



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCIMARA APARECIDA PRESTES ANDRADE

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E BOLHAS DE SABÃO NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA

2016

LUCIMARA APARECIDA PRESTES ANDRADE

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E BOLHAS DE SABÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A568s Andrade, Lucimara Aparecida Prestes
Superfícies mínimas e bolhas de sabão no ensino médio / Lucimara Aparecida Prestes Andrade. -
2016.
178 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Superfícies mínimas. 2. Otimização. 3. Geometria diferencial. I. Título.

LUCIMARA APARECIDA PRESTES ANDRADE

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E BOLHAS DE SABÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Santos
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Marcos Ferreira de Melo, por sua orientação e visão para enxergar que, por trás de um simples projeto feito às pressas para a feira cultural da escola, abrir-se-iam as portas para um mundo maravilhoso e, até então, por mim desconhecido: o universo das superfícies mínimas.

A Celso Costa, que formatou e colocou em produção o PROFMAT, juntamente com Marcelo Viana e Hilário Alencar da Silva.

Ao ministro Haddad, pela assinatura da portaria para concessão da bolsa de auxílio e à CAPES pela manutenção dessa bolsa.

Aos meus familiares, em especial minha mãe e meu filho que compreenderam minhas ausências e, mesmo distantes, estiveram tão presentes. Agradeço ainda a meu filho Rafael Andrade pelo auxílio nas traduções dos áudios.

Aos meus amigos de mestrado, em especial a Elaine e Milínia, pelos poucos mas valiosos momentos de diversão e companheirismo nos finais de semana de aula, e pelas palavras de encorajamento e apoio mesmo à distância.

Ao Bruno Glasses (PROFMAT - IMPA), pela sua dedicação na elaboração de vídeo-aulas que tanto ajudaram na compreensão das disciplinas básicas.

“A felicidade é discreta, silenciosa e frágil,
como a bolha de sabão; vai-se muito rápido,
mas sempre se podem assoprar outras.”

(Rubem Alves)

RESUMO

Este trabalho sobre superfícies mínimas aborda o tema de uma forma muito simples, para que o material seja acessível a professores e até mesmo a alunos ou quaisquer pessoas que tenham curiosidade pelo assunto. Dessa forma, todos os conceitos matemáticos envolvidos são apresentados de forma clara e objetiva. A razão desse nome é porque, fixado um contorno, a superfície mínima será aquela que tiver a menor área possível para o dado contorno. Podemos fazer uma analogia entre as superfícies mínimas e as bolhas de sabão que, devido à tensão superficial, tendem a economizar fazendo sempre a menor área possível. Esse fato vem sendo usado na busca de otimização e melhor desempenho em várias áreas e empresas, desde a construção civil e indústrias de iogurte até a construção de um foguete ou um tênis eficiente. Além da imensa aplicabilidade que o estudo das películas de sabão oferece, os objetos que são criados são de uma beleza tão extraordinária, que é impossível não encantar qualquer um que os observe. A curiosidade do porquê isso acontece surge naturalmente e, a partir daí, podem ser abordados conceitos que vão desde o ensino fundamental (como questões de proporção e porcentagem) até um curso de graduação, envolvendo ainda outras áreas como Química, Física, Biologia, Economia, entre outras.

Palavras-chave: Superfícies mínimas. Otimização. Geometria Diferencial. Bolhas de sabão. Problema de Plateau. Arquitetura.

ABSTRACT

This work approaches the subject minimal surfaces in a very simple way, so that the material is accessible to teachers, students or any person who has curiosity about the subject. This way, all the mathematical concepts involved are presented in a clear and objective way. The reason for this name is because, once a boundary is fixed, the minimum surface will be the one that has the smallest possible area for the given boundary. We can make an analogy between the minimal surfaces and soap bubbles. Due to surface tension, soap bubbles always make the smallest possible surface area, saving potential energy. Such a fact has been used in the research and optimization of many subjects and companies, from buildings and yogurt industries to the construction of efficient rockets or shoes. Besides the huge applicability of soap films studies, the created objects are so beautiful that it is impossible not to enchant anyone who observes them. The curiosity of why this happens occurs naturally, and from there, new concepts, which may be applied from basic school (i.e. questions about proportion and percentage) until an academic level course, even covering other subjects such as chemistry, physics, biology and economy, can be approached.

Key-words: Minimal surfaces. Optimization. Differential Geometry. Soap Bubbles. Plateau's Problem. Architecture

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	HISTÓRICO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS	12
3	TEORIA LOCAL DE SUPERFÍCIES	15
3.1	Superfícies regulares	15
3.2	Mudança de parâmetros	20
3.3	Funções Diferenciáveis em Superfícies	20
3.4	Plano tangente e aplicação normal de Gauss	23
4	AS FORMAS FUNDAMENTAIS E CURVATURAS	27
4.1	Primeira forma fundamental	27
4.2	Segunda forma fundamental e operador forma em coordenadas locais	32
4.3	Curvaturas.....	33
4.4	Superfícies mínimas	39
5	SUPERFÍCIES MÍNIMAS	50
5.1	Superfícies mínimas clássicas	50
5.1.1	O plano.....	50
5.1.2	O catenóide.....	50
5.1.3	O helicóide.....	51
5.1.4	Superfície de Enneper.....	53
5.1.5	Superfície de Scherk.....	53
5.1.5.1	<i>Superfície de Scherk Simplesmente Periódica</i>	54
5.1.5.2	<i>Superfície de Scherk Torcida</i>	54
5.1.5.3	<i>Superfície de Scherk Duplamente Periódica</i>	55
5.1.6	Várias superfícies, algumas de maior complexidade, sem maiores explicações.....	56
5.2	Superfícies mais recentes.....	59
5.2.1	Família P, G e D de Schoen, a partir de 1960.....	59
5.2.2	O Giróide G de Alan Schoen, descoberto em 1970.....	59
5.2.3	Superfície Costa.....	60
6	APLICAÇÕES	67
6.1	Utilização dos princípios de otimização da natureza na arquitetura	71
6.1.1	Estruturas tubulares	71
6.1.2	Utilização da catenária	74
6.1.3	Antoni Gaudí	77
6.1.4	Frei Paul Otto	84
6.1.5	Shigeru Ban	89
6.1.6	Swiss Re Tower – O “pepino” de Londres	91
6.1.7	Domos Geodésicos	94
6.2	Utilização dos princípios de otimização da natureza em usos diversos	96
6.2.1	Borboletas e giróides	96
6.2.2	Produção de Energia.....	99
6.2.3	Asa da libélula e turbina de vento	101
7	PLATEAU	104
7.1	Radiolários	106
7.2	Alcanos	111
8	PROJETO SUPERFÍCIES MÍNIMAS E BOLHAS DE SABÃO	114
8.1	História	114
8.2	Bolhas de sabão na pintura	115

8.3	Projeto.....	116
8.3.1	Objetivos.....	116
8.3.2	Justificativa.....	116
8.3.3	Metodologia.....	116
8.4	Geometria das películas e bolhas de sabão.....	117
8.5	Experimentos.....	118
8.5.1	Experimentos simples sobre tensão superficial.....	118
8.5.1.1	<i>Tensão superficial I.....</i>	<i>118</i>
8.5.1.2	<i>Tensão superficial II.....</i>	<i>120</i>
8.5.1.3	<i>Tensão superficial III.....</i>	<i>123</i>
8.5.2	Experiências com placas.....	125
8.5.2.1	<i>Dois pontos.....</i>	<i>126</i>
8.5.2.2	<i>Três pontos.....</i>	<i>126</i>
8.5.2.3	<i>Menor distância entre 3 pontos.....</i>	<i>127</i>
8.5.2.4	<i>Caminho mais curto entre 4 cidades.....</i>	<i>128</i>
8.5.2.5	<i>Menor distância entre 5 pontos.....</i>	<i>130</i>
8.5.2.6	<i>Menor distância entre 6 pontos.....</i>	<i>130</i>
8.5.2.7	<i>Menor distância considerando a curvatura da Terra.....</i>	<i>131</i>
8.5.3	Figuras obtidas sobre estruturas poliédricas.....	132
8.5.3.1	<i>Tetraedro.....</i>	<i>132</i>
8.5.3.2	<i>Prisma reto de base triangular.....</i>	<i>134</i>
8.5.3.3	<i>Cubo.....</i>	<i>135</i>
8.5.3.4	<i>Octaedro.....</i>	<i>138</i>
8.5.4	Figuras obtidas em estruturas diversas.....	138
8.5.4.1	<i>Catenóide.....</i>	<i>138</i>
8.5.4.2	<i>Helicóide.....</i>	<i>140</i>
8.5.4.3	<i>Helicóide de palitos.....</i>	<i>141</i>
8.5.4.4	<i>Dois arcos perpendiculares.....</i>	<i>142</i>
8.5.4.5	<i>Faixa de Moebius.....</i>	<i>144</i>
8.5.4.6	<i>Superfície de Scherk duplamente periódica.....</i>	<i>145</i>
8.5.4.7	<i>Quatro círculos paralelos dois a dois.....</i>	<i>145</i>
8.5.5	Experiências com bolhas de sabão.....	146
8.5.5.1	<i>Duas bolhas do mesmo tamanho.....</i>	<i>146</i>
8.5.5.2	<i>Duas bolhas diferentes.....</i>	<i>147</i>
8.5.5.3	<i>Catenóide da garrafa de iogurte.....</i>	<i>148</i>
8.5.5.4	<i>Bolha dançarina.....</i>	<i>149</i>
8.5.5.5	<i>Várias bolhas juntas.....</i>	<i>151</i>
8.5.5.5.1	<i>Bolhas na garrafa descartável.....</i>	<i>154</i>
8.5.5.5.2	<i>Bolhas reproduzindo as superfícies obtidas nas estruturas poliédricas.....</i>	<i>155</i>
8.5.6	Comparação entre o volume da esfera e do cubo.....	157
8.6	Problemas abertos.....	159
8.7	Observações em relação aos materiais.....	160
8.7.1	Materiais utilizados.....	160
8.7.2	Poliedros.....	160
8.7.3	Massa de biscoito.....	164
8.8	Sugestões para as apresentações.....	165
9	CONCLUSÃO.....	168
	REFERÊNCIAS.....	169
	APÊNDICE – CURVATURAS PRINCIPAIS E CURVATURA MÉDIA.....	178

1 INTRODUÇÃO

Problemas relacionados a máximos e mínimos freqüentemente são encontrados em Física, Matemática e também em situações do dia a dia.

Tais problemas já existem desde os tempos dos gregos que já tinham o conhecimento que o círculo é a curva com perímetro fixo que engloba a maior área. Esse problema é conhecido como problema de Dido e é descrito no livro Eneida, de Publio Virgílio Maronis (70 a.C. - 19 a.C.). O problema consiste em encontrar, dentre todas as curvas planas de um dado comprimento, a que engloba a maior área. Podemos perceber com isso que máximos e mínimos têm despertado o interesse da humanidade já há muito tempo, uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C..

No século XVII, o problema da Braquistócrona (ou o problema da curva mais rápida que desce uma rampa) proposto por Bernoulli na *Acta Eruditorum*, contribuiu significativamente para os avanços nessa área, sobretudo pelos trabalhos de Euler e Lagrange, que deram origem ao Cálculo das Variações, área da matemática que busca determinar as funções que extremizam um determinado funcional. Graças aos seus trabalhos, Euler descobriu a primeira superfície mínima: o Catenóide.

Este trabalho é voltado para a teoria das superfícies mínimas, que são definidas como as superfícies que minimizam localmente a área, um problema variacional satisfeito por superfícies com curvatura média zero. Superfícies mínimas vêm sendo estudadas a mais de 250 anos, e hoje têm uma vasta gama de aplicações em áreas como Química, Biologia e Arquitetura.

O problema de se encontrar a menor superfície para um contorno fixo ficou conhecido como problema de Plateau, que foi um físico belga que realizou intensos experimentos com filmes de sabão. Tais superfícies podem ser representadas fisicamente mergulhando-se contornos de arame em uma mistura de água e sabão. Se a experiência for bem sucedida, a película formada é a superfície mínima para o dado contorno (o arame).

O nome superfície mínima foi dado por Lagrange em 1760 para aquelas superfícies que são solução de um problema variacional, mais precisamente, são pontos críticos do funcional área.

Em 1776, Meusnier deu uma definição mais geométrica para as superfícies mínimas: são as superfícies que têm curvatura média igual a zero. Encontrou o segundo exemplo de superfície mínima: o helicóide.

Foi preciso que se passassem mais de 200 anos para que a terceira superfície mínima fosse descoberta: a superfície Costa, descoberta pelo brasileiro Celso Costa, em 1976.

A teoria vem se desenvolvendo e é extremamente rica, cheia de belos exemplos e teoremas profundos. Mas, mesmo sendo objeto de intensa atividade, ainda existem muitos problemas abertos.

Neste trabalho vamos tentar dar uma imagem geral do que são as superfícies mínimas e as características que possuem. Começamos com um breve histórico (capítulo 2) e, em seguida (capítulos 3 e 4), os fundamentos de Geometria Diferencial necessários para o que vai ser demonstrado na parte final do capítulo 4: vamos provar que a definição de Meusnier, segundo o qual uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada mínima se a sua curvatura média H é identicamente nula, é equivalente a de Lagrange, segundo a qual uma superfície é mínima se é ponto crítico do funcional área.

No capítulo 5, damos exemplos de superfícies mínimas, com ênfase à superfície Costa. Afinal, o tema para esse trabalho surgiu da procura por um assunto interessante para ser apresentado na feira cultural da escola (o tema da feira era “Mentes Brilhantes do Século XX” e chegamos até o Celso Costa).

Esse trabalho não precisa ser lido sequencialmente. Um dos capítulos mais bonitos é o das aplicações (capítulo 6) e não precisa de nenhum pré-requisito para entendê-lo. É dirigido a qualquer pessoa que queira conhecer um pouco mais a respeito do assunto. Mostra um pouco da relação existente entre as superfícies mínimas e as formas orgânicas, amplamente explicadas no livro do naturalista D’Arcy Thompson.

O 7 é um pequeno capítulo dedicado à Plateau, mostrando alguns de seus experimentos com películas de sabão (outros serão mostrados no capítulo 8) e a relação existente entre as superfícies mínimas obtidas nos contornos dos poliedros e outras áreas, como Biologia (descritas por Thompson) e Química.

O capítulo 8 descreve o projeto feito com um grupo de alunos do 2.º ano do Ensino Médio. É um capítulo bastante detalhado uma vez que esse trabalho tem a pretensão de ser um guia para professores que procuram por novas práticas a serem utilizadas na sala de

aula. Esperamos assim, contribuir para que novos saberes sejam construídos e que este universo tão bonito das superfícies mínimas esteja acessível a todos.

2 HISTÓRICO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

A maioria dos problemas que exigem a minimização da área limitada por um contorno fixo ainda não foram resolvidos pelos matemáticos. Esses problemas apareceram a partir do cálculo de variações.

Leonard Euler, em 1744, obteve a equação diferencial para esse problema. Sua análise foi simplificada mais tarde por Lagrange. E a equação

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

onde $y = y(x)$, $y_x = \frac{dy}{dx}$ e $f = f(x, y, y_x)$, ficou conhecida como equação de Euler-Lagrange.

Esses resultados foram deduzidos a partir de estudos anteriores de problemas de minimização feitos por matemáticos como Newton e Bernoulli. De fato, Euler foi aluno de Bernoulli que, além de outros matemáticos da época, resolveu um dos problemas mais desafiadores daquela época, o problema da braquistócrona. Bernoulli mostrou que a solução é a cicloide.

Euler e Meusnier determinaram matematicamente os primeiros exemplos de superfícies mínimas não triviais: o catenóide e o helicóide. Até então, o único exemplo de superfície mínima era o plano, que é trivial.

Quase um século depois, Plateau realizou experimentos com película de sabão e contornos de arame dando origem ao problema que leva o seu nome. Em termos gerais, o problema de Plateau é mostrar a existência de uma superfície mínima a partir de um bordo dado. No caso, o bordo é o contorno de arame e a película de sabão é a superfície mínima.

Com seus experimentos chegou às chamadas Leis de Plateau, leis que as películas elásticas seguem governadas pela tendência à minimização de sua área superficial. Segundo essas leis, três filmes adjacentes encontram-se ao longo de uma linha curva com ângulos de 120° entre eles, ou quatro linhas, cada uma formada pela intersecção de três filmes, encontram-se em um ponto, com ângulos de $109^\circ 28' 16''$ (ângulo tetraédrico) entre cada par de linhas adjacentes.

Muitos anos foram dedicados ao estudo do Problema de Plateau, o qual resultou ser bastante difícil de resolver. Em 1835, Scherk obteve novas superfícies, o que lhe valeu um prêmio na Academia de Ciências de Paris. Ele introduziu nas equações de Lagrange a

condição de que as variáveis poderiam ser separadas. Mais precisamente, ele supôs que $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

Em 1864, Enneper apresentou uma superfície, imagem de uma aplicação que só envolve somas e produtos e, portanto, com uma representação simples.

H. A. Schwarz e B. Riemann, em 1865, seguidos por K. Weierstrass em 1866, e G. Darboux em 1914, contribuíram para compreender melhor a pergunta formulada por Plateau.

Em 1928, Jesse Douglas deu a solução do Problema de Plateau no caso do contorno ser uma curva simples retificável de Jordan (isto é, uma curva sem intersecções, fechada e com comprimento finito) e a superfície S ter o tipo topológico do disco D^2 . Entretanto, sua demonstração resultou incompleta, e até 1931 seu artigo ainda não havia sido publicado. Em 1930, de maneira independente, o matemático húngaro Tibor Radó publicou uma solução para o problema de Plateau. Nas décadas seguintes, Douglas resolveu vários outros problemas da teoria das superfícies mínimas. Seu trabalho foi reconhecido em 1936 com a medalha Fields, comparável ao prêmio Nobel pela importância (na verdade, é mais difícil ganhar a medalha Fields do que o Nobel, já que a premiação é a cada quatro anos e tem que ter menos de 40 anos de idade). Douglas e Radó tiveram a brilhante idéia de minimizar a integral de Dirichlet – em posterior reformulação por Courant (1950) – ao invés da própria integral de área.

Até então, o catenóide e o helicóide eram as únicas superfícies mínimas conhecidas. Somente em 1982 o matemático brasileiro Celso Costa descobriu a terceira que recebeu o seu nome. O conhecimento de técnicas das variáveis complexas das funções elípticas propiciou a Costa descobrir a sua famosa superfícies mínima.

Desde os tempos de Gauss, Riemann e de outros que a Geometria Diferencial entrelaça-se com a Análise Complexa. Um dos mais belos efeitos disto é a bem conhecida representação de Weierstrass para superfícies em \mathbb{R}^3 , consistindo de dados meromorfos (f,g) que descrevem inteiramente uma tal superfície.

A procura por resolver o problema de Plateau trouxe grandes avanços para a Matemática. Um deles foi a contribuição para o desenvolvimento da Teoria Geométrica da Medida. Além disso, as superfícies mínimas de curvatura total finita têm sido muito estudadas com notáveis descobertas. Uma aplicação célebre de hipersuperfícies mínimas do tipo minimizantes para a Físico-Matemática foi a prova da conjectura de Massa Positiva, por Schoen e Yau.

Cabe ressaltar, ainda, que as superfícies mínimas também desempenham um papel muito importante na relatividade geral modelando aparentes horizontes de buracos negros. A Desigualdade Penrose, por exemplo, dá uma desigualdade bela e nítida entre a massa total e a área de uma esfera mínima de abertura máxima.

Recentemente Fernando Codá e André Neves encontraram uma conexão entre a teoria Min-Max e a conjectura de Willmore (1965).

A busca por condições de estabilidade trouxe um resultado positivo em 1974 por J. L. Barbosa e M. do Carmo. Isso contribuiu para provar que superfícies mínimas do tipo $z = f(x, y)$ (isto é, gráficos mínimos) são estáveis.

Muitas outras técnicas têm sido empregadas no estudo das superfícies mínimas, como fórmulas de monotonicidade, princípio de máximo forte, estimativas de curvatura, a representação de Weierstrass, entre outras.

As últimas décadas foram de grande atividade no desenvolvimento das superfícies mínimas, inclusive por matemáticos brasileiros. E, mesmo depois de séculos, ainda existem questões abertas que, certamente, ainda trarão muitos frutos.

3 TEORIA LOCAL DE SUPERFÍCIES

Como este trabalho abordará as chamadas superfícies mínimas, que são aquelas que têm curvatura zero, vamos começar falando o que é uma superfície e desenvolver toda a teoria necessária para podermos definir o que é curvatura, que será feito no próximo capítulo.

3.1 Superfícies regulares

Neste capítulo, vamos formalizar a noção de superfície em \mathbb{R}^3 . Da mesma forma que curvas regulares são deformações “suaves” em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de um pedaço “inteiro” da reta real, superfícies são analogamente deformações “suaves” em \mathbb{R}^3 de um pedaço inteiro de \mathbb{R}^2 .

Mas existem algumas diferenças importantes: enquanto qualquer curva pode ser apresentada como a deformação de um pedaço da reta respeitando comprimentos (como, por exemplo, um fio de metal que é entortado sem ser esticado, que é exatamente a parametrização pelo comprimento de arco), não é possível construir uma esfera a partir de uma folha de papel sem esticar, alongar ou amassar essa folha.

Assim, constataremos uma diferença óbvia entre a teoria das curvas e a teoria das superfícies: toda curva é descrita por uma parametrização e existe sempre uma parametrização natural dada pelo comprimento de arco. Para as superfícies não existem tais parametrizações e muitas vezes nem sequer é possível encontrar uma parametrização que descreva a totalidade da superfície.

Nas disciplinas estudadas, já vimos alguns tipos de superfícies.

- a) Gráficos de funções de duas variáveis;
- b) Superfícies de revolução;
- c) Superfícies quádricas.

Intuitivamente consideramos uma superfície como um conjunto de pontos do espaço que se assemelha a uma porção do plano numa vizinhança de cada um deles, tal como a superfície da Terra. Embora esférica, parece plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até a linha do horizonte. Isso ocorrerá quando a superfície for a imagem de uma aplicação suficientemente regular de um conjunto de pontos do plano em pontos de \mathbb{R}^3 .

De uma forma geral, podemos falar que uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-intersecções. A idéia é que tenhamos um

conjunto suficientemente suave de forma que as noções de Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.

Como neste trabalho vamos estudar as superfícies sob o ponto de vista da Geometria Diferencial, vamos assumir que temos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 e consideraremos a função

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

de duas variáveis u e v que variam em um aberto. Para cada $(u,v) \in U$, $X(u,v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u,v)$. A fim de que possamos utilizar as técnicas de cálculo diferencial no estudo de superfícies, vamos exigir a diferenciabilidade da função X . Além disso, para garantirmos que a superfície tenha em cada ponto um plano tangente, vamos considerar que, em todo ponto, a matriz jacobiana da aplicação tenha posto 2.

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

$(u,v) \in U$, as funções $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. X é um homeomorfismo. Como X é contínua pela condição 1, isto significa que X tem inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A condição de injetividade é equivalente a exigir que a matriz jacobiana $dX_{(u,v)}$ tenha posto 2. Isto é, que os vetores X_u e X_v sejam linearmente independentes. Ela é a condição de regularidade que confere “suavidade” à superfície e, assim, garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S , que será necessário nas próximas seções.

A aplicação X é chamada uma parametrização, carta ou um sistema de coordenadas (locais) em uma vizinhança de p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma vizinhança coordenada e (u, v) são chamadas de coordenadas locais.

Um conjunto de parametrizações cujas imagens cobrem S é chamado um atlas. Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, então, fixado um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

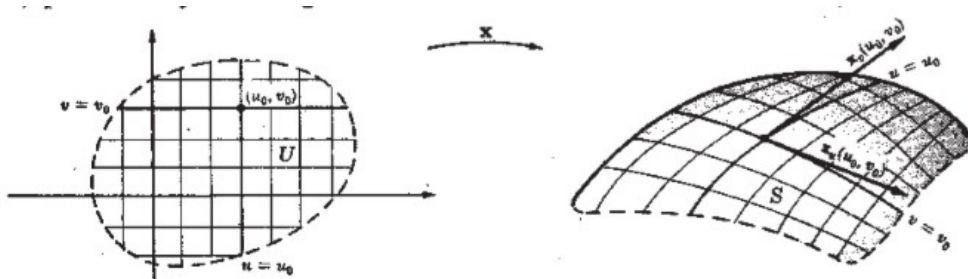
$$u \rightarrow x(u, v_0)$$

$$v \rightarrow x(u_0, v)$$

são chamadas curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) .

A imagem da reta coordenada $v = v_0$ em U será uma curva $x = x(u, v_0)$ de S , ao longo da qual u é um parâmetro. Analogamente, a imagem da reta coordenada $u = u_0$ é a curva $x = x(u_0, v)$ de S , na qual v é um parâmetro. Desta forma, a representação paramétrica cobre S com duas famílias de curvas, que constituem a imagem de retas coordenadas $v = \text{constante}$ e $u = \text{constante}$.

Figura 1 – Curvas coordenadas



Fonte: <https://pt.scribd.com/doc/106659870/Geometria-Diferencial-Lipschutz>

Portanto, a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 é

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Como dX_q é injetiva, os dois vetores coluna da matriz acima são linearmente independentes. Isto significa que pelo menos um dos menores 2×2 é diferente de zero.

Como os vetores são linearmente independentes, eles formam uma base para o espaço tangente que veremos mais adiante.

Vejamos um exemplo de uma superfície regular.

Exemplo 1. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície mas não é uma superfície parametrizada, isto é, não existe uma parametrização que cobre a esfera toda. A seguir, daremos um exemplo de atlas para a esfera.

Parametrizações para os hemisférios superior (z positivo) e inferior (z negativo) da esfera são dadas respectivamente por $x_1, x_2 : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é o disco unitário e

$$x_1(x,y) = (x, y, +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}),$$

$$x_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$

Estas parametrizações, juntamente com as parametrizações para os hemisférios x positivo e x negativo

$$x_3(x,y) = (+\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x, y)$$

$$x_4(x,y) = (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x, y)$$

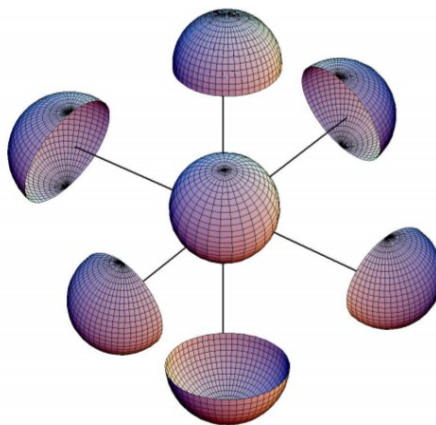
e as parametrizações para os hemisférios y positivo e y negativo

$$x_5(x,y) = (x, +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, y)$$

$$x_6(x,y) = (x, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, y)$$

constituem um atlas para a esfera.

Figura 2 – Atlas da esfera



Decidir se um dado subconjunto de \mathbb{R}^3 é uma superfície regular, a partir da definição, pode ser um tanto cansativo (ver a demonstração de que a esfera é regular em CARMO, 2005, p. 65 – 67). A seguir, daremos alguns resultados que simplificarão essa tarefa. A Proposição 1 mostra a relação existente entre a definição de uma superfície regular e o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. A Proposição 2 usa o teorema da função inversa e relaciona a definição de superfície regular com subconjuntos da forma $f(x, y, z) = \text{constante}$.

Proposição 1. Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável de classe C^k então o gráfico de f definido como $f(x, y) = (x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Demonstração: Basta mostrar que a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A parametrização X possui todas as suas componentes diferenciáveis. Logo, a condição (1) é verificada.

Para verificar a condição (2), podemos inicialmente observar que cada ponto (x, y, z) do gráfico é imagem por X de um único ponto $q = (u, v) \in U$, onde $(u, v) = (x, y)$. Portanto, X é bijetiva. Mas X^{-1} é a restrição ao gráfico de f da projeção de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy , que é contínua. Logo, X^{-1} é contínua.

A condição (3) também é verificada, pois a matriz Jacobiana de X é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

que sempre tem posto 2. Portanto, o gráfico de f é uma superfície regular.

Proposição 2. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície em \mathbb{R}^3 .

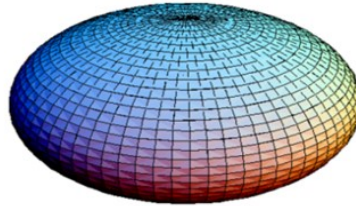
Lembremos que um número real $a \in f(U)$ diz-se um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, $\text{grad}(f) = (f_x, f_y, f_z) \neq (0, 0, 0)$ em qualquer ponto da inversa

$$f^{-1}(a) = \{ (x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a \}.$$

Demonstração: (CARMO, 2005, p. 69, 70).

Exemplo 2. O elipsóide $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$ é uma superfície.

Figura 3 – Elipsóide



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/Apontamentos/sebenta.pdf>

Com efeito, $S = f^{-1}(1)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e 1 é um valor regular de f , pois $\nabla f = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ só se anula em $(0, 0, 0) \notin S$.

Este exemplo inclui a esfera como um caso particular ($a = b = c = 1$).

3.2 Mudança de parâmetros

Vamos estender as definições e resultados do Cálculo Diferencial para as superfícies, isto é, vamos *fazer* cálculo diferencial em superfícies. Nesta seção vamos definir o que significa uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ser diferenciável em um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$. Um modo natural de fazer isso é tomar uma vizinhança coordenada $V \subset \mathbb{R}^2$ de p , parametrizada por uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ e verificar se a composta $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Como um mesmo ponto pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas, é necessário que esta definição não dependa da escolha de um sistema de coordenadas.

Proposição 3. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^k e um ponto $p \in S$. Considere duas parametrizações $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Então a mudança de coordenadas $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem inversa h^{-1} diferenciável.

Demonstração: (CARMO, 2005, p. 83, 84).

3.3 Funções Diferenciáveis em Superfícies

Seja S uma superfície regular. O que significa $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ser diferenciável?

Definição 2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^k . Dizemos que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável de classe C^k em um ponto $p \in S$ se, para alguma parametrização (ou carta local) $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ de uma vizinhança coordenada V de p a composta

$$f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável de classe C^k em $X^{-1}(p)$.

Dizemos que f é diferenciável de classe C^k se f é diferenciável de classe C^k em todo ponto de S .

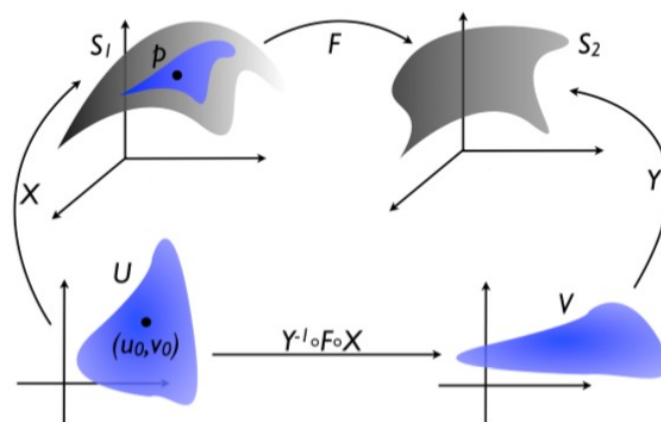
Como consequência imediata da proposição anterior, segue que a definição acima não depende da escolha da parametrização X .

Para os conceitos que trataremos na continuação deste trabalho, precisaremos estender a definição de diferenciabilidade acima às aplicações entre superfícies. Isso nos permitirá o desenvolvimento de algum cálculo diferencial sobre uma superfície regular. Este cálculo é uma generalização natural do cálculo diferencial sobre um aberto de \mathbb{R}^2 .

Mas, sendo $F : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação entre superfícies, o que significa F ser diferenciável?

Definição 3. Uma aplicação $F : S_1 \rightarrow S_2$ entre superfícies regulares é diferenciável em $p \in S_1$ se existe uma carta $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S_1 que contém p e outra carta $Y : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S_2 que contém $F(p)$ tal que $Y^{-1} \circ F \circ X$ é diferenciável (u_0, v_0) , onde $p = X(u_0, v_0)$.

Figura 4 – Função diferenciável



Para encerrar esta sessão, mencionaremos alguns pontos fundamentais sobre a teoria das curvas, a fim de tratá-las sobre o ponto de vista deste capítulo, isto é, como um subconjunto do \mathbb{R}^3 .

O símbolo I indicará um intervalo aberto da reta \mathbb{R} . Uma curva regular em \mathbb{R}^3 é um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ com a seguinte propriedade: Para cada ponto $p \in C$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e um homeomorfismo diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \cap C$ tal que a diferencial $d\alpha_t$ é injetiva para cada $t \in I$.

É possível provar que a mudança de parâmetros é dada (como para as superfícies) por um difeomorfismo. A partir desse resultado fundamental, é possível verificar quando uma dada propriedade, obtida através de uma parametrização, independe desta parametrização. Uma tal propriedade será então uma propriedade local do conjunto C .

Por exemplo, verifica-se que o comprimento de arco é independente da parametrização escolhida e é, portanto, uma propriedade do conjunto C . Como sempre é possível parametrizar localmente uma curva regular C pelo comprimento de arco, as propriedades (curvatura, torção, etc.) determinadas por meio desta parametrização são propriedades locais de C . Isso mostra que a teoria local das curvas é válida para curvas regulares.

Escolhemos definir uma superfície (regular) como um subconjunto de \mathbb{R}^3 porque, desta forma, poderemos considerar tanto propriedades globais, como propriedades locais das superfícies. Pode-se questionar por que não definimos uma superfície simplesmente como uma superfície parametrizada, como no caso das curvas. Na verdade, não há nenhum problema sério com esse ponto de vista, desde que apenas questões locais sejam consideradas. Por outro lado, conceitos globais básicos, como a orientação (que trataremos no próximo capítulo) teria que ser omitida.

Em todo caso, a noção de superfície parametrizada é por vezes útil e deve ser incluída aqui.

Definição 4. Uma superfície parametrizada $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado traço de X . X é regular se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$. Um ponto $p \in U$ onde dX_p não é injetiva é chamado um ponto singular de X .

Proposição 4. Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada e seja $q \in U$. Então existe uma vizinhança V de q em \mathbb{R}^2 tal que $X(V) \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular.

Demonstração: (CARMO, 2005, p. 93).

3.4 Plano tangente e aplicação normal de Gauss

Como havíamos mencionado anteriormente, a condição (3) da definição de superfície regular nos garante a existência de um plano tangente em um ponto p de S . Entendemos por vetor tangente a S , em um ponto $p \in S$, o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 5. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

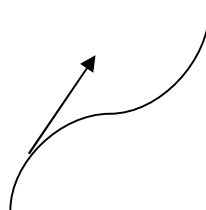
coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $X(q)$.

