



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

RODRIGO LACERDA CARVALHO

CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A
FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE
DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

FORTALEZA

2017

RODRIGO LACERDA CARVALHO

CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A
FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor. Área de concentração: Educação brasileira. Linha de pesquisa: Educação, Currículo e Ensino. Eixo: Tecnologias Digitais na Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

FORTALEZA

2017

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C327c Carvalho, Rodrigo Lacerda.
Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de matemática com suporte das tecnologias digitais / Rodrigo Lacerda Carvalho. – 2017.
180 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

1. Tecnologias digitais. 2. Estruturas multiplicativas. 3. Formação inicial de professores. I. Título.

CDD 370

RODRIGO LACERDA CARVALHO

CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A
FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor. Área de concentração: Educação, Currículo e Ensino; Eixo: Tecnologias Digitais na Educação.

Aprovada em: 31/ 01 / 2017.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Profa. Dra. Marcilia Chagas Barreto
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Antonio Luiz de Oliveira Barreto
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus.

À minha querida esposa, Lis de Maria.

AGRADECIMENTOS

Expresso minha gratidão às várias pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos membros da minha família - esposa, mãe, irmã, cunhados(as) e sobrinhas que colaboraram para a execução deste trabalho, pelo carinho e incentivo dedicados a mim. Em especial à minha amada esposa, Lis de Maria, por compartilhar diariamente dos momentos desta trajetória.

Aos amigos - Dennys e Leno - que me acolheram na minha chegada a Fortaleza e estiveram presentes desde o Mestrado até o Doutorado, seja nos momentos acadêmicos e também de descontração.

Ao professor Aires pela orientação da tese, pela disponibilidade e atenção e também pelo acolhimento nesta etapa de formação. Seus ensinamentos levarei por toda a vida.

Ao professor Eduardo Junqueira por ter iniciado a orientação deste trabalho. Aos(às) futuros(as) professores(as) que participaram e colaboraram com esta pesquisa e que foram fundamentais para sua realização.

Aos(às) professores(as) da banca examinadora, Jorge Brandão (primeira qualificação), Paulo Barguil (segunda qualificação e defesa), Marcilia Barreto (primeira e segunda qualificações e defesa), Sandra Magina (defesa) e Luiz Barreto (defesa), pelas contribuições dadas à tese. Em especial à Professora Marcilia, que me orientou no Mestrado e continuou acompanhando minha trajetória acadêmica.

Aos(às) colegas dos grupos de pesquisas, em especial ao Grupo do OBEDUC/E-mult. Com vocês tivemos muitos momentos de aprendizagem.

Aos(às) colegas da Universidade Federal do Cariri (UFCA), pela acolhida e incentivo na reta final deste trabalho.

Aos demais que não foram citados, a quem já me desculpo, mas que certamente sabem que têm uma contribuição neste trabalho. A você, leitor(a), que se interessou por esta pesquisa. Espero que contribua para seus estudos, assim como várias outras pesquisas foram relevantes para concretizar este trabalho.

“Na formação docente é primordial darmos ao professor os meios de conhecer melhor seu trabalho, os limites de sua ação, os obstáculos que vão encontrar e as formas de estimular a evolução dos indivíduos. Se não tenho os instrumentos para pilotar, me falta algo essencial para atingir meus objetivos.”
(Vergnaud)

RESUMO

Na presente pesquisa utilizamos as potencialidades das tecnologias digitais para criar condições favoráveis na formação inicial para o ensino do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Este conceito advém da Teoria dos Campos Conceituais, em que Vergnaud (2009) afirma que um indivíduo não aprende um conceito isolado e sim um campo de conceitos. Este campo envolve diversos conceitos, como os de multiplicação, divisão, razão, proporção, função, combinação, entre outros. Neste estudo nosso foco será no conhecimento do conceito de funções. Para auxiliar nessa compreensão buscamos autores como Ball, Thames e Phelps (2008), para debater sobre o conhecimento matemático para o ensino e sobre o conhecimento comum e especializado do conteúdo. Também trazemos Mishra e Koehler (2006), para a discussão sobre Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), que aborda o conhecimento pedagógico do conteúdo e da tecnologia. Definimos como problema central dessa pesquisa a seguinte pergunta: como acontece o processo de construção dos conceitos de estruturas multiplicativas e de função, por parte de futuros professores de Matemática, nos domínios conceitual e pedagógico, a partir do uso de tecnologias digitais? Assim, o nosso objetivo geral é analisar o processo de construção dos conceitos de estruturas multiplicativas e de função, por parte de futuros professores de Matemática, nos domínios conceitual e pedagógico, a partir do uso de tecnologias digitais. Em relação à metodologia, nosso objeto de estudo nos levou a adotar a pesquisa colaborativa, pois não nos interessou apenas entender a natureza do trabalho desenvolvido pelos futuros docentes, mas igualmente pela formulação de alternativas em uma formação colaborativa. O referido método divide-se em três etapas, quais sejam, a co-situação, a co-operação e a co-produção. O prefixo co significa ação conjunta. O *lócus* da pesquisa foi o Instituto de Formação de Educadores (IFE) da Universidade Federal do Cariri (UFCA), mais especificamente o curso de Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática, local onde atuamos como professor da área do Ensino de Matemática. Os participantes da pesquisa foram quatro estudantes da Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática, denominados de D2, I3, J4 e N5. Na etapa de co-situação da pesquisa colaborativa evidenciamos os conhecimentos prévios dos graduandos sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino, propomos a elaboração de problemas envolvendo o conceito de funções e refletimos sobre a prática docente. Nestes momentos de debate, constatamos que os participantes da pesquisa estão na fase do conhecimento comum do conteúdo. Na etapa de co-operação da pesquisa colaborativa

evidenciamos que os futuros docentes compreenderam a importância de se trabalhar com tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática, ou seja, demonstraram avanços no conhecimento pedagógico da tecnologia. Este conhecimento emergiu quando os futuros professores perceberam a importância das tecnologias na experimentação e no desenvolvimento de múltiplas representações. Isto demonstra uma relação apropriada entre tecnologia e conhecimento específico. A co-produção perpassou as outras duas etapas e caracterizou-se pela produção de conhecimentos.

Palavras-chave: Campo conceitual das estruturas multiplicativas. Função. Formação inicial de professores. Tecnologias digitais.

ABSTRACT

In the current study we utilize the potentialities of digital technologies to create favorable conditions in the initial education for teaching the conceptual field of multiplicative structures. This concept derives from the theory of conceptual fields, where Vergnaud (2009) suggests that an individual doesn't learn an isolated concept but rather a field of concepts. This field involves various concepts, including multiplication, division, reasoning, proportion, function, and combination, among others. In this study our focus will be on the knowledge of the function concept. To assist in this comprehension we look to authors such as Ball, Thames, and Phelps (2008) to debate mathematic knowledge for teaching and common and specialized knowledge of content. We also incorporate the work of Mishra and Koehler (2006) for the discussion of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), which addresses the pedagogical knowledge of content and technology. We define as the central problem of this study the following question: how does the process of the construction of concepts of multiplicative structures and function on the part of future teachers of Mathematics take place in the conceptual and pedagogical domains through the use of digital technologies? Therefore, our general objective is to analyze the process of construction of concepts of multiplicative structures and structures of function on the part of future Mathematics teachers in the conceptual and pedagogical domains through the use of digital technologies. In relation to methodology, our object of study brought us to adopt a collaborative approach to our research, since we were not interested only in understanding the nature of the work developed by the future teachers, but equally in the formulation of alternatives in a collaborative formation. This method is divided in three stages, which are co-situation, co-operation, and co-production. The prefix co means joint action. The locus of the study was the Institute of Teacher Education (Instituto de Formação de Educadores – IFE) at the Federal University of Cariri (UFCA), more specifically the program of Interdisciplinary Teaching in the Natural Sciences and Math, where we worked as professors in the area of Math Education. The participants of the study were four students from the Interdisciplinary Teaching in Natural Sciences and Mathematics program, denominated as D2, I3, J4, and N5. In the stage of co-situation of the collaborative study we demonstrated the previous knowledge of the students about the multiplicative conceptual field for teaching, we proposed the development of problems involving the concept of functions, and we reflected on teaching practice. In these moments of debate, we found that the participants of the study were in the

phase of common knowledge of the content. In the stage of co-operation of the collaborative study, we showed that the future teachers understood the importance of working with digital technologies in the teaching and learning of Mathematics. In other words, they demonstrated advances in the pedagogical knowledge of technology. This knowledge emerged when the future teachers perceived the importance of the technologies in experimentation and in the development of multiple representations. This demonstrates an appropriate relation between technology and specific knowledge. The co-production surpassed the other two stages and was characterized by the production of knowledge.

Keywords: Conceptual field of multiplicative structures. Function. Initial teacher education. Digital technology.

RESUMEN

En la presente investigación utilizamos las potencialidades de las tecnologías digitales para crear condiciones favorables a la inicial formación para la enseñanza del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Este concepto adviene de la Teoría de los Campos Conceptuales, en que Vergnaud (2009) aborda que un individuo no aprende un concepto aislado pero sí un campo de conceptos. Este campo envuelve diversos conceptos, como los de multiplicación, división, razón, proporción, función e combinación, entre otros. En este estudio nuestro enfoque será en el conocimiento del concepto de funciones. Para auxiliar en esta comprensión buscamos autores como Ball, Thames y Phelps (2008), para debatir sobre el conocimiento matemático para la enseñanza e sobre el conocimiento común y especializado de contenido. También traemos Mishra y Koehler (2006) para la discusión sobre *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK), que aborda el conocimiento pedagógico de contenido y de tecnología. Definimos como problema central de esta investigación la siguiente pregunta: como acontece el proceso de la construcción de los conceptos de estructuras multiplicativas y de función por parte de futuros profesores de Matemática, en los dominios conceptual y pedagógico, a partir del uso de tecnologías digitales? Así, nuestro objetivo general es analizar el proceso de construcción de conceptos de estructuras multiplicativas y de función, por parte de futuros profesores de Matemática, en los dominios conceptual y pedagógico, a partir del uso de tecnologías digitales. En relación a la metodología, nuestro objeto de estudio nos llevó a adoptar la investigación colaborativa, pues no nos interesó apenas entender la naturaleza del trabajo desarrollado por los futuros profesores, pero igualmente por la formulación de alternativas en una formación colaborativa. El referido método se divide en tres etapas: co-situación, co-operación, y co-producción. El prefijo *co* significa acción conjunta. El *locus* de la investigación fue el Instituto de Formación de Educadores (IFE) de la Universidad Federal de Cariri (UFCA), mas específicamente el curso de Licenciatura Interdisciplinar en Ciencias Naturales y Matemática, local donde actuamos como profesor en la área de Ensino de Matemática. Los participantes de la investigación fueron cuatro estudiantes de la Licenciatura Interdisciplinar en Ciencias Naturales y Matemática, denominados de D2, I3, J4, y N5. En la etapa de co-situación de la investigación colaborativa evidenciamos los conocimientos previos de los estudiantes sobre el campo conceptual multiplicativo para la enseñanza, propusimos la elaboración de problemas envolviendo el concepto de funciones y reflejimos sobre la práctica docente. En estos

momentos de debate, constatamos que los participantes de la investigación estaban en la fase de conocimiento común del contenido. En la etapa de co-operación de la investigación colaborativa evidenciamos que los futuros docentes comprendieron la importancia de trabajar con tecnologías digitales en la enseñanza y en el aprendizaje de Matemática, o sea, demostraron avances en el conocimiento pedagógico de la tecnología. Este conocimiento emergió cuando los futuros profesores percibieron la importancia de las tecnologías en la experimentación y en el desenvolvimiento de múltiples representaciones. Esto demuestra una relación apropiada entre tecnología y conocimiento específico. La co-producción pasó de las otras dos etapas y fue caracterizada por la producción de conocimientos.

Palabras claves: Campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Función. Formación inicial de profesores. Tecnologías digitales.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Esquema do <i>TPACK</i>	40
Figura 2	–	Esquema de classificação de problemas do campo multiplicativo ...	52
Figura 3	–	Relação quaternária na resolução do Problema 1	53
Figura 4	–	Relação quaternária na resolução do Problema 2	53
Figura 5	–	Proporção simples – operador escalar na resolução do Problema 3 .	55
Figura 6	–	Proporção simples – operador funcional na resolução do Problema 3	55
Figura 7	–	Proporção simples – operador escalar na resolução do Problema 4 .	56
Figura 8	–	Proporção simples – operador funcional na resolução do Problema 4	56
Figura 9	–	Proporção dupla para a resolução do Problema 5	57
Figura 10	–	Proporção múltipla para a resolução do Problema 6	59
Figura 11	–	Tela do recurso digital Equilibrando proporções	86
Figura 12	–	Tela inicial do Geogebra	87
Figura 13	–	Tela inicial do GP Funcional	89
Figura 14	–	Resoluções de D2 para os problemas 6 e 12	107
Figura 15	–	Resoluções de I3 para os problemas 6 e 12	108
Figura 16	–	Resoluções de J4 para os problemas 6 e 12	108
Figura 17	–	Resoluções de N5 para os problemas 6 e 12	109
Figura 18	–	Diagrama de resolução com operador escalar	110
Figura 19	–	Diagrama de resolução com operador funcional	111
Figura 20	–	Resolução do participante da pesquisa J4	112
Figura 21	–	Resolução do participante da pesquisa I3	114
Figura 22	–	Representação gráfica no Geogebra	118
Figura 23	–	Problema explorado com o OA Equilibrando Proporções	120
Figura 24	–	Colocando em Prática	123
Figura 25	–	Manipulação no Geogebra	127
Figura 26	–	Controle deslizante	127
Figura 27	–	Gráficos no GP Funcional, $b = 0$	129
Figura 28	–	Gráficos no GP Funcional, $a > 0$	131
Figura 29	–	Gráficos no GP Funcional, $a < 0$	131

Figura 30	–	Variação da Função Afim	134
Figura 31	–	Elaboração do vídeo	145
Figura 32	–	Elaboração do vídeo	145

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	–	Cronograma dos encontros da fase de co-situação	82
Quadro 2	–	Cronograma dos encontros da fase de co-operação	83
Quadro 3	–	Classificação das situações multiplicativas propostas pelos futuros professores	95
Quadro 4	–	Representação de grandezas	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA	Ambientes Virtuais de Aprendizagem
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CGI.br	Comitê Gestor da Internet no Brasil
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EDUCOM	Projeto Computadores na Educação
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
IES	Instituições de Educação Superior
IFE	Instituto de Formação de Educadores
KVA	Kit Virtual de Apoio
LIE	Laboratórios de Informática Educativa
MEC	Ministério da Educação
MIT	Massachusetts Institute of Technology
MOOCs	Massive Open Online Course
OA	Objeto de Aprendizagem
OBEDUC	Observatório da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência
PMF	Prefeitura Municipal de Fortaleza
PROINFO	Programa Nacional de Informática na Educação
PRONINFE	Programa Nacional de Informática Educativa
PROUCA	Programa Um Computador por Aluno
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
<i>TPACK</i>	Technological Pedagogical Content Knowledge

UECE	Universidade Estadual do Ceará
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFCA	Universidade Federal do Cariri
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UPE	Universidade de Pernambuco

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA	27
2.1	O contexto da formação inicial de professores de Matemática	27
2.2	Conhecimentos na formação inicial de professores de Matemática	31
2.2.1	<i>Conhecimento matemático para o ensino</i>	32
2.2.2	<i>Conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo</i>	37
2.3	Tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática ...	42
3	O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS	48
3.1	Teoria dos Campos Conceituais	48
3.2	Estruturas multiplicativas	50
3.2.1	<i>Os problemas do campo multiplicativo</i>	51
3.2.2	<i>Relações quaternária e ternária</i>	52
3.2.2.1	<i>Proporção simples: do pensamento proporcional ao funcional</i>	54
3.2.2.2	<i>Proporção dupla: do pensamento proporcional ao funcional</i>	57
3.2.2.3	<i>Proporção múltipla: do pensamento proporcional ao funcional</i>	58
3.3	O pensamento funcional	60
3.4	Estado da questão	65
3.4.1	<i>Pesquisas de mestrado e doutorado coletadas no Repositório da CAPES</i> ...	66
3.4.2	<i>Artigos científicos do Portal de Periódicos da CAPES</i>	73
4	TRAJETÓRIA METODOLÓGICA: CONTRIBUIÇÕES DA PESQUISA COLABORATIVA	76
4.1	A abordagem	76
4.2	O método de pesquisa	78
4.3	Etapas da pesquisa colaborativa	81
4.3.1	<i>Recursos digitais utilizados na fase de co-operação</i>	85
4.3.1.1	<i>Equilibrando proporções</i>	85
4.3.1.2	<i>Software Geogebra</i>	86
4.3.1.3	<i>GP Funcional</i>	88
4.3.1.4	<i>Variação da Função Afim</i>	89
4.4	Instrumentos de coleta e análise de dados	91
5	CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO	93

5.1	Conhecimentos prévios sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino	93
5.1.1	<i>Conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo: conceitos de multiplicação</i>	94
5.1.2	<i>Conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo: problemas do campo conceitual multiplicativo</i>	95
5.1.3	<i>Conhecimento sobre a prática pedagógica</i>	97
5.2	Conhecimentos adquiridos na formação sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino	100
5.2.1	<i>Ruptura do campo conceitual aditivo com o multiplicativo</i>	101
5.2.2	<i>Diferentes significados da multiplicação</i>	103
5.2.3	<i>Conhecimentos em relação aos conceitos de proporção simples</i>	106
5.2.4	<i>Do pensamento proporcional ao pensamento funcional</i>	110
5.2.5	<i>Representação tabular e gráfica da função linear</i>	115
5.3	Conhecimento especializado do conteúdo a partir da utilização pedagógica das tecnologias digitais	119
5.3.1	<i>Relações entre grandezas</i>	120
5.3.2	<i>Múltiplas representações da Função Linear</i>	125
5.3.3	<i>A variação de uma Função Afim</i>	130
5.4	Conhecimento pedagógico da tecnologia para o ensino de funções	136
5.4.1	<i>Reflexões dos futuros professores sobre os recursos digitais trabalhados na formação</i>	137
5.4.2	<i>Produção e compartilhamento de vídeo didático</i>	143
5.4.3	<i>Elaboração dos planos de aulas com a utilização das tecnologias digitais ..</i>	146
5.4.4	<i>Avaliação dos futuros docentes sobre a experiência da pesquisa</i>	150
6	CONCLUSÕES	152
	REFERÊNCIAS.....	157
	APÊNDICE A – REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA DOCENTE	168
	APÊNDICE B – TRABALHO PUBLICADO NO I ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFCA	169
	APÊNDICE C – TRABALHO PUBLICADO NA II MOSTRA UFCA	170
	APÊNDICE D – PLANOS DE AULA ELABORADOS PELOS FUTUROS PROFESSORES	174

APÊNDICE E – CONHECIMENTO DO PERFIL DOS FUTUROS PROFESSORES	175
APÊNDICE F – INSTRUMENTAL APLICADO AOS PARTICIPANTES DA PESQUISA DO PROJETO OBEDUC/E-MULT	176
APÊNDICE G – ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CONCEITO DE FUNÇÕES	178
APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	179

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático é um componente fundamental na construção da cidadania. À medida que a sociedade utiliza, cada vez mais, conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, a Matemática é percebida como um instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza. Os seus conceitos são essenciais para o desenvolvimento da humanidade e encontram diversas aplicações na própria Matemática e em outras ciências.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, há problemas a serem enfrentados, tais como: a necessidade de reverter uma prática que tem centrado o ensino em procedimentos mecânicos e desprovidos de significados para o aluno (BRASIL, 1997). Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade exige. Assim, pretendemos contribuir para as discussões da temática, visando principalmente à formação inicial dos docentes de Matemática.

Tendo em vista a abrangência da Matemática, nesta pesquisa delimitamos o campo conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009). O referido campo oportuniza o contato com diferentes situações de multiplicação, divisão e, em especial, a combinação de tais operações. Além disso, esta Tese compõe uma pesquisa maior, financiada pelo Projeto Observatório da Educação (OBEDUC), que visa a formação em rede colaborativa, cujo título é: Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental¹ (SANTANA; LAUTERT; CASTRO FILHO, 2012). Este fato também justifica a escolha do campo conceitual que será trabalhado junto com os licenciandos durante o processo formativo.

