UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR

CARACTERIZAÇÃO DE COMPACIDADE FRACA EM ESPAÇOS DE BANACH E SEQUÊNCIAS BÁSICAS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

FORTALEZA
2017

VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR

CARACTERIZAÇÃO DE COMPACIDADE FRACA EM ESPAÇOS DE BANACH E SEQUÊNCIAS BÁSICAS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Análise funcional.

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P349c Paula Junior, Valdir Ferreira de.
Caracterização de compacidade fraca em espaços de Banach e sequências básicas em espaços localmente convexos / Valdir Ferreira de Paula Junior. – 2017.
85 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

1. Compacidade Fraca. 2. Propriedade do Ponto Fixo. 3. Aplicações Afins bi-Lipschitzs. 4. Sequências Básicas. 5. Sistemas Quase Biortogonais. I. Título.

CDD 510

VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR

CARACTERIZAÇÃO DE COMPACIDADE FRACA EM ESPAÇOS DE BANACH E SEQUÊNCIAS BÁSICAS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Análise funcional.

Aprovada em: 20 de Fevereiro 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

A minha mãe, Maria Zelia, minha irmã, Valdenia, meus irmãos, Assim e Washington, e minhas sobrinhas, Lara Beatriz e Ana Clara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus pelo dom da vida e por ter me dado forças para superar todos os desafios da minha vida, inclusive para conseguir terminar essa tese.

A minha mãe Maria Zélia que criou eu e meus irmãos, com muita dificuldade, mas nunca deixou falta nada em casa como, principalmente, amor. Agradeço aos meus irmãos, Francisco Ferreira e Washington, e a minha irmã Valdenia Alves, os quais me ajudaram muito a realiza esse sonho, dando muito apoio nas horas difíceis. As minhas lindas sobrinhas Lara Beatriz e Ana Clara. Ao meu pai Valdir Ferreira.

Um muito obrigado aos meus grandes amigos Edvalter Sena, Israel Evangelista, Alex Sandro Lopes e Kelson Vieira pelos vários conselhos e ajudas que me deram durante o mestrado e doutorado.

Agradeço a Samara Costa pelo apoio durante meu doutorado, ao botafoguense Ricardo Barros, a minha amiga Maria Vieira, ao galeto Davi Ribeiro e ao meu amigo Wanderley Perreira que assistiu as previas da exposição da tese.

Aos meus amigos do doutorado Davi Lustosa, Fabricio de Figueredo, Emanoel Ferreira, Emanuel Viana, Granjeiro, Diego Eloi, Renivaldo Sena, Elzimar Rufino, Marcos Ranieri, Leo Ivo, Halyson, Rondinelle, Raimundo, Wilson, Kelton, Janielly, Jocel, Tiago, Neilha, Adam, Cleiton Cunha, Diego, Jordânia, Joserlan Perote e Nino. Aos meus amigo do Piauí Ramon Soares, Jerre Jone, Alan, Alex, Celso Romeu e Eduardo.

Aos meus mestres e amigos Nelson Rios e Marcos Vinicio Travaglia pelo vários ensinamentos.

Um agradecimento especial ao meu orientador e amigo Cleon da Silva Barroso, pelos quatro anos de ensinamentos e amizade, durante o doutorado.

Aos professores Raimundo Júnior, Gleydson Ricarte, Daniel Pellegrino e Thiago Alves os quais deram valorosas recomendações e sugestões para a melhoria dessa tese.

As secretárias da pgmat Andréa Dantas e Jessyca Soares, as quais são as pessoas mais competentes que conheço, meu muito obrigado.

A CAPES pelo apoio financeiro, sem a qual não teria condições de me manter em Fortaleza.

“Deus não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança.”

(Autor desconhecido)

RESUMO

Nesta tese caracterizaremos compacidade fraca em conjuntos limitados, fechados e convexos usando algumas variações da propriedade do ponto fixo. Inicialmente faremos isso em espaços de Banach, usando a Propriedade do Ponto Fixo Genérica (PPF-G) para a classe de aplicações afins bi-Lipschitz. Depois introduzimos um relaxamento desta noção (PPF-FG) e mostraremos que um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach é fracamente compacto se, e somente se, ele possui o PPF-FG para aplicações afins 1-Lipschitz. Também exploraremos a existência de sequências básicas e sistemas quase biortogonais com restrições topológicas em espaços localmente convexos e estudaremos algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Compacidade fraca. Propriedade do ponto fixo. Aplicações afins bi-Lipschitz. Sequências básicas. Sistemas quase biortogonais

ABSTRACT

In this thesis we will characterize weak-compactness of bounded, closed convex sets using some variations of the fixed point property. We will initially do this, in Banach spaces, using the Generic Fixed Point Property (G-FPP) for the class of affine bi-Lipschitz maps. Then introduce a relaxation of this notion (WG-FPP) and proved that a closed convex bounded subset of a Banach space is weakly compact iff it has the WG-FPP for affine 1-Lipschitz maps. We also explore the existence of basic sequences and almost-biorthogonal systems with topological constraints and some of their applications in the framework of locally convex spaces.

Keywords: Weak-compactness. Fixed point property. Affine bi-Lipschitz maps. Basic sequences. Almost-biorthogonal systems.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EQB	equicontínuo quase biortogonal
PPF	propriedade do ponto fixo
PPF-FG	propriedade do ponto fixo fraco genérica
PPF-G	propriedade do ponto fixo genérica
QB	quase biortogonal

LISTA DE SÍMBOLOS

$X^\star$	Dual topológico de X.
$X^\sharp$	Dual algébrico de X.
c_0	Espaço das sequências de números reais que converge à zero na norma $\\|\cdot\\|_\infty$.
c_{00}	Subespaço de c_0 formado pelas sequências que não é nulo no máximo para um número finito de termos.
ℓ_1^0	Subespaço de ℓ_1 formado pelas sequências que não é nulo no máximo para um número finito de termos.
Se	Espaço de Banach das sequências de números reais (c_n) com $\sum_n c_n < \infty$.
ω	Espaço linear $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ equipado com a topologia produto.
φ_0	Subespaço de ω formado pela sequências que não é nulo para no máximo um número finito de termos.
$S_{cc}(X)$	A família de todos os subconjuntos convexos, fechados próprios de um espaço vetorial topológico X.
$\mathscr{B}(M)$	A família de todos os subconjuntos convexos, limitados e fechados de um conjunto convexo M.
$\overline{T}$	Fecho topológico de T.
$\text{span}\{x_n\}$	Espaço gerado pela sequência (x_n).
$[x_n]$	Fecho do espaço gerado por uma sequência (x_n) em um espaço normado.
$\overline{[x_n]}^\tau$	Fecho em relação a topologia τ do espaço gerado por uma sequência (x_n).
$\Sigma_\tau(X)$	Família das seminormas que gera a topologia τ do espaço localmente convexo X.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em uma variedade de problemas emergentes em muitos ramos da análise funcional, um grande desafio consiste em caracterizar determinados fenômenos topológicos subjacentes. No cenário dos espaços de Banach, compacidade fraca constitui uma das mais importantes e úteis propriedades topológicas, com impacto em diversas áreas do conhecimento. Do ponto de vista teórico, sua importância é testemunhada em várias linhas de pesquisas devotadas à caracterização de compacidade fraca.

Na teoria de pontos fixos o seguinte tipo de questionamento é pertinente e natural: Em que medida compacidade pode ser descrita em termos da propriedade do ponto fixo (PPF)? Recordemos que um espaço topológico C é dito ter a PPF para uma classe de aplicações $\mathscr{M}$, se cada $f \in \mathscr{M}$ com $f(C) \subset C$ tem um fixo ponto. Aspectos topológicos relacionados com a propriedade do ponto fixo tem sido estudados ao longo de vários anos, cf. (KLEE, 1955; FLORET, 1980; LIN; STERNFELD, 1985; DOBROWOLSKI; MARCISZEWSKI, 1997; BARROSO *et al.*, 2013; BENAVIDES *et al.*, 2004) e suas referências.

No contexto puramente métrico, é recorrente lidar com a noção de compacidade que advém de topologias mais finas do que a topologia da norma. Nesses casos, o problema frequentemente sujeita-se a considerações estruturais. Com efeito, considerando que espaços de Banach dotados de certas estruturas, tais como bases de Schauder, bases incondicionais, etc, tendem a serem mais facilmente tratáveis, é natural esperar obter respostas para o questionamento acima a partir da estratégia de explorar o impacto dessas estruturas no estudo da propriedade de pontos fixos. Esta tem sido uma das principais abordagens teóricas em muitos trabalhos sobre caracterizações de compacidade fraca em termos da PPF para aplicações não expansivas (isto é, 1-Lipschitz). Por exemplo, em (LENNARD; NEZIR, 2011) Lennard e Nezir provaram, que se um espaço de Banach contém uma cópia assintoticamente isométrica à sequência básica c_0-somas (x_n), então $C = \overline{co}\big(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}\big)$ falha em ter a PPF para aplicações afins não expansivas. Um outro interessantíssimo exemplo é ilustrado pelo seguinte problema em aberto: Suponha que C seja um subconjunto limitado, fechado, convexo e não-fracamente compacto do espaço c_0. Então, é sempre verdade que existe uma aplicação afim 1-Lipschitz $f : C \to C$ sem pontos fixos? Convém lembrar que o espaço c_0 é bastante rico estruturalmente; por exemplo, a base canônica de c_0 é incondicional.

Nesta tese estamos em princípio interessados em descrever compacidade fraca considerando aspectos hereditários da PPF associados à família das aplicações afins bi-Lipschitzs. Mais especificamente, estamos interessados em um relaxamento da PPF conhecido como PPF-genérica (PPF-G), uma noção que foi introduzida pela primeira vez em (BENAVIDES *et al.*, 2004), veja a Definição 3.0.1.

Seja X um espaço vetorial topológico (evt) e M um subconjunto convexo de X. Doravante denotaremos por $\mathscr{B}(M)$ a família de todos os conjuntos limitados, fechados e convexos de M. A seguir apresentamos as principais fontes de inspiração para esta tese. A primeira vem de um resultado devido aos autores Dowling, Lennard e Turett (veja (DOWLING *et al.*, 2002; DOWLING *et al.*, 2003)). Eles provaram que quando X é um dos espaços c_0, $L_1(0,1)$ ou ℓ_1, um conjunto $C \in \mathscr{B}(X)$ é fracamente compacto se, e somente se, ele tem a PPF-G para aplicações afins não expansivas. Uma outra importante motivação vem do seguinte resultado provado em 2004 por Benavides, Japón-Pineda e Prus, que vai na direção de tornar o resultado anterior mais abrangente.

Teorema 1.0.1 *(BENAVIDES et al., 2004) Seja X um espaço de Banach e $C \in \mathscr{B}(X)$. Então C é fracamente compacto se, e somente se, C possui a PPF-G para aplicações afins contínuas. Além disso,*

(i) se X é c_0 (equipado com a norma do supremo) ou J_p (o espaço James), então estas condições são equivalentes a: C possui a PPF-G para aplicações afins uniformemente Lipschitzianas.

(ii) se X é um espaço de Banach L-megulhado, então C é fracamente compacto se, e somente se, possui a PPF-G para aplicações afins não expansivas.

Em geral, não se pode esperar descrever compacidade fraca em termos da PPF para a família das aplicações afins 1-Lipschitzs. Em 2008, Pei-Kee Lin (LIN, 2008) mostrou que se o espaço ℓ_1 estiver munido com a norma

$$|||x|||_{\mathscr{L}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{8^k}{1+8^k} \sum_{n=k} |x(n)| \qquad \text{para } x = (x(n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1,$$

que é equivalente à norma de ℓ_1, então cada $C \in \mathscr{B}\big((\ell_1, |||\cdot|||_{\mathscr{L}})\big)$ possui a PPF para aplicações não expansivas. Consequentemente, uma vez que $(\ell_1, |||\cdot|||_{\mathscr{L}})$ não é reflexivo, a bola unitária $B_{(\ell_1,|||\cdot|||_{\mathscr{L}})}$ deixa de ser fracamente compacta. Contudo, verifica-se que $C \in \mathscr{B}\big((\ell_1, |||\cdot|||_{\mathscr{L}})\big)$ possui a PPF-G para aplicações afins não expansivas.

Um outro resultado de natureza semelhante é devido a T. Gallagher, C. Lennard e R. Popescu (GALLAGHER *et al.*, 2015). Eles exibiram um conjunto não fracamente compacto $C \in \mathscr{B}\big((c, \|\cdot\|_\infty)\big)$ que possui a PPF para aplicações não expansivas, onde c é o espaço de Banach das sequências reais convergentes. No entanto, é uma questão aberto saber se para cada conjunto não fracamente compacto $C \in \mathscr{B}(c_0)$, existe ou não uma aplicação afim não expansiva $f : C \to C$ que não possui pontos fixos.

Com esses fatos em mente, é natural indagar se compacidade fraca também descreve PPF-G para a família das aplicações afins e uniformemente Lipschitzianas em espaços de Banach arbitrários, isto é, aplicações $f : C \to C$ que satisfazem:

(i) $f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$, para todo $x, y \in C$, todo $\lambda \in (0,1)$,

(ii) $\|f^n(x) - f^n(y)\| \leqslant M\|x - y\|$, para todo $x, y \in C$, todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $M > 0$ fixo.

Mais precisamente,

Problema. Dado um espaço de Banach X, um conjunto $C \in \mathscr{B}(X)$ é fracamente compacto se, e somente se, C possui a PPF-G para aplicações afins uniformemente Lipschitzianas.

É claro que se f é contínua em norma e afim, e $f(C) \subset C$ com C fracamente compacto, então pelo Teorema de Schauder-Tychonoff segue-se que f possui um ponto fixo. Portanto, a parte não trivial consiste em mostrar que se C não é fracamente compacto, então existe um conjunto $K \in \mathscr{B}(C)$ e uma aplicação $f : K \to K$ afim e uniformemente Lipschitziana sem pontos fixos. Em uma análise primária nos diversos artigos que tratam desse tipo de problema, observa-se uma estratégia padrão que pode ser sumarizada sucintamente nos seguintes argumentos: Se C não é fracamente compacto, então pelo Teorema de Eberlein-Smulian existe uma sequência (x_n) em C que não possui subsequências fracamente convergentes. De posse da sequência (x_n), tenta-se usar algum teorema do tipo dicotômico estrurual, como os clássicos teoremas de H. Rosenthal, ℓ_1-Teorema ou c_0-Teorema, afim de extrair alguma subsequência de (x_n) que possua um comportamento estrutural favorável à solução do problema supracitado. No entanto, uma dificuldade técnica que se apresenta é a seguinte. Como obter sequências wide-(s) que dominam todas as suas subsequências; isto é, sequências (x_n) tais que existem constantes $L_1, L_2 > 0$ relativas as quais valem as seguintes desigualdades:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \leqslant L_1 \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|, \quad \text{e} \quad \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{n_i}\Big\| \leqslant L_2 \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|$$

para todo $(n_i) \in [\mathbb{N}]$ com $n_i > i$, $i \in \mathbb{N}$, e para todo $n \in \mathbb{N}$ e todas as escolhas de escalares $(a_i)_{i=1}^n$. Em tais circunstâncias, pode-se estabelecer a falha da PPF-G em C para aplicações afins uniformemente Lipschitzianas.

Acontece que este tipo de estimativa traz consigo um caráter de "incondicionalidade". Com efeito, bases incondicionais, bem como bases quase simétricas (no sentido de (ANDROULAKIS *et al.*, 2006, Corollary 2,7)) são exemplos de sequências básicas com tal propriedade. Portanto, sequências básicas satisfazendo a desigualdade acima podem ser difíceis de obtê-las, já que (GOWERS; MAUREY, 1993) mostraram que existem espaços de Banach que não possuem sequências básicas incondicionais.

O principal objetivo desta tese é resolver o problema acima para a classe de aplicações afins bi-Lipschitz e explorar um relaxamento da PPF-G que parece ser razoável para o contexto de 1-Lipschitz, num sentido mais generalizado do termo.

Esta tese está dividida em duas partes. Na primeira parte resolveremos o problema acima, isso será feito nos Capítulos 3 e 4. Na segunda parte, Capítulos 5 e 6, exploraremos a existência de sequências básicas e sistemas quase biortogonais com restrições topológicas em espaços localmente convexos e algumas de suas aplicações.

Com o objetivo de facilitar a leitura desta tese incluímos nela dois apêndices, os apêndices A e B, no A faremos um breve estudo de espaços localmente convexos e no B falaremos da topologia fraca.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, a menos de menção em contrário, admitiremos que X é um espaço localmente convexo. Os leitores que não estejam familiarizados com esses espaços devem consultar o Apêndice A para definições básicas e resultados conhecidos na teoria dos espaços localmente convexos. Começaremos com algumas definições e, em seguida, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos que se seguem.

Definição 2.0.1 *Um conjunto $C \subset X$ é convexo se para todo $x, y \in C$*

$$\frac{x+y}{2} \in C.$$

Definição 2.0.2 *Seja $A \subset X$. Chama-se de envoltória convexa de A ao conjunto*

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : \; n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \; t_i \geqslant 0 \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Definição 2.0.3 *Seja $A \subset X$. Chama-se de envoltória absolutamente convexa de A ao conjunto*

$$\mathrm{aco}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : \; n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant 1 \right\}.$$

Definição 2.0.4 *Dado $C \subset X$ convexo, diremos que uma aplicação $f : C \to X$ é*

1. *Afim quando*
$$f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y),$$
para todo $\lambda \in [0,1]$ e todo $x, y \in C$.
2. *Não ρ-expansiva quando*
$$\rho\Big(f(x) - f(y)\Big) \leqslant \rho(x-y),$$
para todo $x, y \in C$, onde ρ é uma seminorma contínua em X.
3. *ρ-Uniformemente lipschitiziana quando existem $M > 0$ e uma seminorma contínua ρ tais que*
$$\rho\Big(f^n(x) - f^n(y)\Big) \leqslant M\rho(x-y),$$
para todo $x, y \in C$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

4. ρ*-Bi-lipschitiziana, quando existem constantes* $L_1, L_2 > 0$ *tais que*

$$L_1\rho(x-y) \leqslant \rho\Big(f(x)-f(y)\Big) \leqslant L_2\rho(x-y)$$

para todo $x,y \in C$*, sendo* ρ *seminorma contínua em* X*.*

Observação 2.0.5 *Quando* X *é um espaço normado com norma* $\|\cdot\|$ *diremos simplesmente que* f *é não expansiva (respectivamente, uniformemente Lipschitziana, bi-Lipschitziana) para significar que* f *é 1-Lipschitiziana (respectivamente, uniformemente Lipschitziana, bi-Lipschitz) com relação à* $\|\cdot\|$*.*

Definição 2.0.6 *Uma sequência* (x_n) *em um espaço localmente convexo* X *é chamada uma base para* X*, se para cada* $x \in X$ *existe uma única sequência de escalares* (a_n) *tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Se (x_n) *é uma base para* X *então ficam bem definidos, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, funcionais lineares* $x_m^\star : X \to \mathbb{R}$ *dados por*

$$x_m^\star\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = a_m.$$

Se os funcionais $(x_n^\star)$ *são contínuos então a base* (x_n) *é dita ser uma base de Schauder para* X*. Além disso, se os operadores de projeção* $P_m : X \to X$*, definidos por*

$$P_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n x_n$$

são equicontínuos então a base de Schauder (x_n) *é chamado equi-Schauder.*

Sabemos que nem todo espaço X possui uma base de Schauder. Por exemplo, (ENFLO, 1973) construiu um espaço de Banach separável que não possui base de Schauder (veja Teorema I.5.1 de (CASAZZA; GUERRE-DELABRIERE, 1994)). No entanto, em (BESSAGA; PEŁCZYŃSKI, 1958) C. Bessaga e A. Pełczyński provaram que todo espaço de Banach admite um subespaço de dimensão infinita com uma base de Schauder (veja Proposição I.1.7 de (CASAZZA; GUERRE-DELABRIERE, 1994)). Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.0.7 *Diremos que uma sequência* (x_n) *em um espaço localmente convexo* (X,τ) *é básica se ela constitui uma base de Schauder para* $\overline{[x_n]}^{\tau}$*.*

A seguinte proposição caracteriza sequências básicas em espaços de Banach. Para sua demonstração veja (BOTELHO *et al.*, 2012, p.320).

Proposição 2.0.8 *(Critério de Banach-Grunblum) Uma sequência (x_n) de elementos diferentes de zero em um espaço de Banach X é básica se, e somente se, existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leqslant M \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \tag{2.1}$$

para qualquer sequência de escalares (a_n) e quaisquer números inteiros $m \leqslant n$.

Definição 2.0.9 *O ínfimo das constantes M que satisfazem a desigualdade (2.1) é chamada constante básica de (x_n). Quando não houver perigo de confusão, usaremos a letra K para denotar a constante básica de (x_n). Convém destacar a seguinte relação conhecida para K:*

$$K = \sup_n \|P_n\|.$$

Definição 2.0.10 *Diremos que uma sequência (x_n) em X domina outra sequência (y_n) se existe uma constante $L > 0$ tal que $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leqslant L \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$ para toda sequência $(a_n) \in c_{00}$.*

Definição 2.0.11 *Duas sequências (x_n) e (y_n) em espaços normados X e Y, respectivamente, são equivalentes quando existem $L_1, L_2 > 0$ tais que*

$$L_1 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|_Y \leqslant L_2 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_X.$$

para todo $(a_i) \in c_{00}$. Quando $L_1 = 1/L$ e $L_2 = L$ diremos apenas que (x_n) e (y_n) são L-equivalentes e denotaremos por $(x_n) \sim_L (y_n)$.

Segue direto do Critério de Banach-Grunblum que: se $(x_n) \sim (y_n)$ então (x_n) é básica se, e somente se, (y_n) é básica.

Em muitas situações é importante encontrarmos sequências básicas equivalentes, a partir de uma sequência básica dada. O seguinte Teorema fornece um modo prático de fazer isso, na verdade ele é um famoso resultado conhecido como o Princípio da Pequena Perturbação.

Teorema 2.0.12 *Seja (x_n) uma sequência básica em um espaço de Banach X. Se (y_n) é uma sequência em X tal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^\star\| \|x_n - y_n\| = \theta < 1$$

então (y_n) *é uma sequência básica equivalente a* (x_n).

Demonstração: Veja Teorema 10.4.7 de (BOTELHO *et al.*, 2012). □

3 COMPACIDADE FRACA EM ESPAÇO DE BANACH

Neste capítulo apresentaremos nossos principais resultados que versam sobre caracterizações de compacidade fraca em termos da propriedade do ponto fixo (PPF). Para que possamos enunciar de forma precisa nossos resultados, antes faremos algumas considerações.

Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e M um subconjunto convexo de X. Considere a família $\mathscr{B}(M)$ de todos os subconjuntos convexos, limitados e fechados de M. Recordemos que um conjunto não vazio $C \in \mathscr{B}(X)$ é dito ter a PPF para uma classe de aplicações $\mathscr{M}$, se cada $f \in \mathscr{M}$, com $f(C) \subset C$, possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in C$ tal que $f(x) = x$.

Nossos resultados estão relacionados com a seguinte variação da noção de PPF surgida em 2004.

Definição 3.0.1 *(BENAVIDES et al., 2004) Dizemos que um conjunto não vazio $C \in \mathscr{B}(X)$ possui a propriedade do ponto fixo genérica (PPF-G) para uma classe de aplicações $\mathscr{M}$ se, para cada aplicação $f \in \mathscr{M}$ e cada $K \in \mathscr{B}(C)$ tal que $f(K) \subset K$, f possui um ponto fixo em K.*

O objetivo deste capítulo é caracterizar compacidade fraca em espaços de Banach, usando PPF-G para aplicações afins bi-Lipschitz. Para ser capaz de fazer isso, primeiro precisamos lançar alguma luz sobre a estrutura inerente das sequências seminormalizadas.

