UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thadeu Ribeiro Benicio Milfont

FÓRMULA INTEGRAL PARA CARACTERIZAR HIPERSUPERFÍCIES EM UMA ESFERA UNITÁRIA

FORTALEZA
2017

THADEU RIBEIRO BENICIO MILFONT

FÓRMULA INTEGRAL PARA CARACTERIZAR HIPERSUPERFÍCIES EM UMA ESFERA UNITÁRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria Diferencial.
Orientador: Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa

FORTALEZA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M588f Milfont, Thadeu Ribeiro Benício
Fórmula integral para caracterizar hipersuperfícies em uma esfera unitária / Thadeu Ribeiro Benício Milfont. – 2014.
42 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Geometria Diferencial
Orientação: Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa.

1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. I. Título.

CDD 516.36

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fórmula Integral para Caracterizar Hipersuperfícies em uma Esfera Unitária

Thadeu Ribeiro Benício Milfont

*Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se à disposição na biblioteca da referida Universidade.*

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 26 de fevereiro de 2010.

Banca Examinadora

Prof. João Lucas Marques Barbosa
UFC
(Orientador)

Prof. Antonio Gervasio Colares
UFC

Prof. Juscelino Pereira Silva
UFPI

Dedico este trabalho a minha família, aos meus amigos e a Érika uma grande companheira.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a minha mãe e a todos os meus familiáres, pelo apoio em toda minha trajetória de vida, e pela admiração que eu sinto todos terem por mim. Gostaria também de citar alguns colegas que me ajudaram de várias maneiras, na preparação desse trabalho e durante o mestrado, Antônio Edinardo, Tiago Veras, Tiago Alencar, Flavio frança, Cícero Aquino, Marcos Antônio, João Francisco, José Nazareno, Thiago Cruz, Jonatan, Jocel, Adam, Halisson, Ernani e Kelton, todos são grandes amigos.

Ao professor João Lucas, pela paciência e incentivo durante todo o trabalho. À Andrea, secretária da pós-Graduação, pela atenção e competência durante esse tempo de convivência. E à Capes, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, consideraremos hipersuperfícies de rotação compactas M^n em uma esfera unitária $S^{n+1}(1)$, e apresentaremos algumas fórmulas integrais as quais são usadas para caracterizar os toros $S^1(\sqrt{k/n})\times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$.

Palavras-chave: Geometria Diferencia; Superfícies Mínimas; Caracterização de Toros.

ABSTRACT

In this work, We consider compact rotational hypersurfaces M^n in the unit sphere $S^{n+1}(1)$, obtaining some integral formulas and then applying these integral formulas to characterize the torus $S^1(\sqrt{k/n})\times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$.

Keywords: Differential Geometry; Minimal Surfaces; Characterize the Torus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As superfícies mínimas estão entre os objetos mais estudados na geometria diferencial. Elas são caracterizadas por $H = 0$, onde H é a curvatura média da hipersuperfície. Recentemente, algumas de suas propriedades têm sido generalizadas para hipersuperfícies k-mínimas ($H_k = 0$), onde H_k é a k-ésima curvatura da hipersuperfície. São exemplos de hipersuperfícies k-mínimas em $S^{n+1}(1)$:

$$M_{k,n-k} = S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n}), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

as quais possuem duas curvaturas principais constantes e distintas, que são

$$\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = \sqrt{k/(n-k)}, \quad \lambda_n = -\sqrt{(n-k)/k}.$$

Para ver isto considere a imersão

$$x : S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow S^{n+1}(1).$$

Dado $P = (p_1, p_2) \in S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$, o vetor normal unitário em P é dado por:

$$N = \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} p_1, \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}} p_2 \right).$$

Podemos identificar de forma natural o plano tangente de $M_{k,n-k}$ em P, ou seja $T_P M_{k,n-k}$, com o produto $T_{p_1} S^1 \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times T_{p_2} S^{n-1} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$. Dado $V = (v_1, v_2) \in T_P M_{k,n-k}$, com $v_1 \in T_{p_1} S^1 \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right)$ e $v_2 \in T_{p_2} S^{n-1} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$, vamos mostrar que $\langle N, V \rangle = 0, \langle N, P \rangle = 0$ e $\|N\| = 1$, de fato,

- $\langle N, V\rangle = 0$

$$\begin{aligned}
\langle N, V\rangle &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}}p_1, \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}p_2\right), (v_1, v_2)\right\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\langle p_1, v_1\rangle + \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}\langle p_2, v_2\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde $\langle p_1, v_1\rangle = \langle p_2, v_2\rangle = 0$.

- $\langle N, P\rangle = 0$

$$\begin{aligned}
\langle N, P\rangle &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}}p_1, \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}p_2\right), (p_1, p_2)\right\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\langle p_1, p_1\rangle + \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}\langle p_2, p_2\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\|p_1\|^2 + \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}\|p_2\|^2 \\
&= -\sqrt{\frac{n-k}{k}}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2 + \sqrt{\frac{k}{n-k}}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)^2 \\
&= -\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} + \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\|N\| = 1$

$$
\begin{aligned}
\|N\|^2 &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} p_1, \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}} p_2 \right), \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} p_1, \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}} p_2 \right) \right\rangle \\
&= \left(\frac{n-k}{k} \right) \|p_1\|^2 + \left(\frac{k}{n-k} \right) \|p_2\|^2 \\
&= \left(\frac{n-k}{k} \right) \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right)^2 + \left(\frac{k}{n-k} \right) \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)^2 \\
&= \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Agora, considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_{k,n-k}$, satisfazendo $\alpha(0) = P$ e $\dot{\alpha}(0) = V$, onde o ponto denota a derivada com relação a t. Tal curva é dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, onde

$$
\alpha_1(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^1(\sqrt{k/n}), \qquad \alpha_2(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^{n-1}(\sqrt{n-k/n})
$$

e com isso temos

$$
(N \circ \alpha)(t) = \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \alpha_1(t), \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}} \alpha_2(t) \right).
$$

Desse modo

$$
dN_P(V) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t)|_{t=0} =
$$

$$
= \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \dot{\alpha}_1(0), \frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}} \dot{\alpha}_2(0) \right),
$$

e para $V = (v_1, 0)$, obtemos:

$$
dN_P(V) = \left(-\frac{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \dot{\alpha}_1(0), 0 \right) = -\sqrt{\frac{n-k}{k}} (v_1, 0) = -\sqrt{\frac{n-k}{k}} V.
$$

Do mesmo modo, para $V=(0,v_2)$, temos:

$$dN_P(V)=\left(0,\frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{n-k}{n}}}\dot{\alpha}_2(0)\right)=\sqrt{\frac{k}{n-k}}(0,v_2)=\sqrt{\frac{k}{n-k}}V.$$

