UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

SOBRE A ESCASSEZ DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO CMC E NÃO TOTALMENTE GEODÉSICAS DE GRUPOS DE LORENTZ

FORTALEZA

2017

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

SOBRE A ESCASSEZ DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO CMC E NÃO TOTALMENTE GEODÉSICAS DE GRUPOS DE LORENTZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P718s Pinheiro, Diego.
Sobre a escassez de hipersuperfícies tipo-espaço cmc e não totalmente geodésicas de grupos de Lorentz / Diego Pinheiro. – 2017.
52 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Grupos de Lorentz. 2. Curvatura média constante. 3. Hipersuperfícies tipo-espaço cmc. I. Título.
CDD 510

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

SOBRE A ESCASSEZ DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO CMC E NÃO TOTALMENTE GEODÉSICAS DE GRUPOS DE LORENTZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 22/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho ao meu grande amigo Ramon(*in Memoriam*) e ao meu querido avô Dilneci(*in Memoriam*).

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Angelúcia, meu pai Eulivando e minha madrasta Graça, pelo apoio dado no decorrer de toda essa etapa da minha vida;
À minha noiva Ticianne que não poupou esforços para me ajudar durante todos os momentos que precisei;
Ao meu orientador Antonio Caminha pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e do curso de forma geral;
Aos membros da banca Abdênago Alves de Barros e Ulisses Lima Parente, pela disponibilidade.
A todos os professores do departamento de Matemática da UFC, em especial Fernanda, Rodrigo, Cibotaru e Ederson e a todos os professores da FECLESC, em especial Grangeiro, Pereira e Luzeilton.
Aos amigos Magdiel, Diego Marques, Alexandre, Max, Thiago, Katiane, Washington, Leandro, Alan, Gledson, Wendel, Firmino, Siqueira, Tony, Patrícia e Georgeliano pelos inúmeros momentos compartilhados;
A todos os meus colegas de curso, em especial Emanoel, Hamilton, Felipe, Geraldo, Rosa e Danielson pelos vários momentos que compartilhamos.
Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Por que quando eu era jovem e tirava "A" no teste de História ou em outra matéria, eu tinha certeza de tudo que eu poderia ser..." (Chris Gardner)

RESUMO

Os resultados deste trabalho podem ser vistos como uma curta explanação heurística sobre a dificuldade de encontrar exemplos de hipersuperfícies M^n tipo-espaço cmc não-totalmente geodésicas e completas, em um grupo de Lorentz G^{n+1}. Mais precisamente, seja N um campo vetorial unitário tipo-tempo em M e suponha que a curvatura de Ricci de G na direção de N é maior do que ou igual a $-\frac{H^2}{n}$, onde H é a curvatura média da referida hipersuperfície tipo-espaço com respeito a N. Se M é compacta e transversal a um elemento tipo-tempo da álgebra de Lie de G, então mostramos que M é uma classe lateral de um subgrupo de Lie de G e, portanto, é totalmente geodésica em G. Se M é não compacta e parabólica, então conseguimos o mesmo resultado, desde que a aplicação de Gauss hiperbólica seja limitada. Também discutiremos alguns exemplos relacionados e, no decorrer da explanação, daremos uma prova simples da parabolicidade do produto de variedades riemannianas parabólicas e compactas.

Palavras-chave: Grupos de Lorentz. Curvatura média constante. Hipersuperfícies tipo-espaço cmc.

ABSTRACT

The results of this work can be seen as giving a sort of heuristic explanation of why it is so hard to give examples of non totally geodesic, complete, spacelike, cmc hypersurfaces M^n of a Lorentzian group G^{n+1}. More precisely, let N be a timelike unit vector field on M and suppose that the Ricci curvature of G in the direction of N is greater than or equal to $-\frac{H^2}{n}$, where H is the mean curvature of M with respect to N. If M is compact and transversal to a timelike element of the Lie algebra of G, then we show that it is a lateral class of a Lie subgroup of G and, as such, totally geodesic in G. If M is noncompact and parabolic, then we get the same result, provided M has bounded hyperbolic Gauss map. We also discuss some related examples and, along the way, give a simple proof of the parabolicity of a Riemannian product of a compact and a parabolic Riemannian manifold.

Keywords: Lorentzian groups. Constant mean curvature. Spacelike cmc hypersurfaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação teve como base o artigo "*On the scarcity of non-totally geodesic complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a Lie group with bi-invariant Lorentzian metric*"(Veja [ALÍAS and CAMINHA]).

A teoria clássica de grupos de Lie garante que todo grupo de Lie compacto ou semisimples pode se tornar um grupo semi-riemanniano (riemanniano, no caso compacto), isto é, pode ser munido com um tensor métrico biinvariante. Contudo, se pararmos por um momento a fim de encontrar exemplos de subvariedades, mesmo hipersuperfícies, que possuem interessantes propriedades geométricas relacionadas com a curvatura (curvatura média constante, por exemplo), encotraremos exemplos triviais, como o caso totalmente geodésico, dado pelas classes laterais de subgrupos de Lie.

Neste trabalho daremos, no caso lorentziano, uma explanação do porquê isto ocorrer. Mais precisamente, sejam G um grupo de Lorentz e M uma hipersuperfície cmc tipo-espaço, conexa e completa de G, transversal a um elemento tipo-tempo da álgebra de Lie. Se M é compacta e $\mathrm{Ric}_G(N) \geq -\frac{H^2}{n}$, onde H é a curvatura média de M com respeito a N, então provamos que M é uma classe lateral de um subgrupo de Lie de G, e portanto, M é totalmente geodésica. O mesmo resultado é obtido para o caso em que M é uma variedade completa, não compacta e parabólica, desde que M possua aplicação de Gauss hiperbólica limitada.

No decorrer de nossa apresentação, provaremos também que se um grupo de Lorentz conexo possui um subgrupo de Lie tipo-espaço de codimensão 1, então ele é isométrico a um quociente do produto $-\mathbb{R} \times L$, onde L é um grupo riemanniano simplesmente conexo. Além disso, mostraremos que L é parabólico se, e somente se, $L = K \times \mathbb{R}$ ou $L = K \times \mathbb{R}^2$, onde K é um grupo riemanniano compacto. Isto é feito usando o fato de que o produto riemanniano de uma variedade riemanniana conexa e compacta com uma variedade riemanniana conexa e parabólica é parabólico. Uma simples prova dessa parabolicidade também é apresentada no texto.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns fatos preliminares que serão usados ao longo do texto. Os capítulos 3 e 4 formam a parte técnica do trabalho. No primeiro deles calculamos o gradiente e o laplaciano da função suporte de uma hipersuperfície orientada de um grupo de Lorentz na direção de um elemento da álgebra de Lie deste grupo. No segundo, apresentamos alguns fatos sobre variedades parabólicas; em particular, estabelecemos a parabolicidade do produto de uma variedade riemanniana compacta por uma parabólica e caracterizamos os grupos riemannianos simplesmente conexos e parabólicos. Além disso, na segunda seção do capítulo 4, apresentamos duas proposições que estabelecem diversas equivalências do conceito de completude estocástica (para mais detalhes relacionados às proposições em questão, veja [GRIGOR'YAN](1999), [GRIGOR'YAN](2009) ou [ALÍAS and RIGOLI](2010)). Finalmente, no capítulo 5 provamos os principais resultados desde trabalho.

2 PRELIMINARES

Em todo este trabalho, salvo menção ao contrário, M^n denotará uma variedade riemanniana n-dimensional com métrica $g = \langle , \rangle$, conexão de Levi-Civita ∇ e tensor de curvatura R. O anel comutativo das funções diferenciáveis sobre M será denotado por $C^\infty(M)$. O $C^\infty(M)$-módulo dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Já nas seções 1.1 e 1.2, $\overline{M}^n$ denotará uma variedade semi-riemanniana n-dimensional com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e tensor de curvatura $\overline{R}$. Para simplificar a notação, também denotaremos por $g = \langle , \rangle$ a métrica semi-riemanniana de $\overline{M}$.

2.1 Variedades semi-riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita:

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v \rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(c) *Não-degenerada*, quando $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in V$ implicar $v = 0$.

Seja b uma forma bilinear simétrica sobre V. Um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $b_{|W \times W} : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ for não-degenerada.

O índice de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W \times W} : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ seja negativa definida.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Lema 2.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(a) b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e, portanto, a toda) base de V for invertível.

(b) Se W é não-degenerado então $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$ e $(W^\perp)^\perp = W$.

(c) W é não-degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$. Em particular, W é não-degenerado se, e somente se, $W^\perp$ for não-degenerado.

Demonstração. Veja o capítulo 2 de [O'NEILL]. □

Se $b = \langle , \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial V, dizemos que um vetor $v \in V \setminus \{0\}$ é *tipo-tempo* quando $\langle v, v \rangle < 0$; *tipo-luz* quando $\langle v, v\rangle = 0$ e *tipo-espaço* quando $\langle v, v\rangle > 0$.

De modo análogo se define o que significa um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o sinal $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A norma de $v \in V$ é dada por $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. É um resultado padrão de Álgebra Linear que V admite uma base ortonormal $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i, ou seja, ϵ_{e_i}. Desse modo, a expansão de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Sejam V um espaço vetorial real, $b = \langle , \rangle$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada de índice 1 e $T = \{u \in V; \langle u, u\rangle < 0\}$. Para cada $u \in T$, definimos o *cone tipo-tempo* de V contendo u por $C(u) = \{v \in T; \langle u, v\rangle < 0\}$.

Lema 2.2. *Sejam $v, w \in T$. Então:*

(a) O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. Assim, T é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.

(b) $|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se, e somente se, v e w forem colineares.

(c) Se $v \in C(u)$ para algum $u \in T$, então $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.

Demonstração. Veja o capítulo 5 de [O'NEILL]. □

Definição 2.3. *Um tensor métrico $\overline{g}$ sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um 2-tensor covariante e simétrico sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g_p}$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle , \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Daqui para frente, sempre que não houver risco de confusão, escreveremos $\overline{M}$ em vez de $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle , \rangle$ em vez de $\overline{g}$ e ν para o índice de $\overline{M}$.

Para o caso especial $\nu = 1$ e $\dim \overline{M} \geq 2$, $\overline{M}$ é dita uma *variedade de Lorentz*, e $\langle , \rangle$ é então chamada uma *métrica de Lorentz* em $\overline{M}$. Se $\nu = 0$, $\overline{M}$ é dita simplesmente uma variedade riemanniana.