Demonstração: (CARMO, 2005, p. 98).

Pela proposição acima, o plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $X(q) = p$, não depende da parametrização X . Esse plano será chamado de plano tangente a S em p , e será denotado por T_pS .

Nosso objetivo é falar de curvatura que, num sentido intuitivo, é dizer como que os objetos se “curvam”. A idéia de curvatura de uma curva que esteja contida no plano ou em \mathbb{R}^3 é dizer como a derivada se afasta dessa curva.

Figura 5 – Curvatura de uma curva



Fonte do autor

Analogamente, para curvatura de uma superfície, gostaríamos de calcular o quanto essa superfície se afasta do plano tangente T_pS , em uma vizinhança de p . Como não podemos “derivar” um plano, o que fazemos é definir uma normal e medimos a taxa de variação em p de um campo vetorial normal e unitário N em uma vizinhança de p . Isso vai dar a mesma informação que a variação do plano tangente. Veremos mais tarde que essa variação é dada por uma transformação linear em T_pS que é auto-adjunta.

Lembremos que $\{X_u, X_v\}$ formam uma base para o plano tangente T_pS . Então, uma vez fixada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor normal e unitário dado por:

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q), \quad q \in X(U).$$

Dado um ponto p em uma superfície regular S , existem dois vetores unitários em \mathbb{R}^3 que são normais ao plano tangente T_pS (cada um deles é chamado de vetor normal unitário em p – os dois são iguais a menos de sinal). Dizemos que S é orientável se esse campo normal existe. Isto é:

Definição 5. Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S e, neste caso, S diz-se orientada.

Uma vez que esse campo é unitário, quando ele existe, ele cai na esfera unitária do \mathbb{R}^3 .

Definição 6. A aplicação normal de Gauss é a aplicação $N : S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dada localmente por

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

onde S^2 é a esfera unitária.

Vamos agora estudar a variação de N , ou seja, a sua derivada.

É imediato verificar que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}S^2$. Como T_pS e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em T_pS .

A aplicação linear $dN_p : T_pS \rightarrow T_{N(p)}S^2$ opera da seguinte maneira: para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 . Isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_{N(p)}S^2$. Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . No caso das curvas, esta medida é dada por um número (a curvatura). No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Um resultado importante sobre dN_p está contido no fato dela ser auto-adjunta. Recordemos alguns fatos de Álgebra Linear. Se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A : V \rightarrow V$ é um operador autoadjunto, ou seja,

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

o funcional bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$B(v, w) = \langle Av, w \rangle$$

é simétrico. Logo, a ele está associado de forma única uma forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(v) = B(v, v).$$

Proposição 6. O operador forma é auto-adjunto.

Demonstração: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in S$. Como $\{X_u, X_v\}$ formam uma base de $T_p S$, para provar que dN_p é autoadjunta, basta mostrar que

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle \quad (1)$$

Se

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

é uma curva regular em S com $\alpha(0) = p$, por definição e pela Regra da Cadeia, temos que

$$dN_p(\alpha'(0)) = d/dt(N \circ \alpha)(t)_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0).$$

Em particular, temos que

$$dN_p(X_u) = N_u,$$

$$dN_p(X_v) = N_v$$

de modo que (1) é equivalente a

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Para provar esta última equação, basta lembrar que N é perpendicular a X_u e a X_v .

Logo, temos que

$$\langle N, X_u \rangle = 0,$$

$$\langle N, X_v \rangle = 0.$$

Derivando estas duas equações, a primeira com relação a v e a segunda com relação a u , segue que

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Ou seja,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$$

Q.E.D.

Como o operador forma dN_p é um operador autoadjunto, podemos associar a ele uma forma quadrática.

Definição 7. A forma quadrática

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

O motivo para o sinal negativo será esclarecido no próximo capítulo.

Até aqui, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. No próximo capítulo, começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície.

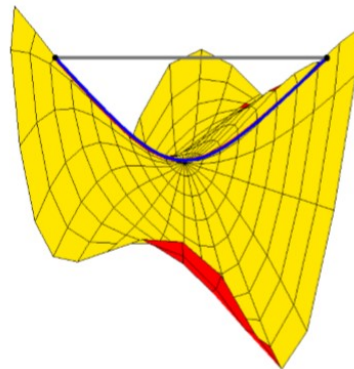
4 AS FORMAS FUNDAMENTAIS E CURVATURAS

Uma curva do \mathbb{R}^3 fica determinada de modo único por dois valores locais invariantes, que são a curvatura (quanto ela se afasta de ser uma reta) e a torção (quanto a curva se afasta de estar contida num plano). De modo análogo, uma superfície no \mathbb{R}^3 fica unicamente determinada por certos valores locais invariantes que recebem os nomes de primeira e segunda formas fundamentais.

4.1 Primeira forma fundamental

A primeira coisa que um habitante de uma superfície, com alguma curiosidade pela geometria, talvez queira saber é como medir a distância entre dois pontos da superfície. Evidentemente, esta distância será, em geral, diferente da distância medida por um habitante do espaço tridimensional, pois o segmento de reta que dá o caminho mais curto entre dois pontos de \mathbb{R}^3 não está, em geral, contido na superfície.

Figura 6 – Distância entre dois pontos



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/Apontamentos/sebenta.pdf>

Então queremos definir a distância entre os pontos acima utilizando curvas contidas em S . (Este problema começou a ser estudado no final do século XVIII – era um dos problemas do cálculo de variações).

Neste capítulo, estudaremos o instrumento que nos permite calcular comprimentos, ângulos e áreas numa superfície: a primeira forma fundamental. Ela é a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 .

Consideremos uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$. O produto interno usual do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente $T_p S$ um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Assim, se

w_1 e $w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores de \mathbb{R}^3 . A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

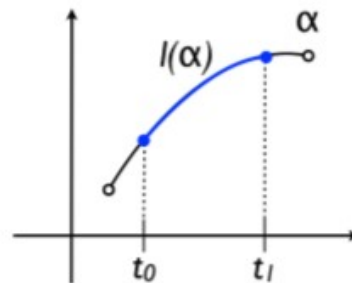
Definição 1. A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por (1), é chamada a *primeira forma fundamental da superfície regular* $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Geometricamente, como veremos em breve, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície, sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 onde está a superfície.

Vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada à parametrização $X(u, v)$ em p .

Sabemos que o comprimento l de uma curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre t_0 e t_1 ($t_0, t_1 \in I$) é dado pela integral $l(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$.

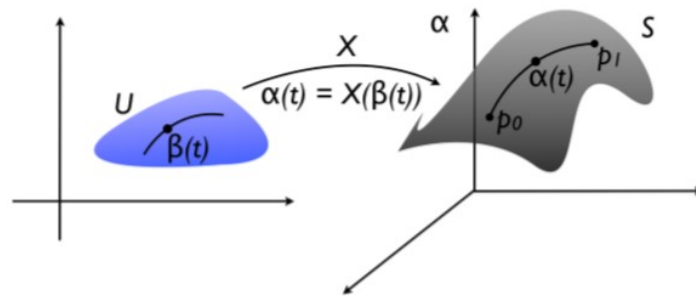
Figura 7 – Comprimento de uma curva



Fonte: <http://docplayer.es/15423293-Geometria-diferencial-de-curvas-y-superficies-notas-de-curso.html>

Seja $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S e suponhamos que a curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está contida em S . Então $\alpha(t) = X(\beta(t)) = X(u(t), v(t))$, onde $\beta: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável em U . Especificamente, β se define como $\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t))$.

Figura 8 – Parametrização X



Fonte: <http://docplayer.es/15423293-Geometria-diferencial-de-curvas-y-superficies-notas-de-curso.html>

Então, temos:

$$\alpha'(t) = (X(u(t), v(t)))' = X_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + X_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t).$$

Ou, abreviadamente,

$$\alpha'(t) = X_u \cdot u' + X_v \cdot v'$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle X_u \cdot u' + X_v \cdot v', X_u \cdot u' + X_v \cdot v' \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u' \cdot v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \end{aligned}$$

Para cada parametrização $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, Gauss introduziu a seguinte notação no século XIX:

$E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis dadas por:

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle,$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle,$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle.$$

Usando esta notação, teremos:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}.$$

Abreviando, teremos

$$|\alpha'| = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} = \sqrt{I(\alpha)}.$$

Definição 2. A expressão

$$I_p(\alpha) = E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2$$

com $p = \alpha(t)$, chama-se **primeira forma fundamental**.

Os números E , F e G são chamados de coeficientes da primeira forma fundamental. Como a parametrização X é diferenciável, os coeficientes E , F e G são diferenciáveis.

A partir do momento que temos a primeira forma fundamental, podemos fazer geometria na nossa superfície. Como dito anteriormente, a importância da primeira forma fundamental I é que, conhecendo seus coeficientes, podemos tratar questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Podemos, por exemplo, calcular o comprimento de uma curva $\alpha \subset S$.

Já sabemos o que é o comprimento de uma curva S como curva de \mathbb{R}^3 . E esse é o mesmo comprimento como curva de S , mas agora podemos calculá-lo em função dos coeficientes da primeira forma fundamental.

Como o vetor tangente à curva vai estar contido no plano tangente à superfície, o comprimento de arco L de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ será:

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I(\alpha'(t))} dt$$

Em particular, se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização $X(u, v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α entre, digamos, 0 e t por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$$

Assim, se conhecemos os coeficientes, podemos calcular o comprimento do vetor velocidade e, portanto, o comprimento da curva. Com a primeira forma fundamental também podemos calcular área de uma região.

Definição 3. Um domínio (regular) de S é um subconjunto aberto e conexo de X , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, a sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos. Uma *região* de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ é limitada se está contida em alguma bola de \mathbb{R}^3 .

Vamos considerar regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Em outras palavras, R é a imagem por X de uma região limitada $Q \subset U$.

Lembrando que, quando temos $u, v \in \mathbb{R}^3$ o cálculo de $|u \wedge v|$ nos dá a área do paralelogramo gerado pelos vetores u e v . Usaremos essa observação para definir a área de uma região. A função $|X_u \wedge X_v|$, definida em U , representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores X_u e X_v .

Definição 4. Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo dado por

$$A(R) = \iint_Q |X_u \wedge X_v| \, dudv,$$

com $X(Q) = R$, é chamado área de R .

Lembrando da álgebra linear que essa área pode ser calculada por

$$\begin{aligned} |X_u \wedge X_v| &= \sqrt{\langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

Que é outra maneira de calcular área. Isto é, se conhecemos os coeficientes de I , podemos calcular a área da região R .

Ainda podemos calcular ângulos a partir dos coeficientes de I . Ver (CARMO, pag. 113).

4.2 Segunda forma fundamental e operador forma em coordenadas locais

Até agora, as definições foram dadas evitando o uso de coordenadas locais a fim de dar ênfase à natureza geométrica dos entes introduzidos. Alguns exemplos simples puderam ser calculados diretamente das definições. No entanto, esse método é ineficiente para lidar com situações mais gerais. Nesta seção, obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss em um sistema de coordenadas locais. Deste modo, teremos um método sistemático para o cálculo de exemplos específicos. Além disso, as expressões gerais obtidas são essenciais a uma investigação mais detalhada dos conceitos introduzidos.

Todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ consideradas nesta subseção serão assumidas compatíveis com a orientação da superfície S ; isto é, em $x(U)$, temos que

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Dado $p \in S$ e uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de uma vizinhança de p em S , $p = X(u,v)$, queremos obter a matriz que representa o operador forma $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ na base $B = \{X_u, X_v\}$.

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p . Temos que o vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e, como

$$N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t))$$

Então,

$$dN(\alpha') = N'(u'(t), v'(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_v pertencem a $T_p S$, temos que

$$N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$$

$$N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v$$

E, portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') X_u + (a_{21} u' + a_{22} v') X_v.$$

Isto é,

$$dN \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Isso mostra que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$. Note que essa matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que $\{X_u, X_v\}$ formem uma base ortonormal.

Também podemos obter os coeficientes da segunda forma fundamental $e(u,v)$, $f(u,v)$, $g(u,v)$ nesta base coordenada, isto é,

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha') &= -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'u' \langle N_v, X_u \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle). \end{aligned}$$

No entanto, já vimos que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

Então, temos

$$\Pi_p(\alpha') = -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle)$$

E, assim

$$\Pi_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2,$$

onde

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental.

4.3 Curvaturas

Como operador forma é auto-adjunto, ele é diagonalizável e possui dois autovalores reais (que podem ser iguais) cujo produto é o seu determinante e cuja soma é o

seu traço. Os autovalores do operador forma e seus autovetores associados possuem significado geométrico, assim como o seu determinante e o seu traço. Veremos nesta seção o significado geométrico de cada um desses conceitos algébricos, assim como o da segunda forma fundamental.

Proposição 1. (Matriz do Operador Forma). Seja

$$B = \{X_u, X_v\}$$

uma base coordenada para o espaço tangente T_pS . Então

$$\begin{aligned} [dN_p]_B &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eG - fE & fE - gE \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja

$$[dN_p]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Por definição, como

$$dN_p(X_u) = N_u$$

$$dN_p(X_v) = N_v$$

temos

$$[dN_p]_B = [[N_u]_B \ [N_v]_B$$

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11} \langle X_u, X_u \rangle + a_{21} \langle X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F,$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11} \langle X_u, X_v \rangle + a_{21} \langle X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12} \langle X_u, X_u \rangle + a_{22} \langle X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12} \langle X_u, X_v \rangle + a_{22} \langle X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= - \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Corolário 1. Temos

$$\det dN_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

e

$$\operatorname{tr} dN_p = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Demonstração: Pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \det dN_p &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (EG - F^2)(eg - f^2) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{tr} dN_p = \frac{1}{EG - F^2} (fF - eG + fF - gE) = - \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

A matriz $[a_{ij}]$ relacionada a dN_p tem os seguintes coeficientes

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

E assim,

$$\begin{aligned} \det[a_{ij}] &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}\right)\left(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\right) - \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2}\right)\left(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{f^2F^2 - fgEF - efFG + egEG - eg^2 + fgEF + efFG - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 + egEG - egF^2 - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2(GE - F^2) + eg(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Logo

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1$ e $-k_2$ são autovalores de dN . Portanto, k_1 satisfaz $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ e k_2 satisfaz $dN_p(e_2) = -k_2e_2$. Logo $\det[dN_p + KI] = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}\right] &= \det\begin{pmatrix} a_{11} + \kappa & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \kappa \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + \kappa)(a_{22} + \kappa) - a_{21}a_{12} = 0 \\ &= a_{11}a_{12} + a_{11}\kappa + a_{22}\kappa + \kappa^2 - a_{21}a_{12} = 0 \\ &= \kappa^2 + \kappa(a_{11}a_{22}) + (a_{11}a_{22}) - (a_{21}a_{12}) = 0 \end{aligned}$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação acima, concluímos que

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = -\frac{1}{2}(a_{11}a_{22}) = \frac{1}{2}\left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\right)$$

E, assim, temos que

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Sabemos que

$$H = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

Logo, $2H = a_{11} + a_{22}$. Substituindo na equação acima (e lembrando que $K = \det[a_{ij}]$), temos

$$k^2 + 2Hk + K = 0$$

Resolvendo,

$$k = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} \Rightarrow k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Com essa relação podemos notar que conhecendo a curvatura média e Gaussiana podemos obter facilmente as curvaturas principais.

Curvaturas Principais

Como o operador forma dN_p é autoadjunto, existe uma base ortonormal $\{E_1, E_2\}$ de autovetores de dN_p para T_pS . Escrevemos

$$dN_p(E_1) = -\kappa_1 E_1,$$

$$dN_p(E_2) = -\kappa_2 E_2.$$

Nesta base ortonormal, a segunda forma fundamental se escreve como

$$II_p(V) = II_p(V_1 E_1 + V_2 E_2)$$

$$\begin{aligned}
&= -\langle dN_p(V_1E_1 + V_2E_2), V_1E_1 + V_2E_2 \rangle \\
&= -\langle -k_1V_1E_1 - k_2V_2E_2, V_1E_1 + V_2E_2 \rangle \\
&= k_1V_1^2 + k_2V_2^2
\end{aligned}$$

É um resultado de Álgebra Linear (veja uma prova simples em CARMO, 2005, p. 257) que κ_1, κ_2 são os valores máximo e mínimo da forma quadrática Π_p sobre o círculo unitário $\|V\| = 1$ em T_pS .

Definição 5. As curvaturas principais em p são a curvatura normal máxima κ_1 e a curvatura normal mínima κ_2 definidas escolhendo $\kappa_1 > \kappa_2$. As direções dos autovetores E_1, E_2 do operador forma são chamadas as direções principais em p . Como os autovetores E_1, E_2 são ortogonais, as direções principais são ortogonais.

Proposição 2. (Interpretação Geométrica da Curvatura Gaussiana). Seja p um ponto de uma superfície regular S tal que $K(p) = 0$ e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não muda de sinal. Então

$$K(p) = \lim_{R \rightarrow p} \frac{A(N(R))}{A(R)}$$

Onde $A(R)$ é a área de uma região $R \subset V$ contendo p e $A(N(R))$ é a área da imagem $N(R)$ da região R pela aplicação $S \rightarrow S^2$.

Demonstração: O limite no enunciado entendido da seguinte forma: uma seqüência de regiões R_n converge para p se qualquer bola com centro em p contém todos os R_n para n suficientemente grande. Temos

$$\begin{aligned}
A(R) &= \iint_D \|X_u \times X_v\| \, dudv, \\
A(N(R)) &= \iint_D \|N_u \times N_v\| \, dudv,
\end{aligned}$$

onde $D = \varphi^{-1}(R)$. Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial u} &= dN(X_u) \\
\frac{\partial N}{\partial v} &= dN(X_v)
\end{aligned}$$

Temos

$$N_u \times N_v = (\det dN(X_u \times X_v)) = K(X_u \times X_v).$$

Logo,

$$A(N(R)) = \iint_D K \|X_u \times X_v\| du dv.$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais,

$$\begin{aligned} \frac{A(N(R))}{A(R)} &= \lim_{R \rightarrow p} \frac{\frac{A(N(R))}{A(D)}}{\frac{A(R)}{A(D)}} \\ &= \frac{\lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{A(D)} \iint_D K \|X_u \times X_v\| du dv}{\lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{A(D)} \iint_D \|X_u \times X_v\| du dv} \\ &= \frac{K(p) \|X_u \times X_v\|(p)}{\|X_u \times X_v\|(p)} = K(p). \end{aligned}$$

4.4 Superfícies mínimas

Dizemos que uma superfície parametrizada regular ou uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima se $H = 0$. Geometricamente, as duas curvaturas principais são iguais em módulo e têm sinais opostos em todo ponto da superfície.

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso **Problema de Plateau**. O problema pode ser descrito da seguinte forma: provar que, para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$, existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Isto é, queremos minimizar a área dentre todas as superfícies do \mathbb{R}^3 com fronteira dada C . Esse é o problema de Plateau escrito da forma mais econômica possível. Tornar o problema preciso (quais curvas e superfícies são permitidas e o que significa C ser fronteira de S) é em si uma parte não trivial do problema.

O problema foi resolvido para o caso de aplicações que estão definidas em discos por Douglas e Radò. Mas podemos olhar para superfícies com topologia que não são

necessariamente um disco, e esse problema também está resolvido usando técnicas de Teoria Geométrica da Medida.

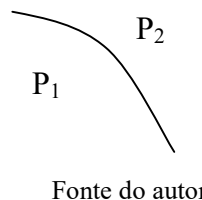
O problema de Plateau é o problema variacional mais fundamental que existe. O nome é uma homenagem ao físico belga Plateau que fazia experimentos com películas de sabão. Ele pegava um arame com diferentes configurações e mergulhava em uma mistura de água e sabão. Retirando o arame cuidadosamente, formava-se uma película em equilíbrio que, por razões físicas é o que se espera que seja a solução do problema de Plateau. Como a película é muito fina, a configuração de equilíbrio tem que ser aquela onde o gasto de energia é o menor possível, ou seja, aquela que minimiza a área.

Podemos também pensar que, se temos uma película que é muito fina que está numa configuração de equilíbrio, e temos dois ambientes em cada um dos lados, com pressões P_1 e P_2 , fisicamente conseguimos justificar que a curvatura média tem que ser, módulo uma constante, proporcional a essa diferença de pressões. Isto é, $H = P_1 - P_2$. Mais precisamente,

$$H = \frac{1}{\lambda} |P_1 - P_2|$$

onde λ é o coeficiente de tensão superficial.

Figura 9 – Película de sabão num ambiente com pressões P_1 e P_2



Fonte do autor

Assim, no caso de uma película de sabão, que é uma película aberta, ou seja, o ambiente é o mesmo dos dois lados (e, portanto, $P_1 = P_2$), a superfície de equilíbrio tem que ser aquela que tem curvatura média zero. E essas são as chamadas **superfícies mínimas**.

A explicação acima é apenas uma justificativa **física**. Mas, **matematicamente**, qual a relação existente entre uma superfície ter curvatura média zero e ser solução para esse problema da área? Para explicar um pouco essa relação, temos que introduzir o conceito de variação normal.

Imagine que, se conseguirmos resolver o problema de Plateau, vamos ter uma superfície que tem a menor área possível entre todas as que tem aquela fronteira dada. Então, fazemos uma variação dessa superfície (digamos, S_t) que não mexa no contorno. Ou seja,

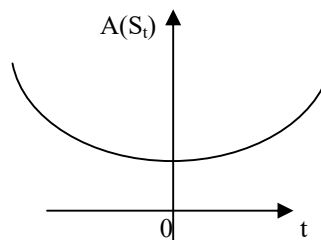
introduzimos um parâmetro t : no tempo zero temos nossa superfície fixada, que é a solução do problema de Plateau, e no tempo t temos uma superfície próxima. Podemos afirmar que a derivada da função área vale zero para $t = 0$.

De fato, como S no tempo zero é supostamente aquela de menor área possível, temos que:

$$\text{Área}(S_t) \geq \text{Área}(S_0), \text{ para todo } t.$$

Isso significa que, se fizermos o gráfico da função área, essa função vai ter um mínimo em $t = 0$.

Figura 10 – Gráfico da função área



Fonte do autor

Mas, sabemos pelo Cálculo que toda função que tem um ponto de mínimo também satisfaz primeira derivada igual a zero.

Então, qualquer superfície que pretenda ser a solução do problema de Plateau tem que ter a propriedade que a primeira derivada da área é zero, para $t = 0$, qualquer que seja a variação. Veremos mais adiante que as superfícies que satisfazem essa propriedade são justamente as de curvatura média zero.

Para isso, vamos olhar agora não somente uma superfície, mas uma família a 1-parâmetro de superfícies. Mais precisamente, considere a variação normal definida abaixo.

Definição 6. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $D \subset U$ é um domínio limitado e $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a **variação normal** de X determinada por h é a aplicação

$$\Phi: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\Phi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$$

$$(u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Assim, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação

$$X^t(u, v, 0) = \Phi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$X(u, v, 0) = \Phi(u, v, 0) = X(u, v)$$

e

$$X_u^t = X_u + th_u N + thN_u$$

$$X_v^t = X_v + th_v N + thN_v$$

Logo,

$$X_u^t \times X_v^t = X_u \times X_v + o(t)$$

onde $o(t)$ significa uma função $R(u, v, t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} R(u, v, t) = 0$, uniformemente para $(u, v) \in \bar{D}$, já que \bar{D} é compacto. Assim, para todo t suficientemente pequeno

$$\{X_u^t, X_v^t\}$$

é L.I.

Como

$$X_u^t = X_u + th_u N + thN_u$$

$$X_v^t = X_v + th_v N + thN_v$$

se denotarmos por E^t , F^t e G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t e usarmos que

$$\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0,$$

obteremos que

$$\begin{aligned}
E^t \langle X_u^t, X_u^t \rangle &= E + 2th \langle X_u, N_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 (h_u)^2, \\
F^t \langle X_u^t, X_v^t \rangle &= F + th (\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v, \\
G^t \langle X_v^t, X_v^t \rangle &= G + 2th \langle X_v, N_v \rangle + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 (h_v)^2.
\end{aligned}$$

Utilizando o fato que

$$e = \langle N, X_{uu}^2 \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle,$$

$$f = \langle N, X_{uv}^2 \rangle = -\frac{1}{2} [\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle],$$

$$g = \langle N, X_{vv}^2 \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle,$$

segue que

$$\begin{aligned}
E^t &= E - 2the + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u, \\
F^t &= F - 2thf + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v, \\
G^t &= G - 2thg + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v.
\end{aligned}$$

Vimos na seção 4.3 que a curvatura média H é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(eG - 2fF + gE) + o(t^2) \\
&= (1 - 4thH)(EG - F^2) + o(t^2),
\end{aligned}$$

onde $o(t^2)$ significa uma função $R(u,v,t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} R(u,v,t)/t = 0$, uniformemente para $(u,v) \in \bar{D}$, já que \bar{D} é compacto. Segue que

$$A^t(D) = \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + o(t^2)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

(a ordem $o(t^2)$ é mantida porque $R(u,v,t) = R(u,v,t)/\sqrt{EG - F^2}$ ainda satisfaz $\lim_{t \rightarrow 0} R(u,v,t)/t = 0$, uniformemente em D). Derivando em relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt} A^t(D) = - \int_{\bar{D}} \frac{2hH + o(t)}{\sqrt{1 - 4thH + o(t^2)}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

de modo que

$$\left. \frac{d}{dt} A^t(D) \right|_{t=0} = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Com isso estamos prontos para justificar o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies com curvatura média zero.

Proposição 3. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $D \subset U$ é um domínio limitado, denote por $A^t(D)$ a área de $X^t(\bar{D})$. Então X é uma superfície mínima se, e somente se,

$$\left. \frac{d}{dt} A^t(D) \right|_{t=0} = 0$$

para todo D e para toda variação normal de $X(\bar{D})$.

Demonstração. Se X é mínima, $H \equiv 0$ e é claro que a condição é satisfeita. Reciprocamente, suponha que a condição é satisfeita e que $H(q) \neq 0$ para algum $q \in D$. Escolha $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$ e h seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de q . Como $h(q) = H(q)$, temos que $hH > 0$ e, portanto, $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h , o que é uma contradição.

Q.E.D.

Assim, qualquer região compacta $X(\bar{D})$ de uma superfície mínima X é um ponto crítico para o funcional área de qualquer variação normal de $X(\bar{D})$. No entanto, pode-se caracterizar superfícies mínimas de outra forma: uma superfície é mínima se todo ponto possui uma vizinhança cuja área é a menor relativa à sua fronteira.

Fisicamente, podemos representar superfícies mínimas com películas de sabão. Como películas de sabão minimizam a área, elas realizam fisicamente as superfícies mínimas.

O que acontece em uma película de sabão é que a sua energia superficial é proporcional à sua área e, quando a diferença de pressão entre as superfícies interna e externa da película é zero, a energia superficial é minimizada. Por sinal, bolhas de sabão esféricas tem pressão interna maior que a externa, que impede a bolha de colapsar até um ponto, e não são superfícies mínimas.

A seguir, vamos calcular algumas curvaturas e verificar se as superfícies dadas são mínimas.

Exemplo 1. No plano dado por

$$X(u, v) = p_o + uV + vW$$

onde V e W são ortonormais, teremos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle V, V \rangle = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle V, W \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle W, W \rangle = 1$$

$$Xu = V \Rightarrow \begin{cases} X_{uu} = 0 \\ X_{uv} = 0 \end{cases}$$

$$Xv = W \Rightarrow X_{vv} = 0$$

Como $X_{uu} = X_{vv} = 0$, temos que

$$e = f = g = 0$$

Substituindo na fórmula da curvatura média, teremos

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

$$H = 0$$

E, portanto, o plano é uma superfície mínima.

Exemplo 2. Um cilindro reto é uma superfície de revolução, obtido pela rotação de uma reta perpendicular no plano xy em torno do eixo z . Uma parametrização para o cilindro reto de raio 1 é dada por

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$X(u, v) = (\cos u, \operatorname{senu}, v)$$

Com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

e

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

Temos que

$$X_u = (-\operatorname{senu}, \cos u, 0)$$

$$X_v = (0, 0, 1)$$

Então, os valores da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= \langle (-\operatorname{senu}, \cos u, 0), (\operatorname{senu}, \cos u, 0) \rangle \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{cos}^2 u = 1 \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle (-\operatorname{senu}, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1$$

Vamos, agora, calcular os valores da segunda forma fundamental. Para isso, precisaremos das derivadas de segunda ordem de X .

$$X_{uu} = (-\cos u, -\operatorname{senu}, 0)$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0)$$

Assim,

$$e = \det(X_u, X_v, X_{uu}) = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}u & \operatorname{cos}u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{cos}u & -\operatorname{sen}u & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}u & \operatorname{cos}u \\ -\operatorname{cos}u & -\operatorname{sen}u \end{vmatrix} = -(\operatorname{sen}^2u + \operatorname{cos}^2u) = -1$$

$$f = \det(X_u, X_v, X_{uv}) = 0, \text{ pois } X_{uv} = (0,0,0)$$

$$g = \det(X_u, X_v, X_{vv}) = 0, \text{ pois } X_{vv} = (0,0,0)$$

Logo

$$e = -1$$

$$f = 0$$

$$g = 0$$

Calculando a curvatura, temos

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

$$H = \frac{-1.1 - 2.0.0 + 0.1}{2(1.1 - 0^2)}$$

$$H = -\frac{1}{2}$$

Como $H \neq 0$, o cilindro não é superfície mínima.

Exemplo 3. A esfera S , parametrizada em coordenadas esféricas, é dada por

$$X(u,v) = (r \operatorname{cos}u \operatorname{cos}v, r \operatorname{cos}u \operatorname{sen}v, \operatorname{sen}u).$$

Então, temos

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -\sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0)$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \langle (-r \sin u \cos v, -\sin u \sin v, r \cos u), (-r \sin u \cos v, -\sin u \sin v, r \cos u) \rangle \\ &= r^2 (\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u) \\ &= r^2 [(\sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u)] \\ &= r^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle (-r \sin u \cos v, -\sin u \sin v, r \cos u), (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0) \rangle \\ &= r^2 (\sin u \cos u \sin v \cos v - \sin u \cos u \sin v \cos v + \cos v \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0), (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0) \rangle \\ &= r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u \cos^2 v \\ &= r^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) \cos^2 u \\ &= r^2 \cos^2 u \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da segunda forma fundamental e fazendo algumas continhas, teremos que os valores das curvaturas serão

$$H = \frac{1}{r}$$

e

$$K = \frac{1}{r^2}$$

Como $H \neq 0$, a esfera não é superfície mínima.

Comparando os coeficientes da primeira forma fundamental dos exemplos acima, vemos que:

- Plano e cilindro têm os mesmos coeficientes;
- Plano e esfera têm coeficientes diferentes.

Isso significa que o plano e o cilindro são localmente isométricos, enquanto plano e esfera não são. Ou seja, podemos enrolar um plano para fazer um cilindro sem alterar as distâncias. Mas não podemos fazer uma esfera (o globo terrestre, por exemplo) a partir de um plano (uma folha de papel), sem amassar nos pólos ou esticar no meridiano.

No próximo capítulo, daremos mais exemplos de superfícies mínimas.

5 SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Neste capítulo, mostraremos exemplos de superfícies mínimas com algumas de suas características. Algumas aplicações serão dados no próximo capítulo. Em relação aos exemplos, decidimos também não nos aprofundar demais (com excessão da superfície Costa que deu origem ao projeto) uma vez que existe uma variedade muito grande, com várias classificações em diversos sites. Por exemplo, nos sites

<http://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/minimal/index.html>

<http://www.indiana.edu/~minimal/toc.html>

http://xahlee.info/surface/gallery_m.html

pode-se encontrar desde imagens, definições e animações até artigos relacionados com o tema.

5.1 Superfícies mínimas clássicas

Plano – Euclides, séc. IV a.C.

Catenóide – Euler, 1764.

O catenóide foi a primeira superfície mínima não trivial identificada por Lagrange em 1760.

Helicóide – Jean Baptiste Meusnier, 1776.

5.2 Superfícies mais recentes

Superfície Costa, 1983.

Infinitos exemplos, a partir de 1985.

5.1.1 O plano

A superfície mínima mais simples é o plano. Além deste exemplo, as duas primeiras superfícies mínimas descobertas (não triviais) são discutidas nos próximos itens.

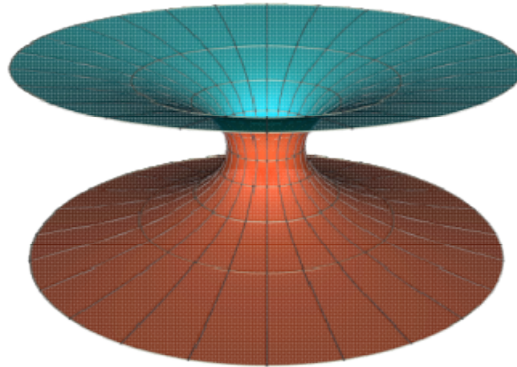
5.1.2 O catenóide

O catenóide é uma superfície de revolução obtida ao girar a curva

$$x = \frac{1}{a} \cosh az$$

no plano xz em torno do eixo z , onde a é maior que zero. Foi descoberta por Meusnier. É um resultado clássico que o helicóide é a única superfície mínima de revolução. Um resultado recente de Meeks e Rosenberg afirma que o único disco mínimo completo mergulhado é um helicóide ou é um plano.

Figura 11 – Catenóide



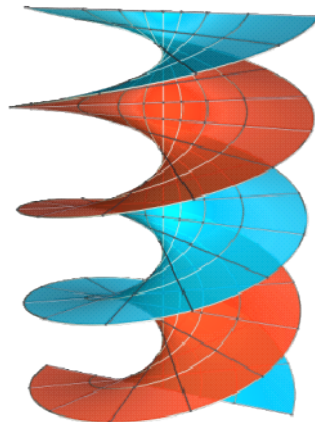
Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/Classical/Catenoid/web/index.html>

Tomaremos $a = 1$ por simplicidade e, desta maneira, o catenóide pode ser parametrizado por

$$\sigma(u, v) = [\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u]$$

5.1.3 O helicóide

Figura 12 – Helicóide

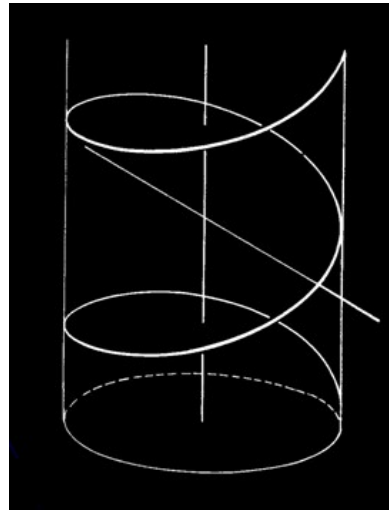


Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/Classical/Helicoid/web/index.html>

Descoberta por Jean Baptiste Meusnier, em 1776, depois do plano e do catenóide, foi a terceira superfície mínima a ser descoberta.