3.1 Sequências seminormalizadas

Comecemos com a definição de sequências seminormalizadas.

Definição 3.1.1 *Uma sequência (x_n) em X é chamada seminormalizada se*

$$0 < \inf_n \|x_n\| \leqslant \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Dada uma sequência básica (x_n), sejam $[x_n]$ e K, respectivamente, o fecho do espaço gerado por (x_n) e sua constante básica. Neste caso, vamos denotar por P_n e R_n as projeções naturais dadas por $P_n x = \sum_{i=1}^{n} x_i^\star(x) x_i$ e $R_n x = x - P_n x$ onde $x \in [x_n]$ e $\{x_i^\star\}_{i=1}^{\infty}$ são os funcionais biortogonais de (x_n). Lembre-se que $K := \sup_n \|P_n\|$. Na literatura básica de Análise Funcional encontramos também a expressão *Se* que é usada para representar o espaço de Banach de todas as sequências de números reais (c_n), com $\sum_n c_n < \infty$, dotado com a sua norma natural $\|(c_n)\|_{Se} := \sup_k \left|\sum_{n=1}^{k} c_n\right|$. Doravante, chamaremos de *base de somas* a sequência (s_n) formada pelas somas $s_n = e_1 + e_2 + ... + e_n$, onde (e_n) são vetores unitários em Se dados por $e_n = (\delta_{ni})_{i=1}^{\infty}$, onde δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

A primeira observação não trivial sobre sequências básicas que usaremos é o seguinte resultado. Convém informar que esse resultado, ainda que básico, não consta disponível na literatura presente. De fato, uma parte da prova usa um recente resultado de Hájek and Johanis de 2010.

Proposição 3.1.2 *Seja (x_n) uma sequência básica em X e $(\alpha_n) \subset (0,1]$ uma sequência não decrescente de números reais. Então $(x_n) \sim_{2K/\alpha_1} (\alpha_n x_n)$ onde K é a constante básica de (x_n).*

Demonstração: Seja $L = 2K/\alpha_1$. Para provar que $(\alpha_n x_n)$ é L-dominada por (x_n), usaremos as ideias contidas em Hájek-Johanis (HÁJEK; JOHANIS, 2010). Denotemos por P_I a projeção natural ao longo de um intervalo finito $I \subset \mathbb{N}$ e definimos uma nova norma em $[x_n]$ por

$$|||x||| = \sup\left\{ \|P_I x\| : \ I \subset \mathbb{N}, I \text{ intervalos finitos } \right\} \quad \text{para } x \in [x_n].$$

Note que com essa norma os operadores P_n e R_n satisfazem: $|||P_n||| \leqslant 1$ e $|||R_n||| \leqslant 1$. Usando a Proposição 2.0.8 uma conta direta mostra que $\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant 2K\|x\|$ para todo $x \in [x_n]$. Combinando essa última desigualdade com (HÁJEK; JOHANIS, 2010, Lemma 5-(a)), temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i\right\| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right|\right|\right| \leqslant 2K\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| \quad \text{para todo } (a_i) \in c_{00}.$$

Mostrando que (x_n) domina $(\alpha_n x_n)$ com constante $2K$, como $0 < \alpha_1 < 1$, concluímos que (x_n) domina $(\alpha_n x_n)$ com constante $L = 2K/\alpha_1$.

Para provar a desigualdade inversa, fixemos $N \in \mathbb{N}$ e escolhemos qualquer sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{N}$. Combinando as somas parciais de Abel

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{N-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \alpha_N \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

com o fato de $|||P_n(x)||| \leqslant |||x|||$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n x_n\right|\right|\right| &\geqslant \alpha_N \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right|\right|\right| - \sum_{n=1}^{N-1} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right|\right| \\
&\geqslant \alpha_N \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right|\right|\right| - \sum_{n=1}^{N-1} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right|\right|\right| = \alpha_1 \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right|\right|\right|,
\end{aligned}$$

usando que $\|\cdot\| \leqslant |||\cdot||| \leqslant 2K\|\cdot\|$ obtemos

$$2K\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n x_n\right\| \geqslant \alpha_1 \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\|.$$

Como $N \in \mathbb{N}$ era qualquer, isso conclui a prova. □

Na sequência, vamos relembrar algumas noções introduzidas por H. Rosenthal.

Definição 3.1.3 *(ROSENTHAL, 1994) Uma sequência seminormalizada (x_n) em X é chamada:*

(i) Não-trivial fracamente de Cauchy, se (x_n) é fracamente de Cauchy mas não converge na topologia fraca.

(ii) sequência wide-(s), se (x_n) é básica e domina a sequência de base de somas.

(iii) (s)-sequência, se (x_n) é fracamente de Cauchy e wide-(s).

A próxima proposição foi extraída de (ROSENTHAL, 1994, Proposição 2.2.), ela relaciona sequências não-triviais fracamente de Cauchy com (s)-sequências em espaços de Banach.

Proposição 3.1.4 *Seja (x_n) uma sequência não-trivial fracamente de Cauchy em um espaço de Banach. Então (x_n) possui uma (s)-sequência.*

Definição 3.1.5 *Diremos que uma sequência (x_n) em um espaço de Banach é fortemente somável quando ela é básica, fracamente de Cauchy e para toda sequência de escalares (α_j) tais que* $\sup \| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \| < \infty$*, então* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty$.

(ROSENTHAL, 1994) provou que cada sequência não-trivial fracamente de Cauchy em X ou admite uma subsequência fortemente somável ou uma base de blocos convexos que é equivalente à base de somas. No contexto da teoria métrica de pontos fixos, a parte desejável desse resultado fundamental sobre a estrutura dos espaços de Banach é a parte que concerne sobre blocos convexos equivalentes à base de somas. A fim de evitar possíveis dificuldades provenientes da parte não desejável dessa dicotomia, ou doutra forma, a fim de evitar dicotomias, a abordagem teórico-estrutural que adotamos em nosso contexto solicita uma perspectiva ligeiramente diferente que é delineada pela seguinte definição.

Definição 3.1.6 *Seja (x_n) uma sequência limitada em X. Uma sequência (z_n) é chamada de sequência básica convexa de (x_n), se (z_n) é básica e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem escalares $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ em $[0,1]$ tais que $z_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(n)} x_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(n)} = 1$.*

Observação 3.1.7 *Note que se (x_n) é uma sequência básica então qualquer subsequência (z_n) de (x_n) é uma sequência básica convexa equivalente à (x_n). Em particular, se uma sequência (y_n)*

contém qualquer subsequência (x_n) equivalente à base canônica de ℓ_1 então cada subsequência (z_n) de (x_n) define uma sequência básica convexa de (x_n) equivalente à (x_n).

Uma forma alternativa de descrever compacidade fraca em termos de PPF-G para aplicações uniformemente Lipschitz, consiste em tentar obter sequências wide-(s) que dominam todas as suas subsequências. O próximo resultado mostra, porém, que espaços com a propriedade scalar-plus-compact não constituem os ambientes mais propícios para essa possibilidade.

Proposição 3.1.8 *Seja (x_n) uma sequência wide-(s) em X. Suponha que (z_n) é uma sequência básica convexa de (x_n) cujas subsequências são dominadas por (x_n). Então $\mathscr{L}([x_n])$ não é separável.*

Demonstração: Procederemos como em (ANDROULAKIS *et al.*, 2006) para obter uma quantidade não enumerável de operadores lineares limitados que são separados aos pares em $[x_n]$. Para cada sequência crescente (κ_n) em $\mathbb{N}$, defina a aplicação $T_{(\kappa_n)}\colon [x_n] \to [x_n]$ por $T_{(\kappa_n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\star(x) z_{\kappa_n}$. Como toda subsequência de (z_n) é dominada por (x_n) segue que cada $T_{(\kappa_n)} \in \mathscr{L}([x_n])$. Seja K a constante básica de (z_n). Dados (κ_n) e (ℓ_n) duas sequências crescentes diferentes em $\mathbb{N}$, então para cada $j \in \mathbb{N}$, com $\kappa_j \neq \ell_j$. Supondo $\kappa_j < \ell_j$, temos

$$\begin{aligned}
\|T_{(\kappa_n)} - T_{(\ell_n)}\| &\geqslant \left\| T_{(\kappa_n)}\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right) - T_{(\ell_n)}\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^\star\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right) z_{\kappa_n} - x_n^\star\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right) z_{\ell_n} \right) \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_j\|}\|z_{\kappa_j} - z_{\ell_j}\| \geqslant \frac{\|z_{\kappa j}\|}{K\|x_j\|} \geqslant \frac{\inf_n \|z_n\|}{K \sup_n \|x_n\|} > 0,
\end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos que (z_n) é uma sequência básica. □

3.2 Resultados Principais do Capítulo

Apresentaremos agora os principais resultados da Tese.

Teorema 3.2.1 *Em qualquer espaço de Banach, toda sequência seminormalizada (y_n) que não possui subsequências fracamente convergentes, possui uma subsequência (x_n) com as seguintes propriedades:*

(i) (x_n) é wide-(s).

(ii) (x_n) possui uma sequência básica convexa (z_n) equivalente.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que (y_n) não possui subsequências fracamente de Cauchy, então pelo ℓ_1-Teorema de H. Rosenthal, (y_n) possui uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1. Neste caso, o resultado segue da Observação 3.1.7.

Suponhamos agora que (y_n) possua uma subsequência fracamente de Cauchy que, por hipótese, não converge na topologia fraca. Usando a Proposição 2.2 de (ROSENTHAL, 1994), segue que (y_n) possui uma (s)-subsequência, digamos (x_n). Em particular, (x_n) é wide-(s). Seja K a constante básica de (x_n). Dado $0 < \varepsilon < 1$ qualquer. Iremos construir uma sequência básica convexa que é equivalente à (x_n). Fixemos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de números reais positivos $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ em B_{ℓ_1}, satisfazendo

(1) $\left(1 - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não decrescente em $(0,1)$.

(2) $1/2 \leqslant 1 - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \to 1$ quando $n \to \infty$,

(3) e, além disso,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{(n)} < \frac{\varepsilon}{4K}\frac{\inf_n \|x_n\|}{\sup_n \|x_n\|}.$$

Defina (z_n) por

$$z_n := \left(1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{(n+1)}\right)x_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{(n+1)} x_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Provaremos que (z_n) é uma sequência básica seminormalizada.

Como (x_n) é limitada segue que (z_n) é limitada, logo, $\limsup \|z_n\| < \infty$. Por outro lado, usando que (x_n) é wide-(s), digamos T-equivalente a base de somas de Se, obtemos

$$\|z_n\| \geqslant \frac{1}{T}\left\|\left(1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{n+1}, \lambda_{n+1}^{n+1}, \lambda_{n+2}^{n+1}, \ldots\right)\right\|_{Se} \geqslant \frac{1}{T}\left|1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{n+1}\right| \geqslant \frac{2}{T}$$

onde na última desigualdade usamos o item (2) da definição da sequência $\{\lambda_n^k\}_{k=1}^{\infty}$. Portanto, $\inf_n \|z_n\| > 0$, provando assim que (z_n) é seminormalizada.

Para provar que ela é básica usaremos o Princípio da Pequena Perturbação. Para isso, defina a sequência auxiliar $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$w_n = \left(1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{(n+1)}\right)x_n,$$

e note que o fato de (x_n) ser básica e seminormalizada implica que (w_n) também é. Usando o Critério de Banach-Grunblum temos

$$\|x_n^{\star}(x)x_n\| \leqslant \|P_n(x)\| + \|P_{n-1}(x)\| \leqslant \|P_n\|\|x\| + \|P_{n-1}\|\|x\| \leqslant 2K\|x\|, \ \forall x.$$

Portanto, $\|x_n^\star\| \leqslant 2K/\inf\|x_k\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $w_n^\star = x_n^\star/\alpha_n$, onde $\alpha_n = 1 - \sum_{k=n+1}^\infty \lambda_k^{(n+1)}$, obtemos $\|w_n^\star\| \leqslant 2\|x_n^\star\|$. Denotando $\varepsilon_n := \|\sum_{k=n}^\infty \lambda_k^{(n)} x_k\|$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^\infty \|w_n^\star\|\|z_n - w_n\| \leqslant 2\sum_{n=1}^\infty \|x_n^\star\|\|z_n - w_n\| \leqslant \frac{4K}{\inf\|x_n\|}\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \leqslant \frac{4K\sup\|x_n\|}{\inf\|x_n\|}\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=n}^\infty \lambda_k^{(n)} \leqslant \varepsilon < 1.$$

Assim, pelo Princípio da Pequena Perturbação, veja Teorema 2.0.12, (z_n) é básica e, portanto, convexa básica.

Provaremos agora que (x_n) domina (z_n). Dada qualquer sequência de escalares (a_i) em c_{00}, defina $\alpha_n = 1 - \sum_{k=n+1}^\infty \lambda_k^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Um cálculo direto mostra que

$$\sum_{i=1}^\infty a_i z_i = \sum_{i=1}^\infty a_i\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^\infty a_i \sum_{k=i+1}^\infty \lambda_k^{(i+1)} x_k,$$

e, portanto,

$$\Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i z_i\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i\alpha_i x_i\Big\| + \sup_n |a_n| \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i.$$

Por um lado, usando o Critério de Banach-Grunblum, veja Proposição 2.0.8, segue

$$\|a_n x_n\| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\Big\| \leqslant 2K\Big\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\Big\|,$$

logo,

$$|a_n| \leqslant \frac{2K}{\inf_n\|x_n\|}\Big\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\Big\| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\sup_n |a_n| \leqslant \frac{2K}{\inf_n\|x_n\|}\Big\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\Big\|.$$

Por outro lado, usando a Proposição 3.1.2, temos

$$\Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i\alpha_i x_i\Big\| \leqslant 2K\Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i x_i\Big\|.$$

Segue-se, portanto, que

$$\Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i z_i\Big\| \leqslant \Big(2K + \frac{2K}{\inf_n\|x_n\|}\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i\Big)\Big\|\sum_{i=1}^\infty a_i x_i\Big\|.$$

Como

$$\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i \leqslant \sum_{i=1}^\infty\sum_{k=i}^\infty \lambda_k^{(i)}\|x_k\| \leqslant \sup_n\|x_n\|\sum_{i=1}^\infty\sum_{k=i}^\infty \lambda_k^{(i)} \leqslant \frac{\varepsilon\inf_n\|x_n\|}{4K},$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \leqslant \frac{\varepsilon \inf_n \|x_n\|}{4K}, \tag{3.2}$$

e portanto,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i \Big\| \leqslant \Big(2K + \varepsilon\Big) \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \Big\|. \tag{3.3}$$

Para concluir a prova, devemos provar que (z_n) domina (x_n). Para este fim, dado $(a_i) \in c_{00}$ qualquer. Pela definição de (z_n) obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{k=i+1}^{\infty} \lambda_k^{(i+1)} x_k,$$

e, logo,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \Big\| &\geqslant \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n x_n \Big\| - \sup_n |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{(n+1)} x_k \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n x_n \Big\| - \sup_n |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando o Critério de Banach-Grunblum, temos

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \frac{2}{\|x_n\|} \|a_n \alpha_n x_n\| \\ &\leqslant \frac{2}{\inf \|x_n\|} \left(\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i x_i \Big\| + \Big\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha_i x_i \Big\| \right) \\ &\leqslant \frac{2}{\inf \|x_n\|} \left(2K \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \Big\| \right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\sup_n |a_n| \leqslant \frac{4K}{\inf \|x_n\|} \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \Big\|.$$

Usando (3.2) resulta

$$\sup_n |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leqslant \frac{4K}{\inf \|x_n\|} \cdot \frac{\inf \|x_n\|}{4K} \cdot \varepsilon \cdot \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \Big\| = \varepsilon \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \Big\|,$$

substituindo essa equação em (3.4) temos

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \Big\| \geqslant \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n x_n \Big\| - \varepsilon \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \Big\|,$$

e logo,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n\Big\| \geqslant (1-\varepsilon)\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i\Big\|.$$

Usando agora a Proposição 3.1.2 concluímos que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i\Big\| \geqslant \frac{\alpha_1}{2K}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\Big\|,$$

e, portanto,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n\Big\| \geqslant \frac{(1-\varepsilon)\alpha_1}{2K}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\Big\|, \tag{3.5}$$

para qualquer $(a_i) \in c_{00}$, terminando assim a prova do teorema.

□

A principal consequência do resultado acima é o seguinte teorema.

Teorema 3.2.2 *Seja $C \in \mathscr{B}(X)$ um conjunto não fracamente compacto. Então C contém uma sequência wide-(s), digamos (x_n), com constante básica κ tal que:*

(i) Se $\delta > 0$, então existe uma sequência convexa básica (z_n) em C tal que $(x_n) \sim_{(2\kappa+\delta)} (z_n)$.

(ii) Existe uma aplicação bi-Lipschitz afim $f_{(z_n)} \colon K \to K$, que não possui ponto fixo em $K = \overline{\mathrm{co}}(\{x_n\})$.

Demonstração: Como C não é fracamente compacto, podemos escolher uma sequência (y_n) em C sem subsequências fracamente convergentes. Seja (x_n) a subsequência wide-(s) de (y_n), dada pelo Teorema 3.2.1. Dado $\delta > 0$ qualquer, definindo (z_n) como em (3.1) então é claro que $z_n \in C$, para todos $n \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno no Teorema 3.2.1 podemos supor:

$$\max\left\{2\kappa+\varepsilon, \frac{2\kappa}{(1-\varepsilon)\alpha_1}\right\} \leqslant 2\kappa+\delta.$$

Resulta das desigualdades (3.3) e (3.5) que $(x_n) \sim_{(2\kappa+\delta)} (z_n)$.

Para completar a prova do teorema resta provar a afirmação (ii). Para fazer isso, façamos $K = \overline{\mathrm{co}}(\{x_n\})$, e note que, desde (x_n) é wide-(s), segue que

$$K = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : \ t_n \geqslant 0 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Defina a aplicação $f_{(z_n)} \colon K \to C$ por

$$f_{(z_n)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z_n.$$

É facil ver que $f_{(z_n)}$ é uma aplicação afim de K em K. Além disso, usando que $(x_n) \sim_{(2\kappa+\delta)} (z_n)$, deduzimos que $f_{(z_n)}$ é bi-Lipschitz. Afirmamos que f não possui ponto fixo. De fato, fixemos qualquer $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in K$ e suponhamos que $x = f_{(z_n)}(x)$. Observemos que

$$f_{(z_n)}(x) = t_1\Big(\alpha_1 x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^{(2)} x_k\Big) + \cdots + t_n\Big(\alpha_n x_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k^{(n+1)} x_k\Big) + \ldots,$$

onde $\alpha_n = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $x = f_{(z_n)}(x)$ implica que

$$\begin{cases} t_1 = t_1\alpha_1 \\ t_2 = t_1\lambda_2^{(2)} + t_2\alpha_2 \\ \quad\vdots \\ t_{n+1} = t_1\lambda_{n+1}^{(2)} + t_2\lambda_{n+1}^{(3)} + \cdots + t_n\lambda_{n+1}^{(n+1)} + t_{n+1}\alpha_{n+1}, \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Como $0 < \alpha_1 < 1$, segue-se que $t_1 = 0$. Suponha por hipótese de indução que $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$, para $n \geqslant 1$. Então $t_{n+1} = t_{n+1}\alpha_{n+1}$, como $0 < \alpha_{n+1} < 1$ concluímos que $t_{n+1} = 0$. Assim, pela hipótese de indução concluímos que $t_i = 0$, para todo $i = 1, ..., n+1$. Isto contradiz o fato de que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$, terminando a prova do teorema. $\square$

Como consequência do teorema acima, obtemos o seguinte resultado que melhora o Corolário 3.4, item a), de Benavides-Pineda-Pruss (BENAVIDES *et al.*, 2004).

Teorema 3.2.3 *Seja X um espaço de Banach e $C \in \mathscr{B}(X)$. Então C é fracamente compacto se, e somente se, C possui a PPF-G para aplicações afins bi-Lipschitz.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente C fracamente compacto então todo $K \in \mathscr{B}(C)$ é fracamente compacto. Como f é contínua em norma e afim, e $f(K) \subset K$ com $K \in \mathscr{B}(C)$ então pelo Teorema de Schauder-Tychonoff (veja (DUGUNDJI; GRANAS, 1982, p.74)) f possui um ponto fixo em K (veja também (MILMAN; MILMAN, 1963)). Reciprocamente, suponhamos que C não é fracamente compacto. Sendo C um conjunto convexo, fechado e limitado então, pelo Teorema 3.2.2, existe um subconjunto convexo e fechado K que admite uma aplicação afim e bi-Lipschitz, $f : K \to K$, contínua sem ponto fixo. $\square$

Daremos agora duas aplicações do Teorema 3.2.3, o primeiro é o seguinte corolário.

Corolário 3.2.4 *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, todo conjunto $C \in \mathscr{B}(X)$ possui a PPF-G para aplicações afins bi-Lipschitzianas.*

A segunda aplicação é um exemplo bem conhecido na Análise Funcional.

Exemplo 3.2.5 *Seja c_0 o espaço das sequências reais que converge a zero munido da norma $\|(x_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Considere B_1 a bola unitária fechado de c_0. Defina a aplicação $f : B_1 \to B_1$ por $f(x_1, x_2, ...) = (1, x_1, x_2, ...)$. Então é fácil ver que B_1 é convexo, fechado e limitado e f é afim. Como $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, segue que f é bi-Lipschitz. Note que f não possui ponto fixo, pois $f(x) = x$ implica $x = (1, 1, ...)$ que não pertence a c_0. Pelo Teorema 3.2.3 B_1 não é fracamente compacto.*

4 COMPACIDADE FRACA EM ESPAÇO LOCALMENTE CONVEXOS

Neste capítulo estamos interessados em descrever compacidade fraca em termos da propriedade do ponto fixo fraco genérica (PPF-FG) no âmbito dos espaços localmente convexos. Esta nova propriedade é um relaxamento da PPF-G para aplicações afins não expansivas em um sentido fraco, isto é, quando a condição de 1-Lipschitz é substituída pela ação de topologias mais fraca.

Definição 4.0.1 *Um conjunto $C \in \mathscr{B}(X)$ é dito ter a PPF-FG para aplicações afins não expansiva se sempre que $K \in \mathscr{B}(C)$ e d é uma métrica mais fraca em K, então cada aplicação afim d não expansiva $f\colon K \to K$ possui um ponto fixo.*

Daremos agora um exemplo do tipo de teoremas que estamos interessados em obter.

Teorema 4.0.2 *Seja X um espaço de Banach. Então $C \in \mathscr{B}(X)$ é fracamente compacto se, e somente se, possui a PPF-FG para aplicações afins não expansivas.*

4.1 Propriedade do Ponto Fixo Fraco-Genérica

O objetivo desta seção é reunir todas as principais ferramentas de que precisamos para estabelecer o PPF-FG. Os resultados aqui apresentados são consequências de refinamentos de abordagens e métodos disponíveis na literatura. Ao longo desta seção, salvo indicação em contrário, X vai denotar um espaço localmente convexo e Hausdorff com topologia $\mathscr{T}$. Começaremos melhorando um resultado devido a Drewnowski (DREWNOWSKI, 1975, Theorem 4).