Exemplo 2.4. *Denotaremos por $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica* *de Lorentz correspondente à forma quadrática*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Em outras palavras, se $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ *e* $v, w \in T_p\mathbb{L}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$*, então*

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1},$$

onde v_i *e* w_i*,* $1 \leq i \leq n+1$*, representam as coordenadas de* v *e* w *na base canônica. O conjunto* $\mathbb{L}^{n+1}$ *munido com a métrica de Lorentz definida como acima é conhecido como o espaço* $(n+1)$*-dimensional de Lorentz-Minkowski.*

Exemplo 2.5. *Outro exemplo de variedade de Lorentz é o espaço* $(n+1)$*-dimensional de De Sitter* $\mathbb{S}_1^{n+1}$*, definido por*

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\},$$

onde $\mathbb{L}^{n+2}$ *denota o espaço* $(n+2)$*-dimensional de Lorentz-Minkowski.*

Afirmamos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *é uma subvariedade de Lorentz de* $\mathbb{L}^{n+2}$*. De fato,* $f : \mathbb{L}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \langle x, x \rangle$*, é uma função diferenciável tal que* $\mathbb{S}_1^{n+1} = f^{-1}(1)$*. Note que, sendo* $\overline{\nabla}$ *a conexão de Levi-Civitta de* $\mathbb{L}^{n+2}$*, para todo* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$*,*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f) = X\langle x, x \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X x, x \rangle = \langle X, 2x \rangle,$$

ou seja, $\nabla f(x) = 2x$*, para todo* $x \in \mathbb{L}^{n+2}$*. Em particular,* $\nabla f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ *e, assim,* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *é uma hipersuperfície semi-riemanniana de* $\mathbb{L}^{n+2}$*, com*

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = \frac{2x}{\sqrt{\langle 2x, 2x \rangle}} = x$$

sendo um campo vetorial normal unitário globalmente definido em $\mathbb{S}_1^{n+1}$*. Como* $\langle N, N \rangle \equiv 1$*,* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *é uma hipersuperfície lorentziana de* $\mathbb{L}^{n+2}$*.*

De modo semelhante à curvatura R de uma variedade riemanniana M, a curvatura $\overline{R}$ de $\overline{M}$ é definida pelo 3-tensor $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\overline{M})$ dado por

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Dados $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerando um subespaço não-degenerado bidimensional de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do lema 2.1 que $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$, de modo que faz sentido a definição abaixo.

Definição 2.6. *Sejam* $\overline{M}$ *uma variedade semi-riemanniana,* $p \in \overline{M}$ *e* $\sigma \subset T_p\overline{M}$ *um* *subespaço bidimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)w, v\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

é denominado a curvatura seccional de $\overline{M}$ em p segundo σ.

Pode ser mostrado que o valor acima independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ. Dessa forma, o número $K(\sigma)$ está bem definido.

Definição 2.7. *Dizemos que a variedade semi-riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante quando os números $K(\sigma)$ acima independem de p e do subespaço bidimensional não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$.*

O corolário 3.43 de [O'NEILL] garante que $\overline{M}$ possui curvatura seccional constante c se, e somente se,

$$\overline{R}(X,Y)Z = c(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y). \tag{1}$$

Definição 2.8. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, é suave quando, para cada $p \in \overline{M}$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação exista, diz-se que $\overline{M}$ é temporalmente orientável.*

Proposição 2.9. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo globalmente definido $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

Demonstração. Se existir um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}$, basta definir $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$, para cada $q \in U$. Sejam, agora, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $\overline{M}$ e $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então, o campo

$$K = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$ e, com ajuda do lema 2.2, pode-se verificar que K é tipo tempo. □

A partir de agora, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo suave tipo-tempo K a ela associada, será denominada uma orientação temporal para $\overline{M}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V *aponta para o futuro*. Então, segue da própria definição de cones tipo-tempo que todos os campos vetoriais sobre $\overline{M}$ que apontam para o futuro são tipo-tempo. Além disso, se K for uma orientação temporal para $\overline{M}$, o item (c) do lema 2.2 garante que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro se, e somente se, $\langle V, K\rangle < 0$.

2.2 Imersões isométricas

Sejam (M^n, g) uma variedade riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-riemanniana. Uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $x^*\overline{g} = g$.

Dada uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, diz-se que M é uma hipersuperfície riemanniana de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ é de Lorentz, M é dita uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}$.

Proposição 2.10. *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, então M admite um campo vetorial normal unitário (diferenciável) $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ apontando para o futuro. Em particular, M é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$ e observe que, para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.

Tome, em cada $p \in M$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^\perp$. Uma vez que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$, caso necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Este processo define unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M, apontando para o futuro, e então resta apenas mostrar que N é suave.

De fato, fixe $p \in M$ e tome um referencial ortonormal $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em M. Então, $\tilde{N} = K - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a M em U, com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = \langle \tilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2.$$

Como $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, temos $\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$ é diferenciável. $\square$

Dada uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, identificaremos M com $x(M) \subset \overline{M}$ e T_pM com $dx_p(T_pM) \subset T_{x(p)}\overline{M}$. Assim, identificando p com $x(p)$ por simplicidade, T_pM será visto como um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}$. Com estas identificações, sabe-se que a conexão de Levi-Civita ∇ de M é dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde o T sobrescrito denota a componente tangente. Assim,

$$(\overline{\nabla}_X Y) = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

onde $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ é a *segunda forma fundamental* de x. Um argumento simples (Veja [DO CARMO]) mostra que II é $C^{\infty}(M)$-bilinear e simétrica, portanto definindo

$$\langle AX, Y\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle,$$

onde N é um campo normal unitário sobre M, obtemos um campo $A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, $p \in M$. O operador A_p é denominado o operador de forma da imersão x em $p \in M$. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$\langle AX, Y\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y\rangle = \langle -(\overline{\nabla}_X N)^T, Y\rangle.$$

Logo $AX = -(\overline{\nabla}_X N)^T$. Analogamente vemos que $II(X,Y) = \epsilon_N \langle AX, Y\rangle N$. Se $II \equiv 0$, então dizemos que M é *totalmente geodésica* em $\overline{M}$.

A proposição a seguir nos fornece equações fundamentais que relacionam os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$ e a segunda forma fundamental. Para uma demonstração, veja, por exemplo, o capítulo 2 de [CAMINHA].

Proposição 2.11. *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

(a) (Equação de Gauss)

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \epsilon_N[\langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle - \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle].$$

(b) (Equação de Codazzi)

$$(\overline{R}(X,Y)N)^T = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y.$$

Exemplo 2.12. *Usaremos, agora, a equação de Gauss para determinar o tensor curvatura do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Observe que o operador de forma da inclusão $i : \mathbb{S}_1^{n+1} \longrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ é dado por*

$$A(X) = -(\nabla_X N)^T = -\nabla_X x = -X,$$

onde $N = x$ é o campo posição, que sabemos ser normal a $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Assim, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$, segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle - \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle + \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle \\
&= -\langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle + \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle \\
&= -\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle + \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle \\
&= \langle -\langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X, W\rangle.
\end{aligned}$$

Como $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ é arbitrário, segue que o tensor curvatura de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é dado por

$$R(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y,$$

e assim, da equação (1), *temos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ tem curvatura seccional constante e igual a 1.*

2.3 Grupos de Lorentz

Iniciaremos esta seção fazendo uma breve revisão sobre grupos de Lie. Para uma exposição mais ampla veja, por exemplo, o capítulo 3 de [CAMINHA] ou o capítulo 2 e 20 de [LEE].

Definição 2.13. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G, munida com uma estrutura de grupo tal que a aplicação de inversão $i : G \longrightarrow G$, dada por $i(g) = g^{-1}$, e a aplicação de multiplicação $m : G \times G \longrightarrow G$, dada por $m(g,h) = gh$, são ambas diferenciáveis.*

Para o que segue, dados $m, n \in \mathbb{N}$, denotemos por $M(m\times n, \mathbb{R})$ o espaço vetorial aditivo das matrizes reais $m \times n$. Munindo $M(m \times n, \mathbb{R})$ com a topologia e estrutura diferenciável induzidas por sua identificação natural com $\mathbb{R}^{mn}$, tornamos $M(m \times n, \mathbb{R})$ uma variedade diferenciável mn-dimensional, difeomorfa a $\mathbb{R}^{mn}$.

Exemplo 2.14. *Seja $GL(n;\mathbb{R})$ o grupo (com a multiplicação de matrizes como operação) das matrizes invertíveis $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, munido com a topologia induzida por $M(n;\mathbb{R})$. A continuidade da função determinante,* $\det : M(n;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, *garante que $GL(n;\mathbb{R})$ é um aberto de $M(n;\mathbb{R})$. Munindo $GL(n;\mathbb{R})$ com a estrutura diferenciável induzida por $M(n;\mathbb{R})$, é fácil verificar que $GL(n;\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.*

Mais geralmente, seja V um espaço vetorial real n-dimensional. Se $GL(V)$ denota o grupo dos operadores lineares invertíveis sobre V, então $GL(V)$ é um grupo de Lie com a composição de operadores como operação.

Exemplo 2.15. *Se G e H são grupos de Lie, então a variedade produto $G \times H$, munida da estrutura de produto direto de grupos, também é um grupo de Lie. Neste caso, dizemos simplesmente que $G \times H$ é o produto direto dos grupos de Lie G e H.*

De agora em diante, salvo menção ao contrário, suporemos que G é um grupo de Lie fixado, com elemento neutro e. Nesse caso, a *translação à esquerda* por $a \in G$ é a aplicação

$$\begin{aligned} L_a : \ G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ag. \end{aligned}$$

Denotando por $i_a : G \longrightarrow G \times G$ a inclusão $i_a(g) = (a, g)$, temos $L_a = m \circ i_a$, de sorte que L_a é diferenciável; mas, como $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = Id_G$, segue que L_a é, de fato, um difeomorfismo de G, tal que $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$. Analogamente, a *translação à direita* por $a \in G$ é o difeomorfismo

$$\begin{aligned} R_a : \ G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ga. \end{aligned}$$

Além disso, observe que L_a e R_b comutam, para todos $a, b \in G$.

Recordemos, agora, que um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$, com M e N variedades semi-riemannianas é chamado de *isometria* se, para qualquer $p \in M$, vale

$$\langle\langle df_p(v_2), df_p(v_1)\rangle\rangle_{f(p)} = \langle v_1, v_2\rangle_p,$$

onde v_1 e v_2 são vetores arbitrários de T_pM e $\langle , \rangle$, $\langle\langle , \rangle\rangle$ representam as métricas de M e N, respectivamente. Dado um grupo de Lie G, dizemos que a métrica de G é *invariante à esquerda* se L_x é uma isometria, para todo $x \in G$. Analogamente dizemos que a métrica é *invariante à direita* se R_x é uma isometria, para todo $x \in G$. Quando a métrica de G for invariante à esquerda e à direita, diremos que tal métrica é *biinvariante.*

Uma *álgebra de Lie(real)* é um objeto algébrico que apresenta enorme importância no estudo de grupos de Lie. Tal objeto é definido como um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido de uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear e antissimétrica $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, para a qual vale a *identidade de Jacobi*:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Tal aplicação é denominada o *colchete de Lie* de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.16. *Se M é uma variedade diferenciável, então $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie com o colchete usual de campos de vetores suaves como colchete de Lie.*

Exemplo 2.17. *O espaço vetorial $M(n; \mathbb{R})$, das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie de matrizes, $[A, B] = AB - BA$, para todas $A, B \in M(n; \mathbb{R})$. De agora em diante, sempre que considerarmos $M(n; \mathbb{R})$ como álgebra de Lie, denotaremo-lo por $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ e suporemos que o colchete de Lie é definido desta forma.*

Uma *subálgebra de Lie* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$. Em particular, $\mathfrak{h}$ é ela mesma uma álgebra de Lie quando munido com a restrição do colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.18. *Seja $\mathfrak{o}(n)$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ formado pelas matrizes reais $n \times n$ antissimétricas, ou seja, tais que $A + A^T = 0_n$, onde $(\cdot)^T$ denota transposição* *de matrizes e* 0_n *denota a matriz nula* $n \times n$. *Munindo* $\mathfrak{o}(n)$ *com o colchete de Lie de matrizes, temos, para* $A, B \in \mathfrak{o}(n)$, *que*

$$\begin{aligned} [A, B] + [A, B]^T &= (AB - BA) + (AB - BA)^T \\ &= (AB - BA) + (B^T A^T - A^T B^T) \\ &= (AB - BA) + (-B)(-A) - (-A)(-B) = 0_n. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{o}(n)$ *é fechado para o colchete de Lie de matrizes, de sorte que* $\mathfrak{o}(n)$ *é uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$.