De acordo com Vergnaud (2001), o campo conceitual das estruturas multiplicativas é um conjunto de situações cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar as situações de proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, dentre outros conceitos. Para a presente pesquisa, teremos como foco o ensino do conceito de função com a utilização de tecnologias digitais.

A presença do computador na Educação Básica iniciou no Brasil por volta da década de 1980. Desde então, o poder público tem informatizado as escolas brasileiras,

¹ No capítulo metodológico será melhor explicitada essa relação entre as duas pesquisas.

visando melhorias para os processos de ensino e aprendizagem (MAIA; BARRETO, 2012). Como exemplos, mencionamos algumas experiências realizadas em nosso país, tais como: o Projeto Educação e Computador (EDUCOM); o Projeto Formar, o Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE); o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO); e Mídias na Educação. Esses projetos remontam ao desenvolvimento da Informática Educativa, na escola pública brasileira, nos últimos 30 anos.

Apesar do crescente investimento para a chegada das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nas escolas, em 2013, o Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br), entidade oficial que coordena serviços da *web* no País, divulgou que apenas 2% dos professores brasileiros da rede pública urbana usavam a tecnologia como suporte em sala de aula. E os que usam se limitam, na maior parte do tempo, a ensinar aos estudantes como utilizar o computador, em vez de desenvolver práticas pedagógicas.

A apropriação e integração das TDIC na prática pedagógica não podem estar apoiadas apenas na disponibilidade dos equipamentos. A presença desses recursos nas aulas não garante mudanças no cenário educacional. De acordo com Almeida e Prado (2011), a cada experiência, torna-se evidente que o ponto crucial é a formação de professores para que possam integrar essas tecnologias aos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, nossa proposta é que este trabalho seja realizado desde a formação inicial.

Entretanto, é necessário que o currículo seja menos instrucional e conteudista para oportunizar ao discente o desenvolvimento de ações e competências. Por currículo, entendemos a prática social pedagógica que pretende garantir o direito à educação com qualidade social e formação para o trabalho e para a cidadania. Nessa perspectiva, as TDIC podem ser integradas ao currículo, a partir de práticas didáticas que explorem o potencial dos recursos a favor da aprendizagem discente (MAIA; CARVALHO; CASTRO FILHO, 2013).

Com a finalidade de ampliar o acesso às TDIC, foi que o Programa Um Computador por Aluno (PROUCA) idealizou distribuir para cada estudante, professor e gestor de escolas públicas brasileiras um *laptop* educacional para ser utilizado no contexto escolar.

Este Programa formou professores e gestores visando à incorporação desses recursos à dinâmica da escola. O PROUCA ampliou o acesso à informação, desenvolveu habilidades de produção e promoveu a participação na construção coletiva do conhecimento (BRASIL, 2007).

No Ceará, em 2013, foram distribuídos dezesseis mil *tablets* entre professores de escolas públicas estaduais. Além dos equipamentos distribuídos para os docentes em regência

de sala, algumas escolas foram contempladas com lousas digitais. Essa experiência abre espaço para que os professores, além de dispor de outras formas para explorar os conteúdos com os discentes, possam manter contato com outros professores, dentro e fora do Estado, para troca de saberes, conteúdos e materiais didáticos em formato digital.

Em Fortaleza, no ano de 2012, professores da rede pública municipal foram contemplados com um *notebook*. A proposta desse programa, denominado Um computador para cada Professor, é que esses equipamentos possam proporcionar a inclusão digital dos professores, além de propiciar aos docentes outras fontes e materiais para planejar suas aulas. Os *notebooks* foram formatados visando ao uso educacional, desde o sistema operacional que fornece *links* para acesso rápido a portais e objetos de aprendizagem mantidos pelo Ministério da Educação (MEC). Além disso, em 2014 a Prefeitura Municipal de Fortaleza (PMF) aderiu ao PROUCA, o que resultou em 40 escolas do município cearense sendo contempladas com os *laptops*.

Esse novo modelo de inserir recursos tecnológicos na educação almeja o uso “[...] da tecnologia integrada ao que acontece na sala de aula, auxiliando o desenvolvimento de conteúdos disciplinares” (ALMEIDA; VALENTE, 2011, p. 5). Diante desta realidade, observamos esforços no sentido de garantir o uso pedagógico deste equipamento, o que reforça a necessidade da formação de professores e gestores. O PROUCA é um exemplo de programa que propicia a formação continuada dos docentes, pois considera que os professores são responsáveis por dinamizar e inovar as aulas e os projetos na escola, por meio de práticas pedagógicas que possibilitem novas estratégias de utilização da tecnologia, favorecendo a qualidade da aprendizagem aos estudantes.

No que se refere ao ciclo de formação inicial desconhecemos políticas governamentais que priorizem efetivamente a utilização de tecnologias digitais para os futuros professores. Uma das poucas iniciativas públicas de inserção de tecnologias nas Licenciaturas foi o Projeto Fábrica. Criado em 2004, a Fábrica Virtual teve como propósitos intensificar o processo de desenvolvimento e produção de recursos educacionais digitais das Instituições de Educação Superior (IES) e inserir novas abordagens pedagógicas que utilizassem a informática educativa nas licenciaturas por meio de um trabalho colaborativo dentro da universidade (PRATA; NASCIMENTO; PIETROCOLA, 2007).

Evidenciamos que a maioria dos programas governamentais tem voltado a atenção para a formação continuada de professores para uso pedagógico das TDIC. Entretanto, a partir de nossa experiência como docente da Licenciatura em Matemática, percebemos que estes

contextos de formação permanecem com a visão de que Matemática se aprende somente com lousa, pincel, papel e caneta. Assim, acabam deixando de lado debates relevantes que estão acontecendo na sociedade, que elencamos como exemplo, o uso das tecnologias digitais. Nesse sentido, atuaremos na formação inicial para que essa discussão já comece desde cedo a fazer parte da prática docente.

As TDIC podem auxiliar professores e alunos a superarem obstáculos no processo de ensino e aprendizagem. Nesta pesquisa pretendemos utilizar as potencialidades destes recursos integrados ao ensino de Matemática. Borba e Penteado (2010) afirmam que as tecnologias digitais podem proporcionar mudanças significativas na prática escolar, criando condições favoráveis para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Bittar (2010) relata que pesquisas apontam para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática com o uso de recursos digitais.

Em nossa dissertação de Mestrado corroboramos com tais posições, ao investigar o uso do *laptop* educacional na prática docente de um professor de Matemática (CARVALHO, 2013). Na ocasião refletimos, junto ao professor, acerca da sua prática, numa visão de formação continuada em serviço. Para a atual proposta, objetivamos focar na formação inicial para um grupo de futuros professores de Matemática.

A opção por essa área do conhecimento e nível de ensino vem da nossa formação inicial que é Licenciatura em Matemática e também por levar em conta os problemas formativos que os professores dessa disciplina apresentam em relação ao uso de TDIC para o ensino. Neste contexto, nossa proposta apoia-se no uso de equipamentos com conectividade, para que os futuros professores de Matemática se desenvolvam no exercício da profissão, a partir da interação com seus pares.

As questões desta pesquisa podem ser expressas da seguinte forma: Que conhecimentos os futuros docentes dispõem acerca do campo conceitual das estruturas multiplicativas? Quais as contribuições das tecnologias digitais para o conhecimento matemático dos futuros professores para o ensino de funções?

Diante dessas questões, o problema central dessa pesquisa é: **como acontece o processo de construção dos conceitos de estruturas multiplicativas e de função, por parte de futuros professores de Matemática, nos domínios conceitual e pedagógico, a partir do uso de tecnologias digitais?**

Assim, o nosso objetivo geral é analisar o processo de construção dos conceitos de estruturas multiplicativas e de função, por parte de futuros professores de Matemática, nos

domínios conceitual e pedagógico, a partir do uso de tecnologias digitais. A partir disso, os objetivos específicos foram assim delineados:

- a) identificar os conhecimentos dos futuros professores acerca das estruturas multiplicativas e do domínio conceitual de função;
- b) caracterizar o domínio das tecnologias digitais destinadas ao ensino de estruturas multiplicativas e de função; e
- c) desenvolver e avaliar com os futuros docentes estratégias e situações para o trabalho com estruturas multiplicativas e com função, a partir do uso de tecnologias digitais.

Explicitados a problemática, a justificativa e os objetivos da pesquisa, apresentamos a proposta de estruturação do trabalho. Esta pesquisa possui o seguinte campo de investigação: conhecimentos dos futuros professores acerca de estruturas multiplicativas, funções e tecnologias digitais. A seguir temos um panorama geral do que debateremos nos demais capítulos.

Os conhecimentos dos estudantes de licenciatura em Matemática foram debatidos dentro do ciclo de formação inicial. Para auxiliar nessa compreensão buscamos autores como Ball, Thames e Phelps (2008), para debater sobre o conhecimento matemático (conhecimento específico) voltado para o ensino (conhecimento pedagógico), ou seja, o conhecimento matemático para o ensino. Também trazemos Mishra e Koehler (2006), para a discussão sobre *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)*, que aborda o conhecimento pedagógico do conteúdo e da tecnologia.

Para debater as estruturas multiplicativas, focamos nossos estudos em Vergnaud (1983, 1993, 1996, 2001, 2009), Nunes e Bryant (1997), Magina, Merlini e Santos (2016) e Gitirana *et al.* (2014). Este campo envolve diversos conceitos, como os de multiplicação, divisão, razão, proporção, função, combinação, relação um para muitos, relação muitos para muitos, divisão como partição, divisão como cota, entre outros. Neste estudo, nosso foco foi no conceito de função.

Para tanto, elegemos a pesquisa colaborativa para conduzir os passos metodológicos deste trabalho. Teles e Ibiapina (2009) apontam que esse método de pesquisa é um modelo de investigação pautado na abordagem da mediação social. Nessa perspectiva, pesquisadores e professores trabalham conjuntamente em busca de conhecimentos voltados para a melhora da cultura escolar e para o desenvolvimento profissional dos envolvidos na

pesquisa. Em seguida, temos o capítulo de análise dos dados e as considerações finais do trabalho.

Explanados os pontos elementares da pesquisa, a seguir, discutiremos a formação inicial de professores de Matemática.

2 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos as questões fundamentais na formação inicial de professores de Matemática, tratando dos seus conhecimentos, sobretudo com a utilização de diversas estratégias de ensino, a partir das tecnologias digitais como um recurso que pode potencializar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Desta maneira, discutiremos sobre o contexto da formação inicial de docentes da área de Matemática, os conhecimentos dessa etapa da formação, especificamente, o conhecimento matemático para o ensino e o conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo e por fim, debatemos sobre as tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática.

2.1 O contexto da formação inicial de professores de Matemática

A deficiência na aprendizagem de conceitos matemáticos é uma temática que tem causado preocupação em diversos setores da sociedade, em especial, àqueles ligados à educação. Em função disto, se tem buscado alternativas para superar os problemas existentes nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. No âmbito acadêmico, pesquisadores têm se debruçado sobre a investigação de novas práticas e estratégias, baseadas em teorias, capazes de propiciar a superação das dificuldades.

A formação inicial é um momento em que podemos refletir sobre a Matemática como uma construção humana na sua interação com o contexto natural, social e cultural. Esta visão opõe-se àquela presente na sociedade, inclusive na Universidade, que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e incontestável.

A Matemática foi, ao longo da história, o primeiro conhecimento a atingir o estatuto de ciência. Este fato está, sem dúvida, ligado à própria natureza dessa ciência e de seus objetos. Os seus conceitos e resultados são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e encontram diversas aplicações em outras ciências (GRANGER, 1994). Podemos perceber que os conhecimentos matemáticos estão sendo utilizados a cada instante para a evolução da sociedade.

Entretanto, a partir de nossa experiência como docente nesta área, percebemos que o ensino dessa disciplina se caracteriza por práticas monótonas, em que geralmente o professor busca transferir conceitos fundamentais por meio de aulas cansativas. Na verdade,

essa prática contribui para a permanência de uma postura passiva pelos alunos, em relação à sua aprendizagem, além de gerar:

[...] atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na vida futura (BRASIL, 1998, p. 79).

O ensino da disciplina tem focado aplicação de fórmulas e regras mecanizadas que nem o aluno e, muitas vezes, nem o professor sabem ao certo seus conceitos fundamentais e querem a todo instante procurar uma aplicação para a Matemática.

De acordo com Caraça (2000), em uma época em que a sociedade anuncia o ensino de Matemática voltado apenas para aplicações do cotidiano, não podemos esquecer que esta Ciência possui uma existência própria, e que o seu estudo pode, ainda que de forma indireta, agregar importantes subsídios ao desenvolvimento da capacidade intelectual dos estudantes. O autor considera que a Matemática é uma Ciência viva, em constante transformação, e ligada ao momento histórico em que suas descobertas são realizadas. Ainda que reconheça a falta de aplicabilidade prática e imediata de alguns dos seus conteúdos, estes são parte de um grande esforço da humanidade para atingir um alto grau de domínio e desenvolvimento das ideias.

Assim, é imperioso repensar o ensino da Matemática. Desta maneira, além de uma análise nos currículos escolares, como destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, é relevante uma análise da formação docente (BRASIL, 1998). Nesse sentido, discutiremos sobre as contribuições da formação inicial para os futuros professores de Matemática.

Nesse contexto, a pesquisa sobre formação de professores tem crescido tanto quantitativamente quanto qualitativamente. O professor passa a ser considerado como um elemento importante do processo de ensino e aprendizagem, ele começa a ser analisado como sujeito do estudo com participação ativa e colaborativa em muitos casos (FERREIRA, 2003).

Fiorentini (2003), ao abordar a questão da formação dos docentes de Matemática, afirma que, apesar de todos esses novos encaminhamentos nas discussões, a principal mudança que se observa encontra-se apenas no âmbito do discurso. O autor complementa que prevalece o modelo de uma racionalidade técnica que separa teoria e prática. Ponte (2009) afirma que o domínio do conhecimento matemático e pedagógico torna o professor de Matemática mais preparado em sala de aula, capaz de escolher tarefas mais apropriadas ao

desenvolvimento de discussões matemáticas significativas.

A formação de professores de Matemática é um tema que vem sendo discutido e causando preocupação tanto na formação inicial quanto continuada. Cury *et al.* (2002) acrescenta que os cursos de Licenciatura Plena em Matemática, além da importância que atribuem aos conteúdos matemáticos, devem discutir as possibilidades e metodologias para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Os autores complementam afirmando que uma das maneiras de formar um professor de Matemática crítico e consciente das dificuldades que vai encontrar na sua prática é desenvolver, desde a graduação, atividades práticas paralelamente à teoria, para que, por meio delas, esses docentes possam trabalhar em prol da melhoria das condições do ensino e aprendizagem da Matemática.

Ponte (1992) já afirmava que na formação inicial um dos problemas é a inexistência de uma prática que possibilite (re)formular objetivos de intervenção na sala de aula e de vivências diretas de reflexão. Um dos desafios é que as concepções dos futuros professores sejam colocadas em questionamento, criando hábitos de refletir sobre a Matemática como uma construção social e não como algo incontestável, acabado.

Fiorentini *et al.* (2002) concluíram, com base em um levantamento de 25 anos da pesquisa brasileira sobre formação de professores, que os futuros professores tendem a reproduzir os procedimentos didáticos de seus formadores e que a formação acadêmica dos formadores foi com ênfase quase exclusiva na formação matemática. Ou seja, provavelmente os licenciandos irão dar ênfase ao conhecimento de Matemática Pura, que é fundamental para o ensino, entretanto não é suficiente. É preciso também que os futuros professores tenham o conhecimento pedagógico.

Para Fiorentini *et al.* (1998), o futuro professor de Matemática deve ter uma formação matemática, que relacione tanto seus aspectos procedimentais e sintáticos quanto conceituais, semânticos e atitudinais; uma formação geral, que englobe uma cultura geral, educação humanística e tecnológica; uma formação científico-pedagógica, com fundamentos históricos, sociológicos, filosóficos, psicológicos e epistemológicos relativos às ciências da educação; e por fim uma formação relativa à atividade profissional da docência, por meio de conhecimentos da atividade profissional relativa ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, Mendes (2009) afirma que as experiências na formação inicial de professores de Matemática evidenciaram a necessidade de se investir cada vez mais na organização de cursos de licenciatura com uma proposta metodológica de ensino que se caracterize por subsidiar os licenciandos com alternativas que os levem à busca de

conhecimento matemático, por meio de atividades que valorizem o saber produzido pela sociedade.

Assim, entendemos a formação inicial do professor de Matemática como uma etapa da sua formação, que compreende um início necessário para o ingresso da profissão. O futuro professor de Matemática estará em constante movimento na direção dos conhecimentos necessários à sua ação docente.

O licenciando pode evidenciar como as tecnologias são tratadas na escola. Assim, constatar que a introdução de recursos tecnológicos nas escolas não garante, por si, uma mudança no desempenho dos estudantes e também não otimiza as práticas pedagógicas. Portanto, as tecnologias digitais devem ser integradas na formação inicial para proporcionar experiências pedagógicas para o aprendizado tanto dos conteúdos disciplinares, quanto de metodologias. Para tanto, é fundamental a formação de professores para o uso adequado das tecnologias para o processo de ensino e aprendizagem.

Os docentes da Educação Básica, via de regra, ficam à margem das tecnologias, ora por desconhecimento, ora em função do próprio cumprimento do currículo escolar, que os envolve no mundo tecnológico, porém sem a devida compreensão, os impedindo da participação nesse processo. Esta realidade demanda um olhar atento daqueles que fazem educação e de pesquisas empíricas que possam afirmar ou desmistificar a importância de determinados recursos na prática pedagógica.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada lançadas em junho de 2015 orientam que, durante a formação inicial, os futuros docentes devem: a) fazer o uso competente das TDIC para o aprimoramento da prática pedagógica; b) desenvolver projeto formativo que assegure o domínio dos conteúdos específicos da área de atuação, fundamentos e metodologias, bem como das tecnologias; e c) utilizar recursos pedagógicos, como biblioteca, laboratórios, videoteca, entre outros, além de recursos de tecnologias da informação e da comunicação, tendo em vista a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2015).

Neste contexto, a conversa estabelecida entre o professor da escola e o licenciando é muito mais do que uma atividade rotineira de operacionalidade docente. É a possibilidade de aprendizagem, de trocas de experiências, crescimento mútuo com os percursos, com significações dadas à profissão e com as práticas pedagógicas, que foram surgindo no

cotidiano e nas relações com a escola, sua comunidade e seu contexto.

Nessa perspectiva colaborativa, destacamos que algumas políticas públicas se preocupam com esse modelo de formação inicial, dentre as quais, o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). O programa concede bolsas a alunos de licenciatura participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvidos por IES em parceria com escolas de Educação Básica da rede pública de ensino. O PIBID promove a inserção dos estudantes no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica para que desenvolvam atividades didático-pedagógicas sob orientação de um docente da licenciatura e de um professor da escola.

O que percebemos é que falta ainda um longo caminhar, entretanto já conseguimos avançar frente a alguns debates. A formação inicial sendo realizada da maneira proposta, juntamente com o modelo do PIBID já é um grande avanço e isso demonstra a importância das pesquisas em educação, visto que é a partir dessas que as mudanças acontecem efetivamente.

Por fim, consideramos a formação docente como um processo contínuo e inconcluso que envolve diversas etapas e instâncias formativas. A formação é um fenômeno que ocorre ao longo da vida e que acontece de modo integrado às práticas sociais e ao cotidiano escolar de cada um, ganhando intensidade e relevância em algumas delas. No próximo tópico, debateremos os conhecimentos dos futuros professores de Matemática, foco da presente pesquisa.