Portanto, temos que as curvaturas principais de $M_{k,n-k}$, são dadas por

$$\lambda_1=...=\lambda_{n-1}=\sqrt{k/(n-k)},\quad \lambda_n=-\sqrt{(n-k)/k}.$$

Por definição, temos que a curvatura média de M é

$$C_n^k H_k=\textstyle\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}...\lambda_{i_k},$$

onde

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Daí, temos que $C_n^k H_k=C_{n-1}^{k-1}\lambda^{k-1}\mu+C_{n-1}^k\lambda^k$, onde $\lambda=\lambda_i$, para $i=1,...,n-1$ e $\mu=\lambda_n$. Dessa forma, como $\lambda=\sqrt{\dfrac{k}{n-k}},\quad \mu=-\sqrt{\dfrac{n-k}{k}}$, segue que,

$$\begin{aligned}
C_n^k H_k &= C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k-1}{2}}\left[-\left(\frac{n-k}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+C_{n-1}^k\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}\\
&= C_{n-1}^{k-1}\frac{\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[-\left(\frac{n-k}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+C_{n-1}^k\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}\\
&= \left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}\left(-C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{n-k}{k}\right)+C_{n-1}^k\right)\\
&= \left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}\left(-C_{n-1}^k+C_{n-1}^k\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

assim temos $H_k\equiv 0$, além disto, o quadrado da norma da segunda forma fundamental S, satisfaz

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \\
&= (n-1)\left(\sqrt{\frac{k}{n-k}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^2 \\
&= (n-1)\frac{k}{n-k} + \frac{n-k}{k} \\
&= \frac{nk^2 - k^2 + n^2 - 2nk + k^2}{k(n-k)} \\
&= \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}.
\end{aligned}
$$

Observação:

(1) Quando $k = 1$, nós temos: $H_1 = H = 0, \quad S = n.$

(2) Quando $k = 2$, nós temos: $H_2 = 0, \quad S = \dfrac{n^2}{2(n-2)}$

J.Simons em [9], provou a seguinte fórmula bem conhecida:

Teorema 1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional mínima compacta $(H_1 = 0)$ em $S^{n+1}(1)$, então*

$$\int_M S(n-S)dV \leq 0. \tag{1}$$

Em [4], Li obteve alguns resultados estudando os operadores auto-adjuntos de Cheng-Yau's e algumas estimativas novas. Dos resultados de Li, é possível deduzir-se o seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja M uma hipersuperfície compacta com curvatura escalar constante $n(n-1)$ ($H_2 = 0$) em $S^{n+1}(1)$, então*

$$\int_M S\left\{\frac{n^2}{2(n-2)} - S\right\} dV \leq 0. \tag{2}$$

Os teoremas $(1.1), (1.2)$ e o exemplo anterior, sugerem o seguinte problema,

Problema: *Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional k-mínima em $S^{n+1}(1)$, será verdade que*

$$\int_M S\left\{\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} - S\right\} dV \leq 0 \ ? \tag{3}$$

Guoxin Wei, solucionou completamente este problema no trabalho [11]. Nesta dissertação, apresentaremos uma versão desse trabalho. E veremos que, mesmo para casos especiais (as hipersuperfícies de rotação), (3) não é verdadeiro para $k > 3$. De fato, vale o seguinte resultado:

Teorema 3 *Seja M uma hipersuperfície de rotação compacta n-dimensional k-mínima em $S^{n+1}(1)$. Se $k = 3$ e $n > 6$ ou $3 \leq k \leq n$, então o quadrado da norma S da segunda forma fundamental de M satisfaz:*

$$\int_M S\left\{\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} - S\right\} dV \geq 0, \tag{4}$$

e

$$\int_M \left\{S^2 - \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}\right]^2\right\} dV \leq 0, \tag{5}$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se M é isométrica ao produto Riemanniano $S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$, onde H_k é a k-ésima curvatura de M.

2 CÁLCULOS PRELIMINARES

Seja M uma hipersuperfície de $S^{n+1}(1)$, invariante pelo grupo ortogonal $O(n)$, que é um subgrupo das isometrias do $S^{n+1}(1)$. Estamos considerando $R^{n+2} = R^n \times R^2$, e $R^3 = R \times R^2 \subset R^n \times R^2$. Seja α uma parametrização de uma curva perfil em $S^2(1)$, $\alpha : I \to S^2(1) \subset R^3$, dada por $y_1 = y_1(s) \geq 0$, $y_{n+1} = y_{n+1}(s)$ e $y_{n+2} = y_{n+2}(s)$, vamos supor tal curva parametrizada pelo comprimento de arco. E seja $\varphi : R^{n-1} \to S^{n-1}(1) \subset R^n$ onde, $\varphi(t_1, ..., t_{n-1}) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ uma parametrização ortogonal da esfera unitária $S^{n-1}(1)$, em particular temos que $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ e $\langle \varphi_i, \varphi \rangle = 0$. Em um ponto, podemos supor $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ (onde $\delta_{ij} = 1, \text{se } i = j$ e $\delta_{ij} = 0, \text{se } i \neq j$). Segue-se que a hipersuperfície de rotação $x = (y_1(s)\varphi, y_{n+1}(s), y_{n+2}(s))$ satisfaz,

$$\langle x, x \rangle = y_1^2 \langle \varphi, \varphi \rangle + y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 = 1.$$

E tem-se

$$x_s = (\dot{y}_1 \varphi, \dot{y}_{n+1}^2, \dot{y}_{n+2}), \text{ e } \quad x_{t_i} = (y_1 \varphi_i, 0, 0),$$

as quais satisfazem:

$$\langle x_s, x_s \rangle = \dot{y}_1^2 \langle \varphi, \varphi \rangle + \dot{y}_{n+1}^2 + \dot{y}_{n+2}^2 = 1,$$

$$\langle x_s, x_{t_i} \rangle = y_1 \dot{y}_1 \langle \varphi, \varphi_i \rangle = 0,$$

$$\langle x_{t_i}, x_{t_j} \rangle = y_1^2 \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle.$$

Onde o ponto denota a derivada com respeito a s. Segue-se que x é uma imersão, pois a matriz da diferencial tem posto máximo.