É um fato central para o desenvolvimento da teoria dos grupos de Lie que todo grupo de Lie G tem associada a si uma subálgebra de Lie natural de $\mathfrak{X}(G)$. Para defini-la, começamos definindo um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ como *invariante à esquerda* se X for L_a-relacionado a si mesmo, para todo $a \in G$. De outro modo, X é invariante à esquerda se $((L_a)_*)_g X_g = X_{ag}$, para todos $a, g \in G$. Se $X, Y \in G$ são campos invariantes à esquerda e $a, b \in \mathbb{R}$, é imediato que $aX + bY$ também é invariante à esquerda; por outro lado, a naturalidade dos colchetes de Lie (Corfira a proposição 4.16 de [LEE]) garante que $[X, Y]$ também é invariante à esquerda. Portanto, de acordo com a discussão acima, podemos enunciar a definição a seguir.

Definição 2.19. *Se* G *é um grupo de Lie, a álgebra de Lie de* G *é a subálgebra de Lie de* $\mathfrak{X}(G)$ *formada pelos campos invariantes à esquerda.*

De agora em diante, dado o grupo de Lie G, escreveremos $Lie(G)$ ou simplesmente $\mathfrak{g}$, quando não houver risco de confusão, para denotar a álgebra de Lie de G.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Fixado $X_e \in T_eG$, se definirmos um campo X em G pondo $X_g = ((L_g)_*)_e X_e$, para todo $g \in G$, não é dificil verificar que X é suave. Ademais, segue da regra da cadeia que

$$((L_a)_*)_g X_g = ((L_a)_*)_g ((L_g)_*)_e X_e = ((L_{ag})_*)_e X_e = X_{ag}.$$

Assim, X é invariante à esquerda, ou seja, $X \in \mathfrak{g}$. Uma vez que o campo X assim construído é claramente o único elemento de $\mathfrak{g}$ cujo valor em e coincide com X_e, sempre que necessário denotaremos tal campo X simplesmente por $\widetilde{X_e}$. Uma verificação fácil mostra que a aplicação

$$\begin{aligned} T_eG &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X_e &\longmapsto \widetilde{X_e} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, de sorte que

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G.$$

Exemplo 2.20. *Como caso particular do que foi visto acima, temos um isormorfismo de espaços vetoriais entre $Lie(GL(n;\mathbb{R}))$ e $T_{Id}GL(n;\mathbb{R})$, onde Id denota a matriz identidade de ordem n. Por outro lado, como $GL(n;\mathbb{R})$ é um subvariedade aberta do espaço vetorial $M(n;\mathbb{R})$, temos uma identificação natural entre $T_{Id}GL(n;\mathbb{R})$ e o próprio $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. É possível mostrar que tal identificação respeita colchetes de Lie, de sorte que, doravante, identificaremos a álgebra de Lie de $GL(n;\mathbb{R})$ com $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$, sempre que conviniente.*

Analogamente, se V é um espaço vetorial real n-dimensional, podemos identificar $Lie(GL(V))$ e $\mathfrak{gl}(V)$, sempre que necessário.

Exemplo 2.21. *Se G e H são grupos de Lie com álgebras de Lie respectivamente $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, então a álgebra de Lie do produto direto de grupos de Lie $G \times H$ é canonicamente isomorfa à soma direta $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ das álgebras de Lie de G e H.*

Um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G é um subgrupo de G munido com uma topologia e uma estrutura diferenciável que o tornam um grupo de Lie e uma subvariedade imersa de G.

Se H é um subgrupo de Lie do grupo de Lie G, a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H pode ser canonicamente identificada a uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. De fato, é imediato verificar que todo $X_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$ se estende unicamente a um campo $\tilde{X}_\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$, de sorte que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \iota: & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & X_\mathfrak{h} & \longmapsto & \tilde{X}_\mathfrak{h} \end{array}$$

é injetiva e respeita colchete de Lie.

Para concluir essa explanação sobre os fatos mais básicos acerca de grupos de Lie, observemos a proposição abaixo.

Proposição 2.22. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, então existe um único subgrupo de Lie de G conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Veja o Teorema 20.13 de [LEE]. □

Voltemos, agora, a algumas considerações geométricas sobre grupos de Lie. Seja G um grupo de Lie $(n+1)$-dimensional com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Fixada uma base $\mathfrak{B} = \{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ de $\mathfrak{g}$, denotaremos por c_{ij}^k as constantes estruturais de $\mathfrak{g}$ com respeito à base $\mathfrak{B}$, de modo que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ij}^k X_k$$

e $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$, para $1 \leq i, j, k \leq n+1$.

Doravante, assumiremos que G é um *grupo de Lorentz* conexo, ou seja, G está munido de um tensor métrico biinvariante $\langle , \rangle$ com índice $\nu = 1$. A proposição abaixo apresenta uma relação entre campos de $\mathfrak{g}$, conhecida como relação de Weyl.

Proposição 2.23. *Seja G um grupo de Lorentz com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, vale que*

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

Demonstração. Para $a \in G$, seja $R_{a^{-1}} L_a : G \longrightarrow G$ o automorfimo interno de G determinado por a. Tal aplicação é um difeomorfismo que deixa e fixo. Portanto, a diferencial $d(R_{a^{-1}} L_a) = Ad(a) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é um operador linear em $\mathfrak{g}$. Explicitamente,

$$Ad(a)U = dR_{a^{-1}} dL_a U = dR_{a^{-1}} U, \text{ para todo } U \in \mathfrak{g}.$$

Seja Φ o fluxo de $Y \in \mathfrak{g}$, de tal sorte que $\Phi(0, g) = g$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, g) = Y(\Phi(t, g))$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $g \in G$. Então, pela proposição 1.58 de [O'NEILL], temos

$$[Y, U] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(d\Phi_{-t}(U) - U).$$

Por outro lado, como X é invariante à esquerda, temos que $L_b \circ \Phi_t = \Phi_t \circ L_b$, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $b \in G$. Assim

$$\Phi_t(b) = \Phi_t(L_b(e)) = L_b(\Phi_t(e)) = b\Phi_t(e) = R_{\Phi_t(e)}(b).$$

Portanto $d\Phi_t = dR_{\Phi_t(e)}$ e

$$[Y, U] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(dR_{\Phi_{-t}(e)}(U) - U) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Ad(\Phi_t(e))U - U).$$

Agora, levando em consideração que a métrica $\langle , \rangle$ de G é biinvariante, vemos que, para todo $Y, X, Z \in \mathfrak{g}$, vale

$$\langle X, Z \rangle = \langle dR_{\Phi_{-t}(e)} \circ dL_{\Phi_t(e)} X, dR_{\Phi_{-t}(e)} \circ dL_{\Phi_t(e)} Z \rangle = \langle dR_{\Phi_{-t}(e)} X, dR_{\Phi_{-t}(e)} Z \rangle,$$

Pois

$$\langle X(g), Z(g) \rangle = \langle dL_g X(e), dL_g Z(e) \rangle = \langle X(e), Z(e) \rangle. \tag{2}$$

Derivando a expressão acima em relação a t, lembrando que $\langle , \rangle$ é bilinear e fazendo $t = 0$

na expressão obtida, vemos que

$$0 = \langle [Y, X], Z\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle.$$

Logo, como $[Z, Y] = -[Y, Z]$, concluímos que

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle.$$

□

Fazendo as substituições $X = X_i, Y = X_j$ e $Z = X_k$, com $\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ base ortonormal de $\mathfrak{g}$, na relação de Weyl, obtemos que

$$c_{ij}^k \epsilon_k = c_{jk}^i \epsilon_i, \tag{3}$$

para todos $1 \leq i, j, k \leq n + 1$; estas relações, por sua vez, nos dão

$$c_{ij}^i \epsilon_i = c_{ji}^i \epsilon_i = -c_{ij}^i \epsilon_i,$$

onde, na última igualdade, usamos a antissimetria das constantes estruturais nos índices de baixo. Logo,

$$c_{ij}^i = 0 \tag{4}$$

para todos $1 \leq i, j \leq n + 1$.

Seja $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de G com respeito à sua métrica biinvariante. A proposição abaixo nos mostra que a conexão entre campos X, Y em $\mathfrak{g}$ pode ser obtida de maneira bastante simples.

Proposição 2.24. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, métrica biinvariante e conexão $\tilde{\nabla}$. Se X, Y são campos em $\mathfrak{g}$, então*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Demonstração. Observemos inicialmente que se $X, Y \in \mathfrak{g}$, então, a equação (2) garante que $\langle X, Y\rangle$ é constante em G. Dessa forma, dados X e Y como acima, temos pela fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned}
2\langle \tilde{\nabla}_X X, Y\rangle &= X\langle X, Y\rangle + X\langle X, Y\rangle - Y\langle X, X\rangle \\
&\quad +\langle [X, X], Y\rangle - \langle [X, Y], X\rangle + \langle [Y, X], X\rangle \\
&= -\langle [X, Y], X\rangle + \langle [Y, X], X\rangle \\
&= 2\langle [Y, X], X\rangle = 2\langle Y, [X, X]\rangle = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos a relação de Weyl na penúltima igualdade. Assim, da arbitrariedade de $Y \in \mathfrak{g}$, temos $\tilde{\nabla}_X X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Agora, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos $X + Y \in \mathfrak{g}$. Logo,

$$0 = \tilde{\nabla}_{(X+Y)}(X+Y) = \tilde{\nabla}_X X + \tilde{\nabla}_Y X + \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Y Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Y X.$$

por outro lado, pela simetria da conexão, temos $\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X, Y]$. Portanto concluímos que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

□

Voltando à base $\mathfrak{B}$, tomemos um campo $V \in \mathfrak{X}(G)$, tal que $V = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i X_i$. Então, $\alpha_i = \epsilon_i \langle V, X_i \rangle$ e, pela proposição acima,

$$\tilde{\nabla}_V X_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle V, X_i \rangle c_{ij}^k X_k. \tag{5}$$

No que diz respeito à curvatura, se denotarmos por R_G e K_G o tensor de curvatura de G e a curvatura seccional de G, respectivamente, teremos

$$R_G(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z] \quad \text{e} \quad K_G(X', Y') = \frac{1}{4}\epsilon_{X'}\epsilon_{Y'}\epsilon_{[X',Y']}|[X', Y']|^2,$$

onde $X, Y, Z, X', Y' \in \mathfrak{g}$, sendo X' e Y' ortonormais. De fato, temos

$$\begin{aligned}
R_G(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_X [Y, Z] - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_Y [X, Z] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\
&= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\
&= \frac{1}{4}[[X, Y], Z] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\
&= -\frac{1}{4}[[X, Y], Z],
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade de Jacobi na penúltima igualdade. Além disso,

$$K_G(X', Y') = \frac{\langle R_G(X', Y')Y', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle \langle Y', Y' \rangle} = \frac{1}{4}\epsilon_{X'}\epsilon_{Y'}\epsilon_{[X',Y']}|[X', Y']|^2.$$