Lema 4.1.1 *Seja M um subconjunto convexo e limitado de X e $A = \overline{M}$. Se $M - M$ possui uma base enumerável de vizinhanças da origem, então o espaço gerado por A, digamos $\mathbb{E}$, admite uma norma $\|\cdot\|$ satisfazendo:*

(i) a topologia gerada por $\|\cdot\|$ coincide com $\mathscr{T}$ em A,

(ii) toda sequência de Cauchy em A com relação a $\|\cdot\|$ é de Cauchy em $\mathscr{T}$, e

(iii) toda sequência fracamente convergente em A é $\sigma(X, X^\star)$-convergente.

Demonstração: A menos de fazer uma translação podemos supor que $0 \in M$. Note inicialmente que, por hipótese, existe uma sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vizinhanças da origem que são absolutamente convexas e $\mathscr{T}$-abertas em X com

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

tal que os conjuntos $(M - M) \cap U_n$ formam uma base de 0 em $(M - M, \mathscr{T}|_{M-M})$. Note que a topologia localmente convexa τ em X, induzida pela sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é mais fraca que $\mathscr{T}$ e sua restrição $\tau|_{\mathbb{E}}$ é Hausdorff. Logo existem seminormas (p_n) em $\mathbb{E}$ que geram a topologia $\tau|_{\mathbb{E}}$, em particular, $\tau|_{\mathbb{E}}$ é Lindelöf. Sendo $\tau|_{\mathbb{E}}$ Lindelöf e A limitada então podemos representar A na forma $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada A_n é τ-aberto em A, limitado em X e $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A menos de redefinir as seminormas (p_n), podemos assumir que $p_n(x) \leqslant 1$ para todo $x \in A_n$. Defina a seguinte norma em $\mathbb{E}$ por

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{E}.$$

Segue de (DREWNOWSKI, 1975, p. 326) que a topologia gerada por $\|\cdot\|$ coincide com $\mathscr{T}$ em A, o que provar o item (i).

Provaremos agora (ii). Suponha que (z_n) é $\|\cdot\|$-Cauchy em A e fixando qualquer $\mathscr{T}$-vizinhança U de 0 em X. Usando o fato de que $\{(\overline{M-M}) \cap U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formar uma base para $\mathscr{T}|_{\overline{M-M}}$ em 0, podemos encontrar inteiros $i_1, \ldots, i_m \geqslant 1$ e números reais $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0$ tais que

$$V := \bigcap_{s=1}^{m} \left\{x \in \overline{M-M} : \ p_{i_s}(x) < \varepsilon_s\right\} \subset U.$$

Dado qualquer $0 < \varepsilon < \min(2^{-i_1}\varepsilon_1, \ldots, 2^{-i_m}\varepsilon_m)$, escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_\kappa - z_\ell\| < 2\varepsilon$ para todo $\kappa, \ell > n_\varepsilon$. Segue-se que $p_{i_s}(z_\kappa - z_\ell) < 2\varepsilon_s$ para todo $s = 1, \ldots, m$, o que implica $z_\kappa - z_\ell \in 2V \subset 2U$ para todo $\kappa, \ell > n_\varepsilon$. Como U foi arbitrária, obtemos (ii).

Para concluir a prova, suponha que $z_k \xrightarrow{w(\mathbb{E})} z$ em A, onde $w(\mathbb{E})$ denota a topologia fraca induzida de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. Dado qualquer $\varphi \in X^\star$, onde o dual $X^\star$ é em relação a topologia $\mathscr{T}$. Por (i) obtemos que $\varphi|_A$ é $\|\cdot\|$-contínua. Como φ é linear e $\|\cdot\|$-contínua em A, dado qualquer $\varepsilon > 0$, pelo resultado de aproximação de Roelcke (ROELCKE *et al.*, 1973, Theorem 4), existe um funcional linear ϕ_ε que é $\|\cdot\|$-contínuo em $\mathbb{E}$ tal que

$$|\varphi(x) - \phi_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{para } x \in A.$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, pela desigualdade triangular obtemos

$$\limsup_k |\varphi(z_k) - \varphi(z)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Isto termina a prova. $\square$

Observação 4.1.2 *Note que a hipótese feita em $M - M$ é automaticamente satisfeita quando $A = \overline{\mathrm{aco}}(M)$ é metrizável.*

Doravante ℓ_1^0 denotará o subespaço de ℓ_1 formado pelas sequências com no máximo um número finito de elementos não nulos.

A seguinte definição é uma ligeira variação da Definição 3.1 que foi dada em (BARROSO *et al.*, 2012).

Definição 4.1.3 *Uma sequência limitada (x_n) em X é dita ser σ-equivalente à ℓ_1^0 se o espaço $\mathbb{E} = span(M)$, onde $M = \overline{co}\{x_n\}$, possui uma topologia localmente convexa e Hausdorff σ, que é mais fraca do que a topologia $\mathscr{T}$ em M e satisfaz a propriedade de que a aplicação $T_0\colon (c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_1}) \to (\mathbb{E}, \sigma)$ dada por*

$$T_0\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad \textit{para todo } (a_i) \in c_{00},$$

é um isomorfismo. Também diremos que (x_n) é σ-equivalente à ℓ_1^0-sequência.

Grande parte da motivação por trás dessa noção vem dos seguintes resultados.

Proposição 4.1.4 *Seja (x_n) uma sequência limitada em X e suponha que $M = \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})$ é metrizável. Então $span(M)$ admite uma topologia localmente convexa, mais fraca e metrizável σ que coincide com $\mathscr{T}$ em M e, além disso, (x_n) possui uma ℓ_1^0-subsequência que é σ-equivalente ou uma subsequência que é fracamente de Cauchy em relação a topologia induzida por σ.*

Demonstração: Como M é metrizável e separável então o resultado segue diretamente de (DREWNOWSKI, 1975, Theorem 2). Agora a segunda parte segue do fato de que espaços localmente convexos e metrizáveis têm a propriedade de Rosenthal, veja (BARROSO *et al.*, 2012, Theorem 3.5) ou, mais geralmente, podemos usar (RUESS, 2014, Theorem 2.1). □

Proposição 4.1.5 *Seja $C \in \mathscr{B}(X)$ um conjunto sequencialmente completo. Suponha que C contém uma sequência que é σ-equivalente à ℓ_1^0. Então C não possui a propriedade PPF-G para aplicações afins uniformemente Lipschitz.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência em C que é σ-equivalente à ℓ_1^0. Considere $M = \overline{\mathrm{co}}(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})$. Por (BARROSO *et al.*, 2012, Proposition 3.2) existe uma constante $\eta > 0$ e uma seminorma σ-contínua μ em $\mathbb{E} = \mathrm{span}(M)$ tal que

$$\eta \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leqslant \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) \tag{4.1}$$

para toda sequência de escalares (a_i) em c_{00}. Consideremos agora o conjunto convexo

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i : \text{ cada } t_i \geqslant 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1 \right\}.$$

É fácil verificar que $K = M$. Note também que μ é contínua em M. Além disso, se definirmos a aplicação $f\colon K \to K$ por

$$f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_{i+1} \quad \text{para } \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i \in K,$$

então f não possui ponto fixo e é uniformemente Lipschitz, pois $\sigma|_M \leqslant \mathscr{T}|_M$ e para toda seminorma contínua ρ em X, (4.1) segue que

$$\rho(f^p(x) - f^p(y)) \leqslant \frac{2\sup_n \rho(x_n)}{\eta} \mu(x-y)$$

para todo $x, y \in K$ e $p \in \mathbb{N}$. □

Considere $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $0 < \lambda \leqslant 1$. Lembremos de (CASAZZA; GUERRE-DELABRIERE, 1994) que um subconjunto $G \subset X^\star$ é chamado de λ-normado para X se

$$\sup_{g \in S(G)} |g(x)| \geqslant \lambda \|x\| \quad \text{para todo } x \in X,$$

onde $S(G)$ denota a esfera unitária de G.

O nosso próximo resultado é uma versão modificada do princípio de Bessaga-Pełczyński que será usado para provar o Teorema 4.2.6 da próxima seção.

Lema 4.1.6 *Seja X um espaço normado, $G \subset X^\star$ um λ-normado para X. Seja (x_n) uma sequência seminormalizada de vetores em X satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $g(x_n) \to 0$, *para todo* $g \in G$.

(ii) (x_n) *não possui subsequências de Cauchy em norma.*

Então existe uma subsequência básica (e_k) de (x_n) e uma constante $\eta > 0$ tal que

$$\eta \sum_{i=1}^{4} |t_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{4} t_i e_{\kappa_i} \right\| \tag{4.2}$$

para cada números naturais $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$ e toda escolha dos escalares $(t_i)_{i=1}^4$.

Demonstração: Defina a norma $|||\cdot|||$ em X por

$$|||x||| = \sup_{g \in S(G)} |g(x)|, \quad x \in X.$$

Como G é λ-normado para X, segue que essa norma é equivalente a norma de X. Seja (ε_n) uma sequência em $(0,1)$, com $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) < \infty$, e defina $n_1 := 1$. Usando o método de (PEŁCZYŃSKI, 1962) obtemos uma sequência crescente $n_1 < n_2 < \dots$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\kappa} t_i x_{n_i}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\prod_{s=\kappa}^{\ell-1}(1+\varepsilon_s)\left\|\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{n_i}\right\|$$

para todo $1 \leqslant \kappa < \ell \leqslant k$ e toda escolha de escalares $(t_i)_{i=1}^{k+1}$. Assim, pelo critério de Banach-Grunblum, veja Teorema 2.0.8, segue que (x_{n_i}) é básica.

Pela condição (ii) existe uma constante $\delta > 0$ tal que para cada subespaço de dimensão finita F de X existe $z \in \{x_{n_i} :\ i \in \mathbb{N}\}$ com $\operatorname{dist}(z,F) \geqslant \delta$. Assim, podemos construir por indução uma subsequência (e_k) de (x_{n_i}) tal que $\operatorname{dist}(e_{k+1}, \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_k\}) \geqslant \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora seguiremos as ideias contidas em (BARROSO *et al.*, 2013, Lemma 4.3). Seja $M = \sup_n \|x_n\|$ e defina $c_i = \delta^{i-1}/2^{2i+1}M^{i-1}$ para $i = 1,\dots,4$. Seja i_0 o maior índice tal que $|t_i| \geqslant c_i \sum_{i=1}^{4}|t_i|$. Então

$$\left\|\sum_{i=1}^{4} t_i x_{\kappa_i}\right\| \geqslant \left(\delta c_{i_0} - M\sum_{i=i_0+1}^{4} c_i\right)\sum_{i=1}^{4}|t_i| \geqslant \frac{1}{2}c_{i_0}\delta\sum_{i=1}^{4}|\alpha_i| \geqslant \frac{1}{32}\frac{\delta^4}{M^3}\sum_{i=1}^{4}|\alpha_i|.$$

□

4.2 Resultados Principais do Capítulo

Apresentaremos agora os principais resultados deste capítulo. Doravante, iremos supor, salvo indicação em contrário, que X é um espaço localmente convexo e Hausdorff.

Começaremos ressaltando que existem dois ingredientes importantes por trás da prova do Teorema 4.0.2. O primeiro é o Lema 4.1.6 e o segundo é o Lema de Mazur. Lembremos que o Lema de Mazur tem o seguinte teor: se (x_n) é uma sequência fracamente convergente em um espaço normado X, então existe uma subsequência de blocos convexos de (x_n) que converge fortemente para zero. Lembremos que uma sequência de blocos convexos de (x_n) é uma sequência (y_k) da forma

$$y_k = \sum_{n\in I_k}\lambda_n x_n$$

onde (I_k) é uma sequência de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ com $\max(I_k) < \min(I_{k+1})$ e (λ_n) é uma sequência de números reais não-negativas, de modo que $\sum_{n\in I_k}\lambda_n = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. É importante destacar a seguinte observação. Um papel fundamental, na prova do Lema de Mazur é desempenhado pela norma de X. Por isso, talvez, não seja surpreendente que exista uma versão do Lema de Mazur para espaços localmente convexos. No entanto, não fomos exitosos em encontrar uma referência bibliográfica contendo essa generalização. Admitindo a hipótese de sua não existência, iremos a seguir apresentar uma demonstração desse fato.

Lema 4.2.1 *Suponha que (x_n) é uma sequência que converge fracamente para zero em X tal que $\overline{\text{aco}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ é metrizável. Então existe uma subsequência de blocos convexo de (x_n) que converge fortemente à zero.*

Demonstração: Sejam $M = \overline{\text{aco}}(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})$, $A = \overline{\text{aco}}(M)$ e $\mathbb{E} = \text{span}(A)$. Pelo Lema 4.1.1 existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{E}$ cuja topologia coincide com $\mathscr{T}$ em A, como um subconjunto de X. Usando novamente (ROELCKE *et al.*, 1973, Theorem 4), segue-se que $x_n \overset{w(\mathbb{E})}{\longrightarrow} 0$ em $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. Pelo Lema de Mazur para espaços normados, existe uma sequência de blocos convexos (y_n) de (x_n) tal que $\|y_n\| \to 0$. Assim, $y_n \overset{\tau}{\longrightarrow} 0$ em X. □

A partir de agora, vamos usar a seguinte definição.

Definição 4.2.2 *X é dito ter a propriedade (LM) se toda sequência fracamente convergente a zero possui uma subsequência de blocos convexos que converge fortemente.*

Como uma aplicação imediata do Lema 4.2.1 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.2.3 *Se todo subconjunto limitado de X é metrizável, então X possui a propriedade (LM).*

Usaremos também a seguinte extensão do conceito de PPF-FG para aplicações que podem ser não expansivas.

Definição 4.2.4 *Um conjunto $C \in \mathscr{B}(X)$ possui a PPF-FG para aplicações afins e contínua se, para cada $K \in \mathscr{B}(C)$ e cada topologia Hausdorff τ mais fraca que a topologia original de X em K, então toda aplicação afim τ-contínua $f \colon K \to K$ possui um ponto fixo.*

Lembre-se que uma topologia mais fraca e Hausdorff σ em um espaço vetorial topológico X é dita ser compatível com a topologia original de X, se um conjunto convexo é σ fechado se, e somente se, é fechado na topologia original de X, em particular obtemos $X^\star = (X, \sigma)^\star$. O primeiro resultado principal desta seção possui o seguinte teor.

Teorema 4.2.5 *Seja X um espaço vetorial topológico com a propriedade (ML). Suponha que σ é uma topologia localmente convexa compatível com a topologia de X. Então todo subconjunto convexo e sequencialmente σ-compacto de X possui a PPF-FG para aplicações afins contínuas.*

Demonstração: Seja $C \subset X$ convexo e sequencialmente σ-compacto. Se $K \in \mathscr{B}(C)$, τ é uma topologia mais fraca em K e $f : K \to K$ uma aplicação τ-contínua então provaremos que f possui ponto fixo em K. Note inicialmente que a menos de fazer uma translação de K, podemos supor $0 \in K$. Seguiremos agora as ideias contidas em (BARROSO *et al.*, 2013) para construir uma sequência (x_n) em K tal que $x_n - f(x_n) \to 0$. De fato, fixemos $y_1 = 0$ e $y_{k+1} = f(y_k)$ para todos os $k \in \mathbb{N}$, então provaremos que a sequência desejada é

$$x_n := \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para isso, sendo C um conjunto sequencialmente σ-compacto, a menos de passar a uma subsequência de (x_n), podemos supor $x_n \xrightarrow{\sigma} u$ para algum $u \in \overline{K}^{\sigma}$. Assim pela propriedade de compatibilidade temos $u \in K$. Além disso, como $X^\star = (X, \sigma)^\star$ obtemos $x_n \xrightarrow{w} u$ em X, onde w denota a convergência fraca em X. Desde que X satisfaz a propriedade (ML), existem uma sequência (I_k) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ com $\max(I_k) < \min(I_{k+1})$ e uma sequência (a_n) de números reais não-negativos, com $\sum_{n \in I_k} a_n = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $u_k := \sum_{n \in I_k} a_n x_n \to u$. Agora, usando que τ é mais fraca do que a topologia original de X, obtemos $u_k \xrightarrow{\tau} u$ em K. Por um lado, como f é τ-contínua, segue-se que $f(u_k) \xrightarrow{\tau} f(u)$. Por outro lado, um cálculo simples mostra que

$$f(u_k) = u_k + \sum_{n \in I_k} a_n \frac{y_{n+1}}{n} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Isso mostra que $f(u_k) \to u$ em X. Consequentemente, $f(u_k) \xrightarrow{\tau} u$. Finalmente, usando que τ é Hausdorff, concluímos que $f(u) = u$. □

Seja $\mathfrak{M}\mathscr{B}(X)$ a subfamília de $\mathscr{B}(X)$ formada pelos conjuntos C tal que $\overline{\text{aco}}(C)$ é metrizável. Usaremos agora o Lema 4.1.6 para obter o seguinte teorema.

Teorema 4.2.6 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff. Suponha que $C \in \mathfrak{M}\mathscr{B}(X)$ é completo e não-fracamente compacto. Então existem $K \in \mathscr{B}(C)$, uma métrica d mais fraca em K e uma aplicação afim d não expansiva $f \colon K \to K$ que não possui ponto fixo.*

Demonstração: Denotemos por $\mathscr{T}$ a topologia de X. Por hipótese existe uma sequência (y_n) em C sem subsequência fracamente convergente em $\mathscr{T}$. Seja $M = \overline{\text{co}}(\{y_n \colon n \in \mathbb{N}\})$, onde a barra significa o fecho em relação à topologia $\mathscr{T}$ em X. A menos de fazer uma translação de M, podemos assumir que $0 \in M$, então $M \subset M - M$. Seja $A = \overline{\text{aco}}(M)$ e considere $\mathbb{E} = \text{span}(A)$. Como observado em (DREWNOWSKI, 1975, p. 328), obtemos $A \subset \overline{M - M}$ e $\overline{M - M} \subset 2A$. Portanto, temos $\mathbb{E} = \text{span}(\overline{M - M})$. Como $C \in \mathfrak{M}\mathscr{B}(X)$ então o vetor 0 em M possui uma base de vizinhanças enumeráveis então, pelo Lema 4.1.1, item (i), existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{E}$ tal que a toplogia gerada por essa norma coincide com a topologia $\mathscr{T}$ em A.

Supondo que (y_n) possui uma subsequência $\|\cdot\|$-equivalente a ℓ_1^0 então segue diretamente da Proposição 4.1.5 que C não possui a propriedade *PPF-G* para aplicações afins uniformemente Lipschitz, em particular, C não possui a propriedade *PPF-G* para aplicações d não expansivas, onde $d(x,y) = \|x - y\|$ para todo $x \in \mathbb{E}$.

Suponhamos agora que (y_n) não possui subsequência $\|\cdot\|$-equivalente a ℓ_1^0. Então pelo Teorema 3.5 de (BARROSO *et al.*, 2012) podemos escolher uma subsequência (x_n) de (y_n) que é de Cauchy em relação à topologia $w(\mathbb{E})$, onde $w(\mathbb{E})$ denota a topologia fraca de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. Agora iremos verificar as condições do Lema 4.1.6 para $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$.

Afirmamos que vale a condição (ii) do Lema 4.1.6. De fato, pois caso contrário, (x_n) possui uma subsequência de Cauchy em $\|\cdot\|$ e, logo, pelo item (iii) do Lema 4.1.1, de Cauchy em relação a $\mathscr{T}$ em M, como $(x_n) \subset C$ e C é $\mathscr{T}$ completo, por hipótese, segue que (x_n) possui uma subsequência convergente, portanto, fracamente convergente. O que é uma contradição, pois (x_n) é subsequência de (y_n) que pela hipótese inicial não possui subsequência fracamente convergente, provando assim que vale o item (ii) do Lema 4.1.6.

Para verificar o item (i) do Lema 4.1.6 definimos um funcional $\Psi \in \tilde{\mathbb{E}}^{\star\star}$ dado por $\tilde{\mathbb{E}}^{\star} \ni \phi \mapsto \lim_n \phi(J_{\mathbb{E}}(x_n))$, onde $\tilde{\mathbb{E}}$ é o completamento de $\mathbb{E}$, isto é, $\tilde{\mathbb{E}} = \overline{J_{\mathbb{E}}(\mathbb{E})}$, em que $J_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{\star\star}$ é a projeção canônica. Note que Ψ está bem definido, pois $(J_{\mathbb{E}}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\tilde{\mathbb{E}}$. Afirmamos que Ψ não pertence a $\tilde{\mathbb{E}}$. De fato, se esta afirmação fosse falsa, isto é, $\Psi = \tilde{x} \in \tilde{\mathbb{E}}$, estão teríamos $J_{\mathbb{E}}(x_n) \rightharpoonup \tilde{x}$ em $\tilde{\mathbb{E}}$. Logo, pelo Lema de Mazur, segue $\tilde{x} \in \overline{J_{\mathbb{E}}(M)}$. Como as sequências $\|\cdot\|$-Cauchy em M são de Cauchy em relação a $\mathscr{T}$ e M é completo, deduzimos que $\tilde{x} = J_{\mathbb{E}}(x)$ para algum $x \in M$. Isto implicaria, pela definição de $\tilde{x}$, que $x_n \rightharpoonup x$ em $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ e, portanto, pela propriedade (iii) do Lema 4.1.1, $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca de X, o que é uma contradição com o fato de (y_n) não possui subsequência fracamente convergente. Portanto, temos $\Psi \in \tilde{\mathbb{E}}^{\star\star} \backslash \tilde{\mathbb{E}}$. Tomando $G := \Psi^{\perp}$ segue de (CASAZZA; GUERRE-DELABRIERE, 1994, Lemma I.1.11) que G é um conjunto λ-normado para $\tilde{\mathbb{E}}$. Claramente $g(J_{\mathbb{E}}(x_n)) \to 0$ para todo $g \in G$. Seja (ε_n) uma sequência de números reais positivos tal que

$\prod_{s=1}^{\infty}(1+\varepsilon_s) < \infty$. Pelo Lema 4.1.6, existe uma constante $\eta > 0$ e uma subsequência básica (e_k) de (x_n) tal que

$$\eta \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_{\kappa_i} \right\|,$$

para todas as sequências de escalares $(\alpha_i)_{i=1}^{4}$ e todos índices $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$. Como $0 \in M$ e (x_n) não possui subsequências fracamente convergentes, podemos, a menos de passar a uma subsequência de (e_k), supor que existe um funcional $\phi \in (\mathbb{E}, \|\cdot\|)^\star$ de modo que $\phi(e_k) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto convexo

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k : \quad \text{com } t_k \geqslant 0 \ \text{ e } \ \sum_{k=1}^{\infty} t_k = 1 \right\}.$$

Como $\phi^{-1}(1) = K$, então K é $\|\cdot\|$-fechado, e logo, K é $\mathscr{T}$-fechado em C, pois em C essas duas topologias são iguais. Defina em K a seguinte métrica:

$$d(x,y) = \frac{\eta}{2\kappa} \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=N}^{N+3} |t_n - s_n| \qquad \text{para, } x = \sum_k t_k e_k,\ y = \sum_k s_k e_k \in K.$$

onde κ é a constante básica de (e_n).

