenômenos característicos das transições descontínuas, como o ciclo de histerese e a multiestabilidade são de grande interesse no estudo das transições de fase em sistemas de não equilíbrio, especialmente em sistemas com estados absorventes.

Uma característica que denuncia a presença de uma transição descontínua é o surgimento das curvas de histerese. Exemplos em sistemas em equilíbrio onde podem ser observados ciclos de histerese e coexistência de fases são os fenômenos de super aquecimento e de super resfriamento [6]. Um análogo desse fenômeno em sistemas de não equilíbrio pode ser observado em sistemas com estado absorvente, como o processo de contato tricrítico [6, 10]. Nesse tipo de sistema há um estado absorvente, onde é necessário um pequeno campo externo para que o sistema possa sair desse estado, onde o parâmetro de ordem é zero, e saltar para um estado cujo parâmetro de ordem é finito. A transição do processo de contato tricrítico é descontínua e exhibe uma curva de histerese, limitado pelos valores do parâmetro de controle  $\lambda_- < \lambda_c < \lambda_+$ . Nesse intervalo temos uma coexistência de fases, na qual as fases absorvente e ativas são estáveis.

Em alguns casos, o tipo de transição, ou até mesmo sua existência, pode ser determinados pela dimensionalidade do sistema. Como veremos no Capítulo 4, a transição descontínua somente surge acima da dimensão crítica superior para o processo de contato com interação simbiótica entre duas espécies.



### 3 MUDANÇA DE CLASSE DE UNIVERSALIDADE EM SISTEMAS DE NÃO EQUILÍBRIO

A hipótese de universalidade afirma que sistemas que apresentam a mesma simetria no parâmetro de ordem, mesmo tipo de interação e a mesma dimensionalidade, devem possuir o mesmo conjunto de expoentes críticos [14, 15, 16]. Porém, é possível controlar algumas dessas propriedades alterando a topologia do sistema. Tal procedimento pode ser realizado a partir da construção de Kleinberg para redes de mundo pequeno [17], alterando as propriedades críticas do modelo de interesse e, sob certas condições, induzir uma mudança de classe de universalidade.

O fenômeno de Crossover, definido como a mudança de classe de universalidade [6], é observado em modelos da Mecânica Estatística de equilíbrio, como em sistemas ferromagnéticos [18, 19], como também em modelos de não equilíbrio [20, 21, 22, 23, 24, 2]. Neste capítulo estudaremos o comportamento crítico e as mudanças de classe de universalidade induzidas pela construção da rede de Kleinberg em modelos de não equilíbrio. Analisaremos a transição do regime de campo médio para a classe de Ising 2D no modelo do votante majoritário, e do regime de campo médio para a classe da Percolação Direcionada para o processo de contato.

#### 3.1 Redes de Kleinberg

Nas estruturas que possuem a propriedade de mundo pequeno o número de ligações ou nós que separam dois nós  $i$  e  $j$  é muito menor que o tamanho da rede. Se forem atribuídas aos nós  $i$  e  $j$  as coordenadas  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$ , respectivamente, a distância de separação entre eles pode ser definida a partir da distância de Manhattan,

$$r(i, j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|. \quad (3.1)$$

O modelo de Kleinberg cria redes de mundo pequeno adicionando atalhos a uma estrutura regular. Tais atalhos são adicionados com uma probabilidade  $P_{ij}$  que depende da distância  $r(i, j)$ ,

$$P_{ij} = c \cdot r(i, j)^{-\alpha}, \quad (3.2)$$

sendo  $c$  a constante de normalização. Como a distribuição de probabilidade  $P_{ij}$  é normalizada, de modo que

$$1 = \sum_{i \neq j} c \cdot r(i, j)^{-\alpha} \approx \int_{r=1}^{r_{max}} c \cdot r^{-\alpha} \cdot da. \quad (3.3)$$

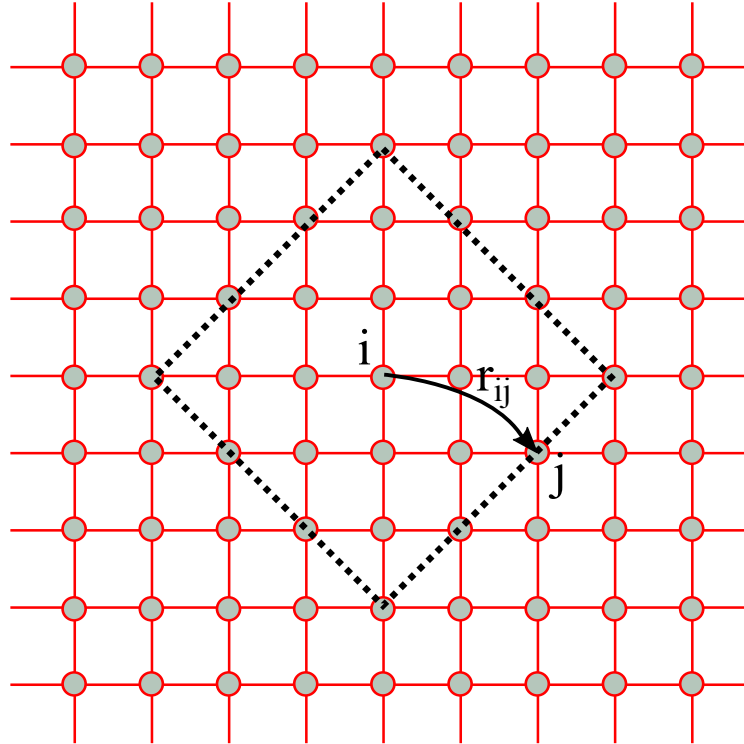


Figura 3 – Construção da rede de Kleinberg a partir de uma rede quadrada regular. Após escolhermos o sítio  $i$  sorteamos, com uma probabilidade proporcional à  $r^{-\alpha}$ , uma distância  $r$ , definida como a distância Manhattan. Então é adicionada uma conexão de longo alcance direcionada de  $i$  para um sítio  $j$  a uma distância  $r$ .

A integral é feita sobre um elemento área circular de raio  $r$  centrado no sítio  $i$  de uma rede quadrada de tamanho linear  $L$ , tal que o número total de sítios na rede é  $N = L^2$ . Os limites de integração são de  $r = 1$  até o seu valor máximo  $r_{max} = \sqrt{N}$ . Esta aproximação nos permite calcular o valor de  $c$  fazendo  $\alpha = 2$ :

$$1 \approx \int_{r=1}^{r_{max}} c \cdot r^{-2} \cdot 2\pi r dr \approx c\pi \ln N. \quad (3.4)$$

Então, temos que  $c \approx (\pi \ln N)^{-1}$ .

O algoritmo para a construção da rede de Kleinberg pode ser descrito da seguinte forma : Escolhe-se um nó  $i$  da rede e em seguida uma distância  $r$  é sorteada seguindo a distribuição  $P_r$ . Então é adicionada uma conexão direcionada do sítio  $i$  para um sítio  $j$ , a uma distância  $r$ , como mostra a figura (3). Todos os sítios  $j$  que se encontram a uma distância  $r(i, j)$ , definida na equação (3.1), do nó central  $i$ , pertencem à camada  $l$ , de modo que  $r(i, j) = 2^l$ . A figura (4) mostra os conjuntos de pontos, aqui identificados pelas cores, pertencentes a uma camada  $l$ . Definida a camada  $l$ , um nó alvo  $j$  pertencente à essa camada é sorteado e conectado ao nó  $i$ . A conexão sempre é orientada do nó de origem para o nó alvo.

Uma vez que a rede quadrada possui  $N$  nós, a maior distância entre dois

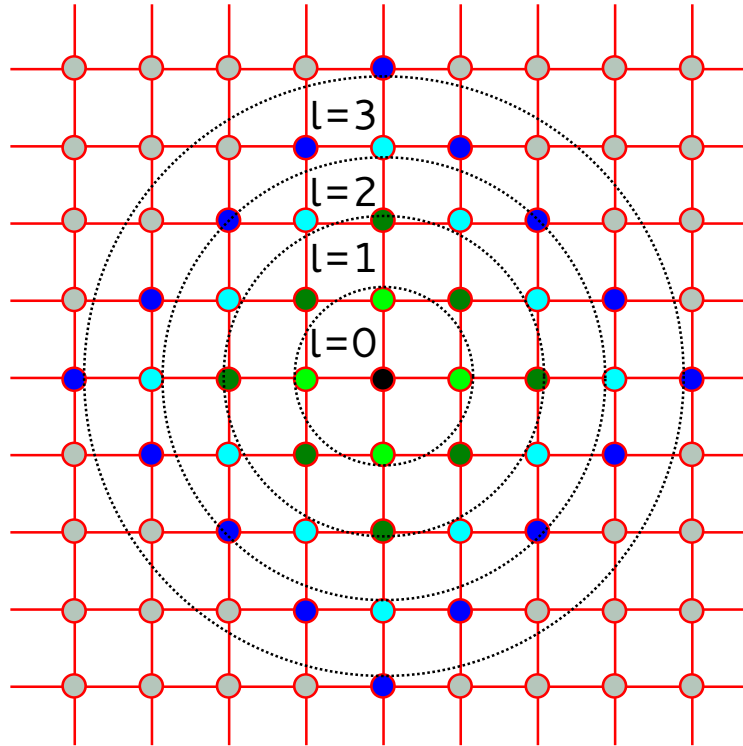


Figura 4 – Esquema de divisão da rede em camadas, no qual cada camada  $l$  contém os nós cuja distância até o nó central é de  $2^l$ . Usamos a definição de distância Manhattan, que é soma das diferenças das coordenadas  $x$  e  $y$  entre o nó central e um nó na camada  $l$ .

nós quaisquer pode ser no máximo igual a  $\sqrt{N}$ , de modo que  $2^l = \sqrt{N}$ . Para  $N$  grande, podemos fazer a aproximação  $l = \log_2 \sqrt{N} \sim \ln N$ . Se escolhermos um nó em uma camada  $l$ , tal que  $l > \ln \ln N$ , qualquer par de nós dentro dessa camada estará, no máximo, a uma distância  $2 \cdot 2^l$ . Desse forma, a probabilidade de conectar dois nós  $i$  e  $j$ , ambos na camada  $l$ , é

$$P_{ij} = c \cdot (2 \cdot 2^l)^{-\alpha} = \frac{2^{-\alpha(l+1)}}{\pi \ln N}. \quad (3.5)$$

O número de nós contidos em todas as camadas interiores à  $l$  é da ordem de  $\pi(2^{l-1})^2$ , então a probabilidade de encontrar uma nova ligação entre um nó da camada  $l$  e um nó em uma camada interior é dada por

$$P_{ij} \approx \pi(2^{l-1})^2 \frac{2^{-\alpha(l+1)}}{\pi \ln N} = [2^{(\alpha+2)} \ln N]^{-1}. \quad (3.6)$$

A probabilidade de encontrar um atalho para um nó nas camadas interiores à  $l$  cai exponencialmente. Nesse caso, há uma probabilidade de  $1/2^{(\alpha+2)} \ln N$  de encontrarmos um caminho que leve alguma camada interna. Uma vez que existem  $\ln N$  camadas, temos uma probabilidade da ordem de  $1/\ln^2 N$  de encontrarmos um atalho [8].

O valor que otimiza a busca por caminhos ótimos na rede Kleinberg é  $\alpha = d$ , na ausência de custos. Se custos forem considerados na adição de ligações de longo alcance

o valor ótimo ocorre em  $\alpha = d + 1$ . Valores de  $\alpha$  maiores que este valor ótimo levam a um rápido decaimento do número de ligações de longo alcance. Porém, valores menores aumentam o número de ligações de longo alcance. Desta forma, no limite em que  $\alpha = 0$  a rede possui a topologia de um grafo aleatório com as mínimas distâncias médias da ordem de  $\ln N$ .

### 3.2 Modelo do Votante Majoritário

O modelo do votante majoritário [5, 25, 26] foi originalmente definido como um conjunto de elementos interagentes sobre uma rede regular quadrada de comprimento  $L$ , onde para todo sítio  $i$  associamos uma variável estocástica  $\sigma_i$ , que assume os valores  $\pm 1$ . Um estado desse sistema é então definido pelo vetor  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ , sendo  $N = L \times L$  o número total de sítios da rede. A evolução do sistema se dá a partir de regras probabilísticas, definidas pelas probabilidades  $1 - q$  de um sítio aleatoriamente escolhido assumir o estado majoritário de seus vizinhos e  $q$  deste sítio assumir o estado contrário ao da maioria. Em caso de empate de opiniões, o sítio sorteado assume com igual probabilidade um dos estados  $\pm 1$ . Como descrito em [25, 26],  $q$  é definido como o parâmetro de ruído, representando de maneira abstrata uma temperatura social. O modelo do votante majoritário apresenta simetria de inversão e irreversibilidade microscópica, isto é, no estado estacionário a condição do balanço detalhado não é satisfeita. Esta propriedade implica que este modelo é de não equilíbrio, no qual não podemos definir energia e temperatura.

Para a análise do comportamento crítico do modelo do votante majoritário, considera-se o cálculo da magnetização  $M_L$  e dois de seus cumulantes, a saber, a suscetibilidade  $\chi_L$  e o cumulante de quarta ordem de Binder, ou simplesmente, o cumulante de Binder  $U_L$ . A magnetização define o parâmetro de ordem do sistema e por isso consideramos o cálculo de seus cumulantes. Os estimadores destas quantidades são dados por,

$$M_L(q) = \langle \langle m \rangle_{tempo} \rangle_{amostras}, \quad (3.7)$$

$$\chi_L(q) = N \left[ \langle \langle m^2 \rangle_{tempo} \rangle_{amostras} - \langle m \rangle_{tempo}^2 \right], \quad (3.8)$$

$$U_L(q) = 1 - \left\langle \frac{\langle m^4 \rangle_{tempo}}{3 \langle m^2 \rangle_{tempo}^2} \right\rangle_{amostras}, \quad (3.9)$$

sendo  $N = L^2$  o número de sítios no sistema,  $m = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i \right|$ . Os símbolos  $\langle \dots \rangle_{tempo}$  e  $\langle \dots \rangle_{amostras}$ , respectivamente denotam as médias temporais tomadas sobre o estado estacionário e sobre várias amostras. Em nosso sistema o tempo é medido em passos de Monte

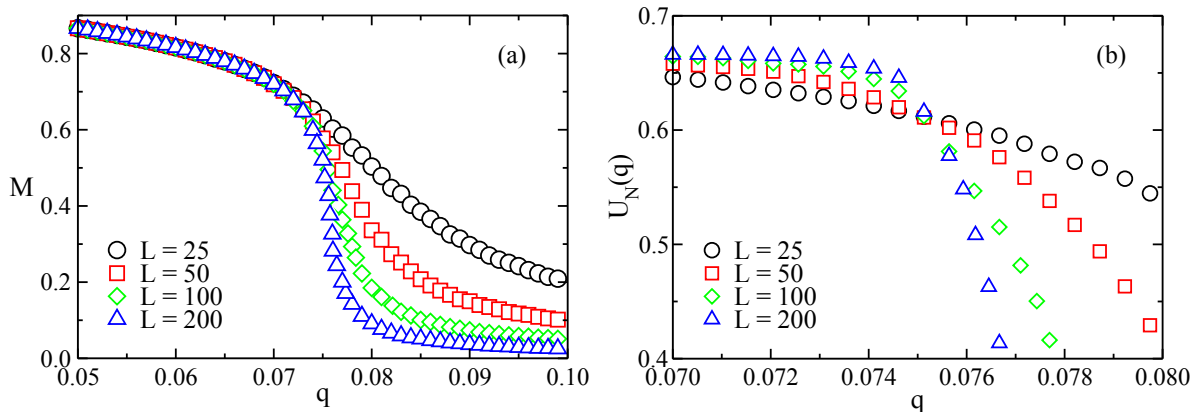


Figura 5 – Reprodução dos resultados das simulações do modelo do votante majoritário na rede quadrada regular. (a) O parâmetro de ordem  $M$  em função de  $q$  para diferentes tamanhos do sistema. Podemos identificar a transição entre o estado ordenado,  $M \neq 0$ , e o estado desordenado,  $M = 0$ . (b) O valor do ponto crítico  $q_c$  é determinado pelo cruzamento das curvas do cumulante de Binder para diferentes tamanhos do sistema.

Carlo. Mais precisamente, um passo de Monte Carlo é realizado quando são escolhidos aleatoriamente  $N$  sítios e tentamos mudar seus estados com taxa de probabilidade

$$w(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 - (1 - 2q)\sigma_i S \left( \sum_{\delta} \sigma_{i+\delta} \right) \right], \quad (3.10)$$

sendo o somatório realizado sobre todos os sítios conectados a  $\sigma_i$ , e  $S(x) = \text{sgn}(x)$  se  $x \neq 0$ , caso contrário  $S(0) = 0$ . Na figura (5) reproduzimos os resultados da dinâmica do modelo em redes quadradas de tamanhos lineares  $L = 25, 50, 100$  e  $200$ . Na figura (5a), observamos que o modelo descreve uma transição contínua entre o estado ordenado ( $M \neq 0$ ) e o estado desordenado ( $M = 0$ ), em  $q = q_c$ , sendo  $q_c$  definido como o ponto crítico da transição. Este valor pode ser determinado através do cumulante de Binder (equação 3.9). No ponto crítico e para tamanhos de redes suficientemente grandes, tal cumulante torna-se invariante, de modo que as curvas para diferentes valores de  $L$  se cruzam em  $q = q_c$ . A figura (5b) mostra um conjunto de curvas do cumulante de Binder. Podemos observar que em  $q = 0.075$  e  $U_N = 0.61(1)$  todas as curvas tendem a se cruzar [25, 27, 28, 29, 30]. Um outro comportamento associado a transições contínuas é a divergência da suscetibilidade no ponto crítico no limite termodinâmico. Entretanto, como somente podemos simular sistemas finitos observaremos máximos nas curvas de suscetibilidade, de modo que, quanto maior o tamanho do sistema mais pronunciado será o pico da suscetibilidade.

A fim de extrapolarmos as informações disponíveis nas simulações de sistemas finitos para o limite termodinâmico, consideramos as relações de escala de tamanho finito. Próximo ao ponto crítico os observáveis físicos obedecem as seguintes relações de escala

$$M_N(q) \sim N^{-\beta/\bar{\nu}} \widetilde{M}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (3.11)$$

$$\chi_N(q) \sim N^{\gamma/\bar{\nu}} \tilde{\chi}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (3.12)$$

$$U_N(q) \sim \tilde{U}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (3.13)$$

sendo  $\varepsilon = |q - q_c|$  a distância ao ruído crítico. Os expoentes  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\bar{\nu}$  estão, respectivamente, associados ao decaimento do parâmetro de ordem  $M_N(q)$ , da divergência da suscetibilidade  $\chi_N(q)$  e da divergência no volume de correlação ( $\xi \sim \bar{\nu}$ ). Aqui consideramos  $N$  como variável de escala ao invés de  $L$ . Como consequência  $\bar{\nu} = d\nu$ , sendo  $d$  a dimensionalidade do sistema. Escrever as relações de escala desta forma é particularmente útil quando trabalhamos com sistemas que possuem ligações aleatórias de longo alcance, como é o caso das redes espacialmente incorporadas. Após a análise de campo médio, estudaremos o comportamento crítico do modelo do votante majoritário em redes descritas pela construção de Kleinberg.

### 3.2.1 Aproximação de campo médio

Considerando a dinâmica do modelo do votante majoritário, onde um dado sítio  $i$  está no estado  $\sigma_i$ , a taxa com que esse sítio muda de estado é  $q$ , se  $S(\sum_{\delta} \sigma_{i+\delta}) = \sigma_i$ , ou seja, se a maioria dos seus vizinhos concordarem com ele. Caso  $S(\sum_{\delta} \sigma_{i+\delta}) = -\sigma_i$ , essa taxa passa a ser  $1 - q$ . E finalmente, no caso de não haver maioria,  $S(\sum_{\delta} \sigma_{i+\delta}) = 0$ , a taxa com que o estado  $\sigma_i$  muda é  $1/2$ . Levando essas taxas em consideração, podemos escrever uma equação de evolução da média do estado do sítio  $i$ ,  $\langle \sigma_i \rangle$ , como sendo

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = (1 - 2q) \left\langle S \left( \sum_{\delta} \sigma_{i+\delta} \right) \right\rangle - \langle \sigma_i \rangle \quad (3.14)$$

Vamos considerar agora um sítio 0 possuindo 4 vizinhos, dessa forma podemos escrever a função  $S(x)$  através da identidade

$$S(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) = \frac{3}{8}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) - \frac{1}{8}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4). \quad (3.15)$$

Aplicando a aproximação de campo médio simples

$$\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \langle \sigma_3 \rangle, \quad (3.16)$$

e considerando que há invariância translacional, de modo que, para todo sítio da rede,  $\langle \sigma_i \rangle = m$ . Após substituirmos a identidade (3.15), na equação (3.14), com  $i = 0$ , temos

$$\frac{d}{dt} m = (1 - 2q) \left[ \frac{3}{2}m + \frac{1}{2}m^3 \right] - m. \quad (3.17)$$

Fazendo  $p = 1 - 2q$  e  $\epsilon = 1 - \frac{3p}{2}$ , reescrevemos a equação (3.17) como

$$\frac{d}{dt}m = -\epsilon m - \frac{p}{2}m^3. \quad (3.18)$$

Multiplicando a equação acima por  $m$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}m^2 = -\epsilon m^2 - \frac{p}{2}m^4. \quad (3.19)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida exatamente para  $m^2$  com a condição inicial  $m(t = 0) = m_0$ :

$$m^2 = \frac{2m_0^2\epsilon}{(2\epsilon + pm_0^2)e^{-2\epsilon t} - pm_0^2}. \quad (3.20)$$

No estado estacionário, onde  $t \rightarrow \infty$ , para  $q > 1/6$ , o sistema está desordenado ou paramagnético,  $m = 0$ . Já para  $q < 1/6$ , o sistema se encontra no estado ordenado ou ferromagnético, onde temos que  $\epsilon < 0$ , o que permite resolver (3.20) da forma

$$m = \pm \sqrt{\frac{2|\epsilon|}{p}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1-2q} - 3} \quad (3.21)$$

assim, o parâmetro de ordem se comporta da forma

$$m \sim (q_c - q)^{1/2} \quad (3.22)$$

onde  $q_c = 1/6$  é o parâmetro crítico da transição entre o estado ordenado e o desordenado. O parâmetro de ordem decai com o expoente crítico  $\beta = 1/2$ . Outros expoentes críticos para a aproximação de campo médio são  $\gamma = 1$  e  $\bar{\nu} = 2$ . A aproximação de campo médio não é a única aproximação que pode ser feita. Uma outra aproximação que fornece um valor  $q_c$  mais próximo do resultado numérico do modelo do votante majoritário na rede quadrada é a aproximação por pares, a qual fornece o valor  $q_c = 5/37$  [5].

### 3.3 Mudança de classe de universalidade no modelo do votante majoritário

Nas sessões anteriores analisamos duas abordagens diferentes para o modelo do votante majoritário. Na primeira, aplicamos um método numérico para determinar o comportamento crítico em uma rede quadrada regular, cujo o ruído crítico é  $q_c = 0.075(1)$ . Nesta abordagem, cada sítio interage diretamente com seus primeiros vizinhos. Nesse regime, o sistema pertence a classe de universalidade de Ising 2D e possui expoentes críticos exatos,  $\beta = 1/8$ ,  $\gamma = 7/4$  e  $\bar{\nu} = 2$ . A segunda análise é feita utilizando a aproximação de campo médio, na qual, o efeito de toda vizinhança de qualquer indivíduo é reduzida a um único efeito médio. Nesse regime o sistema pertence a classe de universalidade de

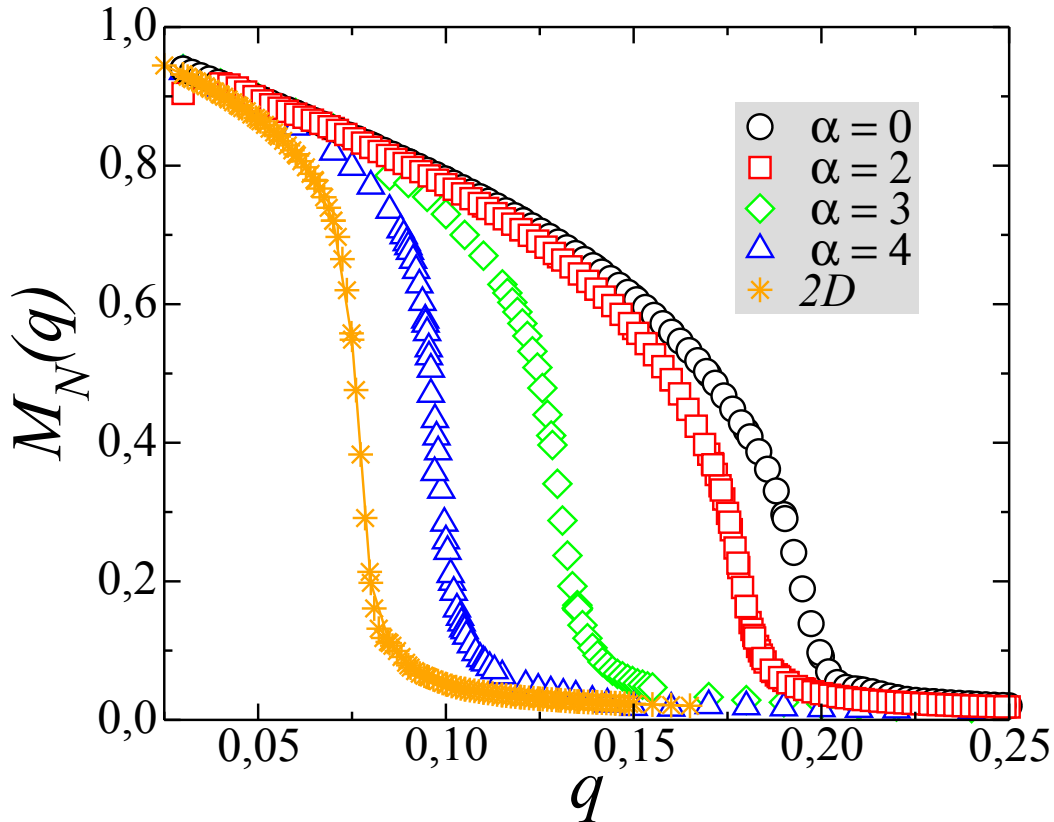


Figura 6 – Parâmetro de ordem em função do ruído para a rede quadrada regular e para redes espacialmente incorporadas com diferentes valores de  $\alpha$ . Note que o ponto crítico da transição tem seu valor máximo para  $\alpha = 0$  e diminui a medida que  $\alpha$  cresce, tendo seu valor limite no ponto crítico na rede quadrada.

campo médio, a qual possui os expoentes críticos  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  e  $\bar{\nu} = 2$  [6]. As redes espacialmente incorporadas introduzem interações cujo alcance, controlado pelo parâmetro  $\alpha$ , altera a dimensionalidade do sistema. Para  $\alpha = 0$  temos uma topologia próxima a de um grafo aleatório, onde a aproximação de campo médio pode ser aplicada. Para valores suficientemente altos de  $\alpha$  teremos uma topologia que se aproxima de uma rede regular, descrito pelo regime não clássico. Analisaremos agora como esta alteração da dimensionalidade do sistema influencia o comportamento crítico do modelo do votante majoritário.