O resultado a seguir nos revela que todo subgrupo de um grupo de Lorentz G é totalmente geodésico em G. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.25. *Seja G um grupo de Lie com métrica biinvariante. Seja H um grupo de Lie e $h : H \longrightarrow G$ uma imersão isométrica que é um homomorfismo de grupos (isto é, H é um subgrupo de Lie de G). Então, h é totalmente geodésica.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que a métrica de H, induzida pela imersão h, também é biinvariante. Denotando por L_p e $\bar{L}_q$ as translações à esquerda em H e G, respectivamente, vemos facilmente que $\bar{L}_{h(p)} \circ h = h \circ L_p$. Assim, dados $p, q \in H$ e $u, v \in T_pH$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_p &= \langle dh_p(u), dh_p(v)\rangle_{h(p)} \\
&= \langle (d\bar{L}_{h(q)})_{h(p)} dh_p(u), (d\bar{L}_{h(q)})_{h(p)} dh_p(v)\rangle_{\bar{L}_{h(q)}h(p)} \\
&= \langle d(\bar{L}_{h(q)} \circ h)_p(u), d(\bar{L}_{h(q)} \circ h)_p(v)\rangle_{h(qp)} \\
&= \langle d(h \circ L_q)_p(u), d(\bar{L}_{h(q)} \circ h)_p(v)\rangle_{h(qp)} \\
&= \langle (dL_q)_p(u), (dL_q)_p(v)\rangle_{L_q p}.
\end{aligned}$$

Observe que, acima, usamos $\langle , \rangle$ para denotar ambas as métricas de H e G. Logo, concluímos que a métrica de H, induzida pela imersão h, é invariante à esquerda. Um raciocínio inteiramente análogo permite mostrar que a métrica de h é invariante à direita. Portanto, tal métrica é biinvariante. Assim, dado $X \in Lie(H)$ e $\overline{X}$ a extensão de X a um elemento da álgebra de Lie de G, temos pela proposição 2.24 que

$$II(X, X) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} - \nabla_X X = 0.$$

Como campos invariantes à esquerda geram o espaço tangente em cada ponto de H, concluímos que $II \equiv 0$ em H, ou seja, h é totalmente geodésica. □

Como corolário imediato do resultado demonstrado acima e do fato de translações à esquerda serem isometrias, segue que toda classe lateral à esquerda de um subgrupo de Lie H de um grupo de Lorentz G é totalmente geodésica em G

O tensor métrico canônico do espaço de Lorentz-Minkowski é obviamente biinvariante. Para além deste exemplo, veremos que os protótipos dos grupos de Lorentz relatados nos teoremas 5.2 e 5.4 são um dos produtos diretos entre grupos de Lorentz,

$$-\mathbb{R} \times L^n \quad \text{ou} \quad -\mathbb{S}^1 \times L^n,$$

ou seja, o produto direto de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$ com um grupo riemanniano n-dimensional L^n, munido com a estrutura produto usual. Além disso, como a métrica riemanniana de L é biinvariante, o mesmo ocorre com a métrica de G.

Por outro lado, como isso acontece para todas as classes laterais de subgrupos de grupos de Lorentz, as fatias $M_g^n := \{g\} \times L^n$ ($g \in \mathbb{R}$ ou $g \in \mathbb{S}^1$) são hipersuperfícies totalmente geodésicas de G. No nosso caso, M_g também é tipo-espaço, orientada por um dos campos ortonormais tipo-tempo ∂_t ou ∂_θ de acordo com o caso considerado. Além disso, em ambos os casos, a curvatura de Ricci de G na direção de um destes campos é nula.

Reciprocamente, seja G um grupo de Lorentz que possui um subgrupo tipo-espaço L de codimensão um. Então, a métrica de Lorentz de G induz um produto escalar lorentziano correspondente na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, tal que a mesma pode ser escrita como a soma ortogonal $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{l}$, onde X é um campo unitário tipo-tempo, invariante à esquerda, e $\mathfrak{l}$ é a álgebra de L. Por sua vez, esta decomposição dá origem a duas folheações de G. Por outro lado, como a métrica de G é biinvariante, temos que estas duas folheações são totalmente geodésicas em G. Consequentemente, o teorema da decomposição de De Rham (veja a seção III.6 de [SAKAI]) garante que, se G é simplesmente conexo, então L é simplesmente conexo e G é isométrico a $-\mathbb{R} \times L$.

3 FUNÇÕES-SUPORTE EM HIPERSUPERFÍCIES

Ao longo desta seção, consideraremos um grupo de Lorentz G^{n+1} com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e uma hipersuperfície tipo-espaço $\varphi : M^n \longrightarrow G^{n+1}$. Como observado na seção anterior, temos que G possui um campo suave, globalmente definido e tipo-tempo $X \in \mathfrak{g}$. Portanto, como M é tipo-espaço, tem-se automaticamente M orientável, sendo orientado pela escolha de um campo normal unitário N, tal que $\epsilon_N = -1$. Denotaremos por $A(\cdot) = -\tilde{\nabla}_{(\cdot)}N$ o operador de forma e por H a curvatura média (não normalizada) de φ com respeito a N, ou seja,

$$H = -tr(A).$$

Para $X \in \mathfrak{g}$, denotaremos por $f_X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a função suporte de M na direção de X, isto é,

$$f_X(p) = \langle N, X\rangle_p,$$

para todo $p \in M$. Dada uma base ortonormal $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}$ de $\mathfrak{g}$, e $1 \leq j \leq n+1$, simplificaremos por f_j a função f_{X_j}. A prova dos teoremas 5.2 e 5.4 fará uso de uma fórmula para Δf_j, demonstrada no lema 3.3. Inicialmente, observemos uma simples relação de simetria satisfeita pelas constantes estruturais de $\mathfrak{B}$.

Lema 3.1. $\sum_{i,j=1}^{n+1} c_{jl}^i \epsilon_j f_i f_j = 0$, *para* $1 \leq l \leq n+1$.

Demonstração. É suficiente fazer uma mudança de índices e depois invocar (3):

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} c_{jl}^i \epsilon_j f_i f_j = \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{il}^j \epsilon_i f_j f_i = -\sum_{i,j=1}^{n+1} c_{jl}^i \epsilon_i^2 \epsilon_j f_i f_j = -\sum_{i,j=1}^{n+1} c_{jl}^i \epsilon_j f_i f_j.$$

□

Para o próximo resultado, dada uma seção X de $TG_{|M}$, denotaremos por X^T a projeção ortogonal de X em TM.

Lema 3.2. $\nabla f_j = -AX_j^T + \frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n+1} c_{lj}^i \epsilon_l f_i X_l^T$, *para* $1 \leq j \leq n+1$.

Demonstração. Fixe $p \in M$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p \in M$. Então, para $1 \leq k \leq n$, o resultado (5) nos dá

$$\begin{aligned} e_k(f_j) &= \langle \tilde{\nabla}_{e_k} N, X_j\rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_{e_k} X_j\rangle \\ &= -\langle Ae_k, X_j\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1} \langle N, \epsilon_l \langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i X_i\rangle \\ &= -\langle Ae_k, X_j\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1} \epsilon_l \langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i f_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nabla f_j &= \sum_{k=1}^{n} e_k\langle N, X_j\rangle e_k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\langle e_k, AX_j^T\rangle e_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\epsilon_l\langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i f_i e_k \\
&= -AX_j^T + \frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n+1} c_{lj}^i \epsilon_l f_i X_l^T .
\end{aligned}
$$

□

Agora podemos provar a fórmula desejada para o laplaciano de f_j (Um cálculo desse laplaciano em ambiente riemanniano é feito em [FORNARI and RIPOLL].

Lema 3.3. *Se Δ representa o laplaciano de M, então*

$$\Delta f_j = X_j^T(H) + (|A|^2 + Ric_G(N))f_j,$$

onde $Ric_G(N)$ denota a curvatura de Ricci de G na direção de N.

Demonstração. Sejam ∇ a conexão de Levi Civita de M, $\tilde{\nabla}$ a de G e II a segunda forma fundamental de φ. Para um ponto p fixado em M, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p, geodésico em p. Então, calculando em p e com ajuda do lema 3.2, obtemos sucessivamente

$$
\begin{aligned}
\Delta f_j &= \sum_{k=1}^{n} e_k(e_k(f_j)) = -\sum_{k=1}^{n} e_k\langle Ae_k, X_j\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1} e_k\langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i\epsilon_l f_i \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i\epsilon_l e_k(f_i) \\
&= \underbrace{-\sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}Ae_k, X_j^T\rangle}_{(i)} \underbrace{-\sum_{k=1}^{n}\langle Ae_k, \nabla_{e_k}X_j^T\rangle}_{(ii)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle II(e_k,e_k), X_l\rangle c_{lj}^i\epsilon_l f_i}_{(iii)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle e_k, \tilde{\nabla}_{e_k}X_l\rangle c_{lj}^i\epsilon_l f_i}_{(iv)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^i\epsilon_l e_k(f_i)}_{(v)} .
\end{aligned}
$$

Faremos o cálculo das somas (i) a (v) separadamente. Em (i), usando o fato de $\nabla_{e_k} A$ ser autoadjunto e a equação de Codazzi, vemos que

$$
\begin{aligned}
(i) &= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} A e_k, X_j^T \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} A) e_k - A(\nabla e_k e_k), X_j^T \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} A) e_k, X_j^T \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} A) X_j^T, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle (R_G(X_j^T, e_k)N)^T, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle (\nabla_{X_j^T} A) e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle R_G(X_j, e_k)N, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle R_G(\epsilon_N f_j N, e_k)N, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{X_j^T} A e_k, e_k \rangle \\
&= -\mathrm{Ric}_G(X_j, N) - f_j \mathrm{Ric}_G(N, N) + X_j^T \left(\sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, e_k \rangle \right) \\
&= -\mathrm{Ric}_G(X_j, N) - \mathrm{Ric}_G(N, N) f_j - X_j^T (H).
\end{aligned}
$$

O cálculo de (ii) é direto e nos dá

$$
\begin{aligned}
(ii) &= \sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, \tilde{\nabla}_{e_k} X_j^T \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, \tilde{\nabla}_{e_k} (X_j + f_j N) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, \tilde{\nabla}_{e_k} X_j \rangle - f_j \sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, -\tilde{\nabla}_{e_k} N \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A e_k, \tilde{\nabla}_{e_k} X_j \rangle - f_j |A|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,l=1}^{n+1} \langle A e_k, X_l \rangle \langle e_k, X_i \rangle c_{ij}^l \epsilon_i - f_j |A|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{n+1} \langle A X_l^T, X_i^T \rangle c_{ij}^l \epsilon_i - f_j |A|^2.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, para (iii), segue do lema 3.1 que

$$
\begin{aligned}
(iii) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,l=1}^{n+1} \langle II(e_k, e_k), X_l \rangle c_{lj}^i \epsilon_l f_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{n+1} \langle HN, X_l \rangle c_{lj}^i \epsilon_l f_i \\
&= \frac{H}{2} \sum_{i,l=1}^{n+1} c_{lj}^i \epsilon_l f_i f_j = 0.
\end{aligned}
$$