Claramente a topologia gerada por d é mais fraca do que $\mathscr{T}|_K$. Defina agora uma aplicação $f\colon K \to K$ por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_{k+1}, \qquad \text{para todo } \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k \in K.$$

Um cálculo direto mostra que f não possui ponto fixo e d é não expansiva. □

Como consequência, obtemos a seguinte generalização do Teorema 4.0.2:

Corolário 4.2.7 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff. Suponha que todo subconjunto limitada de X é metrizável. Então um conjunto completo $C \in \mathscr{B}(X)$ é fracamente compacto se, e somente se, possui a PPF-FG para aplicações afins não expansivas.*

Demonstração: Se C é fracamente compacto então o resultado segue do Teorema de Schauder-Tychonoff. Reciprocamente, se C não é fracamente compacto então, pelo Teorema 4.2.6, existem $K \in \mathscr{B}(C)$, uma métrica d mais fraca em K e uma aplicação afim d não expansiva $f\colon K \to K$ que não possui ponto fixo. □

O Teorema 4.2.6 admite a seguinte variação, cuja a prova consiste na ideia clássica de incorporar os espaços localmente convexos e Hausdorff como um produto de espaços de Banach e aplicar argumentos semelhantes a (BENAVIDES *et al.*, 2004).

Teorema 4.2.8 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff. Se $C \in \mathscr{B}(X)$ é um conjunto não-fracamente completo e compacto então existem $K \in \mathscr{B}(C)$ e uma aplicação contínua afim $f\colon K \to K$ que não possui ponto fixo.*

Usaremos o seguinte princípio de interseção para provar o último resultado desta seção.

Lema 4.2.9 *(KNASTER et al., 1929; FAN, 1961) Seja K um subconjunto de um espaço vetorial topológico e Hausdorff X. Suponha que $F\colon K \to 2^X$ é uma aplicação de conjuntos com as seguintes propriedades:*

(i) $F(x)$ é fechado para todo $x \in K$.

(ii) $F(x_0)$ é compacto para algum ponto $x_0 \in K$.

(iii) para cada família finita $\{x_1,\dots,x_\ell\} \subset K$ temos

$$co\big\{x_1,\dots,x_\ell\big\} \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} F(x_i). \tag{4.3}$$

Então

$$\bigcap_{x\in K} F(x) \neq \emptyset. \tag{4.4}$$

Motivado por (BARROSO *et al.*, 2013, Proposition 2.5), o último resultado desta seção destaca o papel da aproximação de pontos fixos fracos ($wAFP$) na obtenção da PPF. Dado um subconjunto convexo C de X, doravante denotaremos por $\mathfrak{AC}(C,X)$ (resp. $\mathfrak{AC}(C,C)$) a família de todas as aplicações contínuas e afins de C em X (resp. de C em C).

Definição 4.2.10 *Dado $C \subset X$ convexo. Se ω denota a topologia fraca de X, então definimos*

$$\mathfrak{AC}(C,X;wAFP) = \Big\{ f \in \mathfrak{AC}(C,X) : \exists \text{ rede } (u_\alpha) \subset C \text{ t.q. } u_\alpha - f(u_\alpha) \xrightarrow{\omega} 0 \Big\}.$$

Quando a topologia usada para convergência for a forte denotaremos o conjunto por $\mathfrak{AC}(C,X;AFP)$.

Apresentaremos agora o último resultado desta seção.

Teorema 4.2.11 *Seja X um espaço vetorial topológico e Hausdorff, cuja a topologia é compatível com a topologia localmente convexa mais fraca σ. Suponha que $C \subset X$ é um conjunto convexo que é compacto em relação a σ e $f \in \mathfrak{AC}(C,X)$. Então f possui um ponto fixo se, e somente se, $f \in \mathfrak{AC}(C,X;wAFP)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $f \in \mathfrak{AC}(C,X;wAFP)$. Então existe uma rede $(u_\alpha) \subset C$ tal que $u_\alpha - f(u_\alpha) \xrightarrow{\omega} 0$. Como C é σ-compacto então, a menos de uma sub-rede, existe $u \in C$ tal que $u_\alpha \xrightarrow{\sigma} u$. Pela propriedade de compatibilidade temos $u_\alpha \to u$ na topologia original de X, logo, usando que f é contínua resulta $u_\alpha - f(u_\alpha) \xrightarrow{\omega} u - f(u)$. Usando que ω é Hausdorff segue que $u = f(u)$.

Suponhamos agora que $(u_\alpha) \subset C$ é uma rede de ponto fixo fracamente aproximado para f, isto é,

$$u_\alpha - f(u_\alpha) \xrightarrow{w} 0 \tag{4.5}$$

onde a convergência é na topologia fraca de X. Seja $X_\sigma = (X,\sigma)$ e note que, como σ é Hausdorff, $X_\sigma^\star$ separa pontos de X. Dado $\varphi \in X_\sigma^\star$, defina

$$A_\varphi := \Big\{ x \in C : \ |\varphi(x - f(x)| = 0 \Big\}.$$

A fim de mostrar que f possui um ponto fixo, é suficiente mostrar que

$$\bigcap_{\varphi \in X_\sigma^\star} A_\varphi \neq \emptyset.$$

O ponto de partida para provar isso é a observação de que todos os conjuntos A_φ são σ-fechados. Isso, por sua vez, decorre do fato de que σ é compatível com X, e as funções φ e f são contínuas e afins. Por isso, tudo o que precisamos fazer para provar este Teorema é mostrar que a família $\{A_\varphi : \ \varphi \in X_\sigma^\star\}$ possui a propriedade da interseção finita em relação a σ. Fixemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X_\sigma^\star$ e, por uma questão de simplicidade, defina

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)| \quad \text{para } x \in X.$$

Observe que $\|\cdot\|$ é uma seminorma σ contínua em X. Passando a uma sub-rede, se necessário, podemos assumir que (u_α) σ-converge para algum ponto u do conjuntos C, pois C é σ-Compacto. Em seguida, considere o conjunto

$$K := \Big\{ x \in C : \ \|x - u\| \leqslant 1 \Big\}.$$

Defina a aplicação de conjuntos F que atribui a cada $x \in K$ um conjunto $F(x)$ dado por

$$F(x) = \Big\{ y \in K : \ \|y - f(y)\| \leqslant \|x - f(x)\| \Big\}.$$

Usando mais uma vez que σ é compatível com X, segue que F é uma aplicação bem definida cuja a imagem são conjuntos convexos fechados em relação à topologia σ. Afirmamos que F

satisfaz a propriedade (iii) do Lema 4.2.9. Suponha por contradição que isso não acontece. Isto significa que existe $\{x_1,\dots,x_\ell\}\subset K$, e uma combinação convexa $y=\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i x_i\in \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_\ell\}$ tal que

$$\|x_i-f(x_i)\|<\|y-f(y)\| \quad \text{para todo } i=1,\dots,\ell. \tag{4.6}$$

Note que usamos implicitamente a propriedade que K é fechado sob combinação convexa dos seus elementos. Logo, obtemos

$$\|y-f(y)\|\leqslant \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\|x_i-f(x_i)\|\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant \ell}\|x_i-f(x_i)\|,$$

contradizendo (4.6). Portanto, pelo Lema 4.2.9, podemos encontrar $\vartheta\in\bigcap_{x\in K}F(x)$. Usando agora a convergência $u_\alpha\xrightarrow{\sigma}u$, existe um índice α_1 de modo que $u_\alpha\in K$ para todo $\alpha_1\prec\alpha$. Em particular, segue-se que $\vartheta\in F(u_\alpha)$ para todo $\alpha_1\prec\alpha$. Logo,

$$\|\vartheta-f(\vartheta)\|\leqslant\|u_\alpha-f(u_\alpha)\| \quad \text{para todo } \alpha_1\prec\alpha.$$

Finalmente, o resultado segue de (4.5) combinado com $\vartheta\in\bigcap_{i=1}^{m}A_{\varphi_i}$. □

Como uma consequência imediata desses resultados, obtemos dois corolários. O primeiro deles foi recentemente provado por (JACHYMSKI, 2015).

Corolário 4.2.12 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $C\in\mathscr{B}(X)$. Suponha que $f\in\mathfrak{AC}(C,X)$. Então f possui um ponto fixo se, e somente se,* $\inf_{x\in C}\|x-f(x)\|=0$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\inf_{x\in C}\|x-f(x)\|=0$. Então existe uma sequência $(x_n)\subset C$ tal que $x_n-f(x_n)\to 0$, logo, $f\in\mathfrak{AC}(C,X;wAFP)$. Tomando $\sigma=\sigma(X,X^\star)$ então a topologia de X é compatível com a topologia localmente convexa mais fraca σ. Como C é limitado, convexo e fechado segue, do fato de X ser reflexivo, que C é σ-compacto. O resultado segue então do Teorema 4.2.11. A outra implicação é evidente. □

Corolário 4.2.13 *Seja $C\in\mathscr{B}(X)$ um subconjunto completo de um espaço localmente convexo e Hausdorff X. Então C é fracamente compacto se, e somente se, possui a PPF-G para a classe de aplicações $\mathfrak{AC}(C,C)$.*

Demonstração: Suponhamos C fracamente compacto. Mostraremos que para todo $K\in\mathscr{B}(C)$ e todo $f\in\mathfrak{AC}(C,C)$ tal que $f:K\to K$ então $f\in\mathfrak{AC}(K,K;wAFP)$. De fato, dado $x\in K$ qualquer, defina $u_1=x$ e $u_{n+1}=f(u_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como C é fracamente compacto e $(u_n)\subset C$ então, a menos de uma subsequência, podemos supor $u_n \xrightarrow{\omega} u$, para algum $u \in C$, onde ω denota a topologia fraca de X. Segue pela definição de (u_n) que $f \in \mathfrak{AC}(K,K;wAFP)$. O Teorema 4.2.11 garante que f possui um ponto fixo em K. A outra implicação segue direto do teorema anterior.

Observação 4.2.14 *Vale a pena destacar que o Corolário 4.2.13 tinha sido observado no livro do Floret (FLORET, 1980, p. 92) com a seguinte frase:*

"Em um espaço localmente convexo um conjunto completo, limitado e convexo A é fracamente compacto se, e somente se, para cada subconjunto fechado e convexo $B \subset A$, e cada função afim contínua $f : B \to B$ possui um ponto fixo. "

Floret atribuiu esta declaração a D. P. e D. V. Milman (veja (MILMAN; MILMAN, 1963), (MIL'MAN; MILMAN, 1964) e (MIL'MAN, 1970)), e ele também indicou que uma prova pode ser encontrada no artigo de (JAMES, 1972). No entanto, não conseguimos encontrar nenhuma prova escrita deste resultado. Podemos determinar a partir de (MILMAN; MILMAN, 1963), (MIL'MAN; MILMAN, 1964) e (MIL'MAN, 1970), pelo [Theorem 2.5] de (MIL'MAN, 1970)) a seguinte caracterização:

Teorema 4.2.15 (D. P. and D. V. Milman) *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, todo subconjunto convexo, fechado e limitado de X possui a PPF para aplicações afins e contínuas.*

Demonstração: Se X é reflexivo então pelo Teorema de Kakutani, veja (BOTELHO *et al.*, 2012, Teorema 6.4.5), todo subconjunto convexo, fechado e limitado de X é fracamente compacto. Segue do Teorema de Schauder-Tychonoff que todo subconjunto $C \subset X$ que é convexo, fechado e limitado possui a *PPF* para a classe $\mathfrak{AC}(C,C)$.

Reciprocamente, tomando $C = B_1$, onde B_1 representa a bola unitária fechada de X então, usando o Teorema 2.1., item i), de (BARROSO *et al.*, 2012) segue que C possui a *PPF* para a classe $\mathfrak{AC}(C,X;AFP)$ e, portanto, possui a PPF-G para a classe de aplicações $\mathfrak{AC}(C,C)$, logo, pelo Corolário 4.2.13 segue que C é fracamente compacto. Então pelo Teorema de Kakutani, veja (BOTELHO *et al.*, 2012, Teorema 6.4.5), X é reflexivo. $\square$

Usando o Teorema 4.2.11 podemos estender a caracterização de Milman & Milman a espaços reflexivos para a classe $\mathfrak{AC}(C,X)$ como se segue.

Teorema 4.2.16 *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, todo subconjunto $C \subset X$ que é convexo, fechado e limitado possui a PPF para a classe $\mathfrak{AC}(C,X;AFP)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que X é reflexivo. Dados $C \in B(X)$ e $f \in \mathfrak{AC}(C, X; AFP)$ quaisquer. Tomando $\sigma = \sigma(X, X^\star)$, segue pelo Teorema de Kakutani, veja (BOTELHO *et al.*, 2012, Teorema 6.4.5), que C é fracamente compacto. Por um lado, existe uma sequência $(x_n) \subset C$ tal que $x_n - f(x_n) \to 0$ e, em particular, $x_n - f(x_n) \xrightarrow{\sigma} 0$. Por outro lado, sendo C fracamente compacto, a menos de subsequência, podemos supor que $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ para algum $x \in C$. Sendo f contínua, obtemos $x_n - f(x_n) \xrightarrow{\sigma} x - f(x)$. Portanto, usando que σ é Hausdorff segue que $f(x) = x$. A recíproca segue da prova do Teorema 4.2.15. □

5 SEQUÊNCIAS BÁSICAS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Um problema clássico em Análise Funcional é o de saber quais espaços topológicos possuem sequências básicas (infinitas). Sabemos que espaços de Banach possuem essa propriedade (veja seção 10.4 de (BOTELHO *et al.*, 2012)). Agora na tentiva de responder essa pergunta para espaços mais gerais é importante observar que, pela própria definição de sequência básica, a topologia do espaço desempenha um papel fundamental na obtenção de tal sequência, por exemplo, N. J. Kalton e J. H. Shapiro (KALTON; SHAPIRO, 1976) mostraram que um F-espaço (espaço métrico completo) contém uma sequência básica se, e somente se, sua topologia é não-minimal (existe uma topologia vetorial Hausdorff que é estritamente mais fraca). Por outro lado, N. J. Kalton construiu um exemplo de um espaço quasi-Banach que não possui sequência básica (veja (KALTON, 1994)). No contexto dos espaços localmente convexos, a resposta para esse problema também depende do comportamento das famílias de seminormas $\Sigma_\tau(X)$ (por exemplo, veja (JARCHOW, 2012, Theorem 6, p. 298)) que gera a topologia τ de X. Neste capítulo estudaremos a existência de sequências básicas com algumas propriedades "especiais"em espaços localmente convexos. Começaremos definindo quais propriedades especiais estamos interessados.

Definição 5.0.1 *Uma sequência (x_n) é dita ser regular, se existe uma vizinhança da origem V de tal modo que $x_n \notin V$ para todos os $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 5.0.2 *Um conjunto $B \subset X$ é chamado limitado se para toda vizinhança da origem U em X existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda U$.*

Definição 5.0.3 *Uma sequência regular limitada é chamada uma sequência normalizada.*

Nas próximas seções estudaremos a existência de sequência básica com tais propriedades em espaços localmente convexos.

5.1 Sequências Básicas em Espaços Fracos

Como espaço de Banach sempre possui uma sequência básica, nada mais natural que tentamos "exigir"que a topologia do espaço localmente convexo satisfaça algumas das propriedades da topologia da norma em espaço de Banach como, por exemplo, a topologia gerada pela norma nesses espaços nunca é fraca! Logo, se pedirmos que a topologia de um espaço localmente convexo seja "não fraca"será que garantimos a existência de sequências básicas? Inicialmente precisamos definir o que é um espaço ter uma topologia "não fraca".

Definição 5.1.1 *Diremos que uma topologia τ em um espaço localmente convexo X é do tipo fraca quando existe um subespaço Y do dual algébrico $X^\sharp$ tal que $\tau = \sigma(X,Y)$. Neste caso diremos que (X,τ) é um espaço fraco. Caso contrário, X será chamado de não fraco.*

Exemplo 5.1.2 *Se X é um espaço vetorial topológico então $(X, \sigma(X, X^\star))$ é um espaço fraco.*

A definição de espaço fraco é um conceito muito amplo de minimalidade em espaço localmente convexo e tem sido usado em diferentes contextos por muitos autores, incluindo (PLICHKO, 2009, p. 840) e (SHKARIN, 2012, p. 195). O nosso primeiro resultado mostra que mesmo "enfraquecendo"a topologia não se consegue garantir a existência de sequência básica regular equi-Schauder.

Teorema 5.1.3 *Seja (X,τ) um espaço fraco de dimensão infinita. Então X não possui sequência básica regular equi-Schauder.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que (x_n) seja uma sequência básica regular equi-Schauder em X. Como (x_n) é regular, existe uma vizinhança U da origem em X tal que $x_n \notin U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo X fraco então (x_n) não converge fracamente ao vetor nulo de X, pois $x_n \notin U$ e U é uma vizinhança fraca da origem. Logo, existe um $f \in X^\star$, $\varepsilon > 0$ e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $|f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. A menos de tomar $g = f$ ou $g = -f$ e uma subsequência de (x_{n_k}), podemos supor que existe $g \in X^\star$ tal que $g(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\inf\{g(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} > 0. \tag{5.1}$$

Defina:

$$\rho(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |g(P_{n_k}(x))|, \quad x \in \overline{[x_{n_k}]}^\tau.$$

Afirmamos que ρ é uma norma τ-contínua em $\overline{[x_{n_k}]}^\tau$. De fato, note inicialmente que ρ é τ-contínua pois (P_{n_k}) é equicontínua, já que é subsequência de (P_n) que é equicontínua por hipótese. Provaremos agora que ρ é uma norma em $\overline{[x_{n_k}]}^\tau$, para isto, dado $x = \sum_{k=1}^\infty a_{n_k} x_{n_k}$ tal que $\rho(x) = 0$, então

$$0 = \sup_{k\in\mathbb{N}} |g(P_{n_k}(x))|$$

logo,

$$|a_1||g(x_{n_1})| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |g\left(P_{n_k}(x)\right)| = 0,$$

como $g(x_{n_1}) > 0$ concluímos que $a_1 = 0$. De maneira análoga,

$$|a_2 g(x_{n_2})| = |a_1 g(x_{n_1}) + a_2 g(x_{n_2})| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |g\left(P_{n_k}(x)\right)| = 0$$

como $g(x_{n_2}) > 0$ concluímos que $a_2 = 0$. Suponhamos, por indução, que tenhamos provado que $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, então

$$|a_{m+1} g(x_{n_{m+1}})| = \left|\sum_{i=1}^{m+1} a_i g(x_{n_i})\right| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |g\left(P_{n_k}(x)\right)| = 0,$$

como $g(x_{n_{m+1}}) > 0$ concluímos que $a_{m+1} = 0$, provando assim a afirmação. Como por hipótese (X,τ) é fraco, então $(\overline{[x_{n_k}]}^{\tau}, \tau)$ também é fraco. Portanto, obtemos que o espaço fraco $\overline{[x_{n_k}]}^{\tau}$ possui uma norma τ-contínua ρ. O que é um absurdo, pois por (CARRERAS; BONET, 1987, veja p. 336) $([\overline{x_n}^{\tau}], \tau)$ não admite norma contínua, terminando assim a prova do teorema. □

O nosso próximo resultado fornece um exemplo prático de um espaço localmente convexo que não possui sequência básica regular, mesmo ele sendo um espaço tonelada. Para o leitor, que não esteja familiarizado com a definição de espaços toneladas, recomendamos que veja a Definição A.0.10 do Apêndice A.

Corolário 5.1.4 *Seja $\aleph_1$ a cardinalidade contínuo. Então o espaço localmente convexo $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é completo, fraco, tonelada e não possui sequência básica regular.*

Demonstração: Por (KALTON, 1970) temos que $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é completo, fraco e tonelada. Suponha por absurdo que $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ possui uma sequência básica regular. Por (CARRERAS; BONET, 1987, p.182) $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é um espaço de Fréchet, logo, todo subespaço fechado de $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é de Fréchet. Pelo comentário de (JARCHOW, 2012, p. 220) segue que todo espaço de Fréchet é tonelada e, portanto, todo subespaço fechado de $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é tonelada, em particular, $\overline{[x_n]}^{\tau}$ é tonelada. Por (JARCHOW, 2012, p. 296) obtemos que $\{x_n\}$ é uma sequência básica regular e equi-Schauder em $\overline{[x_n]}^{\tau}$. Por outro lado, como $\mathbb{R}^{\aleph_1}$ é fraco segue que todo subespaço dele é fraco, em particular, $\overline{[x_n]}^{\tau}$ é fraco. Portanto, obtemos que o espaço fraco $\overline{[x_n]}^{\tau}$ possui uma sequência regular equi-Schauder. O que é um absurdo pelo Teorema 5.1.3. □

Apesar de que espaços fracos, em geral, não contêm sequências básicas regulares equi-Schauder, obtemos o seguinte contraste positivo quando sua topologia é metrizável.