A figura (6) mostra o comportamento do parâmetro de ordem  $M_N(q)$  com o ruído  $q$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Note que à medida que aumentamos o valor de  $\alpha$  a região ordenada diminui, tendendo ao limite da rede regular quando  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Na figura (7) temos o diagrama de fases do modelo do votante majoritário em redes de Kleinberg, onde os valores  $q_c$  foram calculados através do cumulante de Binder na equação (3.9), com os resultados obtidos das simulações em redes com 2500, 10000, 22500, 40000, 90000 e 250000 sítios. As medidas foram realizadas com médias em  $10^5$  passos de Monte Carlo, após um tempo de relaxamento de  $10^5$  passos de Monte Carlo.



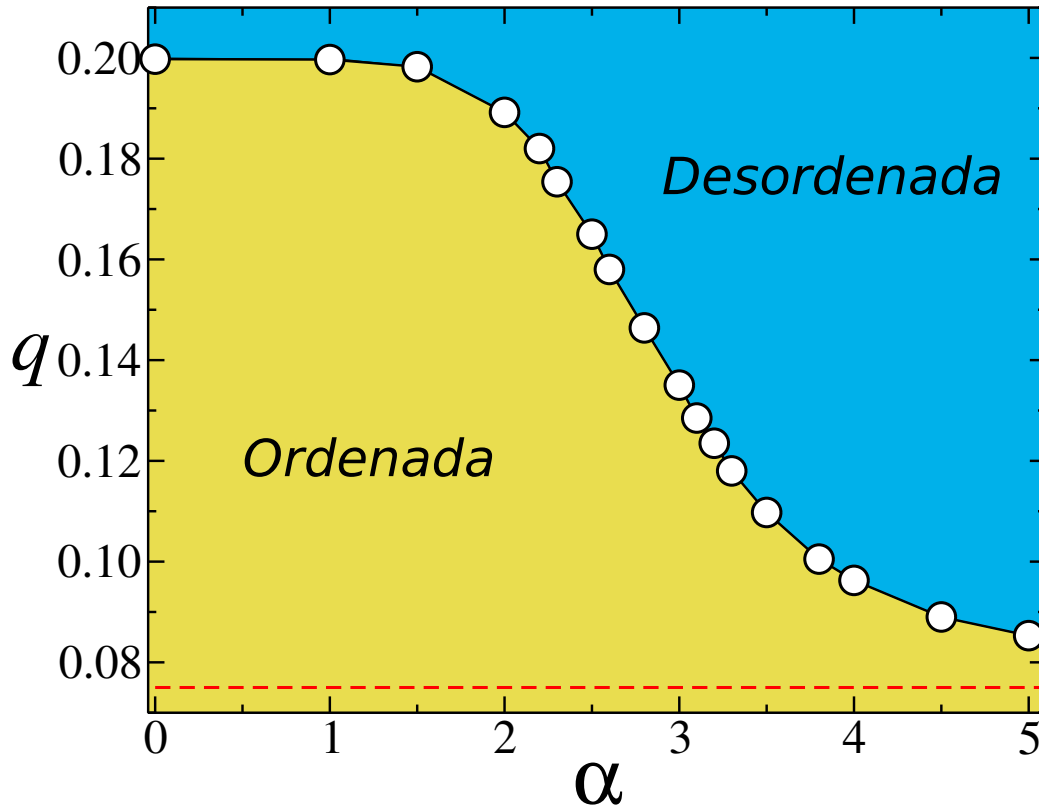


Figura 7 – Diagrama de fase do modelo do votante majoritário na rede de Kleinberg. O parâmetro crítico  $q_c$  diminui monotonicamente com o parâmetro de controle  $\alpha$ . Os valores críticos permanecem sempre acima do valor  $q_c = 0.075$  da rede regular quadrada (linha tracejada).

Na região crítica, utilizamos tempos maiores para realizar as medidas,  $10^6$  passos de Monte Carlo após o sistema relaxar por  $2 \times 10^5$  passos de Monte Carlo. Notamos que o ruído crítico decresce monotonicamente, o que reflete o fato de que quanto maior o valor de  $\alpha$  menor a densidade de ligações de longo alcance. Para  $\alpha \geq 5$ , a curva  $q_c(\alpha)$  se aproxima assintoticamente de  $q_c = 0.075(1)$  (linha tracejada) valor do ruído crítico do modelo na rede quadrada [25].

A dependência do ruído crítico com o parâmetro  $\alpha$  que controla as ligações de longo alcance é de certo modo esperada, uma vez que o parâmetro crítico de controle não é uma propriedade universal. Entretanto, é um resultado bastante não usual que o valor crítico do cumulante de Binder também apresente uma dependência com  $\alpha$ , como mostra a figura (8). Para cada valor do parâmetro  $\alpha$ , determinamos  $U^* = U(q_c)$  como a intercessão das curvas deste cumulante. Observe que apenas em  $\alpha = 0$  o valor do cumulante coincide com o valor de campo médio, dado por  $U^* = 0.2705208$  (linha pontilhada) [19, 31, 27, 32, 33], variando continuamente para todos os valores de  $\alpha < 4$  com um mínimo em  $\alpha = 2$ . Para  $\alpha \geq 4$  temos  $U^* = 0.61069014(1)$  (linha tracejada) [27, 28, 29, 30] independente de  $\alpha$  e coincidindo com o valor da classe de universalidade de Ising 2D considerando condições

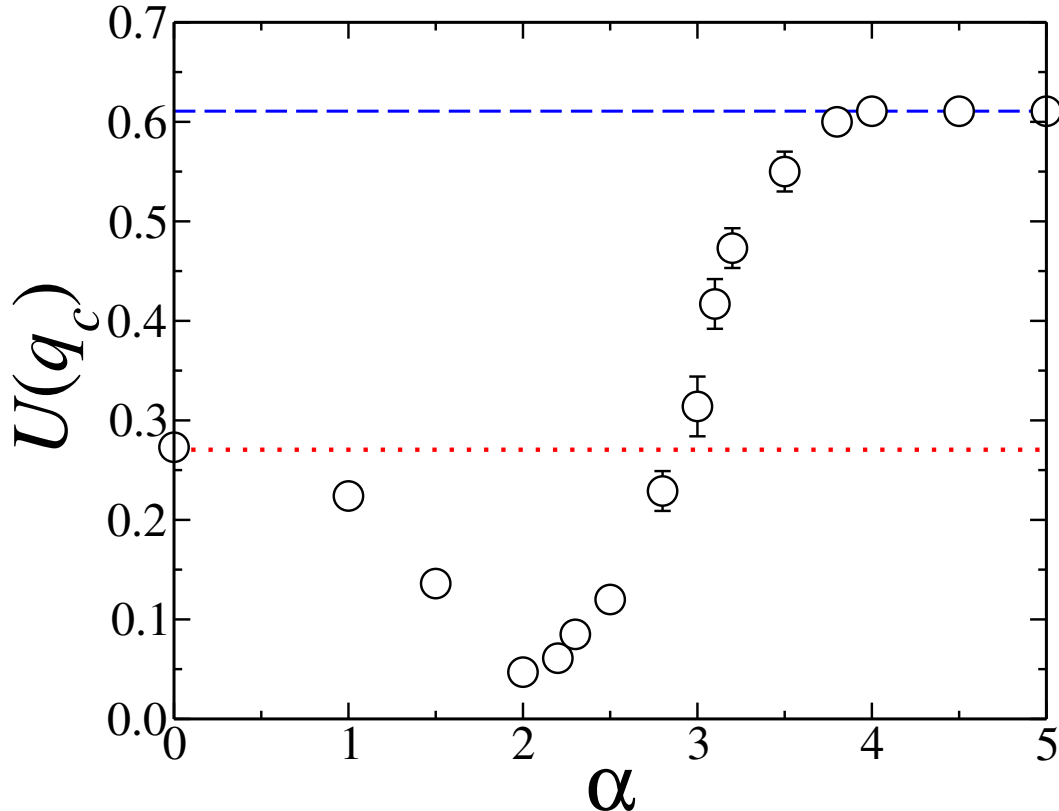


Figura 8 – Cumulante de Binder calculado no ruído crítico  $q_c$ . A linha vermelha pontilhada corresponde ao valor de campo médio ( $U^* = 0.2705208$ ) e a linha azul tracejada corresponde ao valor para a classe de universalidade de Ising 2D  $U^* = 0.61069014(1)$ . Para alguns pontos a barra de erro é menor que os símbolos. Um mínimo de  $U(q_c)$  em  $\alpha = 2$  é derivado da condição de navegação ótima com conhecimento local. O regime de Ising 2D é recuperado para  $\alpha \geq 4$ .

de contorno periódicas.

Em termos dos valores de  $U^*$ , vimos que o modelo do votante majoritário tem seu comportamento crítico descrito tanto por resultados de campo médio quanto por resultados não clássicos, considerando o valor de  $\alpha$  apropriado. Analisaremos agora a dependência de  $\alpha$  sobre as amplitudes críticas do parâmetro de ordem e da suscetibilidade, através das relações de escala de tamanho finito, segundo as equações (3.11) e (3.12). A partir desta análise determinamos os expoentes críticos  $\beta/\bar{\nu}$  e  $\gamma/\bar{\nu}$ , bem como as funções universais destas quantidades. Na figura (9) mostramos a dependência da suscetibilidade, em  $q = q_c$ , com o tamanho  $N$  do sistema para diferentes valores no intervalo  $3 < \alpha < 4$ . Estes resultados são obtidos pela equação (3.12) a partir da análise gráfica em escala  $\log\text{-}\log$ , onde obtemos a seguinte relação linear:

$$\log[\chi_N(q_c)] = \frac{\gamma}{\bar{\nu}} \log N + \log \tilde{\chi}(0), \quad (3.23)$$

que são retas cujos coeficientes angulares fornecem estimativas do expoente  $\gamma/\bar{\nu}$ . Verificamos que no intervalo considerado os expoentes calculados variam continu-

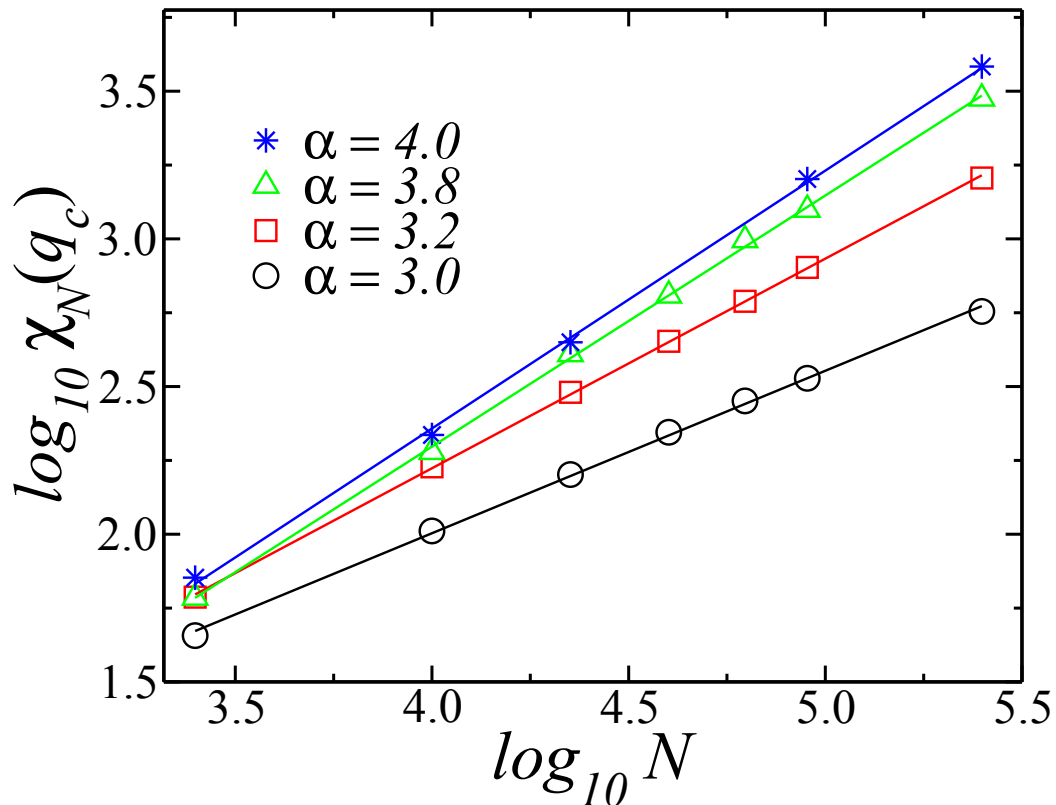


Figura 9 – Dependência da suscetibilidade crítica para  $\alpha = 3.0$  (círculos), 3.2 (quadrados), 3.8 (triângulos), 4.0 (estrelas). As linhas contínuas são os ajustes dos dados cujas inclinações são os expoentes  $\gamma/\bar{\nu}$ . Os valores dos expoentes estão expostos na tabela 1.

amente com o parâmetro  $\alpha$ . Entretanto, em  $\alpha = 3$  temos  $\gamma/\bar{\nu} = 0.533 \pm 0.050$  que corresponde ao valor da classe de universalidade de campo médio. E para  $\alpha = 4$  temos  $\gamma/\bar{\nu} = 0.870 \pm 0.060$  correspondente à classe de universalidade de Ising 2D. Vemos que estes resultados caracterizam o crossover entre estas classes de universalidade. A mesma análise foi realizada para outros valores de  $\alpha$  e estão resumidos na tabela (1) e exibidos na figura (10). Concluímos que para  $\alpha \leq 3$  os valores dos expoentes críticos correspondem aos da classe de universalidade de campo médio, enquanto que, para  $\alpha \geq 4$  os expoentes críticos são descritos pela classe de universalidade de Ising 2D. Por fim, no intervalo  $3 < \alpha < 4$ , os expoentes são dependentes do parâmetro  $\alpha$ .

Para melhor quantificarmos as conclusões do último parágrafo, consideraremos uma análise mais acurada que consiste em obter funções universais para a magnetização e suscetibilidade:

$$\tilde{M}(x) = M_N(q)N^{\beta/\bar{\nu}}, \quad (3.24)$$

$$\tilde{\chi}(x) = \chi_N(q)N^{-\gamma/\bar{\nu}}, \quad (3.25)$$

sendo  $x = \varepsilon N^{1/\bar{\nu}}$  a variável de escala. Tais funções representam o colapso de dados para

$\alpha$	$q_c$	$\beta/\bar{\nu}$	$\gamma/\bar{\nu}$
0.0	$0.1998 \pm 0.0001$	$0.253 \pm 0.032$	$0.490 \pm 0.055$
1.0	$0.1997 \pm 0.0002$	$0.250 \pm 0.040$	$0.505 \pm 0.055$
2.0	$0.1892 \pm 0.0001$	$0.250 \pm 0.063$	$0.480 \pm 0.060$
2.3	$0.1754 \pm 0.0004$	$0.249 \pm 0.032$	$0.535 \pm 0.071$
2.5	$0.1650 \pm 0.0009$	$0.260 \pm 0.080$	$0.480 \pm 0.063$
2.8	$0.1464 \pm 0.0007$	$0.251 \pm 0.055$	$0.500 \pm 0.063$
3.0	$0.1350 \pm 0.0003$	$0.256 \pm 0.055$	$0.533 \pm 0.050$
3.2	$0.1235 \pm 0.0003$	$0.134 \pm 0.060$	$0.710 \pm 0.070$
3.5	$0.1097 \pm 0.0010$	$0.110 \pm 0.060$	$0.815 \pm 0.032$
3.8	$0.1005 \pm 0.0001$	$0.069 \pm 0.044$	$0.850 \pm 0.055$
4.0	$0.0963 \pm 0.0005$	$0.066 \pm 0.041$	$0.870 \pm 0.060$
5.0	$0.0820 \pm 0.0003$	$0.064 \pm 0.040$	$0.873 \pm 0.065$

Tabela 1 – Resultado para o ruído crítico e expoentes críticos  $\beta/\bar{\nu}$  e  $\gamma/\bar{\nu}$  do modelo do votante majoritário na rede de Kleinberg para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ . Os valores de campo médio são  $\beta/\bar{\nu} = 0.250$  e  $\gamma/\bar{\nu} = 0.500$ , enquanto os expoentes de Ising 2D são  $\beta/\bar{\nu} = 0.0625$  e  $\gamma/\bar{\nu} = 0.875$ .

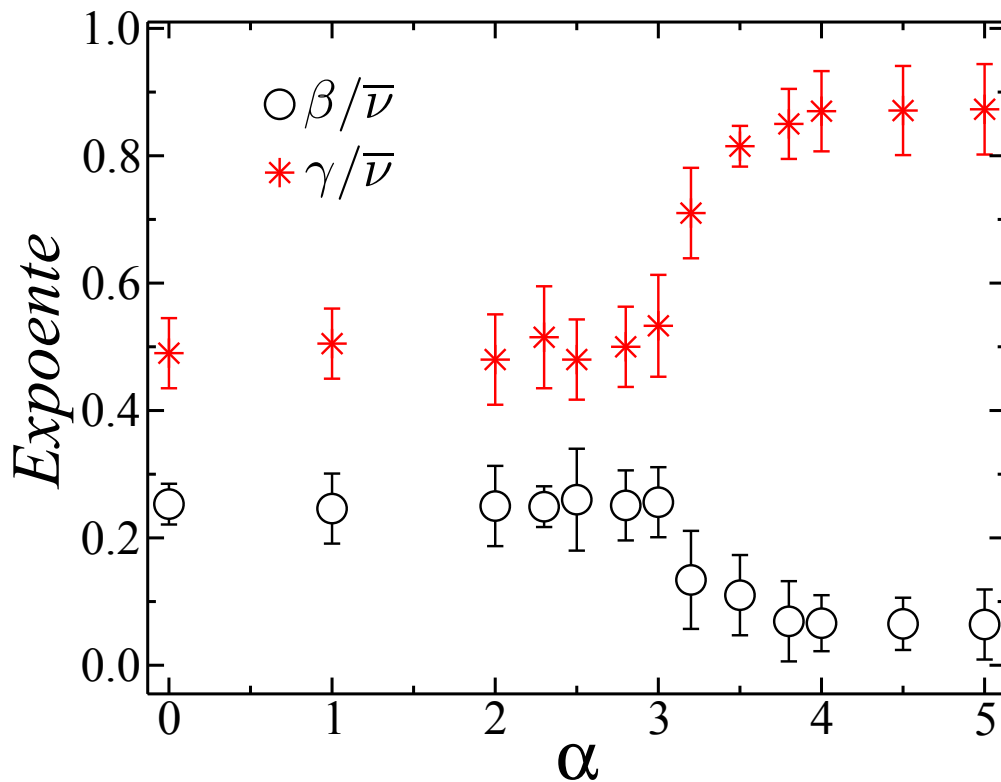


Figura 10 – Dependência dos expoentes críticos  $\beta/\bar{\nu}$  e  $\gamma/\bar{\nu}$  com o parâmetro  $\alpha$ . O expoente  $\bar{\nu} = 2$  para todos os valores de  $\alpha$ .

um  $\alpha$  fixo e diferentes valores de  $N$ . Observe que as curvas universais são obtidas somente utilizando os valores corretos dos expoentes. Na figura (11) temos o colapso de dados do parâmetro de ordem obtidos das nossas simulações. Na figura (11a) mostramos o colapso da magnetização para  $\alpha = 3$ , na qual utilizamos os expoentes de campo médio  $\beta = 1/2$ ,

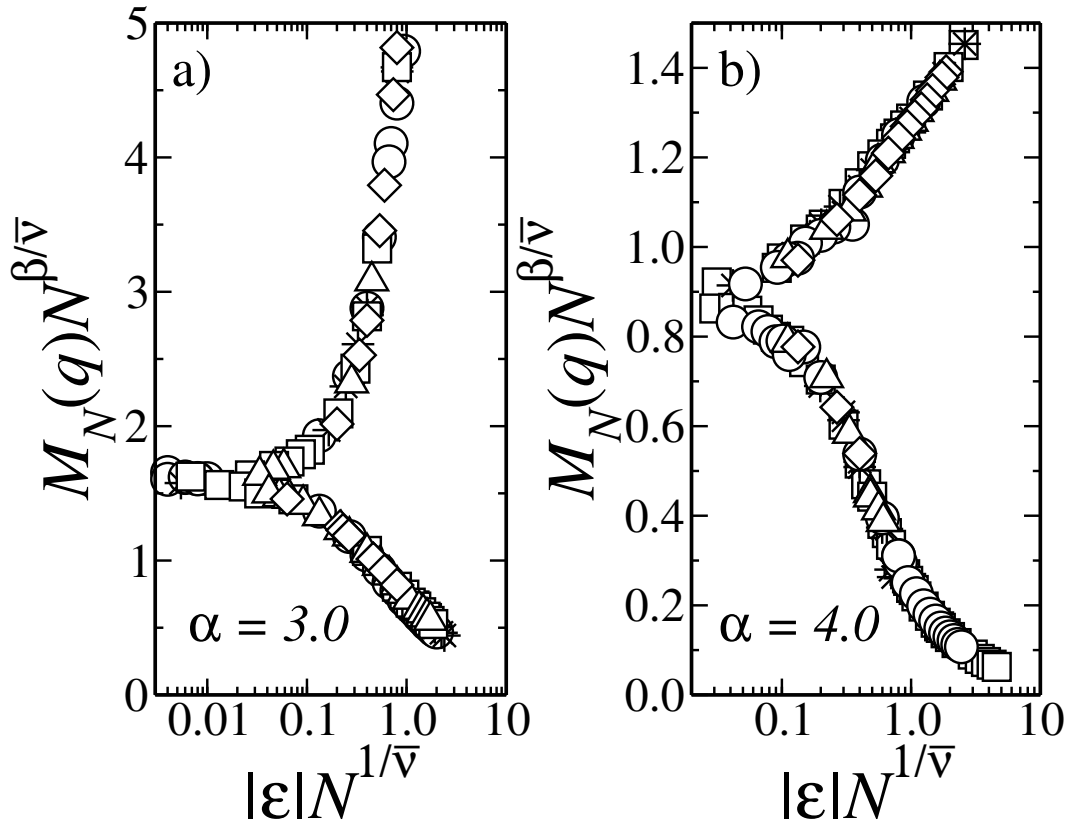


Figura 11 – Colapso dos dados da magnetização para sistemas com tamanhos  $N = 1000$  (círculos), 22500 (asteriscos), 40000 (quadrados), 62500 (triângulos) e 90000 (losangos). (a) Curva universal para  $\alpha = 3$  é consistente com os expoentes de campo médio:  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\bar{\nu} = 2$ . Para  $\alpha = 4$ , o colapso dos dados foi obtido usando os expoentes de Ising:  $\beta = 1/8$ ,  $\gamma = 7/4$  e  $\bar{\nu} = 2$ .

$\bar{\nu} = 2$ . Na figura (11b) o colapso dos dados para  $\alpha = 4$ , utilizamos os expoentes de Ising,  $\beta = 1/8$  e  $\bar{\nu} = 2$ . Para cada figura foram consideradas redes de tamanhos  $N = 10000$ , 40000, 62500 e 90000.

Na figura (12) consideramos o colapso de dados da amplitude crítica da suscetibilidade como função do parâmetro  $\alpha$ , utilizando redes de tamanho  $N = 10000$ , 40000, 62500 e 90000. Reescalamos a suscetibilidade na forma da equação (3.25), tomando os expoentes críticos que satisfazem nossa conjectura, isto é, expoente de campo médio para  $\alpha \leq 3$ , expoentes dependentes de  $\alpha$  no intervalo  $3 < \alpha < 4$  e expoente de Ising 2D para  $\alpha \geq 4$ . Como podemos observar, a figura (12) corrobora com nossa conjectura, destacando ainda a região singular caracterizada por expoentes críticos não universais. Observe que em  $\alpha = 2$  não temos um valor limite inferior para a amplitude crítica da suscetibilidade, diferentemente da amplitude crítica do cumulante de Binder. No entanto, um limite superior das flutuações do parâmetro de ordem pode ser observado para  $\alpha = 3$ .

Os resultados apresentados nesta sessão foram publicados em revista da área, e este artigo está anexado no apêndice A desta Tese [34].

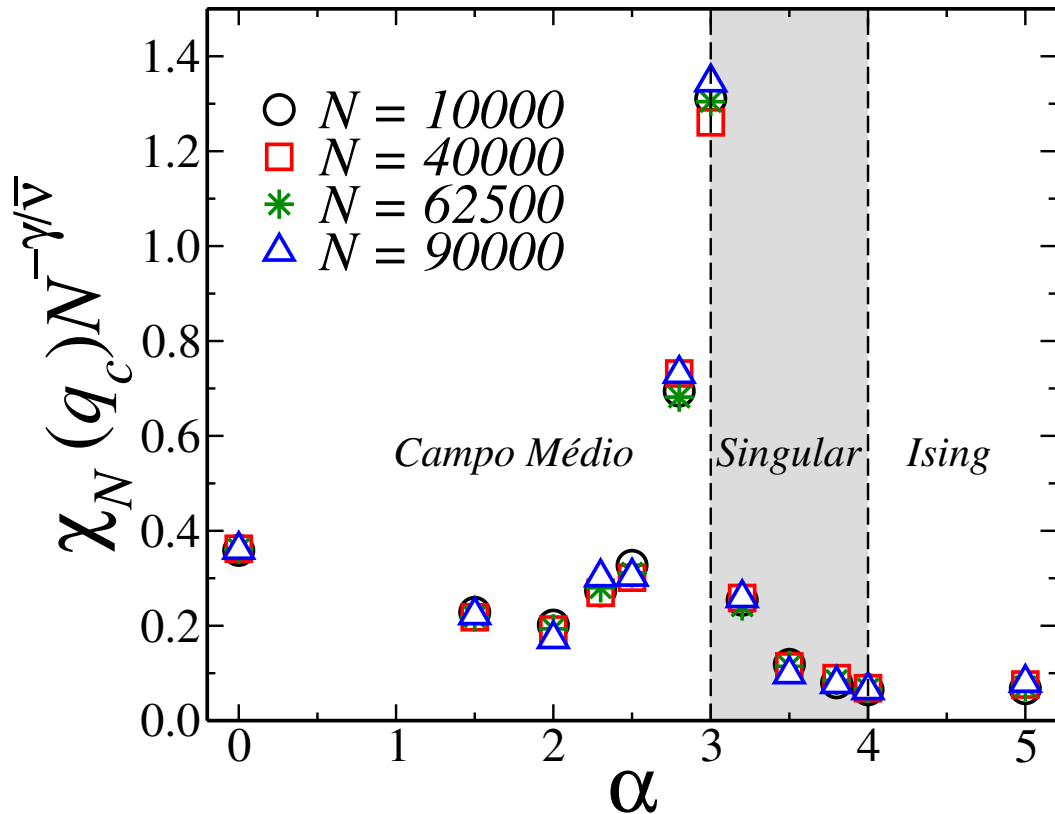


Figura 12 – Colapso dos dados da suscetibilidade no ponto crítico em função de  $\alpha$ . Os expoentes usados são  $\gamma/\bar{\nu} = 0.5$  para  $\alpha \leq 3$ ,  $\gamma/\bar{\nu} = 0.875$  para  $\alpha \geq 4$  e para  $3 < \alpha < 4$  foram usados os expoentes listados na tabela 1. Note que há um máximo na flutuação em  $\alpha = 3$ .