Obtemos (iv) usando novamente (4) e o lema 3.1:

$$\begin{aligned}
(iv) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1}\langle e_k, X_r\rangle\langle e_k, X_s\rangle c_{sl}^{r}\epsilon_s c_{lj}^{i}\epsilon_l f_i \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1}(\underbrace{\langle X_r, X_s\rangle}_{\delta_{rs}\epsilon_s} + f_r f_s)c_{sl}^{r}\epsilon_s c_{lj}^{i}\epsilon_l f_i \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,l,r=1}^{n+1} c_{rl}^{r} c_{lj}^{i}\epsilon_l f_i + \frac{1}{4}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1} c_{sl}^{r}\epsilon_s c_{lj}^{i}\epsilon_l f_i f_r f_s = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos (v) usando o lema 3.2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle e_k, X_l\rangle c_{lj}^{i}\epsilon_l\left(-\langle Ae_k, X_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n+1}\langle e_k, X_r\rangle c_{ri}^{s}\epsilon_r f_s\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle e_k, X_l^T\rangle c_{lj}^{i}\epsilon_l\langle e_k, AX_i^T\rangle + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1}\langle e_k, X_l\rangle\langle e_k, X_r\rangle c_{lj}^{i}\epsilon_l c_{ri}^{s}\epsilon_r f_s \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle X_l^T, AX_i^T\rangle c_{lj}^{i}\epsilon_l + \frac{1}{4}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1}(\underbrace{\langle X_l, X_r\rangle}_{\delta_{lr}\epsilon_r} + f_l f_r)c_{lj}^{i}\epsilon_l c_{ri}^{s}\epsilon_r f_s \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle AX_i^T, X_l^T\rangle c_{lj}^{i}\epsilon_l + \frac{1}{4}\sum_{i,l,s=1}^{n+1} c_{lj}^{i} c_{li}^{s}\epsilon_l f_s + \frac{1}{4}\sum_{i,l,r,s=1}^{n+1} c_{lj}^{i}\epsilon_l c_{ri}^{s}\epsilon_r f_l f_r f_s.
\end{aligned}$$

O último termo da soma acima é igual a 0, novamente pelo lema 3.1; para o termo do meio temos, graças à relação de Weyl e (3), que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,l,s=1}^{n+1} c_{lj}^{i} c_{li}^{s}\epsilon_l f_s &= -\sum_{i,l,s=1}^{n+1} c_{lj}^{i} c_{ls}^{i}\epsilon_i\epsilon_l\epsilon_s f_s \\
&= -\sum_{i,l,s=1}^{n+1}\langle [X_l, X_j], X_i\rangle\langle [X_l, X_s], X_i\rangle\epsilon_i\epsilon_l\epsilon_s f_s \\
&= \sum_{l,s=1}^{n+1}\langle [X_j, X_l], [X_l, X_s]\rangle\epsilon_l\epsilon_s f_s \\
&= \sum_{l,s=1}^{n+1}\langle [[X_j, X_l], X_l], X_s\rangle\epsilon_l\epsilon_s f_s \\
&= -4\sum_{l=1}^{n+1}\langle R_G(X_j, X_l)X_l, N\rangle\epsilon_l = -4\mathrm{Ric}_G(X_j, N).
\end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que

$$(v) = -\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle AX_i^T, X_l^T\rangle c_{lj}^i \epsilon_l - \mathrm{Ric}_G(X_j, N).$$

Juntando os resultados de (i) a (v), levando em consideração que A é autoadjunto e que (por (3)) vale $c_{ij}^l \epsilon_i + c_{lj}^i \epsilon_l = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta f_j &= \mathrm{Ric}_G(X_j, N) + \mathrm{Ric}_G(N, N) f_j + X_j^T(H) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle AX_j^T, X_i^T\rangle c_{ij}^l \epsilon_i + |A|^2 f_j \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n+1}\langle AX_i^T, X_l^T\rangle c_{lj}^i \epsilon_l - \mathrm{Ric}_G(X_j, N) \\
&= X_j^T(H) + (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N, N)) f_j.
\end{aligned}$$

$\square$

4 VARIEDADES PARABÓLICAS E ESTOCASTICAMENTE COMPLETAS

Nesta seção, estudaremos alguns fatos da teoria das variedades parabólicas, os quais serão necessários para a prova do teorema 5.4. Mais especificamente, será usado na demonstração deste teorema o fato de que toda variedade parabólica satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau.

4.1 Variedades parabólicas

Inicialmente lembremos que, se M é uma variedade riemanniana, então uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica se $\Delta f \geq 0$, onde Δ denota o laplaciano de M. Agora, uma variedade riemanniana não compacta, conexa e completa M é dita *parabólica* se toda função subharmônica $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que é limitada superiormente for constante. Abaixo, vemos um primeiro exemplo de variedade parabólica.

Lema 4.1. *A variedade riemanniana* $(\mathbb{R}, g)$*, onde* $\mathbb{R}$ *representa a reta real e* g *a métrica canônica, é parabólica.*

Demonstração. Observemos inicialmente que, nesse caso, dada uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a condição $\Delta f \geq 0$ significa que $f'' \geq 0$, ou seja, f é convexa. Suponhamos, então, que f é não constante, isto é, que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) < f(y)$. Portanto, da convexidade f, temos

$$f(x) = f\left(\lambda\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)f(y),\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Da desigualdade acima, vemos que

$$f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) \geq \frac{f(x)-(1-\lambda)f(y)}{\lambda} = \frac{f(x)-f(y)}{\lambda} + f(y).$$

Agora, como $f(x) > f(y)$, temos que o último termo da igualdade acima tende para $+\infty$ quando λ tende a 0 pela direita, ou seja, f é ilimitada. □

Um resultado clássico devido a A. Huber (confira [HUBER]) garante que toda superfície riemanniana não compacta, conexa e completa de curvatura Gaussiana não negativa, é parabólica. Em particular, este é o caso dos dois grupos de Lie bidimensionais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Para $k \geq 3$, temos, da seção 11.5 de [GRIGOR'YAN], que $\mathbb{R}^k$ não é parabólica.

No que se refere a grupos riemannianos, um teorema clássico de H. Weyl garante que todo grupo de Lie compacto pode ser munido com uma métrica riemanniana biinvariante. Por outro lado, se M_1 é uma variedade riemanniana orientada, conexa e compacta e M_2 é uma variedade riemanniana parabólica, então a variedade produto $M_1 \times M_2$, munida com a métrica produto, também é parabólica. Deste fato, segue que um grupo riemanniano simplesmente conexo L é parabólico se, e somente se, $L = K \times \mathbb{R}$ ou $L = K \times \mathbb{R}^2$, onde K é um grupo simplesmente conexo e compacto. Dedicaremos o resto desta seção à demonstração dos dois fatos citados acima. Antes disso, vejamos um lema relacionado aos cálculos do gradiente e do laplaciano de M.

Lema 4.2. *Se $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então:*

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ *e* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

(b) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

(c) $\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f$.

Demonstração. (a) Sendo X um campo suave sobre M, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg) = gX(f) + fX(g) \\ &= g\langle \nabla f, X\rangle + f\langle \nabla g, X\rangle \\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle. \end{aligned}$$

(b) Dado um campo suave X e um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$, segue da definição de divergente que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \sum_i \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f)e_i, X\rangle + \sum_i \langle f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + f\operatorname{div}X. \end{aligned}$$

Como o campo X e a vizinhança U foram tomados arbitrariamente, temos que o resultado acima é válido em todo ponto de M. Dessa forma, segue de (a) que

$$\Delta(fg) = \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

(c) Observemos inicialmente que $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$. De fato, se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então

$$\langle \nabla(\phi \circ f), v\rangle_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi \circ f \circ \gamma)(t) = \phi'(f(p))\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) = (\phi' \circ f)\langle \nabla f, v\rangle_p.$$

Portanto, usando (b) e o resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta(\phi\circ f) &= \mathrm{div}(\nabla(\phi\circ f)) = \mathrm{div}((\phi'\circ f)\nabla f)\\ &= \langle\nabla(\phi'\circ f),\nabla f\rangle + (\phi'\circ f)\mathrm{div}(\nabla f)\\ &= (\phi''\circ f)|\nabla f|^2 + (\phi'\circ f)\Delta f,\end{aligned}$$

como desejado. □

Voltando ao estudo das variedades parabólicas, observemos inicialmente o seguinte lema.

Lema 4.3. *Uma variedade riemanniana não compacta, conexa e completa é parabólica se, e somente se, toda função subharmônica, positiva e limitada é constante.*

Demonstração. Se M é parabólica, temos, por definição, que toda função subharmônica limitada é constante e assim, como caso particular, temos o resultado requerido. Reciprocamente, seja M uma variedade riemanniana não compacta, conexa e completa tal que toda função subharmônica positiva e limitada é constante. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função subharmônica que é limitada superiormente e $g = e^f$, então g é uma função suave, positiva e limitada em M. Além disso, de (c) do lema 4.2 nos dá

$$\Delta g = g\Delta f + g|\nabla f|^2,$$

ou seja, g também é subharmônica. Então, por hipótese, temos que g é constante e, como $\nabla g = g\nabla f$, segue que $\nabla f = 0$. Portanto, f é constante e, dessa forma, M é parabólica. □

Proposição 4.4. *Se M_1 é uma variedade riemanniana orientada, conexa e compacta e M_2 é uma variedade riemanniana parabólica, então a variedade produto $M_1\times M_2$, munida da métrica produto, é parabólica.*

Demonstração. Seja $M = M_1 \times M_2$. Pelo lema anterior, é suficiente tomar uma função subharmônica, positiva e limitada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e provar que f é constante. Denotaremos por Δ o laplaciano de M, Δ_j o laplaciano de M_j $(j = 1, 2)$ e por dM_1 a medida riemanniana de M_1. Observemos inicialmente que, se $g = f^2$, então g também é positiva, limitada e tal que

$$\Delta g = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2.$$

Então, g é subharmônica e, se mostrarmos que g é harmônica, teremos $\nabla f = 0$, e portanto f será constante.

Para $x \in M_1$, seja $g_x : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_x(y) = g(x, y)$. Analogamente, para $y \in M_2$, definimos $g^y : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g^y(x) = g(x, y)$. Calculando Δg com ajuda de um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}\}$ tal que $e_1, \ldots, e_k$ são tangentes a M_1 e $e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}$ são tangentes a M_2, obtemos

$$(\Delta g)(x,y) = (\Delta_1 g^y)(x) + (\Delta_2 g_x)(y).$$

Integrando a relação acima sobre M_1, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{M_1} (\Delta g)(x,y) dM_1(x) &= \int_{M_1} (\Delta_1 g^y)(x) dM_1(x) + \int_{M_1} (\Delta_2 g_x)(y) dM_1(x) \\ &= \int_{M_1} (\Delta_2 g_x)(y) dM_1(x), \end{aligned} \tag{6}$$

onde a segunda igualdade decorre do teorema da divergência, junto com o fato de M_1 ser compacta. Agora, como g é subharmônica, segue do resultado acima que

$$\int_{M_1} (\Delta_2 g_x)(y) dM_1(x) \geq 0. \tag{7}$$

A compacidade de M_1 nos permite calcular derivadas sob o sinal da integral para obter

$$\begin{aligned} \int_{M_1} (\Delta_2 g_x)(y) dM_1(x) &= \int_{M_1} \sum_{j=k+1}^{k+l} (e_j e_j - \nabla_{e_j} e_j)(g_x)(y) dM_1(x) \\ &= \sum_{j=k+1}^{k+l} (e_j e_j - \nabla_{e_j} e_j) \left(\int_{M_1} g_x dM_1(x) \right)(y) \\ &= (\Delta_2 h)(y), \end{aligned}$$

onde $h(y) = \left(\int_{M_1} g_x dM_1(x) \right)(y)$. Assim, segue de (7) que $h : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica. Contudo, como M_2 é parabólica e

$$h(y) = \left(\int_{M_1} g_x dM_1(x) \right)(y) \leq \left(\sup_M g \right) \operatorname{Vol}(M_1)$$

para todo $y \in M_2$, concluímos que h é constante.