2.2 Conhecimentos na formação inicial de professores de Matemática

Evidenciamos a formação inicial como um processo de construção do conhecimento em que o licenciando deve ter a possibilidade de estudar, aprender, discutir, refletir e investigar, sistematicamente, as aprendizagens. Consideramos que o conhecimento é fundamental para os futuros professores desenvolverem sua prática docente. Neste trabalho, abordaremos o conhecimento matemático para o ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e o conhecimento pedagógico do conteúdo e da tecnologia (MISHRA; KOEHLER, 2006). Para facilitar a compreensão do leitor, definiremos separadamente cada um destes tipos de conhecimentos. Entretanto, ao invés de tratar os conhecimentos como corpos separados, optamos pela interação entre conhecimento matemático, pedagógico e tecnológico. Isto significa que, para além de olhar para cada um destes componentes em isolamento, nós

também precisamos olhar para eles em pares e todos em conjunto.

Afirmamos tomando como base Mishra e Koehler (2006) que o conhecimento do conteúdo é o conhecimento sobre o assunto real que importa e que deve ser ensinado e aprendido em Matemática. Os futuros professores devem compreender a natureza do conhecimento e da investigação em diferentes campos. O conhecimento pedagógico é o entendimento sobre os processos e práticas de ensino e aprendizagem da Matemática. O referido conhecimento requer a compreensão das capacidades cognitivas, social, e teorias do desenvolvimento da aprendizagem e como se aplicam em sua sala de aula. Já o conhecimento de tecnologia é o conhecimento sobre as tecnologias analógicas, tais como livros, pincel e quadro branco, e as tecnologias digitais, tais como a internet, os sistemas operacionais e *hardware* de computador, bem como a utilização de ferramentas de *softwares*.

A seguir, exploraremos o trabalho desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008), em que os autores sistematizaram diversos resultados de pesquisas e desenvolveram fundamentados na elaboração teórica de Shulman (1986).

2.2.1 Conhecimento matemático para o ensino

O futuro professor de Matemática precisa se apropriar de conhecimentos de diferentes naturezas, tais como os conhecimentos específicos dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e os significados que os conceitos podem assumir, bem como as relações e propriedades destes conceitos e as formas de representação simbólica que podem ser utilizadas para registro e operacionalização dos mesmos e seu desenvolvimento (VERGNAUD, 2001).

Florentini (2004) salienta que o futuro professor de Matemática deve ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente e também conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático.

Nesse contexto, é necessário que o licenciando conceba que na Matemática não existem verdades infalíveis e imutáveis, mas sim uma ciência aberta e dinâmica à incorporação de novos conhecimentos. É imprescindível que agregue o conhecimento científico ao conhecimento escolar, como algo possível de ser ensinado ou aprendido pelo aluno. Isso significa ser capaz de transformar o conhecimento acadêmico em práticas

escolares, de modo que os objetos da escola retratem fielmente os objetos da ciência, possibilitando assim, uma interlocução entre a Matemática científica e escolar.

Geralmente, os cursos de formação de professores têm se concentrado no conhecimento do conteúdo do professor. Sentindo necessidade de ampliar essa visão, as licenciaturas começaram a olhar também para a pedagogia, enfatizando as práticas de sala de aula (SHULMAN, 1992). Entretanto, algumas abordagens na formação de professores ainda enfatizam o conhecimento do conteúdo separado do conhecimento da Pedagogia. Com o objetivo de acabar com essa dicotomia foi que o autor propôs a ideia de conhecimento pedagógico do conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*).

Shulman (1986) organizou os conhecimentos em algumas categorias, dentre as quais destacaremos o *conhecimento do conteúdo*, que inclui o conhecimento do objeto e suas estruturas organizacionais. O *conhecimento curricular*, que é representado pelos programas designados para o ensino de conteúdos e tópicos particulares em um dado nível de escolarização. E, por último, a categoria que foi mais discutida e investigada por diversos pesquisadores, qual seja o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que aborda que os professores além de terem o conhecimento específico do conteúdo é necessário que tenham o conhecimento pedagógico de como ensinar determinado conceito.

O conhecimento pedagógico do conteúdo engloba o conhecimento do conteúdo. O professor precisa compreender o que faz a aprendizagem de um conceito ser mais eficiente, saber identificar as estratégias dos estudantes e conhecer possibilidades que promovam a organização e a compreensão do que está sendo ensinado (SHULMAN, 1986). Ainda de acordo com o autor a base do conhecimento para o ensino está na interação do conteúdo com a Pedagogia. É relevante que o futuro professor transforme o seu conhecimento dos conteúdos específicos de ensino em estratégias pedagógicas, com o objetivo de transformar o ensino em aprendizagem.

De posse de alguns conceitos de Shulman (1986), evidenciamos a importância dos futuros professores estarem atentos às particularidades dos conteúdos que se objetiva ensinar, de modo a orientar as ações específicas para o seu desenvolvimento. Nesse contexto é preciso compreender que “[...] o modo de se conhecer certos conteúdos é quase que perseguir um modo de construí-los e, sendo assim, envolve ações educativas que se diferenciam umas das outras”. (MOURA, 2002, p. 159).

Assim, compreendemos o futuro professor como um intelectual em processo contínuo de construção, que terá seu trabalho vinculado diretamente ao conhecimento.

Entendemos, então, que o licenciando precisa da teoria para iluminar sua prática, e que esta precisa ser continuamente refletida para que sua teoria seja ressignificada. Dessa forma, a licenciatura pode ser conceituada como atividade teórica instrumentalizadora da *práxis* (PIMENTA, 2000), entendida como atitude teórica e prática. Pois, não basta conhecer e interpretar o mundo (teórico), é preciso transformá-lo (prática).

No que se refere à Licenciatura em Matemática, as discussões atuais para o processo formativo do futuro professor ilustram que os cursos de licenciaturas devem contemplar, primordialmente, uma formação ampla de produção de conhecimento que vai além do sólido embasamento teórico e procedimental, proporcionando aos futuros professores novas dimensões ao seu fazer pedagógico.

A partir de diversas pesquisas, Ball, Thames e Phelps (2008) avançaram nas ideias de Shulman e definiram o que seria o *conhecimento matemático para o ensino*, tema desse tópico da pesquisa. Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem que esta expressão aborda o conhecimento que os docentes de Matemática necessitam para o exercício da profissão. Entendemos que os professores necessitam saber o conteúdo específico que eles ensinarão e que se espera que os estudantes aprendam e compreendemos que os professores quando forem ensinar sobre um conceito específico, tal como funções, devem levar os estudantes a compreenderem aspectos fundamentais para a aprendizagem deste conceito, quais sejam, a relação de dependência entre duas grandezas e representação dos conceitos de forma algébrica, tabular e gráfica, dentre outras.

Ball, Thames e Phelps (2008), para representarem suas hipóteses, propuseram um refinamento para as categorias de Shulman (1986). Os autores trazem as categorias de *conhecimento do conteúdo* e de *conhecimento pedagógico do conteúdo* subdivididas em *conhecimento comum do conteúdo* e *conhecimento especializado do conteúdo*, por um lado, e *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* e *conhecimento do conteúdo e do ensino*, por outro lado.

Os autores colocam que os quatro tipos de conhecimentos estão em constante relação. Em síntese, eles definem que reconhecer uma resposta errada e se preocupar somente com o resultado final de um problema são conhecimentos comuns do conteúdo; enquanto dimensionar a natureza de um erro e se deter ao processo de resolução de um problema são conhecimentos especializados do conteúdo; ter familiaridade com os erros comuns e saber o motivo do discente em cometer alguns dos referidos erros é um conhecimento de conteúdo e de estudantes; e por último selecionar uma abordagem de ensino que seja eficiente para

superar dificuldades e explorar certos aspectos de um conceito é um conhecimento do conteúdo e de seu ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Ball (1990) investigou o conhecimento de três professores sobre multiplicação. Os docentes investigados atribuíram grande importância em ensinar os discentes a seguirem os procedimentos mecânicos em vez de levar os estudantes a entenderem os processos de resolução. A pesquisadora destacou que os professores possuem um conhecimento superficial sobre multiplicação, ou seja, somente conseguem falar sobre os processos da multiplicação de forma mecânica. Para a autora, este tipo de conhecimento é insuficiente para ensinar.

De acordo com Castro Filho (1999), diversas pesquisas revelam uma limitação no conhecimento matemático dos professores para atuarem no Ensino Médio, especificamente no conceito de função. Elencamos como exemplo, que geralmente os professores sabem que no gráfico de uma função linear a reta passa pela origem do plano cartesiano. Entretanto, quando é necessário discutir porque isto acontece e refletir sobre qual a relação entre o coeficiente b da função e o eixo y do plano cartesiano os docentes revelam suas limitações. Ainda de acordo com o autor, estes estudos levantam a questão de como conhecimento do conteúdo está relacionado com a prática dos professores.

Nesta perspectiva, Ball, Thames e Phelps (2008) constataram que o conhecimento puramente matemático é bastante necessário. Nesta perspectiva, para constatar a generalização de um caso específico, exige conhecimento matemático e habilidade independente de saber alguma coisa sobre os estudantes ou sobre o ensino em si mesmo. Os pesquisadores evidenciaram que existem aspectos de conhecimento do conteúdo especializado que necessitavam ser descobertos, mapeados, organizados, e incluídos na formação inicial de professores. Entretanto, para a docência o *conhecimento matemático especializado* somente irá fazer sentido se o professor conhecer suficientemente sobre o ensino e sobre os estudantes.

Convém ressaltar que a metodologia utilizada por Ball e colaboradores para a identificação do conhecimento matemático para o ensino foca a prática do professor em salas de aula. As pesquisas desenvolvidas pelo grupo partem da observação dos professores em ação, para, então, juntamente com eles, delinear um conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Os autores justificam que precisamos investigar como as diferentes abordagens para a formação de professores possuem efeitos sobre o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e como eles estão relacionados com aspectos específicos da prática pedagógica.

Ribeiro (2012) realizou um ensaio teórico a partir da perspectiva teórica de Ball e

chegou a duas conclusões para a formação docente (inicial ou continuada). A primeira é que os professores precisam conhecer o conteúdo que ensinam, porque docentes que não conhecem bem um assunto provavelmente não terão o conhecimento necessário que precisam para mediar a aprendizagem dos estudantes. Entretanto, conhecer bem um assunto não é suficiente para ensiná-lo. Nesta perspectiva, a segunda conclusão é que os cursos de formação de professores, além de focar os ganhos de aprendizagem matemática de seus alunos, devem preparar os futuros professores para conhecerem e serem capazes de usar a matemática que é necessária no trabalho de ensinar.

Ponte (2009) destaca algumas maneiras de integrar a aprendizagem dos futuros professores relativamente ao conhecimento específico e ao conhecimento pedagógico, quais sejam, reflexão, investigação, resolução de problemas e tecnologias digitais.

Para a compreensão de reflexão nos fundamentamos na discussão teórica de Schön (1995) sobre o professor reflexivo, que concebe a aquisição do conhecimento em ação pela reflexão-na-ação e reflexão-sobre-a-ação. A primeira, concomitante à ação, exige do professor uma elaboração rápida, um olhar imediato para a experiência vivida no sentido de perceber suas características e contradições para que possam auxiliá-lo na tomada de decisão e até mesmo no imprevisto. A segunda, diz respeito a um momento de reflexão posterior à ação, que ocorre sistematicamente, permitindo que o professor pense e tente elaborar sua visão sobre o acontecido. Consideramos estes momentos de reflexão relevante para que os futuros professores possam refletir sobre o conhecimento matemático e sobre as melhores maneiras de ensinar os referidos conteúdos.

A investigação é outro aspecto relevante para a prática profissional, pois, além de beneficiar as instituições educativas, traz contribuições para o conhecimento específico e pedagógico e constitui um elemento decisivo de identidade profissional dos futuros professores. É um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade fundamental para o desenvolvimento profissional dos licenciandos que nela se envolvem ativamente (PONTE, 2009).

No contexto da Educação Matemática, a resolução de problemas é vista tanto do ponto de vista metodológico quanto de investigação. A tendência relatada é objeto de estudo em todo o mundo, uma vasta literatura volta atenção à caracterização e categorização de verdadeiros problemas, para com isso, garantir a potencialidade de todo o processo que envolve a resolução de problemas. Corroboramos com Vergnaud (2009), no sentido que o ensino e a aprendizagem de Matemática devem ser permeados pela resolução de problemas.

Neste contexto, os alunos podem fazer conjecturas, observar padrões, organizar informações, reconstruir e aplicar conhecimentos científicos e práticos.

Os PCN designam a resolução de problemas como o ponto de partida da atividade matemática (BRASIL, 1998). Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Convém ressaltar que a Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

Na resolução de um problema matemático, pesquisadores como Dante (2010) e Polya (1995) destacam que é exigido um trabalho intelectual, no intuito de sintetizar conhecimentos para determinar possíveis meios de resolução, ou seja, um problema deve gerar conhecimentos específicos e pedagógicos no decorrer de sua resolução.

A partir do avanço das tecnologias digitais na sociedade e da preocupação com o conhecimento específico e pedagógico da Matemática, surgem pesquisas no campo da Educação Matemática que propõem reflexões para auxiliar os docentes no desenvolvimento de práticas que propiciem o aprendizado discente.

A informática educativa tem se mostrado uma tendência capaz de proporcionar mudanças significativas na prática escolar, criando condições favoráveis para as aulas de Matemática (BORBA; PENTEADO, 2010). Na mesma perspectiva, Mendes (2009) afirma que o uso das tecnologias na Educação Matemática tem contribuído para que professores e alunos superem obstáculos no processo de ensino e de aprendizagem. Bittar (2010) complementa que pesquisas apontam para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática com o uso das tecnologias digitais.

Diante destes estudos, pretendemos compreender como o futuro professor de Matemática adquire conhecimentos para o ensino, a partir do uso das tecnologias digitais. Na próxima seção explanaremos sobre o conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo.

2.2.2 Conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo

A partir da década de 1980 a sociedade começa a mudar sua forma de viver e comunicar-se por meio das novas possibilidades que a internet proporciona. Nesse sentido, os

conceitos de tempo linear e espaço geográfico se transformam, diluem-se as fronteiras territoriais e o tempo se amplia, tornando-se multidimensional.

“Sociedade do Conhecimento” e “Sociedade da Informação” (LÉVY, 1999) são expressões que se referem às rápidas transformações em curso na sociedade, cujos processos produtivos se baseiam no conhecimento e no processamento da informação. Nesse contexto, o mundo está se tornando cada vez mais digitalizado e a informação, de forma bastante rápida, é gerada, armazenada, distribuída e transformada. A sociedade se torna mais marcada por fenômenos tais como a flexibilidade, fluidez, transitoriedade e pelos fluxos, particularmente os fluxos comunicativos em rede.

Nessa perspectiva, mídias e recursos interativos podem ocupar a centralidade de novos processos pedagógicos onde, sobretudo, participantes se engajam na condição de aprendizes, mas, também, na de produtores de conhecimentos compartilhados em rede. No ciberespaço, as variadas formas de aprendizagem podem partir do envolvimento de pessoas em formações por meio de cursos *online*, ambientes virtuais de aprendizagem (AVA), redes sociais e, mais recentemente, os *Massive Open Online Course* (MOOC), que em tradução livre para o português podem ser definidos como Cursos Massivos e Abertos Online.

Assim, é preciso nos fundamentarmos teoricamente para entender como a tecnologia é utilizada pedagogicamente para o ensino e para a aprendizagem. Nesse contexto, elegemos como um dos nossos aportes teóricos o *TPACK*, que significa o conhecimento pedagógico do conteúdo e da tecnologia. Seu foco principal é pesquisar de que maneira a tecnologia é utilizada no ensino e na aprendizagem de conceitos específicos de uma determinada área do conhecimento (CARR *et al.*, 1998; MISHRA; KOEHLER, 2003), em nosso caso a Matemática. Convém ressaltar que este é o momento que acontece o elo de todos os eixos da presente tese, quais sejam, conhecimentos matemático, pedagógico e tecnológico.

A teoria citada é um dos caminhos para o desenvolvimento de quadros teóricos e conceituais unificados que nos permitem desenvolver e identificar temas e construções que seriam aplicados em diversos casos e exemplos de práticas. Nesse sentido, a efetivação de um quadro teórico consistente é relevante para desenvolver e compreender o processo de integração das tecnologias na educação.

Mishra e Koehler (2006) relatam que a construção do *TPACK* aconteceu na realização de um projeto de experimento que é destinado a compreender o desenvolvimento dos professores para o uso efetivo da tecnologia e ao mesmo tempo colaborar com os atores envolvidos na pesquisa. Nessa perspectiva, pesquisadores e professores trabalham

conjuntamente, em busca de conhecimentos voltados para potencializar o uso das TDIC na educação e para o desenvolvimento profissional dos envolvidos na pesquisa.

A base para a construção deste quadro teórico é o entendimento de que o ensino é uma atividade complexa, que envolve vários tipos de conhecimentos. O professor em sua atividade de ensino continua se apropriando de conhecimentos teóricos e práticos que lhe permitem organizar ações que possibilitem ao estudante a apropriação de conhecimentos explicativos da realidade e do seu desenvolvimento, ou seja, ações que promovam a atividade de aprendizagem de seus estudantes. É por meio da atividade de ensino que o futuro professor tomará consciência de seu próprio trabalho, podendo lidar melhor com as contradições e inconsistências do sistema educacional, na medida em que compreende tanto o papel da escola, quanto o seu próprio papel na escola.

Segundo Mishra e Koehler (2006) o uso das tecnologias em sala de aula pode variar de simples desenhos em uma lousa interativa ou hipertextos com base na *web* até sofisticadas simulações multimídia. Estas possibilidades proporcionam uma série de representações, exemplos e demonstrações que podem levar o discente a compreender os conceitos matemáticos, especificamente de funções. Este novo contexto tem em primeiro plano a tecnologia de forma que não poderíamos imaginar há alguns anos. Assim, o conhecimento da tecnologia também se torna um aspecto importante do conhecimento geral dos professores.

Na abordagem do *TPACK* é onde surge a integração do conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo. De acordo com Mishra e Koehler (2006), os conhecimentos de conteúdos e de pedagogia, equivocadamente, eram considerados separados e independentes um do outro, a partir de Shulman (1986) e posteriormente Ball (1990) foi que a comunidade científica passou a compreender que não dá para trabalhar com estes conhecimentos de forma separada. Da mesma forma, hoje em dia, o conhecimento de tecnologia é muitas vezes considerado como separado do conhecimento pedagógico do conteúdo, os autores advertem que não dá para separar estes três tipos de conhecimento.

Por questão de organização textual e para melhor compreensão do leitor, podemos olhar para os conhecimentos em pares: conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento tecnológico do conteúdo, conhecimento pedagógico da tecnologia. Entretanto, não podemos esquecer o entrelaçamento dos três conhecimentos.

A ideia de conhecimento pedagógico do conteúdo dentro da perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008) foi definida como conhecimento matemático para o ensino. Convém

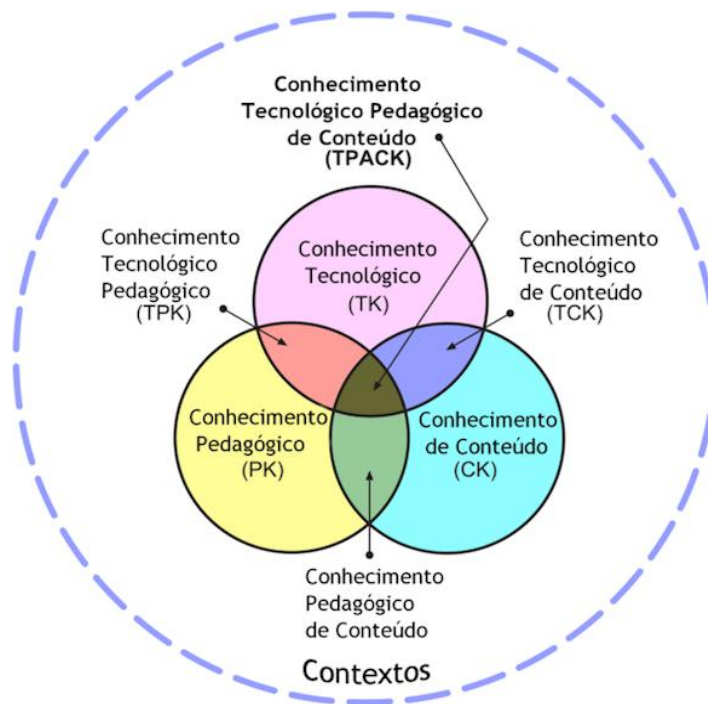
ressaltar que evidenciamos a relevância dos futuros professores terem o conhecimento específico e pedagógico dos conceitos de funções.