Como $\alpha(s) = (y_1(s), y_{n+1}(s), y_{n+2}(s))$ é uma curva na esfera $S^2(1)$, podemos escrever,

$$y_1(s) = \cos r(s), \ y_{n+1}(s) = \text{sen} r(s) \cos \theta(s), \ y_{n+2} = \text{sen} r(s) \text{sen} \theta(s). \quad (6)$$

Segue-se daí que,

$$\dot{y}_1(s) = -\text{sen}r(s)\dot{r},$$

$$\dot{y}_{n+1}(s) = \cos r(s)\cos\theta(s)\dot{r} - \text{sen}r(s)\text{sen}\theta(s)\dot{\theta},$$

$$\dot{y}_{n+2}(s) = \cos r(s)\text{sen}\theta(s)\dot{r} + \text{sen}r(s)\cos\theta(s)\dot{\theta},$$

como $\dot{y}_1^2 + \dot{y}_{n+1}^2 + \dot{y}_{n+2}^2 = 1$ por hipótese, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 &= (-\text{sen}r(s)\dot{r})^2 + (\cos r(s)\cos\theta(s)\dot{r} - \text{sen}r(s)\text{sen}\theta(s)\dot{\theta})^2 \\ &\quad +(\cos r(s)\text{sen}\theta(s)\dot{r} + \text{sen}r(s)\cos\theta(s)\dot{\theta})^2 \\ &= \text{sen}^2 r(s)\dot{\theta}^2 + \cos^2 r(s)\dot{r}^2 + \text{sen}^2 r(s)\dot{r}^2 \\ &= \text{sen}^2 r(s)\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

portanto $\dot{r}^2 \leq 1$. Observando-se que

$$1 \geq \dot{r}^2 = \frac{\text{sen}^2 r(s)\dot{r}^2}{\text{sen}^2 r(s)} = \frac{(-\text{sen}r(s)\dot{r}^2)}{1-\cos^2 r(s)} = \frac{\dot{y_1}^2}{1-y_1^2},$$

e levando-se em conta que $y_1^2 \leq 1$, conclui-se que

$$\dot{y}_1^2 + y_1^2 \leq 1. \tag{8}$$

Fazendo $f(s) = y_1(s)$, do Carmo e Dajczer provaram o seguinte lema.

Lema 1 *[2]Seja M^n uma hipersuperfície de rotação do $S^{n+1}(1)$. Então as curvaturas principais λ_i de M^n são,*

$$\lambda_i = \lambda = -\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f} \tag{9}$$

para $i = 1, ..., n-1$, e

$$\lambda_n = \mu = \frac{\ddot{f}+f}{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}. \tag{10}$$

Demonstração: Para encontrarmos as curvaturas principais de M^n, precisamos primeiro achar o vetor normal N a M^n. Para isso, observemos que os vetores tangentes a M^n num ponto $P = (y_1(s)\varphi, y_{n+1}(s), y_{n+2}(s)) \in M^n$, são dados por, $x_s = (\dot{y}_1\varphi, \dot{y}_{n+1}, \dot{y}_{n+2})$ e $x_{t_i} = (y_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}, 0, 0)$. O vetor normal procurado deve satisfazer, $\langle N, x_s\rangle = 0$, $\langle N, x_{t_i}\rangle = 0$, $\langle N, P\rangle = 0$, e ainda mais $\|N\| = 1$. As seguintes identidades decorrem das definições de y_{n+1}, y_{n+2}, e de y_1 e $\dot{y}_1$,

1. $y_{n+1} = \sqrt{1-y_1^2}\cos\theta$
2. $y_{n+2} = \sqrt{1-y_1^2}\,\text{sen}\,\theta$
3. $\dot{\theta} = \dfrac{\sqrt{1-y_1^2-\dot{y}_1^2}}{1-y_1^2}$

Seja $\alpha(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2(1)$, a curva dada por $\alpha(s) = (y_1(s), y_{n+1}(s), y_{n+2}(s))$. O vetor

$$\bar{N} = \dot{\alpha}(s) \times \alpha(s) = (\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1}, y_1\dot{y}_{n+2} - \dot{y}_1 y_{n+2}, \dot{y}_1 y_{n+1} - y_1\dot{y}_{n+1}),$$

é tal que, $\langle \bar{N}, \dot{\alpha}\rangle = 0$ e $\langle \bar{N}, \alpha\rangle = 0$ e como $\|\dot{\alpha}\| = 1$ e $\|\alpha\| = 1$, tem-se que $\|\bar{N}\| = 1$. A rotação de $\bar{N}$ pela ação de $O(n)$ é $N = (\varphi(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1}), (y_1\dot{y}_{n+2} - \dot{y}_1 y_{n+2}), (\dot{y}_1 y_{n+1} - y_1\dot{y}_{n+1}))$, é imediato verificar que $\|N\| = 1$, $\langle N, x_s\rangle = 0$, $\langle N, P\rangle = 0$, e que $\langle N, x_{t_i}\rangle = 0$ e portanto N é o vetor normal desejado.

Agora, note que $\dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2} = (\varphi\ddot{y}_1, \ddot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+2})$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial s\partial t_j} = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_j}\dot{y}_1, 0, 0\right)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t_i\partial t_j} = \left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t_i\partial t_j}y_1, 0, 0\right)$. Observe que $\langle N_s, x_{t_i}\rangle = -\langle N, x_{t_{is}}\rangle = 0$ para todo i e, portanto, N_s é paralelo a x_s. Observe também que $\langle N_{t_i}, x_s\rangle = 0$ para todo i e $\langle N_{t_i}, x_{t_j}\rangle = -\langle N, x_{t_i t_j}\rangle = 0$ se $i \neq j$, pois $\langle \varphi, \varphi_{ij}\rangle = 0$ se $i \neq j$, assim N_{t_i} é paralelo a x_{t_i}. Assim, as curvas coordenadas são linhas de curvatura. E as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas t_i, são dadas por $\lambda_i = \lambda = \dfrac{\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, N_{t_i}\rangle}{\|\frac{\partial x}{\partial t_i}\|^2}$, pois $S_N(\frac{\partial}{\partial t_i}) = -(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} N)^T = -\text{proje}_{\frac{\partial}{\partial t_i}} N_{t_i} = -\dfrac{\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, N_{t_i}\rangle}{\|\frac{\partial x}{\partial t_i}\|^2}\dfrac{\partial x}{\partial t_i}$ onde,

- $N_{t_i} = (\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1}), 0, 0)$
- $x_{t_i} = (y_1\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, 0, 0)$
- $\|x_{t_i}\|^2 = \langle x_{t_i}, x_{t_i}\rangle = y_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}^2$

assim $\lambda_i = \lambda = \dfrac{(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1})}{y_1}$, e utilizando as identidades 1, 2 e 3 dadas acima, temos que $\lambda_i = \lambda = -\dfrac{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}{y_1}$.