### 3.4 O processo de contato

Introduzido em 1974 por T.E. Harris, o processo de contato é o exemplo mais simples de sistema irreversível com estado absorvente que exhibe transição de fase contínua em uma dimensão [35, 9]. Tal modelo é relevante pois serve como ponto de partida para o desenvolvimento de novos métodos em problemas de não equilíbrio em sistemas finitos.

O processo de contato pode ser entendido como um modelo de propagação de uma epidemia simples. Primeiro considera-se indivíduos que residem em sítios de uma rede hipercúbica, onde tais indivíduos podem estar sadios ou contaminados. A contaminação de um sítio sadio só poderá ocorrer se ao menos um dos sítios vizinhos estiver contaminado, de modo que a taxa de contágio aumenta com o número de indivíduos contaminados na vizinhança do indivíduo sadio. Além do processo de contaminação, há o processo de cura no qual indivíduos contaminados se tornam sadios espontaneamente. Entretanto, a recuperação de um indivíduo não o imuniza, sendo possível que ele retorne ao estado contaminado. A evolução temporal desse sistema poderá levá-lo a um estado onde não há mais indivíduos contaminados, fazendo com que a epidemia se extinga. Dizemos então

que o sistema atingiu o estado absorvente, do qual não pode mais sair. Também podemos descrever o processo de contato como um modelo de criação e aniquilação de partículas: um sítio sadio é associado a um sítio vazio, enquanto um sítio infectado é associado a um sítio ocupado por uma partícula. A propagação da doença é equivalente à criação de uma partícula em um sítio vizinho vazio, enquanto a cura é equivalente à aniquilação de uma partícula.

O modelo do processo de contato possui uma transição contínua entre o estado ativo, onde há sítios ocupados (ou contaminados), e um estado inativo, que é absorvente, no qual existem apenas sítios vazios (ou sadios). Consideramos que um estado  $\sigma_i$  de um sítio  $i$  da rede assume os valores 0 ou 1. A transição do estado  $\sigma_i = 0 \rightarrow \sigma_i = 1$  ocorre com a taxa  $\lambda r_i$ , sendo  $\lambda$  a taxa de criação e  $r_i$  é o número de vizinhos do sítio  $i$ . E a transição  $\sigma_i = 1 \rightarrow \sigma_i = 0$ , se dá a uma taxa  $\eta$ , a qual pode ser unitária sem perda de generalidade [9]. A densidade de partículas é definida por  $\rho = \sum_i \sigma_i / N$ , sendo  $N$  o número total de sítios e descreve o parâmetro de ordem da transição entre o estado ativo e o absorvente, que ocorre em um particular valor crítico  $\lambda_c$  da taxa de criação.

A presença do estado absorvente gera uma dificuldade na realização das simulações do processo de contato. Devido às flutuações no parâmetro de ordem  $\rho$  em sistemas finitos, mesmo que o sistema se encontre num valor de  $\lambda > \lambda_c$ , o sistema poderá atingir o estado absorvente, inviabilizando a realização das medidas de interesse. Para contornar esse problema são utilizados métodos para gerar estados quase estacionários, prevenindo que o sistema atinja o estado absorvente. Alguns desses métodos consistem na ativação espontânea de sítios após o sistema atingir o estado absorvente [36]. Um outro método consiste em registrar estados ativos visitados pelo sistema e, após atingir o estado absorvente, sortear um destes estados no qual o sistema será recolocado [37]. Nesta etapa do presente trabalho consideraremos esse segundo método para geração de estados quase estacionários.

Vamos agora descrever a dinâmica do processo de contato. A cada passo de tempo  $\Delta t$ , sorteamos um dos  $N_c$  sítios ocupados da rede. Em seguida, escolhemos um dos seguintes eventos:

- Criamos uma partícula, com probabilidade  $\lambda N_c \Delta t$ .
- Eliminamos uma partícula, com probabilidade  $N_c \Delta t$ .

Para o processo de criação, após escolhermos um sítio ocupado, sorteamos um dos seus vizinhos e caso esteja vazio será ocupado por uma partícula. E para o processo de eliminação, simplesmente removemos a partícula sorteada. As probabilidades são normalizadas, de modo que  $1/\Delta t = (N_c \Delta t + \lambda N_c \Delta t)$ . E após  $N_c$  sorteios teremos um passo de

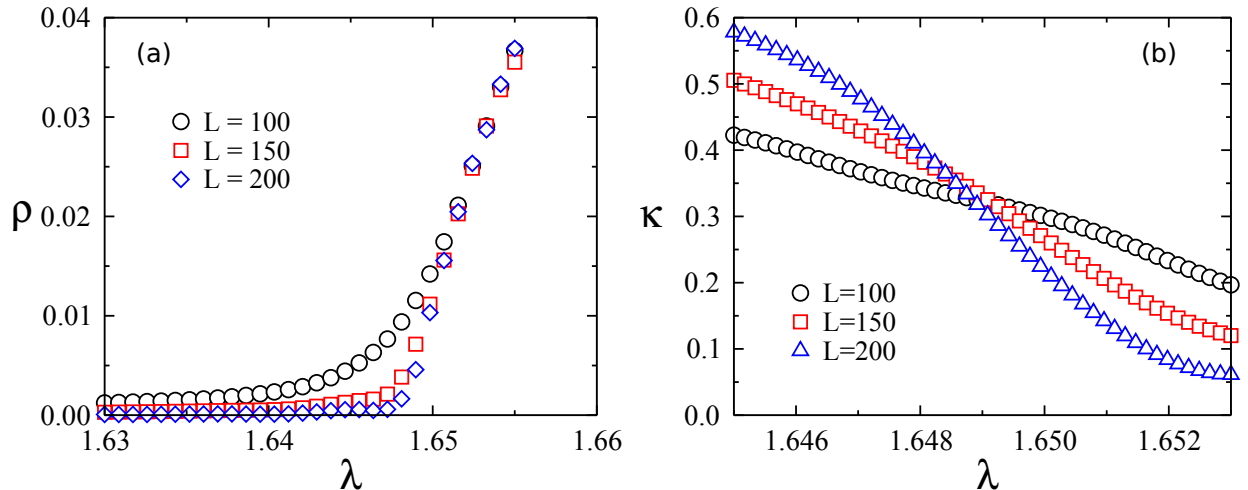


Figura 13 – Reprodução dos resultados das simulações do processo de contato na rede quadrada regular. (a) A densidade  $\rho$  em função da taxa de criação  $\lambda$  para diferentes tamanhos do sistema. Podemos identificar a transição entre o estado absorvente,  $\rho = 0$ , e o estado ativo,  $\rho \neq 0$ . (b) O valor do ponto crítico  $\lambda_c$  é determinado pelo cruzamento das curvas do cumulante  $\kappa$  para diferentes tamanhos do sistema.

Monte Carlo. O método para gerar o estado quase estacionário que utilizamos é aquele no qual o estado absorvente é substituído por um estado ativo anteriormente visitado. Tais estados são armazenados em uma lista com 400 estados, os quais são atualizados com uma probabilidade  $p = 0.01$  [37]. Na figura (13) temos o resultado numérico do processo de contato em redes quadradas de tamanhos  $L = 100, 150$  e  $200$ . As médias foram feitas em 100 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo medidos após  $10^4$  passos de Monte Carlo de relaxamento. Esse resultado mostra que há uma transição entre o estado absorvente, e o estado ativo. Para estimar o valor do ponto crítico  $\lambda_c$  em sistemas com estados absorvente utilizamos o cumulante  $\kappa$  [38] dos momentos da distribuição de  $\rho$ , tal que

$$\kappa = \frac{\langle \langle \rho^2 \rangle_{tempo} - \langle \rho \rangle_{tempo}^2 \rangle_{amostra}}{\langle \langle \rho \rangle_{tempo}^2 \rangle_{amostra}}, \quad (3.26)$$

sendo  $\langle \rangle_{tempo}$  a notação que usamos para representar a média no tempo e  $\langle \rangle_{amostra}$  a média nas amostras. A figura (13b) mostra o cruzamento dos cumulantes  $\kappa$  para redes quadradas de tamanhos lineares  $L = 100, 150$  e  $200$ . O cruzamento das curvas fornece uma estimativa do valor  $\lambda_c = 1.649(1)$  para o processo de contato. O processo de contato pertence a classe de universalidade de percolação direcionada, que em duas dimensões possui os seguintes expoentes críticos:  $\beta = 0.583(4)$ ,  $\gamma = 0.35(1)$  e  $\bar{\nu}_\perp = 1.516(9)$  [9].

### 3.4.1 Aproximação de Campo Médio

Assim como descrito em sessões anteriores, a aproximação de campo médio reduz o problema da interação de muitos corpos à interação de um corpo com um campo



que é a média das interações do sistema. Consideremos que  $\rho(t)$  é a probabilidade de um sítio estar ativo num dado instante  $t$ . Como a taxa de desocupação é unitária, a probabilidade de um sítio ser desocupado é proporcional à  $\rho(t)$ . Já a probabilidade de ocupar um sítio depende das frações de sítios ocupados e vazios, além da taxa de criação. Assim temos que a taxa de variação de  $\rho(t)$  é dada por

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t) + \lambda[1 - \rho(t)]\rho(t). \quad (3.27)$$

Estamos interessados na solução estacionária, ou seja, onde não há variação da população de sítios ocupados

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = 0. \quad (3.28)$$

O resultado é caracterizado por duas soluções estacionárias. A primeira se refere ao estado absorvente:

$$\rho = 0. \quad (3.29)$$

A segunda solução é relativa ao estado estacionário ativo do sistema

$$\rho = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (3.30)$$

a qual só é válida para  $\lambda > 1$ . Portanto, o sistema apresenta, no estado estacionário, uma transição entre o estado absorvente e o estado ativo, onde o parâmetro de ordem  $\rho$  se comporta da seguinte forma,

$$\rho \sim (\lambda - \lambda_c), \quad (3.31)$$

com o ponto crítico em  $\lambda_c = 1$  [5]. O comportamento crítico do processo de contato segundo a teoria de campo médio é descrito pelos expoentes críticos  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$  e  $\bar{\nu}_\perp = 1/2$  [9].

Essa diferença no comportamento crítico entre os regimes de Percolação Direcionada e de campo médio é atribuído principalmente a mudança da dimensionalidade do sistema. No caso da percolação direcionada a dimensão crítica superior é  $d_c = 4$ , ou seja, para uma dimensão  $d \geq 4$  o comportamento crítico pertence ao regime de campo médio, abaixo de  $d_c$  temos o comportamento crítico da percolação direcionada unidimensional ( $\beta = 0.276486(8)$ ,  $\gamma = 0.54386(6)$  e  $\bar{\nu}_\perp = 1.09684(6)$ ), bidimensional ( $\beta = 0.583(4)$ ,  $\gamma = 0.35(1)$  e  $\bar{\nu}_\perp = 1.516(9)$ ) ou tridimensional ( $\beta = 0.813(9)$ ,  $\gamma = 0.19(1)$  e  $\bar{\nu}_\perp = 1.743(15)$ ). Na próxima sessão analisaremos a transição entre a classe de universalidade da percolação direcionada 2D e a de campo médio. Para isso estudaremos o processo de contato na rede de Kleinberg, a qual nos permite variar a dimensionalidade do sistema apenas controlando o parâmetro  $\alpha$ .

### 3.5 Mudança de classe de universalidade para o processo de contato

Analisaremos os efeitos das ligações de longo alcance, descritas pela construção de Kleinberg, sobre o comportamento crítico do processo de contato. Comparando com uma infecção, em função dos atalhos, a doença pode contaminar indivíduos distantes do sítio infectado, acelerando o processo de contágio global. Dessa forma, é esperado que a infecção persista mais em comunidades mais conetadas, e como na rede de Kleinberg, a probabilidade de encontrar atalhos com maior alcance cresce com a redução do parâmetro  $\alpha$ , é esperado que a persistência da infecção também cresça a medida que  $\alpha$  se aproxima de zero.

Na figura (14) mostramos o diagrama de fases do processo de contato na rede de Kleinberg. Cada valor de  $\lambda_c(\alpha)$  foi calculado do cruzamento do cumulante  $\kappa$  como função da taxa de criação para redes com tamanhos  $N = 10000, 22500, 40000, 62500$  e  $90000$ . Observamos que o valor de  $\lambda_c(\alpha)$  cresce à medida que aumentamos o valor de  $\alpha$ , mas mantendo-se sempre abaixo do valor crítico para a rede quadrada ( $\lambda_c = 1.649(1)$ ), indicado pela linha tracejada. Para  $\alpha \rightarrow \infty$ , a rede de Kleinberg tende a recuperar a

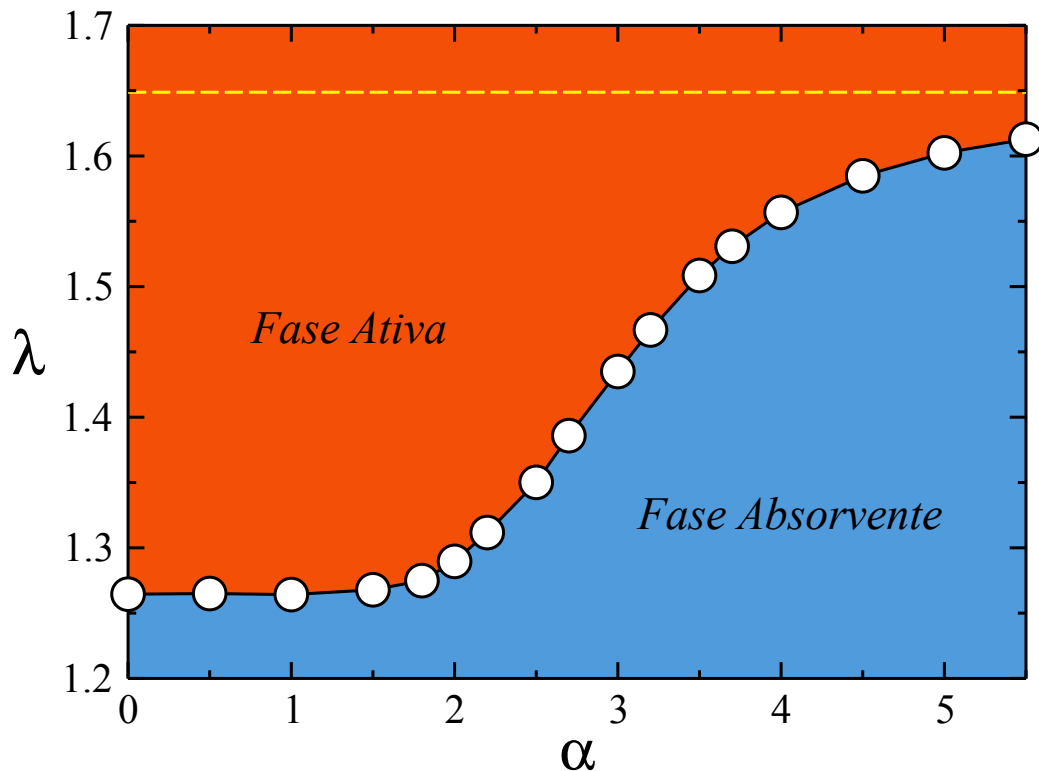


Figura 14 – Diagrama de fase do processo de contato na rede de Kleinberg. O parâmetro crítico  $\lambda_c$  cresce monotonicamente com o parâmetro de controle  $\alpha$ . Os valores críticos permanecem sempre abaixo do valor  $\lambda_c = 1.649$  da rede regular quadrada (linha tracejada).

geometria regular, então  $\lambda_c(\alpha)$  assintota para o valor crítico da rede quadrada.

Em alguns trabalhos mostra-se que o cumulante de Binder e o cumulante dado pela equação (3.26) possuem propriedades que são compartilhadas por diferentes modelos [39]. Desta forma, tendem a serem descritos como indicadores de universalidade. Entretanto, são dependentes de propriedades como a condição de contorno. Além disso, já mostramos que para o modelo do votante majoritário, a universalidade não pode ser descrita pelo cumulante de Binder em sistemas cujas conexões são descritas pela construção de Kleinberg. A figura (15) mostra o cumulante crítico  $\kappa_c$  em função do parâmetro  $\alpha$ . Para valores de  $\alpha \geq 4$  temos os valores  $\kappa_c(\alpha)$  consistentes com o valor do regime de percolação direcionada 2D, indicado pela linha tracejada ( $\kappa = 0.3257(5)$ ) [38]. Já para valores de  $\alpha < 4$  temos que o valor do cumulante crítico  $\kappa_c$  depende do valor de  $\alpha$ , apresentando um máximo em  $\alpha = 2$ . Por outro lado o valor do cumulante  $\kappa$  são aproxima do seu valor no

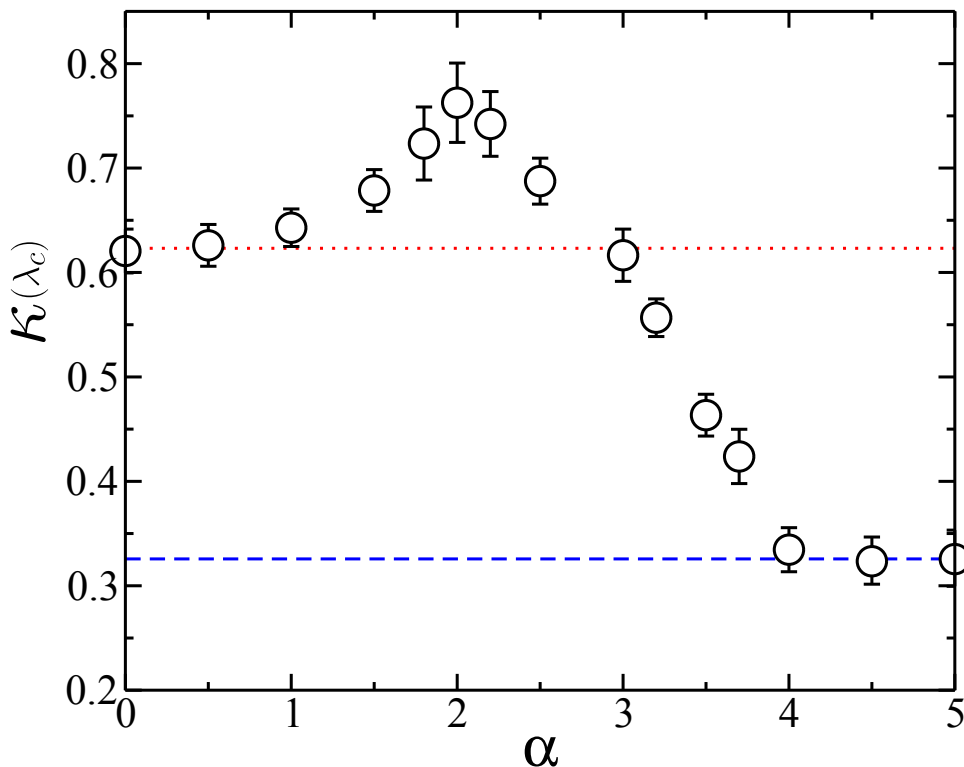


Figura 15 – Cumulante crítico  $\kappa_c$  calculado no ruído crítico  $\lambda_c$ . A linha vermelha pontilhada corresponde ao valor de campo médio ( $\kappa = 0.6232(2)$ ), e a linha azul tracejada corresponde ao valor para a classe de universalidade de percolação direcionada 2D ( $\kappa = 0.3257(5)$ ). Um máximo de  $\kappa(\lambda_c)$  em  $\alpha = 2$  é derivado da condição de navegação ótima com conhecimento local. O regime de percolação direcionada 2D é recuperado para  $\alpha \geq 4$ .

regime de campo médio  $\kappa_{MF} = 0.6232(2)$ , indicado pela linha pontilhada, quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Para determinar os expoentes críticos realizamos a análise de escala de tamanho finito. Próximo do ponto crítico o parâmetro de ordem escala segundo a equação

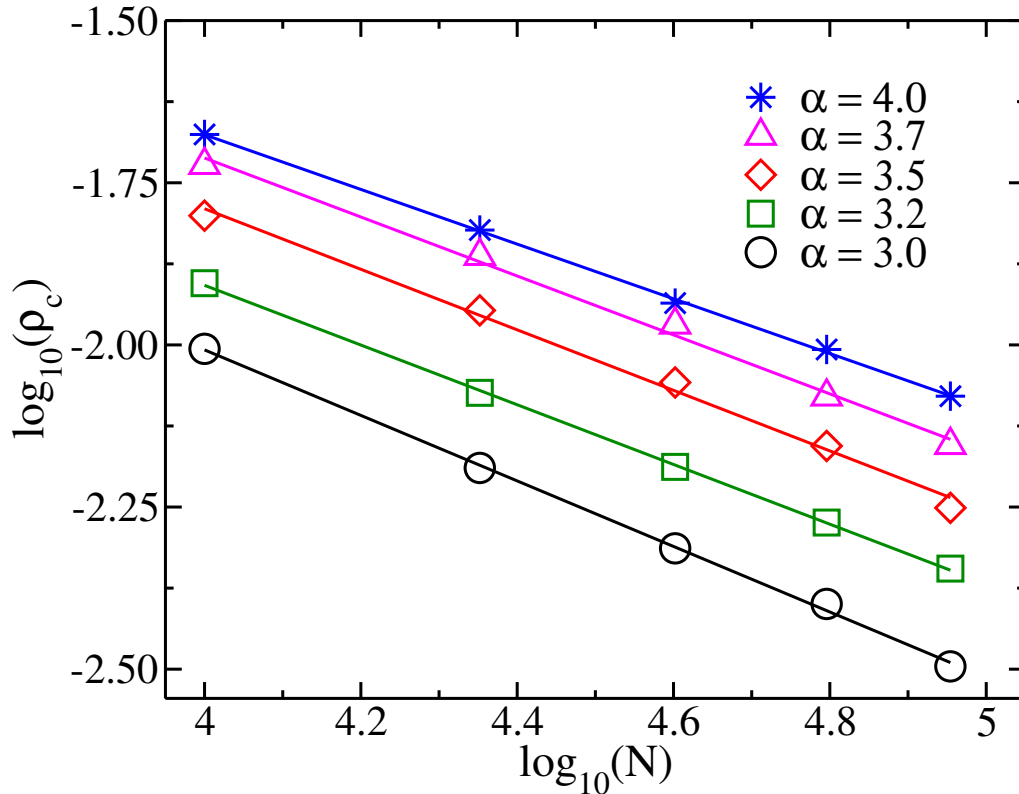


Figura 16 – Dependência do parâmetro de ordem crítico para  $\alpha = 3.0$  (círculos), 3.2 (quadrados), 3.5 (losangos), 3.7 (triângulos) e 4.0 (asteriscos). As linhas contínuas são os ajustes dos dados, os quais correspondem aos expoentes  $\beta/\bar{\nu}_\perp$ , os valores estão expostos na tabela 2.

$\alpha$	$\lambda_c$	$\beta/\bar{\nu}_\perp$	$\kappa(\lambda_c)$
0.0	$1.2645 \pm 0.0008$	$0.502 \pm 0.012$	$0.621 \pm 0.021$
0.5	$1.2650 \pm 0.0003$	$0.500 \pm 0.015$	$0.626 \pm 0.020$
1.0	$1.2642 \pm 0.0006$	$0.499 \pm 0.020$	$0.643 \pm 0.018$
1.5	$1.2679 \pm 0.0005$	$0.502 \pm 0.015$	$0.678 \pm 0.020$
2.0	$1.2896 \pm 0.0008$	$0.501 \pm 0.020$	$0.763 \pm 0.038$
2.5	$1.3501 \pm 0.0006$	$0.506 \pm 0.012$	$0.687 \pm 0.022$
3.0	$1.4350 \pm 0.0002$	$0.494 \pm 0.010$	$0.617 \pm 0.025$
3.2	$1.4668 \pm 0.0009$	$0.456 \pm 0.015$	$0.557 \pm 0.018$
3.5	$1.5085 \pm 0.0003$	$0.448 \pm 0.026$	$0.463 \pm 0.020$
3.8	$1.5309 \pm 0.0008$	$0.410 \pm 0.020$	$0.424 \pm 0.026$
4.0	$1.5568 \pm 0.0003$	$0.395 \pm 0.023$	$0.347 \pm 0.017$
4.5	$1.5848 \pm 0.0012$	$0.381 \pm 0.017$	$0.319 \pm 0.022$
5.0	$1.6024 \pm 0.0003$	$0.387 \pm 0.020$	$0.315 \pm 0.020$
5.5	$1.6129 \pm 0.0004$	$0.385 \pm 0.021$	$0.312 \pm 0.025$

Tabela 2 – Resultado para o  $\lambda_c$  e o expoente crítico  $\beta/\bar{\nu}_\perp$  do modelo do processo de contato na rede de Kleinberg para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ . Os valores de campo médio são  $\lambda_c = 1$  e  $\beta/\bar{\nu}_\perp = 1/2$ , enquanto os expoentes do modelo de percolação direcionada 2D são  $\lambda_c = 1.649(1)$  e  $\beta/\bar{\nu}_\perp = 0.385(6)$  [9].

$$\rho_N(\lambda) \sim N^{-\beta/\bar{\nu}_\perp} \tilde{\rho}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}_\perp}), \quad (3.32)$$

sendo  $\varepsilon = (\lambda - \lambda_c)$ . A figura 16 mostra a relação da densidade crítica com o tamanho do sistema para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ , onde os símbolos são os valores de  $\rho$  calculados em  $\lambda_c$  e as retas são os ajustes dos resultados. A inclinação dos ajustes fornecem o valor do expoente crítico  $\beta/\bar{\nu}_\perp$ . Notamos que os expoentes críticos no intervalo  $3 < \alpha < 4$  variam continuamente, significando que neste intervalo o sistema apresenta um comportamento crítico singular, ou seja, temos um valor do expoente crítico dependente de  $\alpha$  os quais não pertencem a nenhuma classe de universalidade. A tabela 2 mostra os valores de  $\lambda_c$  e de  $\beta/\bar{\nu}_\perp$ , e podemos ver a dependência do expoente crítico  $\beta/\bar{\nu}_\perp$  com  $\alpha$  na figura (17). Para  $\alpha \leq 3$ ,  $\beta/\bar{\nu}_\perp$  é consistente com o valor de campo médio  $\beta/\bar{\nu}_\perp = 1/2$ , e para  $\alpha \geq 4$  o expoente é consistente com a classe de universalidade da percolação direcionada, cujo expoente crítico é  $\beta/\bar{\nu}_\perp = 0.385(6)$  [9].

