UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA (ENCIMA)

PAULO ALEXANDRE SOUSA QUEIROZ

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E PRÁTICA

FORTALEZA

2016

PAULO ALEXANDRE SOUSA QUEIROZ

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E PRÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada a banca examinadora do Programa de Pós-Graduação *Strictu Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Eixo Temático: Matemática
Linha de Pesquisa: Métodos Pedagógicos no Ensino de Ciências e Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Q46p Queiroz, Paulo Alexandre Sousa.
Uma proposta metodológica para o ensino dos Números Complexos: história e prática / Paulo Alexandre Sousa Queiroz. – 2016.
126 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Ana Carolina Costa Pereira.
Coorientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Sequência Fedathi. Números Complexos. Métodos Pedagógicos.. I. Título.
CDD 510

PAULO ALEXANDRE SOUSA QUEIROZ

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E PRÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

Aprovada em: ___/___/___.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Co-orientador)
Instituto Federal do Ceará – IFCE

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará – UECE

Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes
Universidade Estadual do Ceará – UECE

À minha filha Glorinha, razão da minha luta diária, minha inspiração, o que há de mais precioso em meu ser, sentimento inexplicável e inenarrável de poder compartilhar conquistas e sonhos ao seu lado.

AGRADECIMENTOS

Ao ser supremo do universo, pela oportunidade de existência e de realização de sonhos.

À minha mãe, Eliane Sousa Queiroz, fiel torcedora e incentivadora de todos os meus passos, a quem sempre pude contar em todas as horas de minha vida.

Ao meu padrasto, Francisco Ernando Ferreira da Silva, por todo apoio, incentivo, por ter sido o pai que não tive.

Aos meus irmãos, Adriano, Adriana, Arteziano, Aureliano e Ana Aurélia por serem meus mais fiéis torcedores.

À minha ex-companheira Daiara de Almeida Gomes, a quem compartilhei anseios e sonhos durante boa parte de minha vida.

À minha filha Glorinha, por ser a maior inspiração de minha vida.

Aos meus familiares, incentivadores, críticos e torcedores de todas as realizações de minha vida.

Aos meus amigos Marciano e Ricardo Diniz pelo incentivo dado para que eu fizesse o processo de seleção.

À profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, minha orientadora, a quem tenho uma admiração eterna. Por acreditar e incentivar à conclusão do meu mestrado. Meus agradecimentos pela disponibilidade, presteza nas respostas, auxílio em todos os momentos, empréstimo dos livros e sobretudo pelo exemplo de profissionalismo, que és para mim uma referência.

À professora Dra. Maria José Costa dos Santos, pela competência, pelos ensinamentos, sobretudo pela preocupação e torcida na conclusão deste trabalho.

Ao prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves(coorientador), pelas orientações, debates e discussões acerca do tema.

Ao prof. Dr. Isaías Batista de Lima, por toda atenção dispensada e orientações.

Aos meus dois grandes amigos e assessores de gabinete da CREDE 9, Elisvaldo Oliveira da Silva e Maria Olenira Matos Bernardo, por todo apoio dado durante meu período de gestão à frente da CREDE 9.

Aos assessores de gabinete da CREDE 7, Rogério Lúcio e Fábio Xavier, por todo apoio dado durante meu período de gestão à frente da CREDE 7.

Aos meus grandes amigos e apoiadores: Tiago Adauto, André Luiz, Joacillo Cavalcante, Fátima Gomes, Vladiere Sousa, Narcelio Bastos, Maria das Dores(Dorinha), Darlan Oliveira, Williame, Wilclei e Emanuel Rodrigues pelo apoio junto às CREDE's 7 e 9 que me possibilitou tranquilidade e tempo dedicados a esse estudo.

Aos colegas de turma, Joilson Pedrosa e Antonio Marcos, pelo apoio e amizade durante todo percurso.

À equipe CREDE 9 e CREDE 7 por todo trabalho prestado durante minha gestão, possibilitando-me tranquilidade para conclusão desse trabalho.

Ao diretor da EEM Padre Coriolano, Luciano Nogueira, por todo apoio e atenção dispensados na execução da pesquisa.

À diretora Maria Taylana Queiroz Martins, ao coordenador Assis Bento e ao professor Pedro Maciel, por todo apoio, atenção e parceria dispendidos durante a execução da pesquisa.

À professora Andressa Marreiro e ao professor Narcélio Bastos, pela revisão ortográfica e pelas contribuições dadas ao texto.

À coordenação do ENCIMA pela organização e execução do programa de pós-graduação.

Aos sujeitos que participaram desta pesquisa fornecendo dados relevantes.

RESUMO

Diante dos baixos resultados de aprendizagem apresentados pelos indicadores de avaliações em larga escala como: SPAECE e PISA, percebe-se o cenário desafiador para o ensino de matemática nas escolas públicas brasileiras, especialmente na transposição didática de conteúdos considerados abstratos e na metodologia utilizada para efetivação do ensino. Diante dessa realidade, o presente trabalho apresenta uma proposta de ensino dos números complexos, estruturado a partir da Sequência Fedathi como metodologia através da pedagogia mão-no-bolso. A pesquisa foi direcionada à trinta e cinco alunos de terceiro ano de uma escola pública de ensino profissionalizante do Estado do Ceará. O objetivo foi oferecer uma possibilidade metodológica ao professor de matemática no ensino do conjunto dos números complexos, principalmente por se tratar de um conteúdo de difícil visualização prática. Foram aplicadas três sessões didáticas com a utilização das quatro etapas propostas na Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova. Será feita uma análise a partir dos resultados obtidos no pré-teste para confrontar os resultados qualitativos e quantitativos obtidos no pós-teste bem como uma análise do perfil dos sujeitos envolvidos na pesquisa. Por fim, espera-se que a metodologia Sequência Fedathi, utilizada como recurso metodológico, favoreça o professor na mediação do ensino de números complexos.

Palavras-chave: Sequência Fedathi. Números Complexos. Métodos pedagógicos.

ABSTRACT

Given the low learning outcomes presented by large-scale assessments of indicators such as: SPAECE and PISA, one sees the challenging environment for math education in Brazilian public schools, especially in didactic transposition of content deemed abstract and the methodology used for execution teaching. Given this reality, this paper presents an educational proposal of complex numbers, structured from the Fedathi sequence as a methodology through hand-in-pocket pedagogy. Research hi directed to thirty-five students of third year of a public school in vocational education of Ceara. The goal was to provide a methodological possibility to professor of mathematics in the teaching of all complex numbers, mainly because it is a content difficult to practice visualization. three teaching sessions were applied using the four steps proposed in Fedathi sequence: making position, maturity, and solution testing. an analysis from the results obtained in the pre-test to compare the qualitative and quantitative results of the post-test as well as a profile analysis of the subjects involved in the research will be done. Finally, it is expected that the Sequence Fedathi methodology, used as a methodological resource, promotes the teacher in mediating the teaching of complex numbers.

Keywords: Sequence Fedathi. Complex numbers. Teaching methods.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CREDE	Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EEEP	Escola Estadual de Educação Profissional
ENCCEJA	Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
NC	Números Complexos
OCN	Orientações Curriculares Nacionais
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SEDUC	Secretaria Estadual da Educação do Estado do Ceará
SF	Sequência Fedathi
SISU	Sistema de Seleção Unificada
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
UFC	Universidade Federal do Ceará

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Notícias publicadas em veículos de comunicação nacional revelam que “57% das crianças matriculadas em escolas públicas do país têm baixo aprendizado em matemática.” (FOREQUE, 2015). Os dados são baseados na Avaliação Nacional da Alfabetização – ANA – aplicada em 2013. A notícia enfatiza ainda que, “em matemática, 22 Estados têm mais da metade de seus alunos em níveis inadequados de aprendizagem, as regiões Norte e Nordeste apresentam os piores resultados: 74,89% e 74,08, respectivamente” (FOREQUE, 2015).

Dados como esses revelam o desafio de se ensinar matemática nas escolas públicas brasileiras, especialmente pelos baixos índices de aprendizagem frequentemente associados a metodologia utilizada pelo professor, o desinteresse pela disciplina bem como indagações de alunos e professores acerca da relevância do estudo de determinados conteúdos, surgindo perguntas no meio discente relacionadas a real necessidade de serem-lhe atribuídos estudos, bem como a aplicação prática dos mesmos em seus cotidianos.

Como exemplo dessa dificuldade de sentido e resposta às indagações feitas acima, tem-se os Números Complexos, objeto da referida pesquisa, que geralmente são ensinados no último ano do ensino médio tendo como referência para introdução do ensino, a resolução de equações do segundo grau com discriminante negativo. Conforme elucida Boyer (2001, p. 210), “o surgimento dos números complexos não foi em nenhum sentido motivado por considerações práticas, nem tinha valor para os engenheiros ou praticantes de matemática.” Diante dessa afirmação, e do próprio sentido da palavra “Complexo” que representa algo de difícil compreensão; que abarca e compreende vários elementos ou aspectos distintos cujas múltiplas formas possuem relações de interdependência, pode-se perceber o desafio de se ensinar e consolidar o conceito de Números Complexos.

Em consonância com as questões levantadas acima acerca dos Números Complexos, Júnior (2009, p. 8) afirma que:

> É frequente percebermos, entre os professores de matemática, uma resistência em abordar este tema. Embora conheçam a teoria, que envolve definições, operações e as diferentes formas de representar estes números, eles parecem tímidos quanto à legitimidade de se ensinar este tópico, o que vêm provocando a sua eliminação prática de muitos currículos escolares. Muitos justificam este movimento por uma falta de aplicação concreta dos números complexos e pouco se discute sobre a importância destes entes matemáticos no desenvolvimento da própria ciência.

Por se tratar de um conteúdo dependente de conhecimentos prévios bem consolidados, o desafio de transpor didaticamente [1] o conceito de Números Complexos, tanto pelo cenário em questão (sala de aula de uma escola pública) quanto pelas dificuldades de aprendizagem acumuladas durante todo período de estudo, se colocam como tarefas que exigem grandes esforços, conforme podemos observar, os resultados de aprendizagem da disciplina de matemática no Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE - apresentam baixos resultados no 9º ano, ou seja, os rendimentos estão abaixo do esperado, sendo 325 o limite inferior do nível adequado ao qual o aluno deve estar ao concluir o ensino fundamental.

Quadro 1: Escala de Proficiência – SPAECE – 9º Ano.

PADRÃO DE DESEMPENHO	**NÍVEL DE PROFICIÊNCIA**
MUITO CRÍTICO	Até 225
CRÍTICO	225 a 275
INTERMEDIÁRIO	275 a 325
ADEQUADO	Acima de 325

Fonte: http://www.spaece.caedufjf.net

O nível adequado se refere aos conhecimentos mínimos que um estudante do 9º ano precisa possuir ao concluir o ensino fundamental para que possa prosseguir seus estudos no ensino médio, vale ressaltar que "neste padrão, os alunos demonstram resolver problemas envolvendo equações do 2º grau e sistemas de equações do 1º grau" (CEARÁ, 2015), ou seja, conteúdos importantes para desenvolvimento do conceito de Números Complexos a ser estudado no terceiro 3º ano do ensino médio. Vejamos os resultados de aprendizagem em matemática no 9º ano no Estado do Ceará entre 2010 e 2014.

Quadro 2: Resultados do SPAECE – 9º ano.

EDICÃO/ANO	**PROFICIENCCIA EM MATEMÁTICA**
2010	238,7
2011	243,2
2012	247,6
2013	245,1
2014	239,2

Fonte: http://www.spaece.caedufjf.net/resultados

---

1 Transposição Didática é um "instrumento" pelo qual analisamos o movimento do saber sábio (aquele que os cientistas descobrem) para o saber a ensinar (aquele que está nos livros didáticos) e, por este, ao saber ensinado (aquele que realmente acontece em sala de aula).(POLÍDORO; STIGAR, p. 153-154).

Os resultados observados mostram um leve crescimento na aprendizagem em matemática no período entre 2010 e 2012 e um decrescimento no período compreendido entre 2012 e 2014. Um ponto relevante a se observar é o padrão crítico em todos os anos mesmo em períodos de crescimento, além de uma diferença de desempenho de apenas 0,5 pontos comparando-se o primeiro ano observado (2010) com o último (2014), assim pode-se perceber que os alunos situam-se no estágio crítico, permitindo-se inferir que os conteúdos de 9º ano, importantes para a aprendizagem de Números Complexos não estão sendo aprendidos, fato que poderá contribuir para possíveis dificuldades enfrentadas no ensino de Números Complexos, conforme pode-se constatar os níveis de aprendizagem em matemática no 3º ano do ensino médio.

Quadro 3: Escala de Proficiência – SPAECE – Matemática - 3º Ano.

PADRÃO DE DESEMPENHO	NÍVEL DE PROFICIÊNCIA
MUITO CRÍTICO	Até 250
CRÍTICO	250 A 300
INTERMEDIÁRIO	300 A 350
ADEQUADO	Acima de 350

Fonte:http://www.spaece.caedufjf.net

Vale ressaltar que há uma diferença de pontos nas escalas de proficiência do 9º do ensino fundamental e o 3º ano do ensino médio por considerar a evolução que o aluno deverá percorrer. Observa-se os resultados no Estado do Ceará referente ao 3º ano do ensino médio.

Quadro 4: Resultados do SPAECE – 3º Ano.

EDIÇÃO/ANO	PROFICIENCCIA EM MATEMÁTICA
2010	260,9
2011	260,4
2012	260,7
2013	267,8
2014	266,3

Fonte: http://www.spaece.caedufjf.net/resultados.

Podemos inferir que houve um leve crescimento na aprendizagem em Matemática no Estado do Ceará nos anos de 2012 e 2013, com decrescimento nos anos de 2011 e 2014, porém mesmo nos anos de 2012 e 2013 em que o crescimento de aprendizagem foi observado, o nível continuou no estágio crítico.

No cenário nacional, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), uma avaliação aplicada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) para avaliar o nível de conhecimento em matemática, leitura e ciências de estudantes na faixa etária de 15 anos, é outro indicativo do baixo rendimento dos estudantes brasileiros em Matemática em comparação aos demais países avaliados.

Apesar do crescimento em matemática entre 2003 e 2012, o Brasil ocupa a 58ª posição dos 65 países avaliados em 2012, com pontuação de 391, ficando a frente apenas de 7 países (Argentina, Tunísia, Colômbia, Qatar, Indonésia e Peru, respectivamente).

Quadro 5: Comparativo dos resultados do Brasil no PISA desde 2000.

	PISA	**PISA**	**PISA**	**PISA**	**PISA**
Número de Alunos Participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589
Leitura	396	403	393	412	410
Matemática	334	356	370	386	391
Ciências	375	390	390	405	405

Fonte: http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados

Outro ponto relevante a se observar é que o desempenho em matemática, apesar de ter sido o único a crescer entre 2009 e 2012, é inferior ao desempenho em leitura e ciências para todos os anos observados.

Conforme pode-se observar, o ensino de matemática na educação básica apresenta enormes desafios nos processos de ensino. Uma possível proposição dos motivos do baixo rendimento para essa disciplina é a forma como os conteúdos são repassados e a metodologia utilizada, que por vezes, abordam conteúdos abstratos, de difícil visualização prática, a exemplo dos Números Complexos, sendo necessária a utilização de metodologias que possam contribuir para um melhor aprendizado bem como possa fazer o professor refletir acerca de sua própria postura diante do que se busca ensinar, além da busca por mecanismos que possam dar sentido ao que se ensina, evitando a abordagem apenas tradicional, conforme afirmação de Borges Neto(*et al.*, 2013, p. 37):

> O ensino tradicional, além de sobrecarregar o professor antes, durante e depois das aulas, subtrai do aluno a possibilidade de participar e contribuir com o desenvolvimento de sua aprendizagem dos outros alunos, pois, ao ficar na condição de "mero expectador", deixará de expor suas dúvidas, reflexões e hipóteses, as quais poderiam ser de grande valia para todo grupo, no decorrer do assunto estudado.

Somados aos inúmeros desafios postos para o ensino de matemática, há a dificuldade de aplicação de novas metodologias que possam diminuir a utilização da aula meramente expositiva, dirimindo a utilização de aulas verticalizadas onde o professor é detentor do conhecimento e o aluno é um "mero" expectador.

Dessa maneira, objetiva-se com a referida pesquisa apresentar a utilização da Sequência Fedathi como caminho metodológico para o ensino dos Números Complexos, possibilitando ao professor uma reflexão acerca das vantagens do uso dessa metodologia e de sua própria prática diante do que se busca ensinar.

Durante o desenvolvimento da pesquisa buscar-se-á descrever e propor sessões didáticas por meio da Sequência Fedathi acerca do conteúdo de Números Complexos; Disponibilizar material didático estruturado a partir da Sequência Fedathi para o uso do professor do ensino médio; Apresentar dados empíricos originados no *locus* de investigação em consequência da aplicação da Sequência Fedathi buscando respostas acerca das seguintes indagações: Se faz urgente a aplicação de novas metodologias para o ensino de Números Complexos que fujam da aula meramente expositiva? Quais as vantagens de utilização da Sequência Fedathi como recurso metodológico? Qual o sentido de se estudar conteúdos abstratos como Números Complexos? Como fazer o aluno sentir a necessidade de extrair raiz quadrada de número negativo, sendo esse um conteúdo de difícil aplicação prática no seu cotidiano? A utilização da metodologia de ensino Sequência Fedathi se apresenta "como uma nova visão no ato de ensinar e aprender, como um suporte teórico-metodológico com o objetivo de melhorar o ensino e aprendizagem, especificamente, dos conteúdos matemáticos (BORGES NETO *et al.*, 2013, p. 93).

A hipótese da referida pesquisa é de que a utilização da Sequência Fedathi como metodologia de ensino, favoreça a postura do professor na construção do conceito de Números Complexos, podendo o aluno, prosseguir em estudos posteriores (nível superior) que exijam o conteúdo em sua proposta curricular.

A Sequência Fedathi, metodologia usada na referida pesquisa, propõe que:

> Ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos para constituir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo (BORGES NETO *et al.*, 2013, p. 18).

O presente trabalho apresenta uma proposta de Sequência Didática[2] associada à Sequência Fedathi, que foi aplicada durante 01(um) mês com a participação de 35 alunos de uma escola pública situada no município de Canindé.

[2] Sequência Didática refere-se à organização de uma sequência de aulas, geralmente planejadas para pesquisas relacionadas à Didática, podendo ser também uma produção para o próprio ensino. (BORGES NETO *et al.*, 2013, p. 50).

De acordo com a classificação proposta por Gil (2002, p. 43), a pesquisa adquire um cárter bibliográfico pelo uso de referências que subsidiam o desenvolvimento do texto e da temática, bem como adquire caráter documental pelo uso de documentos (REGISTROS- para não repetir a palavra DOCUMENTOS) originais como SPAECE (2010 a 2014), ENEM (2009 a 2014), PISA (2000 a 2012), PCNEM (1999), OCNEM (2006) e DCNEM (2013). Foram utilizados questionários estruturados, antes, durante e ao final da pesquisa, bem como o método dedutivo por meio de uma análise qualitativa e quantitativa, que avaliará se a metodologia favorecerá ao ensino e a aprendizagem dos Números Complexos.

O presente trabalho será estruturado em 05 capítulos, expostos na seguinte ordem: **INTRODUÇÃO**, em que constará problematização, justificativa, objetivos, hipóteses, tipo de pesquisa, metodologia e estrutura da dissertação; **ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS** que abordará estudos relacionados à História dos Números Complexos e a Sequência Fedathi; **UNIDADE DIDÁTICA** no qual serão apresentados estudos relacionados às definições de NC a partir de livros didáticos do ensino médio, aplicação contextual, relação dos NC com o novo ENEM; **A PESQUISA,** onde será feita a discussão das sessões didáticas com a utilização da SF como possibilidade metodológica; **ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NAS SESSÕES DIDÁTICAS,** no qual será analisado o método, validação das categorias de análise e a consolidação dos dados quantitativos e qualitativos; **CONSIDERAÇÕES FINAIS** em que serão apresentados os resultados da pesquisa.

2 ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo será feito um breve histórico acerca do conjunto dos números complexos, percorrendo momentos preponderantes para seu surgimento, ressaltando os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento bem como o contexto dessas descobertas.

A abordagem histórica dos fatos que levaram ao surgimento dos números complexos se dá pela possibilidade de compreensão dos aspectos relevantes ao desenvolvimento da matemática e consequentemente do conteúdo estudado, possibilitando, assim, uma visão mais aprofundada.

O texto apresentado tem como referenciais: (BOYER. 2001), (BEKKEN, 1994), (EVES, 1995), (ROSA, 1998), (GARBI, 2010), (STRUIK, 1969) e (CAJORI, 1928-29).

A apresentação será feita na ordem cronológica para possibilitar um melhor entendimento da sequência dos acontecimentos que contribuíram para o surgimento do conjunto dos números complexos, iniciando-se com as descobertas feitas acerca das equações de 2º grau em todo período histórico, percorrendo os fatos importantes para seu surgimento e culminando na apresentação dos estudos e descobertas feitos a partir das contribuições dadas pelos matemáticos italianos no século XVI.

2.1 Um breve histórico dos Números Complexos

O conteúdo de Números Complexos é normalmente ensinado no terceiro ano do ensino médio, sendo o estudo relacionado às equações do segundo grau, uma possibilidade de ligação do conteúdo a estudos anteriores.

Deparando-se com a resolução de equações de segundo grau com discriminante negativo, geralmente estudadas no 9º ano do ensino fundamental, fica a cargo do professor citar a não existência de solução no conjunto dos números reais, ou a citação de que será estudado posteriormente o conjunto dos Números Complexos que os possibilitará resolver tais equações.

Todo esse percurso cria uma impressão de que o surgimento dos Números Complexos está ligado á resolução de equações do segundo grau, fato que será esclarecido posteriormente.

Sobre a importância da abordagem histórica de conteúdos matemáticos, Bekken(1994, p. 9) afirma que:

> Após um interesse aparentemente modesto na história de nossa disciplina na década de 70, parece que agora este interesse está crescendo, tanto entre os matemáticos quanto entre os historiadores, que procuram mostrar como a história pode ajudar no esforço de ensinar matemática.

Portanto, fazer uma análise histórica do conteúdo torna ainda mais atrativo do ponto de vista do ensino e da aprendizagem.

2.2 Números Complexos: Aspectos Históricos

O surgimento dos Números Complexos está intimamente ligado à resolução de equações de 2º e 3º graus com soluções que recaíam em raízes negativas, essas surgiram na matemática em diversas épocas e em diferentes regiões, faremos aqui um breve relato desses acontecimentos. As equações, segundo Garbi(2010), constituem do ponto de vista prático, a parte mais importante da matemática.

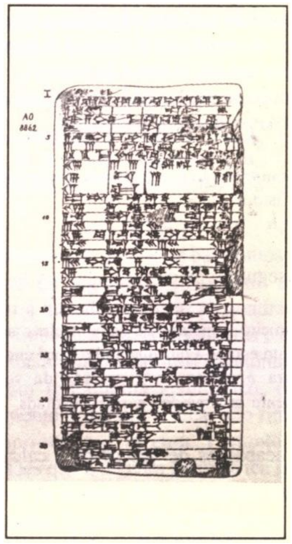
O primeiro registro de resolução de equações de segundo grau é encontrado 4.000 anos A.C na Babilônia e no Egito, em relação às equações cúbicas, não há registros de resolução dessas no Egito, porém há muitos exemplos nos babilônicos. (BOYER, 2001). Em relação a esse tema, Garbi (2010, p. 9) corrobora afirmando que:

> Os matemáticos e astrônomos babilônicos do II milênio a.C. realizaram feitos surpreendentes: eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo graus, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinavam a raiz de 2 com grande precisão, etc.

Nos registros babilônicos, há cerca de 500.000 tábuas de barro com escritura cuneiforme. Aproximadamente 300 dessas tábuas são referentes à matemática, e estas vem sendo traduzidas desde 1920, tendo Otto Neugebauer como um de seus principais tradutores, dessa maneira Bekken (1994, p. 21) observa que “todos os objetos perecíveis desintegram-se e são destruídos em poucas décadas. Porque então a Mesopotâmia é um terreno tão fértil para a arqueologia? A reposta, em poucas palavras é: devido às tábuas de argila babilônicas.”

Em 1700 a.C, surgiram nas tabuletas de argila da Suméria, equações de segundo grau, sendo alguns casos levados à raiz quadra de números negativos. (ROSA, 1998). Garbi (2010, p. 9) afirma que “os mais antigos documentos contendo registros numéricos são tabletes de barro sumérios, de meados do IV milênio a.C”.

Em uma dessas tábuas babilônicas, a AO 8862, de um texto datado de aproximadamente 1700 A.C, há a explicação de como resolver problemas que hoje tratamos com o auxílio de equações do 2º grau:



> Multipliquei o comprimento e a largura e obtive a área. Em seguida somei a diferença entre o comprimento e a largura e obtive 3,3. Mais adiante, somei o comprimento e a largura, encontramos 27. Desejamos encontrar o comprimento, a largura e a área.
> Dadas as somas 27 e 3,3.
> O resultado: comprimento 15; largura 12; área 3,0.
> Siga o método:
> 27+3,3=3,30 e 2+27=29
> Tome a metade de 29, que dá 14;30.
> 14;30. 14;30=3, 30;15
> 3,30; 15-3, 30=0; 15
> Que tem 0; 30 como raiz quadrada
> 14;30 + 0;30 = 15 o comprimento
> 14;30 – 0;30 = 14 q largura
> Subtraia de 14 os 2 que foram adicionados a 27 dando 12, que é a largura verdadeira.
> O comprimento 15 e a largura 12 se multiplicam, dando a área 3,0.
> 15-12=3, 3+3 = 3,3
> 15+12=27. (BEKKEN, 1994, p. 22-23)

Vale ressaltar que o texto é apresentado como explicação de Neugebauer e de Van der Waerden bem como num sistema de cálculo de base 60 utilizada pelos babilônicos.

Em notação atual teríamos o problema resolvido da seguinte forma:

> Encontre o comprimento *l* e a largura *b*, sendo dadas a área e o semi-perímetro s, isto é: $l.b = a$ e $l + b = s$.
> Isto se resolve do seguinte modo:
> Encontre primeiro a metade da soma e eleve ao quadrado, subtraia então o produto e tome a raiz quadrada. Você encontra o comprimento *l* e a largura *b,* tomando a metade da soma e adicionando (respectivamente subtraindo) a raiz quadrada.
> (BEKKEN, 1994, p. 24)

Por meio da explicação acima, podemos descrever o cálculo em função de l e b como:

$\frac{s}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - a}$, sendo s o semi-perímetro e a a área.

Pode-se perceber, portanto, que os babilônicos, por volta de 1700 A.C, podiam resolver problemas relacionados a equações do 2º grau pelo método de “reduzir a metade – elevar ao quadrado – somar”. Isto não era feito com símbolos e sim com palavras. (BEKKEN, 1994)

Os babilônicos também resolveram equações do 3º grau. Um desses problemas conduzia a:

> $$12x^3 + x^2 = 1;45$$
> que, depois de multiplicar por 12^2, transforma-se em:
> $$12x^3 + x^2 = 1;45$$
> Portanto se obtém, sem explicação, $12x = 6$ e $x = 0;30$. Isto podia ter sido obtido da tabela, cuja existência sabemos
> $$n123456789$$
> $$n^2 149162536491,41,21$$
> $$n^3 18271,42,53,365,438,3212,9$$
> $$n^3 + n^2 212361,202,304,126,329,3613,30$$
> (BEKKEN, 1994, p. 25).

Embora as tábuas babilônicas apresentassem métodos sistemáticos para resolução de equações do 2º grau, elas só ofereceram soluções específicas para alguns poucos problemas do terceiro grau. (BEKKEN, 1994)

Problemas de 3º grau também surgiram as obras de Menaechmos, Arquimedes, Diofanto, Bhaskara, ..., mas só receberam soluções específicas.

É importante ressaltar que os babilônicos conheciam o Teorema de Pitágoras, pela comprovação da tábua de barro AO 8862. (BEKKEN, 1994)

No Egito, as fontes mais antigas de conhecimento matemático são datadas de 3000 A.C e registradas em rolos de papiros, sendo encontramos exemplos de equações do 2º grau nos Papiros de Ahmes(ou de Rhind) e de Moscou, porém não há o desenvolvimento de equações do 3º grau.

O Papiro de Ahmes (ou de Rhind), de cerca de 1650 a. C., apresenta a solução de 85 problemas de Aritmética e Geometria. Levou esse nome por ter sido descoberto pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século XIX e encontra-se exposto atualmente no museu Britânico em Londres. Havia uma ênfase clara nos problemas práticos da sociedade egípcia, tais como: “calcular áreas de terrenos, o tamanho de silos de trigo, o número de ladrilhos necessários para uma construção, salários em forma de pão ou cerveja para trabalhadores”. (BEKKEN, 1994, p. 15).

Figura 1: Papiro de Rhind

Fonte: http://www.mathsisgoodforyou.com/artefacts/arsmagnacardano.htm

No papiro de Moscou, de cerca de 1850 a.C., com 25 problemas de Aritmética e Geometria, encontramos o seguinte problema:

> A área de um quadrado é de 100 codos quadrados (codo: medida antiga) é igual a área de dois quadrados menores, sendo o lado de um deles $\acute{2}\acute{4}$ do lado do outro. Quais são os lados? (BEKKEN, 1994, p. 17)

Em notação atual, teríamos a seguinte questão: encontre os lados x e y, sabendo que $x^2 + y^2 = 100$ e $4x = 3y$, e consequentemente seria a resolução de uma equação do 2º grau.

É importante ressaltar que o método utilizado pelos egípcios se baseava em "adivinhar e ajustar", conforme podemos observar a explicação:

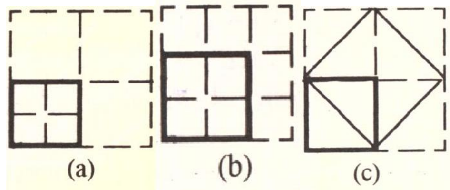
> Tome sempre um quadrado de lado 1. Então o lado do outro é $\acute{2}\acute{4}$. Multiplique isto $\acute{2}\acute{4}$, obtendo $\acute{2}\acute{1}\acute{6}$. A raiz quadrada de $1\acute{2}\acute{1}\acute{6}$ é $1\acute{4}$. A raiz quadrada de 100 é 10. Divida 10 por $1\acute{4}$, obtendo 8, o lado do primeiro quadrado, enquanto $\acute{2}\acute{4}$ de 8 dá 6, o lado do outro quadrado (BEKKEN, 1994, p. 18).

Outro ponto relevante é o fato de que "durante muitos séculos após sua invenção, o uso das escritas mesopotâmica e egípcia ainda permaneceu restrito a um pequeno número de pessoas, os chamados escribas". (GARBI, 2010, p. 9).

Os gregos, cuja cultura fora desenvolvida a partir de 600 A.C até a conquista de Alexandria pelos árabes por volta de 600 d.C, também contribuíram para o desenvolvimento da solução de equações, principalmente contribuindo para a transformação da matemática calculadora babilônica e egípcia (motivo pelo qual não se aceitava raízes quadradas de números negativos) na matemática racionada grega, à exemplo do diálogo Menon de Platão sobre o duplicação de um área que recai em uma equação de 2º grau, conforme descrição:

> Sócrates desenha um quadrado que tem dois pés de lado(a área é de quatro pés), e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área, isto é, oito pés quadrados. Diz ele: "Mostre-me exatamente o lado deste quadrado, Se não puder dizê-lo com números, mostre-me então o comprimento no desenho? O escravo propõe em seguida um quadrado com o lado de quatro pés – por conseguinte o dobro do lado. Quando Sócrates desenha a figura (a), o escravo percebe que esta área será quatro vezes maior, e corrige a proposta para um com lado de três pés.