O conhecimento tecnológico do conteúdo é o conhecimento sobre a forma como a tecnologia e conteúdo estão reciprocamente relacionadas. As tecnologias digitais potencializam diversas representações para o ensino dos conteúdos, pois possuem uma característica multimidiática, ou seja, podem ser trabalhados com áudios, vídeos e imagens, o que proporciona atividades que ultrapassam a “era do papel e lápis”.

O conhecimento pedagógico da tecnologia é o conhecimento de como a tecnologia é utilizada em contextos de ensino e aprendizagem. Este inclui um entendimento de que existe uma série de ferramentas para uma determinada tarefa, cabendo aos futuros professores escolherem a mais adequada dentre os seus objetivos pedagógicos.

O entrelaçamento dessas três fontes de conhecimentos é a base da organização do ensino de Matemática com tecnologias e requer uma compreensão de trabalhos pedagógicos que utilizem tecnologias de maneira construtiva para ensinar o conteúdo específico (MISHRA; KOEHLER, 2006). A seguir exibimos uma imagem que representa de forma compreensível o que significa o *TPACK*.

Figura 1 – Esquema do *TPACK*



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tpack>

Nessa perspectiva, ressaltamos que saber utilizar a tecnologia não é o mesmo que saber utilizá-la pedagogicamente. Elencamos, como exemplo, a pesquisa de Maia (2012) que analisou a representação social de estudantes de Pedagogia sobre o ensino de Matemática com uso de tecnologias digitais. O autor identificou uma concepção limitada acerca do potencial pedagógico de tais recursos. De acordo com os dados analisados, a representação social dos futuros professores que ensinarão Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental dá relevo ao recurso digital em detrimento do professor. Essa concepção está mais alinhada àquela presente no senso comum, difundida pela mídia, em que se enfoca o aspecto da inserção das tecnologias digitais nos espaços escolares (MAIA, 2012).

Na tentativa de superar alguns destes obstáculos, Mishra e Koehler (2006) propõem o ensino com tecnologias por meio de projetos, pois assim os estudantes tornam-se sujeitos ativos na construção do conhecimento. O ensino e a aprendizagem por meio de projetos incorporam um processo que está presente na construção de artefatos, tais como cursos *online* e vídeos digitais, que estão localizados na interação entre teoria e prática. A seguir conheceremos uma das experiências dos autores, que demonstra a importância do trabalho com projetos.

O referido projeto é sobre o *Making Movies*, em que os professores trabalharam em grupos na produção de vídeos para comunicar uma importante ideia educacional. Neste projeto, os próprios docentes escolheram seus temas de trabalho, não se limitando somente ao currículo a ser cumprido no período letivo. Assim, em vez de aprender a habilidade descontextualizada de criação e edição de vídeo digital, os professores tiveram que aprender a tecnologia no contexto da comunicação na compreensão de ideias maiores, que formam a base da sua própria prática. Já os estudantes passaram a maior parte de seu tempo em grupos de discussão ou debatendo suas ideias a respeito dos *storyboards*, filmagens, digitalização, edição e revisão. O que evidenciamos é que tanto professores quanto os alunos foram além da produção de um vídeo, ambos se tornaram indivíduos que produzem e compartilham conhecimento.

Um desafio dos tempos atuais é o futuro professor proporcionar a interatividade dessas tecnologias. É preciso, então, continuar despertando o interesse dos futuros professores para uma nova comunicação em sala de aula, pois a educação não se faz sem a participação efetiva dos estudantes, somente transmitindo conteúdos de A para B ou de A sobre B, mas na interação de A com B (SILVA, 2012).

Assim, constatamos que o *TPACK* além de contribuir para articular uma estratégia entre ensino e tecnologias por meio de projetos, também nos embasa teoricamente para estudar o desenvolvimento dos futuros professores entre o conhecimento matemático para o ensino e a tecnologia educacional. Nessa perspectiva, o *TPACK* nos permite dar sentido às relações que existem quando os futuros professores utilizam a tecnologia para o ensino do conteúdo específico. No sentido de ampliar este debate, no próximo tópico abordaremos sobre o uso das tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática.

2.3 Tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática

Considerando que as tecnologias digitais, em especial, computadores conectados à internet, estão cada vez mais presentes na escola, são imprescindíveis estudos que indiquem como melhor utilizar esses recursos. A nossa proposta é que estas investigações ocorram a partir da formação inicial. Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 46) observam que, “[...] se, de um lado, pode ser considerado relativamente simples equipar as escolas com essas tecnologias, de outro, isso exige profissionais que saibam utilizá-las com eficácia na prática escolar”. Os autores advertem que este é um debate também pertinente à Educação Matemática.

Os Laboratórios de Informática Educativa (LIE) já são realidades em praticamente todas as escolas do Brasil. Além disso, o PROUCA, que prevê a distribuição de um *laptop* educacional para cada estudante de escola pública brasileira, está presente no dia a dia de algumas unidades de Educação Básica. Contudo, a presença desses instrumentos nas aulas não garante as mudanças esperadas no cenário da escola. O professor deve refletir sobre como incorporá-los à sua prática docente, tornando-os um recurso de trabalho (CASTRO FILHO, 2007). Por isso, é relevante que este debate comece a partir da licenciatura.

Almeida (2008) detalha que apesar do significativo aumento de laboratórios de informática nas escolas brasileiras, após alguns anos, verificou-se que muitos dos computadores foram subutilizados. Parte das escolas não tiveram acesso à internet e os objetivos pedagógicos não foram levados em consideração, secundarizando a utilização do computador como potencializador do ensino. Ainda de acordo com a autora, os computadores foram subutilizados por distintos motivos que dependem menos da presença da tecnologia na escola e mais de aspectos políticos pedagógicos e de uma adequada formação dos educadores que propicie conhecer tanto as características e principais propriedades intrínsecas das tecnologias, como suas potencialidades pedagógicas e formas de integrá-las ao currículo.

O Brasil se encontra diante do desafio de usar essas tecnologias para efetivar a melhoria da qualidade do ensino, integrando alunos e professores. Nesse sentido, novas estratégias foram criadas, por parte do setor público, na tentativa de incluir todos os segmentos da escola. O fato é que as ações de inclusão digital dos alunos não pararam na implantação de laboratórios de informática. Nessa perspectiva, estamos mudando o conceito de informática educativa, que prevê um computador para muitos alunos, para o modelo um para um (1:1), ou seja, cada aluno e professor passam a ter um computador portátil.

Valente (2011) explica que o modelo 1:1 foi idealizado por Kay no final da década de sessenta, após ter visitado Papert no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), quando esse pesquisador matemático estava iniciando seu trabalho com a linguagem LOGO. Kay ficou impressionado pelo fato de as crianças usarem o computador para resolverem problemas complexos de Matemática e entendeu que cada criança deveria ter o seu computador portátil. Convém destacar que aqui no Brasil para começarmos a adotar essa política demoramos meio século, este fato demonstra como ainda precisamos avançar rumo à utilização pedagógica das tecnologias digitais.

Para o ensino da Matemática, em particular, existem diversos recursos digitais disponíveis que podem auxiliar na construção de conhecimentos matemáticos, recursos relevantes de serem apreciados pelos futuros professores. O uso de *softwares* educativos, objetos de aprendizagem, ambientes virtuais de aprendizagem e ferramentas colaborativas da *web* podem ser integrados ao currículo das licenciaturas, e se tornarem instrumentos e espaços favoráveis para o desenvolvimento de competências matemáticas para os futuros professores. Pesquisas de Mendes (2009), Borba e Penteado (2010) e Bittar (2010) retratam as tecnologias digitais, particularmente o computador, como uma ferramenta para ampliar as possibilidades de ensino e aprendizagem da Matemática.

De acordo com Borba e Penteado (2010) relatam que os *softwares* de Matemática quando utilizados pedagogicamente, podem fomentar o levantamento, a troca, a experimentação e a partilha de ideias pelos aprendizes. Ao compartilhar e articular ideias, os alunos da licenciatura podem ensinar uns aos outros e assim construírem e compreenderem os conceitos matemáticos.

Convém ressaltar, que o modelo de informática educativa que almejamos nas licenciaturas tem como propósito utilizar “[...] a tecnologia integrada ao que acontece na sala de aula, auxiliando o desenvolvimento de conteúdos disciplinares” (ALMEIDA; VALENTE, 2011, p. 5). Diante desta realidade, observam-se esforços no sentido de garantir um bom uso

pedagógico deste equipamento, o que implica na necessidade da formação inicial aos atores do processo. Nessa perspectiva entendemos a formação inicial como um espaço privilegiado para esses debates, pois os futuros professores serão responsáveis por dinamizar e inovar as aulas e os projetos na escola, por meio de práticas pedagógicas que possibilitem novas estratégias de utilização da tecnologia, favorecendo a qualidade da aprendizagem dos estudantes.

Esta nova era que vivenciamos é definida como *web 2.0*, que podemos caracterizar como ferramentas que facilitam uma conexão mais social da *web* e onde as pessoas podem adicionar e editar informações. Em relação às licenciaturas, com a *web 2.0* os futuros professores podem ser co-autores e co-produtores de conteúdos, compartilhando a sua produção com os demais indivíduos imersos na cultura digital. Nessa experiência, a aprendizagem dos licenciandos será produto de trocas de ideias, discussões, compartilhamento de informação e construção social dos conceitos.

Estas transformações da sociedade implicam em reconfigurações adequadas por parte dos cursos de licenciaturas. Dessa maneira, a Universidade precisa (re)pensar em como constituir uma comunidade de aprendizagem e implementar modelos organizacionais que valorizem o papel dos diferentes atores envolvidos no processo educativo.

Nas licenciaturas, as tecnologias digitais podem ampliar os espaços de formação, pois possibilitam uma reflexão colaborativa. Com o suporte destes recursos, os futuros professores podem compartilhar e discutir sobre sua prática, numa perspectiva de desenvolvimento profissional. Com acesso à internet, os licenciandos podem buscar inúmeras fontes de informação, tais como laboratórios de Matemática virtuais, grupos de estudo e de pesquisa no Ensino de Matemática, bibliotecas, dentre outros. Além disso, com essa prática os licenciandos podem interagir com diversas pessoas dentro e fora da Universidade. Outrossim, os futuros professores têm as possibilidades de compartilhar fatos sobre sua prática nas redes sociais ou comunidades virtuais específicas, em espaços onde seus pares poderão ver, comentar e contribuir para uma discussão e reflexão.

Nesse contexto, evidenciamos que estas ferramentas possibilitam que os futuros professores explorem diversas mídias para compartilhar suas experiências. Elencamos como exemplos, a gravação de vídeos didáticos, e compartilhados na rede, geram um debate sobre as estratégias didáticas utilizadas. Deste modo, outros alunos da licenciatura, de outras Universidades, poderão comentar suas impressões e sugestões, caracterizando um espaço de formação colaborativa entre os futuros docentes.

Pesquisas sobre como os futuros professores têm utilizado as TDIC, bem como a finalidade de uso mostram-se necessárias e pertinentes. Importa conhecer as condições que dificultam o êxito ou a existência de experiências com práticas formativas, entre os futuros professores. Arelado a isto, considerando o contexto da Educação Matemática, desvelar experiências com estes recursos contribuem para uma melhoria na formação inicial de professores.

Costa Neto, Giraldo e Rangel (2015) investigaram o currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, quanto à incorporação das tecnologias digitais no sentido do *TPACK*. Os autores realizaram a análise a partir de ementas e bibliografias das disciplinas e de discussões e documentos dos Seminários de Licenciatura em Matemática. Assim, verificaram que a abordagem tecnológica ainda não ocupa um espaço relevante na formação inicial do professor de Matemática, pois as disciplinas oferecidas não contemplam tal abordagem. Os autores complementam que a referida abordagem necessita permear todo o curso e promover a integração entre os conhecimentos tecnológico, pedagógico e de conteúdo.

Rodrigues de Paula *et al.* (2015) apresentaram um planejamento metodológico de uma pesquisa que utilizou como objeto de estudo o uso de *software* no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Para os autores, esta disciplina tem sido apontada como emblemática no que diz respeito ao aproveitamento acadêmico dos estudantes da Educação Superior, comprometendo a regularidade do curso e apresentando grandes índices de reprovação e evasão. Nesse ponto de vista, destacaram alguns trabalhos pesquisados no que tangencia as fragilidades na aprendizagem do conceito de função. Diante desse cenário, conduziram um estudo experimental utilizando ferramentas computacionais com um conjunto de alunos no sentido de avaliar a utilização dessas ferramentas. Os pesquisadores apontaram dificuldades e potencialidades tanto no espaço de ensino formal quanto no ambiente computacional.

Borba e Lacerda (2015) promoveram uma discussão sobre a utilização dos celulares de *smartphones* nas salas de aula, a partir de uma análise de políticas públicas de inserção de tecnologias nas escolas brasileiras. Os pesquisadores questionam a viabilidade dos laboratórios de informática e do Projeto Um Computador por Aluno, que, embora também explore uma tecnologia móvel, possuem altos custos de implementação e manutenção. Como alternativa, os pesquisadores argumentam em favor do que denominaram “Projeto Um Celular por Aluno”, como forma de incorporar as TDIC às salas de aula, considerando que os *smartphones* já estão na escola pelas mãos dos alunos que, dentre outras vantagens, reduziria

os custos de implementação. Neste sentido, os autores fazem uma análise sobre o estado da arte do uso de *smartphones* na Educação Matemática e evidenciam a necessidade de desenvolver novas pesquisas que tragam a aplicação de tais dispositivos tanto para o apoio ao ensino presencial de alunos, quanto para a formação inicial de professores. Concluem o estudo afirmando a necessidade de se pesquisar e discutir modelos de exploração dos *smatphones* com alunos e professores e desenvolver aplicativos e plataformas que apontem as potencialidades da utilização destes dispositivos móveis na Educação.

Martini e Bueno (2014) apresentam um estudo sobre a frequência e a finalidade do uso das TDIC nos cursos de licenciatura em matemática. Os autores coletaram os dados por meio da aplicação de questionário a estudantes dos cursos de licenciatura em Matemática da modalidade presencial e a distância em duas Instituições de Educação Superior. Os pesquisadores destacam como conclusões que as TDIC não são utilizadas regularmente para trabalhar os conteúdos específicos nas duas modalidades; que na modalidade a distância a utilização visa propiciar a interação e a comunicação e não a melhoria da qualidade do ensino; e na modalidade presencial são mais utilizadas para atividades extraclasse.

Ladeira e Rosa (2014) apresentam uma proposta de pesquisa sobre as contribuições de dispositivos digitais no processo de ensino e aprendizagem de funções. Os pesquisadores pretendem analisar o *smartphone* como instrumento mediático, descrevendo aspectos positivos e negativos de sua utilização em sala de aula, fundamentada em elementos teóricos de cognição corporificada, situada e distribuída e *m-learning*. A expectativa dos autores é, ao final da pesquisa, propor uma metodologia de ensino com a utilização de *smartphones* como um instrumento midiático, além de desenvolver um *app* educativo baseado nas atividades aplicadas durante a pesquisa, tornando aulas sobre funções mais dinâmicas e interativas.

Lopes e Fürkotter (2012) investigaram a formação para o uso das TDIC nos cursos de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paulista. Os pesquisadores adotaram como instrumentos metodológicos: questionário, aplicado a alunos do último ano da licenciatura, e entrevista, aplicada a coordenadores de curso e a professores que ministraram disciplina de formação para o uso das TDIC a esses estudantes. Os autores relatam a análise do uso das TDIC em estágios curriculares e abordagem de uso pedagógico dessas tecnologias, buscando compreender sobre o papel atribuído pelos participantes às tecnologias. Na análise, encontraram elementos que evidenciam o paradigma instrucionista, que reproduz e mantém o ensino tradicional, atribuindo às tecnologias o papel de recursos

para exposição e transmissão do conteúdo.

A partir das pesquisas mencionadas, percebemos a relevância e demanda de pesquisas sobre o uso das tecnologias na formação inicial de professores de Matemática. É uma área com um potencial muito grande de crescimento e aplicação. A partir dos referidos trabalhos evidenciamos quatro aspectos relevantes:

- a) a abordagem tecnológica ainda não ocupa um espaço relevante na formação inicial do professor de Matemática;
- b) a utilização dos referidos recursos visa propiciar a interação e a comunicação e não a melhoria da qualidade do ensino;
- c) na formação inicial, geralmente, às tecnologias têm um papel de recursos para exposição e transmissão do conteúdo; e
- d) estão sendo realizados estudos teóricos e empíricos com tecnologias digitais (móveis ou fixas) na formação inicial visando à melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Nos três primeiros casos, consideramos necessário um avanço no que diz respeito as estratégias que efetivamente explorem as possibilidades das tecnologias digitais na formação inicial, garantindo momentos de aprendizagem dos conceitos matemáticos. O último caso, consideramos que é um caminho para tornar o uso das tecnologias mais eficientes nas licenciaturas e consequentemente melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática. Em nossa pesquisa, utilizamos as tecnologias como uma ferramenta de representação e compreensão de conceitos e não somente como uma ferramenta de comunicação.

No capítulo seguinte, apresentamos sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas que fundamentou as discussões entre os participantes que, mediadas pela ferramenta multimidiática, oportunizaram uma experiência colaborativa com os futuros professores.

3 O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

No presente trabalho, a discussão sobre as estruturas multiplicativas está focada nas contribuições de Vergnaud (1983, 1993, 2009), advinda de sua Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Após uma discussão sobre a TCC, o campo conceitual das estruturas multiplicativas, o pensamento funcional e um levantamento de trabalhos acadêmicos serão apresentados.

3.1 Teoria dos Campos Conceituais

A TCC, elaborada por Vergnaud (1983, 1993), preconiza que um conceito não pode ser contemplado e apreendido em uma única situação e que numa única situação estão presentes vários conceitos e estes podem compor uma rede de relações. De acordo com Vergnaud (1983), não faz sentido referir-se à formação do conceito, mas sim à formação de um campo conceitual, cuja apropriação requer o domínio de diversos conceitos de naturezas diferentes.

Vergnaud (1991, p. 135) enfatiza que “[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino. É através de situações e de problemas que um conceito adquire sentido para o aluno.” Vergnaud define um conceito como um conjunto de três subconjuntos, $C = (S, I, R)$, em que: S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência); I é o conjunto dos invariantes operatórios, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação que intervêm nos esquemas de tratamento das situações (o significado); e R é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem a representação do conceito e de suas propriedades, das situações às quais ele se aplica e dos procedimentos de resolução destas situações (o significante).

Este referencial teórico visa possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, especificamente, com referência à aprendizagem da Matemática. Permite, ainda, situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as relações existentes nos conceitos matemáticos. Trata-se de uma teoria cognitivista que oferece alguns princípios para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências matemáticas (VERGNAUD, 1991).

A TCC é uma contribuição para a Educação Matemática, pois mostra a atividade matemática para além da aplicabilidade, meramente, instrumental, mas seu uso em diversas

situações. Frequentemente, a sociedade anuncia que o ensino de Matemática deve ser abordado de forma contextualizada, entretanto não podemos esquecer que esta disciplina possui uma existência própria, que seu contexto pode estar nela mesma, e que o seu estudo agrega importantes subsídios ao desenvolvimento dos indivíduos (CARAÇA, 2000). No contexto escolar, essa teoria contribui para que os professores compreendam como os estudantes elaboram suas hipóteses e como articulam um campo de conceitos.

Vergnaud (1991) trabalhou com o campo conceitual das estruturas aditivas, que é o conjunto das situações que pedem adição, subtração ou a combinação de tais operações; e das estruturas multiplicativas, que é um conjunto de situações que abordam multiplicação, divisão ou a combinação de tais operações.