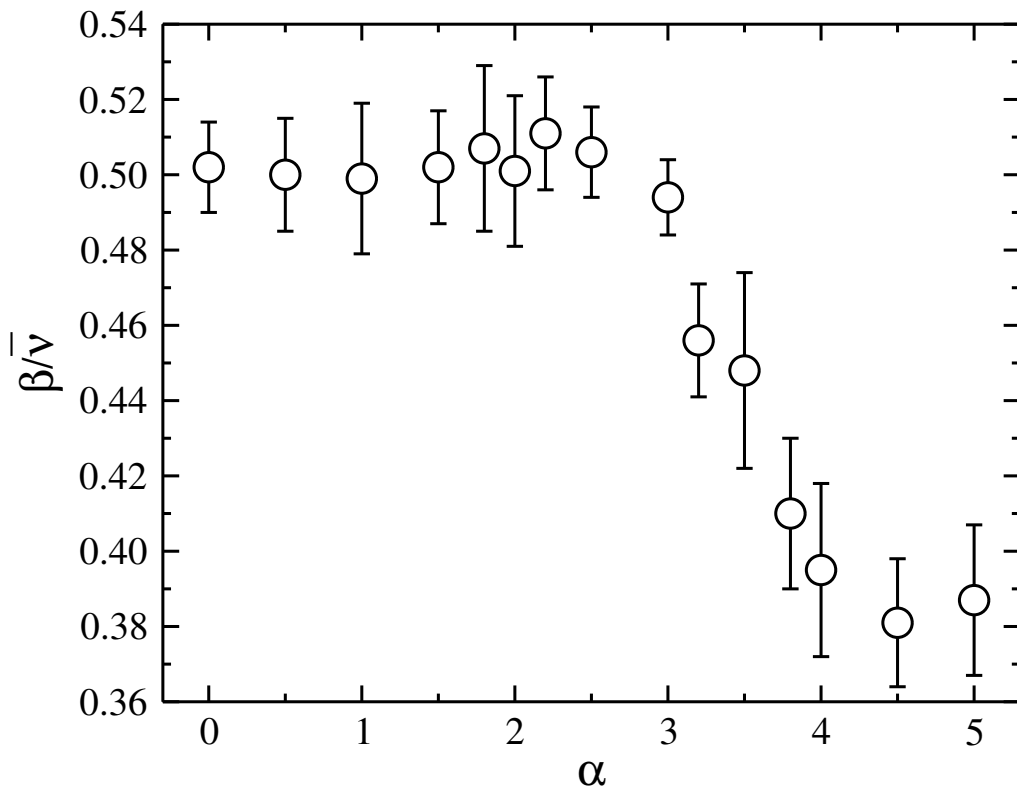


Figura 17 – Dependência do expoente crítico  $\beta/\bar{\nu}_\perp$  com o parâmetro  $\alpha$ .

Com o intuito de mostrar a consistência dos resultados nos dois diferentes regimes críticos, realizamos o colapso dos dados do parâmetro de ordem  $\rho$  nas proximidades do ponto crítico para as construções de Kleinberg de tamanhos  $N = 10000, 22500, 40000$  e  $62500$ . Na figura (18a) fixamos  $\alpha = 3$  e utilizamos  $\beta = 1$  e  $\bar{\nu} = 2$ , expoentes críticos do regime de campo médio. Já na figura (18b) fixamos  $\alpha = 4$  e utilizamos os expoentes da percolação direcionada 2D,  $\beta = 0.583(4)$  e  $\bar{\nu} = 1.516(9)$ . A equação (3.32) indica que

deve haver uma função universal que reescala o parâmetro de ordem,

$$\tilde{\rho}(x) = \rho_N(\lambda)N^{\beta/\bar{\nu}}, \quad (3.33)$$

que depende da variável de escala  $x = \varepsilon N^{1/\bar{\nu}}$ .

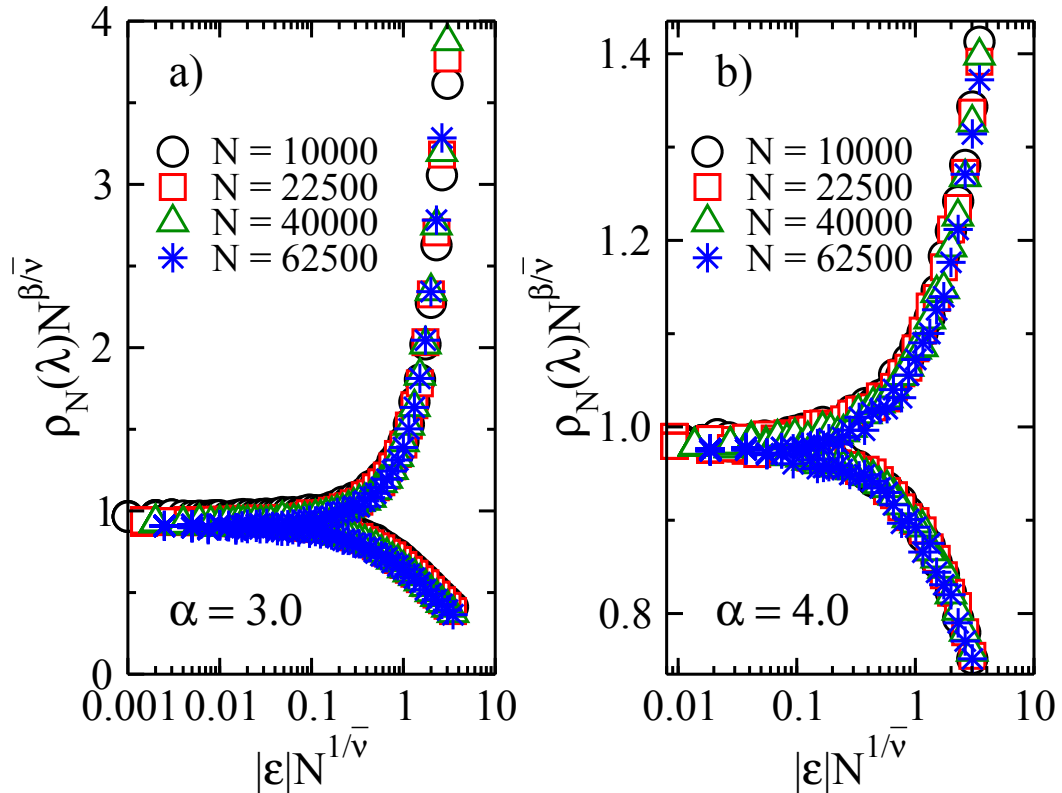


Figura 18 – Colapso dos dados da densidade de sítios ativos para sistemas com tamanhos  $N = 10000$  (círculos),  $22500$  (quadrados),  $40000$  (triângulos) e  $62500$  (asteriscos). (a) Curva universal para  $\alpha = 3$  é consistente com os expoentes de campo médio:  $\beta = 1$  e  $\bar{\nu} = 2$ . (b) Para  $\alpha = 4$ , o colapso dos dados foi obtido usando os expoentes de percolação direcionada:  $\beta = 0.583(4)$  e  $\bar{\nu} = 1.516(9)$ .

A figura (19) mostra o colapso de dados do parâmetro de ordem no ponto crítico em redes de Kleinberg com tamanhos  $N = 10000$ ,  $22500$ ,  $40000$ ,  $62500$  e  $90000$ , para todos os valores de  $\alpha$  expostos na tabela 2. Para  $\alpha \leq 3$  utilizamos os expoentes críticos de campo médio. No intervalo  $3 < \alpha < 4$  reescalamos o parâmetro de ordem utilizando os valores do expoente  $\beta/\bar{\nu}$  da tabela 2, e para  $\alpha \geq 4$  utilizamos  $\beta/\bar{\nu}$  da percolação direcionada. Um mínimo em  $\alpha = 2$  é observado.

Neste capítulo investigamos as mudanças de classe de universalidade nos modelos do votante majoritário e do processo de contato em redes espacialmente incorporadas. No primeiro caso, a mudança ocorre entre o regime de Ising 2D e o regime de campo médio. Para o processo de contato a mudança ocorre da classe de universalidade de percolação direcionada 2D para a de campo médio. Em ambos os modelos, observamos que no  $3 < \alpha < 4$  os expoentes críticos variam continuamente.

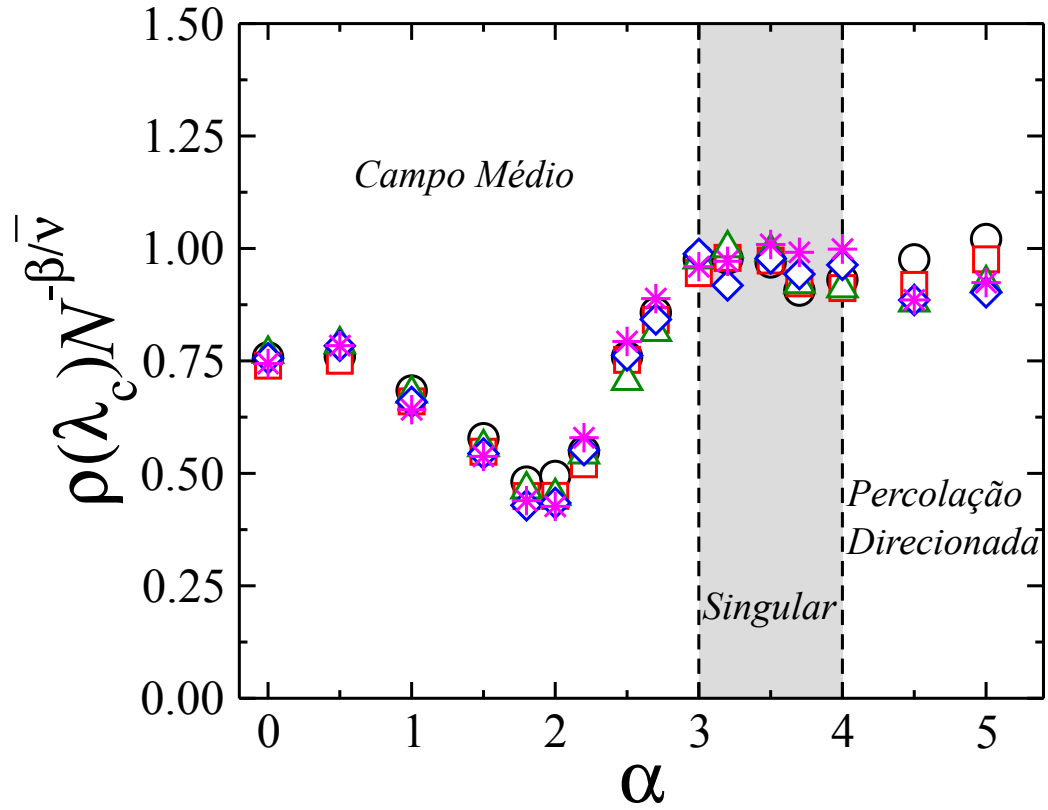


Figura 19 – Colapso dos dados da densidade de sítios ativos no ponto crítico em função de  $\alpha$ . Os expoentes usados são  $\beta/\bar{\nu} = 1/2$  para  $\alpha \leq 3$ ,  $\beta/\bar{\nu} = 0.385(6)$  para  $\alpha \geq 4$  e para  $3 < \alpha < 4$  foram usados os expoentes listados na tabela 2. Note que há um máximo na flutuação em  $\alpha = 3$ .

Os resultados referentes ao processo de contato serão brevemente submetidos ao periódico Physical Review E. Uma versão desse manuscrito está anexa no apêndice B desta Tese.

## 4 PROCESSO DE CONTATO COM SIMBIOSE

Apesar das discussões sobre o significado do termo simbiose, o conceito atualmente utilizado pela maioria dos biólogos é a definição de de Bary, que diz que o termo significa “viver junto”, ou seja, qualquer interação entre espécies diferentes é uma simbiose [40]. Há diferentes tipos de simbiose, algumas delas são chamadas de harmônicas, como o mutualismo, na qual ambas espécies são beneficiadas. Como exemplos de mutualismos temos o líquen, que é o resultado da simbiose entre algas microscópicas e fungos, e algumas espécies de caranguejos que têm uma relação simbiótica com anêmonas do mar [41]. Outra simbiose harmônica é o comensalismo, no qual uma espécie é beneficiada sem nenhuma consequência para o outro indivíduo. Temos ainda as relações não harmônicas, nas quais não há uma vantagem para as espécies interagentes e podendo ter até prejuízo para alguma delas. O parasitismo é uma das relações simbióticas não harmônicas mais comuns, na qual um indivíduo se beneficia da relação enquanto o outro é prejudicado.

No modelo do processo de contato com simbiose, introduzido por Dickman *et al.* [42, 43], podemos fazer analogias com as relações simbióticas do tipo mutualismo. Em tal modelo, os elementos de espécies diferentes têm maiores chances de sobreviver no sistema quando estão interagindo. Como veremos, essas interações simbióticas promovem a persistência das populações em uma situação na qual espécies isoladas não sobreviveriam.

### 4.1 Modelo

A fim de introduzir uma interação simbiótica no sistema, permitimos que dois processos de contato habitem na mesma rede, definindo partículas distinguíveis, digamos espécies  $A$  e  $B$ . Nesse contexto, um sítio pode ser encontrado em quatro estados distintos. Considere as variáveis de um dado sítio  $i$ , como sendo  $\sigma_i$  e  $\eta_i$ , respectivamente. Os estados  $(\sigma_i, \eta_i)$  permitidos são:

- $(0, 0)$  : sítio está vazio;
- $(1, 0)$  : sítio está ocupado apenas por uma partícula da espécie  $A$ ;
- $(0, 1)$  : sítio está ocupado apenas por uma partícula da espécie  $B$ ;
- $(1, 1)$  : sítio está ocupado por uma partícula de cada espécie.

De acordo com Dickman *et al.* [42], as transições entre os estados do sítio  $i$  ocorrem das seguintes maneiras:



- $(0, 0) \rightarrow (1, 0)$  e  $(0, 1) \rightarrow (1, 1)$  ocorrem a uma taxa  $\lambda n_A$ , sendo  $n_A$  a fração de vizinhos ocupados por partículas da espécie  $A$ ;
- Similarmente,  $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$  e  $(1, 0) \rightarrow (1, 1)$  ocorrem a uma taxa  $\lambda n_B$ , onde  $n_B$  é a fração de vizinhos ocupados por partículas da espécie  $B$ ;
- $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$  e  $(0, 1) \rightarrow (0, 0)$  ocorrem a uma taxa unitária;
- $(1, 1) \rightarrow (1, 0)$  e  $(1, 1) \rightarrow (0, 1)$  ocorrem a uma taxa  $\mu$ ;

Esta última taxa de transição representa a intensidade da interação entre duas partículas que se encontram no mesmo sítio da rede. Para  $\mu = 1$ , as partículas não interagem e as duas populações evoluem independentemente, como no processo de contato ordinário. Já para  $\mu < 1$ , a interação simbiótica reduz a taxa de aniquilação das partículas em sítios duplamente ocupados, até o valor  $\mu = 0$ , onde é impossível remover a dupla. A figura (20) mostra como ocorrem as transições, segundo as regras listadas acima.

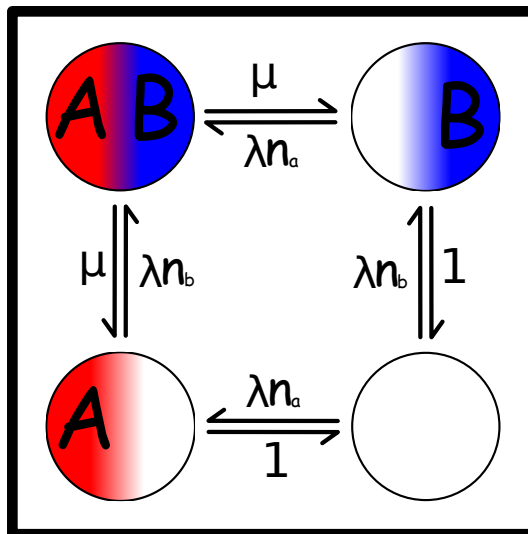


Figura 20 – A figura mostra a transição entre os possíveis estados que um sítio pode assumir. O sítio “ $AB$ ” representa o estado onde há duas partículas interagindo simbioticamente. Com uma taxa  $\mu$ , o sítio pode mudar para os estados onde apenas uma partícula, “ $A$ ” ou “ $B$ ”, ocupa o sítio. Os sítios ocupados com apenas uma partícula se tornam vazios com taxa unitária. Um sítio vazio é ocupado com taxa  $\lambda n_a$  (ou  $\lambda n_b$ ) por uma partícula  $A$  (ou uma partícula  $B$ ). Não há possibilidade de um sítio passar direto do estado vazio para o estado duplamente ocupado ou vice-versa.

## 4.2 Aproximação de Campo Médio

Definimos as probabilidades de encontrar um sítio vazio, ocupado por uma partícula da espécie  $A$ , da espécie  $B$ , ou ocupado por ambas, respectivamente,  $P_0$ ,  $P_A$ ,

$P_B$  e  $P_{AB}$  [42]. Podemos escrever as equações de campo médio como

$$\frac{dP_0}{dt} = P_A + P_B - \lambda P_0(P_A + P_B + 2P_{AB}), \quad (4.1)$$

$$\frac{dP_A}{dt} = \lambda P_0(P_A + P_{AB}) + \mu P_{AB} - (1 + \lambda P_B + \lambda P_{AB})P_A, \quad (4.2)$$

$$\frac{dP_B}{dt} = \lambda P_0(P_B + P_{AB}) + \mu P_{AB} - (1 + \lambda P_A + \lambda P_{AB})P_B, \quad (4.3)$$

$$\frac{dP_{AB}}{dt} = -2\mu P_{AB} + 2\lambda P_A P_B + \lambda P_{AB}(P_A + P_B). \quad (4.4)$$

No caso simétrico, onde  $P_A = P_B = P_1$ , sendo  $P_1$  a probabilidade de um sítio estar ocupado com apenas uma partícula. Definimos  $P_{AB} = P_2$  como a probabilidade de um sítio estar ocupado por duas partículas. Temos portanto que  $P_0 + P_1 + P_2 = 1$ . Assim reescrevemos as equações acima como

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda(1 - P_2 - 3P_1)(P_1 + P_2) + \mu P_2 - P_1, \quad (4.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = 2\lambda P_1(P_1 + P_2) - 2\mu P_2. \quad (4.6)$$

Partindo de (4.6) no estado estacionário,  $\frac{dP_2}{dt} = 0$ , obtemos

$$P_2 = \frac{\lambda P_1^2}{\mu - \lambda P_1}. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) na equação (4.5) e fazendo  $\frac{dP_1}{dt} = 0$ ,

$$[\lambda(\mu - 1)P_1^2 + \lambda(2\mu - 2\mu^2 - \mu\lambda)P_1 + \mu^2(\lambda - 1)]P_1 = 0, \quad (4.8)$$

cujas soluções são dadas por

$$P_1^0 = 0, \quad (4.9)$$

$$P_1^+ = \frac{2\mu^2 + \mu\lambda - 2\mu + \mu\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}}{2\lambda(\mu - 1)}, \quad (4.10)$$

$$P_1^- = \frac{2\mu^2 + \mu\lambda - 2\mu - \mu\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}}{2\lambda(\mu - 1)}. \quad (4.11)$$

Consequentemente, podemos obter a partir da equação (4.7) as soluções

$$P_2^0 = 0, \quad (4.12)$$

$$P_2^+ = \frac{4\mu - 4\mu^2 - \lambda + (2\mu - 1)\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}}{2\lambda(\mu - 1)}, \quad (4.13)$$

$$P_2^- = \frac{4\mu - 4\mu^2 - \lambda - (2\mu - 1)\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}}{2\lambda(\mu - 1)}. \quad (4.14)$$

Definimos  $\rho$  como a densidade total de partículas no sistema. Tal quantidade é dada pela soma das probabilidades de encontrar sítios com ocupação simples e ocupação dupla, ponderada por um fator de dois, uma vez que podemos ocupar cada um dos  $N$  sítios da rede de interesse com duas partículas. Para que as soluções sejam fisicamente aceitáveis, o radicando  $4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2$  nas equações (4.10)-(4.14), deve ser positivo semidefinido, isto é,

$$4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2 \geq 0. \quad (4.15)$$

Temos, portanto

$$\rho = 2(P_1^0 + P_2^0), \quad (\text{absorvente}) \quad (4.16)$$

$$\rho = 2(P_1^- + P_2^+), \quad (\text{ativa estável}) \quad (4.17)$$

$$\rho = 2(P_1^+ + P_2^-). \quad (\text{ativa instável}) \quad (4.18)$$

Na figura (21) apresentamos as soluções de campo médio, equações (4.16)-(4.18), para  $\mu = 0.25$ . A equação (4.16), reta horizontal tracejada, representa a solução absorvente, uma vez que  $\rho = 0$ . A equação (4.17), curva traço pontilhada, representa a solução ativa estável e a equação (4.18), curva contínua, representa a solução ativa instável. Tais soluções são ativas uma vez que  $\rho > 0$ . Observe que nessa figura temos uma região de  $\lambda$  que separa a solução puramente absorvente da solução puramente ativa. Esta região é definida no intervalo  $\lambda_c(\mu) \leq \lambda \leq \lambda'_c$ , sendo  $\lambda_c(\mu)$  o valor do parâmetro de controle que define a transição da fase ativa estável para a fase absorvente, cujo valor é obtido tomando-se a igualdade na equação (4.15), e portanto

$$\lambda_c(\mu) = \sqrt{4\mu - 4\mu^2}. \quad (4.19)$$

Para  $\mu = 0.25$  temos  $\lambda_c = \sqrt{3/4}$ . O valor  $\lambda'_c = 1$  define a transição da fase absorvente para a fase ativa estável e é independente de  $\mu$ . Tal valor é encontrado fazendo-se a solução (4.18) igual a zero. Temos ainda que nesta região as três soluções (4.16)-(4.18) estão definidas, implicando uma possível transição descontínua com comportamento histerético. Na próxima sessão faremos uma análise da estabilidade das soluções encontradas.

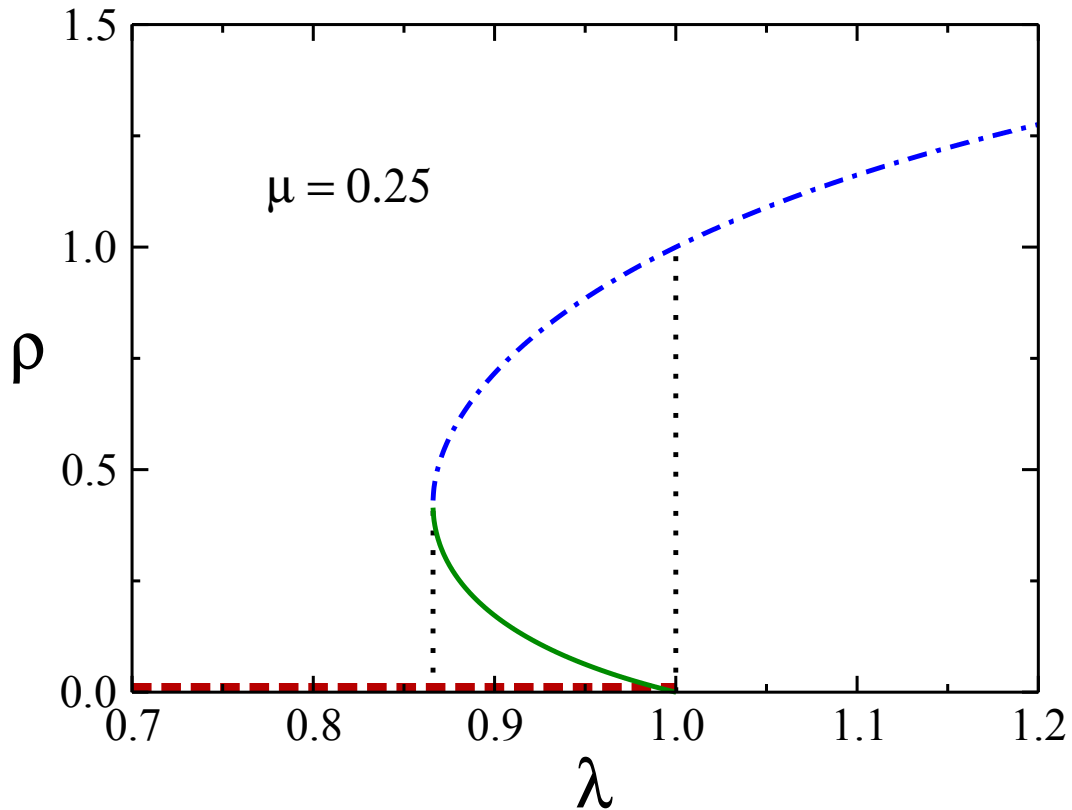


Figura 21 – Soluções da aproximação de campo médio para processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$ . A reta horizontal tracejada em  $\rho = 0$ , no intervalo  $0 \leq \lambda \leq 1$ , é a solução na qual o sistema se encontra no estado absorvente. A curva superior, traço pontilhada é a solução na qual o sistema se encontra no estado ativo estável e a curva contínua é a solução instável.

### 4.3 Análise da estabilidade das soluções e diagrama de fases

Considere a função  $f(P)$  como sendo a derivada temporal de  $P$

$$f(P) = \frac{dP}{dt}. \quad (4.20)$$

Os valores de  $P = P^*$ , onde  $f(P^*) = 0$ , são chamados de pontos fixos. No processo de contato com simbiose temos duas variáveis,  $P_1$  e  $P_2$ , assim podemos definir

$$f(P_1, P_2) = \frac{dP_1}{dt} \quad e \quad g(P_1, P_2) = \frac{dP_2}{dt}, \quad (4.21)$$

onde  $(P_1^*, P_2^*)$  é um ponto fixo do sistema, ou seja,

$$f(P_1^*, P_2^*) = 0 \quad e \quad g(P_1^*, P_2^*) = 0; \quad (4.22)$$

Para determinar o tipo de equilíbrio de cada um dos pontos fixos podemos fazer uma linearização das funções [44]  $f(P_1, P_2)$  e  $g(P_1, P_2)$ . Considere uma pequena

perturbação  $(u, v)$  em torno do ponto fixo, de modo que

$$u = P_1 - P_1^* \quad e \quad v = P_2 - P_2^*. \quad (4.23)$$

E concluímos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = f(P_1, P_2) \quad e \quad (4.24)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = g(P_1, P_2). \quad (4.25)$$

Expandindo as funções  $\frac{du}{dt}$  e  $\frac{dv}{dt}$  em torno do ponto fixo  $(P_1^*, P_2^*)$  podemos escrever a dinâmica linearizada como

$$\frac{du}{dt} = u \left[ \frac{\partial f}{\partial P_1} \right]_{(P_1^*, P_2^*)} + v \left[ \frac{\partial f}{\partial P_2} \right]_{(P_1^*, P_2^*)} + O(u, v), \quad (4.26)$$

$$\frac{dv}{dt} = u \left[ \frac{\partial g}{\partial P_1} \right]_{(P_1^*, P_2^*)} + v \left[ \frac{\partial g}{\partial P_2} \right]_{(P_1^*, P_2^*)} + O(u, v). \quad (4.27)$$

Essas expressões podem ser reescritas na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial P_1} & \frac{\partial f}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g}{\partial P_1} & \frac{\partial g}{\partial P_2} \end{pmatrix}_{(P_1^*, P_2^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial P_1} & \frac{\partial f}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g}{\partial P_1} & \frac{\partial g}{\partial P_2} \end{pmatrix}_{(P_1^*, P_2^*)}$$

a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo [44]. Resolvendo  $\det(A - I\Lambda) = 0$ , determinamos os autovalores  $\Lambda$  da matriz Jacobiana  $A$  como sendo

$$\Lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (4.28)$$

sendo  $\tau$  e  $\Delta$ , respectivamente, o traço e o determinante de  $A$ . Determinado os autovalores, podemos reescrever a matriz  $A$  na forma diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\tau = \Lambda_1 + \Lambda_2$  e  $\Delta = \Lambda_1\Lambda_2$ . Em geral,  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ , então a matriz  $A$  possui autovetores linearmente independentes, sendo assim, todo o espaço pode ser obtido da combinação linear dos dois autovetores. Considere uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  como sendo a combinação linear

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2. \quad (4.29)$$

Um solução geral para a equação  $\frac{dx}{dt} = A\mathbf{x}$  pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\Lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\Lambda_2 t} \mathbf{u}_2, \quad (4.30)$$

uma vez que uma combinação linear de soluções é também uma solução. Além disso, com o conhecimento de uma condição inicial,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , pelo teorema da unicidade [44], esta solução é única. A partir da solução (4.30) podemos classificar os pontos fixos, analisando a evolução temporal desta solução no espaço de fase. Primeiro, consideramos os casos onde  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são ambos reais,  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ . Considerando  $\Lambda_1 < 0$  e  $\Lambda_2 < 0$ ,  $\mathbf{x}(t)$  decai exponencialmente para  $\mathbf{x}_0$ , e classificamos esse ponto fixo como um nó estável (figura (22a)). Para  $\Lambda_1 > 0$  e  $\Lambda_2 > 0$ ,  $\mathbf{x}(t)$  cresce exponencialmente, se afastando de  $\mathbf{x}_0$ , dizemos que o ponto fixo é um nó instável (figura (22b)). No caso onde  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  possuem sinais opostos o ponto fixo é um ponto de sela (figura (22c)). Quando um dos autovalores for igual à zero, não teremos apenas um ponto fixo, mas uma linha de pontos fixos, ou ainda, quando os dois autovalores forem iguais à zero teremos um plano de pontos fixos.