Sócrates desenha a figura (b), que mostra que esse quadrado também é grande demais, com nove pés quadrados. Finalmente, Sócrates propõe a figura (c).



(BEKKEN, 1994, p. 33-34).

Podemos denotar em linguagem atual que o problema de Sócrates recai na resolução na solução da equação $x^2 = 2$, que para época era considerado incomensurável, por não haver ainda o desenvolvimento e conhecimento dos números irracionais.

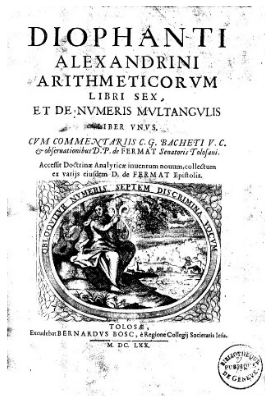
Os gregos resolviam equações de 2º grau do tipo $x^2 + px = q$, $x^2 + q = px$ e $x^2 = px + q$ através da utilização da álgebra geométrica, para p e q positivos, sem estender o conceito de números, especialmente por esbarrarem em expressões do tipo $x^2 + 2 = 0$, expressando assim, a insuficiência do conjunto dos números reais que era interpretada a época como um problema sem solução. (BEKKEN, 1994). Garbi (2010, p. 20) contribui dizendo que "o domínio que os gregos tiveram sobre a geometria permitiu-lhes resolver alguns tipos de equações de 2º grau apenas com régua e compasso"

Vale ressaltar que três grandes livros: Os Elementos de Euclides, As Seções Cônicas de Apolônio e o Almagesto de Ptolomeu "tornaram supérfluas todas as fontes anteriores, de tal modo que a matemática grega aparece em forma polida e completa. (BEKKEN, 1994, p. 33).

Portanto os gregos deram grandes contribuições por transformarem a matemática calculadora (Babilônica e Egípcia) em fundamentada – de empírica em demonstrativa. Entretanto, ao se depararem com indagações acerca da possibilidade de medir com número todas as grandezas, "evitaram participar de uma extensão sucessiva do sistema de números." (BEKKEN, 1994, p. 45). Permanecendo até então uma incógnita ao se depararem com raízes quadradas de números negativos.

Em 75 d.C. surgiu na obra *Estereometria de Heron*, um exemplo de raiz quadrada de número negativo, quando da necessidade de se calcular $\sqrt{81 - 144}$ relacionada ao cálculo sobre o desenho de uma pirâmide. Porém, a primeira atitude decorrente da raiz quadrada negativa surge na *Arithmética de Diophanto,* por volta de 275 d.C, através do seguinte problema: Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre os lados.

Figura 2: Arithmética de Diophanto



Fonte: http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-10-revolucao-matematica-1.html

Para a solução desse problema, utilizando a notação x e y como o comprimento doscatetos do triângulo retângulo mencionado, temos que a área do triângulo será $\frac{x.y}{2} = 7$ (1) e o perímetro: $x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$(2).

Isolando a incógnita y em (1) $y = \frac{14}{x}$ e prosseguindo a substituição em (2) temos que $x^2 + \left(\frac{14}{x}\right)^2 = \left(12 - x - \frac{14}{x}\right)^2$. Simplificando a expressão podemos encontrar $24x^2 + 172 + 336 = 0$, cujas raízes encontradas são $x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$.

Ao chegar a esse estágio, Diophanto observa que a equação só teria solução mediante a condição $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24x336$, ou seja, quando o Δ for maior e igual à zero, dessa maneira podemos concluir que não há sentido a expressão cuja raiz é número negativo, ou seja, $\sqrt{-167}$.

Para o prosseguimento do desenvolvimento da matemática, havia a necessidade de novos impulsos para se trabalhar com expressões do tipo $2 - \sqrt{5}$ e $2 - \sqrt{-5}$ e tratá-las como número, e esse impulso foi advindo da Astronomia Hindu. (BEKKEN, 1994)

Bekken (1994, p. 45) afirma que “o papel dos hindus é muitas vezes, nos livros de história, ofuscado pelas contribuições dos gregos e dos árabes”, porém Cajori (1897) cita que “é notável até que ponto a matemática da Índia entra na ciência de nosso tempo. Tanto a forma quanto o espírito da aritmética e da álgebra dos tempos modernos são essencialmente hindus e não gregos.

Na índia há grandes contribuições acerca de raízes quadradas de números negativos aproximadamente 850 anos d.C com o matemático Mahavira(599 – 527). Servelli (1998, p.

43-) retrata que para Mahavira sua ideia era "(...) como na natureza das coisas um negativo não é quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada".

A álgebra de Brahmagupta (aprox.. 630) e de Bhaskara(1114 - 1185) são relacionadas a obras de astronomia e são formuladas algebricamente regras de cálculo para números, frações e também para números negativos, sendo os negativos representados com um ponto acima, como 5́. (BEKKEN, 1994, p. 47).

Como proposição de Bhaskara, ao enunciar as regras para lidar com negativos, temos:

> O produto de um número positivo por um negativo é negativo, de dois negativos ou de dois positivos, dá um número positivo ...
> A raiz quadrada de um número positivo pode ser positiva ou negativa.
> **Não há raiz quadrada de um número negativo, já que nenhum negativo é um quadrado.**
> (BEKKEN, 1994, p. 48)

Outra grande contribuição à resolução de equações advinda da matemática indiana foi por Bhaskara ao propor a fórmula geral para a resolução de equações quadráticas, porém considerada sem solução ao se deparar com discriminante negativo. Entretanto, "a esse respeito há um fato curioso: a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por Bhaskara. Conforme ele mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara (991 - ?) e publicada em uma obra que não chegou até nós".(GARBI, 2010, p.25)

Conforme Rosa (1998, p. 41) elucida, "a equação nunca era vista isoladamente, mas sim como a formulação matemática de um problema." Dessa maneira ao se deparar com um problema em que a solução culminava em raízes quadradas negativas, a mesma apenas indicava que o problema não tinha solução.

Bhaskara também contribuiu afirmando que "O quadrado de um afirmativo é um afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um número negativo; pois ele não é um quadrado." (ROSA, 1998, p. 43). Outra reflexão advinda de Bhaskara afirmava "as pessoas não aprovam uma grandeza absoluta negativa". (BEKKEN, 1994, p. 56).

Portanto, duas constatações foram importantes a partir da Fórmula de Bhaskara: a primeira é de que "equações acima de 1º grau poderiam ter mais do que uma solução" **e a segunda de que "em alguns casos, a aplicação da fórmula conduzia a uma coisa misteriosa: a raiz quadrada de um número negativo". (**GARBI, 2010, p. 27)

Garbi (2010, p. 27) elucida:

> Ora, quanto é $\sqrt{-7}$? Ninguém sabia e o fato foi interpretado, à época, como sinal de que algumas equações do 2º grau eram impossíveis, simplesmente não tinham solução. **Alguns séculos transcorreram até que se entendesse o significado das raízes quadradas de números negativos mas foi a fórmula de Bhaskara que, no século 12, exibiu pela primeira vez ao mundo aquelas misteriosas entidades.**

Como podemos perceber, a matemática Hindu deu grandes contribuições ao desenvolvimento da solução de equações, especialmente as de 2º grau, porém sem o reconhecimento de soluções possíveis para expressões com raízes quadradas negativas.

Na matemática Árabe tivemos, principalmente o desenvolvimento das equações de 3º grau, pois em decorrência das conquistas de 622 d.C. ao século VIII, "os árabes conheceram a matemática dos babilônicos, dos gregos e dos hindus, e a traduziram, elaboraram e desenvolveram." (BEKKEN, 1994, p. 59).

Aproximadamente em 825, Muhammed bem Musa de Khwarizmi, chamado também de Al-Khwarizmi, escreveu a obra intitulada "Aljabr w'al muqabalah", que pode ser traduzida como "completar e reduzir", que são operações muito importantes na resolução de equações. (BEKKEN, 1994)

Os primeiros tratamentos sistemáticos relacionados a equações do 2º grau com coeficientes positivos foram dados por Al-Khwarizmi e Abu Kamil mesmo tendo surgido casos semelhantes a esses na forma algébrica em obras de Diofanto 650 anos antes (aproximadamente 250 d.C.). Apesar de Al-Khwarizmi ter contribuído para divulgação do sistema hinud, inclusive com os métodos para cálculos com números negativos, ele se dedicou a apenas os casos em que os coeficientes e soluções eram apenas positivo. (BEKKEN, 1994)

Um aspecto importante ressaltado por Bekken (1994, p. 60), é que "a ciência dos árabes, em seu ponto de partida, deu muita ênfase ao aspecto prático" impossibilitando, assim, o desenvolvimento da solução de equações de 2º grau que culminavam em discriminante negativo.

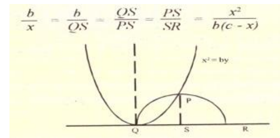
Mesmo sendo os árabes, os principais mediadores da matemática babilônica, grega e hindu, chegaram ao topo da álgebra com a classificação e a solução geométrica de equações do 3º grau de Omar Khayyam(1079). (BEKKEN, 1994, p. 64). Entretanto, "nenhuma fórmula algébrica geral foi encontrada e as equações do 3º grau permaneceram ainda por alguns séculos como um desafio aberto aos matemáticos. (GARBI, 2010, p. 27).

Conforme exemplo da técnica utilizada por Khayyan:

> Vemos que $x^3 + b^2x = cb^2$. A parábola $x^2 = by$ possui $QR = c$ ao longo da perpendicular ao eixo. O círculo médio com QR como diâmetro corta a parábola em

P, e a perpendicular a partir de P encontra QR em S. Então $x = QS$ resolve nosso problema porque:

$$\frac{b}{x} = \frac{b}{QS} = \frac{QS}{PS} = \frac{PS}{SR} = \frac{x^2}{b(c-x)}$$



(BEKKEN, 1994, p. 64)

Como observa Bekken (1994, p. 64), “uma investigação sistemática de equações do 3º grau com a ajuda de seções cônicas é algo novo em relação à geometria grega”, embora Menaechmo (aproximadamente 350 A.C.) tenha tido ideia semelhante ao duplicar o cubo, ou seja, $x^3 = 2a^3$, cortando a parábola $ay = x^2$ pela hipérbole $xy = 2a^2$. Omar Khayyan se dedicou ao estudo sistemático de equações de 1º, 2º e 3º graus, dais quais boa parte foram dedicados a equações do 3º grau onde afirma que:

> um grau acima de 3 não pode aparecer para quantidades verdadeiras. As de terceiro grau que não podem ser reduzidas, têm que ser resolvidas com a ajuda de seções cônicas, já que sua resolução aritmética não é conhecida. Talvez alguém depois de nós possa averiguar isso. (BEKKEN, 1994, p. 64).

Portanto, o pensamento geométrico impossibilitou a matemática árabe de avançar em equações de 2º e 3º graus com raízes negativas.

Com o renascimento na Europa, coube aos italianos levar a frente o legado deixado pelos Árabes e Hindus no campo da álgebra.

Na Europa, coube a Leonardo Fibonacci de Pisa (1175 – 1250), através de sua obra intitulada *Liber Abaci* de 1202, a contribuição para difundir a álgebra hindu-árabe, sendo o último capítulo de seu livro, a descrição dos seis tipos de equações do 2º grau e referências diretas ao livro II dos Elementos de Euclides. (BEKKEN, 1994). Em um desafio proposto pelo Imperador Frederico II para testar suas habilidades, Leonardo foi desafiado a resolver a equação do 3º grau $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ onde provou que o problema não podia ser resolvido com régua e compasso (únicos instrumentos permitidos por Euclides), porém apresentou uma solução numérica aproximada correta até a 9ª casa decimal, 1,3688081075.(GARBI, 2010, p. 30).

Outro grande matemático italiano depois de Leonardo foi o franciscano (frei) Lucca Paccioli (1445 – 1514), um frade, que em sua publicação denominada *Summa de arithmética, geométrica, proportoni et proportionalita*, publicada em 1494(um dos primeiros livros impressos de matemática), inferiu que a equação $x^2 + c = bx$ teria solução se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$, **porém "cometeu vários erros em seus trabalhos e um deles foi declarar que a solução das equações de 3º grau era tão impossível quanto a quadratura do círculo.** (GARBI, 2010, p. 32)

Na Alemanha, Michael Stifel (1487-1567) publicou em 1544 a obra intitulada *Arithmetica integra*, que segundo Boyer (1983, p. 206) é "considerada a mais importante álgebra alemã do século dezesseis". Isso se deu pelo tratamento dado aos números negativos, radicais e potências, porém ele recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação. Stifel era profundo conhecedor das propriedades de números negativos ao qual chamada de *"numeriabsurdi"*.

2.3 Antecedendo os Números Complexos: resolvendo equações do 3º Grau

Em 1515, Scipione Del Ferro (1465-1526), um professor de matemática da universidade de Bolonha, deu grande contribuição para o surgimento dos Números Complexos ao resolver algebricamente a cúbica $x^3 + px = q$, com p e q positivos baseando-se em fontes árabes ao tempo em que revelou suas descobertas ao seu aluno Antonio Maria Fior contrariando, assim, a proposição de Luca Paccioli em relação à impossibilidade de resolução de equações do 3º grau. Um detalhe importante é que Del Ferro morreu sem publicar sua obra, motivo pelo qual Fior ganhou notoriedade valendo-se da descoberta. (EVES, 1995).

Por volta de 1535, Nicollo Fontana, conhecido como Tartaglia, anunciou a descoberta de uma solução algébrica para a equação de 3º grau do tipo $x^3 + px^2 = n$, fato que causou desconfiança de Fior acerca da veracidade da descoberta, oportunidade em que fez um desafio para uma disputa pública a Tartaglia envolvendo equações do 3º grau. Nessa caso, Tartaglia aceitou o desafio mesmo sabendo que Fior se valeria de um método descoberto pelo seu já falecido professor Del Ferro(EVES, 1995).

Sobre esse episódio, relata o próprio Tartaglia: ***"mobilizei todo o entusiasmo, aplicação e a arte que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535".(***GARBI. 2010, p. 37)

Dessa forma, com bastante empenho, ele consegue resolver a equação cúbica desprovida do termo quadrático poucos dias antes do desafio e como Fior desconhecia, Tartaglia triunfou. Fato que também o trouxe bastante notoriedade. (EVES, 1995)

Nesse mesmo período, Geronimo Cardano, estava escrevendo um livro intitulado *Pratica Arithmeticae Generalis,* que abordava Álgebra, Aritmética e Geometria. Baseado na afirmação de Luca Paccioli sobre a impossibilidade de solução geral para equações cúbicas, o mesmo nem pretendia abordar o assunto em sua obra. Entretanto, ao saber da descoberta da solução por Tartaglia resolveu pedir-lhe que revelasse para que pudesse publicar em seu livro. (GARBI, 2010).

Por não concordar com a proposta, Cardano o acusou de "mesquinho, egoísta e não interessado em colaborar com o desenvolvimento da humanidade". (GARBI, 2010, p. 37).

Algum tempo depois, Cardano, "um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão" (EVES. 1995, p. 303), implorou a Tartaglia, sob juramentos de segredo, a revelação da cobiçada fórmula e o conseguiu recebendo-as através de versos.

Sobre os motivos para a revelação do segredo, o próprio Tartaglia relata que *"*decidiu confiar em Cardano, pois, se não acreditasse em um homem que fazia tais juramentos sobre o Evangelho, ele mesmo deveria ser considerado uma pessoa perversa e desumana*"*.(GARBI, 2010, p. 37).

Quebrando o juramento feito, Cardano fez publicar em sua obra intitulada Ars Magna, em 1545, a fórmula revelada por Tartaglia. Apesar dos protestos de Tartaglia em relação à autoria, Cardano acrescenta que "independentemente e trinta anos antes, Scipione del Ferro chegara aos mesmos resultados". (GARBI, 2010, p. 37).

Esses protestos também foram rebatidos por Ludovico Ferrari, um dos mais brilhantes discípulos de Cardano, argumentando que seu mestre teria recebido informações de Del Ferro através de uma terceira pessoa, ao tempo em que acusava Tartaglia de plágio da mesma fonte. Conforme Eves (1995, p. 303) destaca, "Tartaglia, com certeza, deu-se por feliz de sair vivo".

O que não se pode negar, independente de quem tenha descoberto a fórmula, é o legado deixado para o progresso da matemática, oportunidade em que se fará um breve relato dessa importante obra.

A publicação do Ars Magna, por Gerônimo Cardano em 1545 foi um passo fundamental para o desenvolvimento da resolução de equações do 3º grau e consequentemente o impulso para o surgimento dos Números Complexo, especialmente pela abordagem em resolução de equações cúbicas e quárticas.

Essa foi considerada um progresso tão notável que o período moderno da matemática passou a ser considerado a partir desta data.

Sobre a motivação para escrever o "Ars Magna" cardano diz:

> Em nossos dias, Scipione del Ferro de Bolonha resolveu a equação $x^3 + px = q$, uma façanha elegante e admirável ...
> Além disso, meu amigo Niccoló Tartaglia resolveu a mesma e outras ... Antes me haviam enganado as palavras de Luca Pacioli...(BEKKEN, 1994, p. 71).

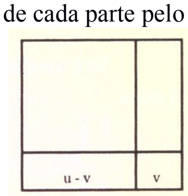
A referência à Paccioli se dá pela afirmação, em 1494, de que a solução de uma equação cúbica era tão impossível quanto a quadratura do círculo bem como de que equações do tipo $x^4 + bx^2 = ax$ e $x^4 + ax = bx^2$ são impossíveis de resolver algebricamente. Sobre equações de graus superiores, Cardano relata a impossibilidade de resolução por meio de uma análise geométrica, afirmando que:

> Como "positio" se refere a partes de linha, "quadratum" a áreas, e "cubum" a volumes, seria uma estupidez nossa seguir mais adiante. A natureza não nos permite... Entretanto, queremos fazê-lo por curiosidade, mas sem fornecer justificativas geométricas.(BEKKEN, 1994, p. 71).

Outro ponto importante em sua obra é o reconhecimento de números positivos e negativos na solução de equações, na perspectiva de que seria necessário tratar de vários casos se utilizasse o método de Al-Khwarizmi de aceitação apenas de coeficientes positivos. (BEKKEN, 1994)

Outro ponto importante em sua obra é a influência de Euclides, demonstrando a identidade algébrica $(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$ da seguinte forma:

> Se uma quantidade se divide em duas, o cubo do todo será igual aos cubos das duas partes mais três vezes o produto de cada parte pelo quadrado da outra parte.



(BEKKEN, 1994, p. 73).

O que seria equivalente, nos dias atuais, ao cubo do primeiro, mais três vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o quadrado do segundo pelo primeiro mais o cubo do segundo.

Sobre a polêmica com Tartaglia em relação a descoberta da fórmula, no capítulo relacionado *"sobre o cubo mais a primeira potência igual a números",* Cardano diz:

> Scipione del Ferro descobriu a regra para este caso há mais de 30 anos (portanto antes de 1515), e descreveu a Antonio Fior de Veneza, cujo desafio com Nicolló Tartaglia de Brescia deu ao último um motivo para descobri-la. Contou-me a regra sem nenhuma explicação. Estive buscando a demonstração de diversas formas, mas

> revelou-me muito difícil para mim fazê-lo. Minha versão é a seguinte: (BEKKEN, 1994, p. 71).

No período citado não havia notação para tratar de equações, onde não se conseguia expressar resumidamente métodos de resposta como nos tempos atuais. Dessa maneira, apesar das divergências relacionadas a autoria, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo através em versos, traduzidos para o Português, os versos abaixo, localizados na edição de 1554 dos *Quesiti*, página 120, comunicam que:

> 1. Quando o cubo com a coisa em apreço
> Se igualam a qualquer número discreto
> Acha dois outros diferentes nisso
> 2. Depois terás isto por consenso
> Que seu produto será igual
> Ao cubo do terço da coisa certa
> 3. Depois, o resíduo geral
> Das raízes cúbicas subtraídas
> Será tua coisa principal
> 4. Na segunda destas operações,
> Quando o cubo estiver sozinho
> Observará estas outras reduções
> 5. Do número fará dois, de tal forma
> Que um e outro produzam exatamente
> O cubo da terça parte da coisa
> 6. Depois, por um preceito comum
> Toma o lado dos cubos juntos
> E tal soma será teu conceito
> 7. Depois, a terceira destas nossas contas
> Se resolve como a segunda, se observas bem
> Que suas naturezas são quase idênticas
> 8. Isto eu achei, e não com passo tardo
> No mil quinhentos e trinta e quatro
> Com fundamentos bem firmes e rigorosos
> Na cidade cingida pelo mar. (ROSA, 1998, p. 45)

Analisando os versos citados, com base nos textos de Rosa(1998) e em linguagem atual, Cardano e Tartaglia dispunham de três casos de equação de terceiro grau, pois os mesmos não usavam coeficientes negativos, sendo esses os casos:

Caso 1: $x^3 + ax = b$, em que pode-se relacionar como o primeiro verso: Quando o cubo com a coisa em apreço se igualam a qualquer número discreto.

Caso 2: $x^3 = ax + b$, observado no quarto verso: Quando o cubo estiver sozinho.

Caso 3: $x^3 + b = ax$, citado no sétimo verso**:** Depois, a terceira destas nossas contas se resolve como a segunda, se observas bem que suas naturezas são quase idênticas.

A seguir analisa-se o primeiro caso, para $x^3 + ax = b$

No primeiro verso, o número refere-se ao termo independente representado por b, cuja diferença entre duas variáveis $U - V$ seja igual a b, ou seja, $U - V = b$, conforme o primeiro verso: "acha dois outros diferentes nisso".

O segundo verso, “que seu produto será igual ao cubo do terço da coisa certa” pode ser representado pela expressão:

$$U.V = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

O terceiro verso, “depois, o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal” denota que a solução terá o tipo:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

Faz-se aqui o percurso matemático usado por Tartaglia para chegar aos versos enviados a Cardano.

Considerando a equação do terceiro grau $x^3 + ax = b$ bem como a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

Colocando em evidencia uv, temos:

$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + (u^3 - v^3)$.

Ou seja,

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$$

Substituindo u e v de modo que

$uv = \frac{a}{3}$e$u^3 - v^3 = b$,

Tem-se a expressão:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

Assim ao compararmos a expressão obtida com a expressão inicial $x^3 + ax = b$, inferimos que $x = u - v$ será uma solução da equação, portanto a resolução da equação proposta deverá ser feita através da resolução do sistema:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{a}{3} \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

Pois ao achar u e v tem-se o valor de x, pois $x = u - v$.

Para resolver o sistema, se faz necessário elevarmos os termos da primeira equação ao cubo, temos, portanto:

$$\begin{cases} u^3v^3 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

Considerando $u^3 = Uev^3 =$ V, teremos:

$$\begin{cases} U.V = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ U - V = b \end{cases}$$

Assim, teremos $U e - V$ como raízes da equação:

$$X^2 - bX + \left(\frac{-a}{3}\right)^3 = 0$$

Cujas raízes são:

$$x = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4\left(\frac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Dessa forma teremos como raízes da equação U e a outra $-V$, como $u = \sqrt[3]{U}, v = \sqrt[3]{V}$ e $x = u - v$, chega-se à solução apresentada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

Por fim, utilizando a substituição de UeV pelos seus respectivos valores, chega-se à fórmula de Cardano/Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Vale ressaltar que essa fórmula é utilizada para resolver equações do terceiro grau do tipo $x^3 + ax = b$,ao se tratar equações de terceiro grau com todos os termos do tipo

$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, deve-se substituir x por $y - \frac{a_1}{3}$.

Conforme substituição, temos que:

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0$$

Desenvolvendo as expressões, temos:

$$y^3 - 3y^2\frac{a_1}{3} + 3y\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1y^2 - 2y\frac{{a_1}^2}{3} + \frac{{a_1}^3}{3^2} + a_2y - a_1\frac{a_2}{3} + a_3 = 0$$

Eliminando os termos, $-3y^2\frac{a_1}{3}$e a_1y^2, temos que:

$$y^3 + 3\left[\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - 2y\frac{{a_1}^2}{3} + 3a_2\right]y = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{{a_1}^3}{3^2} - a_3 = 0$$

Sendo esta uma equação análoga à $y^3 + ay = b$

Permitindo-se a utilização da fórmula de Tartaglia/Cardano para qualquer equação cúbica.

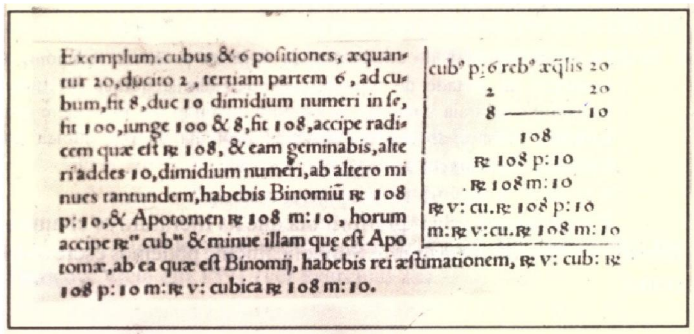
Portanto, a regra apresentada por Cardano em relação ás equações do tipo $x^3 + px = q$ se encontra da seguinte forma:

> Eleve ao cubo $\frac{1}{3}$ do coeficiente da primeira potência. Adicione o quadrado da metade do número. Tome a raiz quadrada do todo. Adicione e subtraia a metade do número,

> obtendo um binômio e seu apótema. Subtraindo a raiz cúbica do apótema da raiz cúbica do binômio, você obtém a incógnita procurada. (BEKKEN, 1994, p. 73).

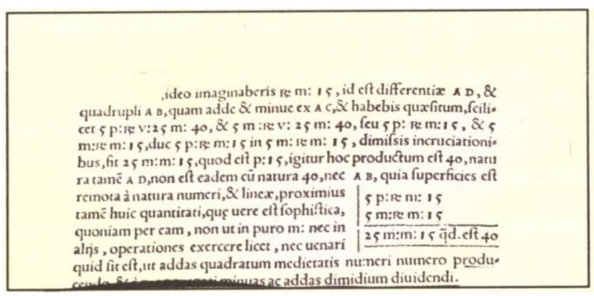
Nesse caso Cardano oferece explicação a través do exemplo $x^3 + 6x = 20$.

Figura 3: Regra de Cardano



Fonte: (BEKKEN, 1994, p. 74)

Apesar de não ter mencionado em "Ars Magna" os casos irredutíveis, e baseado no fac-símile de Struik(1992), Cardano menciona números complexos, dizendo que:



> Quando se diz: "Divida 10 em duas partes de modo que o produto seja 40", fica claro que isto é impossível. Entretanto, vamos proceder da maneira seguinte – Dividimos 10 em duas partes iguais que se elevam ao quadrado, dando 25. Subtraímos disto 40 e obtemos -15. A raiz quadrada disto soma-se e subtrai-se 5, obtendo $5 + \sqrt{-15}$e $5 - \sqrt{-15}$.(BEKKEN, 1994, p. 76)

Adiante apresenta uma justificativa, na qual diz:

> Esqueça a tortura mental que significa o seguinte, e multiplique $5 + \sqrt{-15}$por $5 - \sqrt{-15}$, dando $25 - (-15) = 40$ ... Deste modo desenvolvemos uma aritmética que é tão refinada que se torna inútil. (BEKKEN, 1994, p.76)

A exemplo de problemas que recaíam em Números Complexos, temos na obra de Cardano:

> (a) Divida 6 em duas partes cujo produto é 24.
> (b) Encontre três números proporcionais de modo que quando se subrai do primeiro a sua raiz quadrada, obtém-se o segundo número, e da mesma maneira se obtém o terceiro número.
> (BEKKEN, 1994, p.78)

Apesar das divergências quanto à autoria da fórmula geral para equações de 3º grau, Cardano deixou em sua obra, alguns pontos importantes a refletir acerca dos Números Complexos:

> - equações do quarto grau, seria tolice – a natureza não permite
> - negativos, fictícios – nenhuma quantidade é menor do que nada
> - imaginários, sutilezas aritméticas sofisticadas – nenhum quadrado pode cobrir menos do que nada. (BEKKEN, 1994, p.88)

È importante enfatizar que a relação entre números e geometria permaneceu complicada por mais de 300 anos depois de Cardano até a publicação da obra *Livre Premier* por René Descartes. (BEKKEN, 1994). Descartes considerava solução de equações com raízes negativas de "soluções falsas", conforme pode-se observar em seu texto referente a redução de equações:

> LIVRE TROISIESME
>
> Comme cete derniere
>
> $x^4 - 4x^3 - 1_9 xx + {}_{10}6x - 20 \propto 0$
>
> peut bien eftre diufée, par x — 2, & par x — 3, & par x — 4. & par x + 5 ; mais non point par x+ ou — aaucune autre quantité, cequi monftre qu'elle ne peur auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

> Toda equação pode ter raízes (valores da grandeza desconhecida) distintas quantas forem as dimensões da grandeza desconhecida na equação na equação.
> Muitas vezes aconteceporém que alguma das raízes são falsas ou menos do que nada. (BEKKEN, 1994, p.92).

As últimas palavras de "Ars Magna" foram escritas da seguinte forma:

> ESCRITO EM CINCO ANOS,
> POSSA DURAR MILÊNIOS!
> (BEKKEN, 1994, p.79).

Em relação à descoberta feita por Tartaglia e publicada por Cardano, Eves(1995, p. 302) contribuiu afirmando que "provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI, foi a descoberta pelos matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas" mostrando, assim , a relevância da descoberta para o desenvolvimento posterior dos Números Complexos.

Em resumo, pode-se inferir que houve ausência de solução explícita em equações, nas obras de Euclides ao se deparar com números irracionais, a exemplo de $x^2 = 2$, a exceção de Platão e Aristóteles. Quanto aos hindus, árabes e italianos não havia dificuldade de trabalhar com números irracionais, porém não aceitavam raízes de números negativos (Números Complexos). Os hindus, ao se depararem com raízes negativas na solução de equações, como as de 2º grau, consideravam "soluções falsas". (BEKKEN, 1994, p. 69).

Apesar do tratamento geométrico de equações do 3º grau por Omar Khayyam (1079), o tratamento algébrico só foi dado pelos italianos no Século XVI, pois esses "problemas de negativos e complexos não eram levados a sério". (BEKKEN, 1994)

As equações de 3º grau dos babilônicos, Menaechmo, de Bhaskara, de Omar Khayyam, Arquimedes, Diofanto, Al-Khwarizmi e Fibonnacci tratam apenas de casos particulares, ficando a cargo de futuros matemáticos desvendarem um método geral para solução das mesmas, o que culminaria na descoberta de um novo conjunto numérico que fora desenvolvido pelos italianos, vale ressaltar que o tratamento geométrico de equações do 3º grau não era conhecido na Itália no século XVI, porém os escritos de Al-Khwarizmi e de Abu Kamil eram conhecidos e estudados e foram a base da inspiração da Ars Magna de Cardano.(BEKKEN, 1994)

2.4 O Surgimento dos Números Complexos

O surgimento dos conjuntos numéricos foi precedido de necessidades advindas da insuficiência numérica para os cálculos que foram se desenvolvendo, com o conjunto dos Números Complexos não foi diferente, o desenvolvimento de soluções de equações de 2º e 3º graus em diversas civilizações e diversos continentes foi preponderante para o seu surgimento, assim como a aceitação de Cardano para calcular com expressões como $5+\sqrt{-15} e 5-\sqrt{-15}$, dessa maneira os complexos apareceram em cálculos intermediários em problemas cuja resposta era um número real.(BEKKEN, 1994)

Leibniz também trabalhou com expressões do mesmo tipo que resultavam em números reais tais como $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tanto Stevin (1582) quanto Bombelli trabalharam com expressões do mesmo tipo, porém Stevin observou que "este território ainda não é bem conhecido". (BEKKEN, 1994, p.95).