Para obter o helicóide, considere uma hélice que se enrola em um cilindro circular reto. Por cada ponto da hélice, passe uma reta que encontra o eixo do cilindro perpendicularmente. Quando o ponto percorre a hélice, a superfície descrita pela reta é o helicóide.

Figura 13 – Formação do helicóide

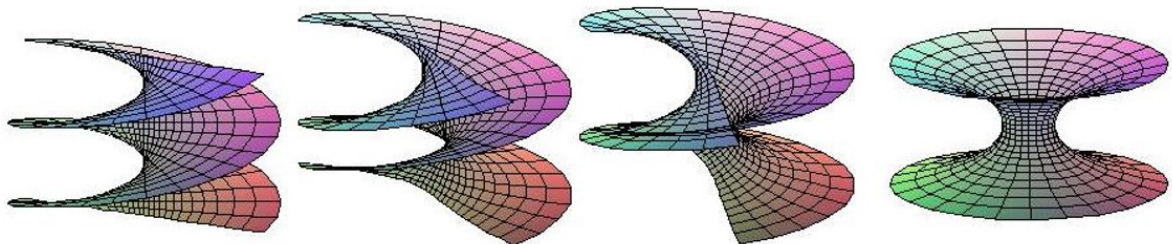


Fonte: <http://livrozilla.com/download/135326>

Superfícies cujas geratrizes são retas são chamadas superfícies regradas. Pela descrição acima, o helicóide é uma superfície regrada. Ele é a única superfície mínima regrada, além do plano.

Um fato interessante de se notar é que o catenóide e o helicóide são isométricos, isto é, preservam suas propriedades métricas ao serem deformados um no outro. Veja essa deformação na figura abaixo.

Figura 14 – Helicóide se transformando em catenóide



Fonte: http://www.pucrio.br/Pibic/relatorio_resumo2007/relatorios/mat/mat_gustavo_schinazi_arthur_freitas.pdf

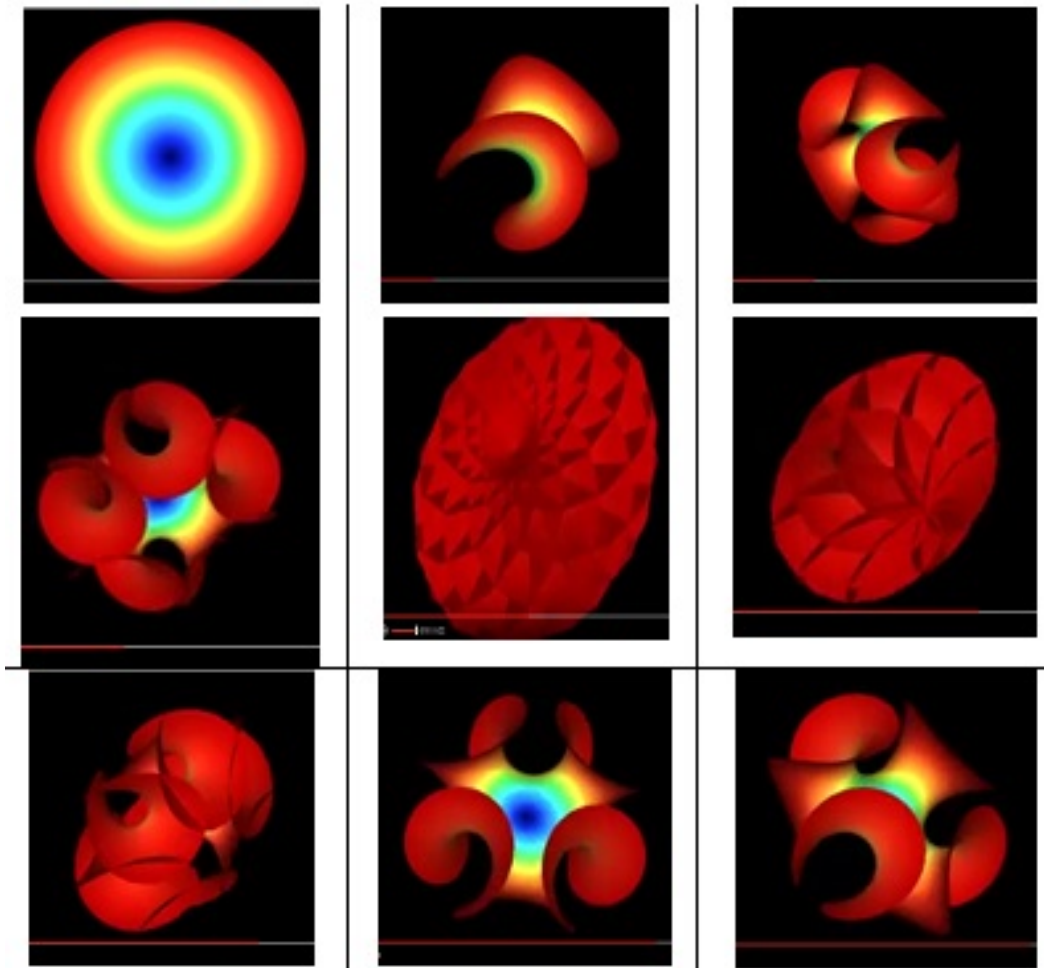
Durante muito tempo, esses foram os únicos exemplos conhecidos (além do plano) de superfícies mínimas. Só em 1835 foi descoberta a superfície de Scherk e, em 1864, a de Enneper.

5.1.4 Superfície de Enneper

A famosa superfície de Enneper não tem uma parametrização complicada, mas sua visualização é razoavelmente difícil devido às suas auto-intersecções. Abaixo estão algumas das imagens obtidas na animação que pode ser visualizada no link

<https://www.youtube.com/watch?v=60ytRIYoOAg>

Figura 15 – Superfície de Enneper



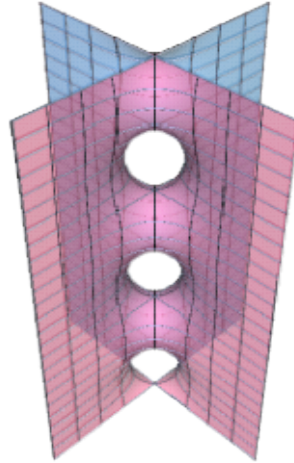
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=60ytRIYoOAg>

5.1.5 Superfície de Scherk

Descoberta por Scherk em 1835, esta superfície ainda é um dos exemplos mais importantes.

5.1.5.1 *Superfície de Scherk Simplesmente Periódica*

Figura 16 – Superfície de Scherk simplesmente periódica

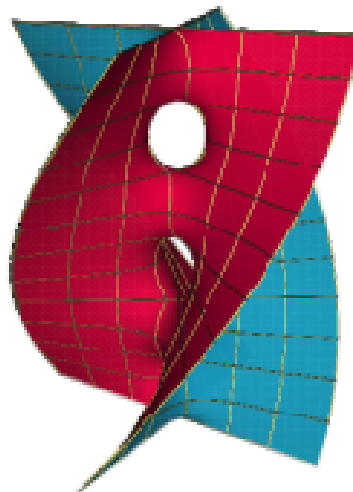


Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/Classical/SinglyScherk/web/index.html>

5.1.5.2 *Superfície de Scherk Torcida*

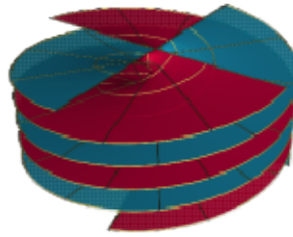
A superfície simplesmente periódica Scherk pode ser deformada em uma superfície helicoidal. O limite é uma folheação de espaço euclidiano por planos horizontais. Pode ter 4 fins, como a da figura abaixo, ou ainda, 6, 8 ou 10 fins.

Figura 17 – Superfície de Scherk torcida (a)



Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Singly/Helicoidal/TwistedScherk-2/web/index.html>

Figura 18 – Superfície de Scherk torcida (b)



Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Singly/Helicoidal/TwistedScherk-2/web/index.html>

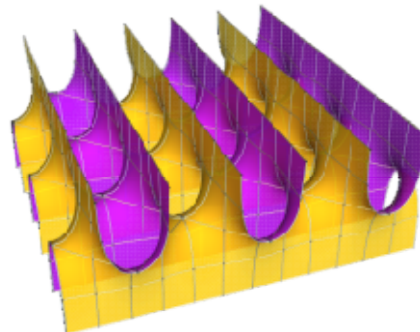
5.1.5.3 Superfície de Scherk Duplamente Periódica

É conjugada da superfície de Scherk simplesmente periódica. Em geral, as superfícies mínimas possuem relações extremamente interessantes e úteis com as funções analíticas complexas e com equações diferenciais parciais. A superfície de Scherk é uma dessas superfícies na qual essas relações podem ser exploradas. Sua parametrização dada em termos de variáveis complexas não é tão atraente. Na forma cartesiana, sua parametrização é dada por

$$z = \ln \frac{\cos y}{\cos x}$$

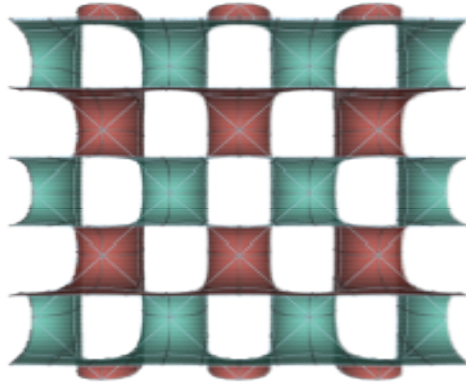
Podemos ver que essa superfície só existe quando $\cos y$ e $\cos x$ são ambos maiores ou menores que zero. Em outras palavras a superfície segue um padrão de tabuleiro de xadrez nos quais os quadrados possuem os vértices nos pontos $(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$, com linhas verticais nos cantos.

Figura 19 – Superfície de Scherk duplamente periódica



Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/Classical/DoublyScherk/web/index.html>

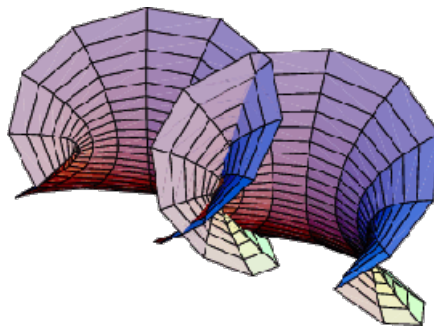
Figura 20 – Superfície de Scherk duplamente periódica (vista superior)



Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Doubly/Nonparallel/DoublyScherk/web/>

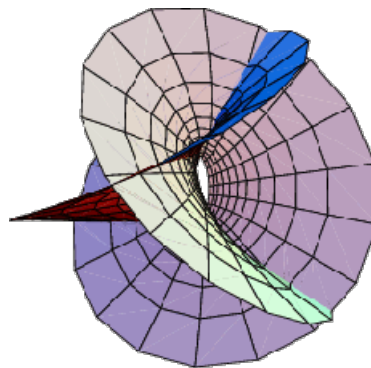
5.1.6 Várias superfícies, algumas de maior complexidade, sem maiores explicações

Figura 21 – Superfície de Catalan



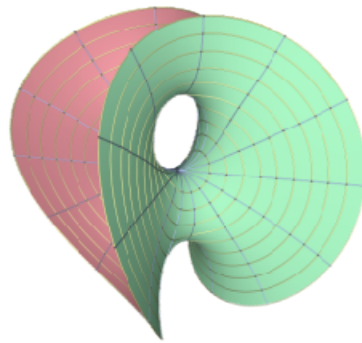
Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/CatalansSurface.html>

Figura 22 – Superfície de Henneberg, 1875



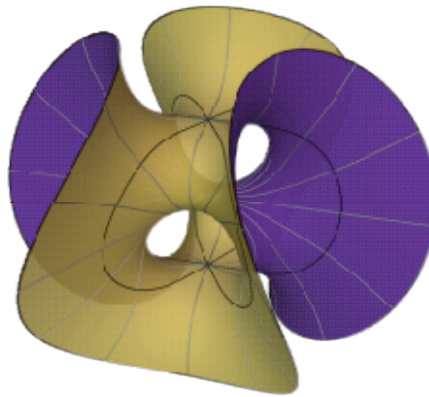
Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/HennebergsMinimalSurface.html>

Figura 23 – Superfície de Chen Gackstatter (a)



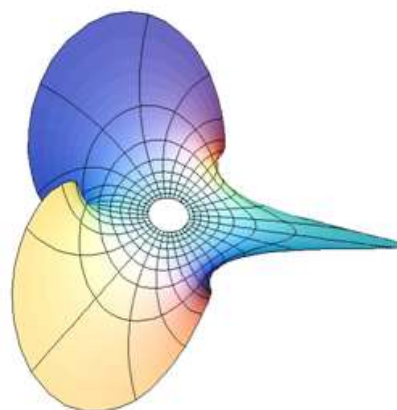
Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Tori/Tori/Chen-Gackstatter/web/index.html>

Figura 24 – Superfície de Chen Gackstatter (b)



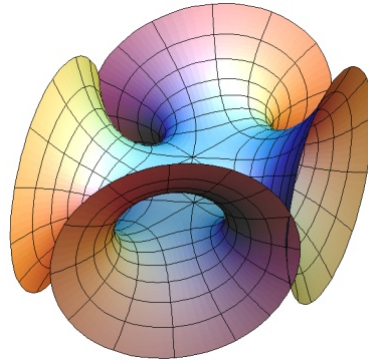
Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Tori/Tori/Chen-Gackstatter/web/index.html>

Figura 25 – Superfície Invertida de Boys



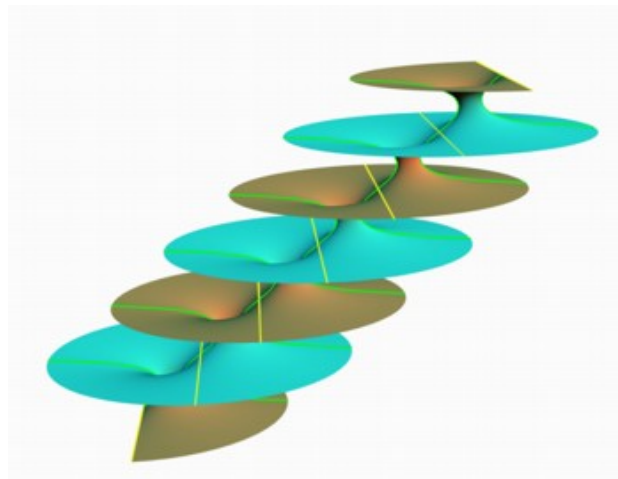
Fonte: http://xahlee.info/surface/inverted_boy/inverted_boy.html

Figura 26 – Skew 4-noid



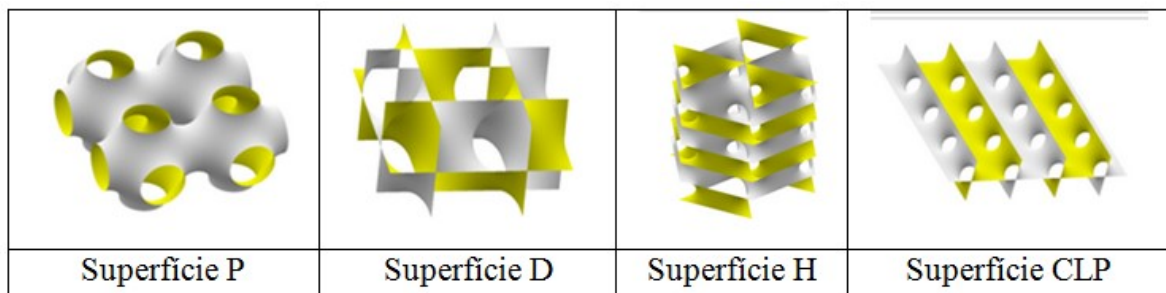
Fonte: http://xahlee.info/surface/skew_4noid/skew_4noid.html

Figura 27 – Superfície de Riemann



Fonte: <http://www.indiana.edu/~minimal/maze/riemann.html>

Figura 28 – Superfícies de Schwarz, século XIX



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarz_minimal_surface

5.2 Superfícies mais recentes

5.2.1 Família P, G e D de Schoen, a partir de 1960

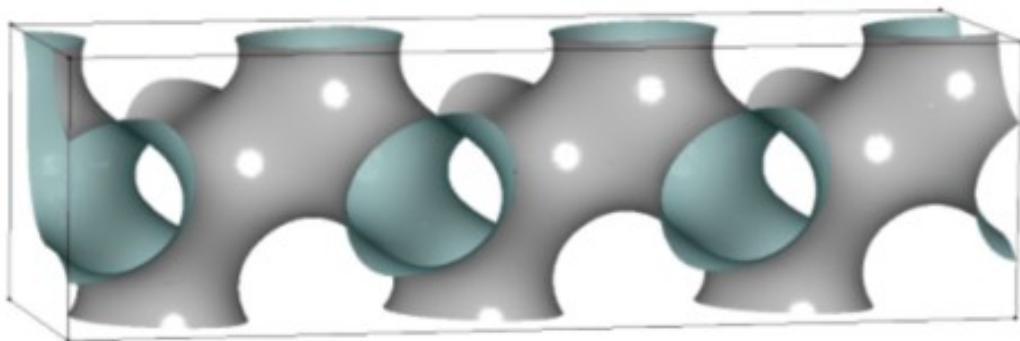
Figura 29 – Superfície P, G e D de Schoen



Fonte: <http://schoengeometry.com/e-tpms.html>

5.2.2 O Giróide G de Alan Schoen, descoberto em 1970

Figura 30 – Giróide



Fonte: <http://schoengeometry.com/e-tpms.html>

Podemos ver o próprio Alan Schoen em um vídeo de 1974 no link abaixo:

<https://www.youtube.com/watch?v=0Eg7AyUJoVg>

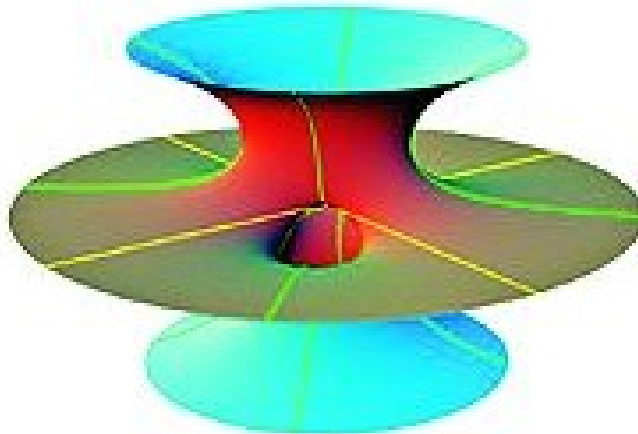
Figura 31 – Alan Schoen



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=0Eg7AyUJoVg>

5.2.3 Superfície Costa

Figura 32 – Superfície Costa



Fonte: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>

É uma superfície mínima completa mergulhada de topologia finita (isto é, não tem limite nem intersecções). Até a sua descoberta pelo brasileiro Celso Costa, da Universidade Federal Fluminense no final de 1982, as únicas superfícies com tais características eram o plano, o catenóide e o helicóide. E suspeitava-se que esses seriam os únicos exemplos. A

superfície Costa tem a forma de um toro – como uma rosquinha, ou uma bóia – com três buracos.

Figura 33 – Celso Costa



Fonte: <http://web.lante.uff.br/sitenovowp/wp-content/uploads/2015/05/Celso-Costa.png>

Foi descoberta por Costa em 1982 e, dois anos mais tarde, Hoffman e Meeks provaram que é megulhada (isto é, que não tem autointersecções). Celso Costa tentava descobrir uma nova figura geométrica em seu doutorado. Para chegar a ela, usou os estudos desenvolvidos pelo matemático alemão Weierstrass, particularmente funções elípticas.

Segundo a Revista Galileu (v. 187), a idéia surgiu no começo dos anos 80, quando o brasileiro estava no cinema.

“Eu assistia a um filme sobre escola de samba e um sambista desfilava com um bizarro chapéu de três abas. Naquele momento tive a inspiração crucial e final do modo como a figura geométrica da superfície que eu buscava se apresentava no espaço.” – Celso Costa

Grandes matemáticos, desde Weierstrass até Yau, um dos maiores geômetras da atualidade, tentavam provar a existência (ou não) de superfícies como a do brasileiro. Nessas tentativas, viram que uma tal superfície deveria satisfazer tantas condições que sua existência parecia impossível. Yau chegou a anunciar, num certo momento, que tal superfície não existia. Mas, depois, viu que estava errado. O próprio William Meeks, durante uma visita ao IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), reuniu todos e anunciou que tinha provado a existência da superfície. Mas também estava errado.

Em sua tese de doutorado, sob a orientação de Manfredo P. do Carmo, Celso Costa escreveu as equações para um candidato ao terceiro exemplo de superfície mínima. O candidato satisfazia todas as condições necessárias, exceto uma – que não deveria ter intersecções na parte finita. Costa havia conseguido provar que na parte infinita, fora de uma bola, ela não tinha intersecções (o que é, em geral, a parte mais difícil). Mas, com os recursos computacionais existentes no Brasil naquela época, não conseguiu provar que o núcleo era mergulhado.

Para cada superfície mínima existem equações que geram o objeto em três dimensões. Para as primeiras superfícies descobertas até século 18, as equações eram relativamente simples e facilmente relacionáveis com o objeto em 3D, mas as equações da superfície Costa apresentam muitas complicações para a visualização.

Em entrevista à Revista História Hoje, v. 3, n.º 5, pag 209-272, 2014, Costa disse:

“Como ela tem as coordenadas em cima de um toro, é um problema difícil para você poder fazer o desenho. (...) E dois matemáticos, o David Hoffman e o William Meeks, conseguiram provar que essa superfície realmente era a superfície procurada. Porque eu dei as equações, fiz um desenho num guardanapo dizendo que a superfície era daquela maneira, e que depois o computador confirmou (...) em 1985. Quer dizer, passei 3 anos aguardando a notícia de que eu tinha certeza.”

Apesar de não ter conseguido o resultado completo, a descoberta das equações da superfície foi suficiente para Celso Costa conseguir o seu doutorado. Um dos membros que estava na sua banca, o americano William Meeks, levou as equações para o seu país e, em 1984, juntamente com James Hoffman, fizeram a imagem computacional exata da superfície.

A descoberta do brasileiro acabou influenciando também o desenvolvimento da computação gráfica. Com tais recursos, foi possível transformar as equações de Celso Costa numa figura e visualizar que o núcleo é mergulhado. A partir da visualização da superfície em várias posições, verificou-se que ela tinha muitas simetrias. Com base nessas simetrias, foi possível desenvolver uma prova matemática rigorosa mostrando que a superfície era, de fato, mergulhada.

A nova superfície descoberta por Costa, teve grande repercussão no mundo da matemática por resolver um problema que estava aberto a mais de 200 anos. Além disso, a partir dela, foi possível desenvolver técnicas que permitem hoje a solução de muitos outros problemas na área de superfícies mínimas. O trabalho acabou dando origem a uma série de pesquisas que resultaram na descoberta de novas superfícies, teoremas e novos problemas matemáticos.

Depois de visualizada por computador, essa curiosa superfície inspirou vários artistas pelo mundo, que a construíram tanto em material permanente – metal ou concreto – como também em blocos de gelo nos festivais de inverno dos países frios.

Figura 34 – Escultura de Helaman Ferguson



Fonte: <https://www.math.binghamton.edu/alex/PICTURES/Ferguson11.jpg>

Em 1999, no concurso de esculturas no gelo nos EUA, o escultor Ferguson competiu fazendo a superfície em um bloco de gelo de 6 toneladas e tirou o primeiro lugar. A superfície Costa foi a que demorou mais a derreter e, por sua estrutura ser estável, pode ser feita com uma espessura bastante fina.

Figura 35 – Ferguson e sua equipe de matemáticos



Fonte: http://www.stanwagon.com/snow/breck1999/images/day5_teamwork.jpg

Figura 36 – Superfície Costa concluída



Fonte: http://www.stanwagon.com/snow/breck1999/images/day5_daybreak.jpg

No teto do AWHC (Australian Wildlife Health Centre) foi feita uma grande superfície Costa. Ela é feita de material dourado e serve até como orientação uma vez que pode ser visualizada à distância.

Figura 37 – Teto do AWHC



Fonte: http://www.mvsarchitects.com.au/doku.php?id=home:projects:australian_wildlife_centre

O público que visita o hospital pode assistir a uma explicação multimídia de traumas e cuidados com os animais. Como se fosse o centro de uma teia de aranha, o centro da construção se abre para as salas onde os animais são tratados. Esse design permite que os visitantes tenham um estreito contato com os veterinários e seus pacientes, a fim de compreender como os animais nativos doentes ou feridos são tratados.

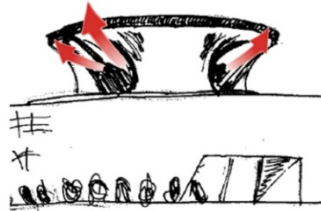
Figura 38 – Vista interna do hospital



Fonte: http://www.mvsarchitects.com.au/doku.php?id=home:projects:australian_wildlife_centre

A cúpula invertida feita de tecidos tensionados se abre para o interior, funcionando como uma grande chaminé, jogando o ar quente rapidamente para fora e refrescando o ambiente. A forma abre a cúpula em três orifícios (clarabóias) que trazem luz natural para a parte interna.

Figura 39 – Como funciona o sistema de ventilação dentro do centro (a)



Fonte: <https://huyminhnguyen.files.wordpress.com/2013/09/ventilation-3.jpg>

Figura 40 – Como funciona o sistema de ventilação dentro do centro (b)



Fonte: <https://huyminhnguyen.files.wordpress.com/2013/09/ventilation-21.jpg>

Nos próximos capítulos veremos outras aplicações das superfícies mínimas.

6 APLICAÇÕES

“O cientista não estuda a Natureza porque isso é útil; estuda-a porque ele se delicia nela, e ele delicia-se nela porque é bela. Se a Natureza não fosse bela, não valeria a pena ser conhecida, e se a Natureza não valesse a pena ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.”

Henri Poincaré

Será possível uma árvore crescer indefinidamente em linha reta? O grande Leonhard Euler, em 1778, já respondeu a esta pergunta, mostrando em sua obra *De Altitudinem Columnarium* que uma árvore não pode crescer indefinidamente, sem torção, uma vez que acabaria dobrando-se sobre seu próprio peso e, assim, se desviaria um pouco da perpendicular.

O mundo vegetal tem as suas leis matemáticas e físicas que influenciam o crescimento e formas dos seus elementos, que sempre respondem aos princípios otimização, economia e de interação com o ambiente exterior.

O naturalista, biólogo e matemático escocês D'Arcy Thompson (1860-1948) publicou em 1917 o livro "Sobre o Crescimento e a Forma".

Figura 41 – Livro *On Growth and Form*



Fonte: [http://1.bp.blogspot.com/-](http://1.bp.blogspot.com/-oj0_1WB5YUs/VN9dmCNY4SI/AAAAAAAAAEI4/4qTupm7QHZk/s1600/ms42364_pdn236_754.jpg)

[oj0_1WB5YUs/VN9dmCNY4SI/AAAAAAAAAEI4/4qTupm7QHZk/s1600/ms42364_pdn236_754.jpg](http://1.bp.blogspot.com/-oj0_1WB5YUs/VN9dmCNY4SI/AAAAAAAAAEI4/4qTupm7QHZk/s1600/ms42364_pdn236_754.jpg)

Nele, ele argumentou que as formas de seres vivos são devido a alguns aspectos físicos dos processos biológicos: as forças envolvidas nelas, e as propriedades físicas da

matéria em questão. Segundo Thompson (1945, p. 10), “os problemas envolvendo formas na natureza estão na primeira instância dos problemas matemáticos”.

De acordo com a teoria de Thompson, são as forças físicas que formam diretamente os organismos. Podemos dizer que as formas naturais não são caprichosas, mas sim que buscam a eficiência. Assim, as superfícies mínimas vistas no capítulo 5, aparecem de diversas formas na natureza porque são as mais eficazes e econômicas. Por exemplo, o helicóide aparece nos moluscos, nos chifres de mamíferos e sementes de flores porque é a maneira mais eficiente de agrupar, mantendo o mesmo formato à medida que o tamanho aumenta. O catenóide aparece em várias partes dos seres vivos (nos ossos, no formato dos peixes, folhas das árvores, etc.) porque é a forma mais resistente, econômica e eficiente.

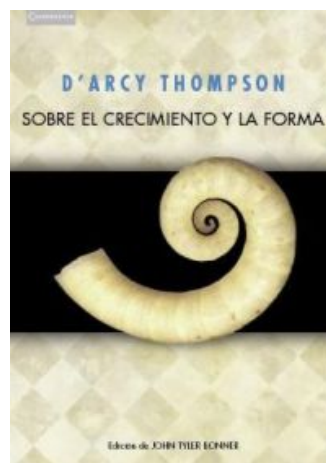
O livro de 1116 páginas pode ser baixado gratuitamente em

<https://archive.org/details/ongrowthform00thom>

Se preferir, a versão reduzida com 330 p. em espanhol tem uma parte disponível para leitura em

<https://books.google.com.br/books?id=rjesr-wC5CwC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>

Figura 42 – Versão reduzida em espanhol



Fonte: <http://www.akal.com/libros/Sobre-el-crecimiento-y-la-forma/9788483233566>

Num mundo perfeitamente isolado, em um líquido homogêneo, um ser vivo assumiria a forma perfeita, ou seja, de uma esfera ou um círculo: a forma mais democrática e

igualitária! A esfera protege e minimiza o risco de agressões externas. De fato, muitas sementes são de forma esférica; as folhas de plantas aquáticas tendem para a forma circular.

Fig. 43 – Vitória-régia



Fonte: <http://essaseoutras.xpg.uol.com.br/belezas-da-amazonia-lindas-paisagens-e-lugares-para-conhecer-turismo/vitoria-regia-amazonia/>

Mas em um mundo hostil todo ser vivo precisa competir com outros indivíduos, lutar por espaço ou por alimento e luz ... e se defender contra as agressões externas. Assim, das formas circulares, saem ângulos. Os ângulos impedem os ataques externos, concentram as forças e aumentam a possibilidade de penetração e de conquistar espaços. As folhas afastam-se de suas formas arredondadas para acabarem convertidas em agulhas em casos extremos.

Figura 44 – Flor com espinhos



Fonte: <https://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-flor-roxa-do-espinho-do-cardo-em-israel-image71588831>

E, quando se trata de encher os espaços com espaços mínimos, as sementes nos darão uma lição de embalagem ideal, curvando-se em espirais e fechando o círculo.

Figura 45 – Sementes com crescimento em espiral



Fonte: <http://helios.blog.com/2012/01/11/girassol/>

Se existe a necessidade de conquistar novo espaço ou agarrar-se a alguma coisa para subir mais, as hélices nos dão a melhor resposta de força.

Figura 46 – Gavinha



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gavinha#/media/File:Cucurbita_pepo_02_ies.jpg

Figura 47 – Cipó



Fonte: https://c2.staticflickr.com/4/3325/3411934666_0e04f2816c.jpg

No fabuloso universo vivo do mundo vegetal, vamos encontrar um poema de formas que podem ser interpretadas à luz da matemática e das leis da física.

6.1 Utilização dos princípios de otimização da natureza na arquitetura

6.1.1 Estruturas tubulares

Saindo do mundo dos vegetais, o nosso próprio corpo é um exemplo de como a natureza nos dá a melhor resposta em economia e funcionalidade. A ossatura de nosso esqueleto se conformou preferencialmente em seções que se aproximam de um cilindro, uma vez que a estrutura humana se comporta como uma estrutura mecânica repleta de movimentos complexos. A natureza sabiamente a conformou da maneira mais apropriada para resistir a esses eventos simultâneos de forças, acarretando propositalmente uma economia de substância.

Para se projetar uma estrutura que se movimenta, ou recebe forças que variam em intensidade e direções, faz-se necessária uma análise minuciosa e complexa da estrutura como um todo, simulando o maior número possível destas variações.

É por essas razões que hoje todas as montanhas russas de última geração são construídas com perfis tubulares de seção circular, que se contorcem no espaço e se aproximam cada vez mais de uma estética “delgada” e “limpa”.

Figura 48 - Montanha russa com looping em parafuso - Tóquio, Japão



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia01.htm>

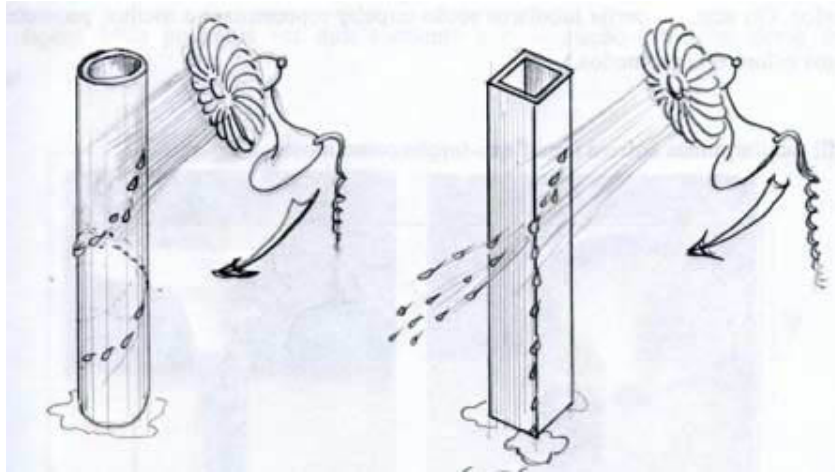
Fig. 49 – Montanha russa suspensa do Bush Gardens. EUA (esquerda) e roda gigante LondonEyes. Inglaterra



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia01.htm>

Já foi mencionado que a circunferência tem como característica envolver o máximo de conteúdo utilizando-se de um mínimo de perímetro. Além disso, a seção tubular cilíndrica apresenta várias vantagens estruturais em relação às outras. Desta forma, ao se adotar este tipo de perfil em projetos, se estará também economizando em área de exposição do perfil, seja ela para proteção contra corrosão, combate a incêndio ou proteção contra impactos ambientais.