Consideremos os casos em que os autovalores são complexos, ou seja,  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Sendo os autovalores complexos, vamos reescrevê-los como

$$\Lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \quad (4.31)$$

ou seja,  $\mathbf{x}(t)$  é uma combinação linear de  $e^{(\alpha \pm i\omega)t}$ . Utilizando a fórmula de Euler,  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)$ , concluímos que  $\mathbf{x}(t)$  é combinação linear de  $e^{\alpha t} \cos(\omega t)$  e  $e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t)$ . Sendo assim, no espaço de fase, teremos oscilações que decaem exponencialmente quando  $\tau < 0$ , e o ponto fixo é chamado de espiral estável (figura (22d)). Para  $\tau > 0$  teremos oscilações que crescem exponencialmente, e temos um ponto fixo do tipo espiral instável (figura (22e)). Para  $\tau = 0$ , temos uma solução puramente complexa, a qual apresenta oscilações de amplitude constante com o ponto fixo no centro, o chamado ponto fixo central.

De volta ao processo de contato com simbiose, utilizando as equações 4.5 e 4.6 para determinarmos os elementos da matriz  $A$ , encontramos os autovalores

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{M} + 4\lambda(P_1 + P_2) - (\lambda - 2\mu - 1) \right] \quad e \quad (4.32)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{M} - 4\lambda(P_1 + P_2) + (\lambda - 2\mu - 1) \right], \quad (4.33)$$

onde

$$M = 8\lambda(1 - \mu)(2P_1 + P_2) + \lambda^2 + 2\lambda(2\mu - 1) + 4\mu^2 - 4\mu + 1. \quad (4.34)$$

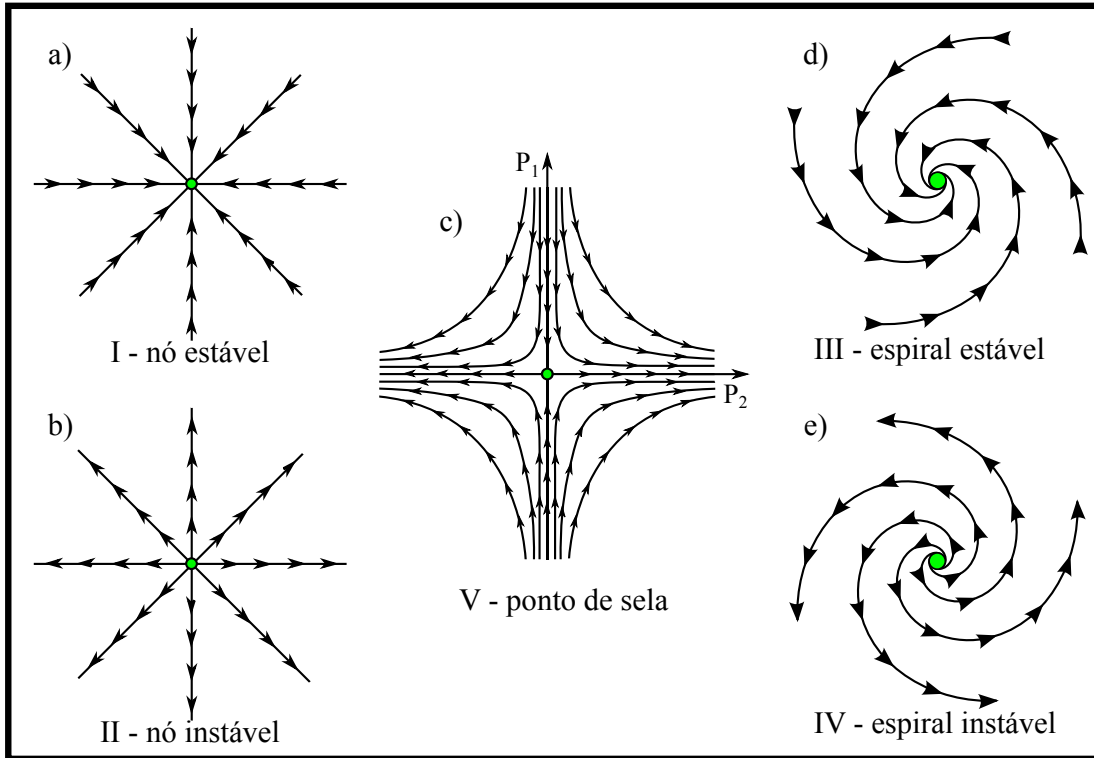


Figura 22 – O fluxo na vizinhança dos pontos fixos em um sistema dinâmico com duas variáveis. Os pontos fixos podem assumir as seguintes formas: (a) nó estável, (b) nó instável, (c) ponto de sela, (d) espiral estável e (e) espiral instável.

Consequentemente determinamos os valores de  $\tau(P_1, P_2)$  e  $\Delta(P_1, P_2)$ :

$$\tau(P_1, P_2) = \lambda - 1 - 2\mu - 4\lambda(P_1 + P_2); \quad (4.35)$$

$$\Delta(P_1, P_2) = 4\lambda^2(P_1^2 + P_2^2) + 8\lambda^2 P_1 P_2 + 2\lambda[P_2(3\mu - \lambda) + P_1(4\mu - 1 - \lambda)] + 2\mu(1 - \lambda). \quad (4.36)$$

Assim obtemos, a partir das soluções (4.9), (4.10), (4.12) e (4.13), os valores de  $\tau$  e  $\Delta$  correspondentes:

$$\tau(P_1^0, P_2^0) = \lambda - 1 - 2\mu; \quad (4.37)$$

$$\Delta(P_1^0, P_2^0) = 2\mu(1 - \lambda); \quad (4.38)$$

$$\tau(P_1^\mp, P_2^\pm) = 2\mu - \lambda - 1 \mp 2\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}; \quad (4.39)$$

$$\Delta(P_1^\mp, P_2^\pm) = 4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2 \mp (2\mu - \lambda)\sqrt{4\mu^2 - 4\mu + \lambda^2}; \quad (4.40)$$

A figura (23) mostra o plano  $\tau \times \Delta$ , onde as retas  $\Delta = 0$ ,  $\tau = 0$  para  $\Delta > 0$  e a curva

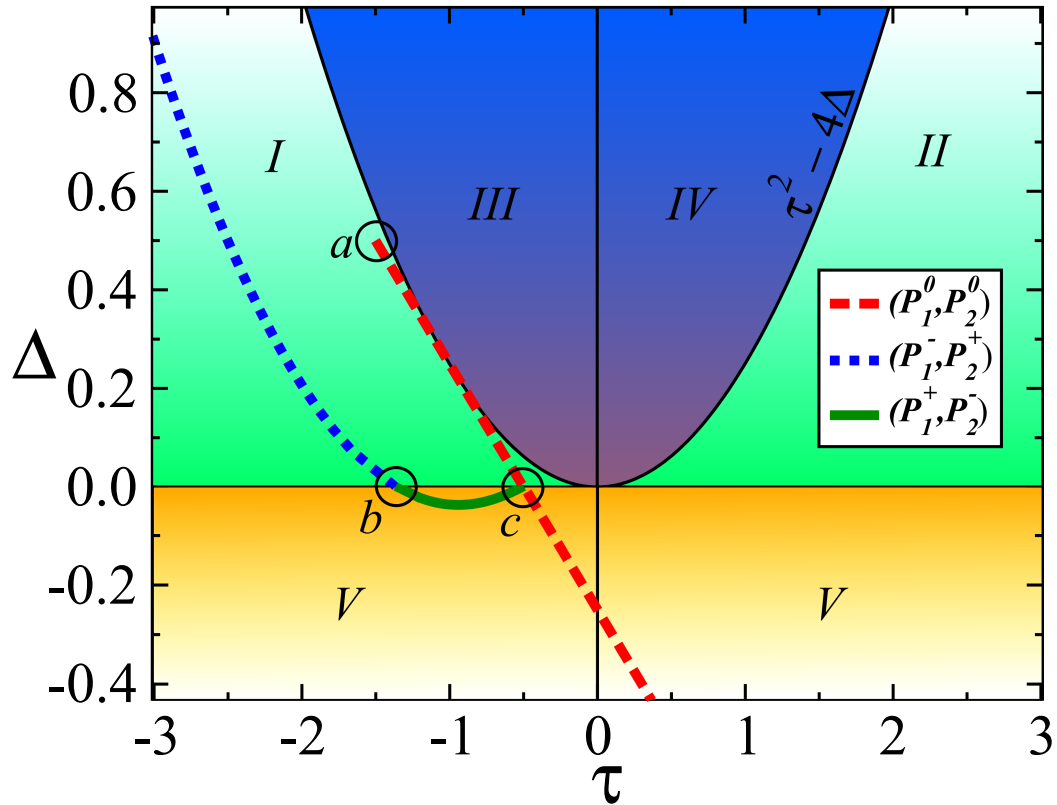


Figura 23 – Plano  $\tau \times \Delta$ , onde  $\tau$  é o traço e  $\Delta$  é o determinante da matriz Jacobiana. Esse plano está dividido em cinco regiões pelas retas  $\Delta = 0$  ( $\forall \tau$ ),  $\tau = 0$  e pela parábola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ . Dependendo do par de parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$ , o sistema pode ter pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável (I), nó instável (II), espiral estável (III), espiral instável (IV) ou ponto de sela (V). O tipo de equilíbrio a qual as soluções de campo médio para o processo de contato com simbiose para  $\mu = 0.25$  pertence é indicado pela região onde se encontram as curvas. A linha tracejada vermelha corresponde à solução  $(P_1^0, P_2^0)$  absorvente. O ponto (a), equivale à solução em  $\lambda = 0$ , de modo que a solução  $(P_1^0, P_2^0)$  apresenta pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável até o ponto c, em  $\lambda = 1$ , passando a possuir pontos fixos com equilíbrio do tipo ponto de sela. A solução  $(P_1^+, P_2^-)$  instável é descrita pela linha verde contínua, e é limitada entre o ponto c e o ponto b, em  $\lambda = \lambda_c$ , que tem pontos fixos com equilíbrio do tipo ponto de sela. A solução  $(P_1^-, P_2^+)$  estável possui pontos fixos com equilíbrio do tipo nó estável.

parabólica  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ , delimitam as diferentes regiões de estabilidades. As soluções de campo médio para  $\mu = 0.25$  estão representadas pelas demais curvas. A linha tracejada (vermelha) representa a solução  $(P_1^0, P_2^0)$  absorvente, e possui equilíbrio estável entre o ponto (a), para o qual  $\lambda = 0$ , e o ponto (c), com  $\lambda = 1$ , a partir do qual passa a ser ponto de sela. A linha pontilhada (azul) representa a solução  $(P_1^-, P_2^+)$ , possui equilíbrio do tipo nó estável. A linha contínua (verde) descreve o tipo de equilíbrio da solução  $(P_1^+, P_2^-)$ , limitada entre os pontos (b), com  $\lambda = \lambda_c$ , e (c), possui equilíbrio do tipo ponto de sela.

O diagrama de fases do processo de contato com simbiose pode ser construído a partir da equação (4.19) à medida que variamos os valores de  $\mu$ . Na figura (24) é



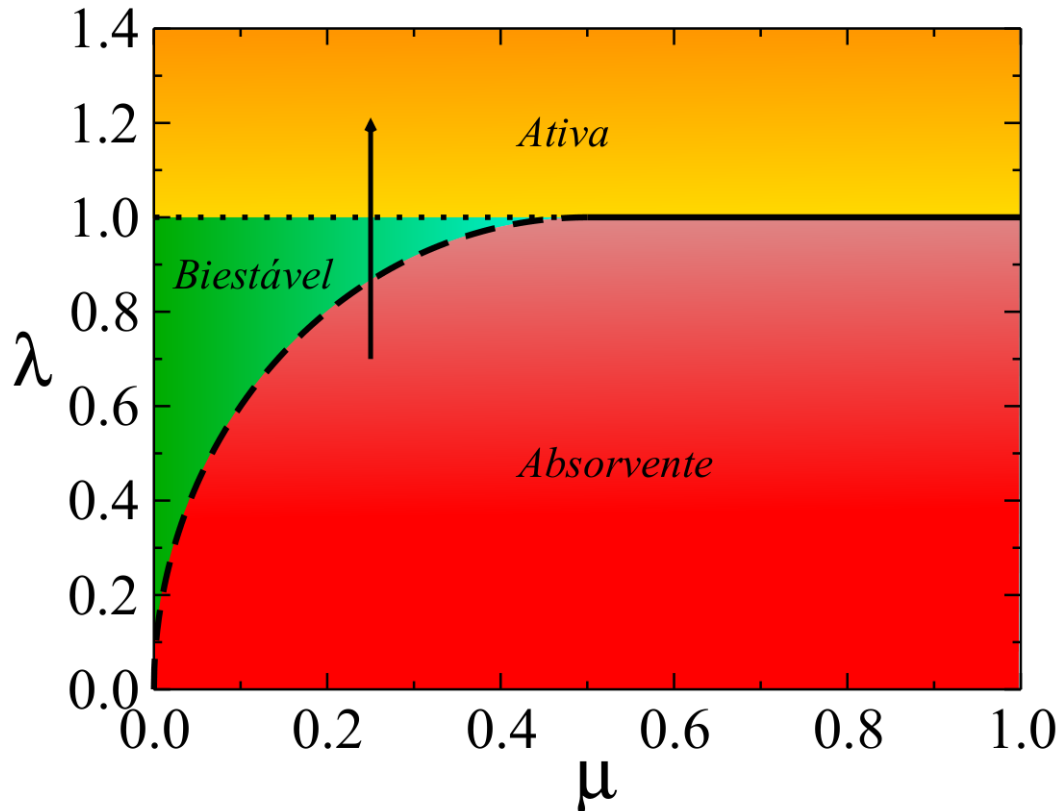


Figura 24 – Diagrama de fases obtido das equações de campo médio. Na região absorvente as populações de ambas espécies estão extintas. Na região ativa, há uma fração macroscópica das duas populações. Na região biestável podemos encontrar o sistema nos dois estados, ativo ou absorvente, dependendo do estado inicial do sistema. A transição entre estado absorvente e o estado ativo, para  $\mu > 0.5$ , é contínua (linha contínua). Já para  $\mu < 0.5$ , as transições são descontínuas. A linha tracejada marca a transição entre o estado ativo para o absorvente e a linha pontilhada é a transição entre o estado absorvente e o estado ativo. A seta indica o caminho percorrido na figura (21) no diagrama de fases.

mostrado o diagrama de fases na aproximação de campo médio. Na região absorvente as populações de ambas espécies estão extintas. Na região ativa, há uma fração macroscópica das duas populações. Na região biestável podemos encontrar o sistema nos dois estados, ativo ou absorvente, dependendo do estado inicial do sistema. A transição entre estado absorvente e o estado ativo, para  $\mu > 0.5$ , é contínua (linha contínua). Já para  $\mu < 0.5$ , as transições são descontínuas. A linha tracejada marca a transição entre o estado ativo para o absorvente, e a linha pontilhada é a transição entre o estado absorvente e o estado ativo. Note que  $\lambda_c$  cresce de zero até o valor máximo  $\lambda_c = 1$  em  $\mu = 0.5$ , o qual coincide com o valor crítico do processo de contato ordinário, e a partir deste valor as duas espécies independem da simbiose para sobreviver.

#### 4.4 Simulação e resultados

Aplicar a teoria de campo médio significa reduzir um problema de muitos corpos a um problema de um único corpo que interage com um campo, que representa a interação média ou efetiva de todos os demais corpos do sistema com esse único corpo. Como vimos anteriormente, essa aproximação permite o cálculo de soluções analíticas. Porém, a aplicação desta aproximação tem alcance limitado, principalmente quando analisamos sistemas cuja dimensionalidade está abaixo da dimensão crítica superior [45]. A fim de testar o limite da teoria de campo médio e analisar algoritmos adequados para descrever os fenômenos de interesse, realizamos simulações numéricas do processo de contato com simbiose em grafos completos.

Todos os eventos da dinâmica do processo de contato com simbiose ocorrem a partir de sítios ocupados, desta forma, definimos duas listas, uma contendo os sítios de ocupação simples e outra contendo os sítios de ocupação dupla. O número de elementos em cada uma dessas listas são  $N_s$  e  $N_d$ , respectivamente, e o número total de partículas no sistema é dado por  $N_p = N_s + 2N_d$ . Primeiramente, definimos  $\Delta t$  como o incremento de tempo associado a um dado passo da simulação. Em seguida, para cada passo de tempo escolhemos um dos seguintes eventos:

1. Criação a partir de uma partícula isolada, com probabilidade  $\lambda N_s \Delta t$ ;
2. Criação a partir de uma partícula em um sítio com ocupação dupla, com probabilidade  $2\lambda N_d \Delta t$ ;
3. Eliminação de uma partícula isolada, com probabilidade  $N_s \Delta t$ ;
4. Eliminação de uma partícula em um sítio com ocupação dupla, com probabilidade  $2\mu N_d \Delta t$ .

Como estas probabilidades devem ser normalizadas, temos que  $1/\Delta t = \lambda N_p + N_s + 2\mu N_d$ . Por fim, definimos  $\Delta t = 1/N_p$  num grafo ou numa malha regular com  $N_p$  sítios ativos, e desta forma cada passo de Monte Carlo corresponde, em média, a uma tentativa de evento por sítio. Uma vez que o evento é escolhido, um sítio é sorteado na lista apropriada. Para eliminar uma partícula isolada, basta sortear um sítio da lista de sítios com ocupação simples e retirá-lo da lista. Porém, para eliminar uma partícula em um sítio com ocupação dupla, deve-se além de escolher um sítio da lista apropriada, sortear com igual probabilidade a espécie a ser eliminada e então eliminá-la.

Assim como o processo de contato ordinário, a versão simbiótica possui um estado de vácuo absorvente, o qual pode ser atingido mesmo para  $\lambda > \lambda_c$ , devido às

flutuações no parâmetro de ordem em sistema finitos. Entretanto, o processo de contato simbiótico também possui um outro estado absorvente associado à extinção de uma das espécies, isto é, um subespaço de estados onde apenas uma das espécies está presente. Observe que apenas os estados absorventes é que são verdadeiramente estacionários e o estado ativo é dito quase estacionário. No presente trabalho utilizamos dois métodos para gerarmos o estado quase estacionário no processo de contato com simbiose. O primeiro método, introduzido por Dickman *et. at.* [42, 43, 37], os estados ativos visitados pelo sistema são registrados e armazenados em uma lista, a qual é atualizada com um dada probabilidade e após o sistema atingir o estado de vácuo absorvente, sorteamos um dos estados da lista e em seguida o sistema é recolocado neste estado. Para fins didáticos tal procedimento será denominado de Método 1. O segundo método consiste na criação espontânea de partículas de ambas as espécies após o sistema atingir o estado de vácuo absorvente. E este procedimento será denominado de Método 2.

#### 4.4.1 Resultados para o grafo completo

Vimos que os resultados de campo médio para  $\mu \leq 0.5$ , o processo de contato simbiótico sofre uma transição de fase descontínua, apresentando comportamento histerético. Aqui consideramos simulações sobre um grafo completo para verificarmos tais resultados.

A fim de reproduzirmos os resultados de campo médio da figura (21), durante as simulações realizamos um procedimento no qual o sistema está inicialmente no estado absorvente em um valor  $\lambda = \lambda_0 \ll \lambda_c$ . Após o sistema permanecer por um intervalo de tempo  $\Delta t$  neste valor,  $\lambda$  é incrementado de  $\Delta\lambda$  e o sistema passa para um valor  $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ . Então, após o sistema permanecer por um tempo  $\Delta t$  em  $\lambda_1$ , o valor de  $\lambda$  é novamente incrementado, de modo que o sistema passa para um valor  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Este processo continua fazendo  $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta\lambda$  até atingir um valor  $\lambda_{final} \gg \lambda_c$ . Ao atingir esse ponto o processo passa a realizar decrementos em  $\lambda$ , tal que  $\lambda_i = \lambda_{i+1} - \Delta\lambda$ , mantendo o sistema no valor  $\lambda_i$  durante o tempo  $\Delta t$  após cada decremento. O processo se mantém até  $\lambda$  voltar ao seu valor inicial  $\lambda_0$ .

Na figura (25a) o ciclo de histerese é construído a partir do Método 1 para estados quase estacionários considerando  $\mu = 0.25$ . Partindo do estado ativo (em  $\lambda = 2.0$ ) para o estado absorvente (em  $\lambda = 0.5$ ), observamos uma descontinuidade na transição entre os estados, assim como previsto pela teoria de campo médio. Por outro lado, partindo do estado absorvente (em  $\lambda = 0.5$ ) para o ativo (em  $\lambda = 2.0$ ), o sistema não retorna para o estado ativo do processo de contato com simbiose. Na figura (25b) mostramos a densidade de partículas da espécie *A* (losangos) e da espécie *B* (triângulos), onde o

sistema é iniciado no estado absorvente. Observe que utilizando o Método 1, apenas uma das espécies permanece no sistema, enquanto a outra está extinta. Portanto, apesar de reproduzir a descontinuidade na transição, o Método 1 não é capaz de reproduzir o comportamento histerético observado nas soluções de campo médio. Tal efeito se deve ao fato deste método reativar estados onde apenas uma espécie está presente.

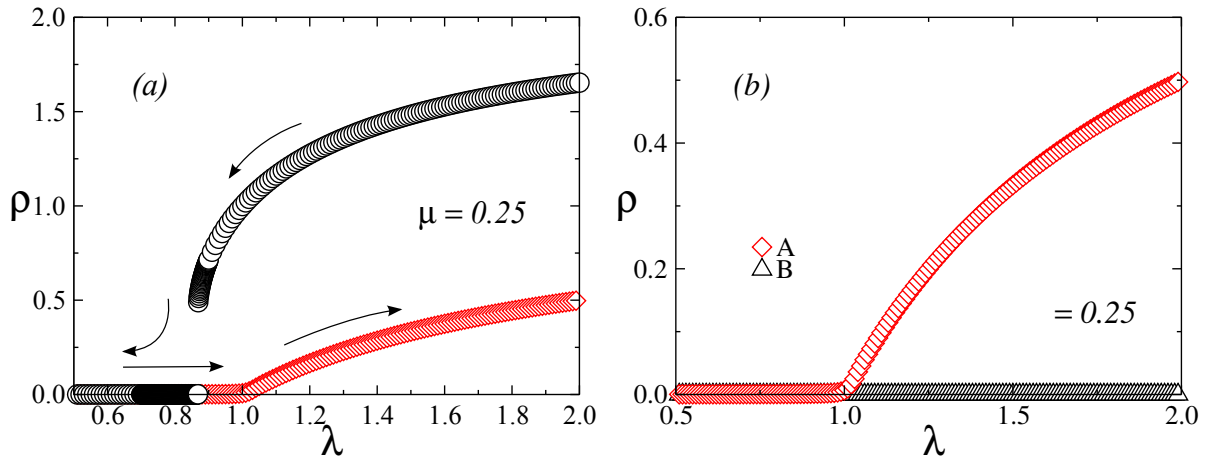


Figura 25 – Processo de contato com simbiose em um grafo completo, com  $\mu = 0.25$  numa rede com  $N = 4 \times 10^4$  sítios, onde as medidas são realizadas em 60 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo. Aqui, utilizamos o método de Dickman *et al.*, onde o sistema, ao atingir o estado absorvente, é recolocado em um estado ativo visitado anteriormente. Em (a), vemos que o sistema apresenta a descontinuidade prevista pela teoria de campo médio apenas partindo de um estado inicial ativo, longe do estado absorvente. Mas iniciando-se na região absorvente, o sistema não retorna para o estado ativo do processo de contato com simbiose, com as duas espécies presentes. Como vemos em (b), partindo do estado quase absorvente, o sistema segue como um processo de contato ordinário, com apenas uma das espécies, enquanto a outra permanece extinta.

O Método 2 consiste em perturbarmos o estado de vácuo absorvente criando espontaneamente uma partícula de cada espécie em sítios distintos do sistema. Na figura (26) mostramos o ciclo de histerese construído a partir do Método 2 para  $\mu = 0.25$ . Aqui observamos uma perfeita concordância com as soluções de campo médio, com a presença de descontinuidade na transição e do comportamento histerético. Além disso, notamos que no intervalo  $\lambda_c < \lambda < \lambda'_c$  temos uma região de biestabilidade, onde tanto o estado ativo quanto o estado absorvente são estáveis, corroborando com os resultados de campo médio. Na região de biestabilidade o estado inicial é quem determina se o sistema seguirá para um estado estacionário ativo ou absorvente. Se o sistema for inicializado em um valor de  $\rho$  acima da solução ativa instável, o sistema relaxa para o estado ativo estável. Entretanto, se for inicializado com um valor de  $\rho$  abaixo da solução instável, o estado estacionário será absorvente.