Dessa maneira, os Números Complexos começaram a se constituir a partir dos estudos do italiano Rafael Bombelli (1526-1576),pois este tinha profunda identificação e fascínio pelo *Ars Magna* de Cardano. Entretanto, não considerava clara a forma como Cardano tratava o conteúdo. Dessa forma, Bombelli, em 1572, publicou em Veneza a obra *I'Algebra*, com intuito de que um principiante pudesse compreender melhor sua linguagem. (ROSA, 1998).

Bombelli tratou em um dos capítulos, a resolução de equações de 3º e 4º graus, aplicando a fórmula de Cardano/Tartaglia na equação $x^3 = 15x + 4$ cujo processo de resolução percorreu os seguintes passos[3]:

Seguindo o método geral proposto por Cardano/Tartaglia, temos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Sendo a equação $x^3 = 15x + 4$, temos que a=15 e b=4, logo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{15^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{15^3}{27}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \Rightarrow$$

Nesse caso, como o discriminante é menor que zero, pois $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, o método geral proposto por Cardano/Tartaglia sempre recairá em um número negativo. Esse valor, antes chamado de "quantidade sofisticadas" hoje é conhecido como "números imaginários".

Bombelli, era sabedor de que a equação possuía três raízes reais: $4, -2 + \sqrt{3}e - 2 - \sqrt{3}$, ou seja, pela primeira vez se deparou com um equação em que a solução era conhecida, porém os cálculos recaíam em raízes quadradas de números negativos, o que o motivou a compreender e estudar melhor esse campo até então desconhecido e ignorado.

Dessa maneira, Bombelli admite inicialmente que haja uma expressão na forma $a + \sqrt{-b}$ que seja raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ e que $a — b$ seja raiz cúbica de $2 — 121$, ou seja, teríamos a expressão $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e sendo o valor 4 conhecido anteriormente como raíz da equação, temos que: $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$, ou seja, $a = 2$, pois os radicais se anulam. De posse desse resultado, substituindo na o valor de $a = 2$ na expressão $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}\cdot$, temos que:

$$\left(2 + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121} \Rightarrow$$

[3] Para esse processo utilizamos a obra de Mário Servelli Rosa, dissertação de mestrado apresentada à PUC-SP em 1998.

$$8 + 12\sqrt{-b} - 6b - b\sqrt{-b} = 2 + \sqrt{-121} \Rightarrow$$
$$8 + 12\sqrt{b}\sqrt{-1} - 6b - b\sqrt{b}\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

Gerando assim, um sistema de equações: $\begin{cases} 8 - 6b = 2 \\ 12\sqrt{b} - b\sqrt{b} = 11 \end{cases}$, com b = 1. Assim, Bombelli obtém que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$. Analogicamente $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$ e$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ é uma solução da equação dada. (SERVELLI, 1998)

Segundo Servelli (1998, p. 51), Bombelli publica em um trecho da obra *L'Algebra*, na página 133, mencionando:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.
> ...a princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova...
> Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas[i.é. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e para menos.

Júnior (2009, p. 25) também afirma:

> Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do "cubo igual a tanto e número", quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se se demonstrará, (...)porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, pelo que lhe chamarei de *pìu di menu*, quando se adicionar *e meno di meno* quando se subtrair. (...) E esta operação é necessária (...) que poderá parecer a muitos mais **sofisticada** que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração em linha (...) mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos".

Bombelli então, apresenta as regras de multiplicação, sendo a expressão *più di menu* utilizada para se referir ao que conhecemos em notação atual como +i e *meno di meno* para –i, conforme o quadro 1contendo simbologia atual:

Quadro 06: Regras de Multiplicação

Expressão	**Notação atual**
Più via più di meno, fà più di meno	+.(+i) = + i
Meno via più meno fa meno di meno	-.(+i) = - i
Più via meno de meno, fà meno di meno	+.(-i) = -i
Meno via meno di meno, fà più di meno	-.(-i) = +i
Più di meno via più di meno, fà meno	(+i).(+i) = -

Più di meno via meno di meno, fà più	(-i).(+i) = +
Meno di meno via più di meno, fá più	(+i).(-i) = +
Meno di meno via meno di meno, fà meno	(-i).(-i) = -

Fonte: (ROSA. 1998 p. 51)

Dessa maneira para o sinal + era usado p (*più*), para o sinal de menos era utilizado m (*minus*); para raiz quadrada à notação era R (*radix*) e R^3 para representação das cúbicas. Além de não haver parênteses que era utilização sublinhação para representar expressões com radicais.

Para demonstração das dificuldades encontradas por Bombelli acerca de uma notação mais simplificada, segue o quadro abaixo:

Quadro 07: Evolução da Notação Algébrica

Modern notation	Bombelli printed	Bombelli written
5x	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R^3⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Fonte: Disponível em: http://wwwgroups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Bombelli.html. Acesso em 20 de outubro de 2015.

Após esse engenhoso cálculo, Bombelli demonstrou a importância dos números imaginários, especialmente para proposição de desenvolvimento futuro do conjunto dos Números Complexos. Entretanto não houve uma contribuição mais efetiva para a resolução de equações de 3º grau, pois nessas, ele necessitaria antecipadamente o valor de uma das raízes da equação, que nesse caso já estaria resolvida, assim não precisaria de fórmula geral para resolução. (ROSA, 1998, p. 52)

As contribuições para construção conceitual e de representação dos Números Complexos foram dadas por inúmeros matemáticos em diferentes épocas, sendo importante ressaltar alguns fatos que possibilitaram o desenvolvimento desse conjunto, a saber dos progressos de notação com a introdução do símbolo $\sqrt{-1}$ por Albert Girard(1590 – 1633) em *Invention nouvelle em I'algèbre,* a utilização do símbolo i como representação de $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, a utilização dos termos real e imaginário pela primeira vez em 1637 por Renè Descartes, a utilização do conjugado $a \pm bi$ e do módulo $|a \pm bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ por Aug-Çouis Cauchy em 1821,a utilização da expressão *Números Complexos,* em 1832, por Carl Friederich Gauss bem como a tentativa de John Wallis (1616 – 1703) de dar significado concreto, pela primeira vez, ao Números Complexos através de uma interpretação geométrica, mostrando a possibilidade de existência de quantidades imaginárias e fazendo comparação com a existência de quantidades negativas. (ROSA, 1998).

John Wallis, em 1637, contribui fortemente para a aceitação dos Números Complexos com a seguinte discussão:

> Estas quantidades imaginárias, como frequentemente são chamadas, provêm de tomar a raiz quadrada de números negativos, algo que se diz ser impossível. Assim é também se nos limitarmos rigidamente ao que se propõe. Porque não é possível que um número negativo ou um número positivo, multiplicado por si mesmo, possa dar, por exemplo -4.
> Mas também é impossível que algum número possa ser negativo.
> Nenhuma quantidade pode ser menos que nada, e nenhum número pode ser menos que nada.
> No entanto, números negativos não são nem absurdos nem inúteis, quando os entendemos bem. Como por exemplo ... transladamos -3 jardas, isto é, caminhamos para trás 3 jardas.
> Pois bem, quando aceitamos seguimentos negativos, temos que admitir também áreas negativas. Como por exemplo: suponha que em um lugar ganhamos 30 acres de terra do mar, mas perdemos 20 acres em outro lugar. Então ganhamos 10 acres no total. Se agora porém em um terceiro lugar perdemos mais 20 acres e perguntamos: quanto ganhamos? –A resposta será -10 acres = - 1600 perches quadrados ...
> Se isto está na forma de um quadrado de um lado, não deve este quadrado ter um lado? ... Qual é o lado? Sim, terá que ser $\sqrt{-1600} = 10\sqrt{-16} = 40\sqrt{-1}$ (BEKKEN, 1994, p.96-97).

Os números negativos e imaginários tornaram-se úteis a álgebra. Na Europa, assim como Bhaskara, negativa passaram a ser representados, por Albert Girar (1629), como opostos em direção aos opostos sobre uma reta. (BEKKEN, 1994)

Em 1800, surgiu a primeira aplicação real de números imaginários à geometria plana, num tratado de Caspar Wessel (1745 – 1818), um agrimensor norueguês. O mesmo foi intitulado "Sobre a denominação analítica das direções" e apresentado à Academia Dinamarquesa de Ciências contendo uma representação simples e completa dos Números

Complexos .(BEKKEN, 1994, p. 97-99).Como sua obra só foi publicada em 1897 em francês, seu trabalho permaneceu desconhecido, sendo descoberto posteriormente por muitos matemáticos, ente eles Argand(1806) e Gauss(1831).(BEKKEN, 1994)

Em reconhecimento ao seu trabalho, Sophus Lie, em 1895, diz:

> Se seu trabalho tivesse sido conhecido antes, Caspar Wessel teria um nome tão grande dentro da matemática como teve seu irmão Johan Herman Wessel como poeta, ou seu tio Peter Wessel Tordesnkkjold como guerreiro. (BEKKEN, 1994, 101).

Grandes contribuições ao desenvolvimento dos Números Complexos foram dadas por Carl-Friedrich Gauss(1777-1855), que em seu doutorado, aos 22 anos, forneceu a primeira prova totalmente completa para: "Qualquer polinômio de grau n possui n raízes reais ou complexas*."* D'Alembert, Euler e Lagrange haviam tentado demonstrá-lo.

Importante enfatizar que Peter Rothe(1608) foi provavelmente o primeiro a escrever de forma semelhante a Gauss, afirmado que: *"*um polinômio de grau n possui n raízes*"* bem como Albert Girard(1629), que encontrou 4 raízes para a equação do $x^4 = 4x - 3$, sendo essas: $1{,}1, -1 + \sqrt{-2} e -1 - \sqrt{-2}$ pois levava em conta raízes complexas e também a multiplicidade de raízes.(BEKKEN, 1994)

Vale ressaltar que Bhaskara contava duas raízes para equações do 2º grau, Cardano contou raízes com multiplicidade, sendo respectivamente 3 e 4 para equações de 3º e 4º graus.

Viu-se, portanto, que problemas de resolução de equações conduziram à extensões dos conjuntos numéricos, dos naturais aos complexos, e ao perguntarmo-nos se isso continuará, o Teorema Fundamental do Cálculo diz que não, pois o mesmo diz que "qualquer polinômio possui pelo menos uma raiz complexa".

Dessa maneira o sistema de números está completo e suficientemente rico para obtermos todas as soluções das equações polinomiais, portanto o conjunto dos Números Complexos é algebricamente completo. (BEKKEN, 1994) Foram necessários aproximadamente 3.000 anos para ir de equações do 2º grau às equações de 3º grau e consequentemente ao surgimento dos Números Complexos.

3 UNIDADE DIDÁTICA: CONTEXTO E CONCEPÇÕES ACERCA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O ensino de matemática requer, para os padrões de ensino moderno, subsídios que permitam uma melhor exploração dos conteúdos, especialmente aqueles que tem um nível de abstração maior, como é o exemplo dos números complexos, objeto desta pesquisa.

Dessa forma, mostra-se importante, um relato da exposição do conteúdo a partir dos livros didáticos adotados nas escolas de ensino médio do município sede da pesquisa, por ser, na maioria das vezes, o instrumento mais utilizado pelo professor como subsidio para o ensino de matemática. Essas observações permitirão uma melhor compreensão do contexto de ensino dos números complexos a partir do livro didático, mostrando de que forma se expõe o conteúdo, interferindo diretamente nos sujeitos da pesquisa e na abordagem realizada pelo professor que normalmente encontra no livro a inspiração para desenvolvimento do currículo a ser ensinado.

Apresentaremos neste capítulo um breve relato acerca da definição, concepções e aplicações do conjunto dos Números Complexos a partir dos seguintes referenciais: (LEONARDO, 2013); (PAIVA, 2009). Vale ressaltar que as duas referências citadas são as únicas escolhidas e utilizadas nas escolas de ensino médio do município de Canindé, cidade sede da pesquisa, sendo o último utilizado na escola a qual a pesquisa fora realizada. Será feito um destaque acerca do ensino dos Números Complexos à luz dos PNEM(1999), OCENM(2006) e as DCNEB(2013).

Será realizado também uma breve análise dos impactos da implantação do Novo ENEM(2009) no ensino de Números Complexos.

3.1 Números Complexos: concepções a partir do livro didático adotado pela escola pública estadual de ensino médio do município de Canindé.

3.1.1 – Livro 1 - Matemática Paiva

O livro escolhido para o breve relato, Matemática Paiva, escrito por Manoel Paiva, datado de 2009, 1ª edição, está organizando em três volumes. Sendo o volume 1 voltado para os conteúdos pertencentes ao 1º ano do ensino médio, o volume 2 para os conteúdos relacionado ao 2º ano e o volume 3 para os conteúdos pertencentes ao 3º ano. Para a pesquisa, foi utilizado apenas o volume 3, composto de 200 páginas e um apêndice constituído de 13 tópicos com orientações para o professor.

O volume 3 é estruturado em 9 capítulos sendo esses divididos em tópicos, o conteúdo de números complexos está contido no 7º e é composto de 8 tópicos e exercícios complementares em relação ao tema, perfazendo um total de 21 páginas. Cada livro e apêndice é dividido em capítulos, e estes em parágrafo. A obra completa tem 396 páginas.

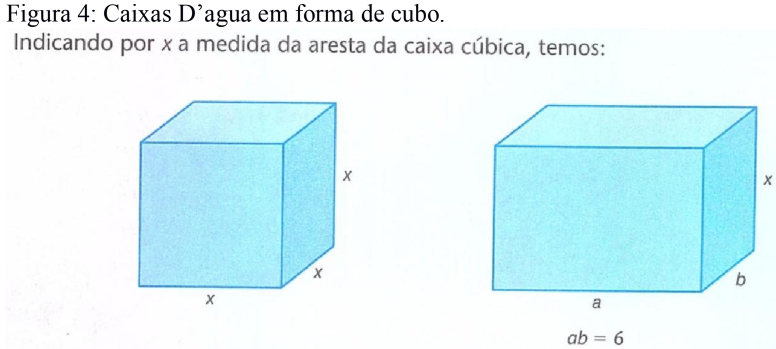
No preâmbulo do capítulo, o autor inicia com a seguinte proposição:

> A distância entre o centro da Terra e o da Lua é aproximadamente 384.000 km e a massa da Terra é oitenta vezes a massa da lua.
> Um número complexo pode ser representado por um ponto (x,y) do plano cartesiano. Dessa forma, representando nesse plano as posições da Terra e da Lua pelos pontos (x_T, y_T) e (x_L, y_L), respectivamente, o centro C de massa do sistema Terra-Lua é o número complexo representado pelo ponto (x_C, y_C) tal que $x_C = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L}$ e $y_C = \frac{m_T y_T + m_L y_L}{m_T + m_L}$, em que m_T e m_L representam as massas da Terra e da Lua, respectivamente.
> Calcule a distância entre o centro da Terra e o centro de massa do sistema Terra-Lua. (PAIVA. 2013, p. 123).

Observa-se uma tentativa em introduzir o conteúdo de uma forma contextual, porém a quantidade de fórmula aumenta a dificuldade de compreensão, pois a única conexão feita é de que um número complexo poderá ser representado em um plano cartesiano.

Na introdução, é apresentado um problema com o intuito de possibilitar ao aluno a compreensão da insuficiência dos números reais, com a seguinte proposição:

> Um engenheiro projetou duas caixas-d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de um paralelepípedo reto retângulo com 6m² de área da base. Qual deve ser a medida em metro, da aresta da caixa cúbica?
> Figura 4: Caixas D'agua em forma de cubo.



Fonte: (PAIVA. 2013, p. 124)

Importante esclarecer que a solução proposta no livro faz uma abordagem apresentada por Nicollo Fontana, conhecido como Tartaglia(1500-1557), utilizada por volta de 1535, dessa maneira:

Fazendo a análise dos dados, o valor de x é a raiz da equação $x^3 = 6x - 4$, demonstrando na exposição do livro equivalência com a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Enfatizando o método utilizado por Tartaglia, o mesmo consiste em substituir x por $u - v$, de modo que o produto seja igual à terça parte do coeficiente de x, nesse caso, $uv = \frac{-6}{3} = -2$. Assim:

$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$, fazendo o desenvolvimento dos cálculos, temos:

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

Substituindo $uv = -2$ na primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 (I) \\ v = \dfrac{-2}{u} (II) \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtém-se à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, prosseguindo a proposta de Tartaglia, a resolução pode ser feita com a mudança da variável $u^3 = t$, desse modo obtém-se a equação de 2º grau:

$t^2 + 4t + 8 = 0$

Prosseguindo a resolução em que $\Delta = 4^2 - 4.1.8 = -16$, portanto,

$$t = \frac{-4 \mp \sqrt{-16}}{2}$$

Bem como:

$$u^3 = \frac{-4 \mp \sqrt{-16}}{2}$$

Após o desenvolvimento da solução, é proposta uma reflexão ao aluno, induzindo-o a inferir que a equação não possui raiz real, pois $\sqrt{-16} \notin R$, porém seria um absurdo essa afirmação, haja vista que o número real 2 é raiz da equação, como pode ser observado pela substituição de x por 2:

$$2^3 - 6.2 + 4 = 0.$$

Esse momento da explanação do livro é possivelmente, a parte mais importante para compreensão do aluno em relação à possibilidade de existência de raiz quadrada de número negativo, $\sqrt{-16}$, ou seja, a possibilidade da existência de um número não real. É relatado ainda que Gerônimo Cardano(1501-1576), médico e matemático italiano, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais na resolução de equações cúbicas, após ter recebido de Tartaglia, o método para resolução das mesmas.

Após a introdução do conteúdo, apresenta-se a seguinte definição de unidade imaginária:

> A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em R, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número i, não real, que chamaram de unidade imaginária e que satisfaz a seguinte condição:$i^2 = i.i = -1$ (PAIVA, 2009, p. 125).

É importante ressaltar que todos esses processos são apresentados de uma forma direta, sem discussão, ou resgate histórico que permita ao aluno uma reflexão mais aprofundada do conteúdo, ficando a cargo do professor essa função.

A definição de números complexos na forma algébrica é proposta da seguinte maneira: “Número complexo é todo número da forma $a + bi$, em que a e$b$são números reais e i e a unidade imaginária” (PAIVA, 2009, p. 125).

Após a definição, o livro apresenta de uma forma direta as demais definições: “Forma Algébrica de Número Complexo - A expressão $a + bi$, com $\{a, b\} \subset R$, é chamada forma algébrica do número complexo, em que a é a **parte real** e b é a parte imaginária” (PAIVA, 2009, p. 126); Número Imaginário - É todo número cuja parte imaginária é diferente de zero; Número Imaginário Puro **-** É todo número complexo cuja parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero; Número Real **-** É todo número cuja parte imaginária é zero.

Apesar da forma direta, essa é uma parte importante em que o aluno pode confrontar diretamente as diferenças entre complexos e reais.

O autor apresenta o conceito de igualdade de Números Complexos da seguinte forma:

> Dois números complexos $a + bi$e$c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset R$, são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. Ou seja:
>
> $$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$
>
> (PAIVA, 2009, p. 127).

Observa-se que não há uma discussão específica para cada tópico, ficando apenas a solução de exercícios ao final de cada tópico trabalhado.

Seguindo as definições, o conjugado é apresentado:

> O número complexo $a + bi$ é o conjugado do número complexo $c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset R$, se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias opostas. Ou seja:
> $a + bi$é conjugado de $c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases}$
> (PAIVA, 2009, p. 127).

É colocado como observação a representação do conjugado de z como $\overline{z}$. Alguns exemplos também são expostos.

Encerrando-se a parte conceitual e introdutória, prossegue-se a parte operacional. No que se refere às Operações com Números Complexos: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão, o autor faz a seguinte observação:

> Antes de apresentar as operações elementares com números complexos, é importante ressaltar que elas foram definidas como extensões das operações em R, de modo que fossem conservadas as propriedades dessas operações em R. Para a adição foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto, de modo que: o elemento neutro da adição é o número zero, ou seja, $0 + 0i$;o oposto de um número complexo qualquer $z = a + bi$, com a e b reais, é o número complexo $-z = -a - bi$. Para a multiplicação foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso, de modo que: o elemento neutro da multiplicação é o número 1, ou seja, $1 + 0i$; O inverso de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número complexo indicado por z^{-1} tal que $z^{-1} = \frac{1}{a+bi}$; Foram conservadas também a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição. (PAIVA, 2009, p. 128).

O objetivo do autor é facilitar a compreensão do aluno em relação as propriedades já conhecidas e estudadas pelos mesmos, demostrando que seguem as mesmas regras utilizadas no conjunto dos números reais.

Os princípios acima enunciados resultaram nas definições abaixo relacionadas pelo autor:

Para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c, d são reais, temos:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
- $z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $z_1 : z_2 = z_1 . \frac{1}{z_2} (com z_2 \neq 0)$

A potenciação de números complexos é apresenta de forma conceitual, conforme podemos observar a frente. Seguindo a mesma linha de raciocínio de tópicos anteriores, o autor faz um preâmbulo apresentando às propriedades das potências:

P1. $w^n . w^m = w^{n+m}$
P2. $w^n : w^m = w^{n-m}$
P3. $(w^n)^m = w^{n.m}$
P4. $(wv)^n = w^n v^n$
P5. $\left(\frac{w}{v}\right)^n = \frac{w^n}{v^n}$
(PAIVA, 2009, p. 130)

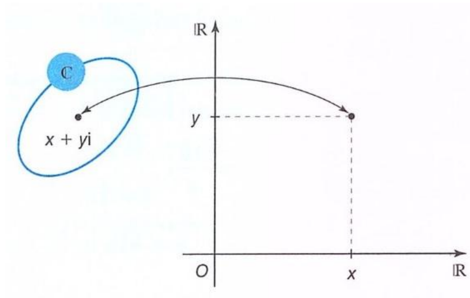
Essa é uma parte interessante para se explorar didaticamente, pois ainda há muita dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos, principalmente por falta de conhecimentos prévios acerca dos temas relacionados a dificuldades de aprendizagem em séries anteriores, dessa forma, o professor poderá fazer uma breve revisão sobre potenciação. Prosseguindo a definição sobre Potencia de i, o autor apresenta:

> Existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:
>
> - $i^0 = 1$
> - $i^1 = i$
> - $i^2 = -1$
> - $i^3 = -i$
>
> (PAIVA, 2009, p. 131)

Após a exposição acima, bem como a demonstração do teorema, conclui-se a parte inicial enfatizando que “para o cálculo da potência de i^n com n interiro e $n \geq 4$, dividimos n por 4, obtendo um resto inteiro r. Temos então, $i^n = i^r$.

A representação Geométrica do Conjunto dos Números Complexos, ou seja, a representação do Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss é definida conforme as definições do plano cartesiano, apresentando a seguinte representação:

> A cada número complexo $z = x + yi$, em que x e y são números reais, vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y). Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo.



Por meio dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto C pelo plano, que é chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss, em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss(1777-1855) e o guarda-livros suíço Jean Robert argand(1768-1822).
No plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é indicado por Re e é chamado de eixo real, e o eixo das ordenadas é indicado por Im e é chamado de eixo imaginário. Cada ponto $p(x, y)$desse plano é a imagem ou afixo do número complexo $x + yi$. (PAIVA. 2013, p. 133).

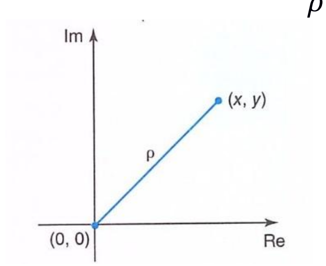
Vale ressaltar que é a segunda menção histórica feita no capítulo, porém de uma maneira ainda muito tímida, pois não aborda maiores detalhes históricos relevantes para o tema.

O que se observa após a definição em todos os tópicos é a colocação imediata de exercícios resolvidos, o que leva ao aluno resolver problemas idênticos, no entanto, a seguinte reflexão é proposta: O aluno resolve as questões por compreender o conteúdo ou por memorização de exercícios idênticos? O objeto da reflexão não se dá pela não aceitação de aprendizagem por memorização, mas tão somente o intuito de promover inquietações acerca do tema.

Adiante, Paiva(2009) define o módulo de um número complexo e enumera as propriedades:

O módulo p de um número complexo $z = x + yi$, com a e b $\{x, y\} \subset R$, é a distancia do ponto (x, y) à origem $(0,0)$ do plano de Argand-Gauss.
O mesmo é indicado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



(PAIVA. 2009, p. 134)

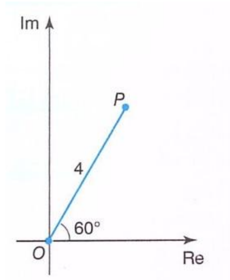
O autor apresenta as Propriedades do Módulo de um Número Complexo:

> Sendo $z, z_1 e z_2$ números complexos quaisquer e n um número inteiro, temos:
> M1. $|z| \geq 0$
> M2. $z.\overline{z} = |z|^2$
> M3. $|z_1.z_2| = |z_1||z_2|$
> M4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z \neq 0$
> M5. $|z^n| = |z|^n$
> (PAIVA. 2013, p. 135)

Observa-se uma pequena revisão relacionada ao módulo, um ponto importante para se prosseguir com entendimento de conhecimentos mais avançados.

As coordenadas polares são apresentadas, da seguinte forma:

> A imagem de um número complexo no plano de Argand-Gauss pode ser determinada também por meio de uma distância e de um ângulo. Por exemplo, existe um único número complexo $z$cuja imagem P dista 4 unidades da origem 0 do sistema de modo que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ forma com o semieixo positivo Ox um ângulo de $60°$, medido no sentido anti-horário, a partir desse semieixo.



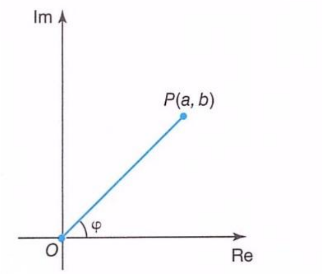
$$\begin{cases} cos60° = \frac{a}{4} \\ sen60° = \frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{a}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a = 2eb = 2\sqrt{3}$$

> Logo a forma algébrica do número z é:
> $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ (PAIVA. 2009, p. 137).

Em boa parte dos tópicos apresentado, o autor faz a definição direta do conteúdo seguido de exemplos de exercícios resolvidos, conforme pode-se observar a apresentação do Argumento de um Número Complexo:

> Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, com a e b reais, consideremos no plano complexo os pontos O$(0,0)$, P(a, b)e o ângulo de medida φ cujos lados são semieixo positivo Ox e a semirreta $\overrightarrow{OP}$, conforme a figura abaixo:



> *A medida* φ, obtida no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo Ox, com $0 \leq \varphi < 2\pi$ ou $0° \leq \varphi < 360°$, é chamada de **argumento** do número complexo z (PAIVA. 2013, p. 137).

Segue tópico relacionado ao Cálculo do Argumento de um Número Complexo:

> Se $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset R$, é um número complexo não nulo, de módulo ρ e argumento φ, então:
>
> $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{p} \\ sen\varphi = \frac{b}{p} \end{cases}$$
>
> (PAIVA. 2009, p. 139).

Segue-se a definição da Forma Trigonométrica de um Número Complexo:

> Para todo número complexo não nulo $z = a + bi, com\{a, b\} \subset R$, de módulo p e argumento φ, temos:
>
> $$\begin{cases} cos\varphi = \dfrac{a}{p} \\ sen\varphi = \dfrac{b}{p} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = pcos\varphi \\ b = psen\varphi \end{cases}$$
>
> Assim, podemos representar o número $z = a + bi$ sob a forma $z = pcos\varphi + (psen\varphi)i$ ou ainda:
>
> $$z = p(cos\varphi + isen\varphi)$$
>
> Essa forma é chamada de **forma geométrica** ou **forma polar** do número complexo z (PAIVA. 2009, p. 139).

Nesse ponto, o professor poderá fazer uma revisão acerca do conceito de seno e cosseno(conteúdo de trigonometria), para que haja uma melhor compreensão da fórmula geral por parte dos alunos.

Dada a fórmula trigonométrica, define-se as operações na forma trigonométrica, a saber Multiplicação e Divisão:

> *Multiplicação*

Se $\begin{matrix} cos\alpha + isen\alpha \\ z = p \end{matrix}$) e $\begin{matrix} cos\beta + isen\beta \\ w = \gamma \end{matrix}$) são as formas trigonométricas dos números complexos z *e* w*, então:*

$$z.w = p\gamma[cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)]$$

Divisão

Se $\begin{matrix} cos\alpha + isen\alpha \\ z = p \end{matrix}$) e $\begin{matrix} cos\beta + isen\beta \\ w = \gamma \end{matrix}$) são as formas trigonométricas dos números complexos z *e* w*, com* $w \neq 0$*, então:*

$$\frac{z}{w} = \frac{p}{\gamma}[cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta)]$$

(PAIVA. 2013, p. 141-142)

Observa-se a apresentação dos últimos tópicos de maneira mais conceitual, haja vista que há apenas a exposição da fórmula em questão, sem a devida contextualização histórica e epistemológica dos fatos citados.

Concluindo o conteúdo de Números Complexos, contidos resumidamente em 24 páginas, encerra-se os tópicos com a abordagem das Potências de Números Complexos na Forma Trigonométrica:

Se $\begin{matrix} cos\varphi + isen\varphi \\ z = p \end{matrix}$) é a forma trigonométrica do número complexo não nulo z *e* n *é um número inteiro qualquer, então:*

$$z^n = p^n(cosn\varphi + isenn\varphi)$$

(PAIVA. 2013, p. 143)

A fórmula citada acima($z^n = p^n(cosn\varphi + isenn\varphi)$ é denominada Teorema de Moivre.

Após a apresentação dos tópicos e das definições segue-se 3 páginas de exercícios complementares.

3.1.2 – Livro 2 - Conexões com a Matemática

O segundo livro, também adotado em duas das quatro escolas públicas estaduais de Canindé, escolhido para o breve relato, intitulado Conexões com a Matemática, escrito por Fábio Martins de Leonardo, datado de 2013, 2ª edição, está organizando em três volumes. Sendo respectivos aos três anos do ensino médio. Para a pesquisa, foi utilizado apenas o volume 3, composto de 223 páginas e um guia do professor constituído de duas partes: a geral e a específica.

O volume 3 é estruturado em 8 capítulos sendo esses divididos em tópicos, o conteúdo de números complexos está contido no 7º capítulo e é composto de 5 tópicos e exercícios complementares em relação ao tema, perfazendo um total de 21 páginas relacionada ao tema. A obra completa é composta de 384 páginas.

Os dois livros relatados nesta pesquisa apresentam definições de conteúdo de uma forma muito semelhante, procuraremos nessas observações, tratar apenas das diferenças de apresentação do livro conexões como a Matemática(2013) em relação ao livro Matemática Paiva(2009).