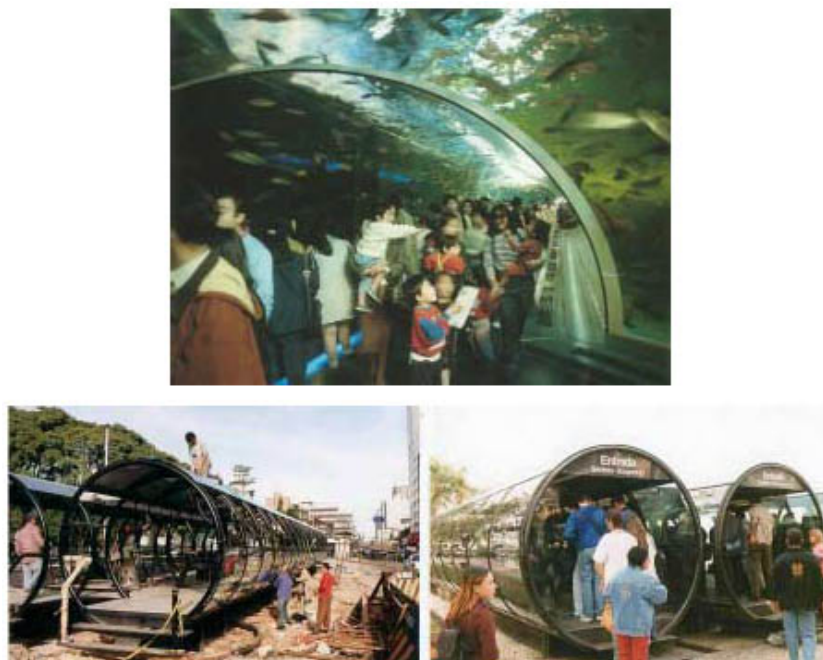
Fig. 50 – A ausência de arestas no tubo de seção cilíndrica, ao contrário do de seção quadrangular, permite um melhor comportamento aerodinâmico.



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia04.htm>

Pode-se tirar partido dessa característica, assim como o fez o arquiteto e ex-prefeito de Curitiba Jaime Lerner, ao conceber esta volumetria para as estações tubos de ônibus de sua cidade. Os vidros curvos como superfície de vedação adquirem maior resistência que os planos para cobrirem a mesma área.

Figura 51 – Parede de aquário em material acrílico (em cima) e estações tubo da cidade de Curitiba com fechamento em vidro



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia03.htm>

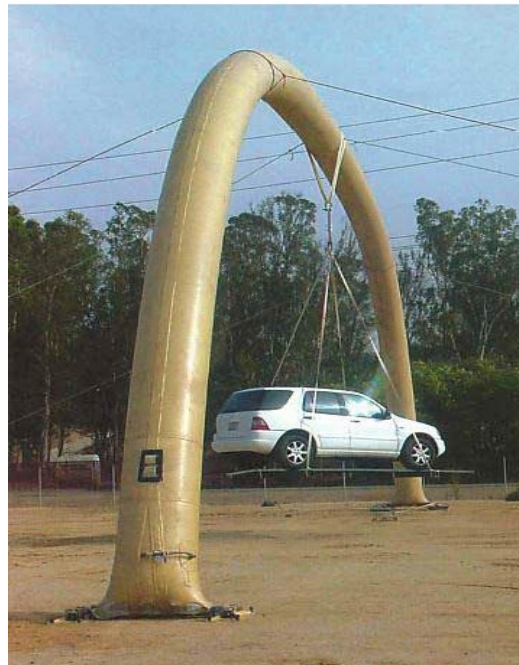
6.1.2 Utilização da catenária

O setor da construção civil em geral ignorou completamente esses conceitos (que num passado remoto eram considerados), devido à própria “evolução” das técnicas, que nos permitem hoje viabilizar configurações geométricas antinaturais.

Para se vencer grandes vãos no passado, quando ainda não existia o concreto nem o aço, a curvatura do arco era a solução. Era mais natural e intuitiva já que, na natureza, encontram-se mais linhas curvas do que retas.

A fig. 12 explicita com surpreendente clareza essa propriedade geométrica da linha curva, e assim, temos aqui um ótimo exemplo a ser analisado.

Fig. 52 – Estrutura pneumática em arco



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia02.htm>

A estrutura em arco apresentada que suporta todo o peso do carro é constituída exclusivamente por uma lona sintética e ar comprimido. Esses tipos de estrutura são caracterizados como estruturas pneumáticas e fazem parte do universo da arquitetura têxtil.

Dois aspectos importantes valem a pena serem analisados nessa imagem:

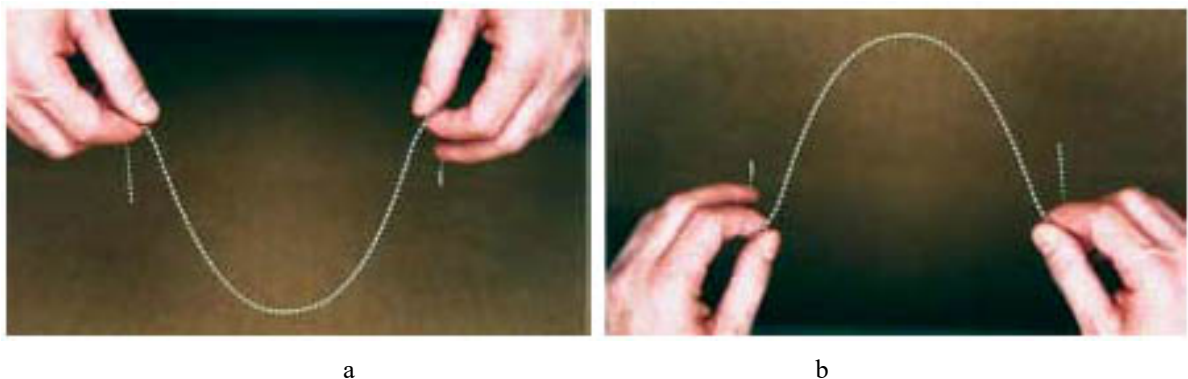
a) Quando o ar pressurizado preenche todo o espaço longilíneo reservado para ele, naturalmente a lona se conformará em uma seção circular. Isto porque essa seção se caracteriza na mais estável para ela, ou seja, toda a sua superfície externa se conformará desta forma, para permitir a distribuição igualitária das tensões em sua

superfície provocada pela pressão interna e pelo equilíbrio com a pressão externa. Isso quer dizer que nenhuma fibra de sua superfície estará trabalhando mais que as outras nesta conformação. É o mesmo raciocínio das bolhas de sabão que se mantêm esféricas, para a distribuição igualitária das tensões em toda a sua superfície, evitando, assim, assimetrias, além de envolver o máximo de ar com o mínimo de invólucro.

b) A conformação em arco parabólico é naturalmente a mais estável, pois propicia um “nivelamento” das tensões, ou seja, uma distribuição mais igualitária delas para que cheguem até o solo. É o mesmo princípio utilizado pelos romanos para vencerem grandes vãos através do empilhamento de pedras, princípio que viabilizou a construção de pontes, aquedutos, etc.

Se alguém segurar duas extremidades de uma corrente mantendo as mãos com um certo afastamento, ela irá delinear espacialmente um arco parabólico devido à ação da gravidade sobre o peso dessa corrente, que a manterá na posição mais estável possível, conforme indicado na fig. 10 a. No entanto, se essa imagem for invertida, a mesma geometria será também a mais favorável para vencer o mesmo vão e suportar o próprio peso, sobre a ação da gravidade nessa nova posição. Este raciocínio, denominado arcos funiculares, pode ser utilizado em casos mais complexos que vão além do próprio peso, envolvendo cargas concentradas ou distribuídas sobre o arco, definindo novas geometrias conforme o carregamento.

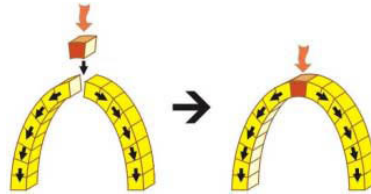
Figura 53 – a) Catenária em arco parabólico, segundo ação da gravidade sobre a corrente tracionada. b) A mesma geometria anterior também é a mais favorável para se vencer o próprio peso numa situação invertida, porém, com seus elementos comprimidos



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia03.htm>

O segredo construtivo para a estabilidade desses arcos consistia no posicionamento final da última pedra em seu topo, que, pela sua geometria (tipo cunha), travava todo o sistema, levando todos os esforços até atingirem o solo.

Figura 54 – Arcos catenários invertidos



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia03.htm>

Os esquimós usam o mesmo princípio na construção dos seus iglus, que é exatamente a forma que uma bolha de sabão adquire ao tocar o chão. Ou também usam a curva catenária.

Figura 55 – Iglu



Fonte: <https://climacusticaparaarquitectos.files.wordpress.com/2011/06/iglu7.jpg>

Veja outros exemplos de aplicação:

Figura 56 – Resistência à ação dos ventos: barraca de *camping*



Fonte: <http://imagens.americanas.com.br/produtos/01/00/sku/9460/7/946089G1.jpg>

Figura 57 – Arco em forma de Catenária com 192m. Missouri (Estados Unidos): Homenagem ao presidente Thomas Jefferson



Fonte: <https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/10/ribanez.pdf>

6.1.3 Antoni Gaudí

“A reta é do homem, a curva pertence a Deus.”
Antoni Gaudí.

Atualmente, muitos engenheiros e arquitetos estão olhando para a natureza procurando uma resposta melhor para economia, resistência e beleza. Um de seus mais importantes representantes foi o arquiteto Antoni Gaudí.

É possível reservar uma visita a Barcelona somente para conhecer as obras do arquiteto catalão. Do imenso Parc Guell aos belos símbolos religiosos da Sagrada Família, suas obras são repletas de formas orgânicas.

Filho de uma família de caldeireiros, é certa a influência desse ofício na obra do arquiteto. Os tubos retorcidos de cobre presenciados na infância lembram as complicadas geometrias e espirais que desenvolveu mais tarde.

Figura 58 – Escada da Casa Battlò (Barcelona)



Fonte: http://texere.blogspot.com.br/2005_08_01_archive.html

Figura 59 – Casa Barttlò: Teto em espiral



Fonte: <http://www.barcelona-guide.info/pt/Pontodeinteresse/casa-batlla>

Mas é para além disso, e com mais referências à natureza, que se percebe em cada pequeno detalhe, como Gaudí conseguiu transpor as dificuldades de um artrismo articular na infância e passou a olhar o mundo com olhos diferentes.

As lagartixas, os insetos, as aranhas, as flores, os caracóis lhe serviriam para compor as futuras obras. As formas arquitetônicas idealizadas por Gaudí por intuição correspondem a fórmulas matemáticas exatas.

Seu trabalho culminará com um estilo orgânico, inspirado pela natureza, mas sem perder a experiência fornecida por estilos anteriores, gerando uma obra arquitetônica que é uma mistura perfeita de tradição e inovação. Também, toda a sua obra é marcada por aqueles que foram suas quatro grandes paixões na vida: arquitetura, natureza, religião e amor pela Catalunha.

A casa Battlò, repleta de formas orgânicas, foi inspiração para o Castelo Ratimbum.

Figura 60 – Figura Casa Battlò



Fonte: http://patrimoniobarcelona.blogspot.com.br/2010_01_01_archive.html

Figura 61 – Castelo Ratimbum



Fonte: <http://lounge.obviousmag.org/gincobilando/2012/09/castelo-ra-tim-bum-onde-tudo-tem-um-pouco-de-vida.html.jpg?v=20151117194444>

Figura 62 – À esquerda: Castelo Ratimbun. À direita: Casa Batllò



Fonte (imagens da esquerda, de cima para baixo):

<http://misturaurbana.com/wp-content/uploads/2012/05/castelo.jpg>

<https://s-media-cache-ak0.pinning.com/736x/4e/c5/29/4ec5297d6724a1abda133858d7ad49a7.jpg>

https://catracalivre.com.br/wp-content/uploads/2015/01/castelo_ra-tim-bum_-_divuylgacao.jpg

Fonte (imagens da direita, de cima para baixo):

http://images.adsttc.com/media/images/5037/ecc5/28ba/0d59/9b00/04b4/medium_jpg/stringio.jpg?1414219211

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Gaudi-Batllo-Xemeneia_0902.jpg

<https://www.casabatllo.es/wp-content/uploads/2014/10/casa-batllo-noble-floor.jpg>

Gaudí já incorpora definitivamente ao seu repertório o uso de catenárias por razões estruturais. As catenárias já eram muito usadas como elemento mecânico, empregadas na construção de pontes. Ele foi o primeiro a utilizar este elemento na arquitetura comum.

O uso de arcos catenários em obras como a Casa Milá, Colégio das Irmãs, Cripta da Colonia Guell e a Sagrada Família, permitem às estruturas suportar mais peso, acrescentando um elemento de alta resistência, com catenárias distribuídas regularmente, sofrendo apenas forças tangenciais que se cancelam.

Figura 63 – Casa Milá



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/Casa_Mil%C3%A0_-_Barcelona%2C_Spain_-_Jan_2007.jpg

As chaminés da Casa Milá possuem formas ondulantes, espirais e têm aparência de cabeças de guerreiros. Nelas se inspirou o cineasta **George Lucas** para as máscaras dos soldados imperiais e do personagem Darth Vader, na série **Guerra nas Estrelas**.

Figura 64 – Chaminés da Casa Milá



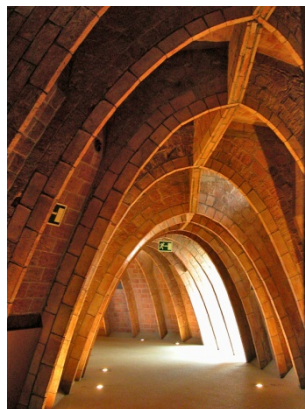
Fonte: http://patrimoniobarcelona.blogspot.com.br/2010_01_01_archive.html

O último andar, o sótão, albergava os lavadeiros e outras zonas de serviço, composto por uma estrutura original, plástica e funcional. Atuava também como regulador térmico, isolando o edifício de temperaturas extremas. Seu desenho foi baseado na utilização de arcos catenários, que sustentam o terraço superior.

Atualmente, nele situa-se o Centro de Interpretação da vida e obra de Gaudí, com uma interessantíssima exposição sobre os distintos elementos que compõem sua obra, assim como a maneira de compreender sua arquitetura.

Note a semelhança com a nossa caixa torácica (e com várias outras formas que precisam fornecer resistência, com um mínimo de material: a forma do ovo, da nossa testa, da barriga da gestante).

Figura 65 – Casa Milá (La Pedrera)



Fonte: http://jpadalbera.free.fr/barcelone/pedrera/images/maison/grenier_musee_structures.jpg

Para a construção da Cripta da Colônia Guell, Gaudi usou a metodologia da catenária moldada em gesso e invertida.

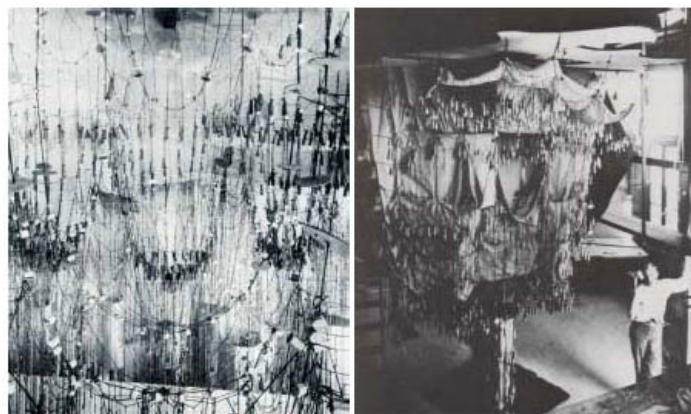
Figura 66 – Cripta da Colônia Guell



Fonte: http://patrimoniobarcelona.blogspot.com.br/2010_01_01_archive.html

A Cripta da Colônia Güell (1898-1916) marca uma ruptura decisiva com os estilos históricos e funciona como um grande laboratório que marcará posteriormente sua arquitetura. O espetacular sistema conhecido como funicular foi desenvolvido por ele. Tal sistema consiste em uma maquete composta por cordas, os "funiculos", palavra que em sua origem significa cordão umbilical.

Fig. 67 – Maquete do processo utilizado por Gaudi para o dimensionamento da igreja da Colônia Güell através dos arcos funiculares



Fonte: <http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia03.htm>

Este é um método empírico empregado para determinar a forma espacial de uma estrutura sem aplicar fórmulas matemáticas. A colocação de um espelho sob a maquete funicular permite inverter a imagem e visualizar a estrutura do edifício.

O estilo de Gaudí marca o final de um processo e influenciaria muitos arquitetos, inclusive na arquitetura moderna. No Brasil, as obras de Oscar Niemeyer são marcadas por superfícies curvadas e formas orgânicas.

“Não é o ângulo reto que me atrai. Nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu País, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, nas nuvens do céu, no corpo da mulher preferida. De curvas é feito todo o Universo – o Universo curvo de Einstein.” (Oscar Niemeyer)

6.1.4 Frei Paul Otto

Outro nome de grande importância na utilização de superfícies mínimas é do arquiteto alemão Frei Paul Otto. Um dia antes da sua morte, aos 89 anos, recebeu a notícia que receberia o Prêmio Pritzker 2015 (equivalente ao Nobel da arquitetura).

Figura 68 – Frei Otto, em 2000



Fonte: <http://www.archdaily.com.br/br/tag/frei-otto>

Felizmente, Otto soube sobre o prêmio antes de falecer. Quando a comissão Pritzker lhe comunicou sobre a escolha, ele humildemente comentou que não tinha feito nada importante o suficiente para receber a honra.

“O meu objetivo era projetar novos tipos de edifícios para ajudar as pessoas pobres, especialmente na sequência de desastres naturais e catástrofes. Então, o que será melhor para mim do que ganhar este prêmio? Vou usar o tempo que me resta para continuar fazendo o que já vinha fazendo.” – Frei Otto

Otto fazia o curso de Arquitetura em Berlim quando, com apenas 17 anos, foi convocado para o serviço militar nos últimos anos da Segunda Guerra Mundial. Em 1945, foi capturado na França e, como prisioneiro de guerra, o arquiteto reconheceu a necessidade de melhores abrigos provisórios durante e depois dos conflitos.

Utilizando lençóis e cobertores em seu cativeiro, desenvolveu dois conceitos que lhe acompanhariam durante toda a sua carreira: a construção de tendas e a utilização de superfícies mínimas, sendo esta última muito importante num campo de concentração onde os materiais são escassos.

A arquitetura leve, orgânica e também temporária de Frei Otto era uma resposta à arquitetura de sua época, pesada e feita supostamente para a eternidade. Segundo Glancey, p. 180,

”Projetada, na maioria das vezes, em escala gigantesca, numa maneira neoclássica pesada (...), (a arquitetura nazista) tinha por objetivo não somente impressionar mas esmagar o espírito humano individual.”

O trabalho de Otto era democrático, de baixo custo, leve e aberto à luz natural. Seu nome, escolhido pela mãe após assistir uma palestra sobre liberdade (“frei”, em alemão, significa “livre”), se encaixaria perfeitamente no seu estilo.

Após a Segunda Guerra Mundial, ele aproveitou-se da escassez de materiais de construção para desenvolver estruturas leves e econômicas. Em 1950, viajou para os Estados Unidos e seu trabalho recebeu influência de arquitetos como Frank Lloyd Wright, Erich Mendelsohn, Eero Saarinen, Ludwig Mies van der Rohe, entre outros e, de uma forma mais significativa, Buckminster Fuller.

Em 1958, fundou o Instituto de Estruturas Leves em Berlim e, em 1964, em Stuttgart. Em 1961, ele fundou o grupo de pesquisa "Biologia e Construção", um grupo interdisciplinar de biólogos, arquitetos e engenheiros.

Foi precursor dos grupos interdisciplinares, nos quais não só trabalham em conjunto arquitetos e engenheiros, como também biólogos. Estes últimos lhe permitiram

apoderar-se do conhecimento necessário para desenvolver seus projetos baseados em formas naturais e obter na natureza respostas a problemas estruturais.

Os métodos de trabalho de Otto foram baseadas no estudo da natureza e sua aplicação em obras arquitetônicas. Observando o comportamento da estrutura de plantas e animais, ele conseguiu soluções estruturais que teria sido impossível naquele momento, sem sofisticados programas de computador. Também conduziu experimentos com bolhas de sabão, tendo como objetivo principal a otimização.

Foi o responsável junto com o arquiteto Günter Behnisch pela concepção e construção do Parque Olímpico que iria sediar os Jogos Olímpicos de Munique de 1972. Eles levantaram uma estrutura leve, onde as tensões são anuladas por um sistema de suportes e cabos, permitindo economia e uma forma inovadora. Foram os pioneiros na utilização de cálculos matemáticos baseados em procedimentos de computação para determinar a forma e o comportamento da superfície da cobertura.

Figura 69 – Parque Olímpico de Munique, na Alemanha



Fonte: https://es.wikiarquitectura.com/images/c/c1/EOM_7.jpg

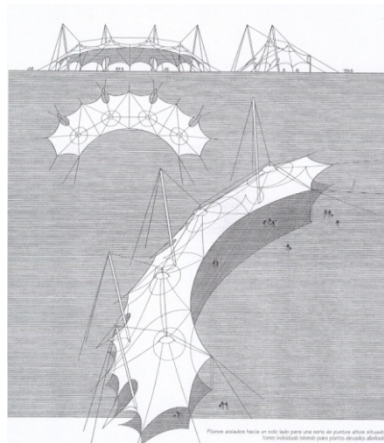
A construção do estádio para jogos entre 1966 e 1972, obra de Frei Otto, foi o mais importante e o que mais impactou o mundo todo. A tenda de campanha transparente consiste de três estruturas que se tornou um marco para o centro da cidade. O estádio tem dimensões de 105×68m e capacidade para 69.250 espectadores, com um campo de grama cercado por pista de atletismo.

A cobertura do Estádio Olímpico de Munique, que abrange e unifica os estádios, pistas e piscinas, foi desenvolvido com base na utilização de procedimentos matemáticos computadorizados para determinar sua forma e comportamento, resultando em uma forma arquitetônica de superfícies mínimas usado pela primeira vez em coberturas tensionadas com essas dimensões, 74.800m².

Em primeiro lugar, a estrutura de metal, cujas áreas pequenas foram cobertas com PVC, criou inúmeras superfícies mínimas e, conseqüentemente, seu peso também era mínimo, permitindo a construção de uma cobertura arquitetônica de extrema leveza.

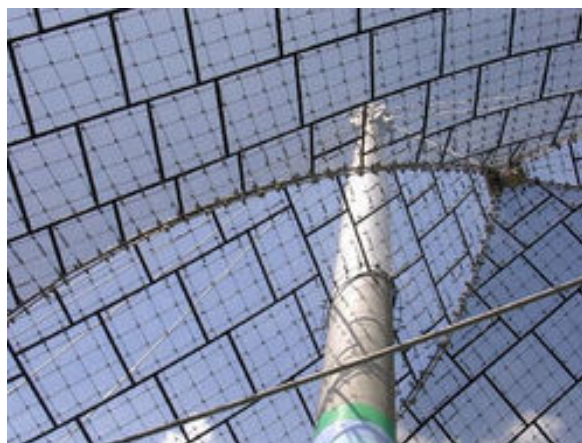
Em segundo lugar, a tensão superficial destas formas ficou totalmente equilibrada, fornecendo uma construção muito estável. Contrárias aos padrões ortogonais rígidos da arquitetura moderna, superfícies mínimas apresentam formas orgânicas de elegância extraordinária. É justamente por essa elegância que percebe-se logo à primeira vista que, longe de se impor ao meio, a construção se adaptou a ele. A membrana da cobertura foi suspensa a partir de uma multiplicidade de mastros verticais que permitem que as curvas sinuosas da superfície irregular flua naturalmente, mudando de forma e escala dependendo da necessidade.

Figura 70 – Cobertura do estádio



Fonte: https://es.wikiarquitectura.com/images/d/d1/EOM_cubierta.jp

Figura 71 – Cobertura do teto do estádio.



Fonte: https://es.wikiarquitectura.com/images/8/83/EOM_18.jpg

Figura 72 – Mastro de suporte dos cabos



Fonte: https://es.wikiarquitectura.com/images/5/51/EOM_12.jpg

Apesar de seu foco ser supostamente humanitário, Otto era conhecido principalmente por estruturas temporárias que ele criou para bienais, exposições e outros eventos especiais. Em 1967, ele projetou o West Germany's World Expo Pavilion, uma teia de tração de vidro acrílico transparente inspirado nas películas de sabão.

Figura 73 – Exposição Universal de 1967, ou Expo 67, Montreal, Canadá.



Fonte: http://images.adsttc.com/media/images/5507/43f8/e58e/ce0c/0b00/000e/large_jpg/Frei-Otto-The-1967-International-and-Universal-Exposition-01.jpg?1426539501

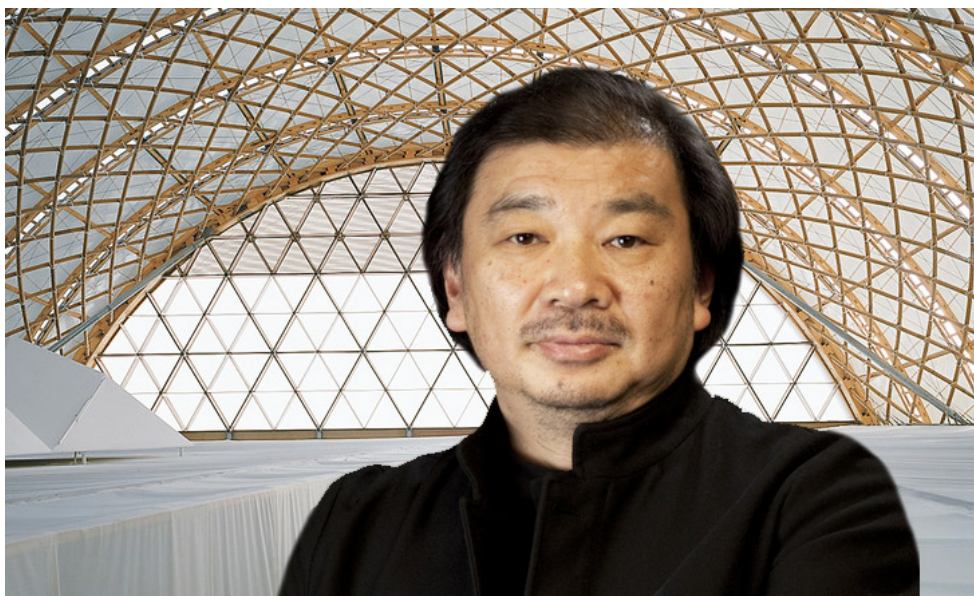
Ele construiu esse conceito quando projetou o suspenso e enorme estádio principal dos Jogos Olímpicos de Munique. Infelizmente, ele não conseguiu encontrar uma maneira fácil de produzir em massa seus projetos.

“Frei Otto foi um utópico que nunca deixou de acreditar que a arquitetura pode fazer um mundo melhor para todos, escreveu o Comitê Pritzker em um comunicado. [Sua] carreira é um modelo para gerações de arquitetos e sua influência continuará a ser sentida.”

6.1.5 Shigeru Ban

Mas mesmo que Otto não tenha alcançado as suas metas mais ambiciosas, ele ainda era um visionário que teve uma influência direta sobre muitos arquitetos contemporâneos. Seus seguidores incluem o ganhador do Prêmio Pritzker 2014, Shigeru Ban, o arquiteto com quem trabalhou no pavilhão japonês para a Expo 2000 na Alemanha e que dedicou grande parte de sua carreira para criar o mesmo tipo de abrigos provisórios que Otto acreditou serem necessários. No momento em que desastres naturais e guerras deixaram mais de 50 milhões de pessoas em todo o mundo desabrigadas, essa dedicação parece realmente imprecindível.

Figura 74 – Shigeru Ban



Fonte: <http://assets.inhabitat.com/wp-content/blogs.dir/1/files/2014/06/Shigeru-Ban-Pritzker-Prize.jpg>

O grande conhecimento de estrutura e apreço por mestres como Mies van der Rohe e Frei Otto contribuiu para o desenvolvimento e concepção de seus edifícios.

Acima de tudo, o respeito pelas pessoas que habitam seus edifícios, sejam vítimas de catástrofes naturais ou clientes privados ou públicos, é sempre revelado através de sua abordagem reflexiva, planos funcionais, materiais adequados cuidadosamente selecionados, e a riqueza de espaços que cria.

Ele é um arquiteto de destaque que, por vinte anos, tem respondido com criatividade e desenhos de alta qualidade em situações extremas causadas por desastres naturais devastadores. Seus edifícios servem de abrigo, centros comunitários e locais espirituais para aqueles que sofreram enormes perdas e tem sido vítimas de tamanha destruição. Seus trabalhos já ajudaram pessoas atingidas por tragédias em locais como Ruanda, Turquia, Índia, China, Itália e Haiti, e seu país natal, o Japão, entre outros.

Shigeru Ban tem usado papel, um material intrinsecamente fraco, sob a forma de tubos, painéis de favo de mel e membranas para construir dezenas de estruturas ao longo das últimas duas décadas, de instalações de exposição e abrigos temporários a pavilhões monumentais.

Figura 75 – Estrutura da cobertura do Museu de Arte das Crianças Nemunoki



Fonte: Salado, 2003, p. 36

Os tubos de papel, a forma mais associada com o nome de Ban, começam com rolos de papel reciclado. Estas são cortadas em tiras, saturadas com cola e enroladas em espiral em torno de uma haste de metal curta que cria o núcleo oco do tubo. O tubo pode ser feito em qualquer diâmetro, espessura e comprimento, dependendo de seu uso. E os tubos utilizados podem ser reciclados, criando um ciclo interminável de reutilização.

Figura 76 – Tubos de papelão



Fonte <https://s3.amazonaws.com/mfrural-produtos-us/136586-145978-670409-vendemos-tubetes-de-papelao-filme-stretch-.png>

Ban foi atraído pelos tubos de papel, porque eles são baratos, facilmente substituíveis, baixa tecnologia, mantém a sua cor natural e praticamente não produzem resíduos.

6.1.6 Swiss Re Tower – O “pepino” de Londres

A torre de escritórios da Swiss Re, maior seguradora do planeta, chama atenção não apenas por sua audácia estética, como pela adoção de soluções de vanguarda, do ponto de vista ambiental, tecnológico, arquitetônico e social.

Projetada pela empresa Foster and Partners, o corpo cilíndrico originou um desenho singular para o edifício de 180 metros de altura e 41 pavimentos, localizado no centro financeiro de Londres.

Figura 77 – Swiss Re Tower



Fonte: https://wikiarquitectura.com/es/images/5/5d/SwissRe_Iluminada.jpg

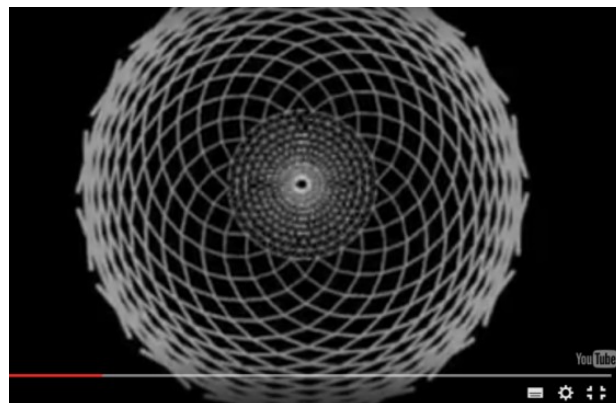
Semelhante à forma dos **foguetes espaciais**, o corpo cilíndrico do edifício responde às necessidades de redução do impacto das **cargas de vento** incidentes sobre sua estrutura. O exoesqueleto que sustenta a torre é composto por uma estrutura diagonal construída com perfis de aço de alta resistência, tendo como base uma malha triangular. Isso gera uma estrutura altamente resistente e independente dos pisos, permitindo que todos os ambientes internos se desenvolvam sem a interrupção de pilares. Isso permite também que o interior não seja afetado por cargas horizontais em geral, como o vento.

Figura 78 – Esqueleto de malha triangular



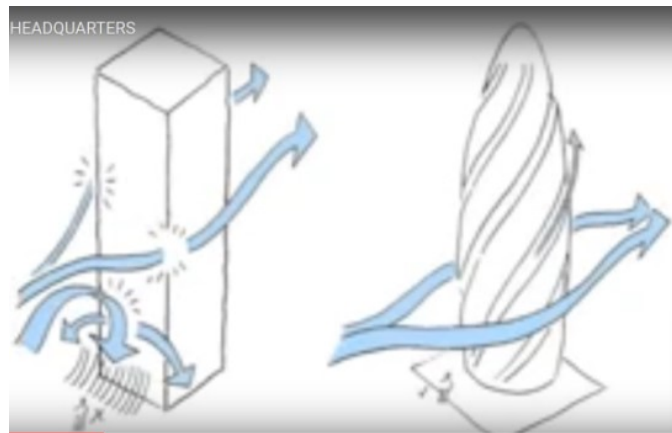
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=TBlvNxQDBB4>

Figura 79 – Vista superior



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=TBlvNxQDBB4>

Figura 80 – Formato diminui o impacto de cargas horizontais

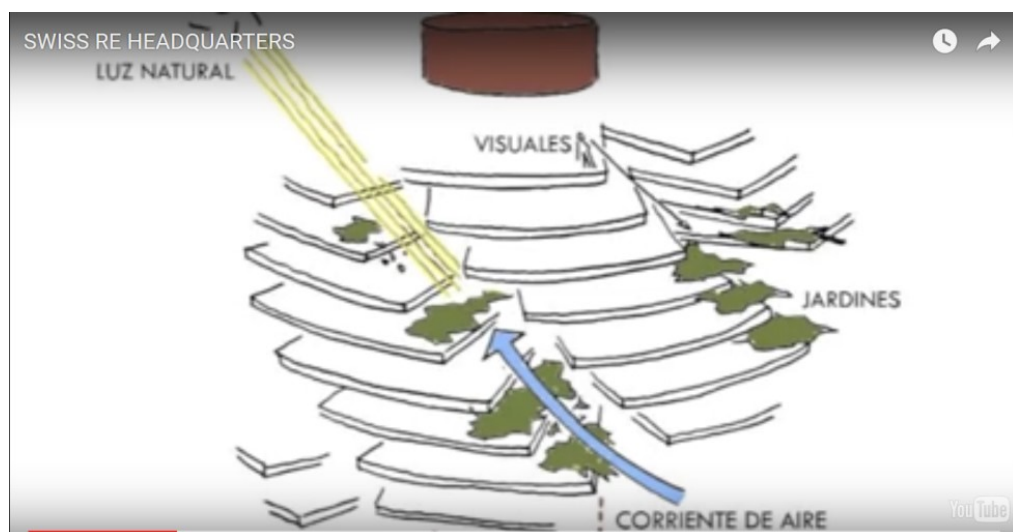


Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=TBlvNxQDBB4>

A sede da Swiss Re é um símbolo da arquitetura do século 21 na busca de informações tecnológicas e no emprego da **pesquisa ambiental para criar mega torres sustentáveis**, como resposta à crescente crise energética do planeta. O design permitiu ao edifício **consumo energético 50% menor** do que o obtido com o uso de estrutura tradicional.