Proposição 5.1.5 *Todo espaço localmente convexo, fraco e metrizável possui uma sequência básica equi-Schauder.*

Demonstração: De fato, suponha que X é um espaço localmente convexo, fraco e metrizável. Segue de (CARRERAS; BONET, 1987, p. 336) que X não possui normas contínuas. Usando (LIPECKI, 1998, Teorema 4) concluímos que X contém um subespaço Y isomorfo a um subespaço denso de ω. Segue de (KALTON, 1971a, Proposição 2.2) que o espaço Y possui uma sequência equi-Schauder. Portanto, X possui uma sequência básica equi-Schauder. □

O segundo contraste positivo destaca uma propriedade incorporada relacionada ao espaço $\varphi_{00} := (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Vamos usar a notação $Y \hookrightarrow X$ para significar a existência de uma aplicação linear injetiva contínua de Y em X. Especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.6 *Se X é um espaço localmente convexo, fraco e metrizável de dimensão infinita então $\varphi_{00} \hookrightarrow X$.*

Demonstração: Pelo Teorema A.0.6 podemos supor que o conjunto $\Sigma_\tau(X) = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ gera a topologia τ de X. Pela Proposição 5.1.5, X tem uma sequência básica equi-Schauder $\{y_n\}_n^\infty$. Usando as ideias de (KALTON, 1971b, veja p. 94) podemos provar que τ é determinada pela sequência de seminormas

$$\rho_n(x) := \sup_{m\in\mathbb{N}} p_n(P_m(x)),\ \ x \in X.$$

Como X é fraco e metrizável segue por (CARRERAS; BONET, 1987, veja p. 336) que X não admite norma contínua, em particular, $X_n := \rho_n^{-1}(0)$ é um subespaço de X com dimensão infinita. De fato, suponha que X_n tem dimensão finita. Então existe uma seminorma contínua q_n em X tal que $q_n|_{X_n}$ é uma norma, e logo, $p_n + q_n$ é uma norma contínua em X, o que é um absurdo! Defina $Z_n = \{m : \exists x \in X_n : x_m^\star(x) \neq 0\}$. Como X_m tem dimensão infinita então Z_n tem infinitos elementos, pois $x_n^\star$ é contínua e X_n forma uma base de vizinhança aberta da origem. Seja $W_n = \{m : p_n(x_m) = 0\}$. Provaremos que $Z_n = W_n$. De fato, se $m \in Z_n$ existe $x \in X_n$ tal que $x_m^\star(x) \neq 0$, segue daí que,

$$p_n(x_m^\star(x)x_m) \leqslant p_n(P_m(x)) + p_n(P_{m-1}(x)) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} p_n(P_m(x)) + \sup_{m\in\mathbb{N}} p_n(P_m(x)) = 2\rho_n(x) = 0,$$

logo, $p_n(x_m) = 0$. Portanto, $m \in W_n$. Dado agora $m \in W_n$, então $p_m(y_m) = 0$, logo,

$$\rho_n(x_m) = \sup_{j\in\mathbb{N}} p_n(P_j(x_m)) \leqslant p_n(P_m(x_m)) = p_m(y_m) = 0,$$

pois $P_i(x_m) = 0$, para todo $j < m$ e $P_i(x_m) = x_m$ para todo $m \geqslant j$. Portanto, $x_m \in X_n$ e $x_m^\star(x_m) = 1 \neq 0$, segue que $m \in Z_n$. Escolhemos uma sequência $(n_j) \in [\mathbb{N}]$ tal que $n_j \in Z_j$ e $p_k(y_{n_j}) = 0$, para todo $k \leqslant j$. Defina $x_j := y_{n_j}$ então para todo $k \in \mathbb{N}$ e toda sequência de escalares $(a_k) \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$ temos

$$\begin{aligned}\sup_{N\in\mathbb{N}} p_k\left(\sum_{i=1}^{N} a_j x_j\right) &\leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{N} |a_j| p_k(x_j) \leqslant \sup_{N<k-1} \sum_{i=1}^{N} |a_j| p_k(x_j) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} |a_j| p_k(x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} p_k(x_j).\end{aligned}$$

A menos de redefinir o conjunto $\Sigma_\tau(X) = \{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$, isto é, dado $k \in \mathbb{N}$, se $\sum_{i=1}^{k-1} p_k(x_j) = 0$ nada há para se fazer, agora se $\sum_{i=1}^{k-1} p_k(x_j) \neq 0$ defina $\mu_k = p_k / \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_k(x_j)\right)$, podemos supor

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mu_k\left(\sum_{i=1}^{N} a_j x_j\right) \leqslant 1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e todo } (a_k) \in [-1,1]^{\mathbb{N}}. \tag{5.2}$$

Agora usaremos as ideias contidas em (ODELL, 1980). Seja $(a_i)_{i=1}^n$ uma sequência de escalares não nulos. Se $\mu_k\left(\sum_{i=1}^n a_j x_j\right) = 0$, então é claro que $\mu_k\left(\sum_{i=1}^n a_j x_j\right) \leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|$. Suponha $\mu_m(\sum_{j=1}^n a_j x_j) \neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\Psi_m \in Y^\star$ tal que

$$\sup\left\{|\Psi_m(u)| : \mu_m(u) \leqslant 1\right\} \leqslant 1, \tag{5.3}$$

e

$$\mu_m\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = \Psi_m\left(\sum_{j=1}^{N} a_j x_j\right). \tag{5.4}$$

De (5.2) temos:

$$\mu_m\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right) \leqslant 1, \forall \sigma \subset \{1,...,n\}.$$

combinando isto com (5.3) resulta

$$\left|\Psi_m\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right)\right| \leqslant 1, \text{ para todo } n \geqslant 1 \text{ e todo } \sigma \subset \{1,...,n\}.$$

Defina $F = \{i \leqslant n : \Psi_m(x_i) \geqslant 0\}$ e $G = \{1, ..., n\} \backslash F$. Segue de (5.4) que

$$\begin{aligned}
\mu_m\left(\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right) &= \Psi_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \\
&\leqslant \left|\Psi_m\left(\sum_{i\in F} a_i x_i\right)\right| + \left|\Psi_m\left(\sum_{i\in G} a_i x_i\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{i\in F} |a_i|\,|\Psi_m(x_i)| + \sum_{i\in G} |a_i|\,|\Psi_m(x_i)| \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \left(\sum_{i\in F} \Psi_m(x_i) - \sum_{i\in G} \Psi_m(x_i)\right) \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \left(\left|\Psi_m\left(\sum_{i\in F} x_i\right)\right| + \left|\Psi_m\left(\sum_{i\in G} x_i\right)\right|\right) \\
&\leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|.
\end{aligned}$$

Mostrando, em particular, que a aplicação $T : \varphi_{00} \to X$ dado por:

$$T((a_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

é contínua. Por fim, provemos que T é injetiva. De fato, se $T(a_i) \in Ker(T)$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$, logo, $a_j = x_j^{\star}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0$ e, portanto, $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{R}$. □

Observação 5.1.7 *Este resultado não é válido se X é um espaço não-fraco. Na verdade, é bem conhecido que se X é um espaço de Banach X, então $c_0 \hookrightarrow X$ se, e somente se, X contém uma cópia isomorfa de c_0.*

5.2 Sequência Básica em Espaços não Fracos

Analisaremos agora a existência de tais sequências em espaços não fracos. O nosso primeiro resultado garante a existência de sequências básicas regulares em espaços localmente convexos não fracos, desde que sua topologia seja metrizável. Para provar isso, usaremos o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em (ERDMANN; MANGUILLOT, 2011, Lemma 10.39).

Lema 5.2.1 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff de dimensão infinita. Se E é um subespaço de dimensão finita de X, p uma seminorma contínua em X e $\varepsilon > 0$ então existe um subespaço fechado L de codimensão finita tal que $Ker p \subset L$ e*

$$p(x+y) \geqslant \max\left(\frac{p(x)}{2+\varepsilon}, \frac{p(y)}{1+\varepsilon}\right)$$

para todo $x \in L$ e $y \in E$.

O nosso próximo resultado foi inspirado na demonstração do Teorema 1.7 de (MENET, 2013).

Proposição 5.2.2 *Todo espaço localmente convexo, metrizável e não-fraco possui uma sequência básica regular equi-Schauder.*

Demonstração: Como X é não-fraco então existe uma seminorma contínua μ em X tal que $Ker(p_1)$ tem codimensão infinita. Sendo X um espaço localmente convexo e metrizável segue pelo Teorema A.0.6 que existe uma sequência de seminormas $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que gera a topologia de X tais que $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$. Sem perda de generalidade podemos supor $\mu = p_1$. Seja $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tais que $\prod_n^\infty (1+\varepsilon_n) = K < \infty$. Construiremos inicialmente uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \leqslant (1+\varepsilon_{n+1}) p_i\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j\right) \quad \text{e} \quad p_1(x_i) = 1 \tag{5.5}$$

para todo $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n+1$. De fato, isto será feito por indução sobre n. Tomemos $x_1 \in X$ tal que $p_1(x_1) = 1$. Sejam $E_1 = [x_1]$ e $\varepsilon_2 > 0$:

(i) para a seminorma contínua p_1, pelo Lema 5.2.1, existe um subespaço fechado L_1 de codimensão finita em X tal que

$$p_1(y) \leqslant (1+\varepsilon_2) p_1(x+y)$$

para todo $x \in L_1$ e $y \in E_1$.

(ii) de modo análogo para p_2 existe um subespaço fechado L_2 de condimensão finita em X tal que

$$p_2(y) \leqslant (1+\varepsilon_2) p_2(x+y)$$

para todo $x \in L_2$ e $y \in E_1$.

Como $Ker(p_1)$ tem codimensão infinita então podemos tomar $x_2 \in L_1 \cap L_2$ tal que $p_1(x_2) = 1$, logo,

$$p_i(a_1 x_1) \leqslant (1+\varepsilon_2) p_i(a_1 x_1 + a_2 x_2)$$

para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $i = 1,2$. Suponhamos que tenhamos obtido indutivamente pelo método acima $\{x_1, ..., x_n\}$ tais que:

$$p_i\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j\right) \leqslant (1+\varepsilon_n) p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \quad \text{e} \quad p_1(x_i) = 1$$

para todo $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $i = 1, ..., n$. Sejam $E_n = span\{x_1, ..., x_n\}$ e $\varepsilon_{n+1} > 0$. Então para cada $i = 1, ..., n+1$ e cada seminorma contínua p_i, pelo Lema 5.2.1, existe um subespaço fechado L_i de codimensão finita em X tal que

$$p_i(y) \leqslant (1+\varepsilon_{n+1}) p_i(x+y)$$

para todo $x \in L_i$ e $y \in E_n$. Como $Ker(p_1)$ tem codimensão infinita então podemos tomar $x_{n+1} \in L_1 \cap \cdots \cap L_{n+1}$ tal que $p_1(x_{n+1}) = 1$, logo,

$$p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \leqslant (1+\varepsilon_{n+1}) p_i\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j\right) \quad \text{e} \quad p_1(x_i) = 1$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in \mathbb{R}$ e $i = 1, ..., n+1$. Afirmamos que a sequência (x_n) assim obtida é básica. De fato, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ então usando (5.5) temos

$$\begin{aligned} |a_n| = p_1(a_n x_n) &\leqslant p_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) + p_1\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right) \\ &\leqslant 2K p_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 2K p_1(x). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Essa desigualdade implica que: se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ então $a_n = b_n$ para todo n. Dado $y \in \overline{[x_n]}^{\tau}$ provaremos que existe uma sequência (a_n) em $\mathbb{R}$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Para isso, como τ é metrizável existe uma sequência $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n x_k$ com $a_k^n = 0$ para todo $k \geqslant N_n$ que é τ-convergente à y. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, usando (5.6), temos que

$$|a_k^n - a_k^m| \leqslant 2K p_1(x_m - x_n) \to 0, \quad \text{quando n,m} \to \infty$$

provando que a sequência $(a_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo, para cada k podemos supor que a sequência $(a_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para a_k. Afirmamos que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. De fato, para todo $N \geqslant j$ temos por (5.5) que

$$\begin{aligned} p_j\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^n x_k - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right) &\leqslant \limsup_m p_j\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^n x_k - \sum_{k=1}^{N} a_k^m x_k\right) \\ &\leqslant K \limsup_m p_j(y_n - y_m) = K p_j(y_n - y). \end{aligned}$$

Então, para todo $N \geqslant \max\{N_n, j\}$, temos:

$$p_j\left(y - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right) \leqslant p_j(y - y_n) + p_j\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^n x_k - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right) \leqslant (1+K)p_j(y_n - y).$$

Provando que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Segue de (5.6) que os funcionais $x_m : \overline{[x_n]}^{\tau} \to \mathbb{R}$, dados por $x_m\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right) = a_m$ são τ-contínuas para cada $m \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência (x_n) é básica. Como $p_1(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que ela é regular. Finalmente, segue da desigualdade (5.5) que (x_n) é equi-Schauder. □

Provaremos agora três lemas que serão usados para provar o principal resultado desta seção (Teorema 5.2.6). Para isso, dado μ uma seminorma contínua em X, doravante denotaremos X_μ ao espaço normado $(X/Ker\mu, \|\cdot\|_\mu)$, onde $\|x + Ker\mu\|_\mu = \mu(x)$, e por I_μ a projeção de X sobre X_μ.

Lema 5.2.3 *Seja X um espaço localmente convexo e $\mu \in \Sigma_\tau(X)$. Suponhamos que (x_n) é uma sequência tal que $(I_\mu(x_n))$ é uma sequência regular básica em X_μ e para cada $p \in \Sigma_\tau(X)$ existe um $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $(I_\mu(x_n))_{n \geqslant n_p}$ é uma sequência básica em X_p. Então (x_n) é uma sequência básica em X.*

Demonstração: Como (x_n) é uma sequência tal que $(I_\mu(x_n))$ é uma sequência regular básica em X_μ, então podemos supor $\delta = \inf_n \mu(x_n) > 0$. Seja $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \in X$ e denotemos por K_μ a constante básica de $(I_\mu(x_n))$. Então

$$\begin{aligned} |a_n| \leqslant \frac{1}{\delta}\mu(a_n x_n) &\leqslant \frac{1}{\delta}\mu\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) + \frac{1}{\delta}\mu\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k\right) \\ &\leqslant \frac{2K_\mu}{\delta}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k I_\mu(x_k)\right\|_\mu = \frac{2K_\mu}{\delta}\mu(x), \end{aligned}$$

logo,

$$|a_n| \leqslant \frac{2K_\mu}{\delta}\mu(x) \tag{5.7}$$

para todo $x = \sum_{k}^{\infty} a_k x_k \in X$. Isso mostra que se $x = \sum_{n}^{\infty} a_n x_n$ e $x = \sum_{n}^{\infty} b_n x_n$, então $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado agora qualquer $x \in \overline{[x_n]}^{\tau}$, então existe uma rede $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ em $x \in [x_n]$ que é τ-convergente para x. Suponhamos $u_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha x_k$, com $a_k^\alpha = 0$ para todo $k \geqslant N_\alpha$. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, por (5.7) obtemos que

$$|a_n^\alpha - b_n^\beta| \leqslant \frac{2K_\mu}{\delta}\mu\left(u_\alpha - u_\beta\right),$$

logo, $(a_k^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é de Cauchy para cada $k \in \mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Logo, podemos supor que para cada $k \in \mathbb{N}$ que $(a_k^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge para a_k. Afirmamos que $\left(\sum_{k=1}^N a_k x_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ é τ-convergente para x. De fato, dados $p \in \sum_\tau(X)$ e $\alpha \in \Lambda$ quaisquer. Tome $N \geqslant \max\{N_\alpha, n_p\}$, como $(I_p(x_n))_{n\geqslant n_p}$ é uma sequência básica com constante básica K_p, temos:

$$
\begin{aligned}
p\left(x - \sum_{k=1}^N a_k x_k\right) &\leqslant p\,(x-u_\alpha) + p\left(\sum_{k=1}^N a_k^\alpha x_k - \sum_{k=1}^N a_k x_k\right) \\
&\leqslant p\,(x-u_\alpha) + \left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha x_k - \sum_{k=1}^{n_p} a_k x_k\right\|_p + \left\|\sum_{k=n_p}^{N} a_k^\alpha x_k - \sum_{k=n_p}^{N} a_k x_k\right\|_p \\
&\leqslant p\,(x-u_\alpha) + \left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha x_k - \sum_{k=1}^{n_p} a_k x_k\right\|_p + \limsup_\beta \left\|\sum_{k=n_p}^{N} a_k^\alpha x_k - \sum_{k=n_p}^{N} a_k^\beta x_k\right\|_p \\
&\leqslant p(x-u_\alpha) + \left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p \\
&+ K_p \limsup_\beta \left\|\sum_{k=n_p}^{\infty} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=n_p}^{\infty} a_k^\beta I_p(x_k)\right\|_p \\
&\leqslant p(x-u_\alpha) + \left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p \\
&+ K_p \left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p \\
&+ K_p \limsup_\beta \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\beta I_p(x_k)\right\|_p \\
&\leqslant p(x-u_\alpha) + (1+K_p)\left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p \\
&+ K_p \limsup_\beta p\left(u_\alpha - u_\beta\right) \\
&\leqslant p(x-u_\alpha) + (1+K_p)\left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p \\
&+ K_p p\,(u_\alpha - x) \\
&= (1+K_p)p(x-u_\alpha) + (1+K_p)\left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k) - \sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p,
\end{aligned}
$$

logo,

$$\limsup_{N\to\infty} p\left(x-\sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right) \leqslant (1+K_p)p(x-u_\alpha)+(1+K_p)\left\|\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k^\alpha I_p(x_k)-\sum_{k=1}^{n_p-1} a_k I_p(x_k)\right\|_p .$$

Como $\alpha \in \Lambda$ era qualquer, obtemos que

$$\limsup_{N\to\infty} p\left(x-\sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right) = 0,$$

provando a afirmação. Por fim, segue direto de (5.7) que os funcionais lineares $x_m^\star : \overline{[x_n]}^\tau \to \mathbb{R}$, dados por $x_m^\star(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i) = a_m$ são τ-contínuas, termiando assim a prova que (x_m) é uma sequência básica em X. □

Lema 5.2.4 *Suponhamos que (x_δ) é uma rede no espaço normado X tal que $x_\delta \rightharpoonup 0$ mas $x_\delta \nrightarrow 0$. Então existe uma sequência $(\delta(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\delta(k) \leqslant \delta(k+1)$ e $(x_{\delta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em X.*

Demonstração: Pelo Corolário 3.1.5 de (BOTELHO *et al.*, 2012) obtemos que $X^\star$ é normante para X. Usando agora o Lema 1.4.2 combinado com o Lema 10.4.3 de (BOTELHO *et al.*, 2012) obtemos o resultado desejado. □

Lema 5.2.5 *Seja X um espaço localmente convexo e $\mu \in \Sigma_\tau(X)$. Se (x_δ) é uma rede em X que é fracamente convergente a zero, então a rede $(I_\mu(x_\delta))$ é fracamente convergente a zero em X_μ.*

Demonstração: De fato, dado $g \in X_\mu^\star$ qualquer. Defina $f(x) = g(I_\mu(x))$ em X. Como g é contínua em X_μ temos;

$$|f(x)| = |g(I_\mu(x)])| \leqslant K_g \|I_\mu(x)\|_\mu = K_g \mu(x),$$

para todo $x \in X$, logo, $f \in X^\star$. Como (x_δ) é fracamente convergente a zero em X, então:

$$g\left(I_\mu(x_\delta)\right) = f(x_\delta) \rightharpoonup 0.$$

Provando que

$$I_\mu(x_\delta) \rightharpoonup 0,$$

terminando assim a prova do lema. □

Uma rede (x_δ) em um espaço vetorial topológico é dita ser regular, se existe uma vizinhança da origem V de tal modo que $x_\delta \notin V$ para todo δ. Apresentaremos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 5.2.6 *Seja X um espaço localmente convexo e metrizável. Suponhamos que (x_δ) é uma rede regular e limitada em X, que converge fraco a zero. Então existe uma sequência $(\delta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{\delta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica normalizada em X.*

Demonstração: Como (x_δ) é regular, a menos de uma sub-rede, podemos supor que $0 < \varepsilon = \inf \mu(x_\delta)$ para alguma seminorma contínua μ em X. Como X é metrizável, podemos supor que a topologia de X é gerada por $\Sigma(\tau) = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$, com $p_1 = \mu$ e $p_n \leqslant p_{n+1}$ para todo n. Logo, pelo Lema 5.2.5, obtemos uma rede $(I_{p_1}(x_\delta))$ em X_{p_1} tal que

$$I_{p_1}(x_\delta) \rightharpoonup 0, \quad \text{e}, \quad 0 < \varepsilon = \inf p_1(x_\delta),$$

portanto, a rede $(I_{p_1}(x_\delta))$ converge fraco a zero mas não forte em X_{p_1}. Pelo Lema 5.2.4 existe uma sequência $(\delta_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\delta_1(n) \leqslant \delta_1(n+1)$ e $\left(I_{p_1}(x_{\delta_1(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em X_{p_1}. Portanto, obtemos uma sequência $(x_{\delta_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $\left(I_{p_1}(x_{\delta_1(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica regular em X_{p_1}. Considere a sequência $\left(I_{p_2}(x_{\delta_1(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ contido em X_{p_2}. Como por hipótese $\left(x_{\delta_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco a zero, pois a rede (x_δ) converge fraco a zero, segue pelo Lema 5.2.5 que

$$I_{p_2}(x_{\delta_1(n)}) \rightharpoonup 0, \quad \text{e}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \inf p_2(x_{\delta_1(n)}),$$

onde, no final, usamos que $p_1 \leqslant p_2$. Pelo Lema 5.2.4 existe uma subsequência de $(\delta_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $(\delta_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\delta_2(n) \leqslant \delta_2(n+1)$ e $\left(I_{p_2}(x_{\delta_2(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em X_{p_2}. Repetindo o processo indutivamente para cada $k \in \mathbb{N}$ obtemos uma subsequência de $(\delta_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $(\delta_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\delta_k(n) \leqslant \delta_k(n+1)$ e $\left(I_{p_k}(x_{\delta_k(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em X_{p_k}. Afirmamos que a sequência $\left(x_{\delta_n(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em X. De fato, dado $k \in \mathbb{N}$ qualquer, por construção de $(\delta_n(n))_{n\in\mathbb{N}}$ obtemos que $\left(I_{p_k}(x_{\delta_n(n)})\right)_{n\geqslant k}$ é uma sequência básica em X_{p_k}. Logo, como $\left(I_{p_1}(x_{\delta_n(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência básica e regular em X_{p_1}, segue pelo Lema 5.2.3 que $\left(x_{\delta_n(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica e regular em X. $\square$

6 SISTEMAS QUASE BIORTOGONAIS

Nesta seção estamos interessados em estudar a existência de sistemas com algumas propriedades "especiais"em espaços localmente convexos fracos, isto é, a existência de $\{x_n, x_n^\star\}_{n\in\Gamma} \subset X \times X^\star$ com certas propriedades, onde Γ é um conjunto de índices. Para ser mais exatos, estamos interessados em obter os seguintes sistemas.

Definição 6.0.1 *Diremos que o sistema $\{x_n, x_n^\star\}_{n\in\Gamma} \subset X \times X^\star$ é:*

(1) quase biortogonal se $x_n^\star(x_m) = 0$ para $n \neq m$ e $0 < x_n^\star(x_n) \leqslant 1$ para todo $n \in \Gamma$.

(2) biortogonal se $x_n^\star(x_m) = \delta_{n,m}$ para todo $m, n \in \Gamma$ onde $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker.

(3) Auerbach se ele é biortogonal e $\|x_n\| = \|x_n^\star\| = 1$ para todo $n \in \Gamma$ e alguma norma $\|\cdot\|$ que gera a topologia de X.

(5) fundamental se $X = [x_n : n \in \Gamma]$.

(6) equicontínuo se $\{x_n^\star\}_{n\in\Gamma}$ é equicontínua em $X^\star$.

Observação 6.0.2 *Doravante usaremos as seguintes abreviações: equicontínuo quase biortogonal (EQB) e quase biortogonal (QB). Quando um sistema for equicontínuo quase biortogona usaremos a notação abreviada EQB-sistema, de maneira análoga definimos QB-sistemas.*

Seja μ uma seminorma contínua em X. Estamos também interessados em estudar a existência de QB-sistemas $\{x_n, x_n^\star\}_{n\in\Gamma} \subset X \times X^\star$ satisfazendo:

$(i)_\mu$ $(x_n^\star)$ é μ*-equicontínua*, isto é, $|x_n^\star(x)| \leqslant \mu(x)$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii)_\mu$ (x_n) é μ*-básica*, isto é, existe $K > 0$ tal que $\mu\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i\right) \leqslant K\mu\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$, para todo $m \leqslant n$ para todos os escalares $(a_i)_{i=1}^n$.

Definição 6.0.3 *Um sistema $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é chamado $(EQB)_\mu$-básico se ele é EQB e satisfaz $(i)_\mu$ e $(ii)_\mu$ para alguma seminorma contínua μ em X. De maneira análoga definimos $(EB)_\mu$.*

Note que as sequências básicas regulares equi-Schauder são, em particulares, $(EB)_\mu$-básica para cada seminorma contínua μ em X.

6.1 Existências de Sistemas Quase Biortogonais

Nossos próximos resultados mostram que existem várias restrições topológicas para a obtenção desses sistemas. Para isso, necessitaremos da seguinte definição que é a versão de ponto de acumulação para redes.

Definição 6.1.1 *Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ se para cada vizinhança $U(x)$ de x e $\alpha_0 \in I$, existe $\alpha \in I$ tal que $\alpha_0 \leqslant \alpha$ e $x_\alpha \in U(x)$.*

Uma consequência direta da definição acima é que uma rede converge para x se, e somente se, todos as sub-rede tem x como um ponto de acumulação. Para nosso primeiro resultado deste capítulo usaremos a definição de sequência transfinitas, veja (HOWES, 2012, p. 63).