A curvatura principal ao longo da curva coordenada s, é dada por $\mu = \langle \frac{\partial x}{\partial s}, N_s\rangle$, pois $S_N(\frac{\partial}{\partial s}) = -(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} N)^T = -\text{proje}_{\frac{\partial}{\partial s}} N_s = -\dfrac{\langle \frac{\partial x}{\partial s}, N_s\rangle}{\|\frac{\partial x}{\partial s}\|^2}\dfrac{\partial x}{\partial s}$ onde

- $N_s = (\varphi(\ddot{y}_{n+1}y_{n+2} - \ddot{y}_{n+2}y_{n+1}), (\ddot{y}_{n+2}y_1 - \ddot{y}_1 y_{n+2}), (\ddot{y}_1 y_{n+1} - \ddot{y}_{n+1}y_1))$
- $x_s = (\dot{y}_1\varphi, \dot{y}_{n+1}, \dot{y}_{n+2})$
- $\|x_s\|^2 = 1$

assim, $\mu = (\dot{y}_1\ddot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_1\ddot{y}_{n+2}y_{n+1} + \dot{y}_{n+1}\ddot{y}_{n+2}y_1 - \ddot{y}_1\dot{y}_{n+1}y_{n+2} + \dot{y}_{n+2}\ddot{y}_1 y_{n+1} - \dot{y}_{n+2}\ddot{y}_{n+1}y_1)$, e utilizando as identidades 1, 2 e 3 dadas acima, temos que $\lambda_n = \mu = \dfrac{\ddot{y}_1 + y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}$.

$\square$

A k-ésima curvatura média H_k, da hipersuperfície M, é definida por

$$C_n^k H_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}, \tag{11}$$

onde $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$, e $\lambda_i' s$ são as curvaturas principais de M. Se M é uma hipersuperfície de rotação k-mínima com $(k < n)$ em $S^{n+1}(1)$, então,

$$0 = C_n^k H_k = C_{n-1}^{k-1} \lambda^{k-1} \mu + C_{n-1}^k \lambda^k.$$

Isto é,

$$\lambda^{k-1}\{(n-k)\lambda + k\mu\} = 0. \tag{12}$$

Substituindo (9) e (10) em (12), nós temos o seguinte resultado, de Oscar Palmas [8].

Lema 2 *[8]A hipersuperfície de rotação M^n em $S^{n+1}(1)$ é k-mínima, ou seja, tem $H_k = 0$ $(k < n)$ se e somente se $f = y_1$ satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$(n-k)(1 - f^2 - \dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} - k(1 - f^2 - \dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}}(\ddot{f} + f)f = 0. \tag{13}$$

Demonstração: Temos que

$$
\begin{aligned}
H_k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^{k-1}\{(n-k)\lambda + k\mu\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f}\right)^{k-1} \\
&\quad \left\{(n-k)\left(-\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f}\right) + k\left(\frac{\ddot{f}+f}{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}\right)\right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n-k)\left(-\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f}\right)^{k} \\
&\quad +k\left(-\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f}\right)^{k-1}\left(\frac{\ddot{f}+f}{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad (n-k)\left[\frac{(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}}}{(-f)^k}\right] + \frac{k(\ddot{f}+f)}{(-f)^{k-1}}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \quad (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} + \frac{(-f)^k}{(-f)^{k-1}}k(\ddot{f}+f)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \quad (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} - fk(\ddot{f}+f)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}} = 0
$$

□

A equação (13), é equivalente a integral de primeira ordem

$$
f^{n-k}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} = C, \tag{14}
$$

onde C é uma constante.

De fato, derivando (14) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}(f^{n-k}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}}) \\
0 &= (n-k)f^{n-k-1}\dot{f}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} + f^{n-k}\frac{k}{2}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}-1}(-2f\dot{f}-2\dot{f}\ddot{f}) \\
0 &= \dot{f}(n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} + f(-2\dot{f})\frac{k}{2}(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}}(f+\ddot{f}) \\
0 &= (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} - fk(f+\ddot{f})(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}}.
\end{aligned}$$

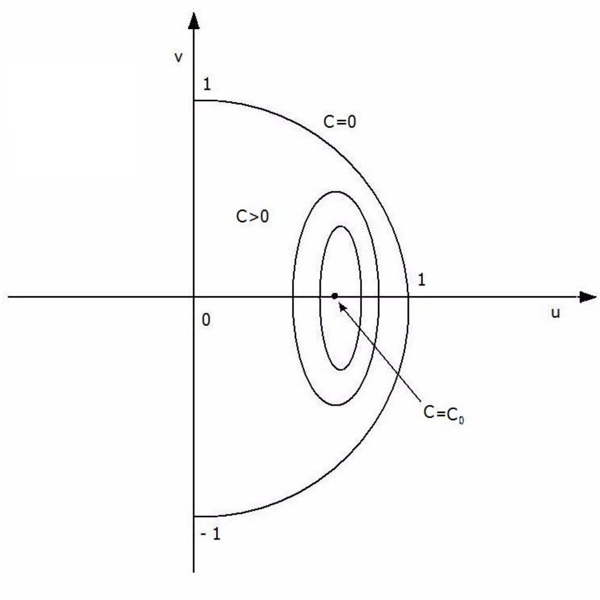

Fig. 1. Curvas de nivel para C≥0.

A equação (14) nos diz que a solução local f de (13), junto com sua primeira derivada é um subconjunto, denotado por $(f,\dot{f})$, de uma curva de nível da função G_k, definida por

$$G_k(u,v) = u^{n-k}(1-u^2-v^2)^{\frac{k}{2}}, \tag{15}$$

com $u > 0$ e $u^2+v^2 \leq 1$. A figura 1 mostra as curvas de nível da função $G_k = C$, no semi-plano aberto $\{(u,v)|u>0\}$. Onde cada curva é a união suave dos dois gráficos

$$v = \pm\sqrt{1 - u^2 - \left(\frac{C}{u^{n-k}}\right)^{\frac{2}{k}}}, \tag{16}$$

exceto para o nível C_0 dado por (15). A curva de nível $G_k = C_0$, consiste de um único ponto crítico de G_k, que está no eixo horizontal, como pode ser visto de

$$\nabla G_k(u, v) = u^{n-k-1}(1 - u^2 - v^2)^{\frac{k-2}{2}}((n-k)(1-v^2) - nu^2, -kuv) \tag{17}$$

onde $C_0 = G_k(f_0, \dot{f}_0)$, com $f_0 = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$ e $\dot{f}_0 = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\nabla G_k\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}, 0\right) &= \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)^{n-k-1}\left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)\right)^{\frac{k-2}{2}} \\
&\quad \left((n-k) - n\left(\frac{n-k}{n}\right), 0\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)^{n-k-1}\left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)\right)^{\frac{k-2}{2}} \\
&\quad (n - k - n + k, 0) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

o que mostra que $(f_0, \dot{f}_0)$ é um ponto crítico de G_k.

Para a solução constante $f = f_0$ de (13), uma em que $f_0^2 = \dfrac{n-k}{n}$, substituindo em (14), que é equivalente a (13), teremos

$$\begin{aligned}
C_0 &= (f_0^2)^{\frac{n-k}{2}}(1 - f_0^2 - \dot{f}_0^2)^{\frac{k}{2}} \\
&= \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{2}}\left[1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)\right]^{\frac{k}{2}} \\
&= \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}},
\end{aligned}$$

essa solução da equação (13), corresponde ao produto Riemanniano $S^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Para $C = 0$, a curva de nível $u^2+v^2 = 1$ é um semi-círculo. Para $C \neq 0$, nós podemos obter facilmente que as curvas de nível são curvas fechadas no semi-plano aberto (de fato, na região semi-circular, veja figura 1).