Os resultados para outros valores de  $\mu$  podem ser vistos no diagrama de fases na figura (27), onde temos os valores de  $\lambda_c$  representados pelos círculos escuros e os  $\lambda'_c$

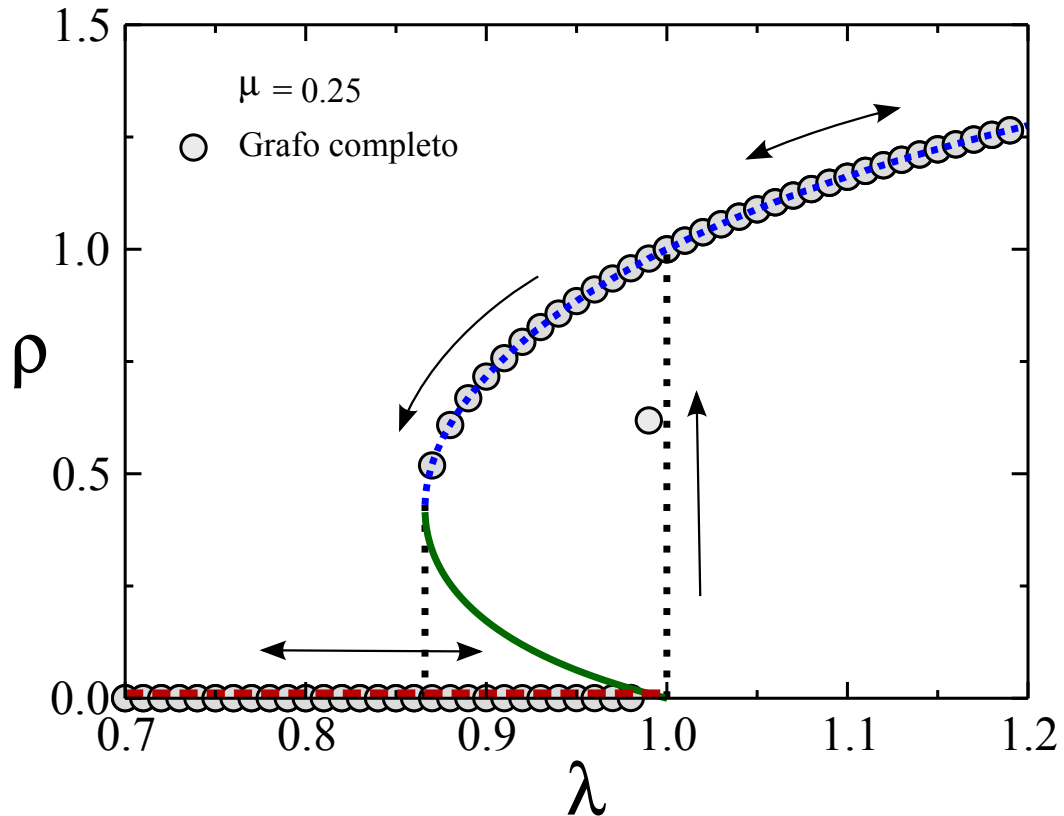


Figura 26 – Resultado da simulação do processo de contato com simbiose em um grafo completo em uma rede com  $N = 4 \times 10^4$  sítios, e  $\mu = 0.25$  (símbolos). As medidas foram realizadas em 60 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo. Realizamos as medidas de modo que o estado final de sistema em  $\lambda$  é o inicial em  $\lambda + \Delta\lambda$  (ou  $\lambda - \Delta\lambda$ ). Em bom acordo com a teoria de campo médio, a curva de histerese obtida pode ser observada seguindo o sentido indicado pelas setas, onde vemos a região de biestabilidade entre as linhas verticais pontilhadas.

pelos círculos claros. As linhas são os resultados analíticos obtidos das equações de campo médio.

#### 4.4.2 Resultados para a rede aleatória

Vamos introduzir as equações de campo médio para uma rede com conectividade constante  $k$ . Para tal, considere que em um grafo completo de tamanho  $N$ , cada nó possui  $N - 1$  conexões. Assim, a probabilidade de um dado nó está conectado ao maior cluster conexo é igual  $(N - 1)/N$  e no limite em que  $N \rightarrow \infty$ , temos  $(N - 1)/N \rightarrow 1$ . Para um grafo aleatório, usaremos a aproximação em que essa probabilidade é  $(k - 1)/k$ , sendo  $k$  a conectividade média do grafo. Reescrevendo as equações de campo médio (4.1),(4.2),(4.3) e (4.4), respectivamente, temos

$$\frac{dP_o}{dt} = P_A + P_B - \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) P_o (P_A + P_B + 2P_{AB}), \quad (4.41)$$

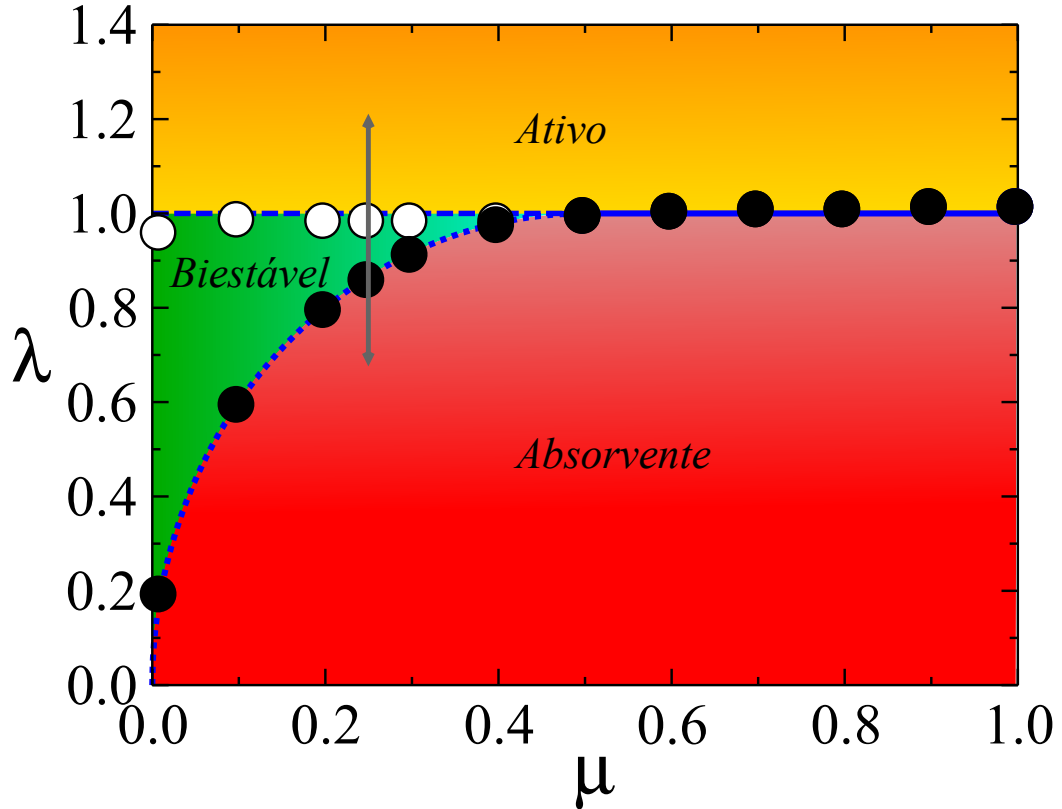


Figura 27 – Diagrama de fases obtido da simulação do processo de contato com simbiose em um grafo aleatório (símbolos) utilizando o método onde o estado absorvente é perturbado. Os círculos escuros são as transições no sentido decrescente de  $\lambda$ , os círculos claros são as transições no sentido crescente de  $\lambda$ . Comparando esse resultado com a teoria de campo médio (linhas), podemos notar uma boa concordância.

$$\frac{dP_A}{dt} = \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) P_0(P_A + P_{AB}) + \mu P_{AB} - \left[ 1 + \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) (P_B + P_{AB}) \right] P_A, \quad (4.42)$$

$$\frac{dP_B}{dt} = \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) P_0(P_B + P_{AB}) + \mu P_{AB} - \left[ 1 + \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) (P_A + P_{AB}) \right] P_B, \quad (4.43)$$

$$\frac{dP_{AB}}{dt} = -2\mu P_{AB} + \lambda \left( \frac{k-1}{k} \right) [2P_A P_B + P_{AB}(P_A + P_B)]. \quad (4.44)$$

Partindo desse novo conjunto de equações de campo médio, de maneira análoga às soluções obtidas para o grafo completo, chegamos às seguintes soluções:

$$\rho = 0 \quad (\text{absorvente}), \quad (4.45)$$

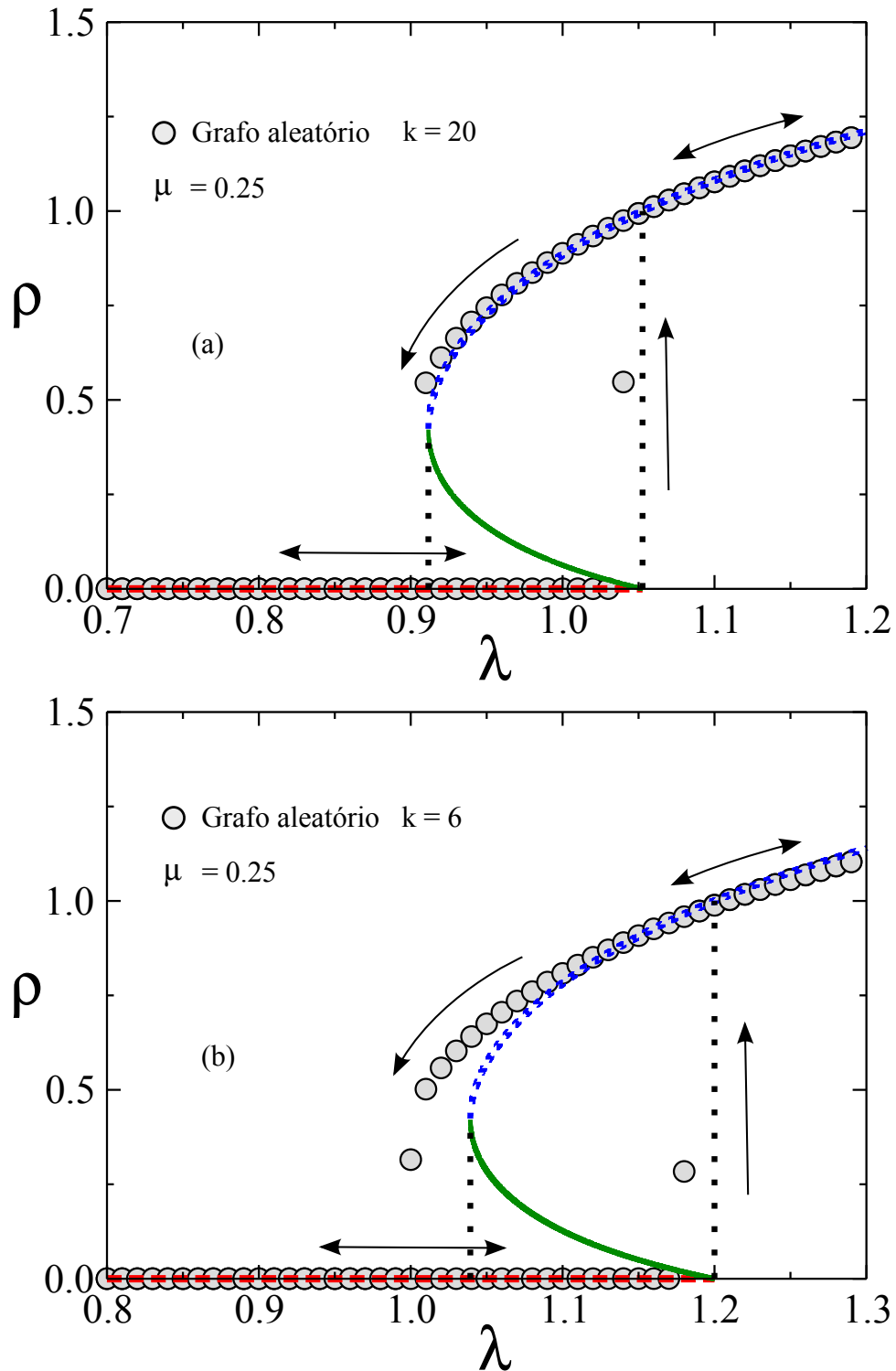


Figura 28 – Resultado da simulações do processo de contato para  $\mu = 0.25$  em uma rede aleatória de Erdős–Rényi com  $N = 4 \times 10^4$  (símbolos) com (a)  $k = 20$  e (b)  $k = 6$ , feitas em 60 amostras de  $10^5$  passos de Monte Carlo para um transiente de  $5 \times 10^4$ . As soluções analíticas para os dois casos, (a)  $k = 20$  e (b)  $k = 6$ , estão representados pelas linhas pontilhada vermelha, contínua verde e tracejada azul, que correspondem às soluções ativa, instável e absorvente, respectivamente. Em (a), para  $k = 20$ , há uma boa concordância entre o resultado numérico e o analítico.

$$\rho = \frac{\frac{k-1}{k}\lambda - 2\mu + \sqrt{4\mu^2 - 4\mu + (\frac{k-1}{k})^2\lambda^2}}{2\frac{k-1}{k}\lambda} \quad (\text{ativo}), \quad (4.46)$$

$$\rho = \frac{\frac{k-1}{k}\lambda - 2\mu - \sqrt{4\mu^2 - 4\mu + (\frac{k-1}{k})^2\lambda^2}}{2\frac{k-1}{k}\lambda} \quad (\text{instável}). \quad (4.47)$$

Dessas soluções ainda podemos observar as transições descontínuas, partindo do estado ativo para o absorvente,

$$\lambda_c(k) = \frac{k}{k-1} \sqrt{4\mu - 4\mu^2}. \quad (4.48)$$

e do estado absorvente para o estado ativo em  $\lambda'_c(k) = k/(k-1)$ .

Realizamos as simulações do processo de contato com simbiose para  $\mu = 0.25$  na rede aleatória de Erdős-Rényi com conectividade média  $k = 6$  e  $k = 20$ , com  $N = 4 \times 10^4$  nós. O estado quase estacionário foi gerado a partir do Método 2 e as médias foram realizadas com 60 amostras de  $10^5$  passos de Monte Carlo. Na figura (28) comparamos os resultados das simulações com as soluções analíticas das equações (4.45), (4.46) e (4.47). Na figura (28a), vemos uma boa concordância entre o resultado numérico com  $k = 20$  (símbolos) e o resultado analítico com  $k = 20$ , onde a curva pontilhada referi-se à solução ativa (4.46), a curva contínua à solução instável (4.47) e a linha horizontal tracejada à solução absorvente (4.45). As linha verticais indicam  $\lambda_c(k = 20)$  (à esquerda) e  $\lambda'_c(k = 20)$  (à direita). A setas indicam o sentido da variação de  $\lambda$ , onde podemos identificar a curva de histerese. Já na figura (28b), não temos a mesma concordância que obtivemos para um  $k$  maior.

#### 4.4.3 Resultados na rede quadrada

Consideremos agora a análise do processo de contato com simbiose em redes regulares. Tomando o Método 1 para gerarmos os estados quase estacionários, podemos reproduzir os resultados obtidos por Dickman *et al.* [42]. Na figura (29) observamos uma transição contínua entre os estados ativo e absorvente à medida que variamos a taxa de criação  $\lambda$ , em uma rede quadrada de tamanho linear  $L = 140$  com  $\mu = 0.25$ , considerando 50 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo. De fato, utilizando o Método 1, Dickman *et al.* [37] não observou nenhum indício de uma transição descontínua em redes quadradas regulares, apesar de não descartar a existência deste tipo de transição abaixo da dimensão crítica superior. Aqui investigaremos a ordem da transição de fase que o processo de contato simbiótico sofre em sistemas bidimensionais, mas considerando o Método 2 para gerarmos os estados quase estacionários.

Primeiramente, calculamos ciclos de histerese em redes regulares bidimensio-



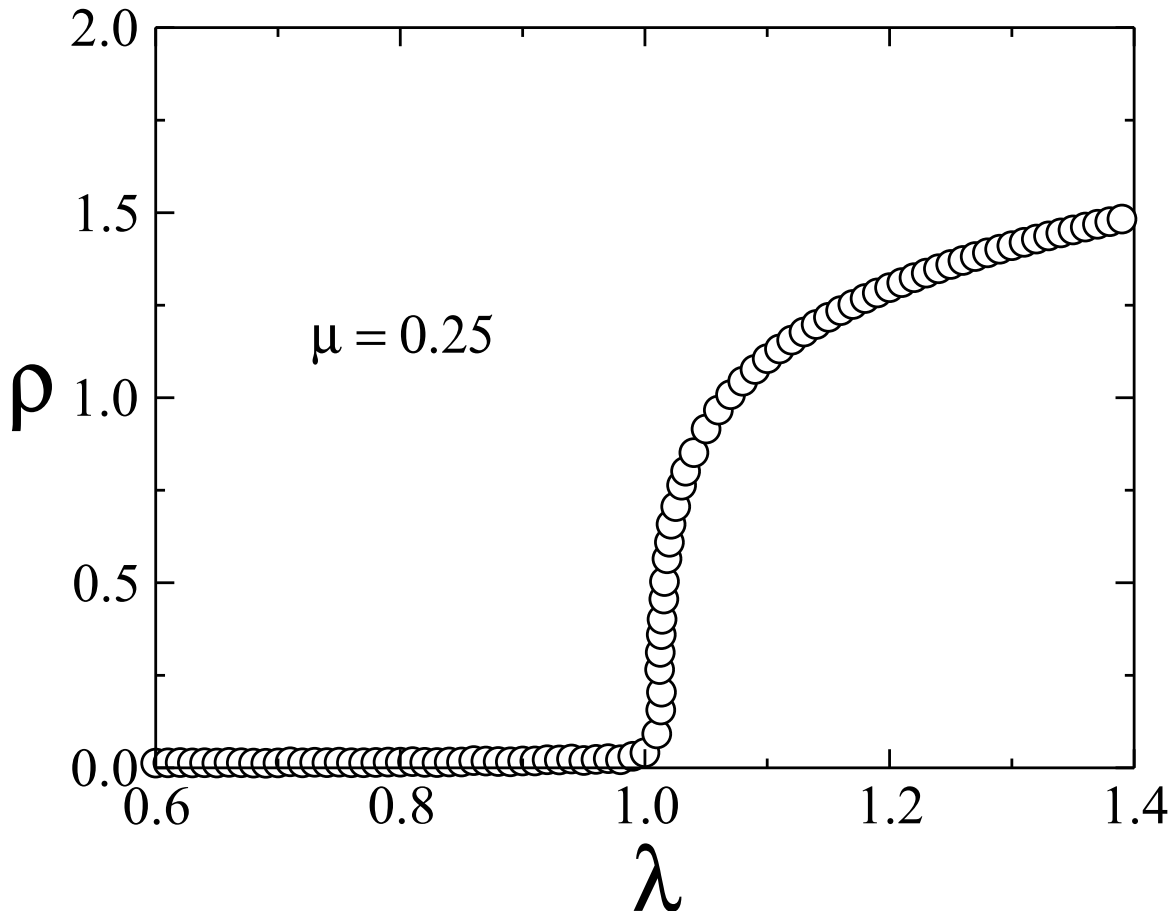


Figura 29 – Densidade de partículas de uma rede quadrada de tamanho linear  $L = 140$  com valor de  $\mu = 0.25$ , para 50 amostras com  $10^5$  passos de Monte Carlo, usando o Método 1 para gerar o estado quase estacionário.

nais utilizando o mesmo procedimento descrito para os grafos completo e aleatório. Na figura (30) temos duas curvas de histerese no intervalo  $1.0 \leq \lambda \leq 1.2$  com  $\Delta\lambda = 0.001$ , para os tamanhos lineares  $L = 100$  e  $L = 200$ , onde as médias foram realizadas sobre  $5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo e 100 amostras. Observamos que a curva de histerese tem uma forte dependência com o tamanho do sistema, uma vez que quanto maior o sistema maior a largura da curva. Na figura (31) temos dois ciclos de histerese, mantendo o tamanho da rede fixo em  $L = 100$  e considerando dois valores para o tempo de simulação em cada ponto dos ciclos, a saber,  $\Delta t = 5 \times 10^4$  (triângulos) e  $\Delta t = 10 \times 10^4$  (círculos) passos de Monte Carlo. Observamos que a largura da histerese tende a diminuir quanto maior for o valor de  $\Delta t$ . Concluimos, portanto, que para sistemas finitos o ciclo de histerese deve desaparecer para valores de  $\Delta t$  suficientemente grandes, implicando que mesmo considerando o Método 2 para gerarmos o estado quase estacionário, o processo de contato com simbiose possui uma transição contínua em sistemas bidimensionais.

A ausência de comportamento histerético tem como consequência a inexistência de uma região de biestabilidade em sistemas de baixa dimensionalidade. Na figura (32),

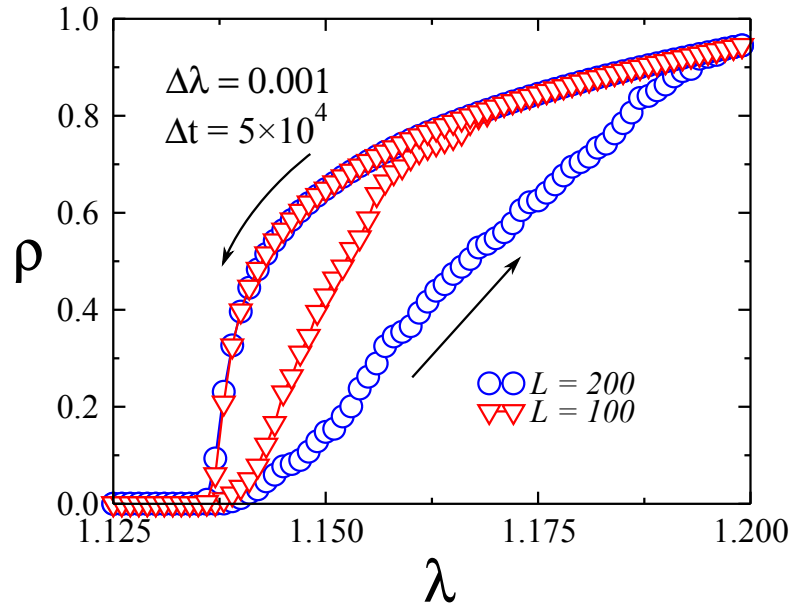


Figura 30 – Densidade de partículas do processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$  em redes quadradas de tamanhos lineares  $L = 100$  (triângulos) e  $L = 200$  (círculos). O sistema é iniciado em um valor de  $\lambda \gg \lambda_c$  e após  $5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo, o valor do parâmetro de controle é reduzido de  $\Delta\lambda = 0.001$ , de modo que o estado inicial de cada  $\lambda$  é o estado final do valor anterior de  $\lambda$ . Após atingir um valor  $\lambda \ll \lambda_c$ , passamos a incrementar  $\lambda$  de  $\Delta\lambda = 0.001$  seguindo o processo inverso até alcançar o valor inicial de  $\lambda$ .

onde analisamos a dependência das condições iniciais sobre a densidade de partículas, mostramos que o estado absorvente não é estável acima do ponto crítico da transição entre estado ativo e o absorvente. Nesta figura inicializamos o sistema com vários estados diferentes para  $\lambda = \lambda_c + \varepsilon$ , e após um tempo transiente o sistema sempre retorna para o estado estacionário ativo. Portanto, mesmo eventualmente acessando o estado absorvente, o sistema sempre tenderá a retornar para o estado ativo estável em um tempo finito. Na figura (33) realizamos a mesma análise para grafos completos (33a) e aleatórios (33b), onde mostramos que há uma região de biestabilidade, temos que o estado estacionário depende das condições iniciais adotadas para o sistema nesta região.

Após as análises acima descritas, conjecturamos que o processo de contato com simbiose sempre terá uma transição de fase contínua em topologias cuja dimensionalidade está abaixo da dimensão crítica superior  $d_c = 4$  da classe de universalidade de Percolação Direcionada. Isto pode ser explicado a partir da probabilidade de formação de sítios duplamente ocupados, que decai com a dimensionalidade da topologia considerada.

A ordem de uma transição de fase em sistemas finitos pode ser determinada através do comportamento da suscetibilidade, que usualmente é definida como  $\tilde{\chi}_N = N(\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2)$ . Para uma transição de primeira ordem a suscetibilidade apresenta

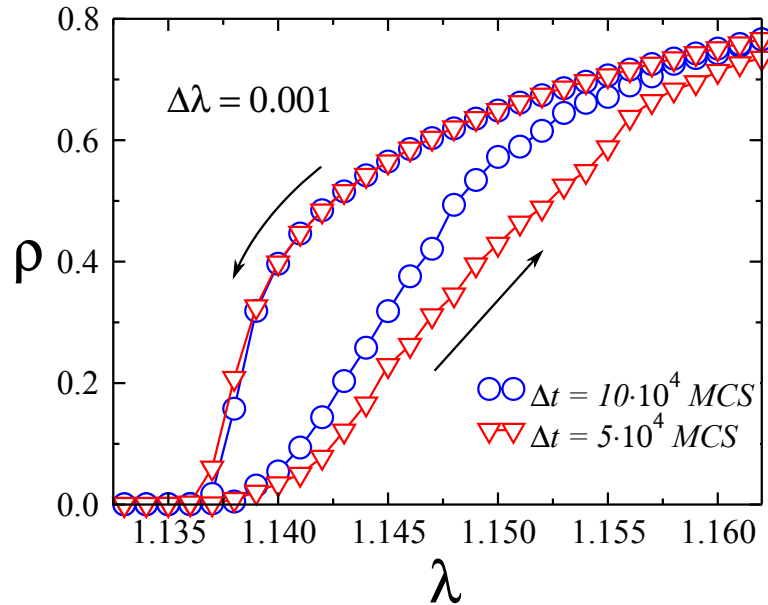


Figura 31 – Densidade de partículas do processo de contato com simbiose com  $\mu = 0.25$  em um rede quadrada de tamanho linear  $L = 100$ . O sistema é iniciado em um valor de  $\lambda \gg \lambda_c$  e a cada  $5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo (triângulos) o valor de  $\lambda$  é reduzido de  $\Delta\lambda = 0.001$  de modo que o estado inicial de cada  $\lambda$  é o estado final do valor anterior de  $\lambda$ . Após atingir um valor  $\lambda \ll \lambda_c$ , passamos a incrementar  $\lambda$  de  $\Delta\lambda = 0.001$  seguindo o processo inverso até alcançar o valor inicial de  $\lambda$ . O mesmo procedimento é realizado mas com incrementos, ou decremento, em  $\lambda$  a cada  $10 \times 10^4$  (círculos) passos de Monte Carlo.

um comportamento descontínuo. De fato, se usarmos esta definição da suscetibilidade para processo de contato com simbiose em sistemas bidimensionais, concluiríamos que este modelo descreveria uma transição descontínua. Entretanto, observamos que de fato essa transição é contínua, com ausência de região biestável. Uma correta análise para a suscetibilidade é obtida com a seguinte definição

$$\chi_N = N \frac{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle}, \quad (4.49)$$

descrita na referência [46]. Na figura (34), exibimos o comportamento da suscetibilidade para todas as diferentes topologias consideradas nesse trabalho, tomando a definição (4.49). Observe que o comportamento contínuo é obtido para rede bidimensional, em concordância com os resultados anteriormente descritos.