Proposição 6.1.2 *Seja $(x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ uma sequência transfinita em um espaço topológico T. Suponha que x é um ponto de acumulação de $(x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$. Então para cada vizinhança U de x e cada $\alpha < \gamma$, existe uma sequência $(\alpha_k(\alpha,U))_{k\in\mathbb{N}}$ ordinal tal que $\alpha < \alpha_k(\alpha,U) < \alpha_{k+1}(\alpha,U) < \gamma$ e $x_{\alpha_k(\alpha,U)} \in U$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Pela definição de ponto de acumulação, veja (HOWES, 2012, p. 63), para cada vizinhança U de x e para cada $\alpha < \gamma$ existe $\beta = \beta(\alpha,U) < \gamma$ de tal modo que $\alpha < \beta$ e $x_\beta \in U$. Provaremos por indução sobre k. Tome U uma vizinhança qualquer de x em X e $\lambda < \gamma$. Denotemos $\alpha_1(\alpha,U) := \beta(\alpha,U)$. Suponhamos por hipótese de indução que $\alpha < \alpha_1(\alpha,U) < \alpha_2(\alpha,U) < \cdots < \alpha_k(\alpha,U)$ foram determinados de modo a assegurar que $x_{\alpha_i(\alpha,U)} \in U$ para todo $i = 1,...,k$. Por definição de ponto de acumulação, concluímos que existe $\alpha_k(\alpha,U) < \beta(\alpha_k(\alpha,U),U) < \gamma$ de modo que $x_{\beta(\alpha_k(\alpha,U),U)} \in U$. Definindo $\beta(\alpha_k(\alpha,U),U) = \alpha_{k+1}(\alpha,U)$, concluímos assim a prova da proposição. □

Nosso próximo resultado destaca um aspecto topológico dos EB-sistemas.

Lema 6.1.3 *Seja X um espaço vetorial topológico e θ um limite ordinal. Suponha que $\{x_\alpha; x_\alpha^\star\}_{\alpha<\theta}$ é um EB-sistema em $X \times X^\star$, então $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ não tem ponto de acumulação.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ possua um ponto de acumulação, digamos $x \in X$. Seja $\mathscr{U}_x$ uma base de vizinhanças de x em X. Pela Proposição 6.1.2, para cada $U \in \mathscr{U}_x$ e cada $\alpha < \theta$ existe uma sequência de índices $(\alpha_k((\alpha,U))_{k\in\mathbb{N}}$ de tal modo que

$$\alpha < \alpha_k(\alpha,U) < \alpha_{k+1}(\alpha,U) < \theta \quad \text{e} \quad x_{\alpha_k(\alpha,U)} \in U$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina o conjunto

$$U_2 := \{y \in X : \sup_{\alpha<\theta} |x_\alpha^\star(y)| < 1/2\}.$$

Como $(x_\alpha^\star)_{\alpha<\theta}$ é equicontínua, segue que U_2 é uma vizinhança da origem em X. Além disso, pelo fato de $x_\alpha^\star(x_\alpha) = 1$ para todo $\alpha < \theta$, obtemos

$$x_\alpha \notin U_2 \tag{6.1}$$

para todo $\alpha < \theta$. Defina agora para cada $i \in \mathbb{N}$, a seguinte vizinhança de x,

$$V_i := \{y \in X : \sup_{\alpha<\theta} |x_\alpha^\star(y-x)| < 1/i\}.$$

Assim, pela Proposição 6.1.2, para cada $k, i \in \mathbb{N}$ e $\alpha < \theta$ podemos tomar um elemento de $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$, digamos $x_{\alpha_k(\alpha,V_i)}$, tal que $x_{\alpha_k(\alpha,V_i)} \in V_i$. Isto, por sua vez nos dá

$$|x_\alpha^\star(x)| \leqslant 1/i + |x_\alpha^\star(x_{\alpha_k(\alpha,V_i)})|$$

para todo $k, i \in \mathbb{N}$ e todo $\alpha < \theta$. Como θ é ordinal e $\alpha < \alpha_k(\alpha,U)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ segue que $\alpha \neq \alpha_k(\alpha,U)$, e como $\{x_\alpha; x_\alpha^\star\}_{\alpha<\theta}$ é um EB-sistema, segue que $x_\alpha^\star(x_{\alpha_k(\alpha,U)}) = 0$, o que implica

$$|x_\alpha^\star(x)| \leqslant 1/i$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, logo, $x_\alpha^\star(x) = 0$. Assim, este leva a uma contradição com (6.1), pois neste caso teríamos $x_{\alpha_k(\alpha,U_2)} \in U_2$. □

Relembremos que um subconjunto B de um espaço topológico é relativamente compacto quando seu fecho é compacto.

Definição 6.1.4 *Um espaço localmente convexo e Hausdorff X em que cada subconjunto limitado é relativamente compacto é chamado espaço semi-Montel. Um espaço semi-Montel que é reflexivo chamado é chamado espaço Montel.*

Observação 6.1.5 *Todo espaço localmente convexo de dimensão finita é semi-Montel.*

Proposição 6.1.6 *Seja X um espaço localmente convexo Hausdorff de dimensão infinita.*

(i) Se X é fraco então X não possui um EQB-sistema.

(ii) Se X é semi-Montel então X não possui um EB-sistema limitada.

(iii) Se X é metrizável ou não semi-Montel, então X possui um B-sistema limitado.

Demonstração: (i) Se X é fraco então todo subespaço de X é fraco. Se $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é um EQB-sistema em X, então $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^\star(x)|$ define uma norma contínua em $\overline{[x_n]}^\tau$. O que é um absurdo, pois $\overline{[x_n]}^\tau$ é fraco, logo, não pode admitir norma contínua.

(ii) Suponha por contradição que $\{x_n;x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ seja um EB-sistema em X. Como X é semi-Montel e (x_n) é limitado, segue que (x_n) possui um ponto de acumulação x. O que é uma contradicão com o Lema 6.1.3.

(iii) É suficiente provarmos que se X possui um conjunto limitado $B \subset X$ de dimensão infinita, então X possui um B-sistema, pois em qualquer hipótese obtemos tal conjunto em X. Considere o espaço vetorial $\mathbb{E} = \bigcup_{k=1}^\infty k\mathscr{B}$, onde $\mathscr{B}$ é o fecho absolutamente convexo e limitado de B. Como B possui dimensão infinita e $B \subset \mathbb{E}$ então $\mathbb{E}$ possui dimensão infinita. Construiremos por indução um B-sistema $\{x_n;x_n^\star\}_{n=1}^\infty \subset B \times X$. Para isto dado $x_1 \in B$, logo, $x_1 \in \mathbb{E}$. Pelo Teorema de Hanh-Banach existe um funcional $x_1^\star \in X^\star$ tal que $x_1^\star(x_1) = 1$. Como $\mathbb{E}$ possui dimensão infinita então existe $u_2 \in \mathbb{E} \cap \{x_1^\star\}^\perp$. Tome $N_2 \geqslant 1$ tal que $x_2 := N_2^{-1}u_2 \in B$. Pelo Teorema de Hanh-Banach existe um funcional $x_2^\star \in X^\star$ tal que $x_2^\star(x_1) = 0$ e $x_2^\star(x_2) = 1$. Seja $d \geqslant 2$ e suponha que $\{x_n;x_n^\star\}_{n=1}^d \subset B \times X$ seja um B-sistema. Como $\mathbb{E}$ possui dimensão infinita então existe $u_{d+1} \in \mathbb{E} \cap \{x_1^\star,\ldots,x_d^\star\}^\perp$. Tome $N_{d+1} \geqslant 1$ tal que $x_{d+1} := N_{d+1}^{-1}u_{d+1} \in B$. Pelo Teorema de Hanh-Banach existe um funcional $x_{d+1}^\star(x_i) = 0$ para todo $i = 1,\ldots,d$ e $x_{d+1}^\star(x_{d+1}) = 1$. Por hipótese de indução o sistema $\{x_n;x_n^\star\}_{n=1}^{d+1} \subset B \times X$ assim obtido é um B-sistema. Esta construção produz o B-sistema desejado. □

A seguinte proposição dá condições para a existência de sequência $(EQB)_\mu$-básica limitada em um espaço localmente convexo.

Proposição 6.1.7 *Seja X um espaço localmente convexo Hausdorff de dimensão infinita. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) X contém uma sequência $(EQB)_\mu$-básica limitada.

(ii) X possui uma sequência linearmente independente limitada (x_n) tal que $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não fraco.

(iii) X contém um subespaço com norma contínua que não é sequencialmente completo.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Pela Proposição 6.1.6, item (i), X é não fraco, logo, todo subespaço de X é não fraco. Portanto, a sequência $(EQB)_\mu$-básica limitada em X, que existe por i), satisfaz as condições desejadas.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Por hipótese X possui uma sequência linearmente independente e limitada (x_n) tal que $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não fraco. Seja $\mathscr{B}$ o fecho absolutamente convexo dessa sequência. Então $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{B}$. Como $\mathbb{E}$ é não fraco existe uma seminorma contínua μ em X tal que $\mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}/Ker\mu$ tem dimensão infinita, veja a página 336 de (CARRERAS; BONET, 1987).

Defina $Q : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_\mu$ a aplicação quociente. Então

$$\|x + Ker\mu\|_\mu := \mu(x), \; x \in \mathbb{E}$$

define uma norma contínua em $\mathbb{E}_\mu$. Pelo resultado de (DAY, 1962, Teorema 5, p. 93) existe um sistema Auerbach $\{\widehat{y}_n; \widehat{y}_m^\star\}_{n=1}^\infty$ em $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_\mu) \times (\mathbb{E}, \|\cdot\|_\mu)^\star$ onde $(\widehat{y}_n)$ é uma sequência básica com constante básica K. Fazendo $\widehat{y}_n := y_n + Ker(\mu)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $N_n \geqslant 1$ tal que $x_n = N_n^{-1} y_n \in B$. Seja $Q : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_\mu$ a aplicação quociente e defina $z^\star := \widehat{y}^\star \circ Q$. Claramente $\{x_n; z_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é um QB-sistema em $B \times \mathbb{E}^\star$. Note que $|z_n^\star(y)| \leqslant \mu(y)$ para todo $y \in \mathbb{E}$. Pelo Teorema de Hanh-Banach existe uma extensão $x^* \in X^\star$ de $z^\star$ dominada por μ. Por construção $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é um QB-sistema em $B \times \mathbb{E}^\star$. Como ele satisfaz $(i)_\mu$ e $(ii)_\mu$, segue pela definição que $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência $(EQB)_\mu$-básica para (X, τ).

$(i) \Rightarrow (iii)$: Suponha que $\{x_n; x_n^\star\}_n^\infty$ é uma sequência $(EQB)_\mu$-básica em $X \times X^\star$ limitada. Seja $\mathbb{E} = span\{x_n\}$. Como $\{x_n; x_n^\star\}_n^\infty$ é $(EQB)_\mu$-básica em $X \times X^\star$, segue que ele é L.I, portanto, $\mathbb{E}$ possui um conjunto limitado de dimensão infinita, logo, todo subespaço de $\mathbb{E}$ que contém $\{x_n; x_n^\star\}_n^\infty$ tem dimensão infinita. Portanto, por (KALTON, 1971a, Theorem 1.4), $\mathbb{E} = span\{x_n\}$ não pode ser sequencialmente completo. Como, por hipótese, o sistema $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é equicontínua segue que $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^\star(x)|$ define uma norma contínua em $\mathbb{E} = span\{x_n\}$, obtendo assim o resultado desejado.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ É fácil ver que vale esta implicação. □

Observação 6.1.8 *Vale a pena ressaltar que o fato de ω não possuir EQB-sistemas já tinha sido anunciado em (BONET; PERIS, 1998). Além disso, ω é também um espaço semi-Montel.*

Doravante denotaremos por φ_0 o subespaço de ω formado pelas sequências que não é zero para no máximo um número finito de termos.

Definição 6.1.9 *Diremos que um espaço topológico X é chamado φ_0-saturado se todo subespaço denso de X contém um subespaço sub-isomorfo (isto é, isomorfo sobre uma topologia localmente convexa metrizável mais fraca) a φ_0.*

Lembremos de (KALTON, 1974) que um espaço vetorial topológico (X, τ) é dito ser minimal se para toda topologia vetorial Hausdorff σ tal que $\sigma \leqslant \tau$ então $\tau = \sigma$.

Proposição 6.1.10 *Seja X um espaço vetorial $\aleph_0$-dimensional e $X^\sharp$ seu dual algébrico. Então $(X, \sigma(X, X^\sharp))$ é fraco, semi-Montel, não minimal e um espaço localmente convexo e φ_0-saturado.*

Demonstração: Segue direto da definição de espaços fracos que $(X,\sigma(X,X^\sharp))$ é fraco. Pelo (LIPECKI, 1998, Lemma 2, Example 1) $\sigma(X,X^\sharp)$ não é metrizável em qualquer subespaço de X, assim, ele é não-mínimal. Além disso, pela Proposição 6.1.7 e por (LIPECKI, 1998, Exemplo 2, Teorema 4) implicam que é φ_0-saturado. □

Proposição 6.1.11 *Seja X um espaço localmente convexo, Hausdorff, separável e não φ_0-saturado. Então:*

(i) X contém um subespaço denso com norma contínua.

(ii) X possui um EQB-sistema fundamental.

Demonstração: (i) Como X é separável existe $\mathbb{E}$ um subespaço denso em X de dimensão enumerável. Como X é não φ_0-saturado então $\mathbb{E}$ também é não φ_0-saturado. Logo, existe um subespaço F de $\mathbb{E}$ e uma topologia localmente convexa mais fraca σ em F tal que (F,σ) não contém copia isomorfa de φ_0. Pelo Theorem 4 de (LIPECKI, 1998), (F,σ) admite uma norma $\|\cdot\|$ que é σ-contínua. Então $\overline{F}^\tau = X$ e $\|\cdot\|$ é σ-contínua em F. Para provar (ii) procederemos como no Lemma 2 de (BONET; PERIS, 1998). Seja $\|\cdot\|$ uma seminorma contínua em $\mathbb{E}$, que existe pela parte (i). Tomemos uma sequência $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ cujo o span é denso em $\mathbb{E}$. Pelo método de Klee (CARRERAS; BONET, 1987) podemos encontrar um B-sistema $\{x_n;u_n^\star\}_n^\infty \subset (\mathbb{E},\|\cdot\|)\times(\mathbb{E},\|\cdot\|)^\star$ tal que $span\{x_n : n\in\mathbb{N}\} = span\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. Para cada n existe $K_n \geqslant 1$ tal que $|u_n^\star(x)| \leqslant K_n\|x\|$ para todo $x\in\mathbb{E}$. Tomemos uma seminorma contínua μ em X tal que $\mu|_\mathbb{E} = \|\cdot\|$. Como $\mathbb{E}$ é denso em X, cada $u_n^\star$ possui uma única extensão $\widetilde{u}^\star$ em X. Logo, $|\ \widetilde{u}_n^\star\ (x)| \leqslant K_n\|x\|$ para todo $x\in X$. Defina $x_n^\star := K_n^{-1}\ \widetilde{u}_n^\star$. Então $\{x;x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ é um B-sistema fundamental μ-equicontínuo em X. □

Observação 6.1.12 *Uma versão mais forte da Proposição 6.1.11 foi provada por Bonet e Peris em (CARRERAS; BONET, 1987) para espaços métricos.*

Quando o espaço é não-fraco obtemos o seguinte resultado.

Proposição 6.1.13 *Todo espaço localmente convexo, Hausdorff e não-fraco X possui uma sequência $(EB)_\mu$-básica regular.*

Demonstração: Como X é não-fraco existe uma seminorma contínua μ em X tal que $Ker(\mu)$ tem codimensão finita. Pelo Theorem 10.39 de (DAY, 1962) obtemos uma sistema $\{x_n,x_n^\star\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\times X^\star$ que é $(EB)_\mu$-básica regular. □

6.2 Aplicações de Sistemas Quase Biortogonais

Nesta seção discutiremos algumas das consequências decorrentes dos resultados da seção anterior. Começaremos provando alguns corolários, depois estudaremos aplicações sobre a forma fraca do teorema de peano em espaços de dimensão enumerável, também aplicaremos no estudo da propriedade do ponto fixo nos epaços $\aleph_0$-dimensional e, por fim, estudaremos o "tamanho"do conjunto das aplicações contínuas que não possuem ponto fixo em qualquer subconjunto limitado, convexo e fechado de um espaço topológico.

Na Proposição 6.1.6-(iii) é de fundamental importância que o espaço seja não semi-Montel e que sua topologia seja metrizável para garantir a existência de B-sistemas limitados. Na verdade, podemos provar um pouco mais em espaços de dimensão algébrica enumerável:

Corolário 6.2.1 *Seja X um espaço localmente convexo, Hausdorff e não semi-Montel de dimensão algébrica enumerável. Então para cada sequência de escalares (a_n) existe uma sequência limitada (u_n) em X e um B-sistema $\{x_n; x_n^\star\}_{n=1}^\infty$ em $X \times X^\star$ tal que $x_n = a_n u_n$ para cada inteiro n. Se X é normado, então (u_n) pode ser escolhido na bola unitária fechada $B(X)$ de X.*

Demonstração: Seguiremos as ideias contidas na demonstração de (KALTON, 1971a, Proposition 1.1.). Sendo X não semi-Montel então existe um subconjunto $B \subset X$ que é limitado e de dimensão infinita. Seja $F = \bigcup_{n=1}^\infty n\mathscr{B}$, onde $\mathscr{B}$ é o fecho convexo de B. Como X possui dimensão enumerável existe uma sequência de subespaços E_n de X tais que:

- $E_n \subset E_{n+1}$
- $X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$
- $dim(E_n) = n$

O sistema será construído por indução sobre n. Escolha $z_1 \in F$, com $z_1 \neq 0$. Então, por definição de F, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_1 := n_1^{-1} z_1 \in \mathscr{B}.$$

Defina $x_1 := a_1 u_1$. Como $x_1 \in X = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$ existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_1 \in E_{m_1}.$$

Usando que $dim(E_{m_1}) = m_1$ podemos estender $\{x_1\}$ a uma base $\{y_1, ..., y_{m_1}\}$ de E_{m_1} tal que $y_{m_1} = x_1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach podemos definir $y_1^\star, ..., y_{m_1}^\star \in X^\star$ tais que $y_i^\star(y_j) = \delta_{ij}$

para todo $i, j = 1, ..., m_1$. Assim obtemos uma sequência biortogonal $\{y_i; y_i^\star\}_{i=1}^{m_1} \subset X \times X^\star$ tal que $y_{m_1} = x_1$. Como F tem dimensão infinita existe $z_2 \in F$ tal que

$$y_i^\star(z_2) = 0, \ \forall i = 1, ..., m_1.$$

Por definição de F podemos tomar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_2 := n_2^{-1} z_2 \in \mathscr{B}.$$

Defina $x_2 := a_2 u_2$. Como $x_2 \in X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ existe $m_2 \in \mathbb{N}$, com $m_1 < m_2$, tal que

$$x_2 \in E_{m_2}.$$

Como $dim(E_{m_2}) = m_2$ podemos estender $\{y_1, ..., y_{m_1}, x_2\}$ á uma base $\{y_1, ..., y_{m_2}\}$ de E_{m_2} tal que $y_{m_2} = x_2$ e

$$y_i^\star(y_j) = 0, i \leqslant m_1 \ \text{ e } \ j > m_1.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach podemos definir $y_{m_1+1}^\star, ..., y_{m_2}^\star$ em $X^\star$ tal que:

$$y_i^\star(y_j) = \delta_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant m_2 \ \text{ e } \ m_1 + 1 \leqslant i \leqslant m_2.$$

Assim obtemos uma sequência biortogonal $\{y_i; y_i^\star\}_{i=1}^{m_2} \subset X \times X^\star$ tal que $y_{m_1} = x_1$ e $y_{m_2} = x_2$. Suponhamos, por hipótese de indução, que tenhamos obtido uma sequência $m_1 < \cdots < m_k$ e uma sequência biortogonal $\{y_i; y_i^\star\}_{i=1}^{m_k} \subset X \times X^\star$ tal que $y_{m_i} = x_i$ onde $x_i = a_i u_i$ e $u_i \in B$ para todo $i = 1, ..., k$. Como F possui dimensão infinita existe $z_{k+1} \in F$ tal que

$$y_i^\star(z_{k+1}) = 0, \ \forall i = 1, ..., m_k.$$

Como $z_{k+1} \in F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathscr{B}$ existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_{k+1} := n_{m_{k+1}}^{-1} z_{k+1} \in \mathscr{B}.$$

Defina $x_{k+1} := a_{k+1} u_{k+1}$. Como $x_{k+1} \in X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ existe $m_{k+1} \in \mathbb{N}$, com $m_k < m_{k+1}$, tal que

$$x_{k+1} \in E_{m_{k+1}}.$$

Como $dim(E_{m_{k+1}}) = m_{k+1}$ podemos estender $\{y_1, ..., y_{m_k}, x_{k+1}\}$ a uma base $\{y_1, ..., y_{m_{k+1}}\}$ de $E_{m_{k+1}}$ tal que $x_{k+1} = y_{m_{k+1}}$.

$$y_i^\star(y_j) = 0, i \leqslant m_k \ \text{ e } \ j > m_k.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach podemos definir $y^\star_{m_k+1},\ldots,y^\star_{m_{k+1}}$ em $X^\star$ tal que:

$$y^\star_i(y_j)=\delta_{ij}, 1\leqslant j\leqslant m_{k+1} \text{ e } m_k+1\leqslant i\leqslant m_{k+1}$$

Logo obtemos uma sequência biortogonal $\{y_i;y^\star_i\}_{i=1}^{m_{k+1}}\subset X\times X^\star$ tal que $y_{m_i}=x_i$ onde $x_i=a_iu_i$ e $u_i\in B$ para todo $i=1,\ldots,k+1$. Quando X é normado podemos tomar $B=B(X)$, terminando assim a demonstração. □

Observação 6.2.2 *Note que na demonstração acima $\{y_n\}$ é uma base de Hamel-Schauder para X. Logo, a menos de reordenar a sequência biortogonal $\{y_i;y^\star_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X\times X^\star$ podemos supor $y_{2n-1}=x_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Portanto, a sequência (x_n) pode ser obtida de tal modo que ela seja os termos ímpares de uma base de Hamel-Schauder para X.*

Nosso próximo resultado mostra que a Proposição 6.1.6-(ii) é o melhor que podemos esperar, mesmo para sistemas incontáveis.

Corolário 6.2.3 *Todo espaço localmente convexo, metrizável e semi-Montel não admite EB-sistemas incontáveis.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que $\{x_i,x^\star_i\}_{i\in I}$ é um EB-sistema não enumerável em espaço localmente convexo, metrizável e semi-Montel X. Usando que X é metrizável podemos aplicar o Lemma 2 de (LINDSTRÖM; SCHLUMPRECHT, 1993) para obter uma sequência distintas de índices $(i_n)\subset I$ tal que $\{x_{i_n}\}_n^{\infty}$ é limitado. Assim $\{x_{i_n},x^\star_{i_n}\}_n^{\infty}$ é um EB-sistema limitado em X. Pela Proposição 6.1.6, item (ii), X não pode ser semi-Montel. O que é uma contradição. □

Agora destacaremos algumas das aplicações decorrentes da existência de sequências $(EAB)_\mu$-básicas. Doravante denotaremos por $\mathscr{M}$ o conjunto dos espaços localmente convexos e Hausdorff contendo sequências $(EQB)_\mu$-básicas limitadas. Lembremos que um espaço vetorial X é chamado um espaço de Schur quando toda sequência que converge fraco também converge forte.

Teorema 6.2.4 *Seja X um espaço localmente convexo e metrizável de dimensão infinita sem cópias isomorfas de ℓ^0_1. Suponha que $\varphi_{00}\hookrightarrow X$. Então vale exatamente uma das possibilidades:*

(i) X é um espaço de Schur,

(ii) X possui uma sequência limitada $(EQB)_\mu$-básica.