Nós consideraremos a folhiação do semi-plano aberto, pelas cuvas de nível $G_k = C$. Onde G_k tem um máximo em C_0, $C \in [0, C_0]$. Claramente, qualquer curva em um nível intermediário K é compacta, e a solução associada $r(s)$, realiza o mínimo em um único ponto $r_1 > 0$.

Agora nós podemos considerar dois casos:

Caso 1. $C = 0$.

$C = 0$ temos uma n-esfera totalmente geodésica. De fato, de $C = 0$ e da equação (14), temos $f^2 + \dot{f}^2 = 1$. Integrando $f^2 + \dot{f}^2 = 1$ com $f(0) = 0$, obtemos $f = \operatorname{sen}(s)$ e $\theta = \text{const.}$, de modo que, a curva perfil é um grande círculo, que gera uma n-esfera totalmente geodésica.

Caso 2. $C \in (0, C_0]$.

Se $C \in (0, C_0]$, então temos

$$f^2 + \dot{f}^2 < 1, \quad 0 < f < 1. \tag{18}$$

E neste caso, temos claramente duas curvaturas principais distintas, que são, $\lambda \neq \mu$. De fato, se $\lambda = \mu$, então podemos ver de (9), (10) e (18) que

$$-(\ddot{f} + f)f = 1 - f^2 - \dot{f}^2, \tag{19}$$

então das equações (13) e (18), obtemos que

$$(n-k)(1 - f^2 - \dot{f}^2) - k(\ddot{f} + f)f = 0, \tag{20}$$

pois de (13), temos

$$\begin{aligned} (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}} - k(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k-2}{2}}(\ddot{f}+f)f &= 0 \\ (1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}-1}[(n-k)(1-f^2-\dot{f}^2) - k(\ddot{f}+f)f] &= 0 \end{aligned}$$

como $(1-f^2-\dot{f}^2)^{\frac{k}{2}-1} \neq 0$, obtemos

$$(n-k)(1-f^2-\dot{f}^2) - k(\ddot{f}+f)f = 0,$$

e por (20) e (19), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2) - k(\ddot{f}+f)f \\ 0 &= (n-k)(1-f^2-\dot{f}^2) + k(1-f^2-\dot{f}^2) \\ 0 &= n(1-f^2-\dot{f}^2) - k(1-f^2-\dot{f}^2) + k(1-f^2-\dot{f}^2) \\ 0 &= n(1-f^2-\dot{f}^2). \end{aligned} \tag{21}$$

O que está em contradição por (18). Isso completa a nossa prova.

Finalmente, introduziremos o operador auto-adjunto de Cheng-Yau's. Seja M uma hipersuperfície n-dimensional compacta em $S^{n+1}(1)$. Para todo $p \in M$, nós escolhemos uma base ortonormal $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ no $S^{n+1}(1)$ em torno de p, tal que $e_1, ..., e_n$ sejam tangentes a M. Tomando o dual correspondente $\omega_1, ..., \omega_n, \omega_{n+1}$. Nesse trabalho, utilizaremos as seguintes notações para os índices:

$$1 \leq A, B, C \leq n+1; \quad 1 \leq i, j, k \leq n; \quad 1 \leq a, b, c \leq n-1.$$

As equações de estrutura do $S^{n+1}(1)$, são [5]

$$d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} = \omega_{BA},$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \omega_A \wedge \omega_B.$$

Restrito a M, temos $\omega_{n+1} = 0$, deste modo

$$0 = d\omega_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i, \tag{22}$$

do lema de Cartan, obtemos

$$\omega_{in+1} = \sum_j h_{ij}\omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \tag{23}$$

Então obtemos as equações de estrutura de M, como segue:

$$d\omega_i = \sum_i \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} = \omega_{ji}, \tag{24}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \tag{25}$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica induzida em M.

As equações de Gauss são

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{26}$$

$$n(n-1)r = n(n-1) + n^2H^2 - S, \tag{27}$$

onde $r = \dfrac{\sum_{i,j} R_{ijij}}{n(n-1)}$ é a curvatura escalar normalizada, $H = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_i h_{ii}$ é a curvatura média e, $S = \displaystyle\sum_{i,j} h_{ij}^2$ é a norma ao quadrado da segunda forma fundamental de M.

As equações de Codazzi são

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \tag{28}$$

onde a derivada covariante de h_{ij}, é definida por

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}. \tag{29}$$

A derivada covariante segunda de h_{ij}, é definida por,

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{30}$$

Pela diferencial exterior de (29), nós temos a seguinte identidade de Ricci,

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj} R_{mjkl} + \sum_m h_{im} R_{mjkl}. \tag{31}$$

Para uma função de classe C^2, definida em M, o gradiente e a hessiana de (f_{ij}), são definidos por,

$$df = \sum_i f_{,i}\, \omega_i, \quad \sum_j f_{,ij}\, \omega_j = df_{,i} + \sum_j f_{,j}\, \omega_{ji}, \tag{32}$$

onde a vírgula denota a derivada da função na direção indicada.

Deste modo, o operador $\Box$ é definido por,

$$\Box f = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{,ij}\,. \tag{33}$$

O operador diferencial $\Box$, foi introduzido e usado por Cheng e Yau em [1], Li em [4] para o estudo de hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante em $S^{n+1}(1)$, respectivamente. De [1], segue que o operador $\Box$ é alto-adjunto.

3 HIPERSUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO NO CASO 2

No Caso 2, sabemos do capitulo 2, que M tem duas curvaturas principais distintas, que são,

$$\lambda \neq \mu. \tag{34}$$

De (18) e (9), podemos obter que

$$\lambda \neq 0. \tag{35}$$

Podemos ver de (12) e (35) que,

$$(n-k)\lambda + k\mu = 0. \tag{36}$$

Em [7], Otsuki provou o seguinte resultado,

Lema 3 *(p. 150 de [7].)Seja M uma hipersuperfície n-dimensional compacta na esfera unitária $S^{n+1}(1)$ tal que a multiplicidade das curvaturas principais são todas constantes. Então o espaço de distribuição dos vetores principais correspondentes a toda curvatura principal é completamente integrável. Em particular se a multiplicidade de uma curvatura principal é maior que* 1*, então esta curvatura principal é constante em toda subvariedade integral do correspondente espaço de distribuição dos vetores principais.*

Pelo **Lema 3** e (36), temos

$$\lambda_{,1} = ... = \lambda_{,n-1} = 0 \quad \mu_{,1} = ... = \mu_{,n-1} = 0, \tag{37}$$

a vírgula denota a derivada da curvatura na direção indicada.
Utilizando (29), obtemos

$$h_{ijk}\omega_k = \delta_{ij} d\lambda_j + (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij}. \tag{38}$$

Resumindo o argumento acima, obtemos

$$h_{ijk} = 0, \quad se \quad i \neq j, \quad \lambda_i = \lambda_j, \tag{39}$$

$$h_{aab} = 0, \quad h_{aan} = \lambda_{,n} \,, \tag{40}$$

$$h_{nna} = 0, \quad h_{nnn} = \mu_{,n} \,. \tag{41}$$

Em seguida, demonstraremos o lema chave, para obtermos o resultado principal desse trabalho.