O edifício foi desenhado para ser ventilado naturalmente durante 40% do ano, utilizando um sistema de abertura em cada piso que permite a entrada de luz natural e ventilação para todo o edifício.

Figura 81 – Swiss Re Tower. Arquiteto: Foster & Partners: abertura em cada piso



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=TBlvNxQDBB4>

Para quem abomina torres gigantes desde o 11 de setembro, uma coincidência: metade do prédio abriga os escritórios da Swiss Re, a seguradora do World Trade Center de Nova York.

6.1.7 Domos Geodésicos

O Projeto Éden é o maior jardim botânico do mundo. É um experimento científico que combina ecologia, horticultura, ciência, arte e arquitetura. O projeto foi concebido por Tim Smit e projetado pelo arquiteto britânico Nicholas Grimshaw e empresa de engenharia Anthony Hunt e Associates.

O desafio para este projeto foi a concepção dos edifícios para proporcionar o ambiente para criar diferentes micro climas. Em busca do caminho mais eficaz para isso, Grimshaw foi inspirado por uma forma orgânica: o domo geodésico inventado por Buckminster Fuller, EUA, que englobam volume máximo proposto com área mínima possível.

Figura 82 – Projeto Éden



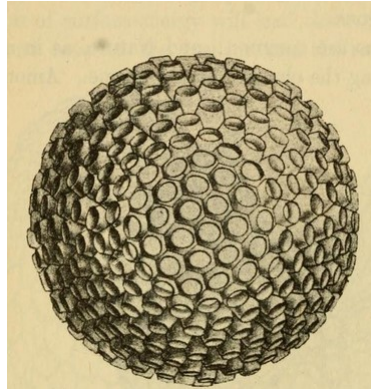
Fonte: https://wikiarquitectura.com/es/images/f/fd/14_proyecto_eden.jpg

As teorias de Fuller sobre as estruturas geodésicas e diversos outros assuntos estão nos dois volumes de seu livro “Synergetics – Explorações em Torno da Geometria do Pensar” (2002). Nele estão descritas suas idéias sobre uma geometria inspirada nos padrões

energéticos e formais da natureza, definindo um sistema matemático experimentado não só por abstrações e cálculos, mas por experimentações físicas e reais.

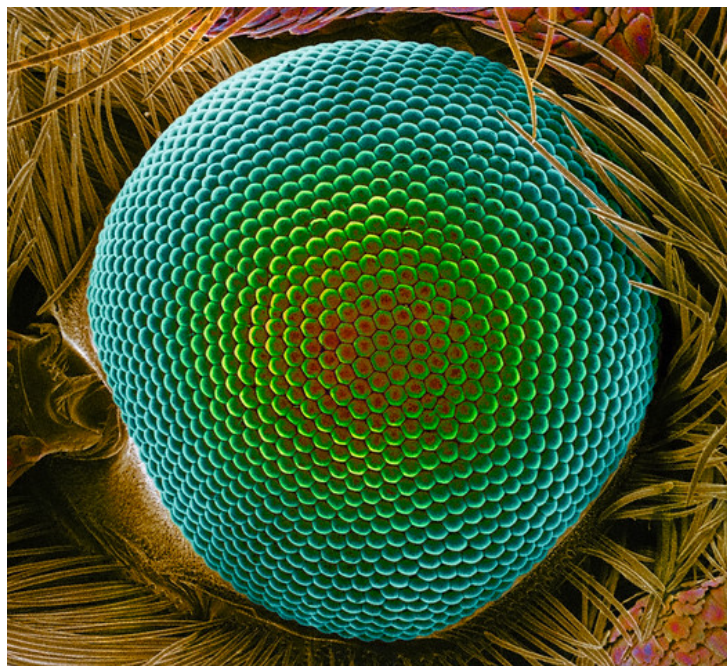
Seus domos geodésicos foram inspirados nos radiolários, organismos marinhos mencionados no livro de D'Arcy Thompson. As características dos radiolários – organização estrutural segundo linhas de força e configuração segundo o menor quociente entre superfície e volume, o que reflete também numa economia energética derivada da conservação do calor – serão precisamente o que Fuller identificará com suas cúpulas geodésicas. Note a semelhança entre os radiolários e os olhos das moscas. É o mesmo empacotamento de bolhas confinadas em placas de vidro.

Figura 83 – Ethmosphaera consiphonia



Fonte: Thompson (1945), p.710

Figura 84 – Close do olho de uma mosca



Fonte: <http://cantinodafrancicleide.blogspot.com.br/2011/07/imagens-espantosas-3-tiradas-com-um.html>

Apesar de simples, as estruturas Geodésicas apresentam grande resistência às intempéries do ambiente, podendo suportar normalmente fortes rajadas de vento e pequenos tremores de terra. Isto acontece em razão do baixo peso e do efeito aerodinâmico da Geodésica que permite que a tensão circule dividindo o atrito e amenizando seu impacto.

Seu formato hermético também diminui a perda de calor, mantendo a temperatura estável dentro da geodésica. Além disso, por possuir menor área superficial, demanda menos material para sua construção.

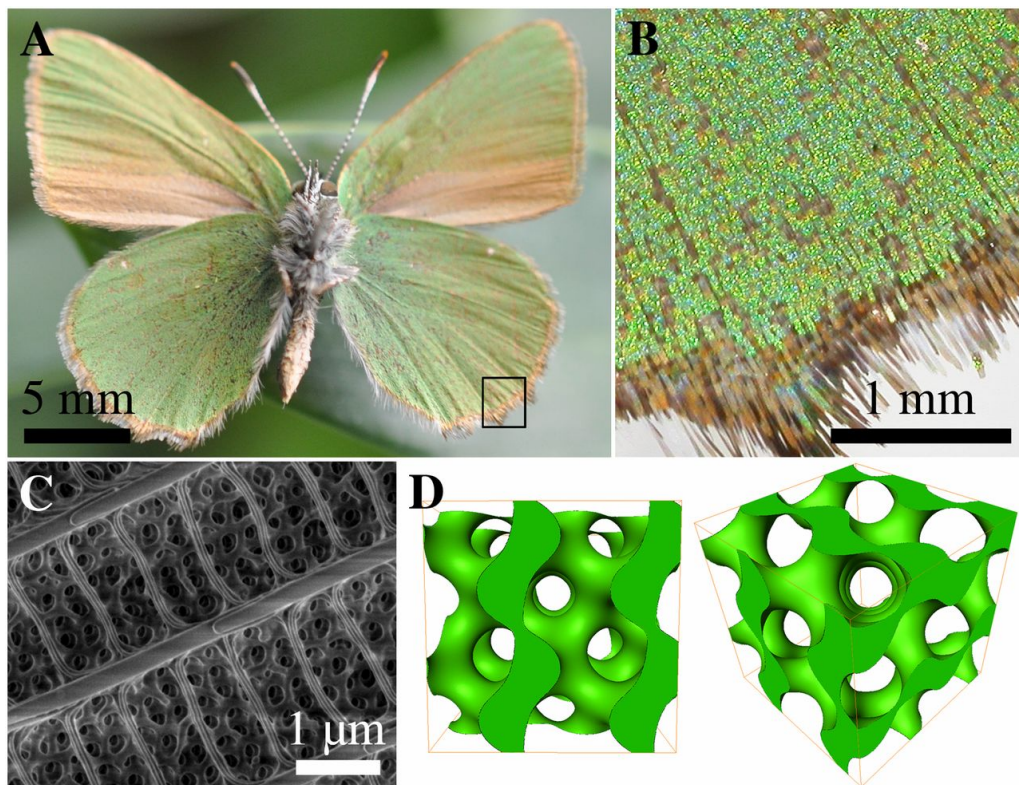
6.2 Utilização dos princípios de otimização da natureza em usos diversos

6.2.1 Borboletas e giróides

Algumas borboletas ganham suas cores fabulosas com a luz refratada em estruturas membranosas que já há algum tempo foram descobertas por matemáticos, e desde então vêm sendo aplicadas na ciência dos materiais da Era Espacial.

Usando microscópios com resolução tridimensional em escala nanométrica, pesquisadores da Universidade de Yale descobriram que nuances de verde nas asas de 5 espécies de borboletas são produzidas por estruturas cristalinas chamadas de giróides.

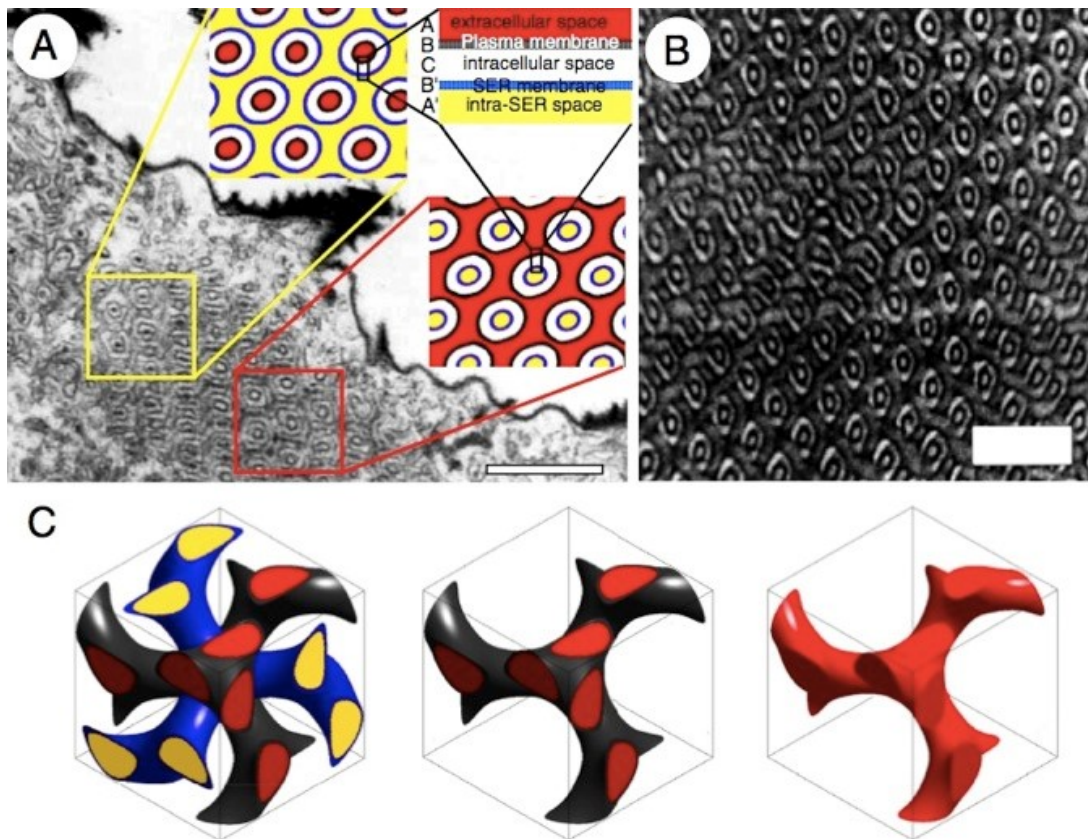
Figura 85 – Borboleta Green hairstreak, espécie *Callophrys rubi*.



Fonte: <http://www.pnas.org/content/112/42/12911/F1.large.jpg>

A forma de giróide foi concebida em 1970 pelo físico da NASA Alan Schoen em sua pesquisa teórica de materiais ultraleves e ultrafortes para serem usados no espaço..

Figura 86 – Asa de borboleta vista com microscópio eletrônico



Fonte: <http://www.wired.com/2010/06/butterfly-colors/>

Enquanto os matemáticos ainda especulavam sobre a natureza dos giróides, os entomologistas os encontraram, pelo menos em duas dimensões, na natureza. Imagens microscópicas das asas das borboletas mostraram que a superfície de algumas placas, e o modo como estas placas refletiam luz, estavam de acordo com as previsões da matemática dos giróides. Por exemplo, as borboletas *Morpho rhetenor* têm em suas asas várias camadas de revestimento e ar para produzir suas impressionantes cores azuis.

Figura 87 – Borboleta Morpho Rhetenor

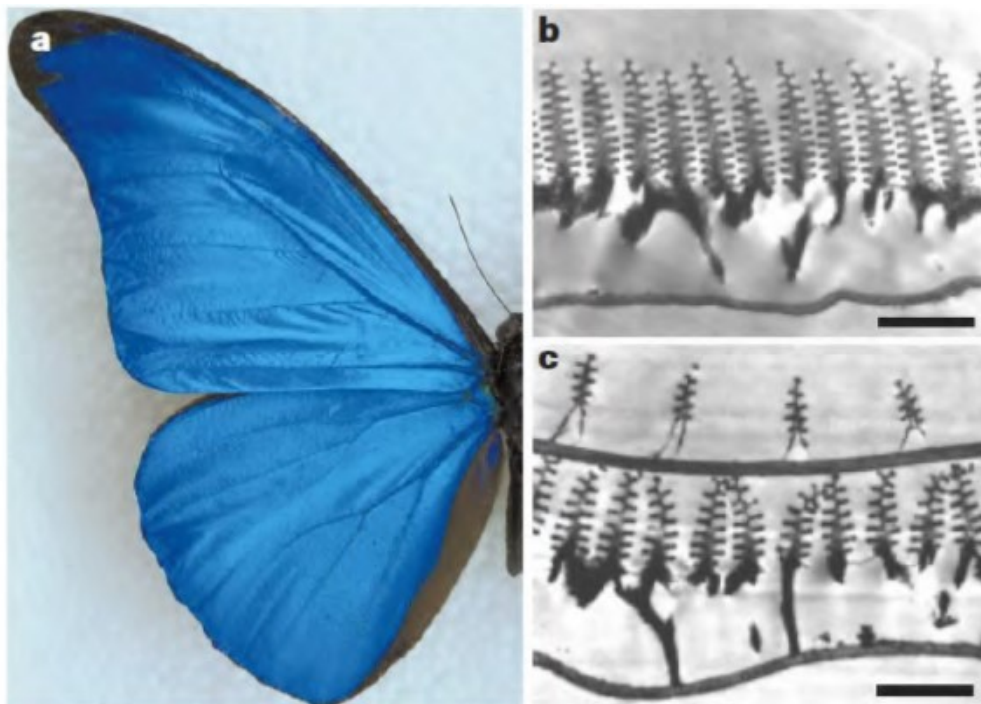


Figura 2.2: Iridescência na borboleta *Morpho rhetenor*. (a) Imagem real do azul iridescente de uma asa da borboleta. (b) Imagem de microscopia eletrônica de transmissão (MET) mostrando as seções transversais na asa da *M. rhetenor*. (c) Imagem de MET de uma seção transversal da asa da espécie *M. didius* revela as multicamadas discretamente configuradas. A alta ocupação e o número elevado de camadas na asa da *M. rhetenor* em (b) cria uma refletividade intensa que contrasta com a aparência colorida mais difusa da *M. Didius*, em que as camadas se sobrepõem criando fortes efeitos de difração. Tamanho das escalas: (a) 1 cm; (b) 1,8 μm ; (c) 1,3 μm . Imagem adaptada da referência [8].

Fonte: http://www.fisica.ufes.br/sites/www.fisica.ufes.br/files/003_Hamilton_Dias_Leite.pdf

Essas estruturas fotônicas naturais são fonte de inspiração para aplicações tecnológicas. Cientistas especializados em pesquisa de materiais agora usam giróides sintéticos para fazer dispositivos fotônicos, tais como células solares e sistemas de comunicação, os quais manipulam fluxos de luz.

Os cristais fotônicos são estruturas periódicas cuja periodicidade é da ordem do comprimento de onda da luz. Estas estruturas periódicas são denominadas cristais em analogia aos cristais naturais, que possuem periodicidades de ordem atômica.

Uma de suas mais importantes aplicações é seu uso como transistores ópticos. Há um grande interesse em cristais fotônicos de duas e três dimensões. Os bidimensionais já estão se espalhando para aplicações comerciais. Hoje em dia, cristais fotônicos tridimensionais ainda estão longe de comercialização. Quando isso acontecer, eles vão

permitir novos conceitos de dispositivos como computadores ópticos substituindo a tarefa de semicondutores. A substituição dos componentes de microchips de silício por análogos ópticos pode trazer mudanças significativas para a transmissão de informação, abrindo espaço para o campo da computação quântica.

6.2.2 Produção de Energia

Usinas de Energia Solar Concentrada (CSP – do inglês Concentrated Solar Power) ainda são limitadas no mundo, mas esse o número deve crescer. Essa tecnologia pode potencialmente gerar energia renovável suficiente para alimentar o planeta inteiro, uma vez que dois fatores existem em grande quantidade: terra e luz solar.

Numa usina CSP, os espelhos (heliostatos) geralmente são dispostos ao redor da torre central em círculos concêntricos. Mas esse padrão resulta em um sombreamento maior que o necessário, reduzindo a reflexão da luz dos espelhos para a torre.

Figura 88 – Heliostato de uma usina de energia solar concentrada

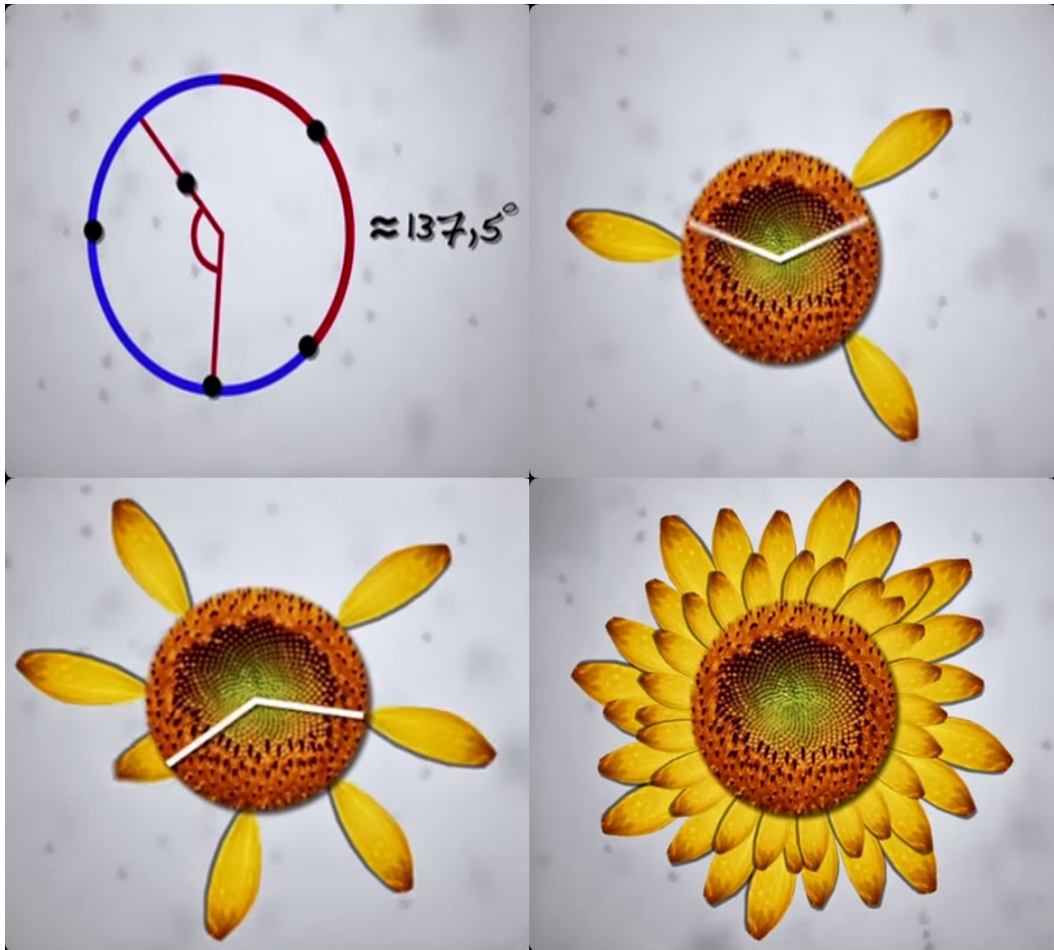


Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Heliostat.jpg>

Procurando otimização, uma vez que os heliostatos são caros, os cientistas do MIT (Massachusetts Institute of Technology) buscaram inspiração na natureza, mais precisamente, no girassol.

As sementes de um girassol são dispostas de forma espiral, conhecida como espiral de Fermat, que aparece em muitos outros objetos naturais. Há muito tempo isso tem fascinado matemáticos que descobriram que as sementes do girassol vão se distribuindo formando um ângulo áureo: aproximadamente $137,5^\circ$.

Figura 89 – Distribuição das sementes de um girassol



Fonte: <http://3.bp.blogspot.com/-wUGktZ57dHc/VKl2YmpdMzI/AAAAAAAAADTM/bbMybmr1srA/s1600/gi-tile.jpg>

Os pesquisadores desenvolveram um campo em espiral com seus heliostatos reorganizados para se parecer com um girassol, com cada espelho inclinado cerca de 137° em relação ao seu vizinho. A área numericamente otimizada ocupa um espaço 20% menor que a disposição em círculo. Além disso, o padrão espiral reduziu o sombreamento e bloqueio e aumentou a eficiência total.

Figura 90 – Heliostatos distribuídos em padrão espiral

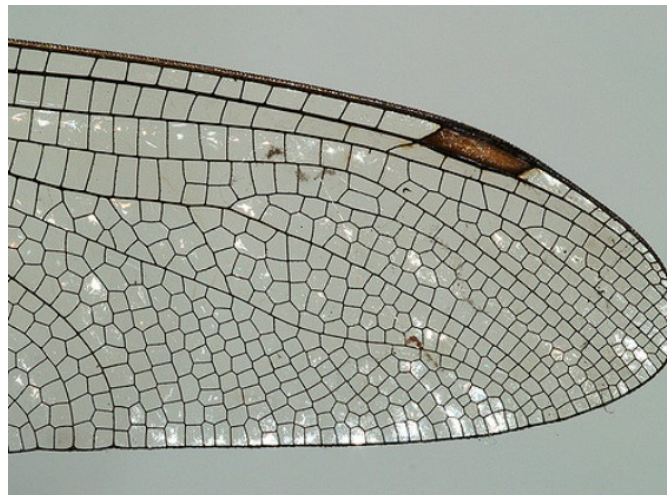


Fonte: <http://helios.blog.com/files/2012/01/Gemasolar-aerial.jpg>

6.2.3 Asa da libélula e turbina de vento

Energia eólica é uma importante opção para a crise de energia, principalmente em países onde a população vem aumentando. Para obtê-la é necessário que o vento passe por hélices que acionam turbinas. A dificuldade nesse tipo de equipamento é que ele tem que aproveitar os ventos fracos e evitar a sobrecarga de energia que pode ser causada por ventos muito fortes. Em turbinas eólicas de grande porte, existe um sistema informatizado que ajusta o ângulo das lâminas das hélices compensando a força dos ventos. Mas, nas menores, o custo desse sistema não compensa o ganho de energia. Uma solução para o problema está no design inteligente da asa da libélula. Sua configuração é parecida com bolhas dispostas entre duas placas de vidro.

Figura 91 – Detalhe da asa da libélula



Fonte: <https://www.flickr.com/photos/gripspix/1233292309/>

O engenheiro aeroespacial Akira Obata, da Universidade Nippon Bunri, em Oita, no Japão realizou testes para verificar como o ar flui nas asas da libélula. Ele descobriu que, conforme o ar flui entre as asas, pequenos picos em sua superfície criam uma série de vórtices giratórios.

A velocidade do movimento da libélula é o mesmo quando o fluxo de vento é lento, mas quando a velocidade aumenta, em vez de aumentar a velocidade da libélula, a estrutura da asa neutraliza a velocidade e controla-o. Devido a isso, ela pode manter a sua velocidade, mesmo em tempestades.

A capacidade da libélula de operar suas quatro asas de forma independente para voar, deslizar e pairar enquanto ela permanece estável, mesmo em vento forte, vem sendo estudada e as microturbinas eólicas estão sendo desenvolvidas nas mesmas linhas.

No entanto, questiona os animais, e eles te ensinarão; pergunta às aves do céu, e elas de esclarecerão; ou fala com a própria terra, e ela te ministrará; até os peixes do mar te instruirão. Qual dentre todos eles não tem conhecimento que a mão de Yahweh, o Senhor, criou tudo o que há?

Jó 12: 7-9

Vale lembrar ainda a frase do arquiteto Mies Van der Rohe, em alusão a sua arquitetura minimalista: “Deus está nos detalhes”.

Um pouco de história...

Existe uma lenda que diz que o filósofo Denis Diderot, ateu convicto, vinha influenciando a monarquia russa com suas crenças pagãs. Euler, cristão fervoroso, foi convidado a intervir. Euler procurou Diderot dizendo ter uma prova matemática da existência de Deus e proclamou: “Monsieur, $\frac{(a+b^n)}{n} = x$, donc Dieu existe; répondez!” (Cavalheiro, $\frac{(a+b^n)}{n} = x$, portanto, Deus existe. Responda!

Esta afirmação, partindo de um matemático com a fama de Euler, pareceu a Diderot um discurso perfeitamente sensato e, ignorante como era dos processos algébricos e do seu significado, permaneceu calado por alguns segundos intermináveis. Depois, os espectadores explodiram numa estrondosa gargalhada. Sentindo-se escarnecido, Diderot abandonou a corte e voltou para a França.

É claro que isso é somente uma lenda e ninguém conseguiu provar a existência de Deus. Mas, após assistir ao vídeo “Nature by Numbers”, de Christoval Vila (link abaixo), é difícil pelo menos não pensar que todas essas relações não são por acaso.

<https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA>

7 PLATEAU

A lenda diz que Joseph Plateau, especialista em persistência retínica, queimou a retina olhando diretamente para o Sol por alguns segundos. Mesmo cego, observou as bolhas de sabão com os olhos dos outros e, daí, deduziu teorias topológicas totalmente inacessíveis àqueles que enxergam.

“Não desdenho nenhum experimento, por mais infantil que possa parecer à primeira vista. Acho que as brincadeiras das crianças mereceriam o estudo dos filósofos.” Segundo Witkowski, 2004, p. 144, essa frase do filósofo natural Robert Boyle (1627-91) foi incorporada pelo físico belga Joseph Plateau (1801-83), em circunstâncias que nada tinham de brincadeira infantil.

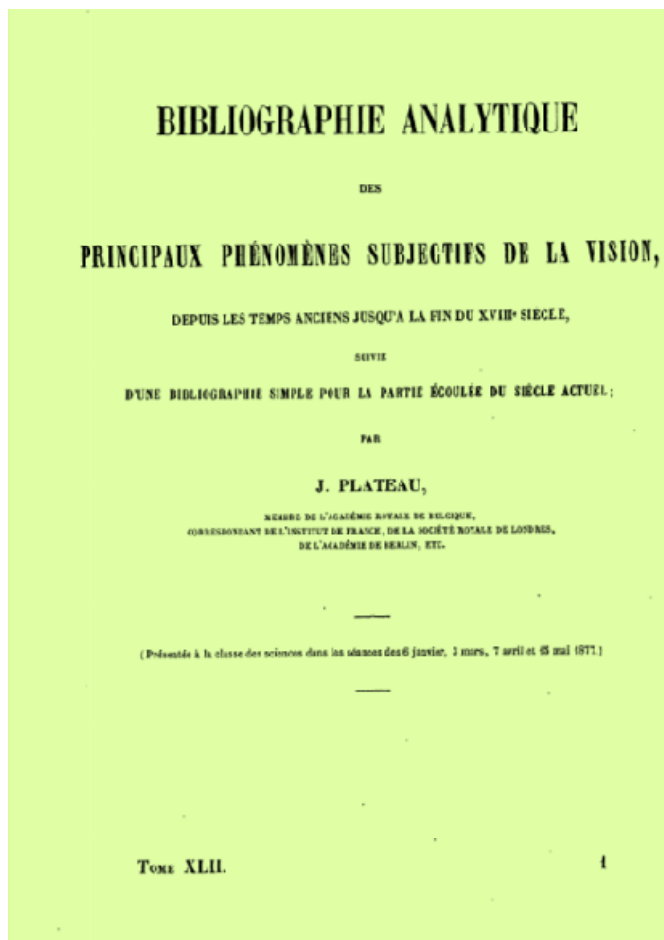
A percepção visual foi uma das questões que desempenharam papel motriz no desenvolvimento da física. Da dissertação de doutorado (uma obra prima de 27 páginas) até o fim da vida, Plateau foi um estudioso árduo das questões de permanência retínica. Em 1829, deu a maior prova de dedicação à ciência: em uma atitude imprudente de obter uma impressão persistente de pós-imagem, encarou diretamente o sol durante 25 segundos. Não viu mais nada durante alguns dias, mas sua visão voltou... para desaparecer completamente 14 anos mais tarde, o que leva alguns a pensarem que sua cegueira deveu-se a uma uveíte crônica, sem nenhuma relação com o perigoso experimento da juventude.

De qualquer forma, a cegueira não impediu Plateau de revolucionar, mesmo na área da deficiência: a percepção visual. Contou com a ajuda do filho, Felix Plateau, genro e colegas dedicados para executar experimentos, fazer observações e declamar artigos. Em 1878, Plateau, com 78 anos, tinha perdido a visão já fazia 34 anos. Nesse mesmo ano, foi publicada uma bibliografia anotada sobre mais de 2000 anos de observações em fenomenologia sensorial:

Plateau, J. (1878). *Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision, depuis les temps anciens jusqu'à la fin du XVIIIe siècle. Suivie d'une bibliographie simple pour la partie écoulée du siècle actuel. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 42.*

[“Bibliografia analítica dos principais fenômenos subjetivos da visão, dos tempos antigos até ao fim do século XVIII. Seguida de uma bibliografia simples para a parte já passada deste século”].

Figura 92 – Capa da Bibliographie Analytique



Fonte: http://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PID=PPN129323659_0042

Depois que sua cegueira o impediu de continuar a lecionar, Plateau continuou seus experimentos sobre capilaridade e tensão superficial em sua própria casa. Observou sobretudo que o simples fato de mergulhar numa mistura de água com sabão uma armação de arame poliédrica ou outra qualquer bastava para resolver um problema matemático de grande dificuldade: determinar que superfície de área mínima apóia-se sobre um dado contorno. Hoje, em sua homenagem, tal problema recebe o nome de *problema de Plateau*.

Segundo Witkowski (2004, p. 146), além das películas de sabão darem a resposta imediata, ainda têm o maravilhamento adicional daqueles que podem enxergar:

“Os sistemas laminares assim desenvolvidos nas armações, excitaram a admiração de todas as pessoas a quem os apresentei: são de uma regularidade perfeita, suas arestas líquidas têm uma finura extrema, e suas lâminas exibem depois de certo tempo as mais ricas cores.”

Plateau.

Beleza também descrita no livro Soap Bubbles (Boys, 1916, pg. 88), fazendo referência ao catenóide (figura abaixo): “É impossível dar uma idéia da perfeição da forma da figura, mas, felizmente, esta é uma experiência que qualquer um pode facilmente executar”.

Figura 93 – Helicóide de película de sabão



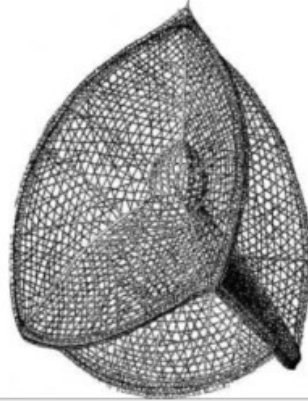
Fonte do autor

Charles Vernon Boys (1855-1944) foi um grande divulgador das propriedades das películas e bolhas de sabão. Ele deu inúmeras palestras e demonstrações que foram reunidas no seu livro Soap Bubbles and the Forces Which Mould Them, que se tornou muito popular entre estudantes de todas as idades. Seus experimentos foram baseados naqueles realizados por Plateau.

Os objetos obtidos com esses experimentos são de uma beleza tão grande, que apenas isso já seria um bom motivo para realizá-los e nem haveria a necessidade de se perguntar se tais objetos realmente existem fora desse universo dos filmes de sabão. Mas existem!

7.1 Radiolários

D’Arcy Thompson observou em seu livro “Sobre o Crescimento e a Forma”, que existem microorganismos marinhos, chamados Radiolários, cujos esqueletos têm a mesma forma básica dos filmes de sabão em contornos poliédricos. Alguns radiolários são mostrados abaixo.

Figura 94 – *Callimira agnesae*

Fonte: <http://tera-3.ul.cs.cmu.edu/NASD/4dcb85c3-9fee-4c83-9e6d-fe6ce5522b59/China/disk2/20050328-068/31007851/HTML/00000179.htm>

Eles têm a mesma forma da configuração obtida quando mergulhamos um tetraedro e soprmos uma bolha no centro.

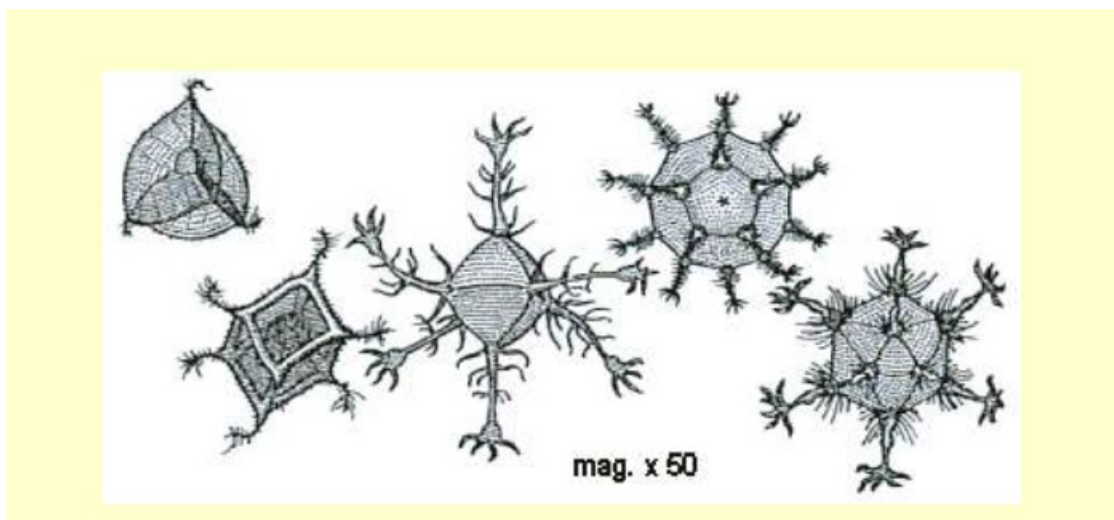
Figura 95 – Tetraedro de película de sabão com bolha



Fonte do autor

Além do tetraedro, os outros 4 sólidos platônicos foram encontrados no fundo do mar: o cubo, associado ao radiolário *Lithocubus geometricus*; o octaedro, ao *Circoporus octahedrus*; o dodecaedro, ao *Circorrhagma dodecahedrus*; e, ao icosaedro, o *Circognia icosahedrus*, na figura abaixo, da esquerda para a direita.