Demonstração: Para todo espaço localmente convexo X temos exatamente duas possibilidades: ou ele é semi-Montel ou ele não é semi-Montel. Suponha inicialmente que X é semi-Montel então segue por definição que X é um espaço de Schur. Por outro lado pela Proposição 6.1.6 item (ii) segue que X não possui uma sequência limitada $(EQB)_\mu$-básica. Suponha agora que X não é semi-Montel, então segue pela Proposição 6.1.6 item (iii) que X possui um B-sistema, logo, X possui uma sequência linearmente independente, digamos (x_n). Como por hipótese $\ell_{00} \not\hookrightarrow X$ então pelo Teorema 5.1.6 todo subespaço de X é não fraco, em particular, o subespaço span$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não fraco. Pela Proposição 6.1.7 segue que X possui uma sequência limitada $(EQB)_\mu$-básica. Resta mostrar que X não é um espaço de Schur. Para isso, como por hipótese X não contém cópias isomorfas de ℓ_1^0, usando (BARROSO *et al.*, 2012) a sequência (x_n) possui subsequência fracamente de Cauchy, digamos (y_n). Acontece que a correspondente sequência biortogonal $(y^\star)$ é equicontínua. Isso implica que (y_n) não pode ser de Cauchy com respeito à topologia original de X. Consequentemente, X não é um espaço de Schur. □

Nossa segunda aplicação diz respeito à Forma Fraca do Teorema de Peano (FFTP) em espaços localmente convexo de dimensão enumerável. Em espaços euclidiano, a FFTP afirma que sempre que $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um campo de vetores contínua, então o problema $u'(t) = F(u(t))$ possui uma solução em algum intervalo aberto (α, β). Em (HÁJEK; JOHANIS, 2010) provaram o fracasso da FFTP em espaços de Banach com quocientes separáveis. Resultados anteriores foram obtidos por muitos autores (ver referências em (HÁJEK; JOHANIS, 2010) e (SHKARIN, 1997). Aqui obtemos o seguinte reforço de um resultado de (SHKARIN, 1997, Lema 3.1).

Teorema 6.2.5 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff $\aleph_0$-dimensional. Então vale as seguintes afirmações:*

(i) Se X é semi-Montel, então X possui a FFTP.

(ii) Se $X \in \mathscr{M}$, então X não possui a FFTP.

Demonstração: Provaremos inicialmente (i). Como X é semi-Montel todo conjunto limitado em X é relativamente compacto. Consequentemente, temos que X é sequencialmente completo veja (KALTON, 1971a, Theorem 1.4) e por (JARCHOW, 2012, 11.5.1) é semi-Reflexivo. Consequentemente usando argumentos de ponto fixo obtemos as soluções locais para o problema $u' = F(u)$. Para provar (ii) seja $\{x_n; x_n^\star\}$ uma sequência $(EAB)_\mu$-básica limitada em $X \times X^\star$. Como $\dim(X) = \aleph_0$, então X possui uma base de Hamel H tal que $y_n \subset H$, logo, para cada $x \in X$ temos que $x_n^\star(x) \neq 0$ apenas para um número finito de índices n. Agora seguiremos as ideias contidas em (SHKARIN, 1997). Defina $F : X \to X$ por

$$F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1}^{\star}(x)x_n + x_1,\ x \in X.$$

Pela limitação e equicontinuidade do sistema $\{x_n; x_n^{\star}\}$ obtemos que F é contínua em X. Afirmamos que o problema $u' = F(u)$ não possui solução em qualquer intervalo da reta. De fato, suponha por absurdo que exista $u : (\alpha, \beta) \to X$, satisfazendo $u'(t) = F(u(t))$, para todo $t \in (\alpha, \beta) = I$. Como todo $x \in X$ pode ser escrito da forma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$, obtemos para $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)x_n$ que:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u(t))x_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)x_n$$

e, portanto,

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u'(t))x_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)x_n.$$

Combinando os fatos acima com a definição da F obtemos:

$$u_n'(t) = x_n^*(u'(t)) = x_n^*(F(u(t))) = x_n^*\left(x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1}^*(u(t))x_n\right),$$

e, portanto, $u_1'(t) = \alpha_1$ e $u_n'(t) = u_{n-1}(t)\alpha_n$, para todo $n \geqslant 2$, onde $\alpha_n = x_n^*(x_n)$. Provaremos por indução que

$$u_n(t) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \frac{t^n}{n!} + C_0\alpha_2 \cdots \alpha_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-2}\alpha_n t + C_{n-1},$$

onde os C_i são constantes. De fato, para n=1, de $u_1'(t) = \alpha_1$ temos $u_1(t) = \alpha_1 t + C_0$. Suponhamos então que seja válido para n, combinando a igualdade $u_{n+1}'(t) = u_n(t)\alpha_{n+1}$, com a hipótese de indução temos

$$u_{n+1}'(t) = \left(\alpha_1 \cdots \alpha_n \frac{t^n}{n!} + C_0\alpha_2 \cdots \alpha_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-2}\alpha_n t + C_{n-1}\right)\alpha_{n+1},$$

o que nos dá,

$$u_{n+1}'(t) = \alpha_1 \cdots \alpha_{n+1} \frac{t^n}{n!} + C_0\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-2}\alpha_n\alpha_{n+1} t + C_{n-1}\alpha_{n+1},$$

integrando a igualdade acima

$$u_{n+1}(t) = \alpha_1 \cdots \alpha_{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + C_0\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} \frac{t^n}{(n)!} + \cdots + C_{n-2}\alpha_n\alpha_{n+1} \frac{t^2}{2} + C_{n-1}\alpha_{n+1} t + C_n$$

obtemos a fórmula desejada. Considere o conjunto

$$A_n = \{t \in I; u_n(t) = 0\}.$$

Defina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como u_n é um polinômio de grau n, então A_n tem no máximo n elementos, logo, o conjunto A é enumerável. Sendo I não enumerável, existe $t_0 \in I$ tal que

$$x_n^*(u(t_0)) = u_n(t_0) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

contradizendo que $\{x_n, x_n^*\} \in X \times X^*$ é localmente finita, isto é, que $u_n(t_0) = 0$ para todo n suficientemente grande. □

Teorema 6.2.6 *Seja X um espaço localmente convexo, Hausdorff e $\aleph_0$-dimensional. Então são equivalentes:*

(I) X é semi-Montel.

(II) X é sequencialmente completo.

(III) X possui a PPF.

(IV) Todo subespaço de X possui a PPF para conjuntos totalmente limitados, fechados e convexos.

Demonstração: Para a prova usaremos o seguinte Lema, que foi provado em (BARROSO; REBOUÇAS, 2014):

Lema 6.2.7 *Seja $(X;\tau)$ um espaço vetorial localmente convexo Hausdorff $\mathscr{N}_0$-dimensional que é sequencialmente completo. Suponha que C é um subconjunto de X não-vazio, limitado e convexo. Então toda aplicação $f : C \to \overline{C}$ que é $\tau-$sequencialmente contínua tem uma sequência aproximada de ponto fixo, isto é, existe $(x_n) \subset C$ tal que $x_n - f(x_n) \to 0$. Mais ainda, se C é fechado então (x_n) pode ser escolhida convergindo para um ponto fixo de f.*

É fácil ver que (I) e (II) são equivalentes. Pelo Lema 6.2.7, obtemos as implicações $(II) \Rightarrow (III)$ e $(II) \Rightarrow (IV)$. A implicação $(IV) \Rightarrow (II)$ foi provada em (BARROSO; REBOUÇAS, 2014, Teorema 2.4). Então é suficiênte provar que $(III) \Rightarrow (II)$. Suponha por contradição que X não é sequencialmente completo. Então pelo Teorema 1.4 de (KALTON, 1971a) existe subconjunto $\mathfrak{B} \subset X$ que é limitado e absolutamente convexo que não está contido em qualquer subespaço de dimensão finita de X. Fixemos uma sequência de números reais positivo $(a_n) \subset B_{l_1}$. Pela Observação 6.2.2 existe uma sequência $(u_n) \subset \mathfrak{B}$ e um sistema biortogonal $\{x_n; x_n^*\} \subset \mathfrak{B} \times X^*$

tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base de Hamel-Schauder para $Y := \bigcup_{i=1}^{\infty} i\mathfrak{B}$ onde $x_n = a_n u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere agora o conjunto K definido por

$$K := \{x \in X : |x_k^*(x)| \leqslant 1, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Note que K é convexo e fechado, pois $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : |x_k^*(x)| \leqslant 1\right\}$. Definamos agora a aplicação $f : K \to K$, por

$$f(x) = (1 - |x_1^*(x)|)a_1u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1}^*(x)|a_k u_k, \quad x \in K.$$

Finalmente o seguinte lema prova o Teorema.

Lema 6.2.8 *As seguintes afirmações são válidas:*

(i) f é contínua.

(ii) f não possui ponto fixo em K.

(iii) f deixa invariante um subconjunto limitada, fechado e convexo de K.

Demonstração: O item (i) segue do fato de f ser uniformemente aproximada em K pelas aplicações contínuas:

$$f_n(x) = (1 - |x_1^*(x)|)a_1u_1 + \sum_{k=2}^{n} |x_{k-1}^*(x)|a_k u_k, \quad x \in K.$$

Para provar o item (ii), suponhamos por contradição que seja falso, isto é, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$. Como X é $\mathcal{N}_0$-dimensional, segue que x possui suporte finito. Como $f(x) = x$, segue que $x \in Y$. Segue do fato de $\{a_n u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ser base de Hamel de Y e que $\{a_n u_n; x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal que:

$$\begin{cases} x_1^*(x) = x_1^*(f(x)) = 1 - |x_1^*(x)| \\ x_k^*(x) = x_k^*(f(x)) = |x_{k-1}^*(x)|, \forall k \geqslant 2. \end{cases}$$

Segue da primeira igualdade acima que $x_1^*(x) = \frac{1}{2}$, segue da segunda iguadade acima que $x_k^*(x) = \frac{1}{2}$, para todo $k \geqslant 2$. O que é um absurdo, pois x possui suporte finito.

Finalmente para provar (iii) tomemos uma seminorma contínua ρ em X. Então para todo $x \in K$, temos:

$$\begin{aligned} \rho(f(x)) &\leqslant (1 - |x_1^*(x)|)a_1\rho(u_1) + \sum_{k=2}^{n} |x_{k-1}^*(x)|a_k\rho(u_k) \\ &\leqslant a_1\rho(u_1) + \sum_{k=2}^{n} a_k\rho(u_k) \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \rho(u_k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

mostrando que K é limitado em X. Defina então $C := \overline{co}(f(K))$, daí temos que C é fechado, convexo e limitado como subconjunto de K e satisfaz $f(C) \subset C$, mostrando que X não possui a propriedade PPF, o que é absurdo por (II), terminando a prova do lema. □

□

Teorema 6.2.9 *Seja X um espaço localmente convexo, Hausdorff, normado e de dimensão enumerável. Então X possui uma contraction-PPF se, e somente se, possui dimensão finita.*

Demonstração: Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, basta provar a suficiência. Suponha por contradição que $dim(X) = \aleph_0$, e seja $\|\cdot\|$ a norma de X. Pelo Teorema de Baire, veja (BOTELHO *et al.*, 2012, Proposição 10.3.1.), $(X, \|\cdot\|)$ não pode ser um espaço completo e, portanto, é não semi-Montel. Fixe uma sequência $(a_n) \in \ell_1$ com norma estritamente menor que 1. Pela Observação 6.2.2 existe uma sequência (u_n) em B (X) e um sistema biortogonal $\{y_n; y_n^\star\} \subset B(X) \times X^\star$ tal que $y_{2n-1} = a_n u_n$ e (x_n) é uma base de Schaude para X. Seja $x_n = y_{2n-1}$ e defina a aplicação $f : X \to X$ por:

$$f(x) = \frac{(1 - |x_1^*(x))}{\|x_1^*\|} a_1 u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x_{k-1}^*(x)|}{\|x_{k-1}^*\|} a_k u_k.$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Hamel para X, então f não possui ponto fixo, de fato suponha por absurdo que existe $x \in X$, tal que $f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$, usando que $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset B_X \times X^*$ é um sistema biortogonal, temos:

$$\begin{cases} x_1^*(x) = x_1^*(f(x)) = \frac{(1-|x_1^*(x))}{\|x_1^*\|} \\ x_k^*(x) = x_k^*(f(x)) = \frac{|x_{k-1}^*(x)|}{\|x_{k-1}^*\|}, \forall k \geqslant 2 \end{cases}$$

como $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Hamel do espaço de dimensão enumerável X, seque que apenas um número finito dos $x_k^*(x)$ pode ser diferente de zero, logo, usando a segunda igualdade acima que $x_k^*(x) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, $x = 0$. Usando agora a primeira igualdade obtemos um absurdo, pois

$$0 = x_1^*(x) = x_1^*(f(x)) = \frac{1}{\|x_1^*\|} \neq 0.$$

Portanto, f não possui ponto fixo em X. Usando que $\|x_n^*\| \geqslant 1$ combinado com o fato de

$(a_n) \subset B_{l_1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(y)\| &= \left\| \frac{-(|x_1^*(x)|-|x_1^*(y)|)}{\|x_1^*\|} a_1 u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x_{k-1}^*(x)|-|x_{k-1}^*(y)|}{\|x_{k-1}^*\|} a_k u_k \right\| \\
&\leqslant \left| \frac{|x_1^*(x)|-|x_1^*(y)|}{\|x_1^*\|} \right| \|a_1 u_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{|x_{k-1}^*(x)|-|x_{k-1}^*(y)|}{\|x_{k-1}^*\|} \right| \|a_k u_k\| \\
&\leqslant \left| \frac{|x_1^*(x)-x_1^*(y)|}{\|x_1^*\|} \right| \|a_1 u_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{|x_{k-1}^*(x)-x_{k-1}^*(y)|}{\|x_{k-1}^*\|} \right| \|a_k u_k\| \\
&\leqslant \left| \frac{\|x_1^*\|\|x-y\|}{\|x_1^*\|} a_1 \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\|x_{k-1}^*\|\|x-y\|}{\|x_{k-1}^*\|} a_k \right| \\
&\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| \right) \|x-y\|,
\end{aligned}$$

logo,

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| \right) \|x-y\|, \forall x,y \in X.$$

Como $(a_n) \subset B_{l_1}$ obtemos o resultado desejado. □

Lembremos que um espaço topológico T é dito possuir a tightness enumerável se para cada $A \subset T$ e todo $x \in \overline{A}$ existe um conjunto enumerável $B \subset A$ tal que $x \in \overline{B}$. Vale ressaltar que muitos espaços localmente convexos metrizáveis possui a tightness enumerável em sua topologia fraca (FABIAN *et al.*, 2011, Theorem 3.54.)

Proposição 6.2.10 *Seja X um espaço localmente convexo e Hausdorff tal que todo conjunto limitado possui a tightness enumerável. Então X possui a propriedade de ponto fixo sequencial, isto é, todo conjunto sequencialmente compacto e convexo $C \subset X$ e toda aplicação contínua $f : C \to C$ que é sequencialmente contínua possui ponto fixo em C.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 de (BARROSO *et al.*, 2013) obtemos $0 \in \overline{\{x - f(x) : x \in C\}}^{\tau}$ onde τ é a topologia original de X. Como $C - C$ possui a tightness enumerável então existe um subconjunto enumerável $B \subset C$ tal que $0 \in \overline{\{x - f(x) : x \in B\}}^{\tau}$. Considere o espaço $\mathbb{E} = \big(\text{span}\{x - f(x) : x \in B\}, \sigma\big)$ onde σ é uma topologia localmente convexa, mais fraca e metrizável. Como $\sigma \leqslant \tau|_{\mathbb{E}}$ obtemos que $0 \in \overline{\{x - f(x) : x \in B\}}^{\sigma}$. Isto implica que existe uma sequência (x_n) σ-aproximação de ponto fixo para f, isto é, $x_n - f(x_n) \xrightarrow{\sigma} 0$. Por outro lado, usando que C é sequencialmente compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ para algum $x \in C$. Como f é sequencialmente contínua segue que $x_n - f(x_n) \xrightarrow{\tau} x - f(x)$, em particular, como σ é mais fraca que τ em $\mathbb{E}$ obtemos $x_n - f(x_n) \xrightarrow{\sigma} x - f(x)$. Como σ é Hausdorff segue que $0 = x - f(x)$, logo, $x = f(x)$. □

Definição 6.2.11 *Seja X um espaço vetorial topológico. Diremos que uma aplicação $f : X \to X$ é sem ponto fixo (SPF) preservado se existe um subconjunto convexo, fechado e limitado $C \subset X$ tal que $f : C \to C$ é contínua e não possui ponto fixo.*

Nem todos os espaços localmente convexos admitem aplicações SPF-preservado. Por exemplo, se X é um espaço localmente convexo, Hausdorff e semi-Montel então nenhuma auto-função contínua e sem ponto fixo de X pode ser SPF-preservado.

A proposição seguinte fornece condições para um espaço localmente convexo possua aplicações SPF-preservado.

Proposição 6.2.12 *Seja X um espaço localmente convexo. Então as seguintes condições garantem a existência de aplicação SPF-preservado em X.*

(i) X é $\aleph_0$-dimensional e não é sequencialmente completo.

(ii) X é metrizável e não é semi-Montel.

(iii) X é quasi-completo e não é semi-reflexivo.

Demonstração: (i) A prova deste item segue direto da prova do Teorema 6.2.6. (ii) X contém um conjunto C que é limitado, convexo e fechado que não é compacto. Pelo Theorem 2.3 de (KLEE, 1955) existe uma aplicação contínua $f_0 : C \to C$ SPF. Pelo teorema de extensão de Dugundji (DUGUNDJI *et al.*, 1951) f_0 admite uma extensão contínua, $f : X \to C$ conforme desejado. (iii) Esta afirmação é uma consequência imediata da prova do Teorema 4.3 de (ASTALA, 1982). □

Vamos agora estudar o tamanho linear do conjunto formado das aplicações que são SPF-preservado. Em primeiro lugar, destaquemos que, em geral, combinações lineares de aplicações SPF-preservado podem não ser SPF-preservado.

Exemplo 6.2.13 *Considere o espaço $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$. Defina as aplicações contínuas (2-Lipschitziana) $f_i : \ell_1 \to \ell_1$ (i=1,2) por*

$$f_1\left(\sum_{n}^{\infty} t_n e_n\right) = \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |t_{2n-1}|\right) e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} t_{2n-3} e_{2n-1}$$

e

$$f_1\left(\sum_{n}^{\infty} t_n e_n\right) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} |t_{2n}|\right) e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} t_{2n-2} e_{2n}$$

onde (e_n) denota a base canônica de ℓ_1. É fácil ver que cada f_i é LFP-presevando em $B(\ell_1)$. Note que $g = 2f_1 + f_2$ obtemos que $g^N(0) = \sum_n^\infty a_n e_n$, com $a_{2N-1}2^N$ para todo $N \geqslant 1$. Implicando que $\|g^N(0)\|_{\ell_1} \to \infty$ quando $N \to \infty$.

Exemplo 6.2.14 *Seja ℓ_1 como acima. Defina as aplicações afins $f_i : \ell_1 \to \ell_1$ (i=1,2) por*

$$f_1\left(\sum_n^\infty t_n e_n\right) = \left(1 - \sum_{n=2}^\infty t_{2n-1}\right) e_1 + \sum_{n=2}^\infty t_{2n-3} e_{2n-1}$$

e

$$f_1\left(\sum_n^\infty t_n e_n\right) = \left(1 - \sum_{n=1}^\infty t_{2n}\right) e_1 + \sum_{n=2}^\infty t_{2n-2} e_{2n}.$$

Uma conta direta mostra que $(1/2)f(x_0) + (1/2)f(x_0) = x_0$ onde

$$x_0 = (\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \ldots).$$

Dado um espaço vetorial topológico X, denotamos por $S_{cc}(X)$ a família de todos os subconjuntos convexos, fechados próprios de X. Se $C \in S_{cc}(X)$, então SPF(C) representará a família de todas as aplicações de C em C que são SPF. Considere a seguinte família de aplicações SPF:

$$\mathscr{F}(X) := \{f : X \to X | f \in SPF(C) \text{ para algum } C \in S_{cc}(X)\}.$$

Lembremos de (GURARIY, 1966) que um subconjunto M de um espaço vetorial topológico ε é chamado de lineável se $M \bigcup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita de ε. No nosso contexto, trabalharemos com a seguinte definição:

Definição 6.2.15 *Diremos que um espaço localmente convexo X é SPF-lineável se $\mathscr{F}(X) \bigcup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita.*

Nosso próximo resultado fornece alguns exemplos de espaços que são SFP-lineável.

Teorema 6.2.16 *Todo espaço em $\mathscr{M}$ que é $\aleph_0$-dimensional e não semi-Montel é SFP-lineável.*

Demonstração: Seja $X \in \mathscr{M}$ com $\dim(X) = \aleph_0$. Por hipótese existe uma seminorma contínua μ em X e uma sequência $\{x_n; x_n\}$ em $X \times X^\star$ que é $(EQB)_\mu$-básica. Logo $\{x_n\}$ é uma base de Hamel-Schauder em $\mathbb{E} = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Denotemos por $\{u_n^\star\} \subset X^\star$ a sequência biortogonal assosciado à (x_n), isto é, $u_n^\star(x_m) = \delta_{n,m}$. Note que os $u_n^\star$ pode ser diferente dos $x_n^\star$ pois $\{x_n; x_n^\star\}$

é apenas quase biortogonal. Seja $(\mathbb{N}_i)$ uma sequência de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$. Suponhamos que

$$\mathbb{N}_i := \left\{\kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)}, \ldots\right\},$$

onde a sequência $(\kappa_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente para cada $i \in \mathbb{N}$. Fixemos uma sequência $(a_n) \in B(\ell_1)$. Para cada $\mathbb{N}_i$ defina as aplicações $f_i : X \to X$ por

$$f_i(x) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}}\right) x_{k_1^{(i)}} + \sum_{n=2}^{\infty} x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}} x_{k_n^{(i)}}, \quad x \in X.$$

Claramente f_i é afim. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda \neq 0$, considere o conjunto:

$$K_\lambda = \left\{x \in \mathbb{E}; \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\star}(x)\right| \leqslant |\lambda|\right\}.$$

Note que K_λ é convexo e que $K_\lambda = \lambda K$. O teorema seguirá como consequência dos póximos 3 lemas.