De acordo com Vergnaud (2009), o sujeito ao ser apresentado a novas e variadas situações recorre ao seu repertório de ideias para solucionar os problemas, que são considerados os esquemas do indivíduo. Santos (2012) aponta que o esquema atende a uma organização feita pelo próprio aprendiz, que tem como objetivo conduzir o processo de resolução de uma dada situação. Sendo assim, é possível destacar duas classes dessas situações: uma em que o sujeito dispõe em seu repertório de competências necessárias para o seu tratamento imediato; e outra em que o mesmo não dispõe em seu repertório de competências necessárias para o seu tratamento. (SANTOS, 2012).

Nessa perspectiva, há casos em que é necessária uma ampliação dos esquemas, em outros, o desenvolvimento de novas estratégias. Nesse processo, percebemos que os esquemas podem ou não ser utilizados em outros contextos. Isso acontece, por exemplo, com a transição entre adição e subtração para a multiplicação e divisão, que têm propriedades e natureza matemática diferentes e geralmente a escola reduz a multiplicação a apenas adições repetidas e a divisão a subtrações sucessivas. Este fato acaba gerando uma dificuldade quando os estudantes se deparam com situações que vão além deste contexto.

Assim, é relevante destacar os invariantes operatórios que são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Por sua vez, o esquema é a organização dos invariantes operatórios utilizados pelo indivíduo e, portanto, configura-se como elemento fundamental para que desenvolva e apreenda os conceitos.

Gitirana *et al.* (2014, p, 17-18) salienta que:

Os invariantes podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, eles podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema), além dos relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão

ligados a uma concepção, isto é, são expressos por palavras ou por outras representações simbólicas.

Vergnaud (2001), por sua vez, afirma que os invariantes operatórios são os conhecimentos contidos nos esquemas de ação do aprendiz. Esses conhecimentos são designados por teorema-em-ação e conceito-em-ação, que indicam uma categoria central para o desenvolvimento dos invariantes operatórios. Os teoremas-em-ação são as relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para a resolução de um problema. Os conceitos-em-ação são objetos, ou seja, uma categoria de pensamento, tida como relevante, que elencamos como exemplo as grandezas e magnitudes, valor unitário, razão e fração, função e variável, taxa constante, dependência e independência, quociente e produto de dimensões.

Gitirana *et al.* (2014) aponta que os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque muitos não têm validade matemática. Eles estão implícitos ao comportamento dos discentes, aparecem de modo intuitivo em suas ações. Algumas vezes, seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas, como no caso da concepção de que “[...] ao multiplicar um número por outro, no contexto dos naturais, se obtém sempre como resultado um número maior” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 22).

Neste contexto, as autoras supracitadas consideram os teoremas-em-ação como um caminho para o professor entender as estratégias intuitivas dos estudantes e ajudá-los na transformação do conhecimento empírico em conhecimento teórico. Desse modo, é possível trabalhar situações que permitam a eles consolidar conhecimentos, estendê-los, perceber seus limites e superar eventuais dificuldades. De acordo com Moreira (2002), existe uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Discorridas as categorias centrais da teoria de Vergnaud, no próximo tópico debateremos o campo conceitual das Estruturas Multiplicativas, suas situações e tipos de problema e resolução.

3.2 Estruturas multiplicativas

No campo conceitual das Estruturas Multiplicativas, o indivíduo desenvolve um campo de conceitos que lhes dão sentido num campo de problemas. Para Vergnaud (1991),

este campo conceitual consiste nas situações de multiplicação e divisão. O autor afirma ainda que diferentes conceitos matemáticos estão relacionados a estas situações, como: função linear, bilinear e n-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, proporção, taxa, número racional, combinação, produto cartesiano, área, volume, isomorfismo, entre outros.

Convém registrar que, de um campo conceitual para outro, os invariantes e a forma de operar podem se modificar. Elencamos como exemplo a ideia de que uma multiplicação de fatores distintos sempre gera um número maior, assim como na adição de números positivos. Para o campo conceitual multiplicativo essa hipótese é válida somente para os números naturais, passando para o conjunto dos números racionais a referida hipótese é desconstruída. Por exemplo, a multiplicação $0,3 \times 0,7 = 0,21$, diferente da adição $0,3 + 0,7 = 1$. Nesse contexto, observamos que se inaugura um novo campo conceitual de naturezas distintas.

Vergnaud (1996) afirma que as relações multiplicativas têm várias classes de problemas, onde é importante distinguir tais classes e analisá-las cuidadosamente, ajudando deste modo o estudante a reconhecer as diferentes estruturas de problemas, encontrando assim procedimentos apropriados para sua solução. Assim, para organizar as possíveis situações, os problemas de estruturas multiplicativas foram classificados conforme as relações estabelecidas entre os entes envolvidos. Sobre essas classificações, debateremos a seguir.

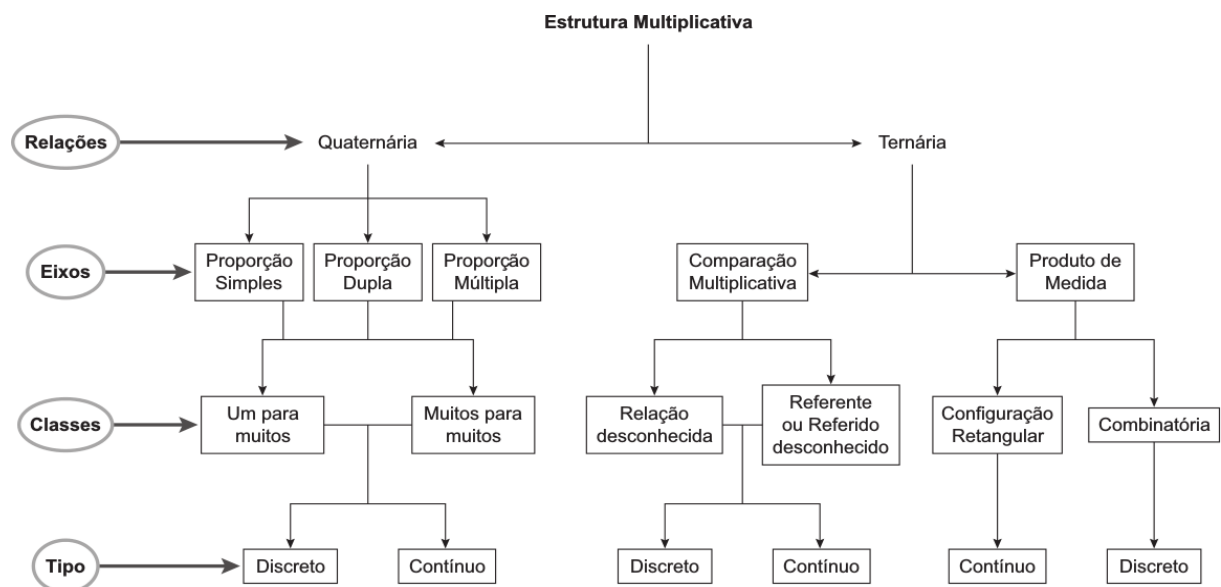
3.2.1 Os problemas do campo multiplicativo

A partir dos princípios de base da Teoria do Campo Conceitual Multiplicativo de Vergnaud (1991) e Magina, Merlini e Santos (2016) revisitaram um diagrama adaptando as ideias centrais desse campo. Segundo os autores, o diagrama sintetiza os diferentes conjuntos de situações desse campo e contribui para a formação docente, no que diz respeito ao Campo Conceitual Multiplicativo. O diagrama organiza os problemas conforme as relações quaternárias e ternárias, o tipo (eixo), as classes e a natureza das quantidades (discretas ou contínuas). A seguir, trataremos de forma mais detalhada a abordagem dos seguidores de Vergnaud.

3.2.2 Relações quaternária e ternária

O esquema revisitado por Magina, Merlini e Santos (2016), está dividido em duas relações, quais sejam, quaternárias e ternárias (VERGNAUD, 1991). A primeira relação, é formada por três eixos: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla, e a segunda é formada por dois eixos: o de comparação multiplicativa e o de produto de medidas. Cada eixo encontra-se subdividido em duas partes, totalizando dez classes com dois tipos de quantidades cada uma: as discretas e não discretas. Temos uma exceção na classe de combinatória. Abaixo segue a sistematização do referido esquema.

Figura 2 – Esquema de classificação de problemas do campo multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69)

Iniciaremos nosso debate tratando sobre as relações ternárias e quaternárias. Para tanto, adotamos o seguinte exemplo:

Problema 1 - *Uma passagem de ônibus, na cidade de Fortaleza, custa R\$ 2,20. Quanto pagarei por 8 passagens?*

De acordo com Santos (2012), o professor para explicar este tipo de situação se apoia em uma relação ternária: $a \times b = c$ ($2,20 \times 8 = 17,6$). Entretanto, o que está implícito, nessa situação, é uma relação quaternária entre duas quantidades de naturezas distintas que pode ser representada da seguinte maneira:

Figura 3 – Relação quaternária na resolução do Problema 1

Passagem		Valor
1	↔	2,2
8	↔	x

Fonte: Elaborada pelo autor.

O problema explícito acima pode ser classificado como uma relação quaternária. Nesse caso, temos uma dupla relação entre duas grandezas, quais sejam, passagem e valor. A referida relação pode possibilitar aos discentes compreenderem o motivo de se multiplicar uma quantidade pela outra – passagem e valor - e o resultado ser obtido em reais e não em passagens. Já as relações ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos que se compõem para formar um terceiro elemento. Por exemplo, multiplicamos metros por metros resultando metros quadrados ou, ainda, homens atletas por mulheres atletas produzindo pares de atletas. A seguir explicitaremos mais um exemplo que retrata a relevância de abordar um problema a partir da relação quaternária.

Problema 2: *De Fortaleza à Senador Pompeu, interior do Ceará, são duzentos e setenta e cinco quilômetros. O carro de Júnior consome doze litros de gasolina por cento e vinte quilômetros rodados. Quantos litros o carro dele consumirá na viagem de ida?*

Neste problema, a distância a ser percorrida na viagem é de 275km e precisamos descobrir qual o consumo de combustível, se a cada 120km sabemos que o carro consome 12l. Que pode ser explicitada da seguinte forma:

Figura 4 – Relação quaternária na resolução do Problema 2

Km		litros
275	↔	x
120	↔	12

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebemos que neste problema não faz sentido pensar no produto direto entre as duas quantidades ($a \times b = c$), mas sim na relação multiplicativa que existe entre elas, duas a duas, ou seja, em uma relação quaternária.

As estratégias de resolução presentes nestes casos, relevantes para nosso trabalho, são os fatores escalar e funcional; a invariância e a covariação. O fator escalar considera a relação entre uma única grandeza e o funcional considera a relação entre duas ou mais grandezas. A invariância corresponde à compreensão do operador funcional, a covariação está associada à compreensão dessa relação no conjunto de dados, o que necessita da percepção do operador funcional e escalar.

Os debates levantados demonstram as diferentes estruturas presentes em situações do campo conceitual multiplicativo, verificando, especialmente nas relações quaternárias: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla; relações funcionais e escalares que se associam à invariância e à covariação, e que, por sua vez, associam-se à ideia de função. Devido a essas características, a seguir discutiremos somente os eixos que fazem parte das relações quaternárias.

3.2.2.1 Proporção simples: do pensamento proporcional ao funcional

A proporção simples, trata de uma relação quaternária e pode ser subdividida em duas classes, quais sejam, correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos (MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2012).

Problema 3 – *A receita do bolo de cenoura de Lis leva 1 copo de leite para 3 cenouras. Ela vai fazer um bolo com 5 copos de leite. Quantas cenouras ela precisará para fazer seu bolo corretamente?*

Neste problema, temos o caso de 1 copo de leite que está relacionado com 3 cenouras; assim como 5 copos de leite estão relacionadas a uma quantidade de cenouras a qual se deseja descobrir, mantendo-se a mesma razão. De acordo com Gitirana *et al.* (2014), na situação de proporção simples, as razões entre as medidas das grandezas têm que ser as mesmas, assim conhecendo o fator escalar, o estudante pode utilizá-lo na comparação de outra grandeza.

Figura 5 – Proporção simples – operador escalar na resolução do Problema 3

<i>Ração</i>	<i>C. de Leite</i>	<i>Cenouras</i>	<i>Ração</i>
$\times 5$	1	3	$\times 5$
	5	?	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como descrito acima, o fator escalar pode ser identificado na mesma grandeza ao compreender quantas vezes a unidade aumentou, no caso do copo de leite teve um aumento de cinco vezes, ou seja, o fator escalar é 5, daí ao multiplicarmos o atual número de cenouras por este escalar encontramos a quantidade desejada para o bolo.

O mesmo problema pode ser resolvido pelo fator funcional, que relaciona as duas grandezas, ou seja, leite com cenoura.

Figura 6 – Proporção simples – operador funcional na resolução do Problema 3

<i>C. de Leite</i>	<i>Ração</i>	<i>Cenouras</i>
1	$\times 3$	3
5	$\times 3$	?

Fonte: Elaborada pelo autor.

O fator funcional está relacionado na horizontal, ou seja, copos de leite com cenouras, daí deduzimos que o operador funcional é três. Vergnaud (1991, p. 210), destaca que “[...] a análise horizontal está em um nível conceitual mais complexo, e essa é uma das razões para a dificuldade dos estudantes na compreensão da noção de função”. Este fato justifica a nossa escolha em focar no conceito de funções que detalharemos mais adiante. A seguir debateremos a classe muitos para muitos.

Problema 4: *Fabíola usa 7 goiabas para fazer 2 litros de suco. Quantas goiabas ela precisa para fazer 6 litros do mesmo suco?*

De acordo com o diagrama de Vergnaud (1991), o problema pode ser representado da seguinte maneira:

Figura 7 – Proporção simples – operador escalar na resolução do Problema 4

<i>Razão</i>	<i>L. de Suco</i>	<i>Goiabas</i>	<i>Razão</i>
$\times 3$	2	7	
	6	?	$\times 3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, a razão entre os litros de suco é um número inteiro. Assim, podemos afirmar com base em Gitirana *et al.* (2014, p. 66) que os estudantes podem utilizar mais facilmente o teorema em ação que corresponde à “propriedade linear da proporcionalidade”, aplicando a razão entre as medidas da mesma grandeza. Analisando o teorema em ação temos que: $f(6 \text{ litros}) = f(3 \times 2 \text{ litros}) = 3 \times f(2 \text{ litros})$. Assim, o estudante utiliza o teorema em ação com uma medida diferente da unidade. A seguir, apresentamos a resolução do problema por meio do operador funcional.

Figura 8 – Proporção simples – operador funcional na resolução do Problema 4

<i>Litros de Suco</i>	<i>Razão</i>	<i>Goiabas</i>
2	$\times 7/2$	7
6	$\times 7/2$	?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nessa representação percebemos a ausência da relação partindo de unária. Embora o indivíduo possa fazer essa conversão, ela torna o problema mais complexo, comparado à proporção simples. Dessa maneira, existem situações em que não há sentido a conversão para a unidade. Esse é o caso de problemas que envolvem valores que não sejam múltiplos. Neste caso, o uso do fator funcional torna o problema mais complexo do que a utilização do fator escalar, pois na relação funcional tivemos que trabalhar com números fracionários que é uma grande dificuldade dos estudantes da licenciatura.

Nessa perspectiva, mesmo em determinado momento, encontrar um operador escalar ou funcional seja mais difícil, consideramos relevante a coordenação entre ambos os operadores, pois é a partir desses conceitos que os futuros professores poderão compreender

os conceitos de covariação.

A partir do que foi debatido, percebemos que em vez de utilizar regras práticas e sem significado para os estudantes é mais aconselhável o professor levar o discente a entender o processo de resolução. A seguir discutiremos sobre proporção dupla.

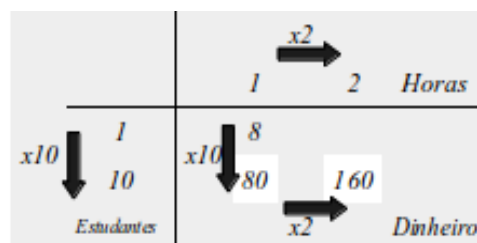
3.2.2.2 *Proporção dupla: do pensamento proporcional ao funcional*

A proporção dupla apresenta situações com, pelos menos, três grandezas em que um par é independente do outro. Esses tipos de problemas são evidenciados no trabalho com regra-de-três composta. O que podemos destacar no problema seguinte:

Problema 5: *Os estudantes da Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática da UFCA irão para uma aula de Biologia na Chapada do Araripe, até determinado ponto da chapada eles podem explorar livremente, mas chega um momento que cada estudante tem que pagar R\$ 8,00 para visitar durante cada hora a segunda parte da Chapada. Sabendo que para a aula irão 10 estudantes e ficarão durante 2 horas na segunda parte da Chapada, quanto será o valor total para todos os estudantes?*

Neste tipo de problema, é possível diminuir o número de horas, sem alterar a quantidade de estudantes, pois as grandezas são dependentes duas a duas. A relação de dependência e variância são aspectos essenciais para a compreensão do conceito de funções. Mas estudantes e horas não têm nenhuma relação direta. A exploração dessa classe de problemas é fundamental para o desenvolvimento do pensamento proporcional ao funcional dos estudantes. A organização do problema 5 pode ser representada conforme a figura abaixo:

Figura 9 – Proporção dupla para resolução do Problema 5



Fonte: Elaborada pelo autor.

O esquema acima demonstra a bilinearidade das funções envolvidas na situação do problema 5. Assim, seguindo o modelo de uma função bilinear temos que $f(x,y) = 8xy$, em que 'x' representa a quantidade de estudantes e 'y' a quantidade de horas.

Ao analisarmos esse problema constatamos a invariância e, portanto, a covariação presente no exemplo. Para a resolução do problema os futuros professores devem trabalhar com a relação entre as relações. Nesse problema foi necessário encontrarmos a taxa de replicação entre estudantes e o valor a ser pago no Parque e depois o valor a ser pago por horas. Como nos problemas de proporção simples, as situações que envolvem proporção dupla também podem ser da classe um-para-muitos e muitos-para-muitos.

3.2.2.3 Proporção múltipla: do pensamento proporcional ao funcional

A proporção múltipla é uma relação quaternária que envolve mais de duas quantidades relacionadas duas a duas. Convém destacar que, ao alterarmos o valor de qualquer das grandezas envolvidas, alteram-se todas elas. O que podemos destacar no caso seguinte:

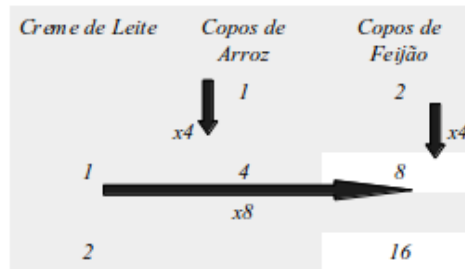
Problema 6 – *Na Região do Cariri, interior do Ceará, há uma tradição de se preparar o baião molhado. O referido prato contém como ingredientes principais: arroz, feijão e creme de leite. No restaurante do seu Gil Bila, o preparo acontece da seguinte maneira: para cada caixa de creme de leite ele usa 4 copos de arroz e para cada copo de arroz, 2 copos de feijão. Para preparar o baião usando 2 caixas de creme de leite, quantos copos de feijão ele precisará?*

Percebemos que, se o seu Gil Bila alterar a quantidade de creme leite, terá que alterar também a quantidade de arroz e de feijão. Por sua vez, se alterar a de feijão terá que alterar as demais, assim, existe uma proporção simples - duas a duas - entre as quantidades apresentadas. Convém ressaltar que todas as quantidades envolvidas estão relacionadas.