Figura 96 – Radiolários com configuração semelhante a dos 5 sólidos de Platão



Fonte: <http://davidpratt.info/pattern1.htm>

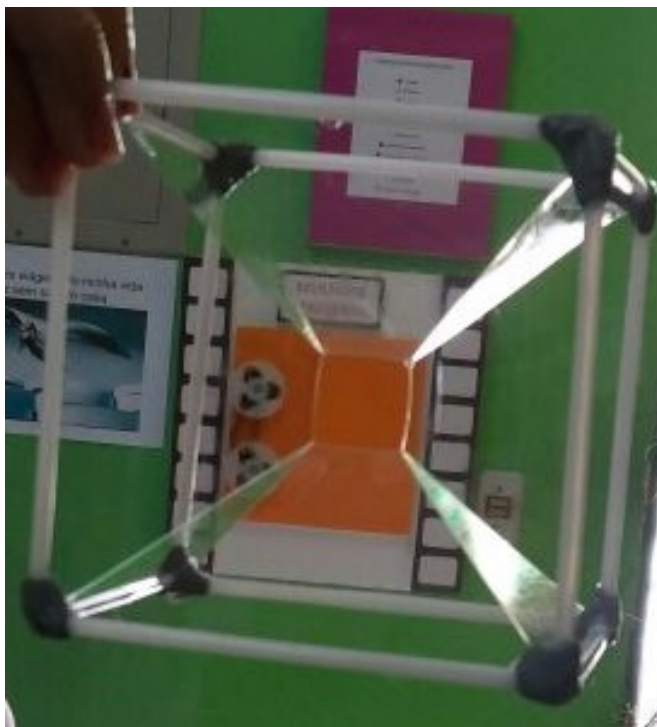
Figura 97 – Configuração do *Lithocubus geometricus*



Fonte do autor

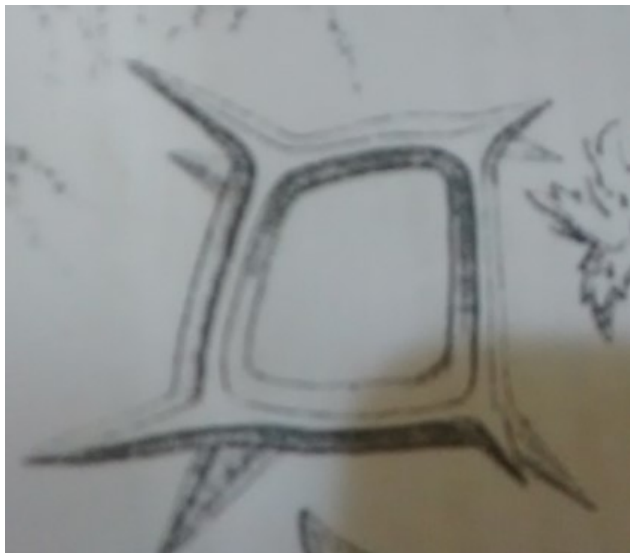
O radiolário *Archicircus rhombus* tem uma configuração semelhante a do filme abaixo.

Figura 98 – Película de sabão no cubo semelhante ao Archicircus rhombus



Fonte do autor

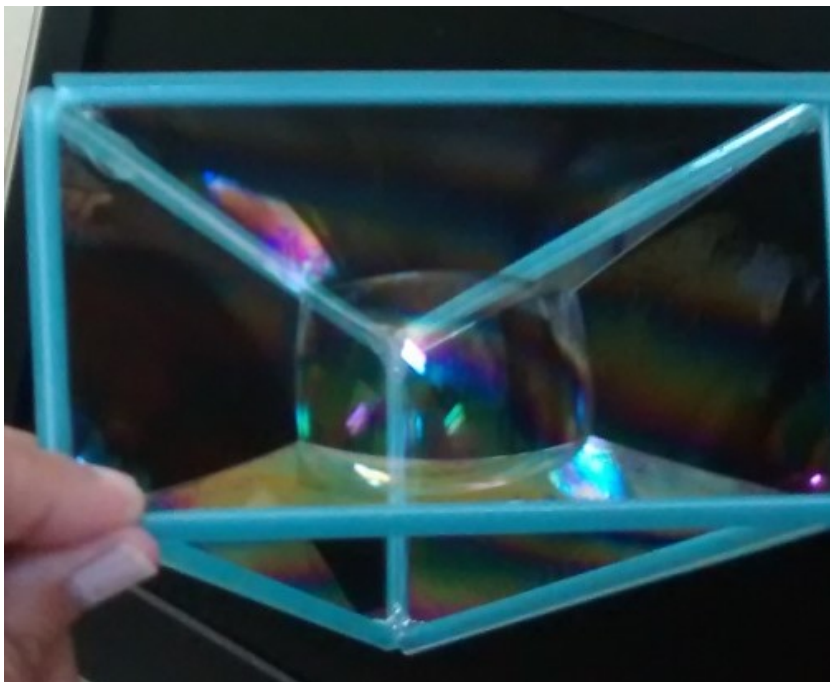
Figura 99 – Esqueleto do radiolário Archicircus Rhombus



Fonte: Isenberg (1992, p. 105)

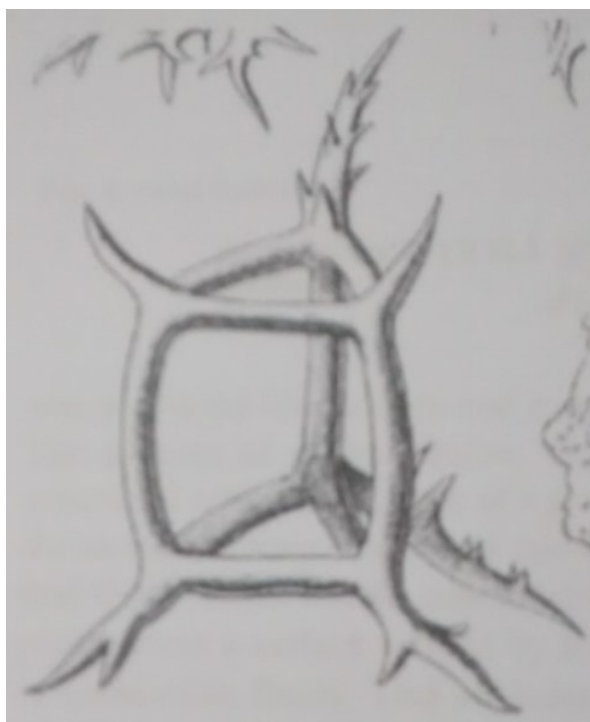
Existem esqueletos de radiolários com configurações de poliedros semi-regulares. O Prismaticum tripodium tem a configuração da película obtida no prisma triangular abaixo.

Figura 100 – Película com a configuração do Prismaticum tripodium



Fonte do autor

Figura 101 – Prismaticum Tripodium



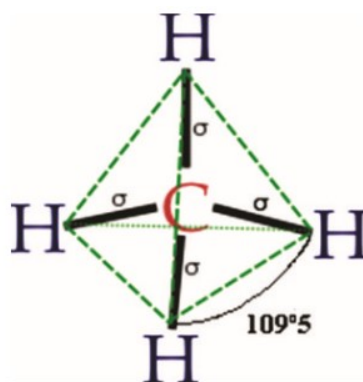
Fonte: Isenberg (1972, p. 105)

7.2 Alcanos

Alcanos são estruturas formadas apenas de carbonos e hidrogênios e apenas ligações simples entre carbonos.

O carbono forma estruturas tetraédricas. Nesse tipo de estrutura, o átomo de carbono localiza-se no centro de tetraedros regulares e seus ligantes ocupam os vértices. As ligações formam, entre si, ângulos de $109,5^\circ$, como ilustrado abaixo. Esta é a angulação mais estável para estruturas contendo carbono. Em cadeias cíclicas, as ligações entre carbonos apresentam ângulos inferiores a $109,5^\circ$, o que as tornam mais fracas.

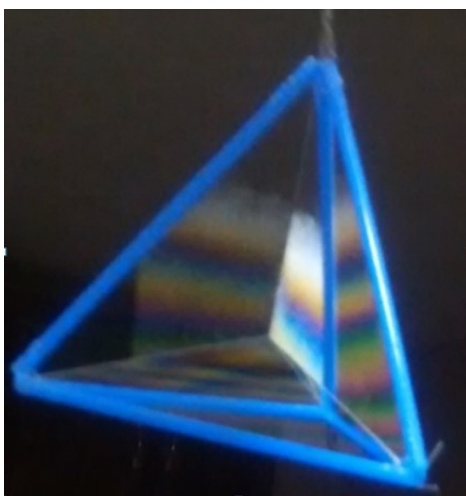
Figura 102 – Estrutura tetraédrica do metano



Fonte: <http://educacao.globo.com/quimica/assunto/quimica-organica/caracteristicas-dos-compostos-de-carbono.html>

Exatamente a mesma configuração do filme abaixo.

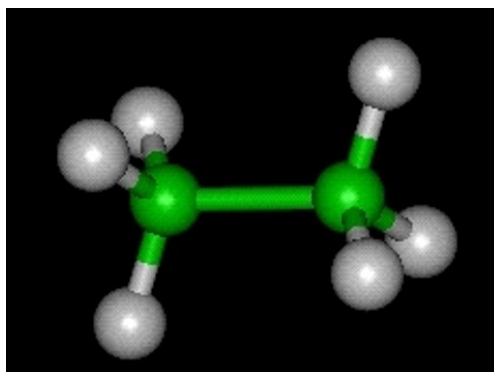
Figura 103 – Película com a configuração tetraédrica do metano



Fonte do autor

Outros alcanos estão relacionados abaixo com as respectivas películas de sabão. Se tivermos dois átomos de carbono, teremos a configuração abaixo (etano).

Figura 104 – Etano



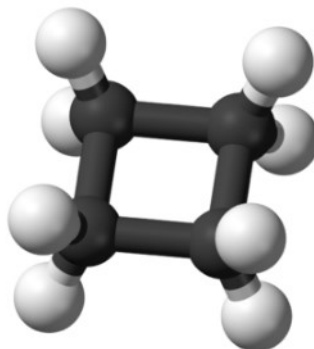
Fonte: <http://www.quimica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/uploads/5/407ethane.jpg>

Figura 105 – Película com a configuração do etano



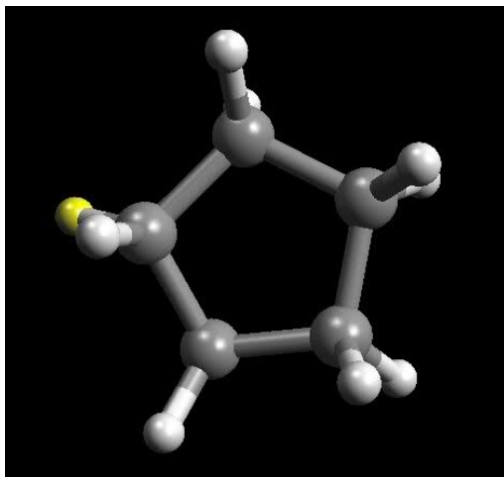
Fonte do autor

Figura 106 – Ciclobutano (mesma configuração da película formada no cubo)



Fonte: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1344115>

Figura 107 – Ciclopentano



Fonte: <http://tinypic.com/view.php?pic=10gz4o2&s=5#.V0wwzY-cFlZ>

Figura 108 – Película com a configuração do ciclopentano



Fonte do autor

Depois desses exemplos, podemos ver que as películas de sabão produzidas não formam apenas um conjunto de objetos bonitos. Elas são a resposta para uma melhor configuração de estabilidade e economia de energia e, certamente, ainda existe uma infinidade de outros exemplos na natureza a serem descobertos.

8 PROJETO SUPERFÍCIES MÍNIMAS E BOLHAS DE SABÃO

“Creio que para saber de felicidade não há como as borboletas e as bolhas de sabão, e o que se lhes assemelhe entre os homens. Ver revoltear essas almas aladas e loucas, encantadoras e buliçosas, é o que arranca a Zaratustra lágrimas e canções.

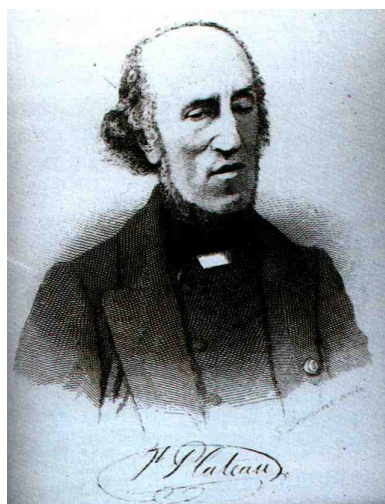
Friedrich Nietzsche

8.1 História

A beleza das bolhas de sabão tem sido descrita através dos tempos por meio de pinturas de famosos artistas como Murillo, Chardin, Hamilton, Manet e Millais. Entretanto, o estudo científico deste fenômeno vem desde o século XV, quando os cientistas se concentravam em dois campos de estudos relacionados às bolhas de sabão. No primeiro, tratavam dos fenômenos físicos, químicos e biológicos relacionados às características das bolhas, enquanto no segundo, utilizavam as bolhas em problemas matemáticos que requeriam a minimização das superfícies.

No século XIX, o físico belga Joseph Plateau mostrou que as soluções de tais problemas matemáticos poderiam ser produzidas experimentalmente utilizando-se uma montagem de uma figura de arame que, quando mergulhada numa mistura de água e sabão, produzia uma película que correspondia à superfície mínima. O fato surpreendente é que Plateau fez todas essas descobertas depois de ter perdido completamente a visão.

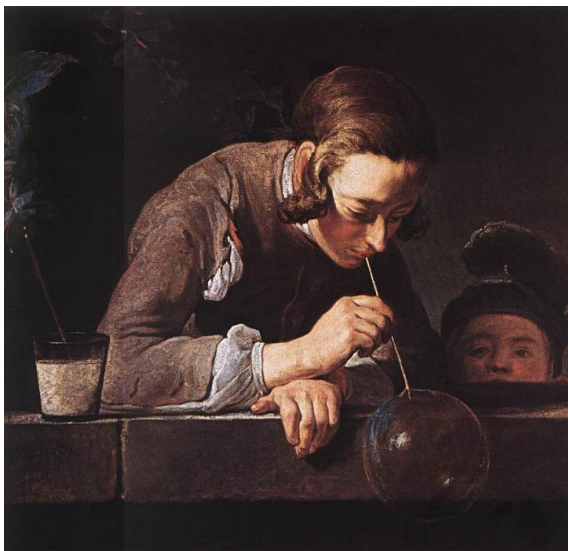
Figura 109 – Plateau



Fonte: <http://users.skynet.be/fa005895/imageENT.JPG>

8.2 Bolhas de sabão na pintura

Figura 110 – Jean Baptiste Simeon Chardin
Pintor barroco francês (1699-1779)



Fonte: [http://pt.wahooart.com/Art.nsf/O/7Z4Q87/\\$File/Jean-Simeon-Chardin-The-Soap-Bubble.JPG](http://pt.wahooart.com/Art.nsf/O/7Z4Q87/$File/Jean-Simeon-Chardin-The-Soap-Bubble.JPG)

Figura 111 – "Soprando Bolha de Sabão" – Edouard Manet
Pintor francês (1832-1883)



Fonte: http://2.bp.blogspot.com/-Qt5PzQMi0dQ/UINQ_cFEXDI/AAAAAAAAAN-c/d1-PO978Mgw/s1600/Edouard+Manet,+Blowing+Soap+Bubbles.jpg

Figura 112 – "Bolhas" – John Everett Millais
Pintor inglês (1829-1896)



Fonte: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/736x/47/da/ae/47daae037f794a56885767ef042892d2.jpg>

8.3 Projeto

8.3.1 Objetivos

- a) Analisar o comportamento das superfícies nas películas de sabão;
- b) Interpretar as Leis de Plateau;
- c) Relacionar as superfícies mínimas com o dia-a-dia.

8.3.2 Justificativa

- a) O aspecto recreativo, lúdico e divertido, trazendo um enorme efeito motivador;
- b) A riqueza de conteúdos abordados, tanto na Matemática, como em outras áreas.

8.3.3 Metodologia

Serão abordadas as leis de Plateau através de experimentos feitos com os seguintes materiais:

- a) Placas (ou calotas) paralelas e pinos, a fim de estudar caminhos mínimos (Problema de Jakob Steiner);
- b) Contornos de arame de vários formatos e poliedros regulares e semi-regulares feitos de canudos ou arame;
- c) Bolhas de sabão para analisar vários fatos, entre eles, o Problema de Kelvin.

Após os estudos, o grupo fará apresentações em cada turma da escola e, se possível, em outras escolas. Perguntas que serão feitas durante as apresentações serão citadas na seção 8.8 (Sugestões para as apresentações).

8.4 Geometria das películas e bolhas de sabão

O conjunto de materiais e experiências que apresentaremos a seguir envolvem várias áreas de estudo. Além do tema central das superfícies mínimas em Matemática, outros conceitos de Química, Física e Biologia, como tensão superficial e princípio da mínima ação, também são abordados. Os experimentos foram baseados ou adaptados daqueles feitos no livro “Soap Bubbles, Their Colours and the Forces Which Mould Them”, de Charles V. Boys (1920). A primeira edição desse livro é de 1890!

No século XIX, o físico belga Joseph Plateau estudou fenômenos de capilaridade e tensão superficial. O problema matemático da existência de uma superfície mínima com um dado contorno é denominado problema de Plateau. Conduziu estudos extensivos a respeito de bolhas de sabão e, em 1873, formulou as leis de Plateau. São elas:

1. As películas de sabão são superfícies lisas.
2. Os filmes de sabão sempre se reúnem em três, formando uma borda chamada Bordo ou Fronteira de Plateau, e fazem um ângulo de $\cos(-1/2) = 120^\circ$.
3. Os bordos de Plateau se reúnem em quatro, em um ângulo de $\cos(-1/3) = 109,47^\circ$ (ângulo tetraédrico) para formar um vértice.

As configurações diferentes das leis de Plateau são instáveis e a película rapidamente tende a reordenar-se para se ajustar a estas normas. Essa lei foi matematicamente provada em 1976 por Jean Taylor. Podem ser descritas também da seguinte forma:

Primeira lei. Três películas de sabão intersectam-se ao longo de uma linha. O ângulo formado pelos planos tangenciais a duas superfícies que se intersectam, em qualquer ponto ao longo da linha de intersecção das três superfícies, é de 120° .

Segunda lei. Quatro das linhas, todas formadas pela intersecção de três superfícies, intersectam-se em um ponto e o ângulo formado por cada par delas é de $109,47^\circ$.

Terceira lei. Um filme de sabão que possa movimentar-se livremente em uma superfície plana, a intersecta formando um ângulo de 90° .

Algumas experiências sobre tensão superficial (como colocar cliques ou agulhas sobre a água) podem dar um pouco de trabalho para serem feitas. Mas a experiência abaixo qualquer criança é capaz de fazer.

8.5 Experimentos

8.5.1 Experimentos simples sobre tensão superficial

8.5.1.1 *Tensão superficial I*

Colocar água num pote e, em seguida, polvilhar um pouco de talco. O mesmo ficará sobre a superfície da água devido à tensão superficial que faz com que as moléculas da água se mantenham unidas.

Figura 113 – Tensão superficial I(a)



Fonte do autor

Em um outro recipiente, misturar um pouco de detergente com água. Quando essa mistura é colocada no pote, ela diminui a tensão superficial e o talco afunda.

Figura 114 – Tensão superficial I(b)



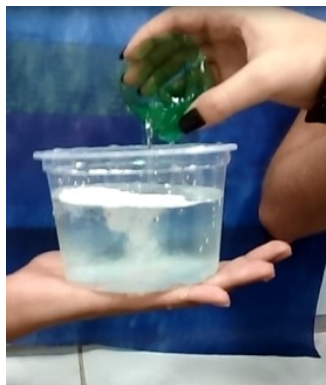
Fonte do autor

Figura 115 – Tensão superficial I(c)



Fonte do autor

Figura 116 – Tensão superficial I (d)



Fonte do autor

Figura 117 – Tensão superficial I(e)



Fonte do autor

Para os experimentos com bolhas e películas de sabão, precisaremos de água e detergente. É possível fazer bolhas somente com água, mas elas logo se desmancham porque a tensão superficial entre as moléculas é muito grande. Quando colocamos o detergente, ele se

mistura entre as moléculas de água, quebrando a tensão superficial. A bolha se mantém devido à força de atração entre as moléculas restantes, que tendem a ficar juntas.

As bolhas e películas de sabão obedecem ao **Princípio da Mínima Ação de Maupertius**, que diz que: “Quando ocorre qualquer mudança na Natureza, a quantidade de ação necessária para essa mudança é a menor possível.”

Figura 118 – Maupertius



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/20/PierreLouisMaupertuis.jpg/200px-PierreLouisMaupertuis.jpg>

A tendência do líquido é contrair-se para ficar com a menor superfície possível. Essa é uma manifestação de qualquer sistema que tende a portar-se num estado de mínima energia.

Já é conhecido desde a antiguidade que o círculo é a figura que tem a maior área para um perímetro fixo. Podemos obter essa resposta de forma belíssima com a película de sabão. Talvez a maneira mais fácil de entender a tensão superficial seja o procedimento feito na experiência abaixo.

8.5.1.2 Tensão superficial II

Amarrar um fio através de um aro de forma pouco rigorosa e depois mergulhar o aro em água com sabão. Quando se retira da água, um filme de sabão se estica sobre o aro, onde o fio se movimenta livremente.

Figura 119 – Tensão superficial II(a)



Fonte do autor

Mas, se quebrarmos a película que fica entre o fio...

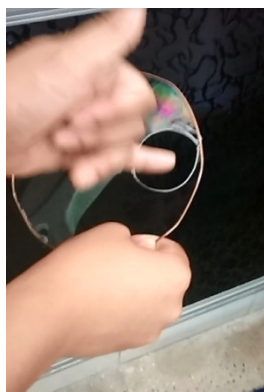
Figura 120 – Tensão superficial II(b)



Fonte do autor

... imediatamente ele é puxado pela película.

Figura 121 – Tensão superficial II(c)



Fonte do autor

A figura que o fio forma é um círculo porque essa é a figura que tem a maior área possível para o comprimento do fio. Como o espaço dentro do círculo é o maior possível, o espaço fora (a película) é o menor possível.

A medida que movimentamos o fio, a película se contrai ou estica, mas a tendência do fio sempre é procurar fazer a circunferência.

Figura 122 – Tensão superficial II(d)



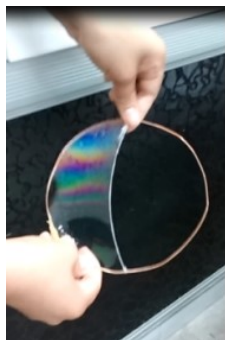
Fonte do autor

Figura 123 – Tensão superficial II(e)



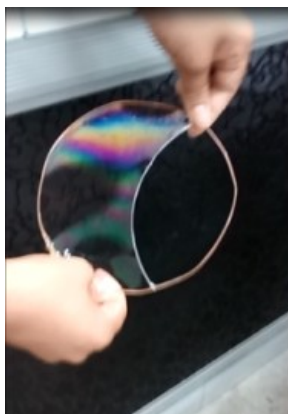
Fonte do autor

Figura 124 – Tensão superficial II(e)



Fonte do autor

Figura 125 – Tensão superficial II(f)



Fonte do autor

À medida em que o tempo passa, a película vai ficando mais colorida.

Figura 126 – Tensão superficial II(g)



Fonte do autor

As cores que aparecem na película são devido à iridiscência, fenômeno óptico que faz com que certos tipos de superfícies reflitam as cores do arco-íris. Tal fenômeno aparece também nas asas das borboletas, em alguns insetos, nas escamas de peixes e nas penas de algumas aves, como o beija-flor.

Outro experimento parecido.

8.5.1.3 Tensão superficial III

Fazer uma película de sabão num arco de arame e deixar cair um fio onde, previamente, foi feito um laço.

Figura 127 – Tensão superficial III(a)



Fonte do autor

Romper a película que fica entre o laço com algum pontiagudo. (Na foto, está sendo usado o arame da calota).

Figura 128 – Tensão superficial III(b)



Fonte do autor

Imediatamente, forma-se o círculo...

Figura 129 – Tensão superficial III(c)



Fonte do autor

... que movimenta-se livremente na película.

Figura 130 – Tensão superficial III(d)



Fonte do autor

8.5.2 Experiências com placas

As experiências abaixo com placas e calotas são para comprovar a primeira lei de Plateau.

Sabemos que a menor distância que liga dois pontos é dada por uma reta. Mas, se pegarmos um “retângulo” onde dois dos lados paralelos são feitos com canudos e os outros dois são feitos por fios do mesmo tamanho e mergulharmos na mistura de sabão, os lados não ficarão retos. Ficarão curvos como na figura abaixo, porque essa é a menor área que a película tende a fazer.

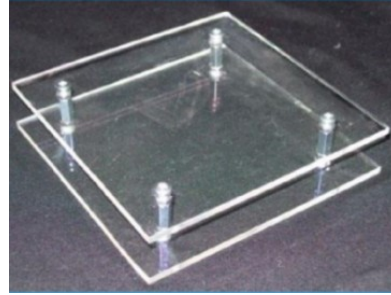
Figura 131 – Canudos com fio



Fonte do autor

Determinar o menor percurso que liga um determinado conjunto de pontos é um problema conhecido como **Problema de Steiner**. Podemos determinar esse percurso mergulhando na água com sabão duas placas paralelas transparentes (de vidro ou acrílico) ligadas por pinos como por exemplo, a placa da figura 1, que tem 4 pinos.

Figura 132 – Placas de vidro com pinos



Fonte do autor

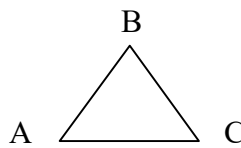
8.5.2.1 Dois pontos

A menor distância é, trivialmente, uma reta.

8.5.2.2 Três pontos

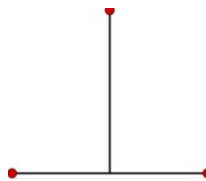
Seguem algumas possibilidades de configurações e comprimentos.

Figura 133 – Comprimento = $3 \times 1 = 3$



Fonte do autor

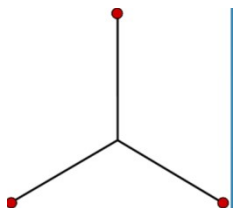
Figura 134 – Comprimento = $1 + \sqrt{3}/2 = 1,87$ (aproximadamente)



Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Figura 135 – Comprimento = $3 \times 1/\sqrt{3} = 1,73$ (aproximadamente)

Percurso de comprimento mínimo.

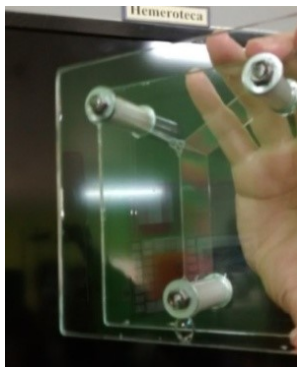


Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

8.5.2.3 Menor distância entre 3 pontos

Experimentalmente obtemos o percurso mínimo mergulhando a placa abaixo na água com sabão. Cada um dos ângulos formados mede 120° . O ponto de encontro das películas é denominado ponto de Fermat (é o ponto tal que a distância total dos três vértices do triângulo até esse ponto é a menor possível). O ponto tem esse nome porque o problema de encontrá-lo foi levantado por Fermat em uma carta particular a Torricelli, que a resolveu.

Figura 136 – Menor caminho dado pela mistura de sabão



Fonte do autor

Figura 137 – As películas se encontram num ponto formando ângulos iguais de 120°



Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Uma aplicação prática do problema de Steiner pode ser a **construção de uma estrada ligando 3 cidades.**

Problema. “Dadas 3 cidades, onde construir um hospital de tal forma que o caminho total que a ambulância deve percorrer seja mínimo?”

O problema consiste em determinar o ponto de Fermat do triângulo cujos vértices são as 3 cidades.

Pode-se fazer também construindo uma maquete com as distâncias numa escala apropriada. Em uma base fazemos 3 buracos, cada um deles representando uma cidade. Por cada buraco passamos uma corda com pesos iguais em cada ponta. Amarramos as 3 pontas livres com um nó sobre a base. Segurando as cordas pelo nó e deixando cair, o nó cairá exatamente no ponto de Fermat.

Figura 138 – Solução com maquete



Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Se as cidades tivessem populações diferentes, o natural seria construir a cidade próxima daquela que tem maior numero de habitantes.

Por exemplo: Se tivermos

A=10000 habitantes

B= 20000 habitantes

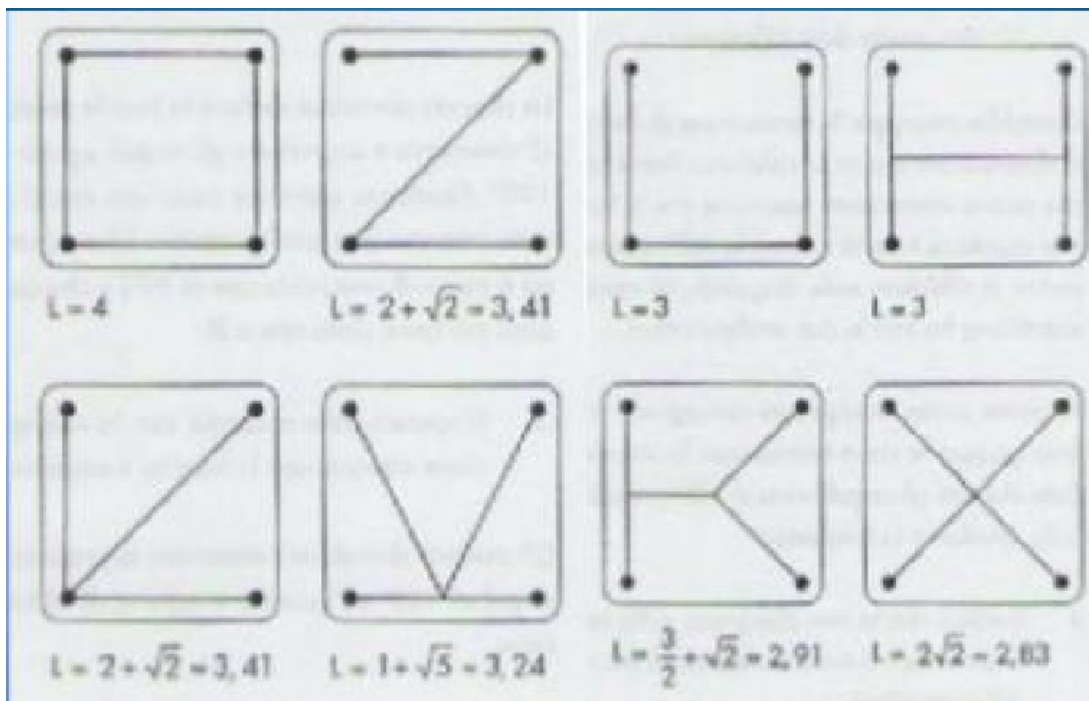
C= 30000 habitantes

Fariamos como anteriormente, mas colocando pesos proporcionais às quantidades de habitantes. No nosso caso, com 1, 2 e 3 kg.,

8.5.2.4 Caminho mais curto entre 4 cidades

Teremos as seguintes configurações e respectivas distâncias L.

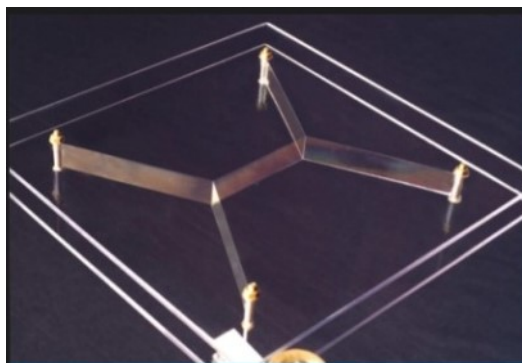
Figura 139 – Possibilidades de caminhos para 4 pontos



Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Se submergirmos uma estrutura formada por duas placas paralelas ligadas por 4 pinos, teremos a distância mínima. Obteremos uma figura formada por cinco películas planas, sendo que uma delas fica no centro sustentada por outras quatro que se unem aos vértices. Os ângulos continuam sendo de 120° . Neste caso, teremos 2 pontos de Fermat.

Figura 140 – Menor distância dada pela solução de sabão



Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

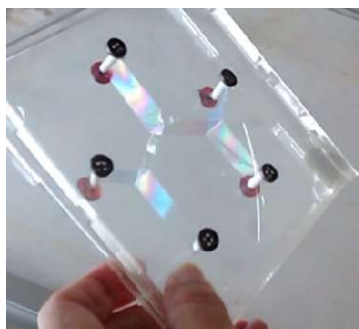
Figura 141 – Ângulos de 120° 

Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

8.5.2.5 Menor distância entre 5 pontos

Mergulhando uma placa com 5 pinos, obtemos a configuração abaixo (ou outras equivalentes por rotação). Neste caso, teremos 3 pontos de Fermat.

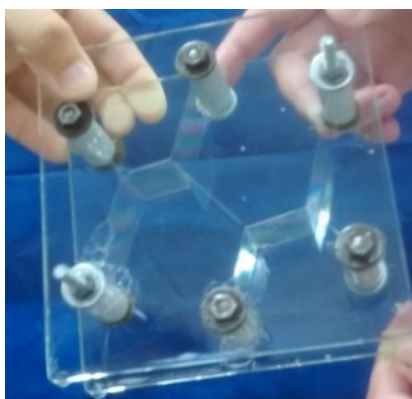
Figura 142 – Solução para 5 pontos



Fonte do autor

8.5.2.6 Menor distância entre 6 pontos

Mergulhando uma placa com 6 pinos, teremos as seguintes configurações. Ambas têm 4 pontos de Fermat.

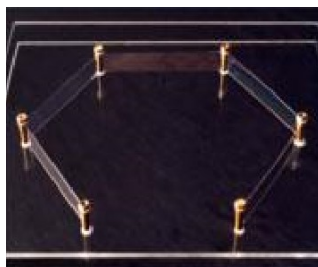
Figura 143 – Distância $L = 5,292$ 

Fonte do autor

Figura 144 – Distância $L = 5,196$ 

Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Os mínimos obtidos, acima, são mínimos relativos. O mínimo absoluto é obtido na configuração seguinte.