Um fato extremadamente relevante do ponto de vista da compreensão do conceito de Números Complexos é a forma como o autor faz a introdução do conteúdo, utilizando-se de dados referentes aos matemáticos que contribuíram para a construção do conjunto numérico estudado, apresentados de forma cronológica, conforme pode-se observar na figura abaixo:

Figura 4: Introdução - Capítulo 7 – Números Complexos.

Fonte: (LEONARDO, 2013, p. 162)

O autor objetiva fazer um breve histórico dos matemáticos que contribuíram para a construção do conjunto dos números complexos, criando a possibilidade do professor introduzir o conteúdo com uma abordagem histórica.

Outro fato relevante, é o breve histórico apresentado antes da introdução do conteúdo:

> A resolução de equações sempre representou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a antiguidade até os dias de hoje. Babilônicos, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações de 2º grau, mas, em vez de fórmulas, usavam régua e compasse para resolvê-las. Para esses matemáticos, não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo: como as equações eram formuladas para solucionar um problema concreto, se surgisse uma raiz quadrada negativa, o problema era considerado sem solução.
> Esse ponto de vista só começou a mudar a parir do século XVI, com os matemáticos italianos e seus estudos sobre a resolução de equações do 3º grau em que aparecem raízes de números negativos. No início a existência de um “novo tipo de número” foi de difícil aceitação, mas a ampliação dos estudos por outros matemáticos e a descoberta da possibilidade de aplicação desses números em outras áreas tornaram os números complexos uma das mais importantes descobertas matemáticas.

> Hoje em dia, aplicações desses números adquiriram uma enorme importância no campo de engenharia(por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica(no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria Fractal e em sistemas dinâmicos(por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros (LEONARDO, 2013, p. 163).

O texto se apresenta como uma rica possibilidade de abordagem histórica por parte do professor, podendo, assim, contribuir para o entusiasmo no aprendizado do conteúdo em questão.

Após a abordagem inicial, o autor apresenta a unidade imaginária de uma forma mais direta, utilizando a seguinte notação: “o número i, tal que $i^2 = -1$, é chamado de **unidade imaginária.**”

Quanto à definição do conjunto dos Números Complexos, a apresentação é feita como representação simbólica dos conjuntos “$C = \{z/z = a + bi, coma, b \in Rei^2 = -1\}$” (LEONARDO. 2013, p. 165). Vale ressaltar, nesse ponto, é prudente que o professor faça uma pequena revisão acerca dos conjuntos numéricos e suas simbologias, tudo isso para resguardar a aprendizagem daqueles que não detenham conhecimento sobre o conteúdo prévio.

Quanto às operações, a abordagem é mais direta, sendo exposta da seguinte forma:

> Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \in R$, podemos definir as operações de adição e subtração entre z e w da seguinte forma:
> Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
> Subtração: $z - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$
> Multiplicação: $z.w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$
> (LEONARDO. 2013, p. 166).

Apesar de conter aspectos históricos na introdução, o desenvolvimento do conteúdo no livro se apresenta de uma forma muito direta, sem as devidas reflexões ou observações que possam subsidiar a construção do conhecimento pelos alunos.

O conjugado de um Número Complexo é apresentado da seguinte forma: “Dado um número complexo $z = a + bi, coma, b \in R$, chamamos de **conjugado de** z, cuja notação é $\overline{z}$, o número complexo $\overline{z} = a + bi$”(LEONARDO. 2013, p. 167).

Em relação à Potenciação, como $i^2 = -1$, a apresentação feita tem por objetivo fazer o aluno perceber a repetição ocorrida no cálculo das potências através da observação, conforme explicitado abaixo:

> Observe, abaixo, o cálculo de algumas potências de i.”

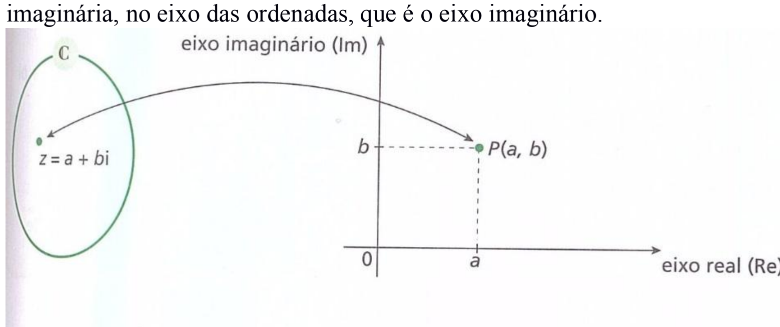
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$
- $i^5 = i^2.i^2.i = i$
- $i^6 = i^2.i^2.i^2 = -1$
- $i^7 = i^2.i^2.i^2.i = -i$
- $i^8 = i^2.i^2.i^2.i^2 = 1$
- $i^9 = i^2.i^2.i^2.i^2.i = i$

  ... e assim por diante.

Após a exposição de vários resultados oriundos das potência de i, conclui-se que "As potencias de i se repetem em grupos de quatro valores, seguindo o padrão das potências i^0, i^1, i^2e i^3. Então para calcular a potencia de i^n, com $n \in R$, efetuamos a divisão como o novo expoente de i" (LEONARDO, 2013, p. 168).

Em relação à Representação Geométrica do Conjunto dos Números Complexos, é feita uma abordagem histórica inicial, explicitando que:

> No início do século XIX, trabalhando de maneira independente, Gauss e Jean Robert Argand(1768 - 1822), com base nas ideias de Caspar Wessel(1745 - 1818), notaram uma associação entre as partes real e imaginária de um número complexo e as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, tornando mais fácil a visualização desses números.
> Da mesma forma que cada número real pode-se associar um único ponto da reta real, a cada elemento $a + bi(com a, b \in R)$ do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto $P(a, b)$do plano cartesiano e vice-versa. A parte real de z é representada no eixo das abscissas, que é chamado de eixo real, e a parte imaginária, no eixo das ordenadas, que é o eixo imaginário.



(LEONARDO, 2013, p. 169).

Nesse ponto é importante que o professor possa enfatizar que se trata da mesma representação do plano cartesiano.

É importante ressaltar que foram tratados nesse tópico apenas os trechos sobre números complexos que foram expostos de forma diferente entre os dois livros, quanto aos demais conteúdos não contemplados nestas observações, utiliza-se a mesma compreensão do livro Matemática Paiva(2009).

3.1.3 – Considerações acerca das obras

Em estudo às fontes consultadas, observou-se a abordagem dos Números Complexos, em sua maioria, iniciando-se com a definição de unidade imaginária, sendo pouco usual a história da matemática, e essa, muitas vezes apresentada de forma reduzida como preâmbulo do capítulo.

No livro Conexões com a Matemática (2013) de Fabio Martins de Leonardo, observou-se de maneira sutil, um resumo cronológico dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos Números Complexos, já Paiva(2009) inicia o conteúdo com o objetivo de fazer o aluno compreender a insuficiência dos números reais diante de um problema prático.

Pode-se observar também, dentro do mesmo tema, diferentes abordagens, uma expressando uma forma mais conceitual (PAIVA, 2009) e a outra de maneira mais direta (LEONARDO, 2013), esse último, na tentativa de fazer o aluno ter uma melhor compreensão dos conteúdos.

Outro ponto relevante é a quantidade mínima de páginas utilizadas para a exposição dos tema, acarretando em resumos de conteúdo, causando-se a sensação de algo pronto e acabado sem as devidas discussões e observações históricas.

3.2 O ensino do Conjunto dos Números Complexos após o advento do Novo ENEM, uma mudança no currículo

O conteúdo programático de matemática do ensino médio vem sofrendo alterações em decorrência de vários fatores, dentre eles o advento do novo ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio que a partir do ano de 2009 passou a integrar um importante instrumento de reestruturação do Ensino Médio, conforme os três princípios apresentados pelo Comitê de Governança do novo ENEM no ano de sua criação:

1. Que o novo ENEM, no formato proposto pelo MEC/INEP, é importante instrumento de reestruturação do Ensino Médio;

2. Que, em função disso, deve-se vislumbrar a possibilidade de universalização da aplicação do Exame aos concluintes do Ensino Médio em futuro próximo;

3. Que a edição de 2009 deve se fundamentar na atual organização do Ensino Médio e nos seus exames - ENEM e Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), respeitando-se o itinerário formativo dos estudantes matriculados no Ensino Médio.

Após a aprovação, a aplicação e adesão das universidades Federais ao formato do novo ENEM, o Sistema de Seleção Unificada – SISU – instituído no ano de 2009, passou a ser a principal forma de ingresso nas universidades públicas e privadas para alunos que cursaram o ensino médio em escolas públicas. Esse processo de mudança passou a se tornar referência no currículo escolar. O currículo escolar passou a sofrer alterações principalmente em decorrência da adesão de 100% das universidades federais ao ENEM como processo seletivo em substituição ao vestibular, que por sua vez, o ENEM possui matriz de referência específica publicada pelo Ministério da Educação – MEC - a cada ano, deste modo as escolas passaram a adaptar seus planos curriculares a esses moldes, haja vista a pouca utilização do vestibular como processo de ingresso.

Os planos anuais de matemática também foram frutos dessa mudança após o advento do Novo ENEM, pois as matrizes curriculares passaram a ter escopo de contextualização, motivo pelo qual alguns conteúdos(a exemplo de números complexos) até então explorados pela justificativa do vestibular, passaram a ser ensinados em menor frequência ou até extintos, daí se resulta na retirada gradativa de conteúdos mais abstratos, que não tem ligação direta ao cotidiano escolar dos alunos a exemplo do conjunto dos números complexos, conforme elucida BRASIL(1999):

> [...] apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender (BRASIL, 1999, p. 4).

Outro ponto relevante é a indução do currículo escolar após o advento do novo ENEM, conforme elucidado:

> Desde 1911, quando surgiu o primeiro vestibular no Brasil, não se via uma transformação tão radical. Enquanto o velho vestibular exige do aluno a memorização de uma quantidade colossal de fórmulas, datas e nomes, o novo exame procura aferir, basicamente, a capacidade de raciocínio em questões que combinam as várias áreas do conhecimento e traduzem a vida real [...]. Mais complexa e abrangente do que o extinto Enem, criado pelo MEC em 1998 (BRASIL, 2009, p.78).

Na matriz de referência de matemática para o ENEM (2013), divulgada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP - podemos perceber que não consta as operações com o Conjunto dos Números nas orientações deste documento norteador, conforme pode-se observar:

> Conhecimentos numéricos – operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem (BRASIL, INEP, 2013, p. 15).

Vejamos que a matriz para o ENEM se limita ao conjunto dos números reais, dessa maneira, como tem-se tornado cada vez mais universal o ingresso no ensino superior através do ENEM/SISU, as escolas tem se adaptado a essa realidade tratando, muitas vezes, apenas do ensino dos conteúdos exigidos no exame, por essa razão o ensino do Conjunto dos Números Complexos ou tem sido tirado do programa anual de matemática ou é tratado de maneira superficial após a realização do exame.

4 A PESQUISA

A busca constante por mudanças e avanços parece ser algo natural do ser humano. Na educação não é diferente, o contexto educacional dinâmico e as demandas sociais atingem diretamente no contexto escolar, esse por sua vez necessita de constantes aprimoramentos para que a escola se torne atrativa para a demanda de jovens advindos de diferentes contextos socioeconômicos.

Face a todos esses desafios, junta-se a isso, a busca por parte dos discentes de algo que possa se tornar mais atrativo em sala de aula, portanto a presente pesquisa propõe um nova metodologia de ensino da matemática a partir de um conhecimento prévio do aluno com a utilização das quatro etapas da Sequência Fedathi denominadas de: tomada de posição, maturação, solução e prova. A postura do professor (pedagogia mão-no-bolso) priorizará o protagonismo do estudante mediante suas reflexões a partir de perguntas potencializadoras e discussões.

Neste capítulo serão apresentadas as sessões didáticas como possibilidade metodológica para o ensino dos Números Complexos, bem como as razões para a escolha desse modelo de investigação a partir dos pressupostos da Sequência Fedathi.

4.1 Sequência Fedathi – Uma proposta para o ensino de Números Complexos

Neste tópico serão apresentados aspectos relevantes acerca da proposta metodológica utilizada na aplicação das sessões didáticas.

A sequência Fedathi, "uma sequência metodológica para o ensino e pesquisa em matemática" foi apresentada na Universidade de Paris VI em 1996, na TESE de Pós-Doutorado do Prof. Hermínio Borges Neto. Desde sua apresentação formal, vem sendo aperfeiçoada com base nos estudos de Borges Neto e do grupo Fedathi – FACED – UFC. (SOUZA. 2010, p. 82).

Borges Neto *et all*(2013, p. 18) define-a da seguinte forma:

> A Sequência Fedathi propõe que ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos para construir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo.

Na SF, o professor assume a "postura mão no bolso", termo usado para definir a postura do professor diante dos alunos durante a aula. Essa postura tem como premissa a ação mediadora do professor no processo de construção do conhecimento, evitando fornecer respostas prontas ou explicar tudo, utilizando a pergunta como recurso para reflexão e construção do conhecimento. Ou seja, quando há uma dúvida do aluno em relação ao conteúdo, o professor responde com uma reflexão, utilizando esta em caráter de estímulo, esclarecimento e orientação. Os contraexemplos também podem ser utilizados para melhor compreensão, haja vista as dificuldades acumuladas apresentadas por alunos no decorrer dos anos de estudo.

Tendo como referência os passos reproduzidos no trabalho científico do matemático, são propostos na SF quatro etapas sequenciais e interdependentes denominadas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

Na tomada de posição, o professor apresenta um problema ou uma situação desafiadora relacionada ao conteúdo, contudo antes da apresentação do problema, faz-se necessário a definição de quais conhecimentos prévios os alunos deverão ter para a compreensão do conteúdo, seguindo de um diagnóstico para averiguar se os discentes são detentores destes conhecimentos. Souza (2013, p. 20) contribui corroborando que:

> o professor será um investigador de sua sala de aula, buscando reconhecer os pontos fortes e fracos de seus alunos. Neste sentido, destacamos que o diagnóstico pode ser realizado por meio de dois momentos, o primeiro em que o professor define quais conhecimentos prévios os alunos deveriam ter para a apreensão do novo conhecimento, e o segundo, a realização da investigação junto aos alunos a fim de averiguar se os estudantes são detentores destes conceitos.

Os resultados obtidos por meio do diagnóstico são extremamente relevantes para a organização e planejamento da prática do professor durante a aplicação didática dos conteúdos.

Na tomada de posição, o professor estabelece regras para subsidiar os trabalhos, é nessa etapa que se apresenta o acordo didático, que define o que se espera de todos os envolvidos.

Na maturação (2ª etapa) o aluno se debruça sobre o problema proposto, apoiado pelo professor, discutindo possíveis formas que podem levar a compressão do conteúdo e consequentemente à resolução do problema. Borges Neto(2013, p. 23) define-a como “a etapa destinada à discussão entre o professor e os alunos a respeito da situação-problema apresentada; os alunos devem buscar compreender o problema e tentar identificar os possíveis caminhos que possam leva-los a uma solução”.

Nesta etapa, os questionamentos são explorados de forma mais abrangente, sendo um recurso valioso no processo de transmissão do conhecimento. Pois contribuem para o desenvolvimento intelectual dos alunos proporcionado ao professor uma visão ampla em relação à aprendizagem do conteúdo ensinado. Os questionamentos podem surgir por ambas as partes, das mais diversas formas, originando-se reflexões, formulações e hipóteses que conduzam à compreensão do conteúdo e consequentemente à solução do problema.

Na solução (3ª etapa), "os alunos organizam e apresentam modelos que possam conduzi-los a encontrar o que está sendo solicitado pelo problema; esses modelos podem ser está sendo solicitado pelo problema; esses modelos podem ser escritos em linguagem escrita, matemática, ou simplesmente por intermédio de desenhos, gráficos, esquemas e até mesma verbalizações". (BORGES NETO *et all,* 2013, p. 29)

É importante que, nesta etapa aconteçam troca de ideias, opiniões e discussões dos modelos apresentados pelos alunos. Requer, nesse caso, bastante tempo para o desenvolvimento das hipóteses a serem testadas bem como a reelaboração das respostas, para que, através de tentativas, ensaios e erros, juntamente com a postura mediadora do professor, possa se construir o conhecimento de forma autônoma.

A prova(4ª etapa), é a finalização do processo, levando ao aluno a elaboração do modelo geral do conhecimento em discussão a partir de um processo de construção com a participação efetiva de alunos e professores. É o momento da formalização dos conceitos matemáticos, em que deve o professor, conduzir a um processo de reflexão e reconhecimento do que se considera relevante ou não para a aprendizagem do conteúdo. Face a importância da formalização do conceito matemático ao final da 4ª etapa:

> Podemos dizer que o modelo geral, refere-se ao conceito genérico ou fórmula a ser aprendida pelo aluno, a qual será um objeto de conhecimento tanto para a resolução do problema em questão, como para sua aplicação na resolução de outras situações-problema (BORGES NETO *et all,* 2013, p. 33-34).

No que se refere ao professor em relação a atuação na etapa solução, é importante enfatizar que a competência didático-matemática docente é fundamental na mediação e compreensão do aluno na construção do novo saber.

De modo geral, a Sequência Fedathi indica que o conteúdo não seja ensinado diretamente ao aluno, sem que os mesmos tenham antes, a oportunidade de pensar, refletir, raciocinar e propor soluções mediante seu próprio esforço, com o auxílio mediador do professor. Propõe-se que os estudantes sejam protagonistas do processo de aprendizagem através de interações multilaterais e bilaterais e mesmo que os modelos propostos pelos discentes estejam dissonantes das formalizações matemáticas, o processo de construção e discussão se mostra extremamente relevante para a aprendizagem. Haja vista, que na realidade atual, o ensino de matemática é construído, na maioria das vezes, de forma expositiva e exaustiva, colocando o aluno como mero expectador.

O tempo para aplicação dessa metodologia se mostra como fator relevante a ser considerado, pois é fato que a abordagem do conteúdo através da Sequência Fedathi leva mais tempo que uma abordagem expositiva, pois é valorizada a discussão, em contraponto ao ensino centrado apenas na exposição do professor. Essa postura impacta diretamente na quantidade de conteúdos a serem trabalhados em um mesmo intervalo de tempo. No entanto, cabe a seguinte reflexão. O que se apresenta como mais relevante: a quantidade de conteúdos a serem ensinados ou a busca por uma melhor qualidade dos conteúdos abordados?

Como explicitado anteriormente, a própria escola sede da pesquisa, utiliza o ENEM como norte para as definições dos conteúdos a serem ensinados durante o ano, causando, nesse caso, um maior distanciamento, por parte dos professores, de metodologias que não possibilitem a conclusão dos conteúdos anuais determinados.

4.2 Sessões didáticas como procedimento metodológico de investigação

Sessões didáticas são aulas organizadas, planejadas e estruturadas a partir de uma análise ambiental e teórica. A Sequência Fedathi foi a proposta metodológica utilizada na aplicação das sessões.

A expressão, Sequência Didática é utilizada desde a década de 80 em pesquisas relacionadas à Didática da Matemática que se utilizam da pesquisa experimental (BORGES NETO *et all,* 2013).

Deverão ser considerados na análise ambiental: Objetivos, público alvo, tempo das sessões, variáveis internas e hipóteses do que pode ser acordado com os envolvidos no processo (professores e alunos): avaliação e contrato didático.

Na análise teórica deverá ser considerado o conteúdo utilizado nas sessões. A utilização do modelo proposto por Borges Neto e Santos (2013) será a adotada na referida pesquisa.

4.3 Justificativa dos procedimentos metodológicos

Muitas são formas de aplicação de procedimentos de investigação, sendo essas escolhidas de acordo como os objetivos propostos. Nesse caso, a utilização das sessões didáticas vem como forma de possibilitar uma importante reflexão para a confirmação das hipóteses propostas, pois a interação entre o objeto e os sujeitos da pesquisa, bem como a pesquisa direta, permite conferir aspectos de originalidade, permitindo-se refletir melhor em decorrência das especificidades e peculiaridades do objeto em questão.

As observações e os instrumentos utilizados antes, durante e após a aplicação das sessões didáticas, são as fontes que subsidiam as reflexões e discussões em torno do que se considera ser o grande desafio da educação atual: metodologia x postura do professor. Sobre esse tema, Souza (2013, p. 69) contribuiu afirmando que:

> A organização de sequencias de ensino compatíveis com as novas propostas de transposição didática requer que os professores tenham uma postura diferente do que geralmente se pratica no ensino dos conteúdos matemáticos. Isso exige, além de outros instrumentos, uma nova forma de relacionamento entre professor e estudante, ou seja, há necessidade do estabelecimento de um novo ***contrato didático*** nas aulas de matemática.

Dessa forma, a busca por inovações no campo metodológico a partir do contexto escolar se faz necessária mediante os baixos índices de aprendizagem na área de ciências da natureza e, em especial, a matemática.

Na busca por respostas que venham a dirimir dificuldades no processo de ensino, bem como no suporte para uma aprendizagem satisfatória, se propôs a pesquisa que será explicitada a seguir objetivando a confirmação das hipóteses propostas.

4.4 As sessões didáticas

A aplicação das três sessões didáticas desenvolvidas durante a pesquisa consiste em uma vasta fonte de análise qualitativa e quantitativa, podendo-se observar a confirmação das hipóteses levantadas nas categorias de análise, referentes à aplicação da Sequência Fedathi no Ensino dos Números Complexos.

O modelo de sessão didática permite uma proposta de ensino construtivista e não arbitrária, construtivista pelas evidências colhidas no processo de ensino, como a postura mão-no-bolso permitindo ao aluno o protagonismo de seu próprio conhecimento através da mediação do professor assim como no contrato didático estabelecido por ambas as partes (alunos e professor), em que se define expectativas e posturas do professor e do alunos no desenvolvimento das sessões. Não arbitrária por considerar o nível de conhecimento para desenvolvimento das sessões mediante uma avaliação diagnóstica.

O aluno é protagonista em todo processo de desenvolvimento das sessões, haja vista a postura de mediação do professor auxiliando-os na construção de seu próprio conhecimento através da postura mão-no-bolso utilizando-se de perguntas estimuladoras, orientadoras e reflexivas acerca do conteúdo em questão (Números Complexos) bem como a utilização de contra exemplos para melhor entendimento e desenvolvimento, sendo esses dois instrumentos (perguntas e contra exemplos) extremamente relevantes para o processo de construção do conhecimento por parte do aluno. Essa postura contribui para estimular o aluno a pensar, refletir e pesquisar ao invés de receber respostas prontas do professor.

A forma de estruturação das sessões favoreceu a construção do conceito de Números Complexos por meio da aplicação da Sequência Fedathi, pois as etapas (Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova) foram vivenciadas ao longo do processo de construção com a participação ativa dos alunos.

A sessão didática 1 consistiu na construção do conceito de Números Complexos a partir de um problema surgido no século XVI e que foi um dos motivadores da formalização e construção do Conjunto dos Números Complexos. Esta sessão foi aplicada na sala de aula convencional com a utilização da história da matemática como recurso para a introdução. Houve a participação ativa dos alunos na atividade conseguindo chegar a resolução do problema, mesmo sendo o resultado um campo desconhecido por todos, nesse caso houve a formalização da definição de números complexos conduzida pelo professor mantendo-se a interação e participação dos alunos mediante a curiosidade do novo conteúdo.

Nas demais sessões, foi desenvolvido conteúdo específico sobre Números Complexos. Em resumo, todas as sessões didáticas foram construídas a partir de uma situação problema, com a participação ativa dos alunos e o professor assumindo a postura “mão-no-bolso”.

Dessa forma, as atividades foram aplicadas satisfatoriamente, com a postura protagonista dos alunos, fornecendo subsídios relevantes para análise qualitativa, assim, o modelo de sessão didática utilizada no presente trabalho se apresenta como uma atraente possiblidade metodológica para o ensino e para pesquisa.

4.5 RESULTADO DAS ANÁLISES DAS SESSÕES DIDÁTICAS

Neste tópico será feita a análise do método de pesquisa e a escolha das categorias de análise.

Para validação das categorias de análise, os dados obtidos no pré-teste, durante a aplicação da pesquisa e sessões didáticas, bem como nos questionários aplicados após as sessões, serão analisados qualitativa e quantitativamente.

As sessões didáticas foram aplicadas pelo pesquisador, ou seja, o professor pesquisador.

4.5.1 Análises do método de pesquisa

A proposta para o estudo dos Números Complexos, distribuída em três sessões didáticas, consiste numa sequência didática elaborada a partir de uma análise ambiental (público alvo, objetivos, materiais, etc.) e teórica (definição, formalização e desenvolvimento dos números complexos). As aulas foram estruturadas a partir das etapas da Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova.

As sessões foram intituladas:

Sessão 1 - Construção do Conceito de Números Complexos a partir da resolução de um problema histórico;

Sessão 2 –Resolução de equações do 2º grau com raízes negativas;

Sessão 3 –Operações com números complexos (Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão);

Vale ressaltar que as três sessões não abrange todo conteúdo sobre Números Complexos. Pois a pesquisa foi aplicada no 4º bimestre e não estava previsto o ensino de números complexos para as turmas de 3º ano na escola onde ocorreu o presente trabalho. Isto não significa que os demais tópicos relacionados ao conjunto dos números complexos não sejam relevantes e que não possam ser explorados com a metodologia proposta (Sequencia Fedathi).

Outro ponto relevante se dá pela construção do conceito de números complexos em sala de aula convencional com a utilização de papel, caneta, quadro branco e pincel.

O objetivo foi apresentar uma proposta de sequência didática, construída a partir da metodologia Sequência Fedathi, com a utilização da postura mão-no-bolso com a efetiva participação dos alunos como protagonistas na construção de seu próprio conhecimento. Outros conteúdos de matemática também podem ser desenvolvidos e explorados com a metodologia proposta nesta pesquisa, pois o método dedutivo usado permite a possibilidade de generalização da associação entre pressupostos metodológicos (Sequência Fedathi) e o aperfeiçoamento da prática pedagógica visando uma melhor aprendizagem.

As sessões didáticas foram aplicadas pelo próprio pesquisador, ou seja, o professor pesquisador.

4.6 Sessão Didática 1 - Construção do Conceito de Números Complexos a partir da resolução de um problema histórico.

A sessão didática 1 teve início com um breve apresentação dos alunos e do professor pesquisador, bem como a apresentação e definição do seguinte contrato didático:

Expectativas do Professor: espera que os alunos possam participar ativamente das atividades propostas, mantendo respeito e cumprindo aquilo que lhe for proposto.

Expectativas dos Alunos: espera que o professor seja atencioso, que procure tirar as dúvidas de modo a possibilitar uma melhor aprendizagem e consequentemente consigam chegar à solução do problema proposto. Dessa forma, se mostra evidente pelo acordo didático, que a todos devem contribuir ativamente nas atividades propostas com a mediação do professor para fortalecer a construção do conhecimento e favorecer o protagonismo do próprio aluno.

Após o acordo, o professor fez um resgate histórico dos conjuntos numéricos, iniciando com o surgimento do conjunto dos números naturais refletindo sobre o contexto em que surgiram os demais conjunto: inteiros, racionais, irracionais e reais. E concluindo com uma pergunta, o conjunto dos números reais é suficiente para responder todas as questões matemáticas atuais?

Em seguida foi proposto o seguinte problema: Dividir um seguimento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto seja 40.

O problema foi escrito no quadro, após a anotação os alunos foram divididos em duplas para resolução. Tendo nesse momento, a primeira etapa da Sequência Fedathi vivenciada (Tomada de Posição).

A partir desse momento os alunos passaram a se debruçar diante do problema, fazendo reflexões, inferências e externando e compartilhando dúvidas com os colegas e o professor. O professor estimulou a reflexão e a proposta de hipóteses de resolução e se dispôs a dirimir as dúvidas dos alunos bem como se prontificou a ir em cada dupla para tirar dúvidas. No entanto, esse apoio seria através da postura “mão-no-bolso”, evitando dar respostas prontas acerca das dúvidas advindas da resolução do problema.

Dessa forma, para cada dúvida do aluno, o professor respondia com outra pergunta ou afirmação para que se pudesse, o aluno, construir o conceito de números complexos a partir de suas próprias reflexões acerca do problema e da mediação do professor. No diálogo seguinte, se exemplifica essa conjuntura denominada na Sequência Fedathi de maturação, ou seja, a segunda etapa a ser vivenciada nessa proposta.

Segue a denominação das duplas:

Dupla 1 – Aluna A e Aluna B
Dupla 2 – Aluno A e Aluna B
Dupla 3 – Aluno A e Aluno B
Dupla 4 – Aluna A e Aluna B
Dupla 5 – Aluna A e Aluna B
Dupla 6 – Aluno A e Aluno B
Dupla 7 – Aluno A e Aluno B
Dupla 8 – Aluna A e Aluna B
Dupla 9 – Aluno A e Aluno B
Dupla 10 – Aluno A e Aluno B
Dupla 11 – Aluno A e Aluno B
Dupla 12 – Aluna A e Aluno B
Dupla 13 – Aluno A e Aluna B
Dupla 14 – Aluno A e Aluna B
Dupla 15 – Aluna A e Aluna B
Dupla 16 – Aluna A e Aluna B
Dupla 17 – Aluna A e Aluno B

Fato a ser observado é que um aluno participou sozinho, haja vista o número ímpar de estudantes na sala.

Exemplo 1

A dupla 3 formada pelos alunos A e B pergunta ao professor:

Aluno A: É muito difícil professor?

Professor: Você já viu ou resolveu algum problema parecido?

Aluno A: Acho que não professor, mas vou tentar aqui.

Professor: Tente fazer uma leitura concentrada e transformar os dados em sentenças matemáticas.

Aluno A: Certo professor!

Exemplo 2:

O aluno A da dupla 10 pergunta ao professor:

Aluno A: É uma equação do 2º grau?

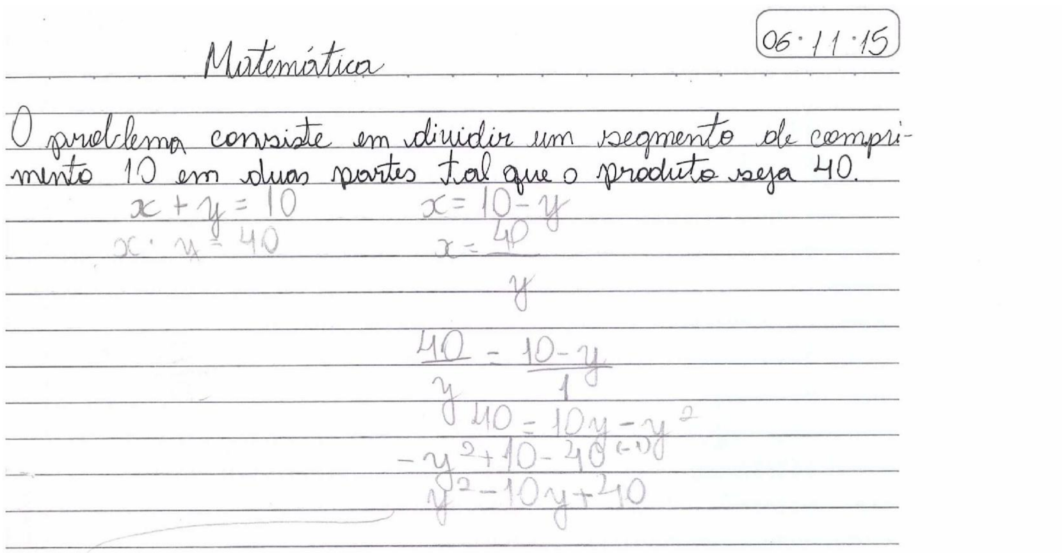
Professor responde: Como você chegou a essa conclusão?