Voltando a (6), temos que

$$\int_{M_1} (\Delta g)(x,y) dM_1(x) = (\Delta_2 h)(y) = 0.$$

Como g é subharmônica, concluímos do resultado acima que $\Delta g = 0$. Logo, g é harmônica, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 4.5. *Um grupo riemanniano simplesmente conexo L é parabólico se, e somente se, $L = K \times \mathbb{R}$ ou $L = K \times \mathbb{R}^2$, onde K é um grupo riemanniano simplesmente conexo e* *compacto.*

Demonstração. Se $L = K \times \mathbb{R}$ ou $L = K \times \mathbb{R}^2$, então a proposição anterior e a parabolicidade de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ garantem que L é parabólico. Reciprocamente, seja L um grupo riemanniano simplesmente conexo e parabólico. Um resultado clássico sobre grupos de Lie (veja o capítulo 3 de CAMINHA) afirma que, como L está munido com uma métrica biinvariante, temos $L = K \times \mathbb{R}^l$, onde K é um grupo riemanniano simplesmente conexo e compacto munido com uma métrica biinvariante, $\mathbb{R}^l$ é o espaço euclidiano l-dimensional e $K \times \mathbb{R}^l$ está munido com a métrica produto. Agora, observemos que K, visto como grupo riemanniano, pode ser naturalmente orientado. Dada uma função subharmônica e limitada superiormente $f : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos vê-la como uma função definida em L que é constante em cada fibra $K \times \{y\}$. Dessa forma, temos que f é subharmônica e limitada superiomente em L. Como L é parabólico, temos que f é constante em L e, assim, também é constante em $\mathbb{R}^l$. Portanto, concluímos que $\mathbb{R}^l$ é parabólico e, pela discussão feita após a lema 4.1, temos $l = 1$ ou 2. □

4.2 Definições equivalentes de completude estocástica

Iniciaremos esta seção com uma breve abordagem sobre os espaços C^k e L^p em $\mathbb{R}^n$. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^n$. Usaremos a seguinte notação simplificada para derivadas parciais:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e, para qualquer multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}\cdots(\partial x_n)^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ é a *ordem* do multiíndice.

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $C(\Omega)$ o conjunto de todas as funções contínuas em Ω, e por $C^k(\Omega)$, onde k é natural, o conjunto das funções $f \in C(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha f \in C(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Definimos, ainda, $C^\infty(\Omega)$ como sendo a interseção de todos $C^k(\Omega)$, e $C_0^\infty(\Omega)$ como o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ que consiste de todas as funções com suporte compacto em Ω.

A norma do sup de qualquer função $u \in C(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{C(\Omega)} = \sup_\Omega |u|,$$

e a norma C^k de $u \in C^k(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{C^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha u|.$$

Apesar da terminologia, $||u||_{C^k(\Omega)}$ não é uma norma em $C^k(\Omega)$, pois pode assumir valores infinitos. De fato, a topologia do espaço $C^k(\Omega)$ é definida pela família das seminormas $||u||_{C^(\Omega')}$, onde Ω' é um subconjunto aberto de Ω tal que $\Omega' \Subset \Omega$. A relação $E \Subset \Omega$ (*inclusão compacta*) significa que o fecho $\overline{E}$ do conjunto E é compacto e $\overline{E} \subset \Omega$.

Seja μ a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Para qualquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ (confira a seção 4.2 de [BRÉZIS]). O espaço de Lebesgue *local* $L^p_{loc}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções mensuráveis (com respeito a μ) f em Ω tais que $f \in L^p(\Omega')$ para qualquer conjunto aberto $\Omega' \Subset \Omega$. De fato, o único espaço de Lebesgue que usaremos no texto será $L^1_{loc}(\Omega)$.

Agora, seja $p : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right),$$

onde $t \in (0, +\infty)$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$. Um cálculo imediato mostra que a função acima satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta p \tag{8}$$

nas variáveis $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ (o ponto y é considerado fixo) e a condição inicial

$$\lim_{t \to 0^+} p(t, \cdot, y) = \delta_y, \tag{9}$$

onde δ_y é a função delta de Dirac.

Seja M uma variedade riemanniana. Qualquer função $p : (0, +\infty) \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (8) e (9) é chamada de solução fundamental da equação do calor em M. O *núcleo do calor*, cuja existência e suavidade em (t, x, y) são provadas em [DODZIUK], é definido como sendo a menor solução fundamental positiva da equação do calor em M, isto é, se p é o núcleo do calor e q é uma solução fundamental arbitrária em M, então $p(x) \leq q(x)$, para todos $x \in M$. Além disso, o núcleo do calor possui as seguintes propriedades.

- *Simetria*: $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ para todos, $x, y \in M$ e $t > 0$.

- *Identidade de semigrupo*: para todos $x, y \in M$ e $s \in (0, t)$,

$$p(t, x, y) = \int_M p(s, x, z) p(t - s, z, y) d\mu(z). \tag{10}$$

- Para todos $t > 0$ e $x, y \in M$,

$$\int_M p(t,x,y)d\mu(y) \leq 1. \tag{11}$$

Devido às propriedades (10) e (11), o núcleo do calor $p(t,x,y)$ pode ser visto como um operador P_t que age sobre funções $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$P_t f = \int_M p(\cdot, y, t) f(y) d\mu(y).$$

Se f é uma função contínua e limitada em M, então a função $u(x,t) := P_t f(x)$ é solução do problema de Cauchy em $M \times (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \\ u(\cdot, 0) = f. \end{cases}$$

Além disso, se $f \geq 0$, então $P_t f$ é a menor solução não negativa, no sentido pontual, do problema acima. Para demonstrações dos fatos citados acima e das propriedades do núcleo do calor veja, por exemplo, o capítulo 7 de [GRIGOR'YAN]. Abaixo, definimos um dos principais objetos desta seção.

Definição 4.6. *Sejam M uma variedade riemanniana e $p(t,x,y)$ o núcleo do calor de M. Dizemos que M é estocasticamente completa se*

$$\int_M p(t,x,y)d\mu(y) = 1,$$

para todos $x \in M$ e $t > 0$. Se existir um x_0 em M ou um $t_0 > 0$ tal que a igualdade acima não ocorra, então diremos que M é estocasticamente incompleta.

Dado $\lambda > 0$, dizemos que uma função suave $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é λ-harmônica se ela satisfaz a equação

$$\Delta u = \lambda u.$$

Analogamente, dizemos que u é λ-subharmônica se $\Delta u \geq \lambda u$ e λ-superharmônica se $\Delta u \leq \lambda u$. Dado um aberto $\Omega \subset M$, dizemos que uma função suave $v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função λ-subharmônica admissível* para Ω se v é uma função λ-subharmônica, limitada e não negativa em M, tal que $v = 0$ em $M \backslash \Omega$ e $\sup_\Omega v > 0$. Um aberto Ω é dito *λ-massivo* se existe pelo menos uma função λ-subharmônica admissível para Ω.

As duas proposições a seguir têm como objetivo apresentar diversas equivalências da definição de completude estocástica de uma variedade riemanniana M. Uma vez que demonstrações completas das mesmas exigem digressão e espaço muito grandes, apresentamos somente um esboço destas demosntrações, referindo o leitor [GRIGOR'YAN], para mais detalhes.

Proposição 4.7. *Seja M uma variedade riemanniana. As seguintes propriedades são* *equivalentes.*

(a) A variedade M é estocasticamente incompleta, ou seja, existe $(x,t) \in M \times (0,+\infty)$ tal que

$$\int_M p(t,x,y)d\mu(y) < 1. \tag{12}$$

(b) Para todo $(x,t) \in M \times (0,+\infty)$, vale (12).

(c) Para todo $\lambda > 0$, M é λ-massivo.

(d) Para todo $\lambda > 0$, existe uma função λ-harmônica não nula em M.

(e) Para qualquer $T \in (0,+\infty)$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \\ u|_{t=0^+} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

possui uma solução não nula limitada em $M \times (0,T)$.

Demonstração. Iremos provar a seguinte cadeia de implicações:

$$\begin{array}{ccccccccc} (a) & \Leftrightarrow & (b) & \Rightarrow & (d) & \Rightarrow & (e) & \Rightarrow & (a) \\ & & & & \Updownarrow & & & & \\ & & & & (c) & & & & \end{array}$$

(a) $\Leftrightarrow$ **(b)** O fato de que (b) implica (a) é óbvio. Vamos, agora, assumir a validade da negação de (b) e provar a validade da negação de (a). Pela propriedade de semigrupo temos, para todo $s \in (0,t)$,

$$P_t 1 = P_{t-s}P_s 1 \leq P_{t-s}1 \leq 1. \tag{14}$$

Como sabemos que $P_t 1(x) = 1$ ocorre para algum $x \in M$, concluímos que, para estes x e t, as desigualdades de (14) tornam-se igualdades. Em particular, temos

$$P_{t-s}(P_s 1)(x) = 1$$

para todo $s \in (0,t)$, o que é possível apenas se

$$P_s 1 \equiv 1. \tag{15}$$

A ideia, agora, é estender o resultado acima para esse $x \in M$ e todo $s > t$. Portanto, tome $s < 2t$. Então, $s/2 < t$ e obtemos, mais uma vez pela identidade de semigrupo,

$$P_s 1 = P_{s/2}(P_{s/2}1) = P_{s/2}1 = 1,$$

ou seja, (15) ocorre para todo $s \in (0, 2t)$. Por indução, provamos que, para $x \in M$ sob consideração, (15) é verdadeira em $(0, 2^k t)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, para todo $s > 0$.

(**b**) $\Rightarrow$ (**d**) Dado $\lambda > 0$, definamos $u(x,t) = (P_t 1)(x) < 1$ e

$$w(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(x,t)\ dt.$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2}\Delta w = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\Delta u\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial u}{\partial t}\ dt = ue^{-\lambda t}|_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u\ dt = -1 + \lambda w$$

e

$$0 < w < \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto, a função $v = 1 - \lambda w$ satisfaz a equação $\frac{1}{2}\Delta v - \lambda v = 0$, com $0 < v < 1$. Assim, trocando λ por $\lambda/2$, o resultado segue.

(**d**) $\Rightarrow$ (**e**) Seja v uma função não nula, limitada e λ-harmônica em M. Claramente a função

$$u(x,t) = v(x)e^{\frac{1}{2}\lambda t}$$

é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \\ u|_{t=0^+} = v. \end{cases} \tag{16}$$

Por outro lado, temos que $w = P_t v$ também é solução do problema (16). Dado $t > 0$, temos

$$\sup |w|(\cdot, t) \leq \sup |v| \cdot P_t 1 \leq \sup |v|$$

ao passo que $v \not\equiv 0$ implica

$$\sup |u|(\cdot, t) = e^{\frac{1}{2}\lambda t}\sup |v| > \sup |v|.$$

Portanto, as funções $u(\cdot, t)$ e $w(\cdot, t)$ são diferentes, para qualquer $t > 0$. Ao mesmo tempo, ambas são limitadas em $M \times (0, T)$, de sorte que a função $h = u - w$ é uma solução não nula e limitada de (13) em $M \times (0, T)$.

(**e**) $\Rightarrow$ (**a**) Seja $u(x,t)$ uma solução não nula e limitada de (13), para algum $T > 0$. Podemos assumir que $\sup u > 0$ e que $\sup |u| < 1$, de tal modo que a função $w = 1 - u$ é positiva e $\inf w < 1$. Como a função w é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta w \\ w|_{t=0^+} = 1. \end{cases} \tag{17}$$

e $P_t 1$ é a menor solução positiva de (17), concluímos que $P_t 1 \leq w$. Portanto, segue de $\inf w < 1$ que, para algum $x \in M$ e $t \in (0, T)$,

$$P_t 1 = \int_M p(t, x, y) d\mu(y) < 1,$$

e M é estocasticamente incompleta.