Lema 4 *Seja M uma hipersuperfície n-dimesional k-mínima em $S^{n+1}(1)(n \geq 3, k < n)$ e com duas curvaturas principais distintas e assuma que uma das curvaturas principais de M é simples. Então nós temos*

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{n^2(k-1)^2} | \bigtriangledown (nH)|^2. \tag{42}$$

Demonstração: Pelas hipóteses do lema, M tem duas curvaturas principais distintas e uma delas tem multiplicidade 1, ou seja ela é simples, assim denotaremos as curvaturas principais de M por $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = \lambda$, $\lambda_n = \mu$, então temos $(n-k)\lambda + k\mu = 0$.

Por um lado, usando (39), (40) e (41), temos

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \quad = \quad \sum_{a,b,c} h_{abc}^2 + 3\sum_{a,b} h_{abn}^2 + 3\sum_{a} h_{ann}^2 + h_{nnn}^2,$$

Observe que:

- Se $a = b$, temos por (40) que $h_{abc} = 0$, e se $a \neq b$ temos $\lambda_a = \lambda_b$, e por (39), temos também que $h_{abc} = 0$;

- Se $a = b$, temos por (40) que $h_{abn} = \lambda_{,n}$, e se $a \neq b$ temos $\lambda_a = \lambda_b$, e por (39), temos que $h_{abn} = 0$;

- Por (41), temos que $h_{ann} = 0$;

- Por (41), temos que $h_{nnn} = \mu,_n$.

assim, derivando a expressão (36), temos $(n-k)\lambda,_i + k\mu,_i$ e por (37), segue que $\mu,_n = \dfrac{-(n-k)\lambda,_n}{k}$, daí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= 3(n-1)(\lambda,_n)^2 + (\mu,_n)^2 \\
&= (3n-3)(\lambda,_n)^2 + \left(\frac{-(n-k)\lambda,_n}{k}\right)^2 \\
&= \frac{(3n-3)(\lambda,_n)^2k^2 + (n^2-2kn+k^2)\lambda,_n^2}{k^2} \\
&= \frac{(3n-3)k^2 + k^2 - 2kn + n^2}{k^2}(\lambda,_n)^2 \\
&= \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{k^2}(\lambda,_n)^2. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, podemos ver de (37) e (36) que

$$
\begin{aligned}
|\nabla(nH)|^2 &= \left|(n-1)\lambda,_n - \frac{(n-k)\lambda,_n}{k}\right|^2 \\
&= \left|\left\{(n-1) - \frac{(n-k)}{k}\right\}\lambda,_n\right|^2 \\
&= \left\{(n-1) - \frac{(n-k)}{k}\right\}^2(\lambda,_n)^2 \\
&= \left\{\frac{kn-k-n+k}{k}\right\}^2(\lambda,_n)^2 \\
&= \frac{n^2(k-1)^2}{k^2}(\lambda,_n)^2. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Assim de (44), temos que

$$
(\lambda,_n)^2 = |\nabla(nH)|^2\frac{k^2}{n^2(k-1)^2},
$$

substituindo em (43), concluímos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{k^2}|\nabla(nH)|^2 \frac{k^2}{n^2(k-1)^2} \\ &= \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{n^2(k-1)^2}|\nabla(nH)|^2.\end{aligned}$$

□

Finalmente, mencionamos um outro lema do mesmo autor, encontrado em ([10]).

Lema 5 *(teorema 1.2 do [10].)Se M é uma hipersuperfície compacta k-mínima n-dimensional conexa ($n \geq 3, k < n$) em $S^{n+1}(1)$ e com duas curvaturas principais distintas. Assuma que uma das curvaturas principais de M é simples (isto é, multiplicidade 1). Então o quadrado da norma S da segunda forma fundamental de M satisfaz*

$$\int_M \left\{ S - \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)} \right\} dV \leq 0 \tag{45}$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se M é isométrico ao produto Riemanniano $S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$ onde H_k é a k-ésima curvatura média de M.

4 PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL

Prova do Teorema 1.3. Do capítulo 2, nós temos dois casos a considerar:

Caso 1. M é uma n-esfera totalmente geodésica, isto é, $h_{ij} = 0$ e $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2 = 0$. E neste caso, nós podemos ver facilmente que (4) e (5) são verificados.

Caso 2. M tem duas curvaturas principais distintas λ e μ, além disso, $\lambda \neq 0$.

Da equação de Gauss, nós temos que

$$\begin{aligned} R_{anan} &= (\delta_{aa}\delta_{nn} - \delta_{an}\delta_{na}) + (h_{aa}h_{nn} - h_{an}h_{na}) \\ &= 1 + \lambda\mu, \end{aligned} \tag{46}$$

e segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_a R_{anan}(\lambda_a - \lambda_n)^2 + \frac{1}{2}\sum_a R_{nana}(\lambda_n - \lambda_a)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_a R_{anan}(\lambda_a - \lambda_n)^2 + \frac{1}{2}\sum_a R_{anan}(\lambda_a - \lambda_n)^2 \\ &= \sum_a R_{anan}(\lambda_a - \lambda_n)^2 \\ &= \sum_a (1 + \lambda_a\mu)(\lambda_a - \mu)^2 \\ &= (n-1)(1+\lambda\mu)(\lambda - \mu)^2. \end{aligned}$$