No referido problema, temos a quantidade de caixas de creme de leite, por uma taxa de 4 copos de arroz por caixa. A quantidade de copos de arroz se relaciona com a quantidade de copos de feijão por outra taxa, qual seja, 2 copos de feijão por copo de arroz. A composição dessas duas proporções simples origina outra relação de proporcionalidade entre a quantidade de creme de leite e a quantidade de copos de feijão. Essa composição é também uma proporção simples. Nesse contexto, observamos também mais uma taxa que relaciona a quantidade de creme de leite com a de copos de feijão. Elencamos, como exemplo, para 1

caixa de creme leite temos 8 copos de feijão. Convém ressaltar que a abordagem por meio da taxa ou operador funcional é fundamental para os futuros professores passarem do pensamento proporcional para o pensamento funcional. Vejamos no diagrama:

Figura 10 – Proporção múltipla para a resolução do Problema 6



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos uma covariação entre as três quantidades, pois, por meio do operador funcional, verificamos que precisamos de 4 copos de arroz por caixa de creme de leite. O mesmo pode ser verificado entre feijão e arroz, em que constatamos que temos 2 copos de feijão para cada copo de arroz. Também podemos relacionar creme de leite com feijão, em que obtemos ao multiplicar os operadores funcionais da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 4x$ e da função $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(x) = 2x$. Assim, em termos funcionais temos $f(g(x)): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que: $f(g(x)) = 4 \cdot 2x \rightarrow f(g(x)) = 8x$.

Podemos constatar que o valor da unidade entre caixas de creme de leite e copos de feijão é o produto dos valores da unidade. Para cada caixa de creme de leite temos 8 copos de feijão. Isso foi obtido quando utilizamos a razão. Nesse sentido, se dobrarmos o número de caixas de creme de leite dobramos também o número de copos de feijão, ou seja, precisaremos ao todo de 16 copos de feijão.

A partir do que foi debatido, percebemos que nas situações quaternárias envolvendo o raciocínio multiplicativo existe uma relação fixa entre duas quantidades, ou seja, as situações multiplicativas envolvem duas quantidades de naturezas iguais ou distintas, e uma relação constante entre elas (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). Esta característica vai ao encontro do pensamento funcional, foco da presente pesquisa, que também envolve a relação entre duas grandezas. Ainda de acordo com os autores, este tipo de problema amplia os procedimentos de resolução do fator funcional, que se configura como conhecimento de base para a apropriação do conceito de função.

Para Vergnaud (1991), o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve os conceitos de funções. Assim, constatamos que o indivíduo ao compreender a coordenação entre os operadores escalar e funcional em uma relação quaternária, está compreendendo a covariação das grandezas de uma função. A covariação é um dos conceitos que está presente nas Estruturas Multiplicativas desenvolvidas por Vergnaud (2009) e consiste em compreender como as quantidades crescem ou decrescem em um mesmo sentido, isto é, engloba relações entre quantidades. Por exemplo, se para fazermos uma torta vegetariana gastamos 6 legumes por torta, para fazermos 4 tortas, usando esta mesma proporção, utilizaremos 24 legumes. Neste problema, ao compreendermos a covariação entre as quantidades de tortas e legumes é possível entendermos os diferentes significados da multiplicação, daí uma das relações entre a covariação e o campo conceitual multiplicativo.

Convém ressaltar que o conceito de função foi escolhido como foco da presente pesquisa por representar um guia efetivo para o desenvolvimento da Matemática. Assim, o quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática, daí a importância do seu estudo mais detalhado na formação inicial.

3.3 O pensamento funcional

Podemos constatar que em situações multiplicativas de proporção simples, dupla e múltipla existem relações funcionais e escalares, ou seja, situações de covariação. Smith (2008) ressalta que atividades que demandam um raciocínio funcional são relevantes para formar o conceito de função.

Segundo Teixeira, Magina e Merlini (2016) as relações funcionais podem ser entendidas como o ato de estabelecer relações entre grandezas. Os autores caracterizam tal ato como consequência de um raciocínio funcional. Assim, o raciocínio funcional pode ser definido como a capacidade de estabelecer a relação entre grandezas (TEIXEIRA; MAGINA; MERLINI, 2016). Em uma situação multiplicativa, quando a quantidade de tortas vegetarianas está relacionada a quantidade de legumes, sendo a primeira quantidade uma variável dependente da segunda quantidade. Dessa forma, se 1 torta precisa de 6 legumes, 9 tortas precisam de 54 legumes e x tortas precisam $6x$ legumes. Esta situação pode ser matematicamente escrita na representação de uma função linear: $f(x) = 6x$.

O raciocínio funcional requer a relação entre duas ou mais grandezas e está presente em situações do campo conceitual multiplicativo com relações quaternárias,

denominadas de proporção simples, dupla e múltipla (MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2016). Nessas situações, é possível fazer uma análise entre as grandezas, correspondente ao operador funcional. O raciocínio funcional presente nas situações multiplicativas quaternárias implica no quociente de dimensões, no caso, do exemplo da torta vegetariana, citado anteriormente, temos legumes por torta(s). Assim, ao compreendermos a relação funcional e estabelecermos o operador funcional, temos o coeficiente de uma função linear.

Na segunda metade do século XVII, o matemático Leibniz utilizou, pela primeira vez, a palavra “função”. Inicialmente, para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação e o raio da curvatura de uma curva (DOMINGUES; IEZZI, 2003). Também se deve a Leibniz a introdução das palavras “variável” e “constante”, hoje, corriqueiras no ensino de funções.

De acordo com Eves (2011), no século XVIII, Bernouilli considerou uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes. O matemático apresentou também a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica. Mas a notação $f(x)$ para indicar uma função foi introduzida por Euler, que ainda considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.

Como indica Eves (2011, p. 661, grifos do autor), Dirichlet numa tentativa de dar uma definição de função ampla, chegou à seguinte formulação:

Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores* da função.

Nesse contexto, percebemos os conceitos de covariação e interdependência como fundamentais para a compreensão do conceito de função. A primeira pode ser entendida como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas da realidade, e ser definida por meio de uma expressão analítica ou por sua imagem geométrica. A segunda é uma característica essencial da realidade. Qualquer objeto ou fenômeno da realidade, do mais simples ao mais complexo, está relacionado e depende de outros objetos ou fenômenos, ainda que tais entrelaçamentos nem sempre sejam identificados por um olhar ou tentativa de compreensão superficial (CARAÇA, 2000). Lima (2008) define esta questão da seguinte maneira:

[...] uma *função* $f: A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A , chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B , chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x (ou no ponto x). (LIMA, 2008, p. 13, grifos do autor).

Ainda de acordo com o autor, não se deve confundir f com $f(x)$, pois f é a função, enquanto $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio. A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições: I) Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in A$; II) Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em B .

O estudo do conceito de função é apresentado como relevante por permitir aos alunos adquirirem tanto a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Tendo como base o PCN da disciplina de Matemática, “[...] a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.” (BRASIL, 2002, p. 121).

Nesse contexto, faremos um estudo centrado na compreensão dos conceitos essenciais de funções, baseado nas ideias do campo conceitual multiplicativo. Convém ressaltar que nossa proposta é tentar levar os alunos da licenciatura a compreenderem a relação de dependência entre duas grandezas, uma variando em função da outra, ou seja a covariação, e também representar tais conceitos de forma algébrica, tabular e gráfica, dentre outros. Nesse sentido, entendemos a covariação como um conceito relevante para compreender o que é uma função.

A partir do que foi debatido, constatamos que a ideia de covariação está relacionada às primeiras investigações sobre o conceito de função. Leibniz, séculos atrás, já havia sistematizado algumas dessas ideias. Convém ressaltar que uma função pode ser abordada na perspectiva da covariação quando duas quantidades diferentes variam em conjunto.

Villa-Ochoa (2011) acrescenta que a covariação é uma atividade cognitiva que envolve a coordenação de duas quantidades que variam, assim compreendemos as formas como cada uma delas muda com referência à outra. O raciocínio covariacional envolve

processos como a formulação de hipóteses sobre a relação entre duas variáveis, a representação gráfica de dados bivariados que evidenciem a identificação de relações (ANTUNES; HENRIQUES, 2013). Elencamos como exemplo duas funções, $r = f(x)$ e $l = g(x)$, a covariação descreve uma relação entre r e l , que é válida para todos os valores específicos de x .

Desta maneira, os futuros professores, ao percebem a covariação entre duas quantidades, são capazes de coordenar a variação das duas variáveis e descrever como uma quantidade muda em relação a outra (CONFREY; SMITH, 1994). Em uma pesquisa realizada por Monk (1992), o autor destacou que os futuros professores mostram uma tendência a focar mais na construção dos gráficos do que em entender o gráfico de uma função como um meio para definir uma relação de covariação entre duas variáveis.

Saldanha e Thompson (1998) descrevem a covariação como o envolvimento da coordenação de duas quantidades; com a percepção de que o valor de uma quantidade varia de acordo com outro. Assim, compreendemos a covariação como um conceito fundamental para o desenvolvimento do pensamento funcional, considerando que problemas desse tipo podem ser representados por meio de uma função: $f(x) = ax + b$, com b igual a zero, ou seja, uma função linear.

Ao abordarmos situações multiplicativas de proporção simples, dupla e múltipla e tendo conhecimento que o “ a ” presente na função linear $f(x) = ax$ é o operador funcional, presente na relação entre as grandezas, podemos levar os futuros professores ao conhecimento especializado de função linear. Para isso os futuros docentes precisam, além de compreender a relação de invariância entre duas grandezas, entender como essa relação varia em conjunto, logo, a necessidade de estabelecer os dois operadores: funcional e escalar. A compreensão da relação com o operador funcional é especialmente importante para a compreensão da covariação (NUNES; BRYANT, 1997).

De acordo com Post, Behr e Lesh (1995), o conhecimento de proporções envolve as situações multiplicativas e de covariação. Uma relação proporcional pode ser representada pela forma algébrica $f(x) = ax$, uma das representações de uma função linear. Os autores abordam que essa representação tem natureza multiplicativa e pode ser representada de maneiras distintas, tais como: tabelas, gráficos, desenhos e diagramas, que constituem formas importantes nas quais podemos representar o raciocínio funcional.

Blanton e Kaput (2004) reforçam que o raciocínio funcional pode ser desenvolvido com a ideia de covariação e de raciocínio proporcional. Essas abordagens

podem acontecer com a exploração de diferentes representações, como tabelas e gráficos e o uso de tecnologias para dar dinamicidade a construção dessas representações (CASTRO, 2016).

Ferreira (1997) já destacava que os estudantes têm dificuldades no ensino de funções por lidar com múltiplas representações e grande quantidade de conceitos, tais como: covariação, par ordenado, domínio e conjunto imagem. A autora complementa que uma boa alternativa para amenizar esses problemas seria trabalhar funções em ambientes computacionais. Magalhães (2009) salienta que os ambientes tecnológicos permitem uma dinâmica de manipulação que não pode ser alcançada com o uso de lápis e papel.

Nessa perspectiva, Borba e Penteado (2010, p. 31-32) sublinham que,

[...] usualmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra. Assim, é comum encontrarmos em livros didáticos um grande destaque para a expressão analítica de uma função e quase nada para os aspectos gráficos ou tabulares. Tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação.

Ainda de acordo com Borba e Penteado (2010), no início da década de 90, a abordagem para funções começa a ser bastante questionada, daí começa a ser pesquisado sobre as representações múltiplas para o ensino deste conteúdo. Os autores enfatizam que o importante não é privilegiar apenas um tipo de representação, e sim diferentes representações para uma mesma função: a expressão algébrica, o gráfico e a tabela.

É relevante ressaltar que, além de trabalhar com cada uma das representações de forma isolada, devemos abordar as coordenações entre elas, como um novo caminho para o conhecimento de funções, ou seja, uma epistemologia das representações múltiplas, que variam de forma conjunta. Dessa maneira, entender funções passa a significar saber coordenar representações e compreender a covariação que existem entre elas. Essa nova abordagem ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados à tabelas e expressões algébricas.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o ensino de funções pode ter como ponto de partida a exploração das relações entre grandezas em diferentes situações, ou seja, podemos partir ilustrando as características da covariação. Que podemos elencar como exemplo: a idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida, entre outros. O documento destaca a importância de estimular os alunos para que apresentem outras relações funcionais e indica a importância de explorar o estudo de funções, mediante diferentes representações, como a gráfica, a algébrica e a língua

materna, bem como as implicações decorrentes no gráfico de uma função quando se alteram seus parâmetros, identificando os movimentos realizados pelo gráfico quando se modificam os coeficientes da função.

Diante da importância e dificuldades no desenvolvimento do pensamento funcional, no próximo tópico apresentaremos um levantamento de trabalhos (estado da questão) que abordam o desenvolvimento do pensamento funcional a partir do uso de tecnologias digitais. Desta maneira, procuraremos evidenciar na pesquisa aqui relatada um possível caminho para a melhoria do ensino de funções.

3.4 Estado da questão

Para a realização de uma investigação científica, devemos levar em consideração diversos fatores, dentre eles destacamos a relevância de nosso estudo na área na qual se insere. A fim de identificar parâmetros e resultados em pesquisas correlatas que nortearão o desenvolvimento da nossa investigação, realizamos o estado da questão. Nóbrega-Therrien e Therrien (2010, p. 34) apontam que,

[...] o estado da questão é uma maneira que o estudante/pesquisador pode utilizar para entender e conduzir o processo de elaboração de sua monografia, dissertação ou tese, ou seja, de produção científica, com relação ao desenvolvimento de seu tema, objeto de sua investigação. É um modo particular de entender, articular e apresentar determinadas questões mais diretamente ligadas ao tema ora em investigação.

Assim, objetivando identificar as pesquisas sobre estruturas multiplicativas, formação de professores e tecnologias digitais, foi procedido um levantamento de trabalhos - teses, dissertações - publicados no período de 2011 a 2015. Delimitamos esse tempo de levantamento pela compreensão de que o período de cinco anos inclui os trabalhos mais atualizados, além de ser necessário um recorte para uma pesquisa.

Procedemos um levantamento de pesquisas em nível de pós-graduação *stricto sensu*. Para esse levantamento, tomamos como base de dados nacional o Banco de Teses² da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Este repositório, congrega trabalhos, resultados de pesquisas de mestrados acadêmicos e profissionais, bem como teses de doutorado de Instituições de Educação Superior (IES) de todas as regiões do Brasil, nas diversas áreas. Para identificar os trabalhos sobre o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, colocamos a expressão “Teoria dos Campos Conceituais” e

² Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/>. Último acesso em 05/12/2016.

posteriormente para ampliar a identificação de trabalhos sobre funções, colocamos a expressão “Função”.

Em relação à TCC, a pesquisa no Banco de Teses da CAPES resultou em quarenta registros, entre dissertações e teses. A partir desse número de trabalhos, buscamos identificar aqueles que se aproximassem aos objetivos desse estudo. Encontramos trabalhos que exploraram a Teoria dos Campos Conceituais desde os anos iniciais do Ensino Fundamental à Educação Superior. Mesmo a Teoria citada tendo sua base no ensino de Matemática, ressaltamos que foram localizados trabalhos com este aporte teórico para o ensino de outras disciplinas. Dessa maneira, como recorte, foram consideradas as pesquisas realizadas com formação docente, tecnologias digitais para o ensino de conteúdos ligados às estruturas multiplicativas. A partir do critério de seleção, obtivemos dez pesquisas que serão detalhadas posteriormente.

Na busca realizada com o descritor “função” no Banco de Teses da CAPES obtivemos quatrocentos e oitenta e cinco trabalhos, entre dissertações e teses. É oportuno registrar, que o número elevado de trabalhos identificados se deve ao fato do vocábulo “função” ser empregado com outras conotações em diferentes áreas, por exemplo em “Função Social da Escola”. A partir desse número de trabalhos, identificamos aqueles que se aproximassem aos objetivos desse estudo. Dessa maneira, como recorte, foram consideradas as pesquisas realizadas com formação docente ou tecnologias digitais para o ensino do conteúdo de função. A partir do critério de seleção, obtivemos duas pesquisas que serão detalhadas posteriormente.

3.4.1 Pesquisas de mestrado e doutorado coletadas no repositório da CAPES

Motta (2011) apresentou um estudo sobre relações entre a teoria e a prática em um contexto de reforma curricular, a partir da investigação sobre como professores reelaboram seus saberes docentes com base na proposta de trabalho com a Teoria dos Campos Conceituais. O autor debateu sobre como as reformas educativas das últimas décadas influenciaram os movimentos de profissionalização do professor e a discussão sobre os saberes docentes.

A análise das entrevistas mostrou o enredamento dos relatos dos docentes em uma trama de relações interativas, constitutivas da construção dos saberes docentes: a história de vida do professor, as diversas fontes de sua formação pessoal e profissional e suas práticas

pedagógicas. De acordo com o autor, os participantes da pesquisa relataram a relevância da interação entre os pares, na escola e em cursos de formação continuada como forma privilegiada de desenvolvimento profissional e uma reformulação de seus próprios sistemas conceituais.

Silva (2011), ao desenvolver sua pesquisa de mestrado estudou sobre o conhecimento dos alunos da Licenciatura em Matemática no que se refere à construção gráfica de diversas funções aplicando conceitos de transformações geométricas no plano e a sua capacidade para aplicá-la em situações-problemas. Para esta investigação, o pesquisador se fundamentou na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e no uso das tecnologias no ensino da Matemática.

Silva (2011) aplicou uma sequência com alunos do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática. A sequência didática foi dividida em três etapas (Teste Diagnóstico, Intervenções e Teste Final). Os recursos tecnológicos utilizados nas intervenções foram o *software* Winplot, o Kit Virtual de Apoio (KVA), que é o produto dessa pesquisa, além do uso de papel e lápis. Com os resultados finais, o autor constatou um avanço significativo quanto ao tópico funções, especificamente, no traçado de gráficos através das transformações geométricas no plano e sua aplicação em situações do cotidiano.

Oliveira Filho (2011) analisou as concepções de professores de Matemática que lecionam no sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental e integram o Projeto Observatório da Educação, sobre o ensino dos números racionais na representação fracionária. Para a coleta de dados, o pesquisador realizou entrevistas com seis professores participantes do Projeto.

Esta pesquisa de Mestrado foi fundamentada em estudos realizados por Schön (1983) sobre a reflexão de professores acerca de suas práticas e nas discussões a respeito do conhecimento profissional docente de Shulman (1986), Tardif (2000) e Ponte (1992). A dissertação trouxe ainda estudos que discutem questões relacionadas ao ensino dos números racionais na representação fracionária, como a classificação proposta por Nunes (2003) e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991).

A análise dos dados permitiu verificar que os professores introduzem o tema fundamentalmente por meio do significado parte-todo. Além disso, o autor observou que os docentes pesquisados utilizam representações gráficas para introduzir a noção de equivalência de frações e justificar, assim, a adição e subtração. Por outro lado, os referidos professores não apresentam explicações para o trabalho com a multiplicação e divisão de frações, preferindo introduzir essas operações apenas por intermédio dos algoritmos.

Costa (2011) analisou as concepções e competências de professores de Matemática no que diz respeito ao conceito de fração. O autor, que também se dedicou à temática em sua dissertação de Mestrado, abordou em sua pesquisa os pressupostos de Vergnaud contidos na Teoria dos Campos Conceituais e as ideias teóricas de Kieren e Nunes no que se refere aos diferentes significados da fração.

Em seguida, elaborou um instrumento diagnóstico composto de quatro unidades, quais sejam, o perfil, a elaboração de situações-problema, as respostas das situações-problema e competências. Esse instrumento foi aplicado a 21 professores que foram divididos em dois grupos. Em relação à concepção, os professores dos dois grupos apresentaram uma concepção restrita de fração, voltada apenas para dois significados: parte-todo e operador multiplicativo. Além disso, houve uma ênfase em tratar fração apenas do ponto de vista do algoritmo.

Lehmann (2011) desenvolveu em sua pesquisa uma sequência didática que pudesse auxiliar os licenciandos em Matemática no processo de ensino e aprendizagem em relação ao conceito de derivada como taxa de variação instantânea. Nessa perspectiva, a autora fez uma análise dos conhecimentos dos alunos a respeito de funções, gráficos e taxas de variação, conceitos necessários para o entendimento dos assuntos tratados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

A pesquisadora dividiu sua investigação que resultou na dissertação de Mestrado em três etapas: na primeira, foi aplicado um teste diagnóstico, no qual se abordaram conteúdos considerados básicos e necessários para o entendimento de funções e taxa de variação instantânea. A segunda etapa da pesquisa foi composta de três aulas com duas horas de duração cada. Na terceira etapa, foi aplicado novamente um teste diagnóstico que teve como objetivo verificar de que forma os temas abordados na sequência didática puderam auxiliar os alunos no desenvolvimento das questões e na construção do conceito de derivada como taxa de variação instantânea. A análise dos resultados permitiu concluir que, com a sequência didática, os alunos apresentaram desempenho satisfatório e conseguiram assimilar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, além de uma melhor familiarização com a questão das funções e suas diferentes representações.