Lema 6.2.17 *Para todo escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ temos $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(K_{\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|}) \subset K_{\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|}$.*

Demonstração: De fato, dado $x \in K_{\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|}$, usando que $\{(x_n, u_n^{\star}) \in X \times X^{\star}\}$ é biortogonal temos:

$$\begin{cases} u^{\star}_{k_1^{(i)}}(\lambda_i f_i(x)) = \lambda_i u^{\star}_{k_1^{(i)}}(f_i(x)) = \lambda_i \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}}\right) \\ u^{\star}_{k_n^{(i)}}(\lambda_i f_i(x)) = \lambda_i x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}}, \forall\ n \geqslant 2, \end{cases}$$

somando as igualdades obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^{\star}_{k_n^{(i)}}(\lambda_i f_i(x)) = \lambda_i, \forall\ i \in \mathbb{N},$$

como os $\mathbb{N}_i$ são disjuntos e $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$ obtemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\star}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\star}(\lambda_i f_i(x))\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\star}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|.$$

□

Observação 6.2.18 *Note que pela prova acima temos $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(\mathbb{E}) \subset K_{\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|}$.*

Lema 6.2.19 *f_i são contínuas em $\mathbb{E}$.*

Demonstração: Como $f_i(x) = x_{k_1^{(i)}} + F_i(x)$ para todo $x \in X$, onde

$$F_i(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}} x_{k_1^{(i)}} + \sum_{n=2}^{\infty} x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}} x_{k_n^{(i)}},$$

para provar que f_i é contínua é suficiente provar que $F_i : X \to X$ é contínua. Para isto, considere $F_i^N : X \to X$ dado por

$$F_i^N(x) = -\sum_{n=1}^{N} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}} x_{k_1^{(i)}} + \sum_{n=2}^{N} x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}} x_{k_n^{(i)}}.$$

Como a sequência $\{x_n\}$ é $(EQB)_\mu$-básica então existe uma seminorma contínua ρ em $\mathbb{E}$, tal que

$$|x_n^{\star}(x)| \leqslant \rho(x), \quad x \in \mathbb{E}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

segue usando a desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
\rho(F_i(x)) &\leqslant \rho\left(F_i^N(x)\right) + \rho\left(-\sum_{n=N+1}^{\infty} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}} x_{k_1^{(i)}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}} x_{k_n^{(i)}}\right) \\
&\leqslant \rho\left(F_i^N(x)\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x)| a_{k_n^{(i)}} \rho\left(x_{k_1^{(i)}}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x)| a_{k_{n-1}^{(i)}} \rho\left(x_{k_n^{(i)}}\right) \\
&\leqslant \rho\left(F_i^N(x)\right) + 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho\left(x_{k_n^{(i)}}\right) \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x)| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{k_n^{(i)}} \\
&\leqslant \rho\left(F_i^N(x)\right) + 2K\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{k_n^{(i)}}\right) \rho(x) \\
&\leqslant \rho\left(F_i^N(x)\right) + C\rho(x),
\end{aligned}$$

onde $C = 2K\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{k_n^{(i)}}\right)$. Como F_i^N é claramente contínua, segue que F_i é limitada por uma função contínua e, portanto, é contínua. □

Lema 6.2.20 *$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i$ possui ponto fixo em $K_{\sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|}$ se, e somente se, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$.*

Demonstração: Se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$, então claramente o vetor nulo é ponto fixo. Agora suponha por absurdo que $\sum_{i=j}^{N} \lambda_j f_j$ possui ponto fixo mas que $\lambda_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Como $\{x_n, u_n^{\star}\}$ é um sistema biortogonal então aplicando $\{u^{\star}_{k_n^{(i)}}\}_{n=1}^{\infty}$ a igualdade $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\star}(x) x_n$, obtemos:

$$\begin{cases}
x^{\star}_{k_1^{(i)}}(x) = u^{\star}_{k_1^{(i)}}(x) = u^{\star}_{k_1^{(i)}}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right) = \lambda_i\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}}\right) \\
x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) = u^{\star}_{k_n^{(i)}}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right) = \lambda_i x^{\star}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}}, \forall\ n \geqslant 2.
\end{cases}$$

Se $x^{\star}_{k_n^{(1)}}(x) \neq 0$, então da segunda igualdade acima obtemos que $x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\lambda_i \neq 0$. O que é um absurdo pois x teria suporte infinito. Portanto $x^{\star}_{k_n^{(1)}}(x) = 0$, e logo, pela segunda equação $x^{\star}_{k_n^{(i)}}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente usando a primeira equação temos que $\lambda_i = 0$, o que é absurdo pois por hipótese $\lambda_i \neq 0$. $\square$

Observação 6.2.21 *Pela prova acima temos que $f_i : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ não possui ponto fixo.*

Lema 6.2.22 $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ *são linearmente independentes.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x) = 0$, com $\lambda_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Combinando o fato de que $\{x_n, u_n^*\}$ é um sistema biortogonal e que $\mathbb{N}_i$ são disjuntos obtemos:

$$\begin{cases} 0 = u^{\star}_{k_1^{(i)}}(0) = u^{\star}_{k_1^{(i)}}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right) = \lambda_i \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^{*}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}}\right) \\ 0 = u^{\star}_{k_n^{(i)}}(0) = u^{\star}_{k_n^{(i)}}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x)\right) = \lambda_i x^{*}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) a_{k_{n-1}^{(i)}}, \forall\ n \geqslant 2. \end{cases}$$

Como $\lambda_i \neq 0$ e $a_{k_{n-1}^{(i)}} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da última igualdade acima que $x^{*}_{k_{n-1}^{(i)}}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{*}_{k_n^{(i)}}(x) a_{k_n^{(i)}} = 0.$$

Usando agora a primeira igualdade temos $\lambda_i = 0$, o que é absurdo. $\square$

Finalmente, para concluir o Teorema, basta tomar $C_\lambda = \overline{K_\lambda}$. Pois C_λ é convexo e fechado. Além disso, temos que f_i é contínua em C_λ (pois pelo Lema 6.2.19 f_i é contínua em $\mathbb{E}$, logo, sua restrição à C_λ é contínua), $f_i(C_\lambda) \subset C_\lambda$ (veja a Observação 6.2.18) e f_i não possui ponto fixo em C_λ (veja a Observação 6.2.21). $\square$

REFERÊNCIAS

ANDROULAKIS, G.; BEANLAND, K.; DILWORTH, S.; SANACORY, F. Embedding ℓ into the space of bounded operators on certain banach spaces. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 38, n. 6, p. 979–990, 2006.

ASTALA, K. On peano's theorem in locally convex spaces. **Studia Math**, v. 73, n. 3, p. 213–223, 1982.

BARROSO, C. S.; KALENDA, O. F.; LIN, P.-K. On the approximate fixed point property in abstract spaces. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 271, n. 3-4, p. 1271–1285, 2012.

BARROSO, C. S.; KALENDA, O. F.; REBOUÇAS, M. P. Optimal approximate fixed point results in locally convex spaces. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 401, n. 1, p. 1–8, 2013.

BARROSO, C. S.; REBOUÇAS, M. P. On some relationships between biorthogonal systems, linear topologies and the weak-afpp. **Mathematische Nachrichten**, Wiley Online Library, v. 287, n. 17-18, p. 1922–1936, 2014.

BENAVIDES, T. D.; PINEDA, M. J.; PRUS, S. Weak compactness and fixed point property for affine mappings. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 209, n. 1, p. 1–15, 2004.

BESSAGA, C.; PEŁCZYŃSKI, A. On bases and unconditional convergence of series in banach spaces. **Studia Mathematica**, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 17, n. 2, p. 151–164, 1958.

BONET, J.; PERIS, A. Hypercyclic operators on non-normable fréchet spaces. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 159, n. 2, p. 587–595, 1998.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. Fundamentos de análise funcional. **Coleçao Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática**, 2012.

CARRERAS, P. P.; BONET, J. **Barrelled locally convex spaces**. [S.l.]: Elsevier, 1987. v. 131.

CASAZZA, P. G.; GUERRE-DELABRIERE, S. Classical sequences in banach spaces. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, RI: The Society, 1979-, v. 30, n. 1, p. 117–123, 1994.

DAY, M. M. On the basis problem in normed spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 13, n. 4, p. 655–658, 1962.

DOBROWOLSKI, T.; MARCISZEWSKI, W. Rays and the fixed point property in noncompact spaces. **Tsukuba journal of mathematics**, JSTOR, p. 97–112, 1997.

DOWLING, P.; LENNARD, C.; TURETT, B. The fixed point property for subsets of some classical banach spaces. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Pergamon, v. 49, n. 1, p. 141–145, 2002.

DOWLING, P.; LENNARD, C.; TURETT, B. Characterizations of weakly compact sets and new fixed point free maps in c_0. **Studia Mathematica**, v. 154, n. 3, p. 277–293, 2003.

DREWNOWSKI, L. The metrizable linear extensions of metrizable sets in topological linear spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 51, n. 2, p. 323–329, 1975.

DUGUNDJI, J.; GRANAS, A. Fixed point theory. PWN-Polish Scientific Publishers, 1982.

DUGUNDJI, J. *et al.* An extension of tietze's theorem. **Pacific J. Math**, v. 1, n. 3, p. 353–367, 1951.

ENFLO, P. A counterexample to the approximation problem in banach spaces. **Acta Mathematica**, Springer, v. 130, n. 1, p. 309–317, 1973.

ERDMANN, K. G. G.; MANGUILLOT, A. P. **Linear Chaos. Universitext**. [S.l.]: Springer Verlag, London, 2011.

FABIAN, M.; HABALA, P.; HÁJEK, P.; MONTESINOS, V.; ZIZLER, V. **Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

FAN, K. A generalization of tychonoff's fixed point theorem. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 142, n. 3, p. 305–310, 1961.

FLORET, K. **Weakly compact sets**. [S.l.: s.n.], 1980.

GALLAGHER, T.; LENNARD, C.; POPESCU, R. Weak compactness is not equivalent to the fixed point property in c. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 431, n. 1, p. 471–481, 2015.

GOWERS, W. T.; MAUREY, B. The unconditional basic sequence problem. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 6, n. 4, p. 851–874, 1993.

GURARIY, V. Subspaces and bases in spaces of continuous functions. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1966. v. 167, p. 971–973.

HÁJEK, P.; JOHANIS, M. On peano's theorem in banach spaces. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 249, n. 12, p. 3342–3351, 2010.

HOWES, N. R. **Modern analysis and topology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

JACHYMSKI, J. A cantor type intersection theorem for superreflexive banach spaces and fixed points of almost affine mappings. **JOURNAL OF NONLINEAR AND CONVEX ANALYSIS**, YOKOHAMA PUBL 101, 6-27 SATSUKIGAOKA AOBA-KU, YOKOHAMA, 227-0053, JAPAN, v. 16, n. 6, p. 1055–1068, 2015.

JAMES, R. C. Reflexivity and the sup of linear functionals. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 13, n. 3-4, p. 289–300, 1972.

JARCHOW, H. **Locally convex spaces**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

KALTON, N. A barrelled space without a basis. In: **Proc. Amer. Math. Soc**. [S.l.: s.n.], 1970. v. 26, p. 465–466.

KALTON, N. Bases in non-closed subspaces of ω. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 2, n. 4, p. 711–716, 1971.

KALTON, N. Normalization properties of schauder bases. **Proc. London Math. Soc**, v. 22, n. 3, p. 91–105, 1971.

KALTON, N. Basic sequences in F-spaces and their applications. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)**, Cambridge Univ Press, v. 19, n. 02, p. 151–167, 1974.

KALTON, N.; SHAPIRO, J. Bases and basic sequences in F-spaces. **Studia Math**, v. 56, p. 47–61, 1976.

KALTON, N. J. The basic sequence problem. **arXiv preprint math/9408205**, Citeseer, 1994.

KLEE, V. L. Some topological properties of convex sets. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 78, n. 1, p. 30–45, 1955.

KNASTER, B.; KURATOWSKI, C.; MAZURKIEWICZ, S. Ein beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 14, n. 1, p. 132–137, 1929.

KÖTHE, G.; KÖTHE, G. **Topological vector spaces**. [S.l.]: Springer, 1983.

LENNARD, C.; NEZIR, V. The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the FPP for affine nonexpansive mappings. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 381, n. 2, p. 678–688, 2011.

LIN, P.; STERNFELD, Y. Convex sets with the lipschitz fixed point property are compact. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 93, n. 4, p. 633–639, 1985.

LIN, P.-K. There is an equivalent norm on 1 that has the fixed point property. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 68, n. 8, p. 2303–2308, 2008.

LINDSTRÖM, M.; SCHLUMPRECHT, T. A josefson–nissenzweig theorem for fréchet spaces. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 25, n. 1, p. 55–58, 1993.

LIPECKI, Z. Remarks on independent sequences and dimension in topological linear spaces. **Collectanea Mathematica**, v. 49, n. 1, p. 53–65, 1998.

MENET, Q. Hypercyclic subspaces on fréchet spaces without continuous norm. **Integral Equations and Operator Theory**, Springer, v. 77, n. 4, p. 489–520, 2013.

MILMAN, D.; MILMAN, V. Some geometric properties of non-reflexive spaces. **DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR**, MEZHDUNARODNAYA KNIGA 39 DIMITROVA UL., 113095 MOSCOW, RUSSIA, v. 152, n. 1, p. 52, 1963.

MIL'MAN, D. P.; MILMAN, V. D. Some properties of non-reflexive banach spaces. **Matematicheskii Sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, v. 107, n. 4, p. 486–497, 1964.

MIL'MAN, V. D. Geometric theory of banach spaces. part i. the theory of basis and minimal systems. **Russian Mathematical Surveys**, Turpion Ltd, v. 25, n. 3, p. 111–170, 1970.

ODELL, E. Applications of ramsey theorems to banach space theory. In: UNIV. OF TEXAS PRESS, AUSTIN, TX. **Notes in Banach spaces**. [S.l.], 1980. p. 379–404.

OSBORNE, M. S. Locally convex spaces. In: **Locally Convex Spaces**. [S.l.]: Springer, 2014. p. 51–94.

PEŁCZYŃSKI, A. A note on the paper of i. singer. **Studia Mathematica**, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 21, n. 3, p. 370–374, 1962.

PLICHKO, A. Diagonal sequence property in banach spaces with weaker topologies. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 350, n. 2, p. 838–844, 2009.

ROELCKE, W. *et al.* On the behaviour of linear mappings on absolutely convex sets and a. grothendieck's completion of locally convex spaces. **Illinois Journal of Mathematics**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 17, n. 2, p. 311–316, 1973.

ROSENTHAL, H. A characterization of banach spaces containing c_0. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 7, n. 3, p. 707–748, 1994.

RUESS, W. Locally convex spaces not containing ℓ^1. **Funct. Approx. Comment. Math**, v. 50, p. 531–558, 2014.

SHKARIN, S. Peano's theorem is invalid in infinite-dimensional F'paces. **Mat. Zametki**, v. 62, n. 1, p. 128–137, 1997.

SHKARIN, S. Hypercyclic operators on topological vector spaces. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, p. jdr082, 2012.

APÊNDICE A – ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Trabalharemos principalmente em espaços localmente convexo, por isso, neste apêndice faremos uma breve revisão de algumas definições e resultados importante nesses espaços, mas não entraremos em detalhes, para os leitores que desejarem se aprofundar sobre o assunto recomendamos o Livro (OSBORNE, 2014). Tudo começa com a definição de espaço vetorial topológico.

Definição A.0.1 *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e τ uma topologia em E. Dizemos que o par (E,τ) é um espaço vetorial topológico se as operações algébricas*

$$AD : E \times E \to E,\ AD(x,y) = x + y$$

$$ME : \mathbb{K} \times E \to E,\ ME(a,y) = ay$$

são contínuas quando consideramos em $E \times E$ e em $\mathbb{K} \times E$ as respectivas topologias produto.

Doravante neste apêndice X denotará um espaço vetorial topológico sobre os reais e τ sua topologia.

Definição A.0.2 *Uma aplicação $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ é chamada de seminorma quando:*

(i) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$, *para todo* $x,y \in X$

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}, x \in X$

Definição A.0.3 *Se além das duas condições acima, uma seminorma satisfaz:*

$$\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

então ρ é chamada de norma.

Seja $F = \{\rho_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma família de seminormas em X. Considere a família B formada pelos conjuntos:

$$V(x;\rho_{\alpha_1},...,\rho_{\alpha_n};\varepsilon) = \{y \in X : \rho_{\alpha_i}(y-x) < \varepsilon, i = 1,...,n\}.$$

Não é difícil mostrar que B forma uma base para uma topologia em X. Note que os abertos básicos da topologia τ_B são conjuntos convexos, logo, toda vizinhança da origem contém um aberto convexo contendo a origem. Isso motiva a seguinte definição.

Definição A.0.4 *Um espaço localmente convexo é um espaço vetorial topológico no qual a origem admite uma base de vizinhanças convexas, ou seja, toda vizinhança da origem contém um aberto convexo contendo a origem.*

Exemplo A.0.5 *(a) Todo espaço normado é um espaço localmente convexo, uma vez que as bolas abertas $(B(0;\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ formam uma base de vizinhanças convexas da origem.*

(b) Se E é um espaço vetorial e τ é a topologia dado por $\tau = \{\emptyset, E\}$ então (E,τ) é espaço localmente convexo.

(c) Nem todo espaço métrico é localmente convexo. Em (BOTELHO et al., 2012), Exemplo 8.2.3 item (d) os autores provam que ℓ_p, para $0 < p < 1$, não é um espaço localmente convexo.

Quando um espaço localmente convexo é métrico a família de seminormas que gera a topologia desse espaço é enumerável e "crescente". Para ser mais exato, vale o seguinte teorema.

Teorema A.0.6 *(KÖTHE; KÖTHE, 1983, p.205) Seja (X,τ) um espaço localmente convexo. Então τ é metrizavel se, e somente se, τ pode ser definido por uma sequência de seminormas. Além disso, essa sequência de seminormas pode ser tomada crescente $p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \cdots$ para todo $x \in X$.*

Nem todo espaço localmente convexo, Hausdorff e métrico é completo, por exemplo o espaço $\mathbb{Q}$ munido da topologia euclidiana. Contudo, quando ele é completo, temos a seguinte definição.

Definição A.0.7 *Um espaço localmente convexo, Hausdorff, metrizável e completo é chamado um espaço de Fréchet.*

Para mais detalhes e alguns exemplos de espaços de Fréchet, recomendamos a leitura da seção 3.7 de (OSBORNE, 2014).

Observação A.0.8 *Quando o espaço métrico é completo mas não localmente convexo ele recebe o nome de F-espaço.*

Existe, naturalmente, um grande número de propriedades que um espaço vetorial topológico pode ter. dois deles, convexidade local e Hausdorff, já é nossa conhecida. Existe muitas outras, mas duas se destacam pela sua utilidade em relação às propriedades básicas dos espaços localmente convexos e Hausdorff. Apresentaremos agora elas.

Definição A.0.9 *Um subconjunto A do espaço vetorial E é dito:*

(a) absolvente se para todo $x \in E$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $|\lambda| \geqslant \lambda_0$.

(b) equilibrado se $\lambda A \subset A$ para todo $|\lambda| \leqslant 1$.

(c) absolutamente convexo se for simultaneamente convexo e equilibrado.

Seja (X, τ) Hausdorff. Um conjunto A é chamado de barril quando ele é fechado, absolvente e absolutamente convexo.

Definição A.0.10 *Dizemos que (X, τ) é tonelada quando todo barril em X é uma vizinhança da origem para τ.*

APÊNDICE B – TOPOLOGIA FRACA

Faremos agora uma breve revisão de algumas definições e resultados elementares em relação a topologia fraca, mas não entraremos em detalhes, para os leitores que desejarem se aprofundar sobre o assunto recomendamos o Livro (BOTELHO *et al.*, 2012).

o conceito de redes é uma generalização do conceito de sequência muito útil para descrever topologia em geral.

Definição B.0.1 *Um conjunto dirigido é um par* $(\Lambda, \leqslant)$ *em que* $\leqslant$ *é uma direção no conjunto* Λ*, isto é, uma relação em* Λ *tal que:*

(a) $\lambda \leqslant \lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

(b) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ *e* $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$, *então* $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$.

(c) Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, *existe* $\lambda_3 \in \Lambda$ *tal que* $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ *e* $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Definição B.0.2 *Uma rede em um conjunto* X *é uma função* $P : \Lambda \to X$*, onde* Λ *é um conjunto dirigido. Usualmente se denota* $P(\lambda)$ *por* x_λ*, e neste caso denotaremos a rede por* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definição B.0.3 *Diremos que a rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *no espaço topológico* X *converge para* $x \in X$*, e neste caso escreveremos* $x_\lambda \to x$*, se para cada vizinhança* U *de* x *existe* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que* $x_\lambda \in U$ *para todo* $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Definição B.0.4 *Seja* $P : \Lambda \to X$, $P(\lambda) = x_\lambda$ *uma rede. Se* Γ *é um conjunto dirigido e* $Q : \Gamma \to \Lambda$ *é uma função tal que:*

(i) $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \Rightarrow Q(\gamma_1) \leqslant Q(\gamma_2)$,

(ii) para todo $\lambda \in \Lambda$ *existe* $\gamma \in \Gamma$ *tal que* $\lambda \leqslant Q(\gamma)$,

então a composição $P \circ Q : \Gamma \to X$ *é chamado uma sub-rede de* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Não é difícil mostrar que uma rede converge para $x \in X$ se, e somente se, toda sub-rede converge para x.

Definição B.0.5 *Um espaço topológico* X *é um espaço de Hausdorff se para todo* $x, y \in X$, $x \neq y$*, existem vizinhança* U *de* x *e* V *de* y *tais que* $U \cap V = \varnothing$.

O resultado a seguir contém os resultados sobre redes que serão usados nesta tese. O leitor pode encontrar a sua demonstração em (BOTELHO *et al.*, 2012).

Teorema B.0.6 *Sejam* X, Y *espaços topológicos,* $A \subset X$ *e* $x \in X$.

(a) $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *em* A *tal que* $x_\lambda \to x$.

(b) A *é fechado se, somente se, para toda rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *em* A *com* $x_\lambda \to x$ *tenha-se* $x \in A$.

(c) Uma função $f : X \to Y$ *é contínua se, e somente se,* $f(x_\lambda) \to f(x)$ *para toda rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *em* X *tal que* $x_\lambda \to x \in X$.

(d) X *é um espaço Hausdorff se, e somente se, toda rede em* X *converge para no máximo um elemento de* X.

Teorema B.0.7 *Um subconjunto* K *de um espaço topológico* X *é compacto se, e somente se, toda rede em* K *possui uma sub-rede convergente para um ponto de* K.

Estudaremos agora a topologia fraca em um espaço localmente convexo. Para isso, começaremos relembrando a definição de dual.

Definição B.0.8 *Seja* X *um espaço localmente convexo Hausdorff sobre* $\mathbb{R}$. *O espaço dual de* X, *denotado por* $X^\star$, *é o espaço dos funcionais lineares contínuos* $f : X \to \mathbb{R}$. *O dual algébrico, denotado por* $X^\sharp$, *é o espaço formado por todos os funcionais lineares* $f : X \to \mathbb{R}$, *contínuo ou não.*

Usaremos a definição de dual para definir a topologia fraca em X. Para isto, usaremos a seguinte proposição que foi extraída de (BOTELHO *et al.*, 2012).

Proposição B.0.9 *Seja* Φ *a coleção de subconjuntos de* X *que podem ser escritos como interseção finita de conjuntos da forma* $f^{-1}(A)$ *onde* $A \subset \mathbb{R}$ *é aberto e* $f \in X^\star$. *Então existe uma topologia* $\sigma(X,X^\star)$ *em* X *que tem* Φ *como base, isto é, os elementos de* $\sigma(X,X^\star)$ *são uniões de elementos de* Φ.

Definição B.0.10 *Chamaremos de topologia fraca de* X *a topologia* $\sigma(X,X^\star)$ *da proposição acima.*

A seguinte proposição fornece as principais propriedades da topologia fraca.

Proposição B.0.11 *Seja* X *um espaço localmente convexo. Então:*

(a) Para cada $f \in X^\star$, $f : (X,\sigma(X,X^\star)) \to \mathbb{R}$ *é contínuo.*

(b) $\sigma(X,X^\star)$ *é a interseção de todas as topologias de* X *tais que* $f \in X^\star$.

(c) Seja $(x_\lambda)_\lambda$ *uma rede em* X. *Então* $x_\lambda \to x$ *em* $\sigma(X,X^\star)$ *se, e somente se,* $f(x_\lambda) \to f(x)$ *para todo* $f \in X^\star$.

(d) *A topologia* $\sigma(X, X^{\star})$ *é de Hausdorff.*

(e) *Sejam Z um espaço topológico e* $\psi : Z \to (X, \sigma(X, X^{\star}))$ *uma função. Então* ψ *é contínua se, e somente se,* $f \circ \psi : Z \to \mathbb{R}$ *é contínua para todo* $f \in X^{\star}$.