(**d**) $\Rightarrow$ (**c**) Se v é uma função λ-harmônica, limitada e não nula em M, então pelo menos umas das funções v_+ ou v_- deve ser não nula. Suponhamos que v_+ é não nula. Assim, como v_+ é λ-harmônica em $\{v > 0\}$, temos que v_+ é λ-subharmônica em M, e M é λ-massivo.

(**c**) $\Rightarrow$ (**d**) Suponha M λ-massivo para todo $\lambda < 0$ e w uma função λ-subharmônica admissível para M. Iremos construir uma função λ-harmônica limitada e não nula em M como limite de soluções dos seguintes problemas de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta v_k - \lambda v_k = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\ v_k|_{\partial \Omega_k} = 1, \end{cases}$$

onde $\{\Omega_k\}_{k \geq 1}$ é uma exaustão de M. Temos que $0 \leq v_k \leq 1$ e a sequência $\{v_k\}$ é decrescente e converge para uma solução limitada v. Verifiquemos que $v \not\equiv 0$. Podemos assumir desde o início que $\sup w = 1$. Então temos, pelo princípio do máximo, $v_k \geq w$ e assim $v \geq w$ que implica $v \not\equiv 0$. $\square$

Um corolário da proposição acima, que nada mais é que uma reformulação da mesma, é o seguinte:

Corolário 4.8. *Seja M uma variedade riemanniana. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) A variedade M é estocasticamente completa.

(b) Para todo $\lambda > 0$, a única solução suave, não negativa e limitada de $\Delta u \geq \lambda u$ em M é $u \equiv 0$.

(c) Para todo $\lambda > 0$, a única solução suave, não negativa e limitada de $\Delta u = \lambda u$ em M é $u \equiv 0$.

(d) Para qualquer $T \in (0, +\infty)$, a única solução limitada em $M \times (0, T)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u|_{t=0^+} = 0 \end{cases}$$

é $u \equiv 0$.

Observemos agora que, se a variedade M é parabólica, então ela claramente satisfaz a condição do item (b) do corolário 4.8. Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.9. *Toda variedade parabólica é estocasticamente completa.*

Vejamos, a seguir, outra proposição relacionada às definições equivalentes de completude estocástica.

Proposição 4.10. *Seja M uma variedade riemanniana. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) M é estocasticamente completa.

(b) Para toda função $u \in C^2(M)$, com $u^* = \sup_M u < +\infty$, e para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\inf_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \leq 0,$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in M : u(x) > u^* - \varepsilon\}$.

(c) Para toda função $u \in C^2(M)$, com $u^* = \sup_M u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ satisfazendo, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

(d) Para toda função $u \in C^2(M)$, com $u^* = \sup_M u < +\infty$, e toda função $f \in C^0(\mathbb{R})$, se $\Delta u \geq f(u)$ no subconjunto Ω_ε, para algum $\varepsilon > 0$, então $f(u^*) \leq 0$.

Demonstração. Iremos provar a seguinte cadeia de implicações:

$$(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b).$$

(**b**) $\Rightarrow$ (**c**) Fazendo $\varepsilon = 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos, por hipótese, que

$$\inf_{\Omega_{1/k}} \Delta u \leq 0 < \frac{1}{k}.$$

Dessa forma, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in \Omega_{1/k}$ tal que $\Delta u(x_k) < 1/k$. Portanto (c) ocorre.

(**c**) $\Rightarrow$ (**d**) Para $k \geq 1/\varepsilon$, temos $x_k \in \Omega_\varepsilon$, pois $u(x_k) > u^* - 1/k \geq u^* - \varepsilon$. Dessa forma, temos que

$$\frac{1}{k} > \Delta u(x_k) \geq f(u(x_k)).$$

Passando o limite na desigualdade acima, concluímos que

$$f(u^*) = \lim_{k\to\infty} f(u(x_k)) \leq 0.$$

(**d**) $\Rightarrow$ (**a**) Sejam $\lambda > 0$ e u uma função suave, não negativa e limitada, tal que $\Delta u \geq \lambda u$. Fazendo $f(u) = \lambda u$, concluímos que $f(u^*) = \lambda u^* \leq 0$, ou seja, $u \equiv 0$.

Assim, temos que a condição (d) implica na condição (b) do corolário 4.8, que por sua vez é equivalente à condição (a).

(**a**) $\Rightarrow$ (**b**) Façamos tal prova por contraposição. Suponhamos que exista uma função $u \in C^2(M)$, com $u^* < +\infty$, mas tal que, para algum $\varepsilon > 0$, vale

$$\inf_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \geq 2c > 0.$$

Definindo o conjunto $\Omega^* = \{x \in M : \Delta u(x) > c\}$, temos que $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega^*$ e, dado $\lambda = c/\varepsilon$, vale, para todo $x \in \Omega^*$,

$$\Delta u(x) > c \geq c + \lambda(u(x) - u^*) = \lambda(u(x) + \varepsilon - u^*).$$

Portanto, $u(x) + \varepsilon - u^*$ é uma subsolução de $Lu = 0$ em Ω^*, onde

$$Lu := \Delta u - \lambda u. \tag{18}$$

Como a função identicamente nula ($f \equiv 0$) é obviamente uma subsolução de (18) em M, temos que $u_\varepsilon = \max\{u + \varepsilon - u^*, 0\}$ também é uma subsolução em M. Como $u \in C^2$, tem-se $u_\varepsilon \in C^0(M)$. Além disso, $u_\varepsilon \not\equiv 0$ e $0 \leq u_\varepsilon \leq \varepsilon < +\infty$. Observando que qualquer constante positiva é supersolução de (18), escolhendo uma constante $u_+ > \varepsilon$ e aplicando o método de Perron generalizado (veja [HAN and LIN]) obtemos uma solução suave v de 18 em M tal que $u_\varepsilon \leq v \leq u_+$. Agora, como u_ε não é identicamente nula, o mesmo ocorre com v. Logo a condição (c) do corolário 4.8 não é satisfeita e, equivalentemente, (a) não é satisfeita. □

O item (c) da proposição acima motiva a seguinte definição:

Definição 4.11. *Seja M uma variedade riemanniana. Dizemos que M satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < +\infty$, existir uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ satisfazendo*

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Observando a definição acima e a proposição 4.10, vemos que uma variedade riemanniana M é estocasticamente completa se, e somente se, satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau. Além disso, combinando este resultado com o corolário 4.9, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.12. *Toda variedade parabólica satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau.*

5 HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO CMC DE GRUPOS DE LORENTZ

Com o material das últimas duas seções em mãos, podemos proceder à análise da geometria das hipersuperfícies tipo-espaço cmc de grupos de Lorentz. Para este fim, sejam G^{n+1} um grupo de Lorentz com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\varphi : M^n \longrightarrow G^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço de G. Dado um campo tipo-tempo X em $\mathfrak{g}$, dizemos que φ é transversal a X se, para todo $p \in M$, tivermos

$$T_{\varphi(p)}G = \varphi_*(T_pM) \oplus \mathbb{R}X_p.$$

Se M é conexa e orientada por um campo normal unitário tipo-tempo N, então a transversalidade de φ a X é equivalente ao fato da função suporte f_X ser estritamente positiva ou negativa em M. Agora, observemos o seguinte lema:

Lema 5.1. *(Teorema de E. Hopf). Seja M uma variedade riemanniana orientável, compacta e conexa. Se f é uma função diferenciável em M, com $\Delta f \leq 0$, então f é constante.*

Demonstração. Se dM representa a forma de volume de M e X é um campo suave em M, temos que $d(i_X dM) = (\mathrm{div} X)dM$, onde $i_X dM$ denota a contração de dM na direção de X(uma demonstração desse fato é feita no lema A.51 de [CAMINHA]). Assim, observando que $\partial M = \emptyset$ e usando o teorema da divergência, vemos que

$$\int_M \Delta f dM = \int_M (\mathrm{div} \nabla f) dM = \int_{\partial M} d(i_{\nabla f} dM) = 0.$$

Como $\Delta f \leq 0$, temos $\Delta f = 0$. Usando novamente o teorema da divergência para $f^2/2$ e o resultado do item (b) do lema 4.2, obtemos

$$0 = \int_M \Delta(f^2/2) dM = \int_M f \Delta f dM + \int_M |\nabla f|^2 dM = \int_M |\nabla f|^2 dM.$$

Portanto $\nabla f = 0$, e a conexidade de M garante que f é constante. □

Agora, podemos enunciar e provar nosso primeiro resultado principal.

Teorema 5.2. *Seja G^{n+1} um grupo de Lorentz e $\varphi : M^n \longrightarrow G^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço cmc, conexa, compacta, transversal a um elemento tipo-tempo X de $\mathfrak{g}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário N. Se*

$$Ric_G(N) \geq -\frac{H^2}{n} \tag{19}$$

ao longo de M, então:

(a) A curvatura de Ricci de G se anula na direção de N.

(b) $\varphi(M)$ é uma classe lateral de um subgrupo de Lie de G. Em particular, φ é total-

mente geodésica.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $|X| = 1$ e $f_X = \langle X, N\rangle < 0$ em M. Por outro lado, vimos no lema 3.3 que

$$\Delta f_X = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N))f_X.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que $|A|^2 \geq H^2/n$, com igualdade apenas nos pontos umbílicos. Então, como $f_X < 0$, temos

$$\Delta f_X \leq \left(\mathrm{Ric}_G(N) + \frac{H^2}{n}\right) f_X \leq 0,$$

ou seja, f_X é uma função superharmônica na variedade riemanniana compacta M. Portanto, o lema 5.1 garante que f_X é constante. Assim, temos $|A|^2 = H^2/n$ e $\mathrm{Ric}_G(N) = -H^2/n$ em M. Segue então que φ é totalmente umbílica. Escrevamos $A = \lambda Id$, onde $\lambda = -H/n$ e Id denota o homomorfismo identidade de TM.

Fixemos uma base ortonormal $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}$ de $\mathfrak{g}$, de tal modo que $X = X_{n+1}$. Aplicando o lema 3.3 novamente, obtemos

$$\Delta f_i = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N))f_i = 0$$

para $1 \leq i \leq n$. Logo, o teorema de Hopf garante que f_i é constante em M, para todo i.