Neste capítulo realizamos a análise dos estados quase estacionários do modelo do processo de contato com simbiose, aplicando um método que considera a criação espontânea de partículas no estado absorvente. A análise mostrou que esse método é capaz de reproduzir a transição descontínua e curvas de histerese em redes de alta dimensionalidade, como previstas pela aproximação de campo médio. Para sistemas bidimensionais demonstramos que a transição é contínua, sem a presença de biestabilidade e sem com-

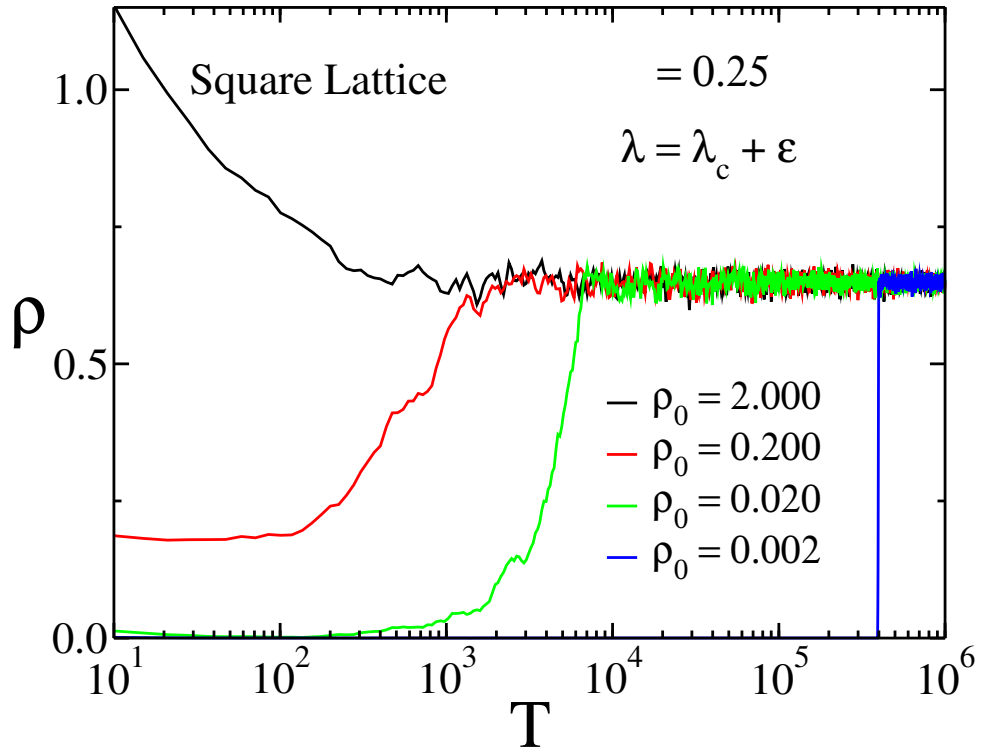


Figura 32 – Densidade de sítios ativos em função do tempo medido em passos de Monte Carlo, onde o sistema é iniciado em diferentes densidades  $\rho_0$  em uma rede quadrada de tamanho  $L = 200$  e  $\mu = 0.25$ . Para o valores  $\rho_0 = 2$  e  $\rho_0 = 0.2$ , com um valor  $\lambda = \lambda_c + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon = 0.0127$ , o sistema vai para o estado estacionário ativo sem passar pelo estado absorvente. Já para os valores  $\rho_0 = 0.02$  e  $\rho_0 = 0.002$  o sistema cai no estado absorvente antes de saltar para o estado estacionário. Independente do estado inicial, o sistema acaba em um estado estacionário com densidade finita. O estado absorvente é apenas transitente, ou seja, não é estável.

portamento histerético. Os resultados apresentados neste capítulo serão submetidos em revista da área e o artigo está anexado no apêndice C.

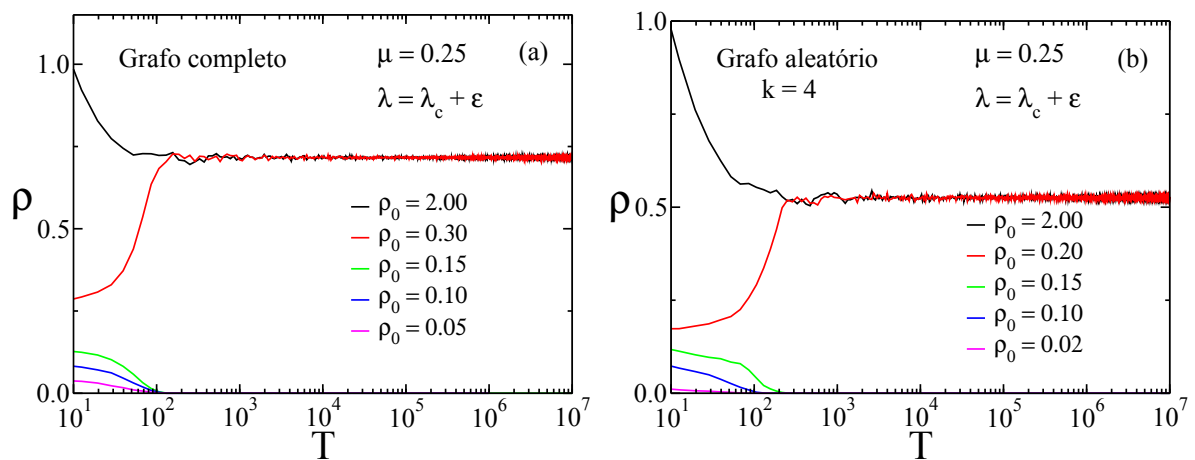


Figura 33 – Densidade de sítios ativos em função do tempo medido em passos de Monte Carlo, onde o sistema é iniciado em diferentes densidades  $\rho_0$  e valores  $\lambda = \lambda_c + \epsilon$  em um (a) grafo completo e em (b) uma rede aleatória com  $k = 4$ , ambas de tamanho  $N = 40000$  e com  $\mu = 0.25$ . Nos dois casos, o estado estacionário do sistema depende do estado inicial. Para os valores maiores de  $\rho_0$ , o sistema relaxa para um estado estacionário onde a densidade de partículas no sistema tem um valor finito, mas para densidades iniciais mais baixas, o estado estacionário do sistema é o estado absorvente, o qual persiste indefinidamente. Esse resultado indica que o estado absorvente é estável e que há biestabilidade.

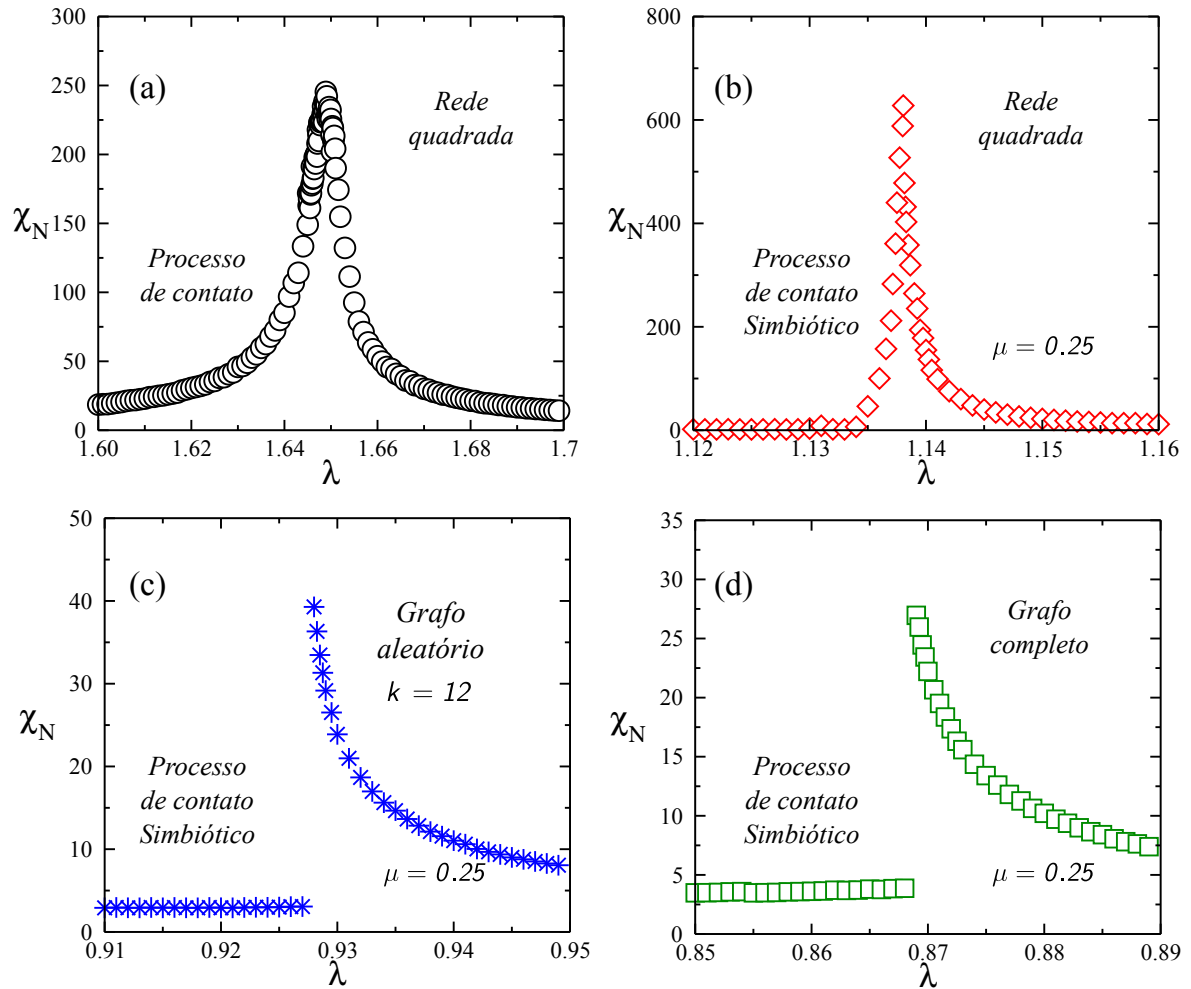


Figura 34 – Suscetibilidade calculada a partir da definição (4.49) para diferentes topologias. (a) Processo de contato ordinário em uma rede quadrada de tamanho  $L = 200$  possui uma transição contínua do estado absorvente para o ativo, não apresentando descontinuidade na suscetibilidade. (b) Processo de contato com simbiose na rede quadrada de tamanho  $L = 200$  exibe transição contínua no ponto crítico, diferentemente da (c) rede aleatória com  $k = 12$  e do (d) grafo completo, ambas apresentando descontinuidade no ponto crítico, indicando uma transição de primeira ordem. Todas as médias foram obtidas sobre  $10^5$  passos de Monte Carlo em 100 amostras.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese estudamos os efeitos da topologia sobre as transições de fases nos modelos do votante majoritário e do processo de contato, assim como em sua variação, o processo de contato com simbiose. Apresentamos resultados que mostram a mudança das classes de universalidade de Ising (para o modelo do votante majoritário) e percolação direcionada (para o processo de contato) para as respectivas classes de universalidade de campo médio.

No capítulo três realizamos a dinâmica do votante majoritário em redes espacialmente incorporadas para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ , onde mostramos que para valores de  $\alpha \geq 4$  a transição entre o estado ordenado e o desordenado pertence à classe de universalidade de Ising, uma vez que as ligações de longo alcance são raras nesse regime, o sistema mantém o comportamento similar ao da rede regular. Para valores de  $\alpha \leq 3$ , a transição pertence à classe de universalidade de campo médio, onde a grande quantidade de ligações de longo alcance passam a determinar o comportamento do sistema. No intervalo  $3 < \alpha < 4$  observamos uma variação contínua dos expoentes críticos, descrevendo o crossover entre as classe de universalidade de campo médio e Ising 2D. A assinatura da estrutura das redes espacialmente incorporadas é observada com a presença de um mínimo no valor do cumulante de Binder em  $\alpha = 2$  e com um máximo das flutuações em  $\alpha = 3$ , a partir da amplitude crítica da suscetibilidade.

Ainda no capítulo três realizamos análise semelhante para o processo de contato em redes espacialmente incorporadas, onde os resultados encontrados corroboram com aqueles determinados para o modelo do votante majoritário. Variação contínua dos expoentes críticos no intervalo  $3 < \alpha < 4$ , expoentes clássicos para  $\alpha \leq 3$  e não clássicos para  $\alpha \geq 4$ . A assinatura da rede é observada em um máximo para o cumulante  $\kappa$  e um mínimo para a amplitude crítica do parâmetro de ordem, ambos em  $\alpha = 2$ .

No capítulo quatro estudamos a transição entre o estado ativo e o estado absorvente do processo de contato com simbiose. Em nossas simulações utilizamos um método alternativo no qual partícula são criadas espontaneamente no estado absorvente, gerando assim o estado quase absorvente. As equações da dinâmica obtidas a partir da aproximação de campo médio mostram que o sistema, para valores de  $\mu < 0.5$ , sofre uma transição descontínua, cujas estabilidades obtemos analiticamente resolvendo a matriz jacobiana das equações da dinâmica, a partir da qual encontramos um intervalo de  $\lambda$  onde há duas soluções estáveis. Comparamos os resultados das simulações da dinâmica no grafo completo com os resultados analíticos de campo médio e obtivemos uma boa

concordância entre os dois, confirmando a presença de uma região de biestabilidade, descrevendo transições descontínuas para  $\mu < 0.5$ . Fazendo um ajuste nas equações da dinâmica, encontramos resultados analíticos que concordam com os resultados em redes aleatórias do tipo Erdős–Rényi, principalmente para altas conectividades. Nestas redes também encontramos transições descontínuas e biestabilidade para  $\mu < 0.5$ , mesmo para conectividades baixas, como em  $k = 4$ . Tal biestabilidade não pode ser observada utilizando-se o método utilizado por Dickman *et al.*. Este método induz a formação espontânea de sítios duplamente ocupados na região de biestabilidade, fazendo com que a fase absorvente seja preterida em relação à fase ativa. Já no método que apresentamos nessa Tese, a probabilidade de se formar duplas é muito baixa na região de biestabilidade, mantendo o estado absorvente estável até um valor de  $\lambda$  grande o bastante para que as partículas isoladas persistam e haja a formação de sítios duplamente ocupados. Porém, quando partimos para as redes quadradas regulares, a transição passa a ser contínua e a biestabilidade desaparece. Neste caso, nossos resultados mostraram que o estado absorvente para  $\lambda > \lambda_c$  não é estável e que a aparente estabilidade do estado absorvente é apenas transiente.

Como perspectiva, analisaremos como a transição do processo de contato com simbiose sobre redes espacialmente incorporadas. Como vimos para o processo de contato e para o modelo do votante majoritário, variando o parâmetro  $\alpha$  temos uma mudança no comportamento universal da transição de fase. Os resultados preliminares mostrados na figura (35) indicam que há uma mudança no tipo de transição, observamos transições descontínuas e coexistência de fases para valores de  $\alpha \leq 3$ , e transições contínuas para  $\alpha \geq 4$ .



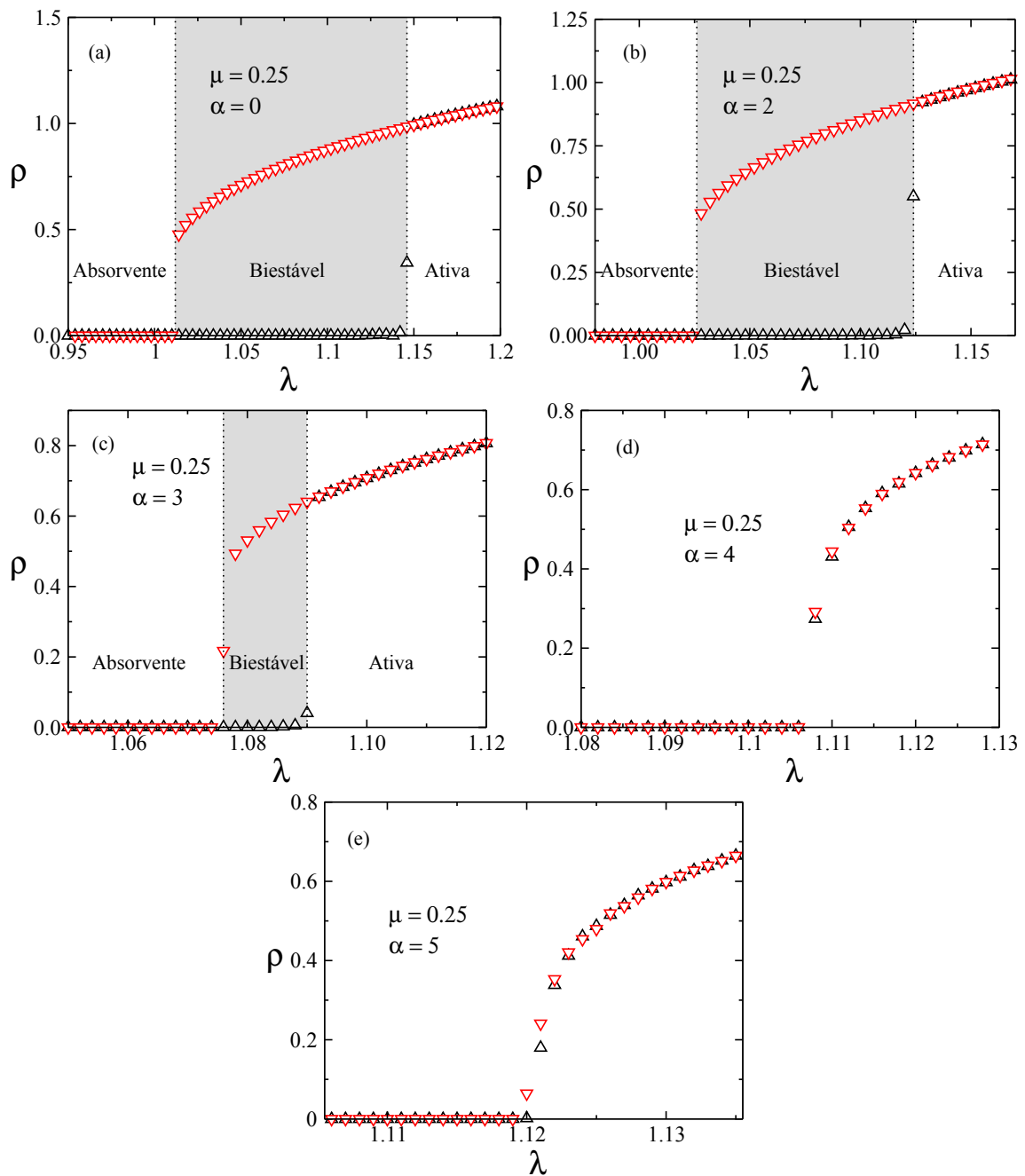


Figura 35 – Densidade de partículas no processo de contato com simbiose em função da taxa de criação  $\lambda$  para  $\mu = 0.25$ , onde a dinâmica foi realizado sobre a construção de Kleinberg com  $N = 40000$  sítios. Para os valores de (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 2$ , e (c)  $\alpha = 3$ , podemos observar transições descontínuas assim como uma região biestável. Já para os valores (d)  $\alpha = 4$  e (e)  $\alpha = 5$  uma transição contínua entre o estado absorvente e o ativo é observada, e sem a presença de biestabilidade.

## APÊNDICE A

## Majority-vote model on spatially embedded networks: Crossover from mean-field to Ising universality classes

C. I. N. Sampaio Filho,<sup>1,\*</sup> T. B. dos Santos,<sup>1</sup> A. A. Moreira,<sup>1</sup> F. G. B. Moreira,<sup>2</sup> and J. S. Andrade Jr.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil*

<sup>2</sup>*Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59072-970, Natal-RN, Brazil*

(Received 26 February 2016; published 2 May 2016)

We study through Monte Carlo simulations and finite-size scaling analysis the nonequilibrium phase transitions of the majority-vote model taking place on spatially embedded networks. These structures are built from an underlying regular lattice over which directed long-range connections are randomly added according to the probability  $P_{ij} \sim r_{ij}^{-\alpha}$ , where  $r_{ij}$  is the Manhattan distance between nodes  $i$  and  $j$ , and the exponent  $\alpha$  is a controlling parameter [J. M. Kleinberg, *Nature (London)* **406**, 845 (2000)]. Our results show that the collective behavior of this system exhibits a continuous order-disorder phase transition at a critical parameter, which is a decreasing function of the exponent  $\alpha$ . Precisely, considering the scaling functions and the critical exponents calculated, we conclude that the system undergoes a crossover among distinct universality classes. For  $\alpha \leq 3$  the critical behavior is described by mean-field exponents, while for  $\alpha \geq 4$  it belongs to the Ising universality class. Finally, in the region where the crossover occurs,  $3 < \alpha < 4$ , the critical exponents are dependent on  $\alpha$ .

DOI: 10.1103/PhysRevE.93.052101

### I. INTRODUCTION

It is a remarkable feature of the theory of critical phenomena to condense a large range of systems that undergoes a continuous phase transition in terms of universality classes [1]. Regardless of microscopic details of interactions, critical exponents are influenced only by fundamental properties such as symmetries or dimensionality. However, under some conditions, it is possible to observe a crossover phenomenon for a given system or model, namely, a change in its universality class. Examples of crossover phenomena are known in equilibrium, such as in ferromagnetic systems [2,3], as well as in nonequilibrium statistical physics [4–9], where the zeroth law of thermodynamics is not satisfied. In the present work we analyze a crossover from mean-field to Ising universality classes in a nonequilibrium model, namely, the majority-voter model. However, as will be described, these regimes are separated by a singular region where the critical exponents change continuously.

It is worth noticing that other models have shown continuous variation of the critical exponents with a given parameter. Indeed, in equilibrium statistical mechanics, such as in the continuum percolation problem [10] or in the eight-vertex model [11], there is a generalization of the ice-type models, where critical exponents vary continuously. In nonequilibrium statistical mechanics, the transition from ordinary directed percolation to tricritical directed percolation occurs with a continuous variation of the exponents [1]. Moreover, when scale-free networks are considered, several models, such as the Ising [12], the sandpile [13], the contact process [14–16], and epidemiological models [17], all have critical exponents varying continuously as a function of the exponent controlling the distribution of connections.

The majority-vote model (MVM) with noise [18,19] is a nonequilibrium model system, which presents up-down symmetry and a continuous order-disorder phase transition.

The nature of the transition and the phase diagram for the MVM defined on both regular and complex networks have been extensively investigated, including a significant number of generalizations [8,20–22]. Besides their own motivation within the context of nonequilibrium statistical mechanics, these studies have focused on the area of phase transitions and critical phenomena to improve our understanding on the robustness and formation of social consensus [23–27].

In the present study, we perform Monte Carlo simulations and employ the finite-size scaling theory to obtain the phase diagram and critical behavior of the the MVM on spatially embedded networks [28,29], namely, networks constituted of  $d$ -dimensional lattices as substrates over which long-range connections are randomly added to connect any two sites according to a probability that depends on the distance between these sites.

The remainder of the paper is organized as follows. In Sec. II we describe the main features of the social networking model proposed by Kleinberg and the majority-vote dynamics used here to determine the time evolution of the Ising variables associated with each node of this network. In Sec. III the results of our simulations are presented and the finite-size scaling analysis is used to investigate the critical properties of the model. We conclude in Sec. IV.

### II. THE MODEL DEFINITION

In order to study the effects of nonlocal interactions on the global ordering, we associate one Ising spin variable with each one of the  $N$  sites of a regular lattice and perform Monte Carlo simulations considering each spin evolving in time according to the majority-vote dynamics [18,19]. Here we adopt Kleinberg's network [28] as a model to insert long-range couplings between sites in the system. Starting from a regular  $d$ -dimensional lattice each site is connected with its  $2d$  nearest-neighbor sites. Next, every site  $i$  can receive a *directed* connection with a site  $j$  with probability  $P_{ij} \sim r_{ij}^{-\alpha}$ , where  $r_{ij}$  is the Manhattan distance defined by the

\*Corresponding author: cesar@fisica.ufc.br

number of connections separating the nodes  $i$  and  $j$  in the underlying regular lattice,  $\alpha$  is the parameter that controls the length of these long-range connections (shortcuts), and the proportionality factor is calculated for each  $\alpha$  considered, in order to have  $P_{ij}$  as a normalized quantity. Since the probability of long-range connections depends on the distance between sites, this network is said to be *spatially embedded* [29]. Here, we consider a two-dimensional square lattice with periodic boundary conditions as a substrate over which directed long-range connections are added [30,31]. However, other studies [12,24,32] have shown that models with directed and undirected links tend to have different behavior.

Previous studies have shown that the MVM model on regular lattices undergoes a typical order-disorder phase transition at the stationary state [18,19]. Its dynamics is governed by the probabilities  $p$  to attribute to a randomly chosen spin the same state of the majority of its neighbors, and  $q = 1 - p$  the opposite state. Moreover, in the case of a tie, each state is chosen at random with equal probability. Therefore, the control parameter  $\alpha$  and the probability  $q$  define the parameter space for the phase diagram of the MVM on Kleinberg's network. The critical noise approaches a limiting value as  $\alpha \rightarrow \infty$ , but due to the extra connections, remains above the value for a regular square lattice,  $q_c = 0.075(1)$  [19].

The MVM is microscopically irreversible, i.e., its stationary state does not satisfy detailed balance, and presents up-down symmetry. The former property implies that we are dealing with a nonequilibrium system in which neither energy nor temperature are defined, whereas the existence of up-down symmetry would ensure the Ising universality class for the MVM on regular lattices. Remarkably, we show here that the addition of nonlocal interactions, via Kleinberg's prescription, modifies this scenario. Indeed, our results show that the universality class of the majority-vote model on these networks does depend on the range of the control parameter  $\alpha$ .

In order to study the effect of the noise parameter  $q$  and the control parameter  $\alpha$  on the phase diagram and critical behavior of the majority-vote model, we consider the magnetization  $M_N$ , the susceptibility  $\chi_N$ , and the Binder fourth-order cumulant  $U_N$ , which are defined by

$$M_N(q) = \langle \langle m \rangle_{\text{time}} \rangle_{\text{sample}}, \quad (1)$$

$$\chi_N(q) = N[\langle \langle m^2 \rangle_{\text{time}} \rangle_{\text{sample}} - \langle m \rangle_{\text{time}}^2], \quad (2)$$

$$U_N(q) = 1 - \frac{\langle \langle m^4 \rangle_{\text{time}} \rangle_{\text{sample}}}{3 \langle \langle m^2 \rangle_{\text{time}} \rangle_{\text{sample}}^2}, \quad (3)$$

where  $N$  is the number of spins in the system and  $m = |\sum_{i=1}^N \sigma_i|/N$ . The symbols  $\langle \dots \rangle_{\text{time}}$  and  $\langle \dots \rangle_{\text{sample}}$ , respectively, denote time averages taken at the stationary state and configurational averages taken over several samples. For a fixed value of  $\alpha$ , we have performed Monte Carlo simulations on Kleinberg's networks with  $N = 2500, 10\,000, 22\,500, 40\,000, 90\,000, 250\,000$ . Time in our simulations is measured in Monte Carlo steps (MCS). More precisely, one Monte Carlo step is accomplished when we choose randomly  $N$  spins and try to flip each one with the

probability rate

$$w(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 - (1 - 2q)\sigma_i S \left( \sum_{\delta} \sigma_{i+\delta} \right) \right], \quad (4)$$

where the summation is over all spins connected with the chosen spin  $\sigma_i$ , and  $S(x) = \text{sgn}(x)$  if  $x \neq 0$  and  $S(0) = 0$  otherwise. We wait  $10^5$  MCS for the system to reach the steady state and the time averages are calculated based on the next  $10^5$  MCS. At the critical region, larger runs are performed with  $2 \times 10^5$  MCS to reach the steady state and  $10^6$  for computing time averages. For all sets of parameters  $(q, \alpha)$ , at least 100 independent samples are considered in the calculation of the configurational averages. Moreover, the simulations were performed using different initial spin configurations.