Lima (2012) apresentou em sua pesquisa uma proposta para o ensino de conceitos do Cálculo Diferencial dirigidos a cursos superiores não voltados à formação de matemáticos, tendo como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais.

A autora utilizou para construção da pesquisa, relatada na dissertação da mesma, uma metodologia híbrida, com caráter descritivo e experimental. No que concerne ao

tratamento dos dados, foi sugerida uma lista de ações e procedimentos para que os discentes possam compreender de maneira mais eficaz os conteúdos específicos da disciplina em questão.

Os resultados nos mostraram que a detecção de alguns invariantes, bem como sua utilização como objeto de aprendizagem, teve uma grande contribuição para a aprendizagem dos alunos. A análise feita em termos de dimensões cognitivas também mostrou que, mesmo nos testes que foram classificados nas dimensões mais complexas, houve um crescimento importante no desempenho dos estudantes.

Pedroso (2012) apresentou uma proposta de ensino de Trigonometria para estudantes do Ensino Médio, baseada na utilização do *software* GeoGebra. O pesquisador avaliou a aprendizagem da Trigonometria propiciada por uma sequência de ensino desenvolvida em um ambiente informatizado e dinâmico.

A metodologia utilizada na pesquisa foi o estudo de caso. As atividades da experiência didática foram aplicadas em duas etapas: inicialmente, com uma turma de 45 alunos e, posteriormente, com um grupo de sete alunos dessa turma.

Pedroso (2012) baseia a análise dos dados na Teoria dos Campos Conceituais, com foco na identificação de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos nas resoluções das atividades. A aprendizagem dos conceitos de ângulo, razões trigonométricas, círculo trigonométrico e funções trigonométricas foi favorecida pelo uso do *software* de Geometria Dinâmica, que propiciou a observação e compreensão de relações entre elementos de uma construção, permitiu a experimentação de hipóteses e elaboração de conclusões. Em sua dissertação de Mestrado, o autor destacou as potencialidades do *software* GeoGebra para o ensino de Trigonometria.

Alencar (2012), por sua vez, analisou o conhecimento profissional docente de professores que ensinam Matemática. Tratou-se de uma pesquisa de campo que envolveu um grupo de cinco professores de uma escola da rede pública de São Paulo. A coleta de dados incluiu a aplicação de um questionário e entrevistas semiestruturadas com a equipe gestora e com os professores, além da observação em sala de aula e protocolos das tarefas realizadas pelos alunos.

A investigação realizada por Alencar (2012) em sua dissertação fundamentou-se tanto em teorias que discutem questões relacionadas à formação de professores como em estudos que investigam questões didáticas sobre a multiplicação e divisão de números naturais. Quanto ao primeiro enfoque, apoiou-se em estudos de Schön (1987), Shulman

(1986) e Tardif e Raymond (2000). Em relação às questões didáticas, associadas ao objeto matemático, utilizou-se a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991).

Os dados revelam que as dificuldades relativas à prática docente foram influenciadas pela falta de domínio dos professores a respeito do conteúdo matemático. Além disso, esta pesquisa indica a necessidade de se rediscutirem as formas de se tratar o Campo Conceitual Multiplicativo nos cursos de formação inicial e continuada de professores.

Santos (2012), em sua tese de doutorado, buscou compreender as contribuições que um processo formativo, pautado na espiral ação-reflexão-planejamento-ação, podem trazer para a reflexão na e sobre a prática de professoras polivalentes no âmbito do Campo Conceitual Multiplicativo. Para tanto, o autor construiu o referencial sustentado em dois pilares teóricos, quais sejam, a Teoria dos Campos Conceituais e as teorias que versam sobre a formação de professores.

A partir de uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi realizada com um grupo constituído por três pesquisadores/formadores e 14 professoras de uma escola da rede pública estadual, do município de São Paulo e foi desenvolvida em duas etapas: a diagnóstica e a formativa. Na primeira etapa o pesquisador investigou as concepções dessas professoras em relação ao ensino e à aprendizagem do Campo Conceitual Multiplicativo; a segunda, por meio da observação participante, procurou investigar as contribuições de um processo formativo para mudanças nas práticas pedagógicas.

Com relação à apropriação e expansão do Campo Conceitual Multiplicativo, a análise das informações forneceu elementos para sustentar que o processo formativo contribui para a resignificação e a ampliação das concepções das docentes em relação ao ensino e à aprendizagem desse campo, tanto do ponto de vista conceitual, didático e cognitivo, como do ponto de vista do seu desenvolvimento curricular. O autor observou que essa aprendizagem se deu na interface de quatro dimensões:

- a) na relação professor-estudante;
- b) na relação professor-professor-pesquisadores/formadores;
- c) no confronto entre a teoria e prática; e
- d) na reflexão sobre a prática pedagógica, sobretudo no processo de reflexão desencadeada a partir da análise compartilhada das práticas de sala de aula.

A resignificação e a transformação das práticas pedagógicas foram sendo percebidas na medida em que avançava a interação discursiva entre todos os participantes nos

momentos das ações: teórica, prática e reflexiva.

Merlini (2012) investigou as contribuições e os limites que um processo formativo, com dimensões colaborativas, proporciona no que tange à reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais do Ensino Fundamental, no âmbito do Campo Conceitual Multiplicativo, e como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1998, 2008).

Para tanto, a pesquisadora realizou um estudo de caso o qual acompanhou uma professora em três momentos distintos: a) no processo formativo; b) na observação de sua aula em que houve a aplicação das situações relativas ao Campo Conceitual Multiplicativo; e, logo em seguida a essa aula, c) na entrevista semi-estruturada realizada com a professora.

Os resultados apontam as contribuições e limitações sob três pontos de vista: didático - a concepção de que a aprendizagem dos estudantes pode ser construída de forma compartilhada, contudo as discussões a respeito das situações que contemplaram a operação de divisão foram insuficientes; conceitual - o desenvolvimento da capacidade de categorizar situações segundo os eixos trabalhados do Campo Conceitual Multiplicativo, em contraponto a elaboração de uma situação de divisão partitiva afirmando, de forma equivocada, que se tratava de uma divisão quotitiva; cognitivo - a necessidade de fazer o estudante entender a situação como um todo, e que sua estratégia de resolução não estivesse atrelada a alguma palavra-chave, no entanto não foi proporcionado aos estudantes situações que contemplassem o modelo de divisão quotitiva, que permitissem gerar outros esquemas cognitivos para sua resolução. Esses resultados levam a concluir que de fato houve expansão dos conhecimentos no Campo Conceitual Multiplicativo por parte da professora, contudo é possível que o limitador maior tenha sido o tempo do processo formativo, que fora restrito.

Vasconcelos (2014) analisou as concepções e práticas da contextualização das representações das funções lineares, por professores de Matemática. A autora adotou os estudos de Vergnaud, Duval e Brousseau como centrais em seu referencial teórico.

O estudo foi realizado a partir de dados coletados por meio de entrevistas, de observações da prática de sala de aula de três professores de Ensino Médio de Escolas Estaduais, localizadas na cidade de Campina Grande, na Paraíba; das anotações dos cadernos de dois alunos dos professores participantes do estudo; e dos livros didáticos por eles utilizados. A análise dos cadernos dos alunos, e das observações, possibilitou a pesquisadora apreciar o trabalho dos professores, na sala de aula, com a contextualização e as representações de uma função linear, e nos livros didáticos avaliou as possíveis contribuições

das propostas neles apresentadas, para o desenvolvimento dos elementos destacados em sua investigação.

A pesquisadora defende que as situações e as representações devem ser desenvolvidas de forma integrada porque compreendem elementos fundamentais na construção de conceitos matemáticos. A análise das informações acerca dos professores revelou uma compreensão limitada do que é contextualização; falta de conhecimento sobre a importância de trabalhar com situações potencializadoras do significado de um conceito e de mobilizar simultaneamente mais de um tipo de representação, na construção de um conceito matemático pelo aluno.

Vasconcelos (2015) em sua tese avaliou o que revelam as pesquisas publicadas nas onze edições do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) ocorridos no período entre 1987 até 2013, em relação ao conceito de função.

A seleção de artigos considerados relevantes para essa pesquisa se deu por dois métodos: dos seis anais das primeiras edições a pesquisadora realizou uma leitura dos anais na íntegra, identificando aqueles centrados no conceito de função; a partir da sétima edição, os anais estavam disponibilizados *on-line* em formato de texto, o que permitiu fazer uma busca pelos descritores: função, funções e álgebra. Além de consultar o título, as palavras-chave, o resumo e o corpo do texto. Na busca realizada a autora localizou 78 artigos de comunicação científica, que foram organizados na busca de temáticas convergentes.

Os trabalhos selecionados pontuam que os principais significados necessários à compreensão do conceito de função são a noção de relação, de dependência, de variáveis, de movimento/transformação, domínio, contradomínio e imagem. De acordo com a pesquisadora, os trabalhos apontam como métodos mais eficientes de ensino o uso de *softwares* em sala de aula, principalmente para explorar a representação gráfica de forma mais dinâmica e a uma interpretação articulada das várias formas de representar uma mesma função.

A partir destas pesquisas passamos a compreender a importância e como trabalhar com um campo conceitual na formação de professores de Matemática, especificamente com o conceito de função. Evidenciamos que nesses processos de formação é relevante elaborarmos, coletivamente, situações desencadeadoras de aprendizagem. Nesse contexto, passamos a observar a prática docente como um processo de mediação entre o ensino e a aprendizagem. Além de reconhecermos que os ambientes computacionais podem potencializar o ensino e a aprendizagem de funções.

A próxima etapa será a pesquisa no Portal de Periódicos da Capes³ que envolverá uma pesquisa também a trabalhos no âmbito internacional. A seguir, apresentaremos as pesquisas localizadas.

3.4.2 Artigos científicos do Portal de Periódicos da CAPES

Para esse levantamento, tomamos como base de dados o Portal de Periódicos da CAPES. Este repositório é uma biblioteca virtual que reúne e disponibiliza a instituições de ensino e pesquisa no Brasil o melhor da produção científica internacional. Ele conta com um acervo de mais de 38 mil títulos com texto completo, 123 bases referenciais, 11 bases dedicadas exclusivamente a patentes, além de livros, enciclopédias e obras de referência, normas técnicas, estatísticas e conteúdo audiovisual.

O Portal propicia o aumento da produção científica nacional e o crescimento da inserção científica brasileira no exterior. É, portanto, uma ferramenta fundamental às atribuições da CAPES de fomento, avaliação e regulação dos cursos de Pós-Graduação e desenvolvimento da pesquisa científica no Brasil.

Para identificar os trabalhos sobre o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, colocamos no menu de busca por assunto a expressão “Teoria dos Campos Conceituais”, sendo identificados na biblioteca virtual 67 registros, entre artigos, dissertações e teses. A partir desse número de trabalhos, buscamos focar nos artigos científicos, já que no tópico anterior enfatizamos as dissertações e teses.

Encontramos trabalhos que exploraram a Teoria dos Campos Conceituais desde os anos iniciais do Ensino Fundamental à Educação Superior. Mesmo a teoria tendo sua base no ensino de Matemática, convém ressaltar que localizamos trabalhos com este aporte teórico para o ensino de outras disciplinas. Dessa maneira, no primeiro recorte, foram consideradas as pesquisas realizadas sobre estruturas multiplicativas no ensino de Matemática, no qual encontramos oito artigos. Posteriormente, com o objetivo de nos aproximar mais ainda com o nosso objeto de estudo, selecionamos os artigos que tratavam sobre formação docente ou tecnologias digitais para o ensino de conteúdos ligados às estruturas multiplicativas. A partir do critério de seleção, obtivemos duas pesquisas que serão detalhadas posteriormente.

Bittar (2011) investigou a forma de apropriação da tecnologia pelo professor de Matemática e seu uso em sua prática pedagógica. O aporte teórico utilizado foi a Teoria dos

³ <http://periodicos.capes.gov.br>

Campos Conceituais de Vergnaud. A autora focou no conceito de gênese instrumental e, para isso, debateu a diferença entre artefato e instrumento, e entre instrumentalização e instrumentação. A partir destes elementos e da distinção que foi feita entre inserir e integrar a tecnologia na prática pedagógica do professor de Matemática foram apresentados resultados de uma pesquisa-ação realizada com professores dessa disciplina. A pesquisadora aponta uma mudança de postura dos participantes da pesquisa, relativamente ao uso da tecnologia nas aulas de Matemática. A ideia de que esse material deve ser utilizado de modo a provocar a aprendizagem, a levar o aluno a construir seu conhecimento, prevaleceu entre os docentes.

Silva e Alencar (2012) analisaram o conhecimento profissional docente de professores que ensinam Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental. Tratou-se de uma pesquisa que envolveu um grupo de cinco professores de uma escola da rede pública de São Paulo. Nesta investigação os autores se fundamentaram teoricamente em estudos de Shulman no que se refere a formação de professores. Em relação às questões didáticas, utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, com foco nas estruturas multiplicativas. Os autores constataram que as dificuldades relativas à prática docente podem ser influenciadas pela falta de domínio dos professores a respeito do conteúdo matemático, uma vez que observaram as fragilidades em seus argumentos para o uso do procedimento de cálculo. Desta maneira, este estudo indica a necessidade de se rediscutirem as formas de se tratar a multiplicação e a proporcionalidade, em especial, nos cursos de formação inicial e continuada de professores.

Após esta primeira busca partimos para identificar os trabalhos sobre funções. Assim, colocamos no menu de busca por assunto a expressão “Função Afim”. Convém ressaltar, que nesta busca especificamos o tipo de função do nosso objeto de estudo para as buscas não dispersarem tanto para outros assuntos como aconteceu na pesquisa no Banco de Teses e Dissertações da Capes. Assim, a biblioteca virtual apresentou três artigos e somente um tinha relação com nosso objeto de estudo.

No artigo, Viseu e Menezes (2014) discutiram a forma como uma futura professora de Matemática desenvolveu o seu conhecimento didático e conhecimento do conteúdo matemático na preparação e análise de tarefas de modelagem matemática, recorrendo a tecnologia. Tratou-se de um estudo interpretativo, na forma de estudo de caso qualitativo, que mostra que a realização de tarefas de modelagem matemática e a sua reflexão, recorrendo a tecnologia, durante o estágio, constituiu uma ocasião de desenvolvimento profissional da futura professora, tanto em relação ao seu conhecimento do conteúdo

matemático, ao ativar conhecimento trabalhado durante a sua formação inicial, como do seu conhecimento instrucional.

Os autores pontuam que as tarefas de modelagem permitiram que a futura professora compreendesse que, para além do modelo transmissivo, existem outros modelos de ensino, com um cunho exploratório, envolvendo os estudantes em uma atividade matemática intensa e que podem redundar em aprendizagens matemáticas significativas.

A partir destas pesquisas evidenciamos a relevância da abordagem sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas e de funções na formação de professores de Matemática. Ressaltamos que os *softwares* educativos, a partir de uma mediação docente, podem potencializar o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

No próximo capítulo, iremos expor as opções metodológicas deste trabalho, o que se constitui como aspecto essencial para garantir a viabilização de todo o desenvolvimento da investigação, bem como a obtenção de resultados confiáveis.

4 TRAJETÓRIA METODOLÓGICA: CONTRIBUIÇÕES DA PESQUISA COLABORATIVA

Neste capítulo, apresentaremos o delineamento metodológico adotado para realização de nossa investigação. Iniciamos pela concepção de pesquisa, pensada em sua ligação com o real, vinculando pensamento e ação. Nas seções abaixo estão descritas a abordagem, o método de pesquisa, o *locus* e participantes da pesquisa, os procedimentos da pesquisa e as etapas da formação.

4.1 A abordagem

No que se refere a sua abordagem, a presente investigação teve base qualitativa, permitindo que nossas questões de pesquisa sejam investigadas de forma não só a medir ou enumerar eventos, mas entender e atuar sobre o fenômeno estudado.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a abordagem qualitativa significa uma investigação mais detalhada relativamente a pessoas, locais e conversas. As questões a investigação não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, mas são formuladas de modo a investigar o fenômeno em toda a sua complexidade e em contexto natural. Ainda que os indivíduos que fazem investigação qualitativa possam vir a selecionar questões específicas, à medida que recolhem os dados, a investigação privilegia, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação.

Para Minayo e Sanches (1993), a abordagem qualitativa realiza uma aproximação fundamental e de intimidade entre sujeito e objeto, uma vez que ambos são da mesma natureza. Pesquisador e pesquisado se envolvem com empatia aos motivos, às intenções, aos projetos, a partir dos quais as ações, as estruturas e as relações tornam-se significativas. Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o observador procure entender os fenômenos segundo a perspectiva dos participantes da situação analisada e, a partir daí, situe sua interpretação em relação aos fenômenos estudados.

Lüdke e André (1986) afirmam que este tipo de abordagem privilegia a compreensão do fenômeno investigado, a partir da perspectiva dos participantes. Nesse tipo de investigação buscamos responder a questões particulares, como compreender e explicar a dinâmica das relações sociais, a experiência e a cotidianidade, assim como o entendimento

das estruturas e instituições como resultado da ação humana objetivada (MINAYO, 1996).

Nessa perspectiva, entendemos que a investigação qualitativa costuma ser direcionada ao longo de seu desenvolvimento. Além disso, não busca enumerar ou medir eventos, dela faz parte a obtenção de dados descritivos, mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação do objeto de estudo. O investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las, dá-se a conhecer e ganhar a sua confiança, elaborando um registro sistemático de tudo aquilo que ouve e observa (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

D'Ambrósio (2010) postula que, na abordagem qualitativa, é essencial a pesquisa centrada no indivíduo, com toda a sua complexidade e a sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural. Nesse contexto, a interação entre os participantes da pesquisa é fundamental.

Bogdan e Biklen (1994) identificam cinco características fundamentais na investigação qualitativa: a fonte direta dos dados é o ambiente natural, e o investigador é o agente da coleta dos dados; os dados possuem caráter descritivo; o investigador interessa-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; a análise dos dados é feita de forma indutiva; e a compreensão dos significados que os participantes atribuem a suas experiências tem importância fundamental. Ao assumir tais características, o investigador está, de certa maneira, explicitando seu modo de pensar, fazer e estar na pesquisa.

Sobre a concepção da pesquisa qualitativa, Borba (2004, p. 2) acentua que,

[...] a pesquisa qualitativa deve ter por trás uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, etc. e interpretações. O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento.

Na pesquisa qualitativa, a validação é muito influenciada por critérios subjetivos, mas assegura o rigor com base na metodologia da pesquisa. Essencialmente, o registro dos dados deve ser o mais referenciado possível: se escrito, data, local e hora das anotações, com elementos identificadores dos locais e objetos descritos e dos indivíduos entrevistados; se gravado ou fotografado, devem ter esses mesmos dados. A análise dos dados depende de uma fundamentação teórica que, obviamente, resulta do pesquisador e de suas interpretações (D'AMBRÓSIO, 2010). A seguir abordaremos o método de pesquisa da presente tese.

4.2 O método de pesquisa

Em relação ao método, nosso objeto de estudo nos levou a optar por trabalhar com base na pesquisa colaborativa. Nossa pesquisa se interessou em identificar o conhecimento matemático e tecnológico dos futuros professores para o ensino e também pela formulação de alternativas de formação, fundamentais na perspectiva colaborativa.

A pesquisa colaborativa é um modelo de investigação pautado nos fundamentos da abordagem sócio-histórica (TELES; IBIABINA, 2009), na mediação social. Nesse sentido, a prática se volta para a resolução dos problemas sociais, contribuindo com a disseminação de atitudes que motivam pesquisadores e educadores a trabalharem conjuntamente, em busca de conhecimentos voltados para a melhora da cultura escolar e para o desenvolvimento profissional dos docentes (IBIAPINA, 2008).