De (36), temos $\mu = -\dfrac{(n-k)\lambda}{k}$ assim, substituindo na igualdade acima temos,

$$
\begin{aligned}
&= (n-1)\left[1-\frac{(n-k)\lambda^2}{k}\right]\left[\lambda+\frac{(n-k)\lambda}{k}\right]^2 \\
&= (n-1)\left[1-\frac{(n-k)\lambda^2}{k}\right]\left[\lambda^2+\frac{2\lambda^2(n-k)}{k}+\frac{(n-k)^2\lambda^2}{k^2}\right] \\
&= \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1-\frac{\lambda^2(n-k)}{k}\right]\frac{k^2}{n^2}\left[\frac{k^2\lambda^2+2\lambda^2k(n-k)+(n-k)^2\lambda^2}{k^2}\right] \\
&= \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1-\frac{\lambda^2(n-k)}{k}\right]\frac{1}{n^2} \\
&\quad [k^2\lambda^2+2\lambda^2kn-2k^2\lambda^2+n^2\lambda^2-2\lambda^2kn+k^2\lambda^2] \\
&= \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1-\frac{\lambda^2(n-k)}{k}\right]\lambda^2. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Podemos ver facilmente que,

$$
\begin{aligned}
S &= (n-1)\lambda^2+\mu^2 \\
&= (n-1)\lambda^2+\left(-\frac{(n-k)\lambda}{k}\right)^2 \\
&= (n-1)\lambda^2+\frac{(n-k)^2\lambda^2}{k^2} \\
&= \frac{k^2(n\lambda^2-\lambda^2)+n^2\lambda^2-2nk\lambda^2+k^2\lambda^2}{k^2} \\
&= \frac{k^2n\lambda^2-k^2\lambda^2+n^2\lambda^2-2nk\lambda^2+k^2\lambda^2}{k^2} \\
&= \frac{n(k^2-2k+n)\lambda^2}{k^2}. \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Por um lado, usando (33) e (27), temos a seguinte equação

$$\begin{aligned}\Box(nH) &= \sum_{i,j}(nH\delta_{ij}-h_{ij})(nH)_{,ij}\\ &= \sum_{i}(nH\delta_{ii}-h_{ii})(nH)_{,ii}\\ &= (nH)\sum_{i}(nH)_{,ii}-\sum_{i}\lambda_i(nH)_{,ii}\\ &= (nH)\Delta(nH)-\sum_{i}\lambda_i(nH)_{,ii}\,. \qquad (I)\end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(nH)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i}(2(nH)(nH)_{,i})_{,i}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i}(2(nH)_{,i}(nH)_{,i})+(2(nH)(nH)_{,ii})\\ &= \sum_{i}(nH)_{,i}^2+\sum_{i}nH(nH)_{,ii}\\ &= \sum_{i}(nH)_{,i}^2+(nH)\Delta(nH).\end{aligned}$$

Daí temos

$$(nH)\Delta(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2-\sum_{i}(nH)^2{}_{,i}\,,$$

substituindo em (I), obtemos

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2-\sum_{i}(nH)^2{}_{,i}-\sum_{i}\lambda_i(nH)_{,ii}\,. \qquad (II)$$

De (27) teremos

$$n^2H^2 = n(n-1)r-n(n-1)+S.$$

Substituindo a expressão acima em (II) temos,

$$\begin{aligned}\Box(nH) &= \frac{1}{2}\Delta(n(n-1)r-n(n-1)+S)-\sum_{i}(nH)^2{}_{,i}-\sum_{i}\lambda_i(nH)_{,ii}\\ &= \frac{1}{2}n(n-1)\Delta r+\frac{1}{2}\Delta S-n^2|\nabla H|^2-\sum_{i}\lambda_i(nH)_{,ii}\,. \qquad (49)\end{aligned}$$

Por outro lado utilizando (28) e (31) temos:
Por definição, o laplaciano do tensor h_{ij} é dado por $\sum_k h_{ijkk}$, dessa forma podemos escrever,

$$\begin{aligned}\Delta(h_{ij}) &= \sum_k h_{ijkk}\\ &= \sum_k (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_k (h_{ikjk} - h_{ikkj})\\ &\quad + \sum_k (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \sum_k h_{kkij}.\end{aligned}$$

De (31), segue que,

$$\sum_k (h_{ikjk} - h_{ikkj}) = \sum_{m,k} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im}R_{mkjk}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta(h_{ij}) &= \sum_{m,k} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im}R_{mkjk}\\ &\quad + \sum_k (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_k (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \sum_k (h_{kk})_{,ij}\,.\end{aligned}$$

Usando (28), a igualdade acima fica da forma

$$\Delta(h_{ij}) = \sum_{m,k} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im}R_{mkjk} + \sum_k (h_{kk})_{,ij}\,.$$

Sabemos que $S = |h_{ij}|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2$, $\quad |\nabla h_{ij}|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$ e $tr(h_{ij}) = \sum_k h_{kk}$, e para encontrarmos uma expressão para $\frac{1}{2}\Delta S$, faremos,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta(\sum_{i,j} h_{ij}^2)\\ &= (\sum_{i,j,k} 2h_{ij}h_{ijk})_{,k}\\ &= \sum_{i,j,k} 2h_{ijk}^2 + \sum_{i,j,k} 2h_{ij}h_{ijkk}\\ \frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{ijkk}. \qquad (I)\end{aligned}$$

Agora, vamos desenvolver o termo $\sum_{i,j,k} h_{ij}h_{ijkk}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k} h_{ij}h_{ijkk} &= \sum_{i,j} h_{ij} \sum_{i,j,k} h_{ijkk} \\
&= \sum_{i,j} h_{ij}\Delta(h_{ij}) \\
&= \sum_{i,j} h_{ij}((\sum_{k} h_{kk})_{,ij} + \sum_{m,k} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im}R_{mkjk}) \\
&= \sum_{i,j} h_{ij}(\sum_{k} h_{kk})_{,ij} + \sum_{i,j,m,k} h_{ij}h_{mk}R_{mijk} + \sum_{i,j,m,k} h_{ij}h_{im}R_{mkjk}
\end{aligned}$$

como $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ segue que,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i} \lambda_i(nH)_{,ii} + \sum_{i,j,m,k} h_{ij}h_{mk}R_{mijk} + \sum_{i,j,m,k} h_{ij}h_{im}R_{mkjk} \\
&= \sum_{i} \lambda_i(nH)_{,ii} - \sum_{i,k} \lambda_i\lambda_k R_{ikik} + \sum_{i,k} \lambda_i^2 R_{ikik} \\
&= \sum_{i} \lambda_i(nH)_{,ii} + \sum_{i,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k)R_{ikik}. \quad (II)
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k)R_{ikik} &= \sum_{i,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k - \lambda_i\lambda_k + \lambda_k^2 + \lambda_i\lambda_k - \lambda_k^2)R_{ikik} \\
&= \sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik} + \sum_{i,k}(\lambda_i\lambda_k - \lambda_k^2)R_{ikik} \\
&= \sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik} - \sum_{i,k}(\lambda_k^2 - \lambda_i\lambda_k)R_{ikik} \\
2\sum_{i,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k)R_{ikik} &= \sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik} \\
\sum_{i,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k)R_{ikik} &= \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik}.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão obtida acima em (II), tem-se

$$\sum_{i,j,k} h_{ij}h_{ijkk} = \sum_{i} \lambda_i(nH)_{,ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik}.$$