Figura 145 – Distância $L = 5$ 

Fonte: http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf

Se as distâncias entre as cidades é pequena, a curvatura de Terra pode ser desconsiderada. Mas se forem cidades distantes, por exemplo, de países diferentes, podemos fazer a experiência utilizando duas conchas esféricas (duas semi-esferas) com raios diferentes em vez de duas placas planas.

Da mesma forma, as cidades são representadas por pinos perpendiculares às duas conchas. Parte de uma das conchas deve ser cortada para que a água possa entrar entre as calotas.

8.5.2.7 Menor distância considerando a curvatura da Terra

Um jeito mais fácil de fazer é utilizar somente uma concha (isto é, considerando que a concha menor tem raio zero), com pinos que passem pelas cidades e pelo centro da semi-esfera.

Neste caso, as linhas que ligam as cidades não são retas. São curvas que recebem o nome de geodésicas.

Figura 146 – Solução para 4 cidades distantes



Fonte do autor

Uma das formas de generalizar o problema de Steiner seria colocar mais pontos, num caso geral, teríamos n cidades. Outra forma é aumentando a dimensão. No caso das placas com pinos, procuramos a menor distância (objeto de dimensão 1) em um plano (objeto de dimensão 2). Podemos pensar em procurar a menor superfície (objeto de dimensão 2) no espaço (objeto de dimensão 3). Para isso, basta trabalharmos com películas de sabão em objetos tridimensionais.

As experiências abaixo com estruturas poliédricas tem por objetivo comprovar a primeira e a segunda leis de Plateau. Elas são também uma forma de generalizar o problema de Steiner para dimensões maiores.

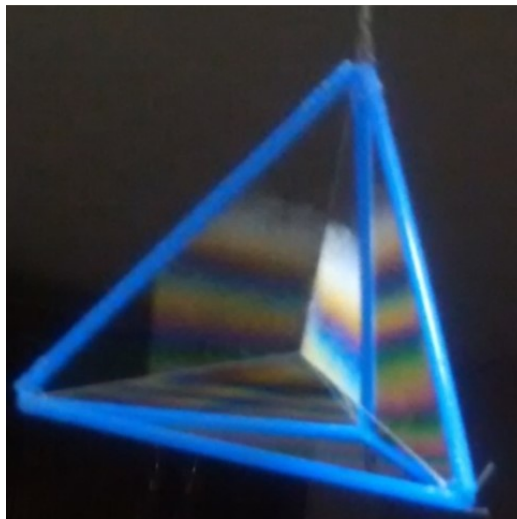
8.5.3 Figuras obtidas sobre estruturas poliédricas

Mergulhando esqueletos de poliedros regulares e semi-regulares, obtemos diferentes configurações de superfícies formadas por películas planas no interior da estrutura, como descrevemos a seguir.

8.5.3.1 Tetraedro

Obtemos 6 películas planas e triangulares que se cruzam em quatro arestas que convergem para o baricentro (uma vez que é uma figura regular). Essas arestas recebem o nome de bordos de Plateau. Os ângulos entre as faces são de 120° e os ângulos entre os bordos de Plateau são de $109^\circ 28'$.

Figura 147 – Películas no tetraedro



Fonte do autor

Se soprarmos uma bolha no baricentro com a ajuda de um canudo, aparece uma figura tetraédrica, com as faces abauladas (uma espécie de “pirâmide redonda”), sustentada pelas 6 películas planas. Este problema é equivalente ao de encontrar o menor caminho entre 3 pontos.

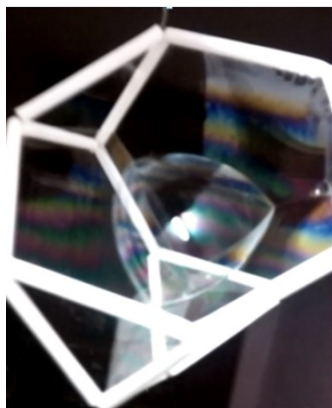
Figura 148 – Películas no tetraedro com uma bolha no centro



Fonte do autor

Observação: Se utilizarmos um tetraedro truncado, as películas se encontram da mesma forma no centro da figura e, se colocarmos uma bolha, ainda aparece a “pirâmide” acima.

Figura 149 – Bolha no tetraedro truncado



Fonte do autor

8.5.3.2 *Prisma reto de base triangular*

As películas se encontram no centro formando um segmento de reta.

Figura 150 – Película no prisma triangular



Fonte do autor

Se soprarmos duas pequenas bolhas nas extremidades do segmento de reta, formaremos uma figura parecida com uma ampulheta.

Figura 151 – Bolhas no prisma

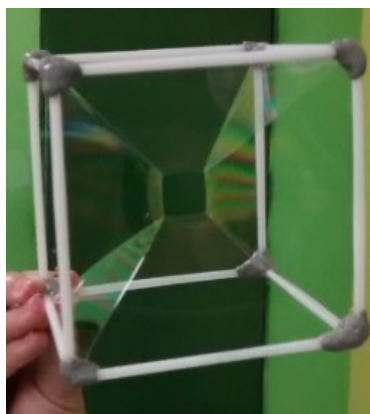


Fonte do autor

8.5.3.3 *Cubo*

No caso do cubo, aparece uma lâmina quadrada no centro sustentada por 12 lâminas planas na forma de trapézio. Esse problema é equivalente ao de encontrar a menor distância entre 4 pontos.

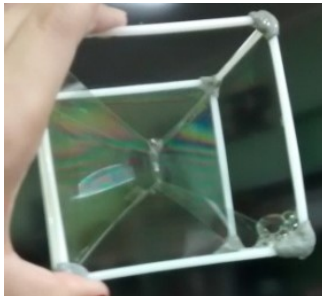
Figura 152 – Películas no cubo



Fonte do autor

Olhando o cubo sob outra perspectiva, podemos perceber que existe uma conexão entre o problema de Steiner em dimensão 2 e o problema em dimensão 3. Se projetarmos a película da figura 153 em um plano, obteremos a solução obtida para o problema das 4 cidades (figura 140). Analogamente, se projetarmos a película do tetraedro (figura 147), obteremos a solução para o problema das 3 cidades (figura 136).

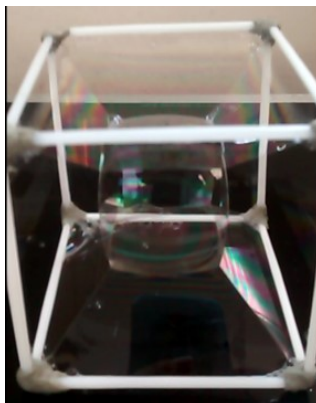
Figura 153 – Películas no cubo em outra perspectiva



Fonte do autor

Se soprarmos uma bolha no centro com a ajuda de um canudo previamente molhado obteremos um cubo com as faces ligeiramente arredondadas, uma espécie de “bola quadrada” – aquela que o Quico, do seriado Chaves, sempre sonhou.

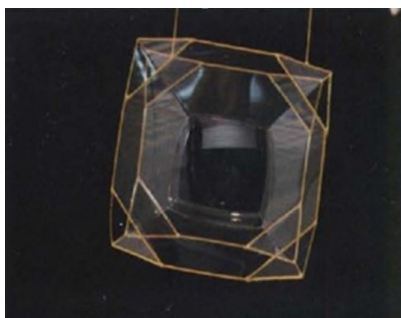
Figura 154 – Bolha no cubo



Fonte do autor

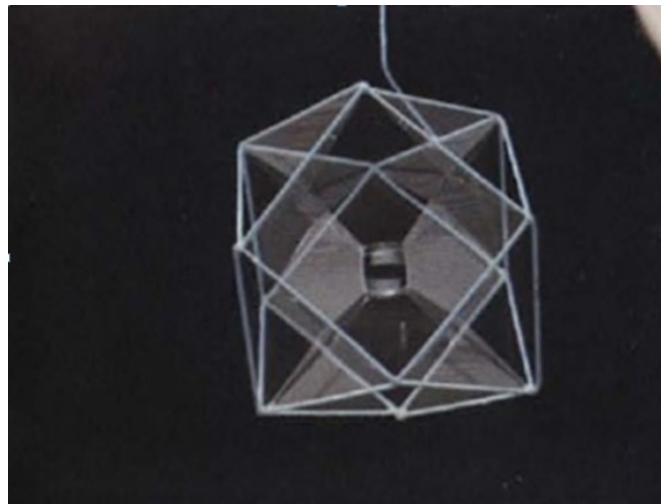
Se utilizarmos um cubo truncado ou o cuboctaedro, obteremos películas parecidas.

Figura 155 – Bolha dentro do cubo truncado



Fonte: Isenberg (1972)

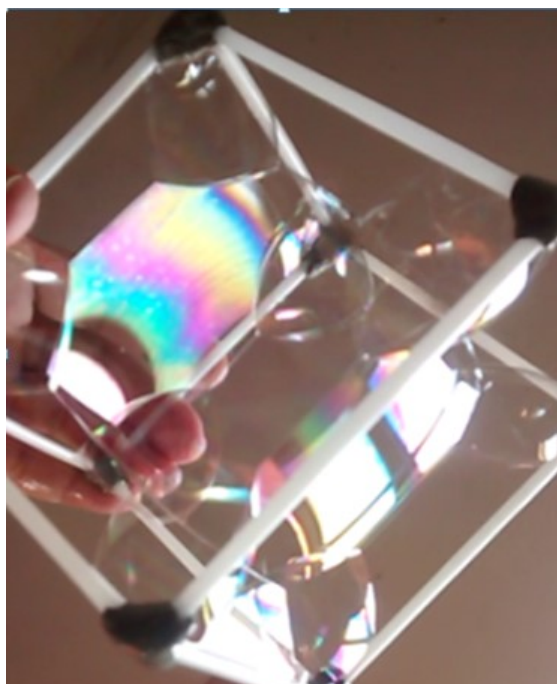
Figura 156 – Bolha dentro do cuboctaedro



Fonte: Cyrill Isenberg (1972)

Dá um pouco de trabalho fazer um cubo truncado de palitos. Podemos fazer um com película de sabão. Basta fazer a bolha dentro do cubo e, em seguida, soprar uma pequena bolha em cada vértice do poliedro.

Figura 157 – Cubo truncado feito de bolha de sabão

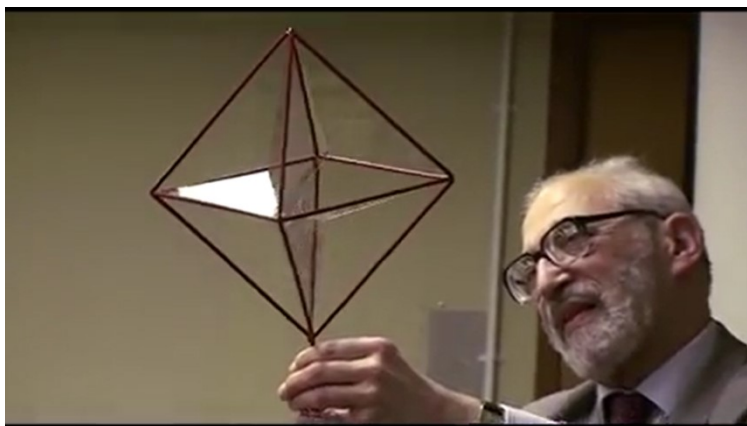


Fonte do autor

8.5.3.4 Octaedro

As películas no octaedro são um pouco difíceis de serem feitas, mas uma delas parecida com a rosa dos ventos, é especialmente bonita.

Figura 158 – Cyrill Isenberg fazendo a película no octaedro



Fonte: <https://pt.scribd.com/doc/78830427/The-Science-of-Soap-Films-and-Soap-Bubbles-Cyrl-Isenberg>

8.5.4 Figuras obtidas em estruturas diversas

8.5.4.1 Catenóide

Se colocarmos uma película entre dois aros e formos separando-os lentamente, obteremos uma interessante superfície: o catenóide.

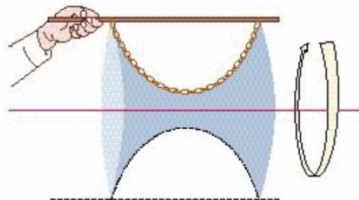
Figura 159 – Catenóide



Fonte do autor

O catenóide é uma superfície mínima de revolução que obtemos quando giramos a curva catenária ao redor de uma reta perpendicular ao seu eixo de simetria. A palavra catenária vem de “cadena” que quer dizer corrente.

Figura 160 – Catenária e respectivo catenóide de revolução



Fonte: <http://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml>

Uma característica das superfícies mínimas é que elas tem curvatura média zero. Pode parecer difícil de entender como a figura abaixo (tão cheia de curvas) pode não ter curvatura.

Mas a explicação é que ela tem a curvatura horizontal (da circunferência) positiva e, a curvatura vertical, para fora, negativa. Como elas têm o mesmo raio (veja nas figuras abaixo), na média elas se anulam. (Ver a idéia de curvatura no Apêndice).

Figura 161 – Catenóide de massa de biscuit e circunferências interna e externa



Fonte do autor

Figura 162 – A curvatura de dentro é a mesma da de fora



Fonte do autor

Figura 163 – Catenóide com respectivas curvaturas



Fonte do autor

8.5.4.2 Helicóide

Outro bonito exemplo de superfície mínima é o helicóide, que obtemos mergulhando um arame em forma de hélice na mistura de sabão. A superfície obtida nos lembra a molécula de DNA e as escadas em caracol

Figura 164 – Helicóide de filme de sabão



Fonte do autor

Figura 165 – Igreja de Loretto – Novo México

Fonte: <http://amatematicaandaporai.blogspot.com.br/2008/08/as-hlices.html>

Outra forma de obtê-la é construindo com palitos de picolé.

8.5.4.3 *Helicóide de palitos*

É interessante pedir a ajuda de um marceneiro para furar os palitos (são mais de 400 no modelo abaixo).

Figura 166 – Construção do helicóide de palitos



Fonte do autor

Além de ficar bonito, o que deixa os alunos muito satisfeitos, é uma forma de mostrar que o helicóide é uma superfície regrada, isto é, por cada ponto passa uma reta. O helicóide é a única superfície mínima (além do plano, é claro) que é regrada.

Figura 167 – Helicóide de palitos concluído

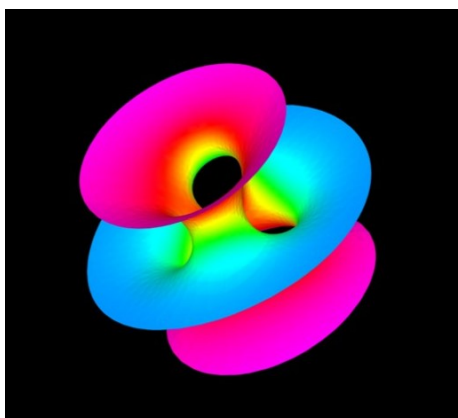


Fonte do autor

Essas superfícies foram descobertas por volta de 1770, por Euler e Meusnier. Durante muitos anos eram as únicas superfícies mínimas (além do plano, que é trivial) que tinham as propriedades de não ter intersecções e se estenderem até o infinito.

Somente muitos anos depois, em 1985, um brasileiro chamado Celso Costa descobriu a superfície mínima que leva o seu nome. Depois da sua visualização com técnicas de computação gráfica, muitas outras foram descobertas.

Figura 168 – Superfície Costa



Fonte: <http://slideplayer.com.br/slide/366220/>

8.5.4.4 *Dois arcos perpendiculares*

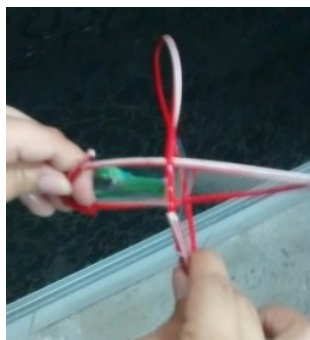
A princípio, poderíamos até pensar que as duas películas estão se encontrando formando ângulo de 90° , contrariando as leis de Plateau.

Figura 169 – Película em arcos perpendiculares I(a)



Fonte do autor

Figura 170 – Película em arcos perpendiculares I(b)



Fonte do autor

Mas isso acontece porque tem uma película entre as duas.

Figura 171 – Película em arcos perpendiculares I(c)



Fonte do autor

Quando estouramos essa película do meio, o ângulo passa a ser de 120° .

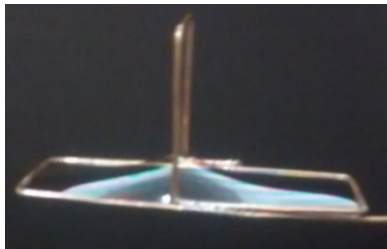
Figura 172 – Película em arcos perpendiculares I(d)



Fonte do autor

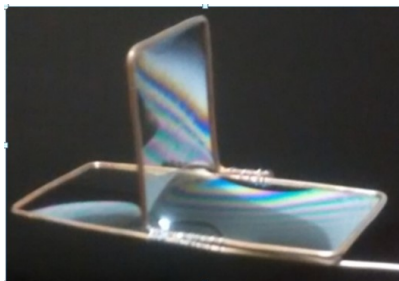
É possível ver melhor no arco abaixo.

Figura 173 – Película em arcos perpendiculares II(a)



Fonte do autor

Figura 174 – Película em arcos perpendiculares II (b)



Fonte do autor

8.5.4.5 Faixa de Moebius

Uma superfície muito interessante é obtida com o contorno de arame abaixo. O curioso dessa superfície é que ela tem apenas um lado.

Figura 175 – Faixa de Moebius

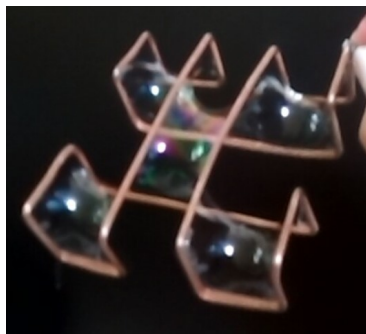


Fonte do autor

8.5.4.6 Superfície de Scherk duplamente periódica

Uma superfície mínima descoberta por Scherk pode ser feita com sabão.

Figura 176 – Superfície de Scherk de película de sabão

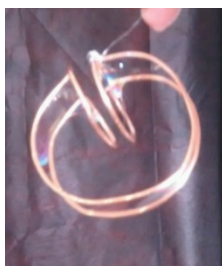


Fonte do autor

8.5.4.7 Quatro círculos paralelos dois a dois

Uma observação que deve ser feita é que nem sempre a película faz a superfície mínima. Se mergulharmos um arco com círculos paralelos como mostrado abaixo, a princípio teremos a superfície seguinte.

Figura 177 – Mínimo relativo



Fonte do autor

Mas, se juntarmos os aros, a superfície mínima é feita.

Figura 178 – Mínimo absoluto



Fonte do autor

Observe que as duas são topologicamente diferentes (isto é, quando deformamos, não ficam iguais). Se pensarmos que a primeira é feita de uma borracha esticada, quando ela não estiver tensionada fica parecida com um plano. Já a segunda, fica parecida com duas argolas. Dizemos que ela tem o tipo topológico do toro (ou, neste caso, um bi-toro), que é uma superfície que parece uma rosquinha.

8.5.5 Experiências com bolhas de sabão

Podemos soprar uma bolha numa superfície plana para comprovar a 3.^a lei de Plateau: Uma bolha encontra uma superfície plana formando ângulo de 90° .

Figura 179 – Bolha em uma superfície plana



Fonte do autor

Mas, se juntarmos duas bolhas, o que acontece?

8.5.5.1 Duas bolhas do mesmo tamanho

Se os tamanhos forem iguais, nenhuma exerce pressão sobre a outra e forma-se entre elas uma superfície plana.

Figura 180 – Duas bolhas iguais (a)



Fonte do autor

Figura 181 – Duas bolhas iguais (b)



Fonte do autor

Mas, se os tamanhos forem diferentes, a superfície vai se curvar para o lado da bolha maior ou menor? E de se esperar que a bolha maior “empurre” a menor. Para verificar isso, façamos o seguinte experimento.

8.5.5.2 Duas bolhas diferentes

Foram recortados dois gargalos de garrafa descartável, onde foram colocados canudos passando pela tampa furada. Um canudo com um diâmetro um pouco maior serviu para unir os dois gargalos.

Sopramos uma bolha em cada gargalo, de tamanhos diferentes e, depois, permitimos a comunicação das duas bolhas através do canudo de diâmetro maior.

Figura 182 – Duas bolhas diferentes ligadas por canudo



Fonte do autor

Percebemos que o ar da bolha pequena vai para a bolha grande.

Figura 183 – Bolhas durante a passagem do ar



Fonte do autor

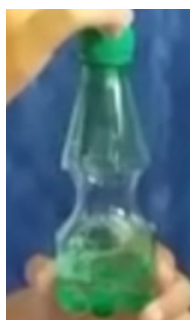
O que acontece é que a bolha pequena, por ter uma curvatura maior (ou seja, ela é mais curva), tem uma pressão maior. Por isso, o ar vai da bolha pequena para a bolha grande, que tem uma pressão menor.

Vimos que, quando a curvatura é maior a pressão é maior, quando a curvatura é menor, a pressão é menor. No experimento abaixo veremos que, curvatura zero, nos dá pressão zero.

8.5.6.3 Catenóide da garrafa de iogurte

Cortamos uma garrafa descartável, colocamos a mistura de sabão no fundo e, em seguida, fizemos uma película para ver se conseguiríamos recuperar nossa garrafa. Percebemos que não fica reto, fica curva como as garrafinhas de iogurte.

Figura 184 – Catenóide de película de sabão



Fonte do autor

A superfície que a película faz é o catenóide. Justamente por esse motivo que as embalagens de iogurte (e muitas outras embalagens) têm esse formato. Por ser uma superfície mínima, há menos troca de calor (muito importante para um iogurte) e menos gasto de material (importante em qualquer embalagem). Embalagens com esse formato trazem menos impacto para o meio ambiente.

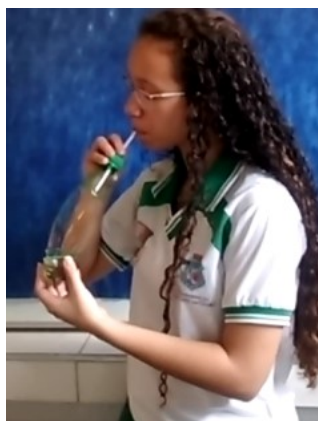
Se puxarmos os pedaços da garrafa para romper a película, formam-se duas bolhas de mesmo tamanho. As bolhas ficam do mesmo tamanho porque, como o catenóide é uma superfície mínima, ele tem curvatura zero. Portanto, não tem pressão no interior do cilindro e as duas bolhas ficam iguais.

Uma observação importante é que, quando a película minimiza a superfície, ela está estável. Isso acontece na situação do catenóide. Agora vejamos o que acontece na experiência abaixo.

8.5.6.4 Bolha dançarina

Se soprarmos um pouco de ar, deixamos o cilindro central maior.

Figura 185 – Bolha instável (a)



Fonte do autor

Figura 186 – Bolha instável (b)



Fonte do autor

Se esticarmos para romper a película, percebemos que ela afina mais na parte de cima, ficando parecida com aqueles pinos de boliche.

Figura 187 – Bolha instável (c)



Fonte do autor

E, quando rompemos...

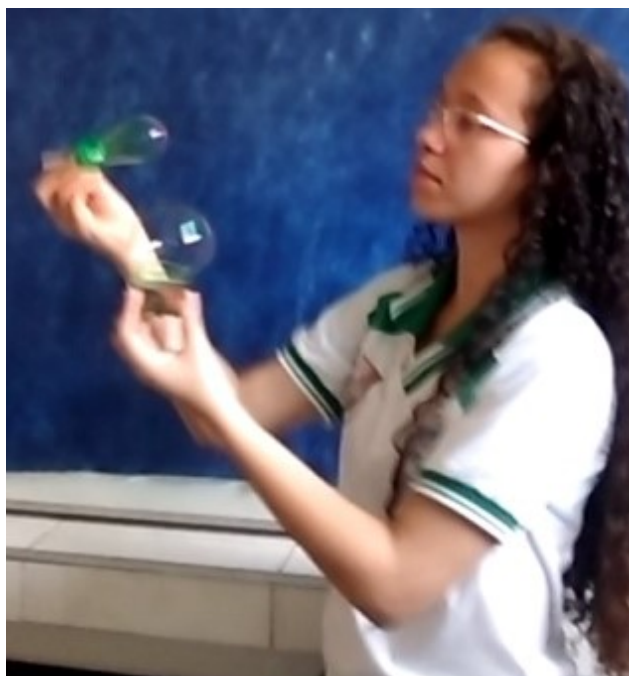
Figura 188 – Bolha instável (d)



Fonte do autor

... ficam duas bolhas de tamanhos diferentes.

Figura 189 – Bolha instável (e)



Fonte do autor

A explicação para isso é que, quando colocamos ar, aumentando o tamanho do cilindro, a superfície fica instável. A pressão fica diferente em diferentes pontos da garrafa e as bolhas formadas ficam com tamanhos diferentes.

Se movimentamos os pedaços de garrafa, a película se comporta de uma forma muito doida. Se girarmos a película, dá até para imitar o movimento de uma dançarina de Hula-hula. Daí o nome do experimento.

Tem um tamanho, a partir do qual, a película fica instável. Em C. V. Boys ele afirma, sem demonstração, que esse tamanho é de 3 vezes o diâmetro.

8.5.5.5 *Várias bolhas juntas*

Lembremos que, se soprarmos uma bolha de sabão sobre uma superfície plana previamente molhada, ela forma com esta um ângulo de 90° .

Se forem duas bolhas de tamanhos diferentes vimos, pelo experimento acima, que ela se curva como nas figura abaixo.

Figura 190 – Bolhas de tamanhos diferentes (a)



Fonte do autor

Se soprarmos várias bolhas de mesmo tamanho numa superfície plana, elas se juntam com uma configuração de hexágonos regulares, parecida com a do favo de mel.

Figura 191 – Bolhas numa placa de vidro



Fonte do autor

Além dos ângulos formados serem de 120° , respeitando as leis de Plateau, o hexágono é a figura que dá a maior área para um perímetro fixo. Lembrando que, dos polígonos regulares que cobrem o plano perfeitamente (triângulo, quadrado e hexágono), o hexágono, que tem o maior número de lados, é a melhor resposta para aproveitamento de espaço.

Ou seja, se quisermos cobrir o plano com figuras geométricas iguais de perímetro mínimo, essas figuras devem ser hexágonos regulares. Em três dimensões, não é tão óbvio qual figura deveria preencher o espaço com área mínima (e, portanto, mínima energia).

O “Problema de Kelvin”, colocado por Lord Kelvin em 1887, é encontrar a maneira mais eficiente de dividir o espaço em células de volume igual com a menor área de superfície entre elas.

A solução de Kelvin para o problema foi um favo de octaedros truncados – formas com seis faces quadradas e oito faces hexagonais.

Figura 192 – Estrutura de Kelvin



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire%E2%80%93Phelan_structure#/media/File:Truncated_octahedra.png

Weaire e Phelan, dois físicos da Irlanda, encontraram uma solução melhor com uma estrutura de favos que inspirou a arquitetura revolucionária do “Cubo d’água”, o Centro Aquático Nacional de Pequim, que fez sensação na Olimpíada de 2008.

Figura 193 – Centro Aquático “Cubo d’Água”



Fonte: <http://blog.kanui.com.br/wp-content/uploads/2014/11/01492469600.jpg>

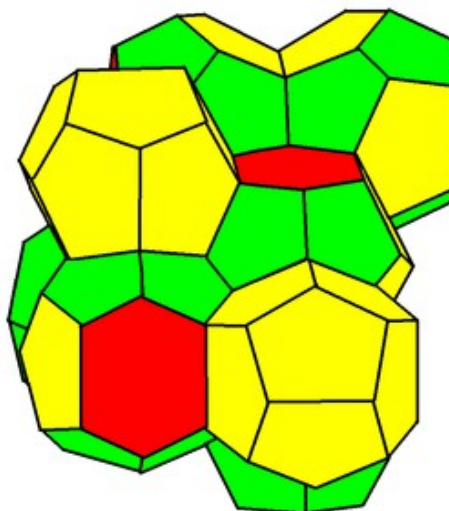
Figura 194 – Centro Aquático “Cubo d’Água” (vista interna)



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3c/Cubeinside.jpg/200px-Cubeinside.jpg>

A estrutura de Weaire e Phelan era composta por um dodecaedro irregular e por um poliedro de 14 faces.

Figura 195 – Estrutura de Weaire e Phelan



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire%E2%80%93Phelan_structure#/media/File:12-14-hedral_honeycomb.png

8.5.5.5.1 Bolhas na garrafa descartável

Podemos fazer uma experiência para verificar a solução tridimensional soprando várias bolhas em uma garrafa ou em outra embalagem transparente qualquer. Basta colocar um pouco da mistura de sabão no fundo da embalagem e soprar com um canudo. Se

conseguíssemos soprar bolhas do mesmo tamanho, é provável que o resultado obtido se aproximaria da estrutura de Weaire e Phelan.

Figura 196 – Bolhas dentro de embalagem descartável



Fonte do autor

8.5.5.5.2 Bolhas reproduzindo as superfícies obtidas nas estruturas poliédricas

Podemos unir várias bolhas de mesmo tamanho para fazermos experiências parecidas com aquelas feitas com os poliedros de arame. Por exemplo, se fizermos 4 bolhas e soprarmos uma bolha no centro, teremos a mesma “pirâmide redonda” obtida com o tetraedro.

Figura 197 – Bolhas fazendo a configuração do tetraedro de arame



Fonte do autor

Se fizermos 6 bolhas iguais, obteremos a mesma película quadrada que foi obtida no cubo. Se soprarmos uma bolha no centro teremos, da mesma forma, a nossa “bolha quadrada”.

Figura 198 – Bolhas fazendo a configuração do cubo de arame



Fonte do autor

Abaixo vemos Tom Noddy fazendo a bolha de Kelvin, destacada com gelo seco.

Figura 199 – Bolha de Kelvin em destaque



Fonte: http://tomnoddy.com/popups/bubbles/kelvin-cell_big.jpg

De todas as formas que uma bolha de sabão poderia adotar, a esfera é a que tem a área mínima para um volume dado. Sua forma minimiza a quantidade de tensão superficial necessária para manter a bolha unida.

Lembremos que, no plano, o polígono que tem a maior área para um determinado contorno, é aquele que tem o maior número de lados e é regular. Ou seja, aquele que mais se aproxima do círculo. Da mesma forma, temos um resultado equivalente no espaço. Se pensarmos somente em paralelepípedos, o que vai ter um volume maior é o que tem as medidas iguais. Ou seja, o cubo, que é o que tem a forma mais próxima da esfera. Para verificarmos que, entre a esfera e o cubo, é realmente a esfera que otimiza o volume, podemos fazer o experimento seguinte.

8.5.6 Comparação entre os volumes da esfera e do cubo

Pegamos um cubo e uma esfera de acrílico com áreas superficiais iguais. A esfera pode ser aberta de forma que possamos colocar água.

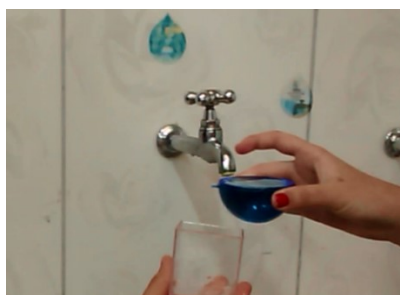
Figura 200 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (a)



Fonte do autor

Enchemos metade da esfera com água.

Figura 201 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (b)



Fonte do autor

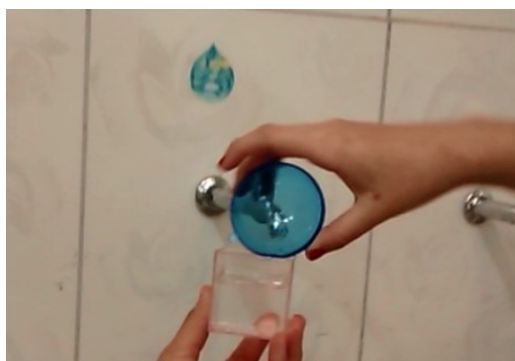
E colocamos no cubo.

Figura 202 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (c)



Fonte do autor

Figura 203 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (d)



Fonte do autor

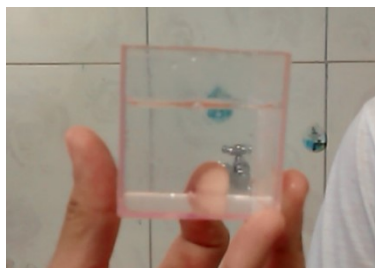
Figura 204 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (e)



Fonte do autor

Percebe-se que a metade da esfera preencheu mais do que a metade do cubo.

Figura 205 – Comparação entre volumes da esfera e do cubo (f)



Fonte do autor

8.6 Problemas abertos

Grandes descobertas foram feitas em relação às superfícies mínimas. Dá para perceber a sua importância pela quantidade de prêmios nessa área. Jesse Douglas ganhou a primeira Medalha Fields por suas contribuições nessa teoria. Apesar de muitas vezes comparada ao Prêmio Nobel, a medalha é até mais difícil de se ganhar. Douglas ganhou em 1936 e a segunda só foi em 1950, quando a premiação passou a ocorrer de 4 em 4 anos. Além disso, o ganhador tem que ter menos de 40 anos e os critérios são bem rigorosos. Para se ter uma idéia, até a Hitler foi cogitada a idéia de ser dado um Prêmio Nobel da Paz em 1939, devido a suas conversações sobre a paz na Europa que manteve com o governo britânico.

Outros nomes de destaque nessa área, ganhadores da Medalha Fields, é do italiano Enrico Bombieri, que ganhou em 1974 (além de vários outros prêmios) e do chinês Shing-Tung Yau (laureado em 1982).

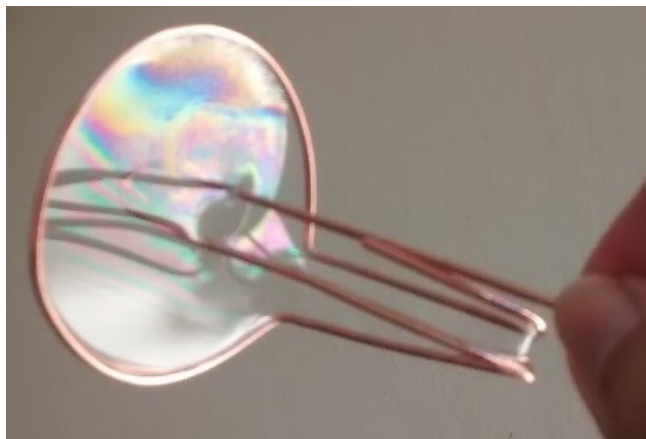
Jesse Douglas conseguiu resultados no caso da superfície ter o tipo topológico do disco. No caso de não ser um disco, o problema ainda continua aberto. Por exemplo, no contorno abaixo. Observe que, quando é feita a superfície mínima, a película fica com um buraco (portanto, não é topológica ao disco).