Aluno A: através do sistema.

Professor: Muito bem! E qual a solução dessa equação?

Aluno A: Vou fazer professor.

Figura 05: Solução - Dupla 10



Matemática

06·11·15

O problema consiste em dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto seja 40.

$x + y = 10$ $\quad x = 10 - y$

$x \cdot y = 40$ $\quad x = \frac{40}{y}$

$\frac{40}{y} = \frac{10 - y}{1}$

$40 = 10y - y^2$

$-y^2 + 10 - 40 \; (-1)$

$y^2 - 10y + 40$

Fonte: pesquisa direta.

Aluno A: Não existe raízes reais.

Professor: Como você chegou a essa conclusão?

Aluno A: Porque o delta(discriminante) deu negativo. Temos como inventar um sinal?

Professor: Esse é o intuito de todo nosso estudo nesse bimestre, encontrar um conjunto numérico que possa resolver equações como essa.

Exemplo 3:

A dupla 11 formada pelos alunos A e B pergunta ao professor:

Aluno A: O produto é para as duas partes?

Professor: O que é produto?

O aluno B responde:

Aluno B: É multiplicação.

Professor: Existe produto de apenas uma parte?

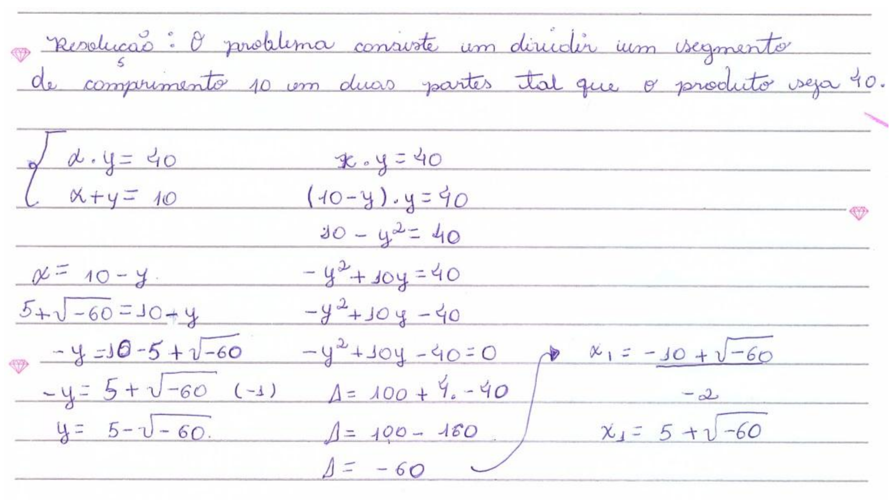
Aluno A: não tem como.

Professor: Respondida sua pergunta?

Aluno A: Sim professor.

A partir das indagações representadas acima bem como das demais, as duplas começaram a apresentar solução para o problema proposto. Essa etapa é a solução. Segue abaixo algumas soluções apresentadas pelos alunos:

Figura 06: Solução - Dupla 01


Resolução: O problema consiste em dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto seja 40.

$\begin{cases} x \cdot y = 40 \\ x + y = 10 \end{cases}$

$x \cdot y = 40$

$(10 - y) \cdot y = 40$

$10 - y^2 = 40$

$x = 10 - y$

$-y^2 + 10y = 40$

$5 + \sqrt{-60} = 10 + y$

$-y^2 + 10y - 40$

$-y = 10 - 5 + \sqrt{-60}$

$-y^2 + 10y - 40 = 0$

$x_1 = \dfrac{-10 + \sqrt{-60}}{-2}$

$-y = 5 + \sqrt{-60} \quad (-1)$

$\Delta = 100 + 4 \cdot -40$

$y = 5 - \sqrt{-60}$

$\Delta = 100 - 160$

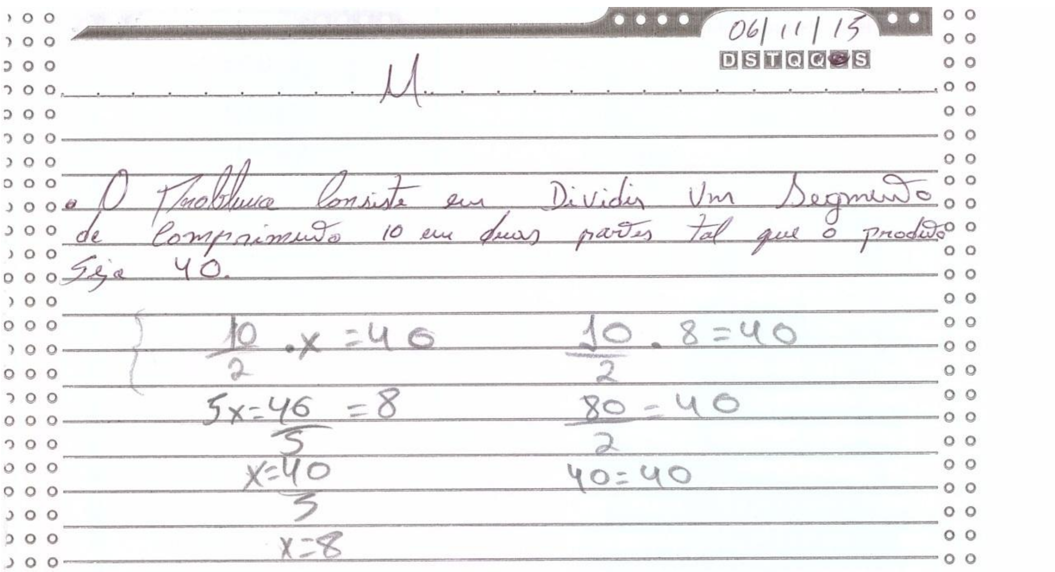
$x_1 = 5 + \sqrt{-60}$

$\Delta = -60$

Fonte: Pesquisa direta

Nesta solução, a dupla utilizou o sistema de equações, isolando uma variável na primeira equação e substituindo na segunda, originando, assim, a equação de 2º grau que simboliza o problema. A solução também indica conhecimento da dupla acerca da solução da equação de 2º grau através da fórmula geral, conhecida como fórmula de Bhaskara. Fato importante é que aparece na solução a raiz quadrada de um número negativo e que, apesar da resposta correta, não há nenhum prosseguimento de cálculo ao chegar em $\sqrt{-60}$. Demonstrando, nesse caso a limitação dos números reais para equações desse tipo. Observa-se dificuldade de fatoração e desconhecimento de propriedades básicas da radiciação,

Figura 07: Solução - Dupla 03


06/11/15

D S T Q Q S S

M.

O Problema Consiste em Dividir Um Segmento de Comprimento 10 em duas partes tal que o produto Seja 40.

$\frac{10}{2} \cdot x = 40$ $\qquad$ $\frac{10}{2} \cdot 8 = 40$

$5x = 40 \rightarrow \frac{40}{5} = 8$ $\qquad$ $\frac{80}{2} = 40$

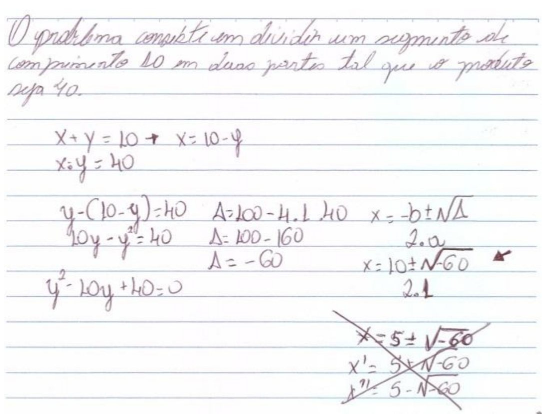
$x = \frac{40}{5}$ $\qquad$ $40 = 40$

$x = 8$

Fonte: Pesquisa direta

Neste caso, a dupla possivelmente associou os números contidos no problema com as operações relatadas, ou seja, o trecho do problema “dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes” foi compreendido como dividir 10 por 2, multiplicando esse resultado por x e igualando a 40, entendendo a expressão “tal que” como ‘igual a”. Apesar dos cálculos relacionados a equação do primeiro estarem corretos, inclusive, vivenciado a última etapa da Sequência Fedathi, a prova, pode-se inferir que a dupla não vivenciou, até o momento da apresentação da solução, os processos necessários para compreender a utilização dos Números Complexos.

Figura 08: Solução - Dupla 11


O problema consiste em dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto seja 40.

$x + y = 10 \rightarrow x = 10 - y$

$x \cdot y = 40$

$y \cdot (10 - y) = 40$ $\qquad$ $\Delta = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 40$ $\qquad$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$10y - y^2 = 40$ $\qquad$ $\Delta = 100 - 160$ $\qquad$ $x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2 \cdot 1}$

$\Delta = -60$

$y^2 - 10y + 40 = 0$

$\cancel{x = 5 \pm \sqrt{-60}}$

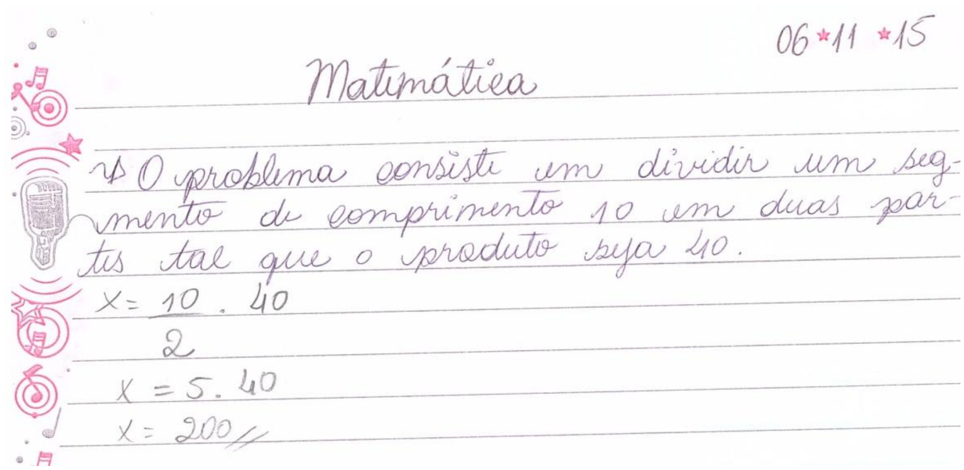
$\cancel{x' = 5 + \sqrt{-60}}$

$\cancel{x'' = 5 - \sqrt{-60}}$

Fonte: Pesquisa direta.

A solução apresentada pela dupla 11 contém corretamente todos os passos e cálculos, inclusive culminando na solução correta, porém o riscado em cima da solução (o “x”) indica a falta de compreensão da dupla, até o momento, de lidar com números negativos em raiz quadrada.

Figura 09: Solução - Dupla 14



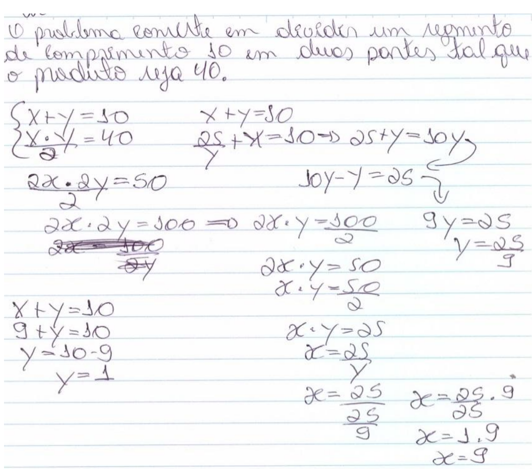
Fonte: Pesquisa direta.

A solução da dupla 14 é semelhante à apresentada pela dupla 03, com modificação apenas no local da incógnita “x”. Dificultando, dessa forma, a compreensão do conceito de números complexos.

Dessa forma, contemplaram-se nas questões propostas, as quatro fases da SF. Conclui-se, portanto, que os objetivos da sessão foram alcançados, haja vista que os alunos participaram ativamente das discussões com a posição mediadora do professor, vivenciando as fases da SF.

A dificuldade de solução persistiu em algumas duplas, como se segue:

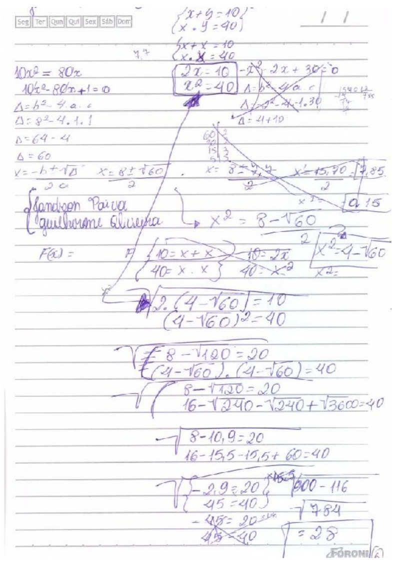
Figura 10: Solução - Dupla 07



Fonte: Pesquisa direta.

Esta solução apresenta inconsistências como: desenvolvimento incorreto das equações, de cálculos, bem como de eliminação de numerador com denominador de forma direta, demonstrando um grau de dificuldade da dupla bastante elevado.

Figura 11: Solução - Dupla 06



Fonte: Pesquisa direta

A solução demonstra um baixo nível de organização da dupla, haja vista a forma com os cálculos estão dispostos. Apesar da representação correta do sistema de equações, o desenvolvimento posterior demonstra elevada dificuldade por parte da dupla.

Semelhante à dupla 01, outras duplas utilizaram do mesmo método obtendo o resultado correto são essas: 10, 11 e 13. Utilizando-se do mesmo método, porém com os cálculos incorretos estão as duplas: 2, 6, 7, 8 e 9.

Utilizando-se erroneamente do conceito de função e contendo os cálculos idênticos, em que provavelmente uma dupla tenha copiado da outra, estão as duplas 4 e 5. De um raciocínio bem básico e sem o desenvolvimento da equação do segundo grau e utilizando apenas da relação ente as quantidades e operações propostas, estão as duplas 03, 12 e 14.

Conforme o processo de discussão e construção das duplas foram desenvolvido a partir da interação entre aluno e professor, utilizando-se da pedagogia mão-no-bolso, com perguntas, proposições e hipóteses de ambas as partes, o professor sentiu contemplada a etapa solução.

Nesse momento, o professor agradece e parabeniza todas as duplas pelo empenho na resolução do problema e utiliza o resultado $\sqrt{-60}$ para uma reflexão acerca dos conjuntos numéricos, nesse íntere, boa parte das duplas afirmava não haver solução para raiz negativa, o professor concluiu a aula com a seguinte pergunta: há a necessidade de criar um novo conjunto numérico para que se possam responder problemas como esse? E antes que todos saíssem, afirmou: o conjunto dos números complexos foi criado para solucionar problemas como esse até então tido como sem solução.

A quarta etapa da Sequência Fedathi, denominada de prova, foi exposta pelo professor como forma de introduzir o conteúdo através do problema proposto.

Os objetivos desta sessão didática foram alcançados, pois a construção do conceito de números complexos foi formalizada a partir de uma situação problema com a utilização das etapas da Sequência Fedathi. Ficando, assim, validada a categoria 1, construção do conceito de números complexos a partir de uma situação problema com a utilização das etapas da SF.

4.7 Sessão Didática 2 – Solução de equações do 2º grau com discriminante negativo

A sessão didática 2(apêndice 2) foi ministrada na própria sala convencional, em um tempo de 100(cem) minutos, com a participação de 35(trinta e cinco) alunos com o objetivo de compreender o conceito de Números Complexos através de uma situação problema coma utilização da Sequência Fedathi.

O professor iniciou a sessão propondo aos alunos o seguinte acordo didático:

Professor: espera que os alunos possam participar ativamente de todas as atividades e discussões propostas como protagonistas de sua própria aprendizagem.

Aluno: espera que o professor explique da melhor forma possível, ajudando-os e possibilitando-os a compreensão do conteúdo mediante as perguntas e reflexões que os possibilite chegar à solução do problema.

Dessa forma, fica evidente o comprometimento em participarem ativamente das atividades propostas, com a mediação do professor mediante motivações e indagações dos alunos e a pedagogia "mão no bolso".

Em seguida o professor inicia com uma retrospectiva da Sessão Didática 1 em que demonstra a insuficiência dos números reais para solução de equações com discriminante negativo, refazendo o resgate histórico do surgimento dos conjuntos numéricos e deixando claro a necessidade do surgimento de um novo conjunto denominado "Números Complexos". Nessa ocasião, o professor apresenta a unidade imaginária$i$, bem como a expressão $i^2 = -1$. Dessa forma, o professor, apresenta e demonstra que $\sqrt{-4} = 2i$, pois $(2i)^2 = 4$ pela propriedade $i^2 = -1$. Apresenta também a composição de um número complexo formado pelas partes real e imaginária.

Na ocasião, para vivenciar a primeira etapa da Sequência Fedathi(Tomada de posição), o professor propõe a seguinte atividade:

Resolva as equações utilizando a definição de unidade imaginária.

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$

b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

Em seguida os alunos passaram a vivenciar a segunda etapa, na maioria dos casos, o diálogo se deu já contido na terceira fase(solução), pois não havia por parte de algumas duplas dificuldade em maturar pois se tratava de equações do 2º, para exemplificar melhor, segue exemplos de diálogos abaixo:

Exemplo 1:

A dupla 3 formada pelos alunos A e B pergunta ao professor:

Aluno B: Posso somar $1 + 2i$?

O professor responde com outra pergunta.

Professor: Você pode somar 1(uma) laranja com 2(duas) maçãs e dizer que tem 3 laranjas ou 3 maças?

Aluno: Não!

Professor: Então, nesse caso você pode seguir essa mesma lógica.

Aluno: Certo professor!

Exemplo 2:

A dupla 2 formada pelos alunos A e B tiveram dúvida semelhante à dupla 3:

Aluno A: Tá certo dizer que $2 + 4i = 6i$?

Nessa oportunidade, o professor faz a mesma pergunta dirigida à dupla 3:

Você pode somar 1(uma) laranja com 2(duas) maçãs e dizer que tem 3 laranjas ou 3 maças?

Aluno A: Ah entendi!

Nesse momento, a dupla 16, formada pelos alunos A e B, demonstra vibração com a resposta.

Exemplo 3:

A dupla 3 formada pelos alunos A e B pergunta:

Aluna B: Tem que ficar imaginário e real?

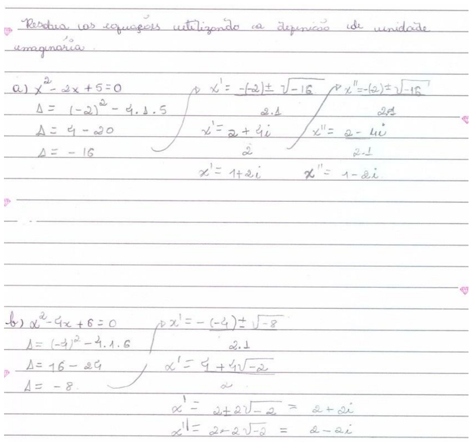
Professor: De quantas partes é formado um número complexo?

Aluna B: Não sei professor.

Percebendo a dificuldade, nesse ponto, o professor relembrou que um número complexo é composto de duas partes e que nem sempre as duas aparecerão explicitamente.

Após a conclusão da segunda etapa da SF, prosseguiu-se a apresentação da solução por parte dos alunos, sendo essa a terceira etapa da SF, conforme apresentada algumas:

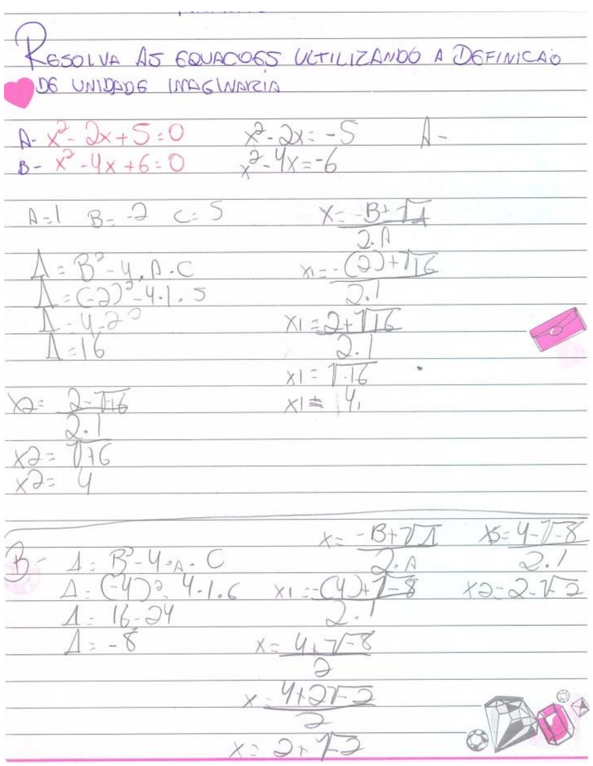
Figura 12: Solução - Dupla 01



Fonte: pesquisa direta

Observa-se na solução da Dupla 01, a compreensão do conceito de unidade imaginária apresentando corretamente o cálculo dos dois itens.

Figura 13: Solução - Dupla 08

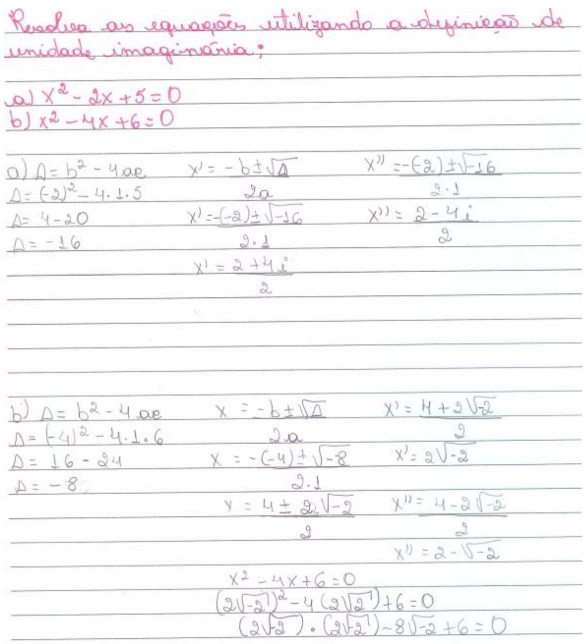


Fonte: Pesquisa direta.

Observa-se na solução da Dupla 08 uma dificuldade de operacionalização no conjunto dos números inteiros, pois a sentença, $4 - 20 = 16$, demonstra desconhecimento das propriedade básicas de operacionalização no conjunto dos inteiros, dificultando, assim, a absorção do conceito de números complexos que trabalha de cálculos simples, porém no item b observa-se o cálculo de sentença semelhante correto, $16 - 24 = -8$, o que nos leva a deduzir que houve uma divisão de cada item para cada membro, demonstrando que na dupla, um detém melhor o conhecimento dos números complexos e o outro tem elevada dificuldade por não conseguir operar com sentenças simples.

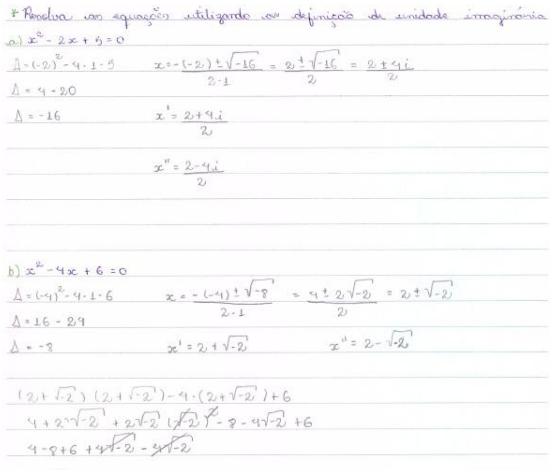
Caso semelhante a esse ocorre também com a dupla 14, em que há a solução de um item correto e o outro errado.

Figura 14: Solução - Dupla 04



Fonte: Pesquisa direta.

Figura 15: Solução - Dupla 05

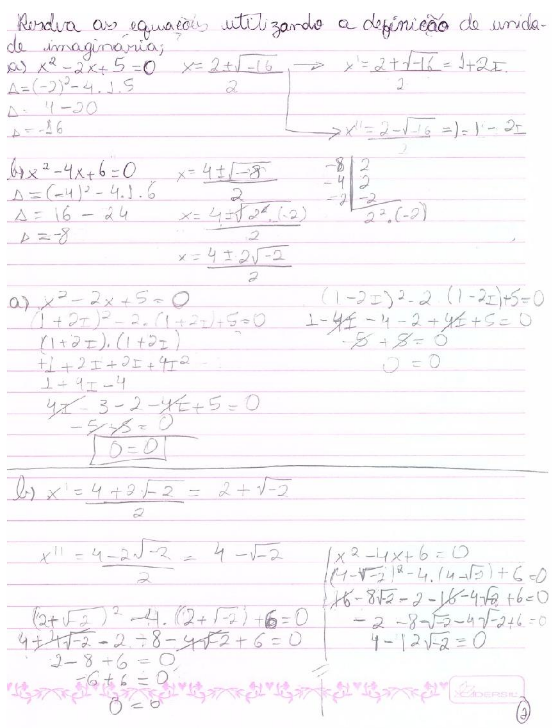


Fonte: Pesquisa direta.

Semelhante à Sessão 1, as duplas 4 e 5 apresentaram a mesma solução para o item 1, inclusive contendo as mesmas dificuldades, ou seja, de simplificação de frações, fazendo-nos inferir que para a Sessão 2, uma dupla copiou a resposta da outra.

Após a apresentação das soluções, prosseguiu-se para a quarta etapa da Sequência Fedathi, a Prova, conforme veremos a seguir:

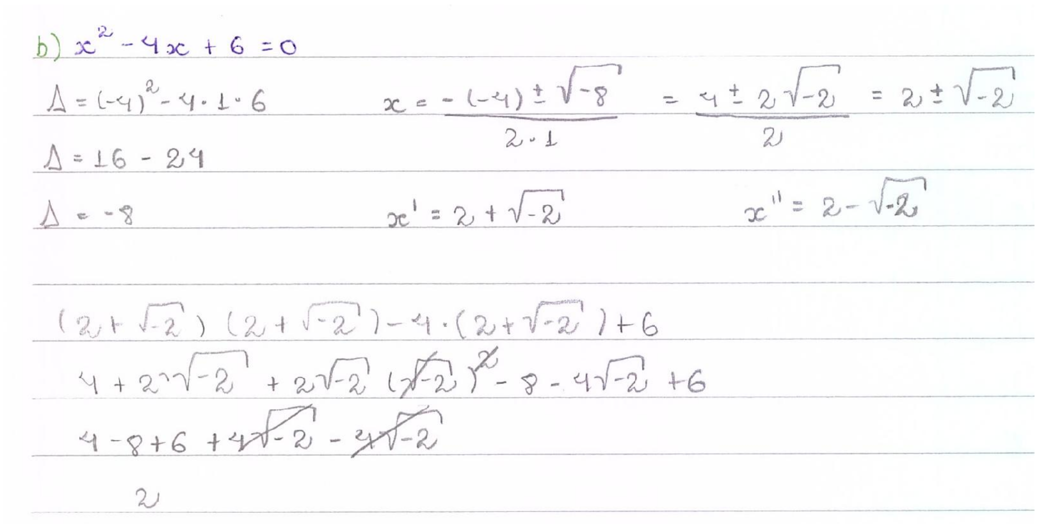
Figura 16: Solução - Dupla 02



Fonte: Pesquisa direta.

Conforme pode-se observar, a dupla 02, apresentou além da solução, a prova do cálculo, confirmando estar correta as alternativas descobertas, demonstrando também o conhecimento consolidado de equações do 2º grau, operações com inteiros, propriedades da radiciação, bem como o desenvolvimento de produtos notáveis.

Figura 17: Solução - Dupla 05



Fonte: pesquisa direta

A solução apresentada pela dupla 05 demonstra conhecimento do conceito de unidade imaginária bem como domínio dos conteúdos básicos de matemática.

Pode-se dizer que o aprendizado do conceito de unidade imaginária foi compreendido de forma satisfatória, pois apenas 3 das 17 duplas não conseguiram chegar a solução correta, das 14 corretas consideramos que 12 prosseguiram o mesmo raciocínio no desenvolvimento dos cálculos e 02 deixaram de simplificar o resultado final.

Conclui-se que os objetivos da sessão didática 02 foram alcançados de forma satisfatória, uma vez que, os alunos participaram ativamente como sujeitos de sua própria aprendizagem e o professor utilizou a pedagogia mão-no-bolso.

4.8 Sessão Didática 3 – Solução de equações do 2º grau com discriminante negativo

A Sessão Didática 3 (Apêndice C), contou com a participação de 34 alunos e foi ministrada na sala de aula da própria turma com a utilização de materiais básicos como: pincel e quadro branco. O professor dividiu em 17 duplas, sendo mantida as mesmas duplas das sessões 2 e 3 para que, assim pudesse fazer um acompanhamento e análise da evolução.

Ao iniciar os trabalhos, o professor propõe o seguinte acordo didático que foi construído com o consenso de todos os presentes.

Professor: Espera que alunos participem ativamente do processo de construção do conceito de números complexos bem como das atividades e discussões acerca do tema.

Aluno: espera que o professor os oriente com dedicação e paciência de modo a subsidiar a aprendizagem dos mesmos.

Antes de iniciar as atividades, o professor fez uma breve retrospectiva das sessões didáticas 1 e 2 e iniciou a aula com a explanação sobre classificação, conjugado e igualdade de números complexos, conceitos importantes para o entendimento e resolução das atividades.

Na sequência, praticando a primeira etapa da Sequência Fedathi(tomada de posição), é proposta a seguinte atividade retirada das páginas 127 e 128 do livro[4] adotado pela escola:

1) No diagrama a seguir, cada uma das letras r, s, t, u e v representa um dos números $3{,}14; \sqrt{2}; -3; 4-2i$ e 0. Determine o valor associado a cada uma dessas letras.
2) Classifique, no caderno, como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

   a) ( ) todo número real também é complexo.
   b) ( ) todo número complexo é também número real.
   c) ( ) $C \cap R = \emptyset$.
   d) ( ) $C - R = \{z/z = a + bi, com\{aeb\} \in Reb \neq 0\}$.
   e) ( )O conjugado do número $3 + 4i$é $-3 - 4i$.
   f) ( ) O conjugado do número $3 + 4i$é $3 - 4i$
   g) ( ) Se $a + 3i = 6 + bi, com\{a, b\} \subset R, então, a + b = 9$.

3) Determine os valores reais de x paraque o número complexo $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ seja:
   a) Real.
   b) Imaginário puro.

4) Dada a igualdade $2a + (a + 2)i = (b - a) + bi$, determine os números reais a e b.

4 Matemática Paiva. São Paulo, 2013.

Após a apresentação das questões, os alunos passaram a vivenciar as duas primeiras fases da SF (tomada da posição e maturação). Podemos observar nos diálogos:

Exemplo 1

A dupla 17 formada pelos alunos A e B pergunta ao professor:

Aluno B: O zero é real?

O professor responde com outra pergunta:

Professor: O zero é um número natural? Houve um silêncio simultâneo.

Professor: Os naturais são formados do zero pra frente.

Aluno B: então o zero faz parte dos naturais.

Professor: Antes do surgimento dos números complexos, qual era o último conjunto numérico conhecido por vocês?

Aluno B: Número Real.