### III. RESULTS AND DISCUSSION

In the thermodynamic limit ( $N \rightarrow \infty$ ), we expect the system to show nonzero magnetization only below the critical noise  $q_c(\alpha)$ . In Fig. 1 we show the phase diagram of the MVM on Kleinberg's networks. For each value of the parameter  $\alpha$ , the critical value  $q_c(\alpha)$  is obtained by calculating the Binder fourth-order cumulant  $U_N(q)$ , Eq. (3), as a function of the noise parameter  $q$ , considering networks with different number of nodes  $N$ . For sufficiently large system sizes, these curves intercept each other at a single point  $U(q_c)$ . Since the Binder cumulant has zero anomalous dimensions [33], the resulting value of the critical parameter  $q_c(\alpha)$  is independent of  $N$ . As depicted, the phase diagram in the  $\alpha$  vs  $q$  parameter space of Fig. 1 shows that the critical noise  $q_c$  decreases monotonically with the control parameter  $\alpha$ . This reflects the fact that larger values of  $\alpha$  result in lower densities of long-range links (shortcuts), and vice versa. For  $\alpha > 6$ , the curve for  $q_c(\alpha)$  presents an asymptotic behavior (dashed line) to the value  $q_c = 0.075(1)$  which corresponds to the critical point of the regular square lattice [19]. In fact, in the limit  $\alpha \rightarrow \infty$  we recover the topology of a square lattice and therefore the majority-vote model is described by the 2D Ising universality class [8,19,22].

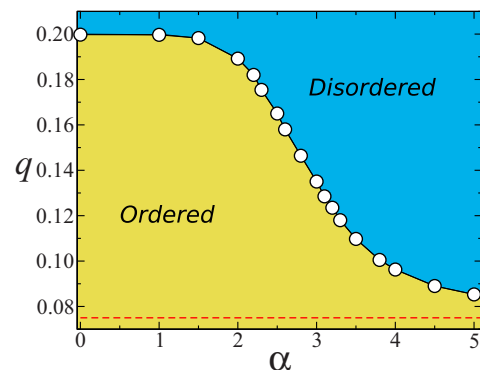


FIG. 1. Phase diagram for the majority-vote model on Kleinberg's networks. The critical parameter  $q_c$  decreases monotonically with the control parameter  $\alpha$ . The critical values remain always above the value for the regular square lattice  $q_c = 0.075$  [19] (dashed line).

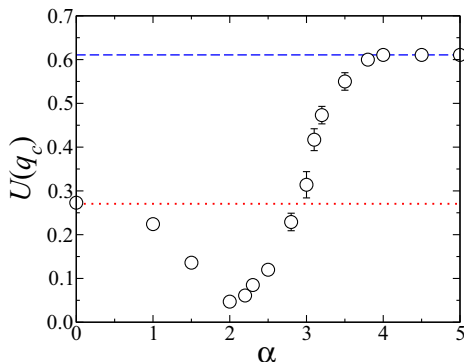


FIG. 2. Binder's cumulant calculated at the critical noise  $q_c$ . The bottom (red) dotted line corresponds to the mean-field value ( $U^* = 0.2705208$ ) [37] and the upper (blue) dashed line to the limit for the 2D Ising universality  $U^* = 0.61069014(1)$  [22,38]. For some data points the error bars are smaller than the symbols. A minimum of  $U(q_c)$  at  $\alpha = 2$  is reminiscent of the optimal navigation condition with local knowledge [28]. The 2D Ising regime is recovered for  $\alpha \geq 4$ .

For  $\alpha = 0$ , however, the system is described by the mean-field theory [4,12,34], since for this value of the control parameter the probability of adding a shortcut is the same for all pairs of sites and independent of their distances [28,35,36]. Our next results characterize this crossover [4,5] from the mean-field to the 2D Ising universality class.

In general, some dependency of the critical noise value on the control parameter  $\alpha$  should be expected since critical points (for example, critical temperatures [32] and critical rates of surviving [39]) are not universal properties. Nevertheless, it is remarkable that the value of the Binder cumulant at the critical noise also depends on  $\alpha$ , as shown in Fig. 2. For each value of the parameter  $\alpha$  considered, we determine  $U^*$  (open circles) as the intersection point of the set of curves of the Binder cumulant  $[U_N(q)]$ . Indeed, for systems with the same symmetry of the Ising model in the regime of short-range interactions, the Binder cumulant takes the value  $U^* = 0.61069014(1)$ , considering square lattices with periodic boundary condition [38,40–43]. For the case of the majority-vote model on the same topology, the same value for the critical Binder cumulant was found [22]. In the mean-field regime, one has the reference value  $U^* = 0.2705208$  [3,37,41,44,45]. Both the mean-field and Ising limits are represented by dashed lines in Fig. 2. The value of the Binder cumulant at the critical point has a minimum when the parameter  $\alpha$  is assigned to the dimensionality of the underlying square lattice,  $\alpha = 2$ . Moreover, in the range  $0 < \alpha < 3$ , the  $\alpha$ -dependent values for the critical cumulant are all located below the mean-field line. This is a rather unusual behavior, since the lower bound for  $U^*$  normally corresponds to the mean-field value. Curiously, in the framework of Kleinberg's prescription, at  $\alpha = d$ , the navigation time has a minimum [28], while the Laplacian transport displays a maximum conductance [46]. The 2D Ising behavior is observed only for  $\alpha \geq 4$ . The results shown in Fig. 2 suggest a crossover between the mean-field and

the 2D Ising universality classes as one varies the parameter  $\alpha$ . To investigate the critical behavior of the model, we analyze the finite-size scaling behavior of the system, which allows us to extrapolate the information available from finite-system simulations to the thermodynamic limit. Near the critical point, the finite-size scaling equations for the observables considered here are

$$M_N(q) \sim N^{-\beta/\bar{\nu}} \tilde{M}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (5)$$

$$\chi_N(q) \sim N^{\gamma/\bar{\nu}} \tilde{\chi}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (6)$$

$$U_N(q) \sim \tilde{U}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (7)$$

where  $\varepsilon = (q - q_c)$  is the distance from the critical noise. The exponents  $\beta$ ,  $\gamma$ , and  $\bar{\nu}$  are, respectively, associated with the decay of the order parameter  $M_N(q)$ , the divergence of the susceptibility  $\chi_N(q)$ , and the divergence of the correlation volume ( $\xi \sim \varepsilon^{-\bar{\nu}}$ ). Their exact values for the Ising universality class are  $\beta = 1/8$ ,  $\gamma = 7/4$ , and  $\bar{\nu} = 2$ , whereas the mean-field exponents are  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ , and  $\bar{\nu} = 2$  [1]. Notice that we are using  $N$  in the definition of the scaling variable  $x = \varepsilon N^{1/\bar{\nu}}$ , where  $\bar{\nu} = d\nu$  [8].

To determine how the parameter  $\alpha$  affects the critical behavior of the model, we have explored the dependence of the magnetization and the susceptibility on the system size  $N$  at  $q = q_c$ , by considering the finite-size scaling relations Eqs. (5) and (6). From this analysis, we are able to estimate the exponents  $\beta/\bar{\nu}$  and  $\gamma/\bar{\nu}$ . Moreover, the correlation length exponent  $\bar{\nu}$  can be obtained applying the same analysis, but now from the derivative of Binder's cumulant with respect to the noise parameter. For the susceptibility, this analysis is illustrated in Fig. 3 considering four values of the parameter  $\alpha$ . The results for the critical points and the critical exponents, obtained from simulations with several values of  $\alpha$ , are summarized in Table I and Fig. 4. Within the error bars, we can conclude that, for  $0 \leq \alpha \leq 3$ , the critical exponents are consistent with those of the mean-field critical behavior, whereas for  $\alpha > 4$  we get 2D Ising exponents. In the range  $3 < \alpha < 4$ , we obtain  $\alpha$ -dependent exponents, so that the critical

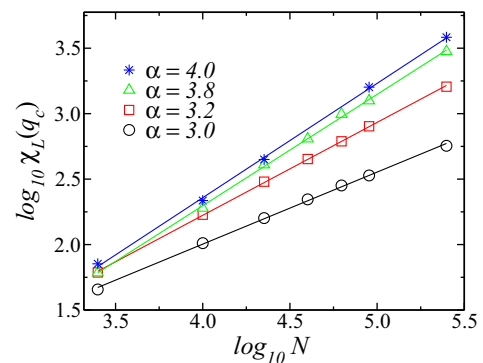


FIG. 3. Logarithmic plot showing the finite-size scaling for the critical susceptibility with  $\alpha = 3.0$  (circles), 3.2 (squares), 3.8 (triangles), and 4.0 (stars). The solid lines represent the least-squares fits to data, whose slopes correspond to the exponent  $\gamma/\bar{\nu}$  (see Table I).

TABLE I. Results for the critical noise  $q_c$  and critical exponents  $\beta/\bar{\nu}$  and  $\gamma/\bar{\nu}$  of the majority-vote model on Kleinberg's network for different values of the parameter  $\alpha$ . The mean-field values are  $\beta/\bar{\nu} = 0.250$  and  $\gamma/\bar{\nu} = 0.500$ , while the exponents for the two-dimensional Ising model are  $\beta/\bar{\nu} = 0.0625$  and  $\gamma/\bar{\nu} = 0.875$  [1,19].

$\alpha$	$q_c$	$\beta/\bar{\nu}$	$\gamma/\bar{\nu}$
0.0	$0.1998 \pm 0.0001$	$0.253 \pm 0.032$	$0.490 \pm 0.055$
1.0	$0.1997 \pm 0.0002$	$0.25 \pm 0.040$	$0.505 \pm 0.055$
2.0	$0.1892 \pm 0.0001$	$0.250 \pm 0.063$	$0.480 \pm 0.060$
2.3	$0.1754 \pm 0.0004$	$0.249 \pm 0.032$	$0.535 \pm 0.071$
2.5	$0.1650 \pm 0.0009$	$0.260 \pm 0.080$	$0.480 \pm 0.063$
2.8	$0.1464 \pm 0.0007$	$0.251 \pm 0.055$	$0.500 \pm 0.063$
3.0	$0.1350 \pm 0.0003$	$0.256 \pm 0.055$	$0.533 \pm 0.050$
3.2	$0.1235 \pm 0.0003$	$0.134 \pm 0.060$	$0.710 \pm 0.070$
3.5	$0.1097 \pm 0.0010$	$0.110 \pm 0.060$	$0.815 \pm 0.032$
3.8	$0.1005 \pm 0.0001$	$0.069 \pm 0.044$	$0.850 \pm 0.055$
4.0	$0.0963 \pm 0.0005$	$0.066 \pm 0.041$	$0.870 \pm 0.060$
5.0	$0.0820 \pm 0.0003$	$0.064 \pm 0.040$	$0.873 \pm 0.065$

behavior of the majority-vote model is described neither by mean-field nor by Ising universality classes. This continuous variation of the critical exponents with  $\alpha$  is consistent with the observed effective dimensionality in spatially embedded networks [29].

In order to accurately determine the exponents and the nature of the continuous phase transition, we now consider the data collapse of the results from our simulations with different system sizes  $N$  for a fixed value of  $\alpha$ . These data collapses reflect [see Eqs. (5) and (6)] the existence of universal functions for the rescaled magnetization  $\tilde{M}(x) = M_N(q)N^{\beta/\bar{\nu}}$  and for the rescaled susceptibility  $\tilde{\chi}(x) = \chi_N(q)N^{-\gamma/\bar{\nu}}$ , with both depending only on the scaling variable  $x = \varepsilon N^{1/\bar{\nu}}$ . The universal curves shown in Fig. 5 for the order parameter (magnetization) reveal the presence of two regimes. In Fig. 5(a) the resulting data collapse is compatible with mean-field critical behavior; that is, the universal function for  $\alpha = 3$  is consistent with mean-field exponents:  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ , and  $\bar{\nu} = 2$ . The same set of exponents was considered to obtain data collapses of excellent quality for other values of  $\alpha < 3$ . However, the data collapse for  $\alpha = 4$  shown in Fig. 5(b) is

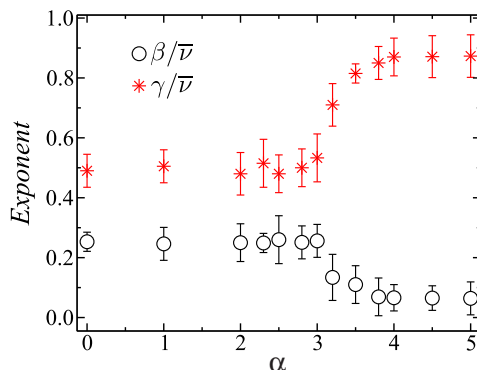


FIG. 4. The dependence of the critical exponents  $\beta/\bar{\nu}$  and  $\gamma/\bar{\nu}$  on the parameter  $\alpha$  (see Table I). Here,  $\bar{\nu} = 2$  for all values of  $\alpha$ .

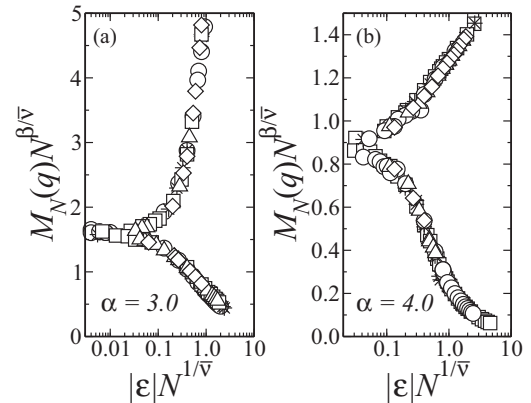


FIG. 5. Data collapse for the magnetization for system sizes  $N = 10\,000$  (circles),  $22\,500$  (stars),  $40\,000$  (rectangles),  $62\,500$  (triangles), and  $90\,000$  (diamonds). (a) The universal curve for  $\alpha = 3$  is consistent with mean-field exponents:  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\bar{\nu} = 2$ . (b) For  $\alpha = 4$ , the data collapse is obtained using Ising exponents:  $\beta = 1/8$ ,  $\gamma = 7/4$ ,  $\bar{\nu} = 2$ .

consistent with 2D Ising exponents. Satisfactory data collapse was also obtained for the susceptibility and Binder's cumulant (not shown).

Figure 6 shows the data collapse for the critical amplitude [4,8] of the susceptibility as a function of the parameter  $\alpha$ , considering four values of system sizes  $N = 10\,000, 40\,000, 62\,500$ , and  $90\,000$ . More precisely, we plot the rescaled susceptibility,  $\chi_N(q_c)N^{-\gamma/\bar{\nu}}$ , using the set of calculated exponents, namely, mean-field exponents for  $\alpha < 3$ ,  $\alpha$ -dependent exponents for  $3 < \alpha < 4$ , and 2D Ising exponents for  $\alpha > 4$ . As can be seen, the results shown in Fig. 6 give support to our conjecture, highlighting the singular region, characterized by nonuniversal exponents. Moreover,  $\alpha = 2$  is not associated with the lowest limit for the critical amplitude of the susceptibility, differently from the critical amplitude of

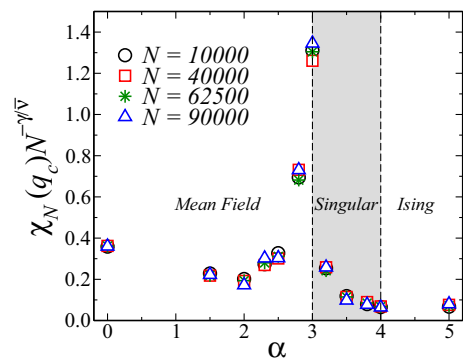


FIG. 6. Data collapse for the susceptibility at the critical point as a function of  $\alpha$ . The exponents used are those from our conjecture: for  $\alpha \leq 3$ ,  $\gamma/\bar{\nu} = 0.5$  (mean field), for  $3 < \alpha < 4$  the exponents are  $\alpha$ -dependent (see Table I), and for  $\alpha \geq 4$ ,  $\gamma/\bar{\nu} = 0.875$  (2D Ising). Notice that the maximum of the fluctuations occurs at  $\alpha = 3$ .

Binder's cumulant. However, an upper limit can be observed for  $\alpha = 3$  in the fluctuations of the order parameter.

#### IV. CONCLUSIONS

In this work, the effects of nonlocal interactions on the phase diagram and critical behavior of the majority-vote model on Kleinberg's networks are determined by Monte Carlo simulations and finite-size scaling analysis. The model is defined in terms of the noise parameter  $q$  associated with the resistance for accepting the majority state and the control parameter  $\alpha$  for the addition of long-range connections (shortcuts). The resulting phase diagram in the  $\alpha$  vs  $q$  parameter space indicates that the critical noise,  $q_c(\alpha)$ , above which the system does not display global order (consensus) decreases with  $\alpha$ . The Binder cumulant calculated at the critical noise, whose value has been usually considered as indicative of a given class of universality, yields results below the mean-field line as  $\alpha$  varies in the interval  $0 < \alpha < 3$ , where a minimum occurs at  $\alpha = 2$ .

Nevertheless, for the entire region  $0 \leq \alpha \leq 3$  the obtained set of critical exponents is consistent with mean-field behavior. On the other hand, for  $\alpha \geq 4$ , the calculated values of the critical Binder's cumulant and critical exponents are both indicative of a system that belongs to the two-dimensional Ising universality class.

Finally, in the region  $3 < \alpha < 4$ , a continuum crossover can be observed from the mean-field to the 2D-Ising critical behaviors, which suggests that the majority-vote model on Kleinberg networks is described by  $\alpha$ -dependent exponents. Indeed, this is not a strange result, since the universality class of a system is determined by its symmetries and dimensionality, which here are parametrized by the exponent  $\alpha$ .

#### ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Brazilian agencies CNPq, CAPES, FUNCAP, and the National Institute of Science and Technology for Complex Systems for financial support.

- 
- [1] M. Henkel, H. Hinrichsen, and S. Lübeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions* (Springer Netherlands, Dordrecht, 2008).
- [2] K. K. Mon and K. Binder, *Phys. Rev. E* **48**, 2498 (1993).
- [3] E. Luijten and H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1557 (1996).
- [4] S. Lübeck, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 210601 (2003).
- [5] S. Lübeck, *Phys. Rev. E* **69**, 066101 (2004).
- [6] H. D. Rozenfeld, C. Song, and H. A. Makse, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 025701 (2010).
- [7] L. K. Gallos, H. A. Makse, and M. Sigman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 2825 (2012).
- [8] C. I. N. Sampaio-Filho and F. G. B. Moreira, *Phys. Rev. E* **88**, 032142 (2013).
- [9] C. I. N. Sampaio Filho, A. A. Moreira, R. F. S. Andrade, H. J. Herrmann, and J. S. Andrade, *Sci. Rep.* **5**, 9082 (2015).
- [10] V. Sasidevan, *Phys. Rev. E* **88**, 022140 (2013).
- [11] D. A. Lavis, *Equilibrium Statistical Mechanics of Lattice Models* (Springer Netherlands, Dordrecht, 2015).
- [12] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1275 (2008).
- [13] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 148701 (2003).
- [14] M. A. Muñoz, R. Juhász, C. Castellano, and G. Ódor, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 128701 (2010).
- [15] R. Juhász, G. Ódor, C. Castellano, and M. A. Muñoz, *Phys. Rev. E* **85**, 066125 (2012).
- [16] G. Ódor, R. Dickman, and G. Ódor, *Sci. Rep.* **5**, 14451 (2015).
- [17] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 925 (2015).
- [18] T. Tome, M. J. de Oliveira, and M. A. Santos, *J. Phys. A* **24**, 3677 (1991).
- [19] M. J. de Oliveira, *J. Stat. Phys.* **66**, 273 (1992).
- [20] P. R. A. Campos, V. M. de Oliveira, and F. G. Brady Moreira, *Phys. Rev. E* **67**, 026104 (2003).
- [21] D. F. F. Melo, L. F. C. Pereira, and F. G. B. Moreira, *J. Stat. Mech.* (2010) P11032.
- [22] C. I. N. Sampaio-Filho and F. G. B. Moreira, *Phys. Rev. E* **84**, 051133 (2011).
- [23] S. Galam, *Eur. Phys. J. B* **25**, 403 (2002).
- [24] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [25] C. Song, Z. Qu, N. Blumm, and A.-L. Barabási, *Science* **327**, 1018 (2010).
- [26] M. Kitsak, L. K. Gallos, S. Havlin, F. Liljeros, L. Muchnik, H. E. Stanley, and H. A. Makse, *Nat. Phys.* **6**, 888 (2010).
- [27] M. Barthélemy, *Phys. Rep.* **499**, 1 (2011).
- [28] J. Kleinberg, *Nature (London)* **406**, 845 (2000).
- [29] L. Daqing, K. Kosmidis, A. Bunde, and S. Havlin, *Nat. Phys.* **7**, 481 (2011).
- [30] G. Li, S. D. S. Reis, A. A. Moreira, S. Havlin, H. E. Stanley, and J. S. Andrade, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 018701 (2010).
- [31] G. Li, S. D. S. Reis, A. A. Moreira, S. Havlin, H. E. Stanley, and J. S. Andrade, *Phys. Rev. E* **87**, 042810 (2013).
- [32] A. D. Sánchez, J. M. López, and M. A. Rodríguez, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 048701 (2002).
- [33] K. Binder, *Z. Phys. B* **43**, 119 (1981).
- [34] H. Hong, B. J. Kim, and M. Y. Choi, *Phys. Rev. E* **66**, 018101 (2002).
- [35] M. E. J. Newman and D. J. Watts, *Phys. Rev. E* **60**, 7332 (1999).
- [36] D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature (London)* **393**, 440 (1998).
- [37] E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys. B* **257**, 867 (1985).
- [38] G. Kamieniarz and H. W. J. Blöte, *J. Phys. A* **26**, 201 (1993).
- [39] M. M. de Oliveira, R. V. Dos Santos, and R. Dickman, *Phys. Rev. E* **86**, 011121 (2012).
- [40] J. Salas and A. D. Sokal, *J. Stat. Phys.* **98**, 551 (2000).
- [41] E. Luijten and H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 025703 (2002).
- [42] W. Selke and L. N. Shchur, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, L739 (2005).
- [43] A. Malakis, N. G. Fytas, and G. Gülpinar, *Phys. Rev. E* **89**, 042103 (2014).
- [44] E. Luijten and H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. B* **56**, 8945 (1997).
- [45] E. Luijten, *Phys. Rev. E* **60**, 7558 (1999).
- [46] C. L. N. Oliveira, P. A. Morais, A. A. Moreira, and J. S. Andrade, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 148701 (2014).



## REFERÊNCIAS

- [1] V. M. L. dos Santos J. A. B. da Silva, F. G. B. Moreira and R. L. Longo. *Phys.Chem.Chem.Phys.*, 16:19479, 2014.
- [2] R.F.S. Andrade H.J. Herrmann C.I.N. Sampaio Filho, A.A. Moreira and J.S. Andrade. *Sci. Rep.*, 5:9082, 2015.
- [3] J. S. Andrade S. Havlin C. M. Schneider, A. A. Moreira and H. J. Herrmann. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 108:3838, 2011.
- [4] F. A. Rodrigues L. F. Costa and A. S. Cristino. *Genet. Mol. Biol.*, 31:591, 2008.
- [5] Tânia Tomé and Mário José de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, 2001.
- [6] Haye Hinrichsen Malte Henkel and Sven Lübeck. *Non-Equilibrium Phase Transitions*. Springer, 2008.
- [7] R.K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth Heinemann, 1996.
- [8] R. Cohen and S. Havlin. *Complex Networks. Structure, Robustness and Function*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] Joaquin Marro and Ronald Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, 1999.
- [10] Géza Ódor. *Universality in nonequilibrium lattice systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [11] P.C. Hohenberg and B.I. Halperin. *Rev. Mod. Phys.*, 49:435, 1977.
- [12] M. C. Cross and P.C. Hohenberg. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851, 1993.
- [13] Horst Stöcker Walter Greiner, Ludwig Neise. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer Science Business Media, 2012.
- [14] M.E. Fisher. *Phys. Rev. Lett.*, 16:11, 1966.
- [15] R.B. Griffiths. *Phys. Rev. Lett.*, 24:1479, 1970.
- [16] L.P. Kadanoff. *Phys. B*, 2:263, 1966.
- [17] Jon M. Kleinberg. *Nature*, 406:845, 2000.
- [18] K.K. Mon and K. Binder. *Phys. Rev. E*, 48:2498, 1993.
- [19] E.Luijtem and H.W.J. Blöte. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1557, 1996.
- [20] S. Lübeck. *Phys. Rev. Lett.*, 90:210601, 2003.
- [21] S. Lübeck. *Phys. Rev. E*, 69:066101, 2004.



- [22] C. Song H.D. Rozenfeld and H.A. Makse. *Phys. Rev. Lett.*, 104:025701, 2010.
- [23] H.A. Makse L.k. Gallos and M. Sigman. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 109:2825, 2012.
- [24] C.I.N. Sampaio Filho and F.G.B. Moreira. *Phys. Rev. E*, 88:032142, 2013.
- [25] M.J. de Oliveira. *J. Stat. Phys.*, 66:273, 1992.
- [26] M. J. de Oliveira T. Tome and M. A. Santos. *J. Phys. A*, 24:3677, 1991.
- [27] G. Kamieniarz and H.W.J. Blöte. *J. Phys. A*, 26:201, 1993.
- [28] J. Salas and A.D. Sokal. *J. Stat. Phys.*, 98:551, 2000.
- [29] E.Luijtem and H.W.J. Blöte. *Phys. Rev. Lett.*, 89:025703, 2002.
- [30] W. Selke and L.N. Shchur. *J. Phys. A: Math. Gen*, 38:L739, 2005.
- [31] E. Brézin and J. Zinn-Justin. *Nucl. Phys. B*, 257:867, 1985.
- [32] E.Luijtem and H.W.J. Blöte. *Phys. Rev. B*, 56:8945, 1997.
- [33] E.Luijtem. *Phys. Rev. E*, 60:7558, 1999.
- [34] A. A. Moreira F. G. B. Moreira C. I. N Sampaio Filho, T. B. dos Santos and J. S. Andrade Jr. *Phys. Rev. E*, 93:052101, 2016.
- [35] Harris T.E. Contact interactions on a lattice. *Reviews of modern physics*, 2:9697, 1974.
- [36] D. N. Messias U. L. Fulco and M. L. Lyra. *Phys. Rev. E*, 63:066118, 2001.
- [37] de Oliveira M. M. and Dickman R. How to simulate the quasistationary state. *Phys. Rev. E*, 71:16129, 2005.
- [38] R. Dickman and J. K. L. da Silva. *Phys. Rev. E*, 58:4266, 1998.
- [39] N. G. Fytas A. Malakis and G. Gülpinar. *Phys. Rev. E*, 89:042103, 2014.
- [40] Bradford d. martin, ernest schwab. *Studies in history of biology*, 4(4):7–25, 2012.
- [41] E. Barreno L. Margulis. *BioScience*, 53(8):776, 2003.
- [42] Santos R. V. de Oliveira M. M. and Dickman R. Symbiotic two-species contact process. *Phys. Rev. E*, 86:011121, 2012.
- [43] de Oliveira M. M. and Dickman R. Phase diagram of the symbiotic two-species contact process. *Phys. Rev. E*, 90:032120, 2014.
- [44] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press, 1994.
- [45] H. E. Stanley. *Introduction to Phase transitions and critica phenomena*. Clarendon Press, 1971.
- [46] R. S Ferreira A. S. Mata and S. C Ferreira. *N. J. Phys*, 16:053006, 2014.