Figura 206 – Mínimo relativo (topológico ao disco)



Fonte do autor

Figura 207 – Mínimo absoluto (película com buraco)



Fonte do autor

8.7 Observações em relação aos materiais

8.7.1 Materiais utilizados

Usamos diversos materiais, tais como: hastes flexíveis, palitos de picolé, linha nylon, tela de peneira, alicate, tesoura para cortar tela, placas de vidro ou acrílico, palitos de sorvete, arame, ferro de solda, massa de biscuit, esfera e cubo de acrílico, etc.

Em relação à mistura de sabão, vimos em vários sites que, acrescentando glicerina na mistura de sabão, as bolhas demoram mais para evaporar. Nós optamos por trabalhar sem glicerina para que pudéssemos reaproveitar a mistura de detergente na limpeza da escola.

Figura 208 – Utilização da mistura de detergente



Fonte do autor

8.7.1 Poliedros

Os poliedros que são mais fáceis de serem confeccionados são o tetraedro e o octógono, pois são estáveis. Basta fazê-los de canudo e linha nylon, sem precisar colocar

massa epóxi. Os outros que não são estáveis, precisam da massa para ficarem firmes. E isso pode dar muito trabalho.

Criamos algumas estratégias para esperar a massa secar sem mexer a estrutura. No caso do cubo, que é todo plano, e relativamente fácil escorá-lo. Mesmo assim, é necessário observar com certa regularidade para ver se a estrutura não mexeu.

No caso do cuboctaedro e do tetraedro truncado, fizemos a sustentação com os poliedros que lhes originam (octaedro e tetraedro, respectivamente), prendendo com arames bem finos.

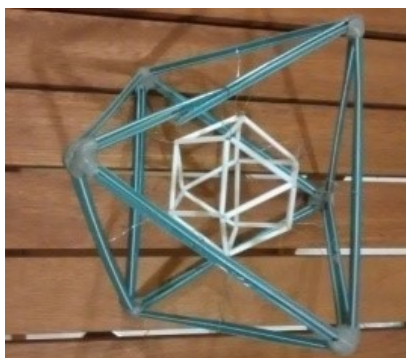
Figura 209 – Confeção do tetraedro truncado



Fonte do autor

Depois dos poliedros estarem presos na estrutura, basta colocar massas epóxi e esperar secar. Essa é uma forma interessante porque dá para perceber que o octaedro truncado (poliedro branco) é obtido cortando-se os vértices do octaedro (poliedro azul).

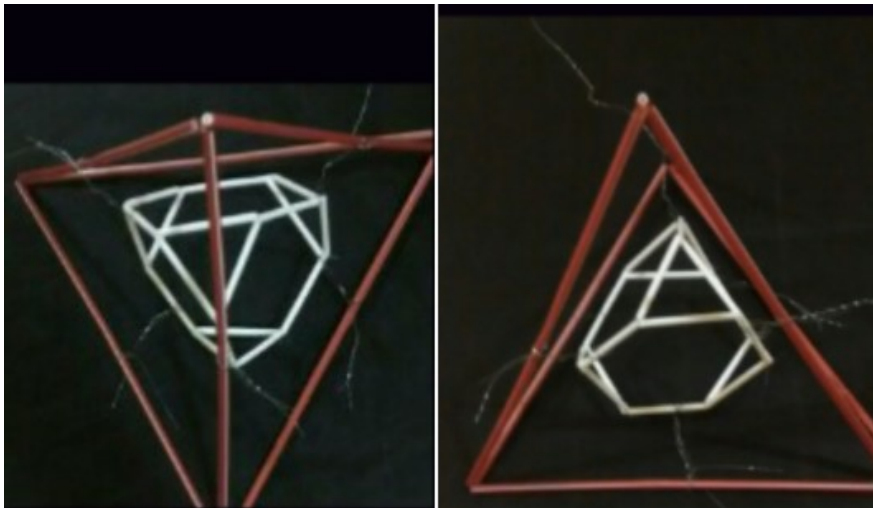
Figura 210 – Cuboctaedro sustentado por arames



Fonte do autor

Abaixo, temos o tetraedro (vermelho) e o tetraedro truncado (branco).

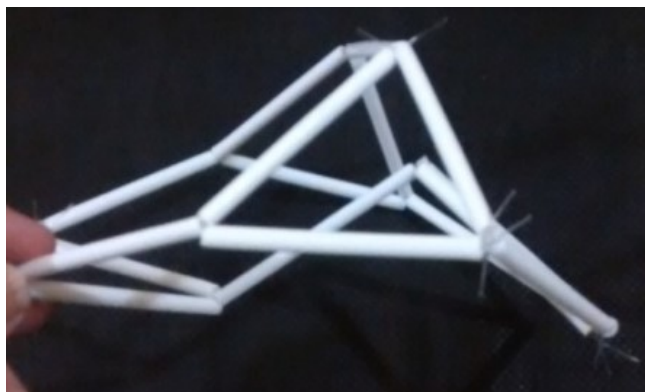
Figura 211 – Tetraedro truncado sustentado com arames



Fonte do autor

Se fizer somente com canudos e linha nylon ele fica todo molenga.

Figura 212 – Poliedro sem sustentação



Fonte do autor

O problema de se fazer a estrutura com massa epóxi é que, dependendo da figura, a estrutura não faz a superfície mínima esperada. No caso dos poliedros acima, os vértices com massa ficam arredondados e a película de sabão fica toda nas faces do poliedro. Isso pode ser muito decepcionante, principalmente depois de tanto trabalho.

Além disso, a cor da massa epóxi não é muito atraente. Uma alternativa é pintar os poliedros, de preferência num lugar arejado.

Figura 213 – Pintura dos poliedros



Fonte do autor

Uma forma que é relativamente fácil e barata é utilizar um arame bem fino no lugar da linha nylon. Nós utilizamos o arame usado para fazer peneira. A estrutura não vai ficar tão firme, mas se sustenta tranquilamente.

Figura 214 – Poliedro feito com canudo de pirulito e arame de peneira



Fonte do autor

Além disso, não utilizamos canudos. Usamos palitos de pirulito ou hastes flexíveis (também conhecidas como cotonetes), que são bem mais firmes. Justamente por isso são difíceis de cortar com tesoura comum. Nós utilizamos a tesoura de cortar tela.

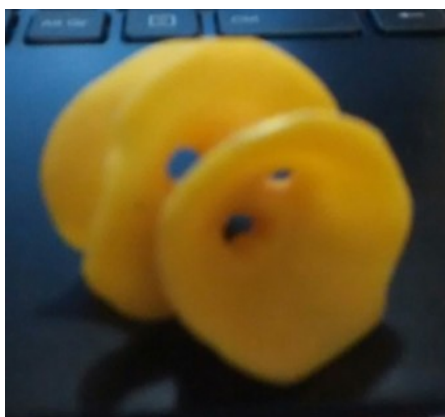
Os cotonetes infantis têm cores bem fortes (azul, rosa, etc) e deixam o trabalho lindo. Têm a desvantagem (neste caso) de ter o algodão muito preso à haste e dá um pouco de

trabalho para retirar totalmente. Mas os poliedros permanecem bonitos por muito tempo. Diferente dos poliedros de arame (que vão ficando escuros) e os sustentados por massa epóxi (depois de mergulhar muitas vezes na mistura de sabão, a massa vai ficando mais mole e até esfarelenta).

8.7.3 Massa de biscuit

Para quem nunca trabalhou com esse tipo de massa, talvez não seja uma boa idéia começar logo com a superfície Costa. Já que ela não é tão fácil de fazer, o uso de uma massa mal preparada pode acabar com todo o trabalho. Existem massas prontas mas, mesmo essas, podem ficar um pouco amolecidas depois de misturar o corante. O melhor é pedir que alguém que já trabalhe com isso a prepare e os alunos só moldam a superfície.

Figura 215 – Superfície Costa de massa de biscuit (a)



Fonte do autor

Figura 216 – Superfície Costa de massa de biscuit (b)



Fonte do autor

8.8 Sugestões para as apresentações

No início das apresentações o grupo falará que serão feitas experiências com bolhas e películas de sabão. Mas antes serão feitas perguntas aos participantes para que prevejam o que pode acontecer.

Chamar atenção para fotos de superfícies mínimas em diferentes aplicações (arquitetura, embalagens, exemplos da natureza, etc.) e perguntar o que tudo aquilo tem a ver com sabão. Responder que as explicações serão dadas no decorrer da apresentação.

Pegar contornos diversos e perguntar qual será o formato da bolha que irá se formar. É muito provável que todos respondam que é uma esfera, mas nem todos vão saber justificar.

Mergulhar um elástico (daqueles de amarrar dinheiro) e explicar que a película de sabão vai grudar nele devido à adesão e sempre vai procurar fazer a menor superfície possível devido à tensão superficial.

Explicar que a natureza sempre procura minimizar esforços, se estabilizando e gastando menos energia. E isso acontece também com a película de sabão. E qual a importância disso na matemática?

O conceito de mínimo em matemática

Em matemática, e em particular no ramo chamado Cálculo de Variações, existem muitos problemas que podem ser formulados nos seguintes termos: encontrar o elemento, entre todos os possíveis, que torna mínima (ou máxima) uma certa quantidade.

Alguns exemplos do cotidiano:

- Encontrar o caminho que liga a sua casa com a escola e que minimiza o tempo necessário para percorrê-lo;
- Encontrar o caminho para chegar a uma determinada cidade que minimiza o combustível necessário.

Os dois elementos mais importantes na formulação desses problemas são:

- A quantidade que você está minimizando (que, em matemática, é chamada funcional), como o tempo ou o custo da gasolina.
- O conjunto no qual estão as possíveis soluções, como todas as estradas que possamos efetivamente percorrer (o caminho que atravessa uma parede obviamente não é aceitável).

Esclarecidos esses dois conceitos, podemos colocar um exemplo de matemática: Dados dois pontos, qual é a menor distância entre eles?

Neste caso, a quantidade a ser minimizada é o comprimento e as possíveis soluções são todas as linhas que podemos fazer ligando o primeiro ao segundo. A solução é obviamente um segmento de reta. Mas, e se fossem três, ou quatro?

Esses conceitos têm que estar bem claros para o grupo que irá apresentar para que possam repassar para os participantes toda a importância de minimização (essa procura vem desde os primórdios da humanidade) e que a mistura de sabão dá uma resposta de maneira muito fácil.

Pegar um contorno qualquer (bem complicado) e explicar para a platéia que poderíamos procurar a menor superfície para aquele contorno colocando-o, por exemplo, num sistema de coordenadas e jogando os dados num computador. Talvez, depois de semanas, ele desse a resposta. Mas, podemos encontrar a resposta muito mais rápido simplesmente mergulhando o contorno na mistura de sabão.

Em seguida, mergulhar o tetraedro, o prisma e o cubo, para mostrar que eles se encontram em um ponto, um segmento e numa superfície (um quadrado), respectivamente.

Chamar atenção para os ângulos formados e falar sobre Plateau e suas Leis (opcional, dependendo do público que esteja assistindo).

O ideal é começar as apresentações com os poliedros, que chamam mais a atenção, depois passar para o helicóide e catenóide (pode inclusive pedir a participação de alguém para estourar a película que se forma no meio). Ou até mesmo pedir para alguém mergulhar as figuras, já que nenhuma delas apresenta grandes dificuldades. O mesmo não acontece com as placas (exceto com 3 pontos) e deve-se ter uma gravação para o caso da experiência não dar muito certo ou demorar (o que é muito provável que aconteça).

Em relação às experiências com bolhas, perguntar o que acontece quando uma bolha encontra uma superfície plana (previamente molhada). Explicar que o ângulo formado é de 90° .

Fazer slides com perguntas do tipo: O que acontece quando duas bolhas de tamanhos diferentes se encontram? Quem “empurra” quem?

Pode-se colocar 3 opções de respostas para ver qual a platéia vai achar que é a correta. Antes de dar a resposta, fazer a experiência das duas bolhas ligadas por um canudo.

Na sequência, podem ser feitas as demais experiências: a do fio chama muito a atenção e é importante para mostrar que o círculo é o que tem a maior área para aquele

contorno; o experimento de encher a metade da esfera com água é simples e mostra claramente a quantidade de material a mais usado no cubo para se conseguir o mesmo volume.

Chamar a atenção do público para isso: que quando eles escolhem uma embalagem com a curva do catenóide, ou mais arredondada, ou que tenham uma espiral (enfim, com uma superfície mínima), estão contribuindo para que haja menos impacto ambiental.

O ideal seria deixar por último os experimentos do catenóide na garrafa e da bolha dançarina que, certamente, todos irão achar divertido. Encerrar com o *making-of* do projeto.

Explicar para os participantes que esses experimentos foram feitos por Plateau quando o mesmo já estava completamente cego. E que, para encerrar a apresentação, escolhemos a sinfonia Coral de Beethoven (trecho adaptado do link abaixo) para fazer o fundo do *making-of*, uma vez que o mesmo também foi um gênio (neste caso, da música) e quando terminou de compô-la já estava completamente surdo.

<https://www.youtube.com/watch?v=izt1UrNzRj0>

Para quem quiser assistir ao vídeo do making of, ele está disponível no link abaixo.

<https://www.youtube.com/watch?v=WmUWJNSK8f8&feature=youtu.be>

A reprodução deste trabalho, ou de qualquer parte dele, é permitida desde que com o consentimento do autor.

9 CONCLUSÃO

A intenção deste trabalho foi abordar a teoria de forma básica e introdutória. Espero que os mais rigorosos entendam que a informalidade do texto é justamente para propiciar um maior entendimento para os que não estão familiarizados com o assunto.

Para quem quiser se aprofundar, essa é uma teoria bastante rica, instigante e de bastante abrangência. Daria para trabalhar de forma mais profunda em vários temas aqui abordados, mas o trabalho ficaria muito extenso e, talvez, não terminasse em tempo hábil.

Mas espero que a abordagem, mesmo superficial, possa servir de estímulo para futuras pesquisas para meus colegas professores. Espero também que as formas, delicadeza e cores das películas e bolhas de sabão possam ser usadas como estímulo de aprendizagem para seus alunos.

Para os estudantes e todos aqueles que lerem este trabalho, espero que haja uma transformação na maneira como olham o mundo. Que comecem a observá-lo de uma maneira diferente, buscando respostas, tentando descobrir a razão de tudo ser da forma que é. Que possam olhar para todas as coisas buscando não somente a beleza, mas a sua essência.

REFERÊNCIAS

ALCANO. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Alcano>>. Acesso em: 29/05/2016.

ANDRADE, Lucimara Prestes. **Projeto Bolha – Superfícies Mínimas e Bolhas de Sabão**. Disponível em <https://www.youtube.com/edit?o=U&video_id=WmUWJNSK8f8&feature=vm>

BARTONI, V.; ROSATI, M. **La Geometria delle Bolle di Sapone**. [S.l.]. Disponível em: < http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/TFA059-1415/Esercizi_attachments/Bolle.pdf>. Acesso em: 02/03/2016.

BIEZUNER, Rodney Josué. **Geometria Diferencial** (notas de aula). Universidade Federal de Minas Gerais. Minas Gerais. Dez, 2015. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_diferencial.pdf>. Acesso em 09/02/2016.

BENETTI, Fernando José. Beethoven – 9.^a Sinfonia – Ode a Alegria. [S.l.]. Disponível em < <https://www.youtube.com/watch?v=izt1UrNzRj0>>. Acesso em 25/04/2016.

BOLHA DE SABÃO. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bolha_de_sab%C3%A3o>. Acesso em: 07/11/2015.

BORGES, Michelson. Digitais do Criador. Santa Catarina, 22 mar. 2011. Disponível em: <<http://www.digitais.criacionismo.com.br/>>. Acesso em: 29/05/2016.

BOYS, Charles Vernon. **Soap Bubbles: Their Colours and the Forces Which Mould Them**. Nova Iorque: The Macmillan Company, 1920, 191 p. Disponível em: <<https://archive.org/stream/cu31924031226974#page/n197/mode/2up>>. Acesso em: 10/01/2016

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 607 p.

CARMO, Manfredo P.O Índice de Morse das Superfícies Mínimas. **Revista Universitária**, n.º 9/10. Rio de Janeiro. Dez, 1989. p. 123-132. Disponível em: <http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n09_n10/n09_n10_Artigos04.pdf>. Acesso em: 17/03/2016.

CARMO, Manfredo P. do. **Selected Papers**. Springer, 2012, 497 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=a-BxmZJ3hjQC&pg=PP1&lpg=PP1&dq=manfredo+do+carmo+selected+papers&source=bl&ots=gmAY6QoFbe&sig=A-SHQOT_ILDluk71FJjRiofbYro&hl=pt-

BR&sa=X&ved=0ahUKEwjC2JThjsLOAhVIC5AKHRMKDQoQ6AEIKjAC#v=onepage&q=manfredo%20do%20carmo%20selected%20papers&f=false>. Acesso em: 20/04/2016

CLAESSENS, Peter. 2000 anos de fenômenos... Blog da Sociedade Brasileira de Neurociências e Comportamento. 2008. Disponível em: <<http://blog.sbneec.org.br/2008/10/2000-anos-de-fenomenos-subjetivos-da-visao-o-testamento-de-joseph-plateau/>>. Acesso em: 15/03/2016.

COSTA, Celso. **A Geometria das Películas de Sabão e as Formas Perfeitas da Natureza**. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://slideplayer.com.br/slide/366220/>>. Acesso em: 10/11/2015.

COSTA, Celso José da. Entrevista com Celso Costa. **Revista História Hoje**, v. 3, n.º 5, p. 209-272. Santa Catarina, maio. 2014. Entrevista concedida a Verena Alberti. Disponível em: <<https://rhhj.anpuh.org/RHHJ/article/view/127/101>>. Acesso em: 12/11/2016.

C. V. BOYS. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/C._V._Boys>. Acesso em: 28/02/2016.

CUNHA, Abilio. Barcelona, Património de Gaudí. Braga, Portugal. Jan. 2010. Disponível em: <http://patrimoniobarcelona.blogspot.com.br/2010_01_01_archive.html>. Acesso em: 04/02/2016.

DELAQUA, Victor. **Spanning the Future: Documentary Traces the Life and Work of Frei Otto**. Watkins, Katiê. (tradutor). Mar, 2015. Disponível em: <<http://www.archdaily.com/609054/spanning-the-future-documentary-traces-the-life-and-work-of-frei-otto>>. Acesso em: 21/02/2016.

DIÁRIO OFICIAL DA UNIÃO. Número 55, Seção 1, 22/03/2011. Disponível em: <<http://capes.gov.br/images/stories/download/legislacao/Portaria-n-289-de-21-03-2011-bolsas-professores-mestrado-profissional.pdf>>. Acesso em: 10/03/2016.

EMMER, Michele. **Architecture and Mathematics: Soap Bubbles and Soap Films**. In: WILLIAMS, Kim; OSTWALD, Michael J. *Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future: Volume II: The 1500s to the Future*. Springer, 2015. Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=fWKYBgAAQBAJ&pg=PA79&lpg=PA79&dq=kim+williams+springer+architecture+and+mathematics+ler&source=bl&ots=IPTEz3x3s&sig=-vBMCSWaxiaYJwFvnRUF4ZPXCbw&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwjthvzeh4LOAhWHjpAKHQbqDY0Q6AEIMjAD#v=onepage&q=kim%20williams%20springer%20architecture%20and%20mathematics%20ler&f=false>>. Acesso em: 21/02/2016.

ESTÁDIO OLIMPICO DE MÚNICH. [S.l.: s.n.]. Disponível em:

<https://es.wikiarquitectura.com/index.php/Estadio_Ol%C3%ADmpico_de_M%C3%BAnich>. Acesso em: 27/03/2016.

HELM, Joanna. Shigeru Ban Recebe o Pritzker 2014. Mar. 2014. [S.l.]. Disponível em:<<http://www.archdaily.com.br/br/01-185080/shigeru-ban-recebe-o-premio-pritzker-2014>>. Acesso em: 15/03/2016.

FOGAÇA, Jennifer. Bolha de Sabão Mais Resistente. Brasil Escola. Canal do Educador. Disponível em:<<http://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/bolha-sabao-mais-resistente.htm>>. Acesso em: 04/11/2015.

GARCÍA, Fernando Galaz. Superfícies Minimales. *Miscelánea Matemática* n.º 39, pág. 31-48. 2004. México. Disponível em:

<http://albertofest.matcuer.unam.mx/Misc39/Galaz_f.pdf>. Acesso em: 24/02/2016.

GEOMETRIA DIFERENCIAL AULA 4. Cursos do IMPA. Rio de Janeiro. Jan, 2015.

Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Og3S8uaMGW4>>. Acesso em: 18/02/2016.

GLANCEY, Jonathan. **História da Arquitetura**. *The History of Architecture* (Título original). Borges, Luís Carlos (tradutor). Loyola, São Paulo, 2001, 240 p. Disponível em:<https://books.google.com.br/books?id=tZGDyi6EPPoC&pg=PA180&lpg=PA180&dq=arquitetura+nazista+tinha+por+objetivo+n%C3%A3o+somente+impressionar+mas+esmagar&source=bl&ots=HRE9QkpuyR&sig=AL4IKkeBVtoPbwEF1klLmuhioV8&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwjg7_vxp6_OAhWBHZAKHXCJATAQ6AEIHDA#v=onepage&q=arquitetura%20nazista%20tinha%20por%20objetivo%20n%C3%A3o%20somente%20impressionar%20mas%20esmagar&f=false>. Acesso em: 27/04/2016.

ISENBERG, Cyril. **The Science of Soap Films and Soap Bubbles**. Nova Iorque: Dober, 1992, 220 p. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/78830427/The-Science-of-Soap-Films-and-Soap-Bubbles-Cyril-Isenberg>>. Acesso em: 03/03/2016.

JOSEPH-ANTOINE FERDINAND PLATEAU. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://es.wikipedia.org/wiki/Joseph-Antoine_Ferdinand_Plateau>. Acesso em: 15/05/2016.

KAWANO, CARMEM. A Bolha de Sabão em Números. **Revista Galileu**, Rio de Janeiro, v. 187, fev. 2007. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>>. Acesso em 25/05/2016.

KEIM, Brandon. Butterfly Wing Colours Come from Space-Age Structures. *Science*. 14/06/2010. Disponível em:<<http://www.wired.com/2010/06/butterfly-colors/>>. Acesso em: 11/05/2016.

LEITE, Hamilton Dias. Propagação da Luz em Meios Periódicos Unidimensionais: Cristais Fotônicos. (Monografia de final de curso) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Física. Vitória. 2013. Disponível em:<http://www.fisica.ufes.br/sites/www.fisica.ufes.br/files/003_Hamilton_Dias_Leite.pdf>. Acesso em: 11/05/2016.

LIPSCHUTZ, Martin. **Teoria y Problemas de Geometria Diferencial**. Série Schaum. McGraw-Hill. 1970. 287 p. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/106659870/Geometria-Diferencial-Lipschutz>>. Acesso em: 30/11/2016.

LUDWIG MIES VAN DER ROHE. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Mies_van_der_Rohe>. Acesso em:25/05/2016.

MAPURUNGA, Siria. A Matemática de Gaudi. *Diário do Nordeste*. Caderno 3. Jan. 2011. Disponível em: < <http://diariodonordeste.verdesmares.com.br/cadernos/caderno-3/a-matematica-de-gaudi-1.749481>>. Acesso em: 03/03/2016.

MARCO, A.; PÉREZ, B. **Geometria Diferencial de Curvas y Superficies**. Notas de Curso. Universidade Central de Venezuela. 2013. 81 pág. Disponível em:<<http://docplayer.es/15423293-Geometria-diferencial-de-curvas-y-superficies-notas-de-curso.html>>. Acesso em: 05/02/2016.

MARQUES, Fernando Codá. Geometria Diferencial Aula 4. Rio de Janeiro. Jan, 2015. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=Og3S8uaMGW4>>. Acesso em: 15/05/2016.

MARQUES, Fernando Codá. **Minimal Surfaces – Variational Theory and Applications**. 2014. Disponível em:<<https://arxiv.org/pdf/1409.7648.pdf>> . Acesso em: 18/02/2016.

MARQUES, Fernando Codá. **Soap Films in Mathematics**. Princeton. Out, 2014. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=eBfXE3B3Yxw>>. Acesso em:23/03/2016.

MINIFIE NIXON PTY LTD. Australian Wildlife Health Centre. 2013. Disponível em:<http://dynamic.architecture.com.au/awards_search?option=showaward&entryno=20063001>. Acesso em

MINIMAL SURFACES. [S.l.; s.n.]. Disponível em: <<http://www.indiana.edu/~minimal/>>. Acesso em: 13/02/2016.

MINIMAL SURFACES. [S.l.; s.n.]. Disponível em: <<http://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/minimal/index.html>>. Acesso em 14/02/2016.

MINIMAL SURFACES. [S.l.; s.n.]. Disponível em: <http://xahlee.info/surface/gallery_m.html>. Acesso em 16/02/2016

MINIMAL SURFACES AULA 1. Cursos do IMPA. Rio de Janeiro, Mar. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Htf30TM7NWM>>. Acesso em: 11/03/2016.

OLIVEIRA, Disney Douglas de Lima. **Superfícies Mínimas Obtidas Através da Transformada de Ribaucour**. [S.l.]. Jun, 2003. Disponível em: <<http://slideplayer.com.br/slide/354080/>> . Acesso em: 03/01/2016.

OPREA, John. **The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple**. Amer. Math. Soc. 2000. 266 p.

OSSERMAN, Robert. **A Survey of Minimal Surfaces**. Nova Iorque: Dover, 2014, 224 p. Disponível em:
 <<https://archive.org/stream/cu31924031226974#page/n197/mode/2up>>. Acesso em:
 23/03/2016.

OSSERMAN, Robert. **Geometry V: Minimal Surfaces**. Moscou: Springer, 1997, 272 p. Disponível em:
 <<https://books.google.com.br/books?id=Q4bqCAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=OSSERMAN+geometry+V+minimal+surfaces&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiQ88zit8DOAhUHC5AKHa3XBQAQ6AEIHjAA#v=onepage&q=OSSERMAN%20geometry%20V%20minimal%20surfaces&f=false>>. Acesso em:
 24/03/2016.

PADRÃO INSPIRADO DE GIRASSOL AUMENTA A EFICIÊNCIA DA USINA ESC. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <<http://helios.blog.com/2012/01/11/girassol/>>. Acesso em 29/05/2016.

PAIVA, Cida. **Foster and Partners: Escritórios da Swiss Re, Londres**. Finestra. Texto original publicado em Finestra, n.º 40. Disponível em: <<https://arcoweb.com.br/finestra/arquitetura/foster-and-partners-escritorios-da-16-03-2005>>. Acesso em: 10/04/2016.

PÉREZ, Marco A. **Geometría Diferencial de Curvas y Superficies**. (Notas de Curso). Venezuela: Jul, 2013. 81 p. Disponível em: <<http://docplayer.es/15423293-Geometria-diferencial-de-curvas-y-superficies-notas-de-curso.html>>. Acesso em: 04/01/2016.

PICADO, Jorge. **Apontamentos de Geometria Diferencial**. Universidade de Coimbra. 2006. Disponível em
 <<http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/Apontamentos/sebenta.pdf>>. Acesso em:
 04/02/2016.

PIETRO-CASTRO, Carlos. **Biografías de Matemáticos. Plateau**. Instituto de Matemáticas UNAM. Disponível em
 <<http://paginas.matem.unam.mx/cprieto/index.php/es/matematicos/matematicos-p/142-plateau-joseph-antoine-ferdinand>>. Acesso em: 02/05/2016.

PROJETO EDEN. [S.l.: s.n.]. Disponível em:
<https://pt.wikiarquitectura.com/index.php/Projeto_Eden>. Acesso em: 10/04/2016.

RIBANÉZ-TORRES, Raul. El Vientre de um Arquitecto. Disponível em
<<https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/10/ribanez.pdf>>. Acesso em: 04/05/2016.

SALADO, Gerusa de Cássia. **Construindo com Tubos de Papelão: Um Estudo da Tecnologia Desenvolvida por Shigeru Ban**. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006. p. 34-36. Disponível em:
<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18141/tde-05122006-154315/pt-br.php>>. Acesso em: 17/03/2016.

SANZ, Antonio Pérez. Las Ecuaciones de las Flores. **Revista Sigma**, [S.l.], v. 26, pag.137-148, Maio 2005. Disponível em <http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/rb43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_26/10_ecuaciones_flores.pdf>. Acesso em: 08/02/2016.

SAUTOY, Marcus Du. Schlesinger, George (tradutor). **O Mistério dos Números**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013. Disponível em:
<<https://www.passeidireto.com/arquivo/21724746/os-misterios-dos-numeros---marcus-du-sautoy>>. Acesso em: 11/11/2015.

SCHOEN, Alan H. Triply-Periodic Minimal Surfaces. Disponível em:
<<http://schoengeometry.com/e-tpms.html>>. Acesso em: 12/03/2016.

SNOW SCULPTING WITH MATHEMATICS. [S.l.: s.n.]. News Release, Jan. 1999. Disponível em: <<http://www.stanwagon.com/snow/breck1999/>>. Acesso em: 11/12/2015.

SOAP FILMS AND SOAP BUBBLES BY DR. CYRIL ISENBERG. Vídeo postado por Harvey Twyman. [S.l.]. Abr. 2012. Disponível em:
<<https://www.youtube.com/watch?v=Np9TuarsoX8>>. Acesso em: 21/02/2016.

SOAP FILMS DEMONSTRATIONS. FlinnScientific. [S.l.]. Dez. 2012. Disponível em:
<<https://www.youtube.com/watch?v=52wVrtA5krY>>. Acesso em: 19/02/2016.

SWISS RE HEADQUARTERS. [S.l.: s.n.]. Nov, 2013. Disponível em:
<<https://www.youtube.com/watch?v=TB1vNxQDBB4>>. Acesso em: 20/03/2016.

THE PRITZKER ARCHITECTURE PRIZE. Biography.Frei Otto. [S.l.: s.n.]. Disponível em: < <http://www.pritzkerprize.com/2015/biography>>. Acesso em: 17/03/2016.

THOMPSON, D'ARCY WENTWORTH. **On Growth and Form**. 2.^a Edição. Cambridge. Nova Iorque, 1945. 1116 pág. Disponível em: <<https://archive.org/details/ongrowthform00thom>>. Acesso em: 26/02/2016.

UMA EQUAÇÃO CONTRA OS ATEUS. [S.l.: s.n.]. Disponível em: < <http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/ateus.htm>>. Acesso em: 03/04/2016.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Estruturas Tubulares. Disponível em <<http://www.fec.unicamp.br/~estruturastubulares/vivencia01.htm>>. Acesso em: 07/04/2016.

WEAIRE – PHELAN STRUCTURE. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire%E2%80%93Phelan_structure>. Acesso em: 11/09/2015

WITKOWSKI, Nicolas. **Uma História Sentimental das Ciências**. Zahar. Rio de Janeiro: 2004, 216 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8u2q9Jmu3f8C&pg=PA144&lpg=PA144&dq=NAO+DESDENHO+NENHUM+EXPERIMENTO+POR+MAIS+INFANTIL&source=bl&ots=qZtJwU3S2I&sig=MoPkoR_DWjw-1PISAT3Fa3l5neo&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwix_oLHh8LOAhXGFpAKHYNeBAwQ6AEIHjAA#v=onepage&q=NAO%20DESDENHO%20NENHUM%20EXPERIMENTO%20POR%20MAIS%20INFANTIL&f=false>. Acesso em: 16/12/2015.

VILA, Cristóval. **Nature by Numbers**. [S.l.]. Mar, 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA>>. Acesso em: 07/01/2016.

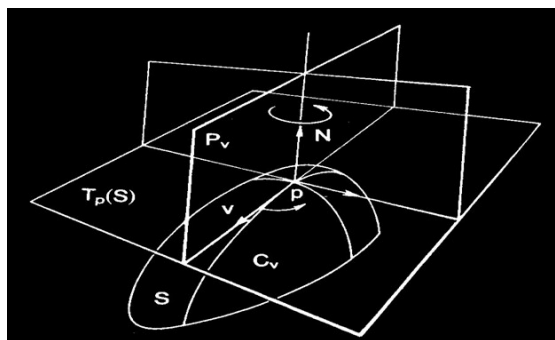
ZMRZLIKAR, Jure. **Minimal Surfaces in Biological Systems**. University of Ljubljana. Faculty of Mathematics and Physics. Dez, 2011. Disponível em: <http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2011_2012/Jure_Zmrzlikar_Minimal_surfaces_5_1.pdf>. Acesso em: 05/03/2016

APÊNDICE – CURVATURAS PRINCIPAIS E CURVATURA MÉDIA

Os conceitos de curvaturas abordados neste anexo são direcionados para os alunos de ensino médio e, portanto, são dados de forma intuitiva, sem nenhuma explicação da Geometria Diferencial vista no capítulo 4. As definições de curvaturas principais e curvatura média serão úteis para estudar as superfícies encontradas nos experimentos com filmes de sabão.

Consideremos uma superfície em \mathbb{R}^3 , suave (isto é, sem picos ou dobras), que chamaremos de S . Sejam p um ponto e $N(p)$ um dos dois vetores unitários normais a S em p . O vetor $N(p)$ é ortogonal ao plano tangente a S no ponto p , que denotaremos por T_pS . Seja P_v o plano que passa por p e que contém $N(p)$. O plano P_v intersecta a superfície S em uma curva C_v , que chamaremos de seção normal. (Figura abaixo)

Figura 217 – Seções normais de uma superfícies



Fonte: <http://slideplayer.com.br/slide/354080/>

A curvatura normal k_v de S em p é definida como o valor absoluto da curvatura de C_v com um sinal positivo, se N está voltada para a concavidade de C_v , e negativa caso contrário. Quando P_v gira em torno de N , v descreve um círculo de raio um em T_pS . É possível mostrar que k_v depende continuamente de v pertencente a S^1 e, portanto, atinge um máximo k_1 e um mínimo k_2 em S^1 . As curvaturas k_1 e k_2 são chamadas curvaturas principais. As direções correspondentes (os vetores unitários correspondentes) são chamadas direções principais. A curvatura da superfície será a média aritmética das curvaturas principais. Isto é, se H é a curvatura média da superfície, temos que

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$