Professor: Até então os números reais eram o maior conjunto numérico e todos os outros estavam dentro dele, ou seja, estão contidos dentro dele. Dessa maneira, o que você conclui sobre zero ser real?

O aluno não reponde diretamente mas faz sinal positivo de entendimento sobre a questão. Sem saber se realmente o aluno compreendeu o professor faz a seguinte pergunta, se o zero pertence aos naturais e os naturais estão dentro dos reais, o que eu podemos concluir sobre o zero ser real?

Aluno B: Se o zero representa nada, e o nada não existe, então tudo isso é um conceito filosófico.

Professor: Foram necessários dois séculos para a aceitação do zero e apesar dele representar nada, dependendo de sua posição ele pode representar valores maiores que o nada, por exemplo, o zero colocado na frente do número 13, torna-o 130, ou seja, trata mesmo apenas de um conceito filosófico?

Nesse momento, a dupla 09 apresenta a mesma dúvida e a dupla 02 afirma: o zero é natural porque está dentro dos reais.

A questão 1 se refere ao conhecimento dos conjuntos numéricos, um processo importante para compreensão dos Números Complexos.

Exemplo 02

A dupla 06 formada pelos alunos A e B faz a seguinte pergunta:

Aluno A: Racionais é fração não é professor?

Percebendo a dificuldade da dupla, o professor faz uma explanação ao invés de uma pergunta.

Professor: todo número que pode ser representado em forma de fração é considerado um número racional, excetuando-se aqueles que não mantem uma constância no período, a exemplo de $\pi e \sqrt{2}$.

Exemplo 03

A dupla 01 formada pelos alunos A e B, faz a seguinte indagação:

Aluna A: O que significa esse símbolo ∅?

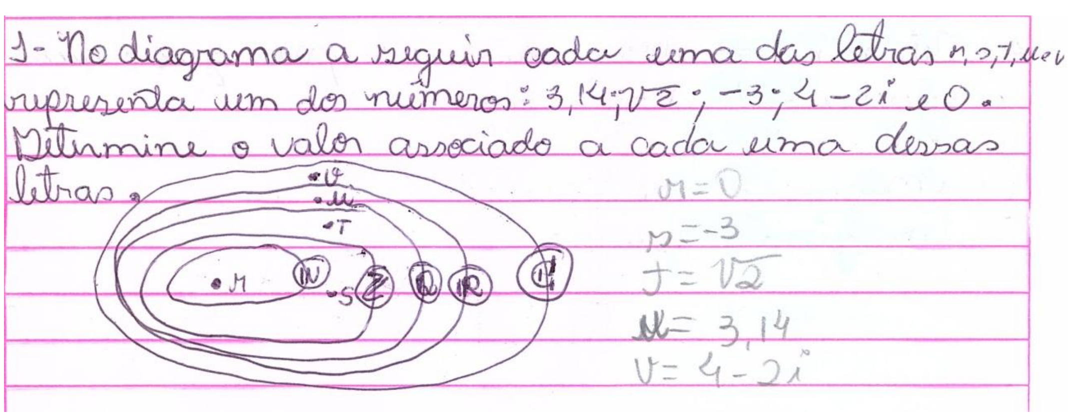
Professor: Você lembra-se de conjunto numéricos? Quando um conjunto não tem nada, é chamado de?

Inicialmente a aluna não pronunciou a palavra conjunto vazio, porém percebeu-se que, apesar de não lembrar o nome correto do termo, houve a compreensão do que significa o símbolo.

Pelos diálogos acima, percebe-se que as dúvidas mais recorrentes se tratavam de conceitos básicos e simbologias relacionadas aos conjuntos numéricos, voltando-se para as duas primeiras questões, sendo as duas etapas(Tomada de posição e Maturação) da SF atingidas de uma forma que se configurava uma revisão de conteúdos estudados no ensino fundamental.

Após as indagações iniciais e conclusão, os alunos iniciaram a solução(3ª etapa da SF) das atividades propostas, conforme segue os exemplos:

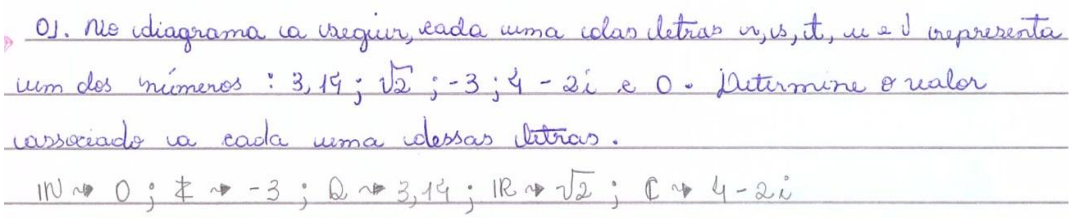
Figura 18: Solução - Dupla 17



Fonte: Pesquisa direta

Observa-se na solução apresentada pela dupla 17 uma dúvida em relação ao conceito de números racionais.

Figura 19: Solução - Dupla 01



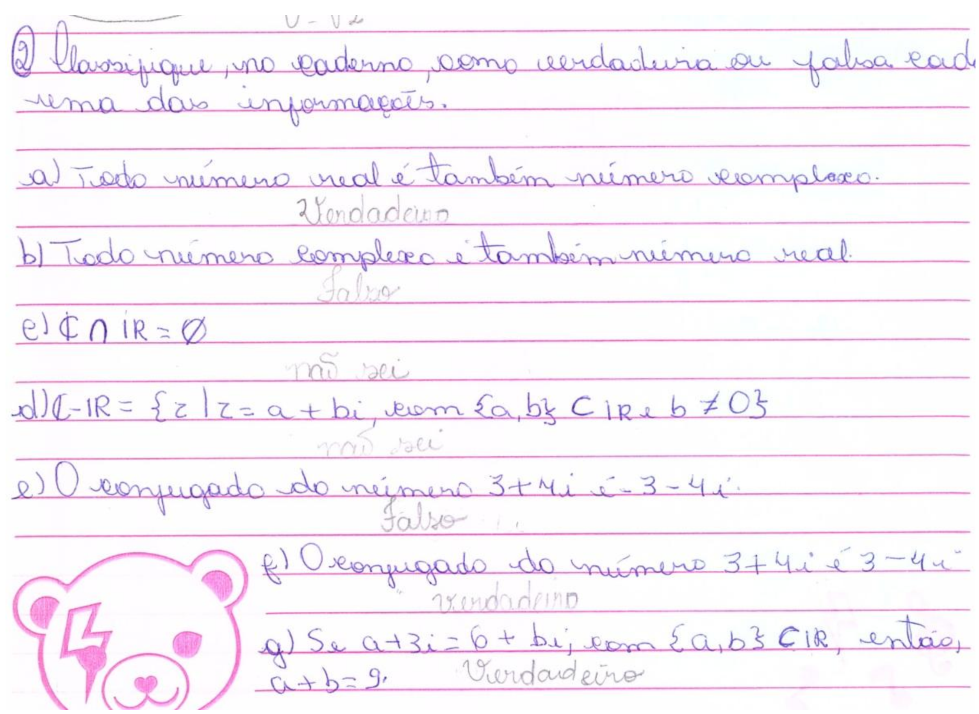
01. No diagrama a seguir, cada uma das letras r, s, t, u e v representa um dos números: 3,14; $\sqrt{2}$; -3; 4 - 2i e 0. Determine o valor associado a cada uma dessas letras.

$\mathbb{N} \rightarrow 0$; $\mathbb{Z} \rightarrow -3$; $\mathbb{Q} \rightarrow 3{,}14$; $\mathbb{R} \rightarrow \sqrt{2}$; $\mathbb{C} \rightarrow 4-2i$

Fonte: Pesquisa direta

Observa-se pela solução apresentada pela Dupla 01, a compreensão dos conjuntos numéricos, fortalecendo, dessa forma, um maior entendimento do conceito de números complexos.

Figura 20: Solução - Dupla 04



2) Classifique, no caderno, como verdadeira ou falsa cada uma das informações.

a) Todo número real é também número complexo.
Verdadeiro

b) Todo número complexo é também número real.
Falso

c) $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \emptyset$
não sei

d) $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0\}$
não sei

e) O conjugado do número 3+4i é -3-4i.
Falso

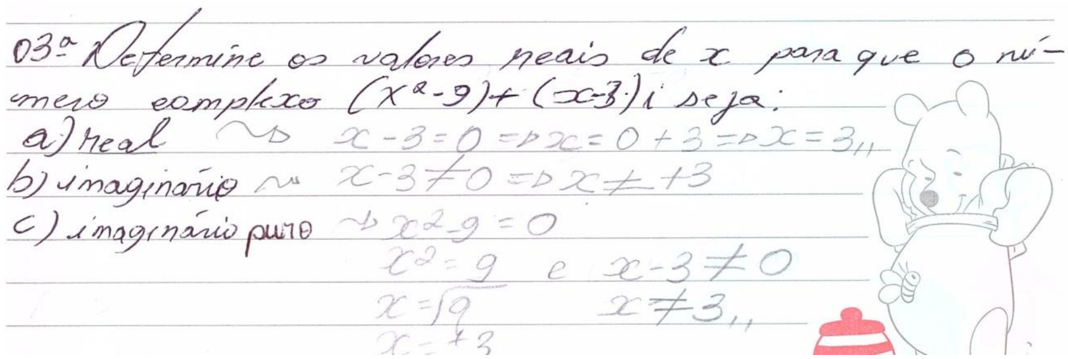
f) O conjugado do número 3+4i é 3-4i
Verdadeiro

g) Se a+3i = 6+bi, com $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$, então, a+b=9.
Verdadeiro

Fonte: Pesquisa direta

Na questão 02, a solução apresentada pela dupla 04, demonstra certo desconhecimento da simbologia utilizada. Isso se explica pelas dificuldades de aprendizagem acumuladas em anos anteriore1.

Figura 21: Solução - Dupla 17


03ª Determine os valores reais de x para que o número complexo $(x^2-9)+(x-3)i$ seja:

a) real $\rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=0+3 \Rightarrow x=3$

b) imaginário $\rightarrow x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq +3$

c) imaginário puro $\rightarrow x^2-9=0$

$x^2=9$ e $x-3\neq 0$

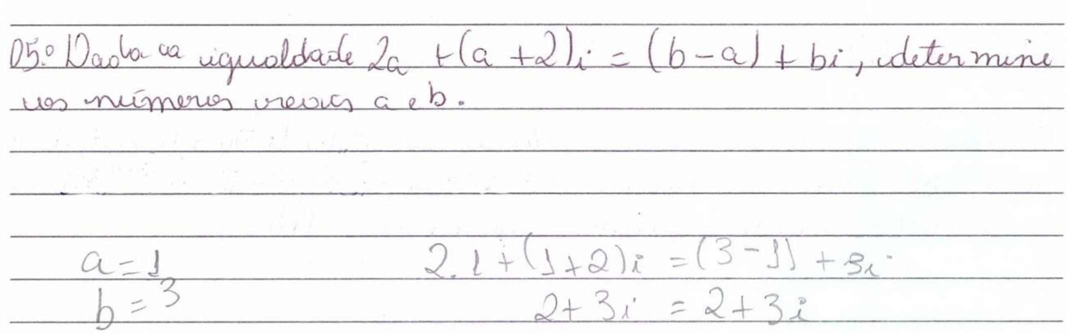
$x=\sqrt{9}$ $\quad x\neq 3$

$x=\pm 3$

Fonte: Pesquisa direta

A dupla 15, através da solução apresentada, demonstrou domínio sobre a classificação dos Números Complexos, bem como apresentou o cálculo de equações de 1º e 2º graus corretos, conhecimentos importantes para compreensão e prosseguimento de estudos posteriores, especialmente voltados aos N.C e aos conjuntos numéricos.

Figura 22: Solução - Dupla 12


05º Dada a igualdade $2a+(a+2)i=(b-a)+bi$, determine os números reais a e b.

$a=1$

$b=3$

$2.1+(1+2)i=(3-1)+3i$

$2+3i=2+3i$

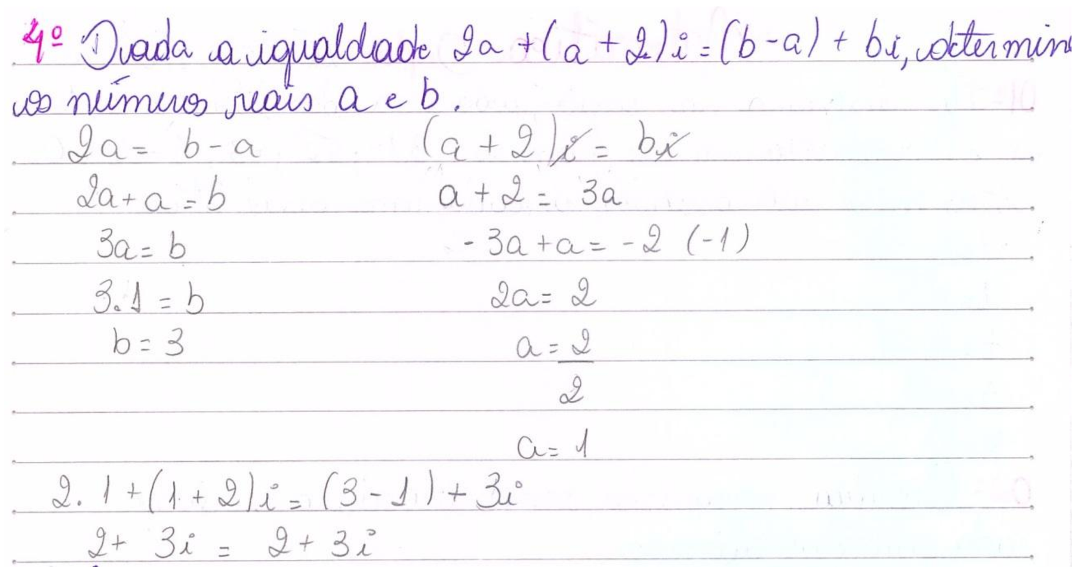
Fonte: Pesquisa direta

Na questão 4, a solução apresentada pela dupla 12, apresenta valores desconexos de cálculos, pelo que se deduz, a solução foi proposta por tentativas e está correta.

Observa-se também que além de vivenciar a terceira fase da SF, ao substituir os valores na sentença, a dupla vivenciou também a ultima etapa da SF, a prova.

A prova também foi vivenciada pela dupla 16, conforme se pode observar na figura abaixo:

Figura 23: Solução - Dupla 16



4º Dada a igualdade $2a+(a+2)i=(b-a)+bi$, determine os números reais a e b.

$2a = b - a$ $\quad$ $(a+2)\cancel{i} = b\cancel{i}$

$2a + a = b$ $\quad$ $a + 2 = 3a$

$3a = b$ $\quad$ $-3a + a = -2 \ (-1)$

$3 \cdot 1 = b$ $\quad$ $2a = 2$

$b = 3$ $\quad$ $a = \frac{2}{2}$

$a = 1$

$2 \cdot 1 + (1+2)i = (3-1) + 3i$

$2 + 3i = 2 + 3i$

Fonte: Pesquisa direta

Dessa forma, contemplou-se nas questões propostas, as quatro fases da SF. Conclui-se, portanto, que os objetivos da sessão foram alcançados, haja vista que os alunos participaram ativamente das discussões com a posição mediadora do professor, vivenciando as fases da SF.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NAS SESSÕES DIDÁTICAS

O ensino tem-se tornado cada vez mais desafiador, o desempenho de nossos estudantes em avaliações internacionais como o PISA revelam que mesmo diante de avanços nos últimos anos ocupamos as últimas colocações no ranking da OCDE. A escola pública recepciona a maioria dos jovens no ensino básico, o que exige um esforço do ponto de vista financeiro, pedagógico e principalmente de novas metodologias e inovações que venham a melhorar os índices de aprendizagem.

Nesse capítulo serão analisados qualitativamente e quantitativamente os resultados obtidos no pré-teste, pós-teste bem como nos questionários aplicados ao final da pesquisa.

Buscam-se elementos que possam subsidiar a compreensão dos aspectos favoráveis à pesquisa e aos resultados de aprendizagem obtidos ou não através do método apresentado.

5.1 Categorias de Análise – Escolha e Validação

Tendo como referência os objetivos da referida pesquisa, bem como a aplicação das sessões didáticas, propõe-se duas categorias de análises explicitadas e validadas no quadro abaixo:

Quadro 08 – Escolha e Validação das Categorias de Análises.

	CATEGORIA 01	**CATEGORIA 02**
OBJETIVOS	Analisar se é possível construir o conceito de Números Complexos partindo de uma situação problema e utilizando as etapas da Sequência Fedathi com a postura “mão no bolso”.	Analisar na visão dos alunos, a partir dos questionários produzidos, aspectos relacionados à metodologia, à postura do professor e aos números complexos.
HIPÓTESES	Espera-se a confirmação dessa hipótese com a aplicação das três sessões didáticas.	Espera-se que os alunos reconheçam: a viabilidade da aplicação da Sequência Fedathi como metodologia no ensino de Números Complexos; a postura do professor com a pedagogia mão-no-bolso seja viável para o aprendizado dos N.C; reconheçam a importância do estudo de números complexos para prosseguimento de estudos posteriores.

Fonte: pesquisa direta.

A categoria 01 faz referência direta à sessão didática 1, oportunidade em que o professor iniciou a aula partindo-se de uma situação problema e através da postura mão-no-bolso, construiu com a participação ativa e protagonista dos alunos o conceito de Números Complexos percorrendo todas as fases da Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova. A hipótese foi confirmada com êxito, sobretudo pela aplicação em sala de aula convencional de uma escola pública. A sessão foi aplicada sem alterar o cotidiano da sala de aula, haja vista que o pesquisa foi aplicada por um professor externo à instituição de ensino.

A Categoria 02 faz referência a toda pesquisa, considerando relevante, principalmente, a visão dos alunos em relação à metodologia, à postura do professor e aos números complexos. A importância da opinião dos sujeitos da pesquisa se deu pela compreensão de que somente os alunos poderiam avaliar a viabilidade da proposta por serem os principais receptores da proposta. As fontes que subsidiaram essa análise se deram pela aplicação de questionários ao final da pesquisa.

5.2 Avaliação Diagnóstica

Segundo Borges Neto (2013, p. 20), "antes de apresentar o problema, o docente há de realizar um diagnóstico acerca dos pré-requisitos que os alunos necessitam ter referente ao saber que se pretende ensinar", portanto foi aplicada uma avalição diagnóstica com para se observar possíveis dificuldades de aprendizagem.

5.2.1 Análise da Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica (Apêndice A) foi realizada na turma de 3º ano do curso técnico em finanças da Escola Estadual de Educação Profissional Capelão Frei Orlando em 06 de novembro de 2015. O objetivo foi diagnosticar: o conhecimento das questões básicas da matemática; conhecimentos relacionados às equações do 2º grau e muito especialmente às raízes quadradas de números negativos (conceito importante para aprendizagem dos números complexos).

Observando-se as faltas de alunos existentes na data da aplicação do teste, apresenta-se um resumo numérico da avaliação diagnóstica:

Tabela 1- Operações com Números Inteiros

ITEM	ACERTOS	PERCENTUAL	ERROS	PERCENTUAL
a) Soma	28	100 %	0	0 %
b) Subtração	27	96,43 %	1	3,57 %
c) Multiplicação	24	85,71 %	4	14,29 %
d) Divisão	28	100 %	0	0 %

Fonte: pesquisa direta

A primeira questão se refere à operações como números inteiros. Os resultados, de acordo com a tabela 1, demonstram que todos responderam satisfatoriamente os itens a e d, um pequeno percentual (3,57%) não respondeu corretamente o item b e o maior percentual de erros se deu no item c. Portanto, infere-se que, que há uma boa base de aprendizagem, no que concerne à operações como números inteiros.

Tabela 2 - Resolução de Equações

ITEM	ACERTOS	PERCENTUAL	ERROS	PERCENTUAL
a) 2º grau completa	14	50,00	14	50,00
b) 1º grau	20	71,43	8	28,57
c) 2º grau incompleta	13	46,43	15	53,57

Fonte: pesquisa direta

A segunda questão abordava a resolução de equações de 1º e 2º graus. Conforme podemos observar, os resultados mostram que metade da turma não respondeu satisfatoriamente o item a, sendo duas dessas avaliações deixadas em branco no referido item. Quanto à resolução de equações do 1º grau, 71,43 % resolveu corretamente. O conhecimento do item C é preponderante para a compreensão do conceito de números complexos, nesse item, tivemos o maior percentual de erros, inferindo-se os desafios postos para o ensino de Números Complexos.

Tabela 3 – Operações com Polinômios

Item	Acertos	Percentual	Erros	Percentual
a) Multiplicação de Polinômio	11	39,29 %	17	60,71 %

Fonte: pesquisa direta

Na terceira questão, observa-se que aproximadamente 61% dos alunos tem dificuldade de fazer operações com polinômios, sendo esse, um requisito importante para o entendimento e seguimento de estudos posteriores como números complexos, apresentando mais um fator dificultador na aprendizagem do conteúdo proposto.

Tabela 4 – Operações com Potenciação

Item	Acertos	Percentual	Erros	Percentual
a) Base negativa e expoente positivo	27	96,43	1	3,57
b) Base positiva e expoente positivo	27	96,43	1	3,57
c) Base positiva e expoente negativo	9	32,14	19	67,86

Fonte: pesquisa direta

A quarta questão demonstra que praticamente todos os alunos detêm o conhecimento sobre as propriedades básicas da potenciação, sendo esse um fator favorável para a compreensão do conjunto dos números complexos. Quanto à potência com expoente negativo, os dados mostram que boa parte (67,86%) dos alunos participantes da pesquisa não conhece essa propriedade, o que reforça a ideia de que não foi aprendida no tempo correto.

Tabela 5 - Operações com Radiciação

Item	Acertos	Percentual	Erros	Percentual
a) Raiz quadrada de radicando positivo	26	92,86	2	7,14
b) Raiz quadrada de radicando negativo	14	50,00	14	50,00
c) Raiz quadrada de radicando positivo	27	96,43	1	3,57

Fonte: pesquisa direta

A questão cinco apresenta dados satisfatórios quando se trabalha com raiz quadrada com radicando positivo, com percentual de acerto de 92,86% e 96,43% respectivamente, porém observa-se dificuldade na compreensão ao se tratar de raízes quadradas de números negativos, mostrando que 50% não compreende bem o que isso significa.

Outro fato relevante para a aprendizagem do conceito de números complexos é o domínio das equações de 2º grau e a compreensão da insuficiência dos números reais, sobre esse fato, demonstraremos algumas respostas satisfatória relacionadas ao item C, que solicita do aluno a resposta para $\sqrt{-9}$:

Aluno B da dupla 03: “não existe valor para raiz negativa”.

Aluno A da dupla 12: “acho que não existe raiz de número negativo”.

Aluno A da dupla 13: “conforme minha carreira de estudante, não existe raiz quadrada de -9, pois número algum multiplicado por ele mesmo chega a um resultado negativo”.

O texto utilizado pelo aluno A da dupla 13 explicita o que há de mais refinado de conhecimento prévio para compreensão dos números complexos, pois é justamente essa afirmação, a inquietação e justificativa do surgimento dos números complexos, mesmo sabendo que a motivação para o surgimento se deu pela resolução de equações do 3º grau no século XVI.

Essas três afirmações descritas acima, seriam por si só, subsídios importantes para a introdução do conteúdo, pois através dessa abordagem poderia ser mais bem explicitada à motivação para o surgimento dos Números Complexos.

5.3 Comparação entre a Avaliação Diagnóstica e a Avaliação Final

A avaliação final (Apêndice B) foi aplicada ao término da pesquisa com o objetivo de se perceber o grau de compreensão dos alunos em relação ao conceito de Números Complexos. A comparação da avaliação diagnóstica será feita com questões que exigiam o mesmo grau de habilidade da avaliação final.

Tabela 6 – Resolução de equações com raízes reais.

Conteúdo	**Avaliação Diagnóstica**		**Avaliação Final**	
	Acertos	**Erro**	**Acertos**	**Erro**
Resolução de Equação do 2º grau	50 %	50 %	74,29	25,71

Fonte: pesquisa direta

O item **a** da segunda questão da avaliação diagnóstica exigia a mesma habilidade da terceira questão da avaliação final, tratando-se da resolução de equações do 2º grau, dessa forma, houve um aumento significativo no número de alunos que conseguiram responder corretamente e consequentemente a diminuição no número de erros.

Portanto, em relação ao pré-teste, quando apenas 50% responderam corretamente, pode-se considerar nessa habilidade, um avanço de compreensão e de consolidação de propriedades básicas da matemática.

Tabela 7 – Resolução de equações com raízes complexas

Conteúdo	Avaliação Diagnóstica		Avaliação Final	
Resolução de Equação com raízes negativas	**Acertos**	**Erro**	**Acertos**	**Erro**
	46,43 %	53,57 %	80 %	20 %

Fonte: pesquisa direta

O item c da segunda questão do diagnóstico requeria a mesma habilidade da segunda questão do pós-teste, conforme se pode observar na Tabela 7, havendo um aumento significativo na compreensão do que é uma raiz negativa, pois 80% dos alunos responderam corretamente, demonstrando a compreensão sobre Números Complexos, pois todas as respostas continham a unidade imaginária.

A avaliação final também verificou a percepção dos alunos acerca dos números complexos requerendo a definição, conforme Tabela 4, da qual se obteve 91,43% de repostas satisfatórias, 5,71% não satisfatória e 2,86% deixadas em branco.

Tabela 8 – Definição de Números Complexos

Conteúdo	Avaliação Final		
Definição de N.C	**Acertos**	**Erro**	**Em branco**
	91,43 %	5,71 %	2,86 %

Fonte: pesquisa direta

Outro ponto importante resumido na Tabela 8, é que, das respostas satisfatórias, 53,13% foi produzida por texto original, 28,13% foi respondido com textos semelhantes à definição do livro adotado e 18,75% dos estudantes responderam incompletamente, porém mostrando entendimento acerca da definição de Números Complexos.

Tabela 9 – Definição Satisfatória

Texto Original	Semelhança à definição do Livro	Incompleta
53,13 %	28,13 %	18,75 %

Fonte: pesquisa direta

Seguem-se alguns exemplos das definições consideradas satisfatórias:

Figura 24 – Definição – Aluno A - Dupla 1

01. Para você, o que é um número complexo? E o que representa a unidade imaginária i?

A unidade imaginária "i" representa o produto negativo de dois números iguais. Os números complexos caracterizam-se por obterem representação de números que, antes, eram considerados como não pertencentes de operações matemáticas que envolvem dois números iguais. Como por exemplo, a raiz quadrada, considerando que a multiplicação ~~[illegible]~~ obtem produto

Fonte: Pesquisa direta.

O aluno demonstra através da explicitação da definição, a compreensão e o contexto em que se desenvolveram os números complexos.

Figura 25 – Definição – Aluno A - Dupla 2

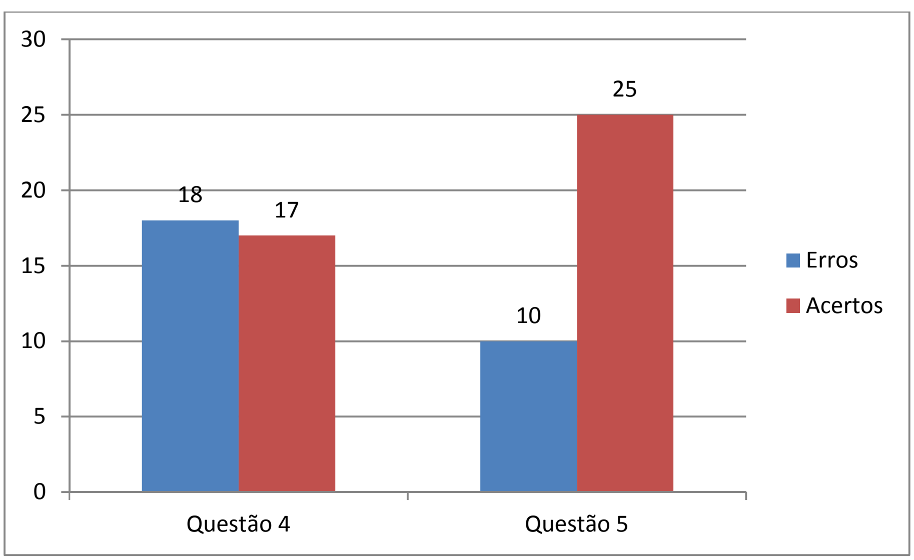
i? É um número formado por uma parte real x e outra imaginária I, tal que y + xI, sendo y também pertencente ao conjunto dos números reais. Unidade imaginária I é aquela na qual se eleva ao quadrado, obtendo-se um negativo, isto é; $I^2 = -1$

Fonte: Pesquisa direta.

O aluno A da dupla 2 demonstra, através da definição, a compreensão do conceito bem como da utilização da linguagem formal.

A questão 4 exigia conhecimento da classificação de número imaginário, imaginário puro e real. A questão 5 verificou o domínio dos alunos em relação ao conjugado de um número complexo. Os resultados do desempenho dos alunos nestas duas questões estão expressos no gráfico a seguir:

Gráfico 1: Desempenho dos alunos nas questões 4 e 5 da avaliação final.



Fonte: pesquisa direta

Dessa forma, observa-se que 48,57% dos estudantes não conseguiram resolver questões que envolviam definições contidas na questão 4, provavelmente pela dificuldade de memorização de propriedades e conceitos a partir de sua própria construção, no entanto, em relação à compreensão do conjugado de números complexos, a mesma se deu de forma satisfatória, haja vista que a maior parte dos estudantes (71,43%) respondeu corretamente.

5.4 Análise do Questionário

Apresentaremos neste tópico a análise dos questionários aplicados ao final da pesquisa, com o objetivo de compreender melhor o perfil dos sujeitos envolvidos na pesquisa e analisar na visão desses: aspectos relacionados a Sequência Fedathi; à postura do professor e ao conteúdo de Números Complexos.

5.4.1 Perfil dos Sujeitos

Foi aplicado ao final da pesquisa, um questionário **(Apêndice C)** para permitir traçar um perfil dos sujeitos componentes desse estudo, bem como colher desses a percepção acerca da metodologia utilizada (Sequencia Fedathi) e do conteúdo trabalhado (Números Complexos).

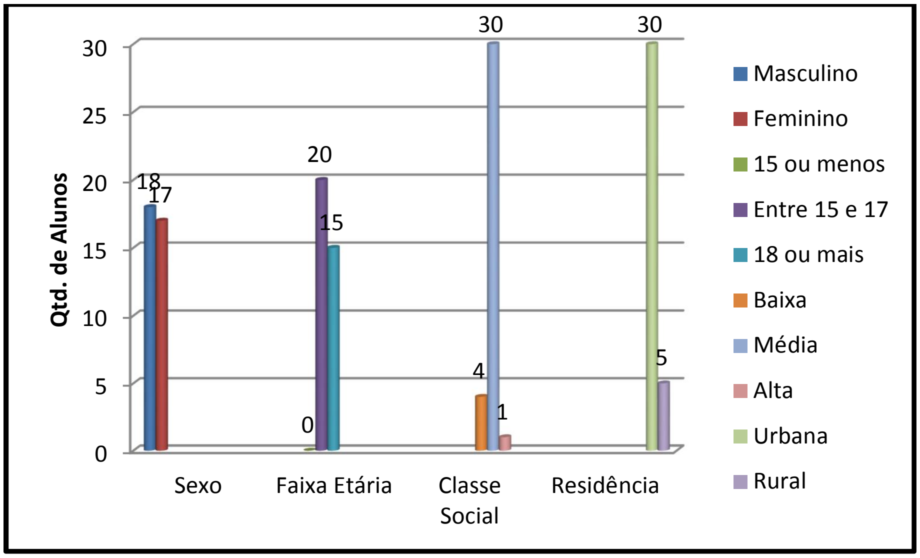
A primeira parte fornece dados referentes à: sexo, idade, faixa social.