Como

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle N, X_i\rangle X_i = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i f_i X_i,$$

vemos que N é a restrição de um elemento de $\mathfrak{g}$ a M. Seja E tal elemento. Escolhendo uma base ortonormal $\mathfrak{B}' = \{E_1, \ldots, E_n, E\}$ de $\mathfrak{g}$, temos que as restrições de $E_1, \ldots, E_n$ em M são tangentes em M. Dados $1 \leq i, j \leq n$ distintos e tomando pontos em M, a relação de Weyl e a umbilicidade de φ fornecem

$$\begin{aligned}
\langle [E_i, E_j], E\rangle &= \langle E_i, [E_j, E]\rangle = 2\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} N\rangle \\
&= -2\langle E_i, A(E_j)\rangle = -2\lambda\langle E_i, E_j\rangle \\
&= -2\lambda\delta_{ij} = 0.
\end{aligned}$$

Então, $[E_i, E_j] \in \mathrm{Span}(\{E_1, \ldots, E_n\})$ e, como $[E_i, E_i] = 0$, segue que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ gera uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Portanto, como as restrições de $E_1, \ldots, E_n$ a $\varphi(M)$ são tangentes ao mesmo, concluímos que $\varphi(M)$ é uma folha da folheação de G gerada por $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e, dessa forma, coincide com uma classe lateral gL, onde L é o subgrupo de Lie de G que possui álgebra de Lie gerada por $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Em particular, a observação feita após a proposição 2.25 garante que φ é totalmente geodésica e $H = 0$ em M. Assim, concluímos (a) e (b). $\square$

Afim de encontrar um resultado similar ao visto acima para o caso não compacto, precisamos pedir mais do grupo de Lorentz G. Uma das hipóteses adicionais será a limitação da *aplicação de Gauss hiperbólica* da hipersuperfície. Tal aplicação é definida, por analogia com o caso em que G é o espaço de Lorentz-Minkowski, da seguinte maneira: seja X um elemento tipo-tempo de $\mathfrak{g}$. Como T_eG é isométrico $\mathbb{L}^{n+1}$, definimos o espaço hiperbólico de T_eG com respeito a X_e por

$$\mathbb{H}^n(T_eG) = \{v \in T_eG; \langle v, v\rangle = -1 \ \text{ e } \ \langle v, X_e\rangle < 0\}.$$

Trocando N por $-N$, caso necessário, podemos assumir que N está na mesma orientação temporal de X, ou seja, que $f_X = \langle X, N\rangle < 0$. A aplicação de Gauss hiperbólica

$$\eta : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^n(T_eG),$$

de φ com respeito a N e X, é dada em $p \in M$ por $\eta(p) = Y_e$, onde Y é o único elemento de $\mathfrak{g}$ satisfazendo $Y_p = N_p$, ou seja,

$$\eta(p) = ((L_{p^{-1}})_*)_p N_p.$$

Fixados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então,

$$\begin{aligned}(\eta_p)_*(v) &= \frac{d}{dt}(\eta\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((L_{\gamma(t)^{-1}})_*)_{\gamma(t)}N_{\gamma(t)}\Big|_{t=0}\\ &= ((L_{p^{-1}})_*)_p\frac{DN}{dt}\Big|_{t=0} = -((L_{p^{-1}})_*)_pA_pv.\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$(\eta_p)_* = -((L_{p^{-1}})_*)_pA.$$

Antes de demonstrarmos o segundo resultado principal, precisaremos de um resultado auxiliar que permite afirmar que a condição (19) também faz sentido no caso em que M é completa e não compacta, desde que sua aplicação de Gauss hiperbólica seja limitada.

Lema 5.3. *Seja G^{n+1}, $n \geq 2$, um grupo de Lorentz e $\varphi : M^n \longrightarrow G^{n+1}$ uma hipersuperfície cmc de G, conexa, tipo-espaço, transversal a um elemento tipo-tempo X de $\mathfrak{g}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário tipo-tempo N, de mesma orientação temporal de X. Se a imagem da aplicação de Gauss hiperbólica de φ com respeito a N e*

X é limitada, então

$$\inf_M \mathrm{Ric}_G(N) > -\infty.$$

Demonstração. Seja $\{X_1, \ldots, X_n, X_{n+1} = X\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ e escrevamos $N = -f_X X + \sum_{i=1}^n f_i X_i$, tal que

$$-f_X^2 + \sum_{i=1}^n f_i^2 = -1. \tag{20}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_G(N) &= \mathrm{Ric}_G\left(-f_X X + \sum_{i=1}^n f_i X_i, -f_X X + \sum_{j=1}^n f_j X_j\right) \\
&= f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) + \sum_{i,j=1}^n f_i f_j \mathrm{Ric}_G(X_i, X_j) - 2f_X \sum_{i=1}^n f_i \mathrm{Ric}_G(X, X_i).
\end{aligned}$$

Como $f_X < 0$, obtemos da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_G(N) &\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - \left|\sum_{i,j=1}^n f_i f_j \mathrm{Ric}_G(X_i, X_j) - 2f_X \sum_{i=1}^n f_i \mathrm{Ric}_G(X, X_i)\right| \\
&\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - \left(\left|\sum_{i,j=1}^n f_i f_j \mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)\right| + 2|f_X| \left|\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{Ric}_G(X, X_i)\right|\right) \\
&\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - \sum_{i,j=1}^n |f_i f_j||\mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)| + 2f_X \sum_{i=1}^n |f_i||\mathrm{Ric}_G(X, X_i)| \\
&\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - \max_{1 \leq i,j \leq n} |\mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)| \sum_{i,j=1}^n |f_i f_j| + 2f_X \sum_{i=1}^n |f_i||\mathrm{Ric}_G(X, X_i)|.
\end{aligned}$$

Escrevendo $\sum_{i,j=1}^n |f_i f_j| = (\sum_{i=1}^n |f_i|)^2$ e, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_G(N) &\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - \max_{1 \leq i,j \leq n} |\mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|\right)^2 \\
&\quad +2f_X \sum_{i=1}^n |f_i||\mathrm{Ric}_G(X, X_i)| \\
&\geq f_X^2 \mathrm{Ric}_G(X) - n \max_{1 \leq i,j \leq n} |\mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)| \sum_{i=1}^n f_i^2 \\
&\quad +2f_X \left(\sum_{i=1}^n f_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\mathrm{Ric}_G(X, X_i)|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, basta observarmos que $\mathrm{Ric}_G(X)$, $\mathrm{Ric}_G(X_i, X_j)$ e $\mathrm{Ric}_G(X, X_i)$ são constantes em G, substituir $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_X^2 - 1$ e usar o fato de que a limitação da aplicação de Gauss é equivalente à existência de um $c > 0$ tal que

$$c = -\inf_M \langle X, N\rangle < +\infty. \tag{21}$$

$\square$

Agora, temos ferramentas suficientes para enunciar e provar nosso segundo resultado principal

Teorema 5.4. *Seja G^{n+1}, $n \geq 2$, um grupo de Lorentz. Seja $\varphi : M^n \longrightarrow G^{n+1}$ uma hipersuperfície cmc de G, completa, conexa, tipo-espaço, transversal a um elemento tipo-tempo X de $\mathfrak{g}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário tipo-tempo N, de mesma orientação temporal de X. Se M é parabólica, a imagem da aplicação de Gauss hiperbólica de φ com respeito a N e X é limitada e*

$$\mathrm{Ric}_G(N) \geq -\frac{H^2}{n},$$

então:

(a) A curvatura de Ricci de G se anula na direção de N.

(b) $\varphi(M)$ é uma classe lateral de um subgrupo de Lie de G. Em particular, φ é totalmente geodésica.

Demonstração. Seja $\tau = \inf_M \mathrm{Ric}_G(N) \geq -H^2/n$. Como $f_X < 0$, argumentando como na prova do teorema 5.2, obtemos

$$\Delta f_X = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N))f_X \leq \left(\frac{H^2}{n} + \tau\right) f_X, \tag{22}$$

com igualdade em algum ponto de M se, e somente se, φ é totalmente umbílica nesse ponto.

No sentido de analisar a desigualdade diferencial acima, começamos usando a limitação da aplicação de Gauss hiperbólica de φ para escolher c como em (21). Como M é parabólica, podemos invocar o princípio do máximo fraco de Omori-Yau para obter uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$, de pontos de M, tal que

$$f_X(p_k) \xrightarrow{k} -c \qquad \text{e} \qquad \Delta f_X(p_k) \geq -\frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Agora, lembrando que $\frac{H^2}{n} + \tau \geq 0$ e avaliando (22) em p_k, temos

$$-\frac{1}{k} \leq \Delta f_X(p_k) \leq \left(\frac{H^2}{n} + \tau\right) f_X(p_k).$$

Então, fazendo $k \to +\infty$, obtemos

$$c\left(\frac{H^2}{n}+\tau\right) \leq 0.$$

Como $c > 0$, a desigualdade acima gera uma contradição se $\frac{H^2}{n}+\tau > 0$. Logo, $\frac{H^2}{n}+\tau = 0$ e, voltando a (22), temos

$$\Delta f_X = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N))f_X \leq \left(\frac{H^2}{n}+\tau\right) f_X = 0.$$

Então, $-f_X$ é subharmônica em M. Como $-f_X \leq c$ e M é parabólica, concluímos que f_X é constante e, assim, $\Delta f_X = 0$. Portanto, (22) nos dá

$$\frac{H^2}{n} = |A|^2 = -\mathrm{Ric}_G(N) = -\tau$$

em M. Logo, φ é totalmente umbílica

Como na prova do teorema 5.2, fixemos uma base ortonormal $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $X = X_{n+1}$ e apliquemos o lema 3.3 para obter

$$\Delta f_i = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N))f_i = 0,$$

para $1 \leq i \leq n$. Agora, segue de (20) que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_X^2 - 1 \leq c^2 - 1,$$

de sorte que todas as f_i são limitadas superiormente. Portanto, a parabolicidade de M também garante que f_i constante, para $1 \leq i \leq n$.

Finalmente, argumentando exatamente como nos dois últimos parágrafos da prova do teorema 5.1, concluímos que $\varphi(M)$ é uma classe lateral de um subgrupo de lie de G e, assim, φ é totalmente geodésica. Então, $H = 0$ e os itens (a) e (b) seguem. $\square$

6 CONCLUSÃO

Os teoremas 5.2 e 5.4 apresentados no capítulo 5 estendem, para o contexto de grupos de Lorentz, resultados anteriores devidos a diversos autores, relacionados a problemas do tipo-Berstein para hipersuperfícies tipo-espaço cmc, conexas e completas de produtos lorentzianos. Mais especificamente, o teorema 5.4 foi inspirado em resultados devidos aos autores H. F. de Lima e Y. L. Xin.

Lembremos, agora, que uma variedade de Lorentz obedece a *condição de convergência tipo-tempo* (CCT) se a curvatura de Ricci é não negativa nas direções dos vetores tipo-tempo. Em particular, se um grupo de Lorentz G^{n+1} satisfaz a CCT, então a condição (19) nos teoremas 5.2 e 5.4 é trivialmente satisfeita para toda hipersuperfície tipo-espaço cmc de G^{n+1}. Portanto, os teoremas 5.2 e 5.4 são verdadeiros para hipersuperfícies tipo espaço cmc de grupos de Lorentz que obedecem a CCT, sem a hipótese adicional (19).

REFERÊNCIAS

ALÍAS, L. J.; CAMINHA, A. *On the scarcity of non-totally geodesic complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a Lie group with bi-invariant Lorentzian metric.* Differential Geometry and its applications JCR, v. 51, p. 49-64, 2017.

ALÍAS, L. J.; RIGOLI, M. *An Introduction to the Omori-Yau Maximum Principle and its Applications.* In XVI School of Differential Geometry. University of São Paulo, 2010.

BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York: Springer, 2011.

CAMINHA, A. *Tópicos de Geometria Diferencial.* Rio de Janeiro: SBM, 2014.

DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana.* 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

DODZIUK, J. *Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds.* Indiana Univ. Math. Soc., p. 703-716, 1984.

FORNARI, S.; RIPOLL, J. *Killing fields, mean curvature and translation maps.* Ilinois J. Math. 48., p. 1385-1403., 2004.

GRIGOR'YAN, A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on riemannian manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. 36, p. 135-249, 1999.

GRIGOR'YAN, A. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds.* AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, v. 47. Providence: AMS, 2009.

HAN, Q.; LIN, F. *Elliptic Partial Differential Equations.* Second Edition. New York: AMS, 2011.

HUBER, A. *On subharmonic functions and differential geometry in the large.* Comm. Math. Helv. 32., p. 13-72, 1957.

LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York: Springer, 2003.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity.* Los Angeles: Academic Press, 1983.

SAKAI, T. *Riemannian Geometry.* Transl. Math. Monographs, v. 149. Providence: AMS, 1996.