Voltando a equação (I), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{,ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik}. \tag{50}$$

Substituindo (50) em (49), concluímos que

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta r + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}. \tag{51}$$

Como M é compacta, podemos deduzir de (51), que

$$\int_M \left\{ \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \right\} dV = 0. \tag{52}$$

De (47), (48), (52) e (42), temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \left\{ \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \right\} dV \\
&= \int_M \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{n^2(k-1)^2}|\nabla(nH)|^2 - |\nabla(nH)|^2 \\
&\quad + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{n-k}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 dV \\
&= \int_M \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2 - n^2(k-1)^2}{n^2(k-1)^2}|\nabla(nH)|^2 \\
&\quad + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{n-k}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 dV.
\end{aligned}$$

Observando que,

$$\begin{aligned}
&(3n-2)k^2 - 2nk + n^2 - n^2(k-1)^2 \\
&= 3nk^2 - 2k^2 - 2nk + n^2 - n^2k^2 + 2n^2k - n^2 \\
&= k(3nk - 2k - 2n - n^2k + 2n^2) \\
&= k(2nk + nk - n^2k - 2k - 2n + 2n^2) \\
&= k(2k(n-1) - nk(n-1) + 2n(n-1)) \\
&= k(n-1)[2k - nk + 2n] \\
&= k(n-1)[n(2-k) + 2k],
\end{aligned}$$

e que,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1-\frac{n-k}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 &= \frac{(n-1)n}{(k^2-2k+n)}\frac{n(k^2-2k+n)\lambda^2}{k^2}\\ &\quad \left[1-\frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}\frac{n(k^2-2k+n)\lambda^2}{k^2}\right]\\ &= \frac{(n-1)n}{(k^2-2k+n)}S\left[1-\frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}S\right].\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \frac{k(n-1)[n(2-k)+2k]}{n^2(k-1)^2}|\nabla(nH)|^2\\ &\quad +\frac{(n-1)n}{(k^2-2k+n)}S\left[1-\frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}S\right]dV. \qquad (53)\end{aligned}$$

De $k=3$ e $n>6$ ou $n>k>3$, temos que

$$n(2-k)+2k<0. \qquad (54)$$

Combinando (53) e (54), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_M S\left[1-\frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}S\right]dV\\ &= -\frac{k^2-2k+n}{n(n-1)}\int_M\left\{\frac{k(n-1)[n(2-k)+2k]}{n^2(k-1)^2}\right\}|\nabla(nH)|^2dV\\ &= -\frac{k^2-2k+n}{n(n-1)}\frac{k(n-1)[n(2-k)+2k]}{n^2(k-1)^2}\int_M|\nabla(nH)|^2dV\\ &= -\frac{k(k^2-2k+n)[n(2-k)+2k]}{n^3(k-1)^2}\int_M|\nabla(nH)|^2dV.\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\int_M|\nabla(nH)|^2dV\geq 0,\quad n^3(k-1)^2>0,\quad [n(2-k)+2k]<0,\quad k\geq 3,$$

e como $k\geq 3$, em particular $k>2$, segue que, $K^2>2k$, assim de $n>k\geq 3$ temos que $k^2+n>2k$, isso implica que $k^2-2k+n>0$ logo,

$$\int_M S\left[1-\frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}S\right]dV\geq 0. \qquad (55)$$

Agora, sabendo que

$$\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} > 0,$$

e multiplicando (55) pela expressão acima, temos

$$\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \int_M S\left[1 - \frac{(n-k)k}{n(k^2-2k+n)}S\right] dV \geq 0.$$

Daí conclui-se que,

$$\int_M S\left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} - S\right] dV \geq 0, \tag{56}$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se $\lambda =$ const. e $\mu =$ const. De fato

$$\begin{aligned} \int_M S\left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} - S\right] dV = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad S = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \text{const.}, \mu = \text{const.}. \end{aligned}$$

De (9), (10) e (48), temos que

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{n-k}}, \quad \mu = -\sqrt{\frac{n-k}{k}},$$

pois se a igualdade em (56) ocorrer, temos que S é constante e

$$S \;=\; \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}.$$

E para obtermos os valores mostrados para λ e μ, basta substituir a expressão acima em (48), que temos o resultado.

Então temos que, M é isométrico ao produto Riemanniano $S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$.

Por ultimo, temos por um lado, que de (45)

$$
\begin{aligned}
\int_M \left\{ S - \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right\} dV &\leq 0 \\
\int_M S dV - \int_M \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} dV &\leq 0 \\
\int_M \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} dV &\geq \int_M S dV.
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} > 0$, podemos escrever a expressão anterior como,

$$
\int_M \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right]^2 dV \geq \int_M S \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right] dV.
$$

E por outro lado, de (56) tem-se

$$
\int_M S \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right] dV \geq \int_M S^2 dV.
$$

Daí concluímos que,

$$
\begin{aligned}
\int_M \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right]^2 dV &\geq \int_M S^2 dV \\
\int_M \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right]^2 dV - \int_M S^2 dV &\geq 0 \\
\int_M \left\{ S^2 - \left[\frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \right]^2 \right\} dV &\leq 0,
\end{aligned}
$$

e com a igualdade ocorrendo, se e somente se M é isométrico ao produto Riemanniano $S^1(\sqrt{k/n}) \times S^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$, isso decorre direto de (45) e (56).

Isso completa a prova do teorema(3).

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] CHENG, S. Y. ; YAU, S. T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. Math.Ann., v. 225, p. 125-204, 1977.

[2] CARMO, M. do ; DAJCZER, M. Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature. Trans. Amer. Math. Soc., v. 277, p. 685-709, 1983.

[3] LEITE, M. L. Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature. Manuscripta Math., v. 67, p. 285-304, 1990.

[4] LI, H. Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. Math. Ann.,v. 305, p. 665-672, 1996.

[5] LI, H. Global rigidity theorems of hypersurface. Ark. Mat., v. 35, p. 327-351, 1997.

[6] LI, H. ; WEI, G. Compact embedded rotational hypersurfaces of $S^{n+1}(1)$. Bull. Braz. Math. Soc., v. 38, p.81-89, 2007.

[7] OTSUKI, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. Amer. J. Math., v. 92, p. 145-173, 1970.

[8] PALMAS, O. Complete rotation hypersurfaces with Hk constant in space forms. Bull. Braz. Math. Soc., v. 30, p. 139-161, 1999.

[9] SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifold. Ann. of Math., v. 88, p. 62-105, 1968.

[10] WEI, G. Rigidity theorem for hypersurfaces in a unit sphere. Monatsh. Math., v. 149, n. 4, p. 343-3350, 2006.

[11] WEI, G. J. Simons' type integral formula for hypersurfaces in a unit sphere. J. Math. Anal. Appl., v. 340, n. 2, p. 1371-1379, 2008.