Os dados revelam que, dos entrevistados, 51,43% eram do sexo masculino e 48,57% do sexo feminino. Em relação a faixa etária, 57,14% tinham entre 15 e 17 anos 42,86% encontravam-se com 18 ou mais, não tendo, nesse caso, nenhum aluno com 15 anos ou menos.

Sobre não haver nenhum aluno com 15 anos ou menos, o fato se dá pela exigência do aluno ter 16 anos completos para adentrar no campo de estágio, pois a turma escolhida para pesquisa está situada em uma escola profissionalizante.

Em relação a classe social, 11,43% se consideram baixa, 85,71% classe média e 2,86% classe alta. Quando perguntados sobre a localização de suas moradias, 85,71 respondeu zona urbana e 14,29% zona rural.

Gráfico 2: Perfil dos alunos relacionado a Sexo, Faixa Etária, Classe Social e Residência.



Fonte: pesquisa direta

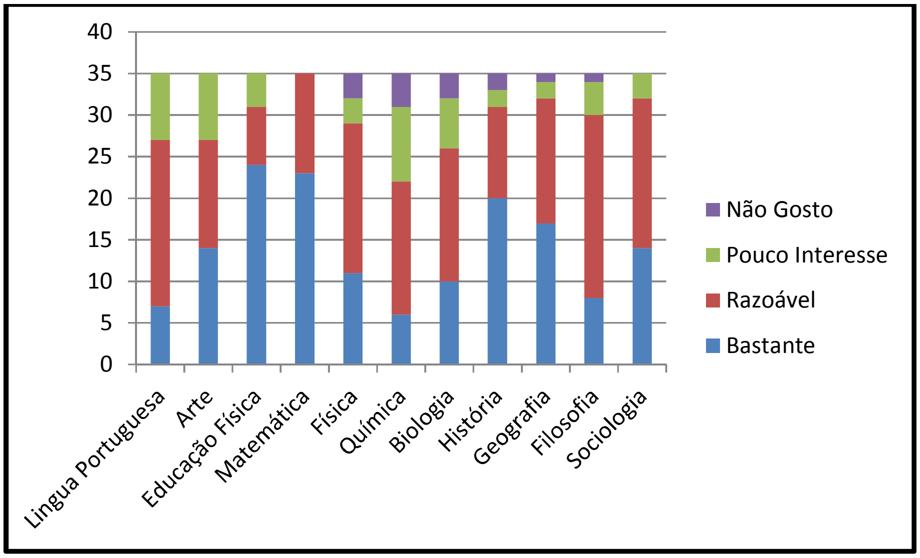
E relação ao sexo, percebe-se uma relação numérica equilibrada entre homens e mulheres, contribuindo para resultados com representações praticamente iguais, porém o mesmo foi solicitado apenas no intuito de definir melhor o perfil dos sujeitos.

A faixa etária demonstra que boa parte dos alunos se encontra na idade apropriada para o término do ensino médio, sendo esse, um fator favorável à pesquisa. Outro fator importante, é que 85,71% declararam fazer parte da classe média, e apenas 11,43% na baixa, fato que representa a realidade vivenciada e percebida ao longo da pesquisa e dos diálogos decorridos da aplicação desse trabalho, o fato de os mesmo se considerarem em classe média, não indica, necessariamente que os mesmos pertençam.

Quanto à moradia, a maior parte reside na zona urbana (85,71%), porém há de se considerar que mesmo sendo pequeno o número de residentes na zona rural (14,29%), esses enfrentam dificuldades como distancia de deslocamentos, e consequentemente o tempo para chegar à escola e voltar para casa, o que se soma às dificuldades de participação em eventos e pesquisas no contra turno(noite). Quanto aos residentes na zona urbana, somam-se dificuldades socioeconômicas bem como as influências da vida urbana moderna.

A quarta pergunta do questionário se referia ao grau de interesse por disciplina, explicitados no gráfico a seguir.

Gráfico 3: Grau de Interesse por Disciplina

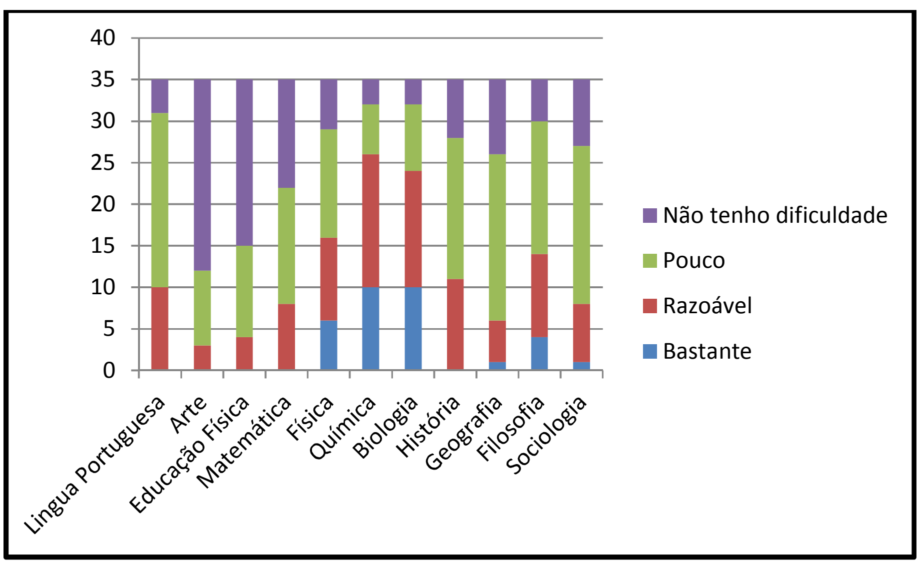


Fonte: pesquisa direta

Um ponto importante a se considerar é que a matemática tem o segundo maior índice de aceitação, ficando atrás apenas de educação física, esse fato se explica pela escolha dos alunos em se tornarem técnicos em finanças, uma área implicitamente dependente da matemática, nesse caso a matemática tem ainda, o menor índice de refeição, fatores esses favoráveis à metodologia e a aprendizagem.

No gráfico a seguir, indica-se o grau de dificuldade dos alunos entrevistados em relação às disciplinas da base comum.

Gráfico 4: Grau de Dificuldade por Disciplina.

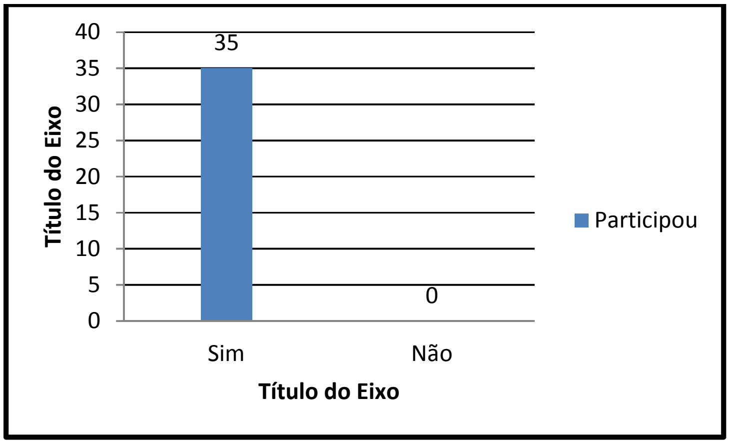


Fonte: pesquisa direta

Observa-se que a matemática é apresentada como a terceira disciplina com menor índice de dificuldade, ficando atrás apenas de Arte e Educação Física, como as disciplinas de menor dificuldade, sendo esse também, um aspecto preponderante na análise dos resultados da pesquisa.

O sétimo item do questionário indagava sobre a participação aluno no ENEM 2015, onde 100% responderam que sim.

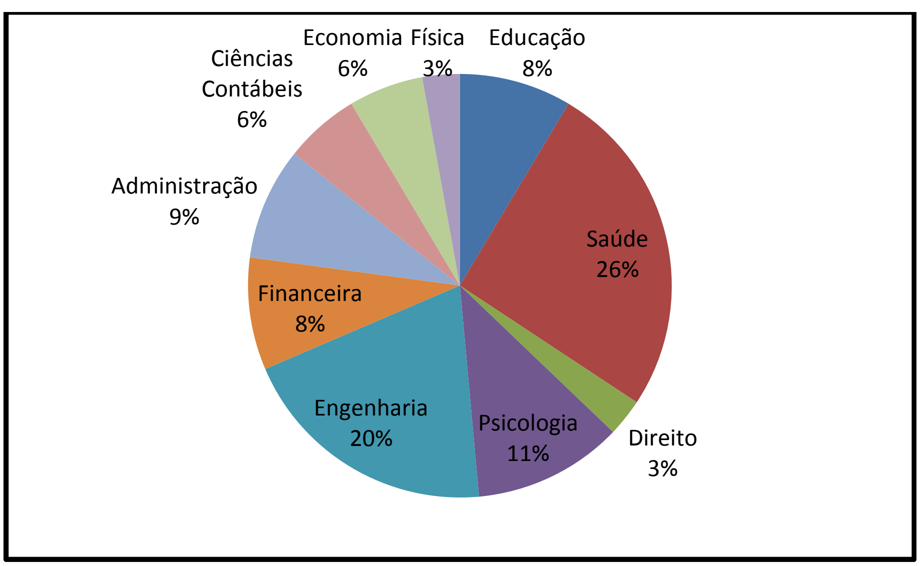
Gráfico 5: Participou do ENEM no ano de 2015?



Fonte: pesquisa direta

A participação de 100% dos alunos no exame se dá pelo foco do trabalho pedagógico da referida escola ser centrado no ENEM, fato que explica também, **o porquê do conteúdo de Números Complexos não estar contido no plano anual de matemática da escola.** Pois não se exige esse conteúdo no referido exame.

Gráfico 6: Áreas de preferência dos alunos que fizeram o ENEM no ano de 2015.

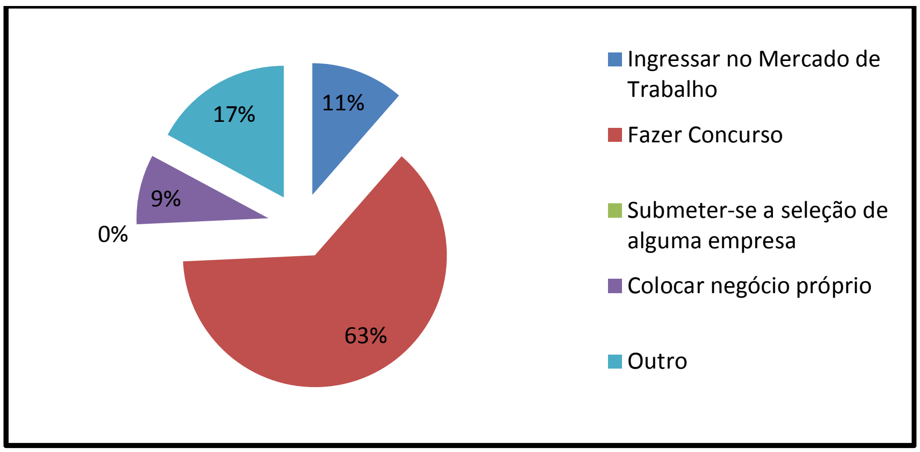


Fonte: pesquisa direta

Apesar do ensino de números complexos não ser exigido no ENEM bem como de não estar contido no plano anual da escola, observa-se uma pré-disposição dos alunos em ingressarem em áreas que necessitariam desse conteúdo como: engenharia (20%), Financeira (8%), Física (3%), Economia (6%), Ciências Contábeis (6%), Educação (8%), fato que nos faz refletir sobre o conteúdo a ser lecionado anualmente, esse deve seguir como linha de atuação uma avaliação externa?

A última questão da primeira parte do questionário foi: Caso não tenha interesse em fazer o ENEM/Vestibular, que outro rumo planeja para seu futuro estudantil e/ou profissional?

Gráfico 7: Opção dos alunos, caso não tivessem interesse em participar do ENEM.



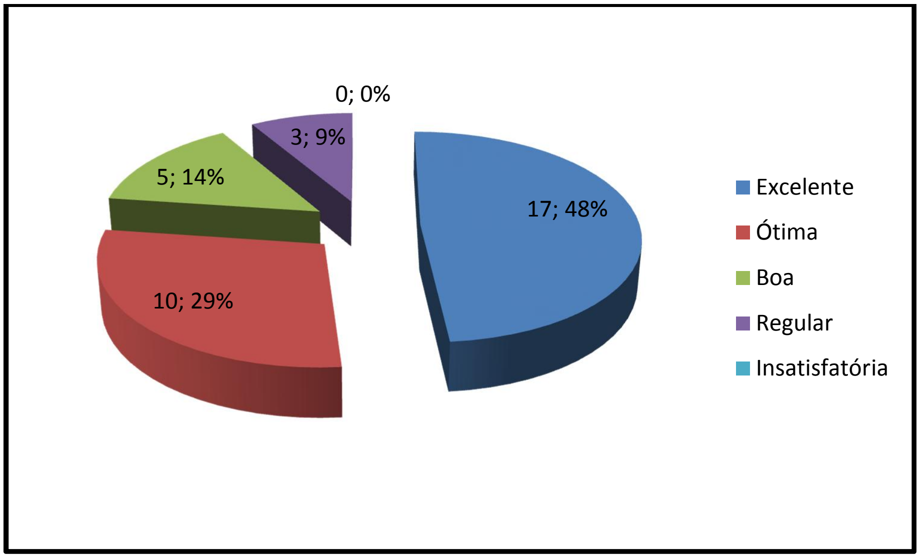
Fonte: pesquisa direta

Os resultados mostram que 63% dos alunos entrevistados pretende fazer concurso, esse índice poderá estar ligado ao regime de escola profissional que tem como objetivo a busca pela qualificação e o mercado de trabalho.

5.4.2 A metodologia na visão dos alunos

A aplicação do questionário relacionado à metodologia foi iniciada com a seguinte pergunta: O que você achou da metodologia apresentada pelo professor?

Gráfico 8: O que você achou da metodologia utilizada pelo professor?

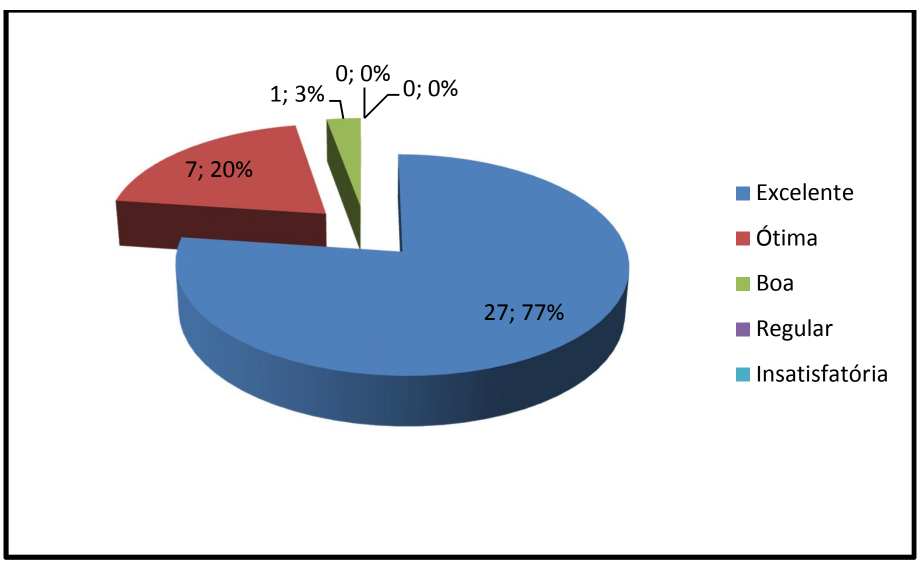


Fonte: pesquisa direta

Pode-se observar, pela visão discente, a aprovação da metodologia utilizada, haja vista que, somados os conceitos excelente, ótima e boa, teríamos um percentual de 91% de aprovação, é importante ressaltar que nenhum aluno considerou insatisfatória.

A segunda questão se referia à postura do professor, conforme se apresenta no gráfico a seguir.

Gráfico 9: O que você achou da postura do professor durante as aulas?

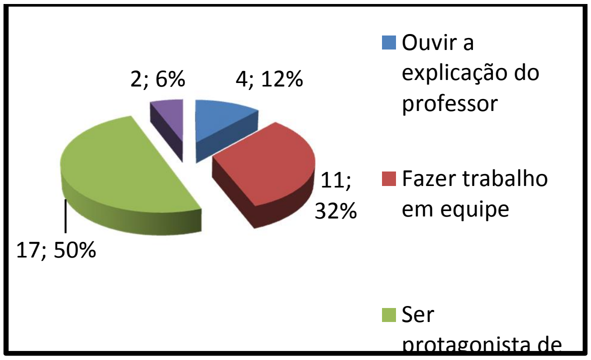


Fonte: pesquisa direta

Em consonância com a análise do gráfico anterior, teríamos 97% de aprovação da postura utilizada pelo professor (mão-no-bolso).

Corroborando com os resultados apresentados nas duas primeiras perguntas, ao serem indagados a respeito do que os fazem sentir mais a vontade durante uma aula, obtemos o seguinte resultado apresentado no gráfico abaixo.

Gráfico 10: O que te faz sentir mais a vontade durante uma aula?

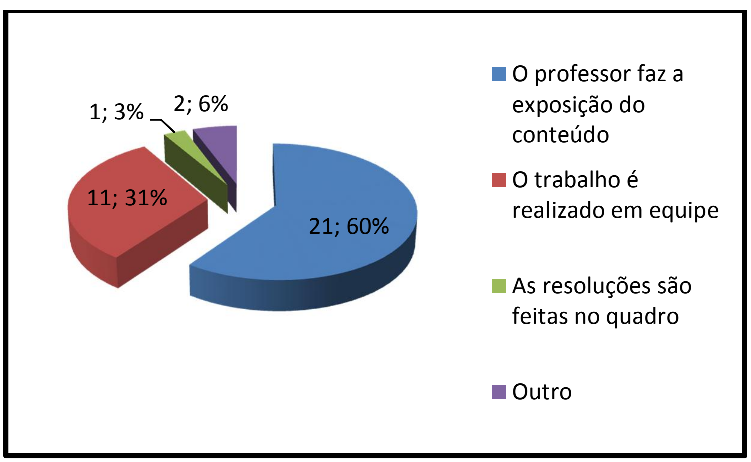


Fonte: pesquisa direta

Os dados mostram que 50% dos alunos demonstram que o protagonismo os deixa mais a vontade durante uma aula, 32% afirmaram que é o trabalho em equipe e apenas 12% afirmam ser a exposição do professor, o que demonstra o pouco interesse em receber aulas tradicionais meramente expositivas.

Contudo, ao serem perguntados em relação ao que os fazem aprender melhor, os dados apresentados no gráfico abaixo demonstram contrariedade.

Gráfico 11: Você consegue aprender melhor, quando?



Fonte: pesquisa direta.

Apesar da aprovação da metodologia(gráfico 8), o **gráfico 11** demonstra a preferência de grande parte dos alunos (60%) pela aula convencional em que o professor faz a exposição do conteúdo, porém isso não representa necessariamente rejeição à proposta metodológica (Sequencia Fedathi) haja vista que os mesmos são tirados de sua zona de conforto quando necessitam construir seu próprio conhecimento com a mediação do professor.

Abaixo destacaremos algumas opiniões colhidas no último item do questionário relacionado à metodologia, expressos a seguir:

Sobre a metodologia utilizada, quais as observações, sugestões, críticas a fazer?

QUADRO 09 - Percepção dos alunos sobre a Sequência Fedathi.

Aluno 1	Fazer com que os alunos que não participaram, ou que participaram pouco, fossem mais adeptos à participação.
Aluno 2	Aumentar a letra.
Aluno 3	Foi uma metodologia inovadora e muito proveitosa, onde aprendi muito.
Aluno 4	Melhorar a atenção com os alunos.
Aluno 5	Achei excelente quando o aluno faz uma pergunta e o professor não responde mais sem explicar para que o aluno chegue a resposta.
Aluno 6	Mais tempo de estudo.
Aluno 7	Foco nos alunos que menos se manifesta.
Aluno 8	Bastante renovadora e consegui absorver mesmo eu sendo a protagonista da pesquisa.
Aluno 9	Nenhuma critica a fazer, a metodologia foi interessante, mostra que o ser humano, nós, que temos capacidade de ser independente na relação da metodologia educativa de antes.
Aluno 10	Mais dinâmica.
Aluno 11	A metodologia usada pelo professor foi muito boa, tive interesse para realizar conteúdos desconhecidos. #muito bom#
Aluno 12	É algo que instiga o conhecimento.
Aluno 13	Não tenho nada a dizer, pois as aulas foram muito produtivas.
Aluno 14	Ser mais objetivo.
Aluno 15	Faltei muitas aulas, entretanto, a que estive presente consegui desenvolver o conteúdo abordado no momento.
Aluno 16	Ter em mente alunos que se sentem acuados por fazerem perguntas, dá um pouco de atenção a mais.
Aluno 17	Tal método é ótimo e seria bom aplicar em outras instituições, principalmente no ensino infantil e fundamental, já que essa metodologia estimula a pesquisa, assim desenvolvendo mais cientista.

Aluno 18	De grande agrado pois você perceber que pode “aprender sozinho”. Isso ajuda bastante na autoestima do aluno.
Aluno 19	Não tem, foi bem aceita particularmente, consegui construir minhas respostas, com ajudas “indiretas”, mas que foi positiva.
Aluno 20	A metodologia se mostrou bastante eficaz, já que os alunos utilizaram principalmente seu próprio conhecimento.
Aluno 21	Achei de uma importância, pois enaltece o conhecimento do aluno.

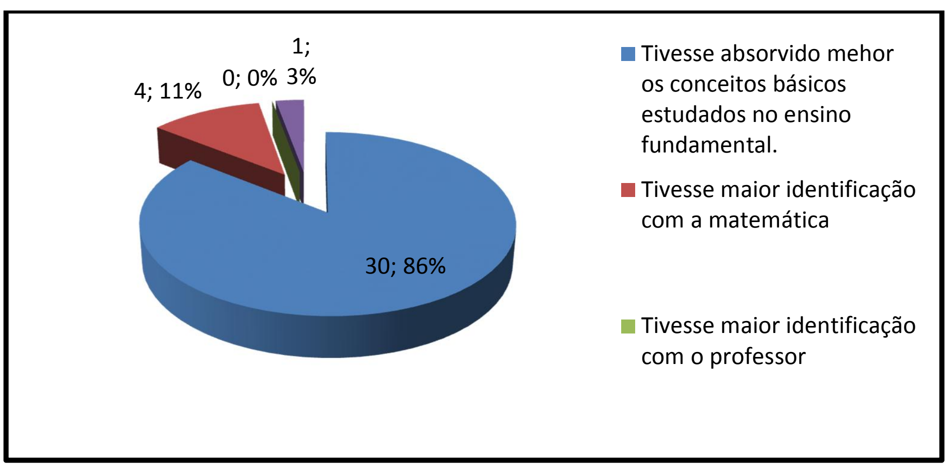
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2015.

Portanto, a proposta metodológica de ensino através da Sequência Fedathi, é satisfatória na visão dos alunos, embora os mesmos tenham preferência pela aula tradicional, essa afirmação se confirma pelas opiniões colhidas em questionários bem como pelos resultados obtidos na avaliação final aplicada ao término na pesquisa.

5.4.3 O conteúdo na visão dos alunos

O questionário relacionando ao conteúdo de números complexos (apêndice x) tinha como primeira pergunta: “Você considera que aprenderia melhor números complexos se”? Os resultados, conforme gráfico 12 revelam que 86% faz referência aos conceitos não aprendidos no ensino fundamental, revelando, assim, um dos fatores para os baixos índices aprendizagem em matemática. Demonstram ainda que 11% afirmam que aprenderiam melhor se tivessem identificação com a matemática, ou seja, atribuíram o aprendizado à relação de gostar ou não da matemática.

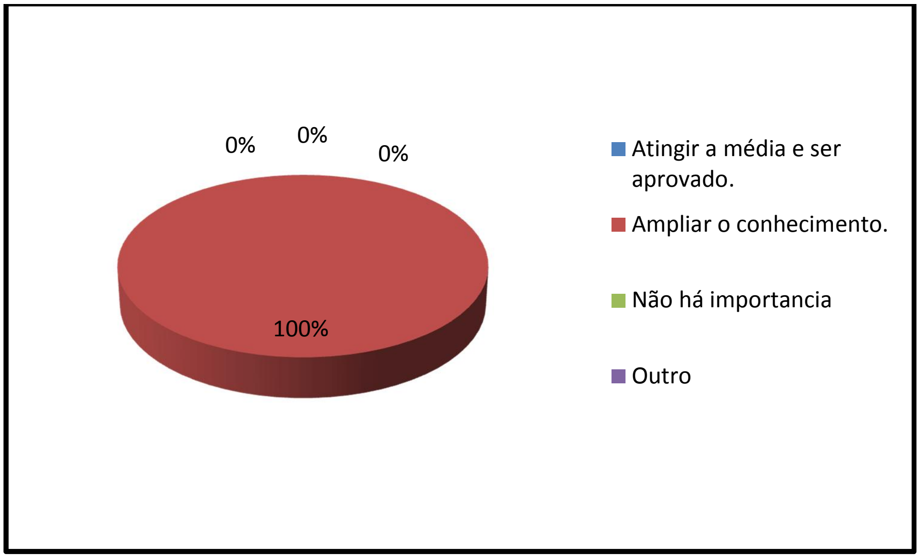
Gráfico 12: Você considera que aprenderia melhor números complexos se:



Fonte: Pesquisa direta

Quando indagados sobre a importância de se estudar números complexos, 100% afirmaram que seria para ampliar os conhecimentos, esse dado revela também a dificuldade de contextualização, em que a motivação não se relaciona a nenhuma área específica.

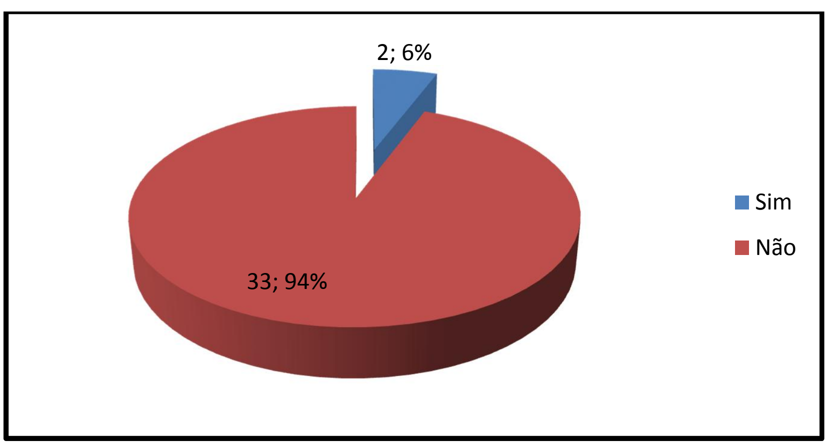
Gráfico 13: O que te faz sentir mais a vontade durante uma aula?



Fonte: pesquisa direta

A terceira pergunta era: Você já havia se deparado com algum conhecimento relacionado a números complexos antes do 3º ano do ensino médio? Nesse caso, apenas 2 dos 35 alunos afirmaram ter visto, fazendo menção à equações do 2º grau estudadas no 9º ano. Embora equações do 2º grau estejam contidas no 9º ano, muitos alunos chegam ao ensino médio sem o domínio, dificultando diretamente a compreensão de estudos posteriores, inclusive números complexos.

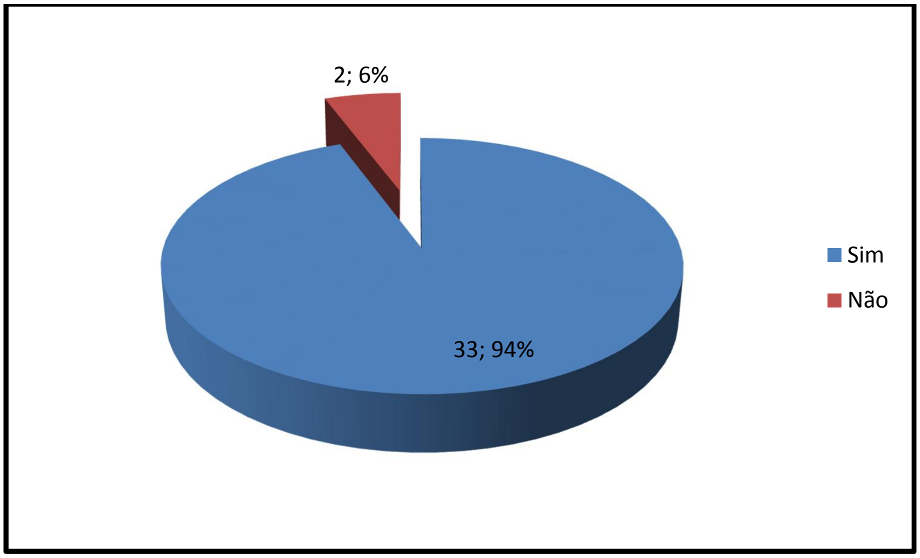
Gráfico 14: Você havia se deparado com algum conhecimento relacionado a números complexos antes do 3º ano do ensino médio?



Fonte: pesquisa direta

Mesmo, a maior parte não tendo visto conteúdo semelhante ou até mesmo conceitos básicos no ensino fundamental, ao serem indagados sobre a preparação para o conteúdo estudado se mostraram preparados. Conforme gráfico abaixo.

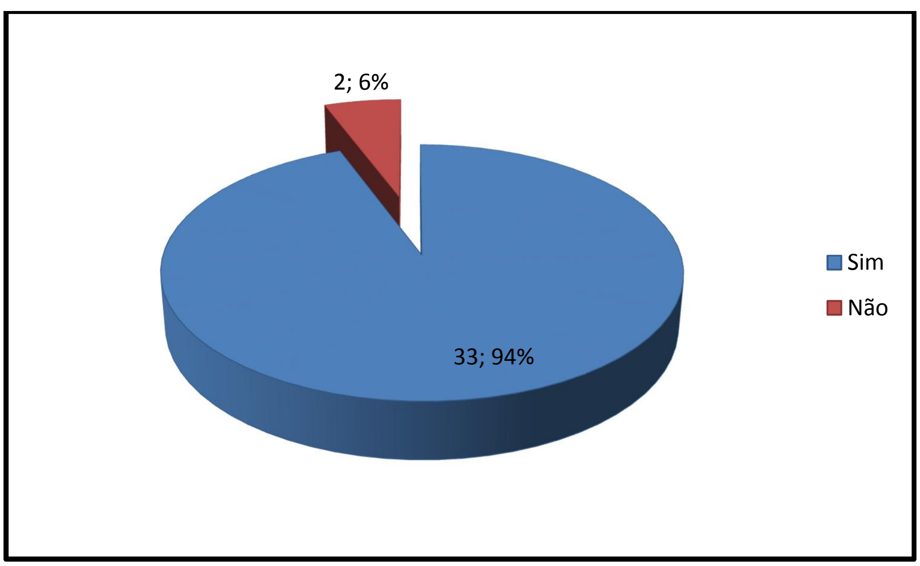
Gráfico 15: Você se sente um aluno mais preparado com relação ao conteúdo estudado?



Fonte: pesquisa direta

A quinta questão, indagava sobre a compreensão do conceito de números complexos em que, de acordo com o gráfico 16, 94% consideram satisfatória a absorção.

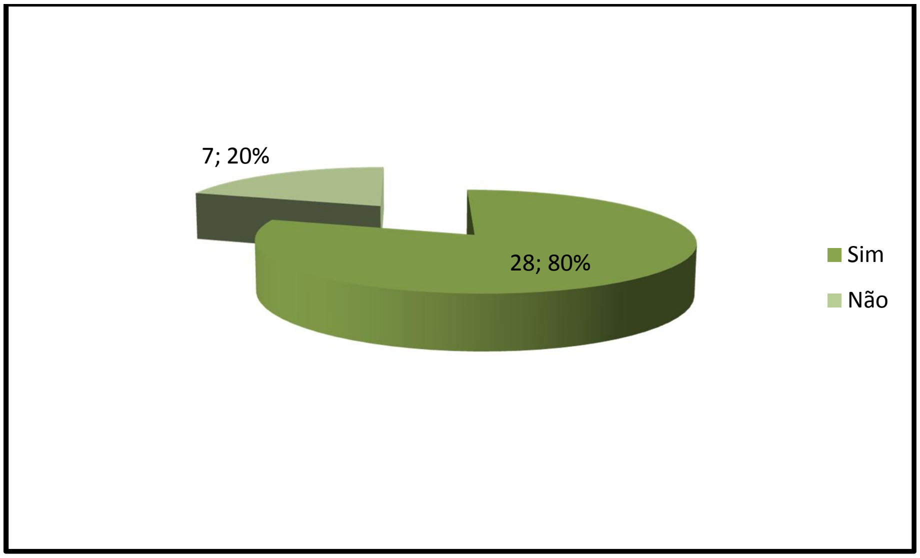
Gráfico 16: Ao fazer uma análise do conteúdo trabalhado, você considera que conseguiu compreender o conceito de números complexos?



Fonte: pesquisa direta

Em relação à ligação do conteúdo com alguma atividade profissional, 20% acredita que não utilizarão e a grande maioria (80%) vê alguma aplicação em possíveis atividades profissionais futuras, essa percepção é importante para que se haja entusiasmo em aprender o conceito.

Gráfico 17: Você acha que números complexos servirão para a utilização no campo de trabalho ao qual pretende seguir?



Fonte: pesquisa direta

Abaixo destacaremos algumas opiniões colhidas no último item do questionário aplicado aos alunos, expressos a seguir:

Para você, qual o sentido de se estudar Números Complexos?

QUADRO 10 - Percepção dos alunos sobre estudar números complexos.

Aluno 1	Ampliar conhecimento
Aluno 2	Uma nova matéria que muitos não estudam e mais um conhecimento
Aluno 3	Desenvolver habilidades matemáticas.
Aluno 4	Muito proveitoso e interessante
Aluno 5	Entender a origem dos números.
Aluno 6	Ampliar conhecimento em relação as provas externas
Aluno 7	Ajuda na minha posterior formação
Aluno 8	Abranger os conhecimentos e zonas de atuação
Aluno 9	Calcular algo imaginário

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2015.

Quando você de se deparou a primeira vez com Números Complexos, o que você achou/pensou?

QUADRO 11 - Percepção inicial dos alunos ao se depararem com a introdução dos Números Complexos.

Aluno 1	Achei que era difícil
Aluno 2	Que não iria aprender, muito difícil
Aluno 3	Que conseguiria desenvolver a partir dos meus conhecimentos básicos
Aluno 4	Um pouco complicado
Aluno 5	Um conteúdo difícil no primeiro momento
Aluno 6	Diferente.
Aluno 7	Que não teria capacidade para entender
Aluno 8	Que era algo abstrato, sem finalidade.
Aluno 9	Interessante, pois eles me chamaram a atenção para um novo rumo da matemática que eu não conhecia.
Aluno 10	**Achei muito interessante, pois os professores que eu tive me disseram que era impossível tirar a raiz de um número negativo.**
Aluno 11	**Estranho**
Aluno 12	**Que seria bastante complicado**

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2015.

Que conclusões você tira após ter estudado Números Complexos?

QUADRO 12 – Conclusões dos alunos ao término dos estudos sobre Números Complexos.

Aluno 1	Conteúdo simples e fácil
Aluno 2	Que tudo é só questão de tempo e estudo e assim algo a mais para minha formação profissional.
Aluno 3	Que no ensino superior estarei a frente de muitas concorrências.
Aluno 4	Adquiri mais habilidades matemáticas.
Aluno 5	Um conteúdo interessante e será útil na minha caminhada escolar
Aluno 6	Um conteúdo útil na área que irei seguir
Aluno 7	Conteúdo interessante
Aluno 8	Que conteúdos se interligam
Aluno 9	É um estudo difícil, requer tempo.

Aluno 10	A metodologia foi excelente para a minha compreensão.
Aluno 11	Foi proveitoso e de grande uso na minha vida acadêmica.
Aluno 12	Agora tenho uma base, estou preparado para faculdade caso envolva tal conteúdo.
Aluno 13	Vai ajudar na minha vida.
Aluno 14	Que o que vamos ver na universidade não se torna algo complicado se a introdução for feita no ensino médio.
Aluno 15	Que matemática é muito mais que números ela engloba um mundo muito mais do que compreendemos.
Aluno 16	Estimular o conhecimento para desenvolver mais cientistas no brasil.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2015.

5.5 Análise qualitativa do questionário e das avaliações

Os resultados obtidos na avaliação diagnóstica indicam um bom nível de conhecimento em relação aos números inteiros, potenciação e radiciação. Quanto às equações, os dados indicam que o domínio em relação às de 1º grau é bem maior que a de 2ºgrau, e que o nível de dificuldade aumenta ao se depararem com raízes negativas, o que os levaria à compreensão da insuficiência dos números reais. Portanto, apesar do bom desempenho na maior parte dos itens contidos na avaliação diagnóstica, ao se tratar de números complexos, se percebia a dificuldade a ser enfrentada pelos baixos índices de aprendizagem em relação aos conteúdos referentes ao 9º ano, a exemplo de equações do 2º grau. Em relação às operações com polinômios, se percebeu uma grande dificuldade, advinda também dos conteúdos estruturantes que não foram bem aprendizados na idade e séries corretas.

No que se refere aos conteúdos introdutórios, uma boa parte de alunos conseguiu, mesmo sem conhecer a definição, explicitar sua compreensão acerca dos números complexos.

Na comparação entre a avaliação diagnóstica e a final, observa-se um percentual elevado de alunos que lograram êxito em questões que exigiam a mesma habilidade, indicando que os sujeitos da pesquisa conseguiram aprender através da metodologia proposta, porém há de se ressaltar que ainda permaneceu uma pequena parte de alunos sem um bom desempenho em questões com níveis semelhantes, mostrando que, para esses, não houve avanços significativos na aprendizagem para o conteúdo trabalhado, o que pode ser entendido como dificuldade de assimilação a partir da proposta metodológica bem como dificuldades que se acumularam durante todo período escolar.

Outro ponto relevante se traduz na definição de números complexos proposta na 1ª questão da avaliação final, em que somente 3 alunos do total de 35 não soube responder satisfatoriamente. Esse percentual de acerto (32 de 35) poderia ser explicado pela memorização da definição proposta no livro adotado pela escola, porém dos 32 acertos, 17 definiram Números Complexos sem nenhuma relação com o texto explicitado no livro, sendo utilizada uma linguagem própria sobre a compreensão do conteúdo estudado, o que confirma a viabilidade da proposta metodológica Sequência Fedathi.

Em relação à faixa etária, os dados mostram que não há nenhum aluno fora de faixa para a idade prevista para conclusão do ensino médio, com maior concentração de 15 a 17 anos (57,14%) bem como 42,86% com 18 ou mais, o que mostra um perfil positivo para os resultados da pesquisa. A distribuição por sexo se apresenta de forma equilibrada, 51,43% masculina e 48,37 feminina, a moradia é predominantemente urbana, o que se configura outro fator relevante pela disponibilidade de participação em eventos e atividades no contra turno e finais de semana. Ponto que causa estranheza se dá pela maioria dos jovens se considerarem na classe média, o que necessariamente não se configura para a realidade local, porém esse fato se mostra importante por não se ter nenhum aluno em situação de extrema pobreza.

No que se refere ao grau de interesse por disciplina, a matemática é a segunda com maio índice de aceitação por parte dos alunos, ficando atrás apenas da educação física, o fato não chega a ser surpreendente por conta do curso técnico ao qual o aluno optou (finanças), porém passa a ser um ponto importante para os resultados obtidos na aplicação da pesquisa.

Em relação ao grau de dificuldade por disciplina, a matemática também é muito bem avaliada, ocupando a 9ª posição de 11 disciplinas, fato que pode ser explicado pela identificação com o curso, bem como a sensação de aprendizagem do conteúdo de números complexos. A disciplina de física teve o menor grau de interesse e o maior grau de dificuldade, contribuindo para dificuldade de assimilação de conteúdos que envolvam números complexos.

Em relação ao ENEM, 100% dos alunos declararam ter feito em 2015, fato relevante para a compreensão da construção dos conteúdos a serem ensinados anualmente na escola a qual a pesquisa foi realizada, pois o conteúdo de números complexos não estava contido nesse planejamento, sendo ensinado a partir do pedido de aplicação da referida pesquisa.

Em relação a área que pretendiam seguir, os dados mostram que a maior parte optou por engenharia (20%), seguido de psicologia (11%) e 9% administração. O importante é ressaltar que, somando todas as áreas, escolhidas pelos alunos, que necessitariam do conhecimento de números complexos (engenharia, financeira, administração, contábeis, economia e física), teríamos 52% de alunos com necessidade desse conteúdo sem o devido conhecimento (Gráfico 06), esse fato mostra que boa parte dos alunos estão ingressando no ensino superior sem conhecimentos prévios de determinadas áreas.

Como segunda opção, grande parte dos alunos pesquisados demonstraram interesse em fazer concurso público (63%), fato que demonstra expectativas de futuro e trabalho bem definidos.

Em relação à metodologia, quando perguntados sobre o que achavam, a aceitação foi de 91% considerando os critérios: excelente, ótima e boa. Mesmo em uma visão menos otimista considerando apenas as opções excelente e ótima, teríamos ainda um percentual de aceitação de 77%, o que indica uma boa avaliação por parte dos discente, um ponto importante se dá por nenhum aluno ter considerada insatisfatória e apenas 9% consideraram regular (Gráfico 08). A postura do professor (mão-no-bolso) foi outro fator aprovado na visão discente, com 97% de aceitação, levando em consideração os critérios "excelente" e "ótima" (Gráfico 09). Fato considerado contraditório quando confrontado com os 60% de alunos que consideram que aprenderiam melhor quando o professor faz a exposição do conteúdo (Gráfico 11).

Podemos compreender essa contradição entre a aceitação da metodologia e a afirmação da preferência por uma aula expositiva pelo fato dos mesmos viverem uma dicotomia entre a busca por algo novo e a acomodação da aula tradicional em que os mesmos são meros receptores de conteúdo. Essa contradição pode ser melhor esclarecida quando os mesmos opinião sobre o que os fazem sentir-se mais a vontade durante as aulas, os dados revelam que 50% demonstram que é o protagonismo deles mesmos e 32% o trabalho em equipe, ou seja, metade dos entrevistados consideram que a participação efetiva é fator preponderante no processo de aprendizagem, bem como 32% consideram o trabalho em equipe e apenas 12% afirmam ser a exposição do professor.

A confirmação mais efetiva que pode ser tirada, se dá pelas observações dos próprios sujeitos da pesquisa contidas no quadro 11.

O conteúdo de números complexos foi visto por todos os sujeitos da pesquisa como algo que serviria para ampliar o conhecimento, fato que demonstra a dificuldade de compreensão do sentido de se estudar algo sem uma contextualização possível.

No que se refere a conhecimento prévio do conteúdo, apenas 2 alunos declararam ter tido contato com números complexos antes do 3º ano do ensino médio, e essa menção se deu ao conteúdo de equações do 2º grau estudados no 9º ano do ensino fundamental, o que nos remete a uma reflexão de como os professores do ensino fundamental preparam nossos alunos para conhecimentos futuros e de como estruturar didaticamente uma aula que possa dar ao aluno uma visão maior do que se pode estudar futuramente. Infere-se também por esses dados que a assimilação de conteúdos em anos anteriores ficaram à desejar, dificultando assim, a compreensão dos conteúdos atuais.

A terceira pergunta era: Você já havia se deparado com algum conhecimento relacionado a números complexos antes do 3º ano do ensino médio? Nesse caso, apenas 2 dos 35 alunos afirmaram ter visto, fazendo menção à equações do 2º grau estudadas no 9º ano. Embora equações do 2º grau estejam contidas no 9º ano, muitos alunos chegam ao ensino médio sem o domínio, dificultando diretamente a compreensão de estudos posteriores, inclusive números complexos.

Mesmo com 20% dos discentes não vendo aplicação do conteúdo em suas profissões, 96% consideram satisfatória a aprendizagem sobre o conteúdo em tela.

Portanto, mesmo a percepção inicial sobre o conteúdo (quadro 11) não sendo tão receptiva, a metodologia, a postura do professor, bem como o conteúdo estudado foram aceitos por maior parte dos sujeitos da pesquisa, demonstrando a viabilidade do ensino de números complexos por meio da Sequência Fedathi como metodologia.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após todo processo de análise e comparação entre pré-teste e pós-teste, bem como as análises quantitativas e qualitativas acerca dos aspectos voltados à metodologia, à postura do professor e ao conteúdo de números complexos, pode-se inferir que os resultados indicam a viabilidade da aplicação da Sequência Fedathi no ensino de Números Complexos. Haja vista que os objetivos propostos para a pesquisa foram alcançados e as hipóteses foram confirmadas.

A construção do conceito de Números Complexos através de uma situação problema com a utilização da Sequência Fedathi foi possível pelo conjunto de ações empreendidas em prol do conhecimento. Esses processos se deram pelo protagonismo dos alunos e a mediação do professor com a observância das quatro etapas vivenciadas pelos discentes: tomada de posição, maturação, solução e prova.

A metodologia favoreceu a aprendizagem, tanto pela postura "mão-no-bolso" do professor quanto pelos acordos didáticos, ressaltando que a postura dos alunos e o bom comportamento durante as sessões didáticas se deu principalmente pelo próprio reconhecimento de inovação da proposta apresentada a turma. A dinâmica das sessões didáticas se apresentava como algo novo para alunos que normalmente recebiam aulas expositivas. Os resultados obtidos ao final da pesquisa sobre o conteúdo confirmam a viabilidade da proposta bem como as observações dos sujeitos da pesquisa.

Há certa indução do currículo escolar pelas avaliações externas, fato comprovado na referida escola pela retirada do conteúdo de números complexos da lista de conteúdos a serem ensinados sob a alegativa de que não "cai" no ENEM. Há de se considerar que grande parte dos alunos optam por ingressarem em áreas afins a matemática e que certamente precisarão de conteúdos prévios que muitas vezes não são cobrados em avaliações externas, a exemplo dos números complexos.

Portanto, a hipótese de que a construção do conceito de números complexos seria possível a partir de uma situação problema com a utilização da Sequência Fedathi foi confirmada.

Dessa forma, espera-se que os resultados desta pesquisa possam subsidiar reflexões acerca do rompimento do modelo de ensino apenas expositivo, mostrando a relevância do protagonismo do aluno na construção de seu próprio conhecimento.

O produto educacional consiste em um material pedagógico, construído a partir da Sessão Didática I, em que se apresentam todos os procedimentos ocorridos para que o aluno pudesse compreender o conceito de números complexos a partir de uma situação problema seguindo as etapas da Sequência Fedathi.

REFERÊNCIAS

BEKKEN, Otto. B. **Equações de Ahmes até Abel.** USU-GEPEM, 1994.

BORGES NETO, H. et al. Sequência Fedathi: **Uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática.** UFC, 2013.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Blusher, 2001.

BRASIL. MEC, SEB, DICEI. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio,** 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portal Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP**. Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. PISA. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados>. Acesso em 02 de outubro de 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio –** volume 2, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations,** 2 vols. Open Court Publ. 1928-29.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Estado do Ceará – SEDUC. **Portal Sistema Permanente de Avaliação Básica do Ceará – SPAECE.** Disponível em: <http://www.spaece.caedufjf.net/resultados>. Acesso em: 03 de outubro de 2015.

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à prática**. São Paulo: Papirus, 1996.

SANTOS, Renato P. **10 – A Revolução na matemática – Parte 1.** Física Interessante. Disponível em: http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-10-revolucao-matematica-1.html. Acesso em: 02 de out. de 2015.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática;** Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: UNICAMP, 1995.

FOREQUE, F. **Uma em cada cinco crianças no Brasil não sabe ler aos oito anos.** Folha de S. Paulo, Brazília. 17 set. 2015. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2015/09/1682956-57-dos-alunos-de-oito-anos-tem-baixo-aprendizado-em-matematica.shtml>. Acesso: em 01 de outubro de 2015.

GARBI, Gilberto. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** Atlas. São Paulo, 2002.

JÚNIOR, U.P. A História dos Números Complexos: **“Das quantidades Sofisticadas de Cardano às Linhas Orienadas de Argand”**. Dissertação de Mestrado, URFJ, 2009.

LEONARDO, Fábio Martins. **Conexões com a Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

MATH IS GOOD FOR YOU! **Ars Magna of Girolamo Cardano.** Disponível em: http://www.mathsisgoodforyou.com/artefacts/arsmagnacardano.htm. Acesso em: 02 de out. de 2015.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** São Paulo: Moderna, 2009.

ROSA, M. S. Números Complexos: **Uma Abordagem Histórica para Aquisição do Conceito.** Dissertação de Mestrado. PUC- SP, 1998.

SILVA, Elisabete Ferreira; RIBAS, Mariná H. **A Prova do ENEM: o que pensam os professores de matemática?** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG, Ponta Grossa, 2003.

STRUIK, Dirk J. **A source book in Mathematics**, 1200 – 1800. Havard University Press 1969.

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas** – Gradiva Publicações TTDA. – Lisboa, 1992.

VASCONCELOS, Maria Betânia Fernandes**. A Contextualização e o Ensino de Matemática: um estudo de caso.** Dissertação Mestrado em Educação Matemática – UFPB, 2008.

POLIDORO, Loudes de Fátima; STIGAR, Robson. **A Transposição Didática: a passagem do saber científico para o saber escolar.** Ciberteologia – Revista de Teologia & Cultura – Ano VI, n. 27, 2010.

APÊNDICE A

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL CAPELÃO FREI ORLANDO

Nome: ___________________________ Nº: ____ Data: ___ /___/___ Ano/Série: 3º Ano - Finanças

Avaliação Diagnóstica

Prezados alunos(as), essa avaliação tem como objetivo identificar seu nível de conhecimento em relação aos requisitos básicos para aprendizagem do conjunto dos Números Complexos.

Professor Paulo Alexandre

Obs. Todos os cálculos deverão constar na folha ou em anexo.

01 – Determine os valores das expressões abaixo:

a) $-5+9$

b) $-3-6$

c) $-3.(-8)$

d) $\frac{-8}{2}$

02 – Determine o valor de x nas equações:

a) $x^2-3x+2=0$

b) $-3x+2=-5$

c) $x^2+4=0$

03– Execute a multiplicação dos polinômios (x+3).(x-2).

04 – Determine os valores das potencias abaixo:

a) $(-2)^2$

b) 5^3

c) 4^{-2}

05 – Determine o valor das raízes abaixo:

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt{16}$

APÊNDICE B

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL CAPELÃO FREI ORLANDO

Nome: __________________________ Nº: ____ 3º Ano - Finanças Data: ___ /___/___

Professor: Paulo Alexandre Conteúdo: Números Complexos

Obs. Todas as questões deverão conter o referido cálculo, caso seja feito em outra folha, por favor, anexar à prova.

AVALIAÇÃO DE MATEMÀTICA

01. Para você, o que é um número complexo? E o que representa a unidade imaginária i?

02. Ao resolver a equação $x^2 + 4 = 0$, obtemos:

03. Quais as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$.

04. Dado o número complexo $Z_1 = (x^2 - 4) + (y - 3)i$, determine os valores de x e y para que Z_1 seja:

a) Real.

b) Imaginário puro.

05. Determine o conjugado dos números complexos:

a) $Z_1 = 3 + 2i$
b) $Z_2 = -3$
c) $Z_3 = -2i$

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo. Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma. Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave. Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

Hermann Hesse

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO

Marque com um x as questões de múltipla escolha.

DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

01) Sexo:

( ) Masculino ( ) Feminino

02) Idade:

( ) 15 anos ou menos ( ) Entre 15 e 17 anos ( ) 18 anos ou mais

03) Moradia:

( ) Zona Urbana ( ) Zona Rural

04) em qual faixa social você se considera incluído?

( ) Baixa ( ) Média ( ) Alta

05) Atribua os conceitos a cada disciplina conforme seu grau de interesse e identificação:

(B) Bastante	(P) Pouco Interesse
(R) Razoável	(N) Não Gosto
( ) Lingua Portuguesa	( ) Lingua Portuguesa
( ) Arte	( ) Biologia
( ) Educação Física	( ) História
( ) Matemática	( ) Geografia
( ) Física	( ) Filosofia
( ) Química	( ) Sociologia

06) Indique seu grau de dificuldade em relação as disciplinas abaixo conforme conceitos sugeridos.

(B) Bastante	(P) Pouco Interesse
(R) Razoável	(N) Não Gosto

( ) Lingua Portuguesa	( ) Química
( ) Arte	( ) Lingua Portuguesa
( ) Educação Física	( ) Biologia
( ) Matemática	( ) História
( ) Física	( ) Geografia

( ) Filosofia | ( ) Sociologia

07) Participou do ENEM 2015?

( ) Sim Não ( )

08) Se não fez o ENEM em 2015, pretende fazer posteiormente?

( ) Sim Não ( )

09) Caso a respota das questões 8 e 9 sejam positivas, qual área pretende seguir?

( ) Educação

( ) Saúde

( ) Direito

( ) Outra. Especifique ____

10) Caso não tenha interesse em fazer o ENEM/Vestibular, que outro rumo planeja para seu futuro estudantil e/ou profissional?

( ) Ingressar no mercado de trabalho.

( ) Fazer concurso

( ) Submeter-se a seleção de alguma empresa

( ) Colocar negócio próprio.

( ) Outro. Especifique

____

____

____

____

METODOLOGIA

01) O que você achou da metodologia utilizada pelo professor?

( ) Excelente

( ) Ótima

( ) Boa

( ) Regular

( ) Insatisfatória

02) O que você achou da postura do professor durante as aulas?

( ) Excelente

( ) Ótima

( ) Boa

( ) Regular

( ) Insatisfatória

03) O que te faz sentir mais a vontade durante uma aula?

( ) Ouvir a explicação do professor.

( ) Fazer trabalho em equipe.

( ) Ser protagonista de seu próprio conhecimento.

( ) Outro. Especifique ____________________

04) Você acha que consegue aprender melhor quando:

( ) O professor faz a exposição do conteúdo

( ) O trabalho é realizado em equipe.

( ) As resoluções são feitas no quadro.

( ) Outro. Especifique ____________________

05) Sobre a metodologia utilizada, quais as observações, sugestões, crítcas a fazer?

____

____

____

____

____

____

____

NÚMEROS COMPLEXOS

1) Você considera que aprenderia melhor números complexos se:
( ) Tvesse absorvido melhor os conceitos básicos estudados no ensino fundamental.
( ) Tivesse maior identificação com a matemática.
( ) Tivesse maior identificação com o professor.
( ) Outro. Especifique

____
____

2) Para você, qual a importância de se estudar números complexos?
( ) Atingir a média e ser aprovado.
( ) Ampliar o conhecimento.
( ) Não há importância.
( ) Outro. Especifique

____
____

4) Você já havia se deparado com algum conhecimento relacionado a números complexos antes do 3º ano do ensino médio?
( ) Sim Não ( )
Se sim, qual?

____

5) Você se sente um aluno mais preparado com relação ao conteúdo estudado?
( ) Sim Não ( )

6) Ao fazer uma análise do conteúdo trabalhado, você considera que conseguiu compreender o conceito de número complexo?
( ) Sim Não ( )

7) Você acha que os Números Complexos servirão para utilização no campo de trabalho ao qual pretende seguir?
( ) Sim Não ( )

8) Para você, qual o sentido de se estudar Números Complexos?

____
____

9) Quando você se deparou a primeira vez com Números Complexos, o que achou/pensou?

____
____
____

10) Que conclusões você tira após ter estudado Números Complexos?

____
____

APÊNDICE D

SESSÃO DIDÁTICA I

Sessão Didática 1 - Construção do Conceito de Números Complexos a partir da resolução de um problema histórico.

Por:
Paulo Alexandre Souza Queiroz

1. Justificativa Metodológica

A SF propõe ao aluno uma nova postura de aprendizagem, colocando-o como protagonista de sua própria aprendizagem, além de permitir ao professor a mediação do ensino de maneira planejada e orientada, com a utilização de perguntas desafiadoras com a postura "mão-no-bolso".

2. Preparação da Sessão Didática

No entendimento de que o planejamento é o momento de preparação da "sessão didática" e que o plano é a execução, ou seja, a SF em aplicada, ao iniciar a sessão didática, o professor deverá ter feito um diagnóstico para melhor subsidiar o processo de aprendizagem, nesse caso, observa-se que a sala em questão apresenta para os conteúdos prévios necessários,

2.1 Justificativa do Conteúdo

O conjunto dos números complexos é conteúdo exigido em cursos de graduação em matemática, física, engenharia dentre outros.

2.2 Público Alvo

Alunos do 3º ano de uma escola pública estadual de ensino médio situada no município de Canindé.

2.3 Recursos Didáticos

Livro didático, caderno, pincel, quadro branco, lápis e borracha.

2.4 Duração da Sessão Didática

140 minutos, equivalente à duas horas-aula.

2.5 Dificuldades que podem ser enfrentadas

A primeira dificuldade que poderá ser encontrada é a relação distante de resolução de equação do 2º grau que é ensinada no 9º ano, com a introdução do conceito de números complexos que são ensinados no 3º do ensino médio, ou seja, há pelos menos 3 anos entre o ensino dos dois conteúdos citados. Outro ponto relevante é a dificuldade de se trabalhar com a extração de raízes quadradas por conta da não assimilação do conteúdo de potenciação no período correto de aprendizagem. A falta de sentido de se estudar um conteúdo de difícil aplicação prática poderá causar desestímulo e descrédito do conteúdo.

2.6 Pré-requisitos necessários ao ensino do conteúdo

Domínio da potenciação e radiciação e suas propriedades, bem como da resolução de equações de primeiro e segundo graus, associado às operações com monômios e polinômios além do conhecimento acerca dos conjuntos numéricos e suas características.

2.7. Acordo Didático

2.7.1 Nessa sessão didática:

Expectativas do Professor: espera que os alunos possam participar ativamente das atividades propostas, mantendo respeito e cumprindo aquilo que lhe for proposto.

Expectativas dos Alunos: espera que o professor seja atencioso, que procure tirar as dúvidas de modo a possibilitar uma melhor aprendizagem e consequentemente consigam chegar à solução do problema proposto.

2.8 Avaliação

Nessa sessão, o aluno será avaliado mediante o desempenho demonstrado no decorrer da aplicação das atividades bem como através dos registros escritos acerca das indagações e inquietações sobre o conteúdo.

3. Conteúdo da Sessão Didática

História dos Números Complexos;

Exploração do conceito de Números Complexos;

Formalização do conceito de Números Complexos.

3.1 A pergunta

O professor deverá apresentar um resgate histórico dos conjuntos numéricos, iniciando com o surgimento do conjunto dos números naturais e refletindo sobre o contexto em que surgiram os demais conjunto: inteiros, racionais, irracionais e reais. E concluindo com uma pergunta, o conjunto dos números reais é suficiente para responder todas as questões matemáticas atuais?

3.2 Objetivos da Sessão Didática

3.2.1 Objetivo Geral

Construir o conceito de Números Complexos partindo de uma situação problema e utilizando as etapas da Sequência Fedathi com a postura “mão no bolso”.

3.2.1 Objetivos Específicos

Fazer um resgate histórico dos acontecimentos que contribuíram para a necessidade e o surgimento dos Números Complexos.

Construir o conceito de N.C a partir da compreensão da impossibilidade de se extrair raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais.

4. Tomada de Posição (1ª etapa da SF)

4.1 Apresentação do acordo didático aos alunos elaborado no item 2.7.1.

4.2 Situação desafiadora: propor o seguinte problema

Dividir um seguimento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto seja 40. Em seguida o professor inicia juntamente com a turma, o processo de formalização do conceito.

4.3 Hipóteses

É possível que os alunos apresentem dificuldade em representar a equação ou o sistema de equações que resultam em uma equação de segundo grau com discriminante negativo.

4. Maturação (2ª etapa da SF)

Momento em que o aluno se debruça sobre o problema, refletindo, pensando, contextualizando, perguntando acerca do conteúdo em questão. Oportunidade em que o professor poderá explorar as perguntas para proporcionar um melhor direcionamento da aprendizagem mediante reflexões, perguntas, apontamentos e proposições.

4.1 Contraexemplo

Podemos extrair raiz quadra de um número negativo como $\sqrt{-16}$?

4.2 O erro

Caso os alunos não consigam encontrar uma solução, o professor deverá redirecioná-los para outros caminhos que os possibilitem chegar à uma solução. Nesse caso, o aluno deverá refazer, caso necessário, várias tentativas para se chegar a uma proposta.

4.3 Dificuldades no desenvolvimento da solução na situação proposta

As dificuldades advindas de conteúdos prévios não absorvidos deverão ser sanadas no decorrer da sessão com pequenas revisões do que se considerar necessário.

5. Solução (3ª etapa da SF)

Os alunos deverão apresentar as soluções encontradas para que se possa chegar a um resultado satisfatório, esse processo poderá ser composto por uma construção baseada na construção coletiva da solução para o problema proposto.

6. Prova (4ª etapa da SF)

Os estudantes farão a averiguação da solução encontrada confrontando-os com os dados iniciais apresentados.

7. Considerações

Esta sessão iniciou-se com a apresentação de um breve histórico acerca do surgimento dos Números Complexos bem como utilizou uma situação-problema para a construção do conceito a partir das próprias conclusões dos alunos, mediante a postura “mão no bolso” do professor.

ANEXO A – AUTORIZAÇÃO DO USO DE DADOS INSTITUCIONAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA (ENCIMA)

AUTORIZAÇÃO DO USO DE DADOS INSTITUCIONAIS

Declaramos para os devidos fins, que autorizamos ao pesquisador Paulo Alexandre Sousa Queiroz, a utilização do nome da instituição Escola Estadual de Educação Profissional Capelão Frei Orlando, na pesquisa intitulada **Uma Proposta Metodológica para o Ensino dos Números Complexos: História e Prática**, com a orientação da Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

Deste modo, ciente do estabelecido acima:

(   ) SIM, CONCORDO COM TERMO E AUTORIZO O USO DO NOME DA INSTITUÍÇÃO.

(   ) NÃ CONCORDO COM O TERMO E NÃO AUTORIZO O USO DO NOME DA INSTITUIÇÃO.

Canindé, 15 de abril de 2016.

____

Maria Taylana Queiroz Martins
Diretora Escolar