Zeichner (1993) define que a pesquisa colaborativa tem por objetivo criar uma cultura de análise das práticas que realiza, a fim de possibilitar que os professores, auxiliados pelos pesquisadores da universidade, transformem suas práticas. Garrido, Moura e Pimenta (2000) afirmam que outro objetivo desse método de pesquisa é oferecer subsídios à formação dos professores, promovendo o desenvolvimento profissional dos envolvidos.

Loiola (2004) salienta que o papel do pesquisador também é de formador. Nesse contexto de trocas, assumimos também o papel de formador e procuramos realizar uma mediação dialética entre os futuros professores e suas práticas. A colaboração entre o pesquisador e os futuros professores apoiou-se no princípio de que cada um necessita da participação do outro para a realização do trabalho e para seu crescimento profissional.

Um dos motivos que conduzem à realização de uma pesquisa colaborativa é compreendê-la como atividade de pesquisa e de desenvolvimento profissional capaz de articular processo de investigação acadêmica e formação de professores (TELES; IBIAPINA, 2009). O referido método ofereceu subsídios para políticas de formação inicial, considerando questões relacionadas ao processo de interação entre o pesquisador e os futuros professores.

Em nossa forma de conduzir o trabalho, fundamentada nos princípios da pesquisa colaborativa, o pesquisador não ditou os rumos das mudanças e nem que os futuros professores fossem apenas executores. A pesquisa foi feita em parceria com seus participantes e não de maneira hierárquica onde somente o pesquisador planeja o caminho a ser seguido (GARRIDO; MOURA; PIMENTA, 2000).

Nessa perspectiva, Desgagné (2001) afirma que a pesquisa colaborativa investiga determinado objeto que frequentemente é proposto pelo pesquisador universitário, entretanto interessa e motiva os futuros professores a refletirem sobre a docência. No presente trabalho, o pesquisador levou a proposta para se trabalhar com estruturas multiplicativas e tecnologias e os futuros docentes se sentiram motivados a participarem da pesquisa. Para Ibiapina (2008), no âmbito da educação, esse método de pesquisa é uma produção de conhecimentos científicos e desenvolvimento profissional, por meio da atividade de formação e reflexão.

Nesse contexto, todos trabalharam conjuntamente e apoiaram-se mutuamente, visando atingir objetivos comuns. Os motivos do pesquisador se aproximaram dos motivos dos licenciandos no que se refere ao desenvolvimento da prática docente. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e confiança mútua pela condução das ações (FIORENTINI; LORENZATO, 2009). Assim, o interesse de colaboração entre pesquisador e pesquisado está na crença de que a produção de conhecimentos melhora a prática docente.

Portanto, Reali e Tancredi (2001) afirmam que esse tipo de pesquisa oferece uma formação que prioriza os instrumentos de análise das práticas docentes, assim como uma cultura da reflexão marcada pela ação pedagógica. As críticas partilhadas e as mudanças apoiadas permeiam a pesquisa colaborativa, tornando-se assim ferramenta para melhorar o desenvolvimento profissional de todos os envolvidos no processo. Daí, percebemos a relevância deste tipo de pesquisa na formação inicial, pois assim os licenciandos já têm a oportunidade de refletir sobre a docência desde o início de sua formação.

Desgagné (2001) afirma que nesse método de investigação, o pesquisador assume o papel de formador, sua função é equilibrar e orientar a pesquisa, valendo-se do quadro teórico por ele proposto, no caso, o campo conceitual das estruturas multiplicativas e o *TPACK*. Paralelamente, os futuros professores engajaram-se nesse processo de colaboração a partir da maneira como veem, sentem e observam o seu contexto educativo.

É necessário, entretanto, destacar que existem pesquisadores, a exemplo de Fiorentini (2004), que aceita a pesquisa colaborativa apenas quando há envolvimento dos participantes em todas as etapas da pesquisa, ou seja, a sua colaboração é iniciada desde a escolha e definição da problemática que será investigada. Então, na vertente desse autor, nossa investigação não se constitui como uma pesquisa colaborativa ortodoxa, pois a definição do objeto de pesquisa não foi feita em conjunto com os futuros professores. Em nossa pesquisa, levamos a proposta para a licenciatura e adequamos de acordo com a

realidade e necessidade dos futuros docentes.

Entretanto, na perspectiva de Desgagné (2001) e Ibiapina (2008), a pesquisa colaborativa não requer, necessariamente, que todos os participantes definam a problemática, a metodologia e os procedimentos da análise. Logo, na perspectiva desses autores, nossa investigação não deixa de ser uma pesquisa colaborativa, pois, ainda de acordo com os autores, colaborar significa que cada participante, sobre a base de um projeto comum, preste sua contribuição específica. Então, em meio a esse debate teórico, podemos classificar nossa abordagem de pesquisa como colaborativa.

Salientamos que nosso trabalho integra um projeto de pesquisa aprovado e financiado pela CAPES por meio do Edital OBEDUC 049/2012, número 15 727, o Programa Observatório da Educação (OBEDUC⁴). O referido programa tem por objetivo fomentar estudos e pesquisas em educação estimulando a produção acadêmica e formação de recursos pós-graduados *stricto sensu* a partir da articulação entre pós-graduação, licenciaturas e escolas de Educação Básica (BRASIL, 2014). A presente tese se conecta à proposta de articulação entre a licenciatura e a pós-graduação.

O projeto OBEDUC, para o qual nossa pesquisa de doutorado em Educação Brasileira contribui, é intitulado “Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental” e está sendo desenvolvido em colaboração entre IES de três estados, quais sejam, Bahia, Pernambuco e Ceará. Participam do projeto pesquisadores da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), da Universidade de Pernambuco (UPE), da Universidade Federal do Ceará (UFC) e da Universidade Estadual do Ceará (UECE).

O projeto tem por objetivo investigar e intervir na prática de professores do Ensino Fundamental no que tange às Estruturas Multiplicativas, baseados no modelo de formação “ação-reflexão-planejamento-ação” (SANTANA; LAUTERT; CASTRO FILHO, 2012). Além das universidades, estão envolvidas doze escolas de Educação Básica, distribuídas nos três polos, com oferta de turmas do 1º ao 9º anos do Ensino Fundamental.

Contribuímos para este projeto trazendo algumas reflexões para a formação de professores, pois paralelamente estávamos utilizando seus instrumentais na licenciatura. Destacamos que, mesmo esse universo não fazendo parte do projeto, detectamos alguns aspectos que surgem na formação inicial e continuam durante a carreira docente. Além disso,

⁴Site do Programa: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao>

salientamos que, mesmo a pesquisa não compondo diretamente o projeto maior, diversas ações vão ao seu encontro.

A seguir trataremos das etapas da pesquisa colaborativa, que percebemos como momentos significativos desenvolvimento entre os participantes e transformação das práticas de todos.

4.3 Etapas da pesquisa colaborativa

Segundo Anadón (2007), a pesquisa colaborativa é composta por três etapas. A primeira é a co-situação, momento da incorporação dos participantes na investigação. A segunda etapa denominada co-operação, diz respeito ao processo de reflexão acerca das questões de pesquisa. A terceira etapa é a co-produção, que é o momento de construção coletiva, ou não, do trabalho. A autora aponta ainda que essas etapas representam os espaços criados para a efetivação de pesquisa e formação, propostas pela pesquisa colaborativa. Fiorentini e Lorenzato (2009) salientam que o prefixo co significa ação conjunta.

Segundo Loiola (2004), a co-situação é a etapa da pesquisa colaborativa que responderá às preocupações do contexto dos futuros professores e do contexto da pesquisa. Nessa fase, o papel principal do pesquisador consiste em procurar a mediação entre esses dois contextos. Esse momento deve ser construído para que os envolvidos passem a se sentir motivados para colaborar e inserir-se no grupo. É nessa etapa que se dão as negociações e a inserção em um projeto que visa contribuir para a produção e compartilhamento de saberes docentes (TELES; IBIABINA, 2009).

Antes de efetivamente iniciarmos a co-situação, fizemos a definição do município – Brejo Santo (CE) – e do *lócus* da pesquisa, qual seja, a Universidade Federal do Cariri (UFCA), mais especificamente no Instituto de Formação de Educadores (IFE) que é instalado na cidade supracitada. A escolha desta cidade deveu-se ao fato de ser local que recebeu as instalações do IFE, reunindo cursos de formação pedagógica, ou seja, cursos de licenciatura em diversas áreas do conhecimento.

Inicialmente foi implementado o curso de Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática, que permite uma formação geral interdisciplinar e específica nas áreas de Biologia, Física, Matemática e Química. Já a definição pela UFCA enquanto local da pesquisa deve-se ao desejo de ampliar o conhecimento sobre os estudantes e contribuir de maneiras diversas com a instituição em que atuamos como professor efetivo da

área de Ensino de Matemática.

No IFE, selecionamos quatro participantes para a pesquisa que atendessem aos seguintes critérios:

- a) ser bolsista em um dos quatro pilares que sustentam esta Universidade: Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura;
- b) ter disponibilidade para participar da pesquisa; e
- c) permitir e participar da análise e publicação dos dados colhidos no momento em que aconteceu a formação.

A opção por selecionar somente os bolsistas, deveu-se ao fato destes estudantes terem efetivamente tempo para participar da pesquisa. Além disso, não consideramos um processo de exclusão, pois todos os alunos do Instituto que podem ter bolsas já foram contemplados, importa registrar que em alguns editais tivemos sobra de bolsas. A fim de resguardar os participantes da pesquisa criamos códigos para os nomes dos futuros professores, quais sejam, D2, I3, J4 e N5.

A etapa da co-situação, aconteceu no mês de abril de 2015. Foram realizados 2 encontros nos quais discutimos a proposta da pesquisa, caracterizamos o perfil e os conhecimentos prévios dos futuros professores e refletimos sobre a prática docente. Assim, percebemos o interesse dos licenciandos pela participação efetiva em uma pesquisa dessa natureza. A seguir, temos o cronograma dos encontros.

Quadro 1 – Cronograma dos encontros da fase de co-situação

Ordem	Data	Conteúdo
1º	01/04/15	- Explicação da proposta da pesquisa; - Caracterização do perfil dos futuros professores; - Análise, por meio de debates, sobre os conhecimentos prévios dos futuros professores sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino.
2º	15/04/15	- Elaboração de problemas envolvendo o conceito de funções; - Reflexões sobre a prática docente; - Cadastro no ambiente Sócrates.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Consideramos que o momento da co-situação foi importante para a nossa pesquisa, pois, a partir dessas atividades, iniciamos efetivamente a busca em torno de um objetivo comum, estabelecido como a articulação entre o desenvolvimento profissional dos futuros docentes e a produção do conhecimento científico.

A co-operação foi o momento em que pesquisador e licenciandos refletiram sobre o ensino do campo conceitual das estruturas multiplicativas e sobre a utilização pedagógica das tecnologias digitais. Essa fase foi realizada nos meses de abril a dezembro de 2015, em um total de 16 encontros.

Para os debates a distância, utilizamos o espaço on-line SÓCRATES⁵ da UFC. Neste ambiente os futuros professores refletiram nos fóruns sobre o ensino do campo conceitual multiplicativo com o suporte das tecnologias digitais. Assim, efetivamente tivemos tempo para maturação e colaboração de todos os participantes da pesquisa. A seguir, apresentamos o que foi executado nesta fase da pesquisa.

Quadro 2 – Cronograma dos encontros da fase de co-operação

Ordem	Data	Conteúdo
1º	22/04/15	- Debate sobre os principais conceitos da teoria dos campos conceituais com foco nas estruturas multiplicativas; - As estruturas multiplicativas: Ruptura do campo conceitual aditivo com o multiplicativo; Texto Base: GITIRANA, V. <i>et al.</i> Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014. (Capítulo II) - Debate no Sócrates: Apreensão de um conceito multiplicativo e suas diversas situações.
2º	29/04/15	- Os problemas multiplicativos: Diferentes significados da multiplicação Texto Base: GITIRANA, V. <i>et al.</i> Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014. (Capítulo III)
3º	06/05/15	- Discussão sobre relação entre grandezas.
4º	13/05/15	- Debate do esquema de Magina; Santos e Merlini (2012) com foco em proporção simples (operador escalar e funcional) Texto base: MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais... Fortaleza: UFC/UECE, 2012. - Debate no Sócrates: Analisar em livros didáticos problemas de proporção simples

⁵ Ambiente colaborativo SÓCRATES - Sistema online para criação projetos e comunidades: www.vdl.ufc.br/socrates/.

5º	20/05/15	- Problemas que envolvem o conceito de operador funcional; - Relação de proporção simples com função linear.
6º	26/05/15	- Discussão sobre proporção múltipla e dupla.
7º	03/06/15	- Debate sobre a relação de dependência e variância de uma função.
8º	11/06/15	- Debate sobre representação tabular e gráfica da função linear.
9º	20/08/15	-Investigação sobre o conhecimento tecnológico em si e pedagógico dos futuros professores; - Debate sobre as tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática.
10º	02/09/15	- Levantamento e análise de Objetos de aprendizagem (OA).
11º	16/09/15	- Debate sobre o objeto de aprendizagem. Equilibrando proporções Com este objeto de aprendizagem exploramos os conceitos de grandezas. Cujo foco foi o debate sobre os conceitos de razão, proporção e grandezas (diretamente proporcionais simples e diretamente proporcionais compostas). O debate de tais conceitos foi relevante para levar o estudante a compreensão da relação entre grandezas que é fundamental para o entendimento do conceito de função. - Situações problemas sobre proporção simples no objeto de aprendizagem. Equilibrando proporções. - Debate no Sócrates: Relação entre grandezas.
12º	01/10/15	- Discussão sobre o <i>software</i> livre Geogebra. A partir do geogebra trabalhamos com variáveis vinculadas a números, abordamos também a relação de par ordenado com o gráfico da função, dessa forma representamos de maneira algébrica e gráfica as funções lineares. - Situações problemas sobre funções no Geogebra. - Debate no Sócrates: Representações da função linear no Geogebra.
13º	22/10/15	- Debate sobre o objeto de aprendizagem Grande Prêmio Funcional (GP Funcional) A partir do referido OA, estudamos o gráfico de uma função linear e os seus coeficientes, debatemos quando uma função é crescente ou decrescente a partir da análise do gráfico e do coeficiente angular. - Situações problemas sobre funções no GP Funcional. - Debate no Sócrates: Coeficientes da função linear no GP Funcional.
14º	04/11/15	- Discussão sobre o recurso digital Variação da Função Afim da Universidade Federal Fluminense (UFF) Com este recurso estudamos o comportamento variacional da função afim fazendo uso de recursos gráficos, numéricos e algébricos. Também caracterizamos uma função afim por meio de seu comportamento variacional; e utilizamos processos de modelagem matemática para resolver problemas do cotidiano, tendo como referência o comportamento variacional da função afim. Além disso, estimulamos os futuros professores a criarem conjecturas e fazerem generalizações. - Situações problemas sobre funções no recurso Variação da Função Afim. - Debate no Sócrates: Conceitos que envolvem a Variação da função afim.
15º	18/11/15	- Elaboração de um plano de aula sobre funções com uso de tecnologias.
16º	02/12/15	- Avaliação final e entrevista com os participantes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas formações tínhamos como foco discussões colaborativas. Durante estes momentos buscamos compreender algumas questões, quais sejam

- a) Diferentes significados da multiplicação: O que é multiplicação e divisão? Em que tipo de situações utilizamos essas operações? Como as concepções dos futuros professores se alteraram ao longo da formação?
- b) Relação de dependência e variância das grandezas de uma função: O que é uma função? Como podemos coordenar a covariação de uma função?
- c) Representação gráfica e tabular de uma função: Os futuros professores têm dificuldades em encontrar padrões em uma tabela? Eles entendem gráficos de funções lineares? Evidenciam a relação do gráfico de uma função linear com o operador funcional?

Buscamos também constatar o avanço dos futuros professores em relação à compreensão de conceitos matemáticos a partir da utilização das tecnologias digitais. A seguir, trataremos sobre os conceitos matemáticos que cada recurso digital escolhido pode abordar.

4.3.1 Recursos digitais utilizados na fase de co-operação

4.3.1.1 Equilibrando proporções

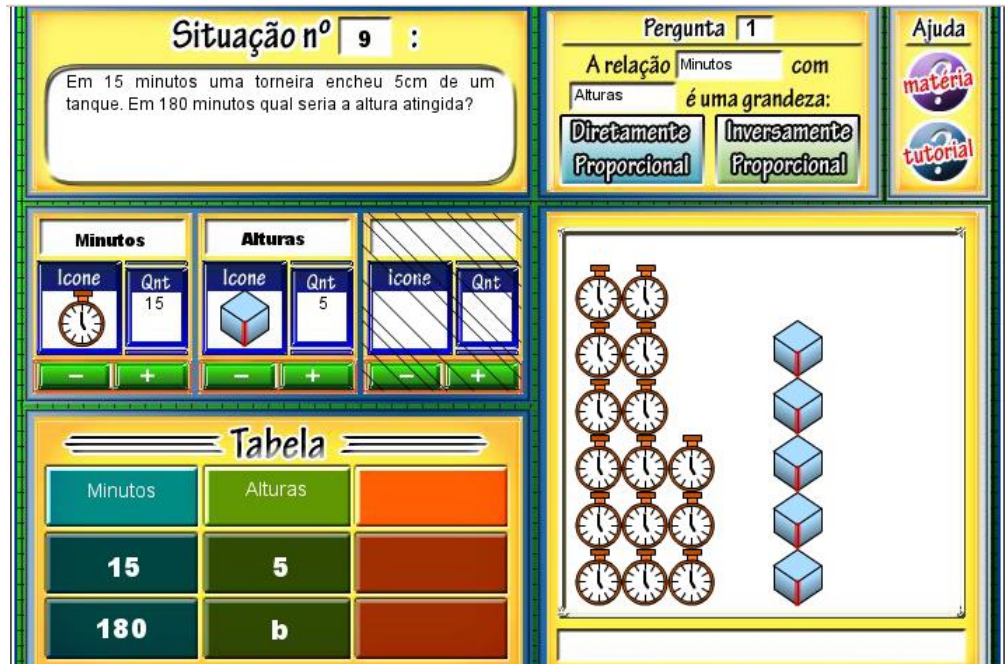
O objeto de aprendizagem equilibrando proporções faz parte do projeto Condigital⁶ que visa oferecer objetos de aprendizagem em mídias variadas, incluindo áudio, vídeo, simulações de *software* e jogos digitais, viabilizando o desenvolvimento de relações com o mundo real e as áreas científicas, contemplando de forma explícita o aprofundamento dos saberes disciplinares nessas áreas e seus procedimentos científicos.

O Equilibrando proporções tem dez situações problemas em que o sujeito precisa avaliar se a relação entre as grandezas é diretamente ou inversamente proporcional, sendo, portanto, indicado para abordar os conceitos de proporcionalidade. Convém destacar que o conceito abordado está dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1991). As grandezas são apresentadas em diversas representações, quais

⁶ <http://condigital.unicsulvirtual.com.br/index.jsp> (Texto baseado na descrição dos criadores do Projeto)

sejam, de forma textual, de forma icônica e por meio de tabela. Segundo Vergnaud (2009), a representação é um componente fundamental na formação de um conceito. A seguir, temos a tela do recurso digital Equilibrando proporções.

Figura 11 – Tela do recurso digital Equilibrando proporções



Fonte: Captura de tela do Equilibrando proporções

O objeto de aprendizagem permitiu que os futuros professores simulassem as situações, podendo aumentar ou diminuir as medidas de uma determinada grandeza. Ao fazer essa interação, os participantes da pesquisa perceberam que as grandezas variam em conjunto. Evidenciamos que as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais ajudaram na compreensão da covariação, por serem problemas de proporção simples.

4.3.1.2 Software Geogebra

O Geogebra⁷ é um *software* livre⁸ que pode ser utilizado no ensino de geometria, álgebra e cálculo, conseguindo, portanto, relacionar um sistema de geometria dinâmica com um sistema de computação algébrica. Devido a essas características dinâmicas, torna possível

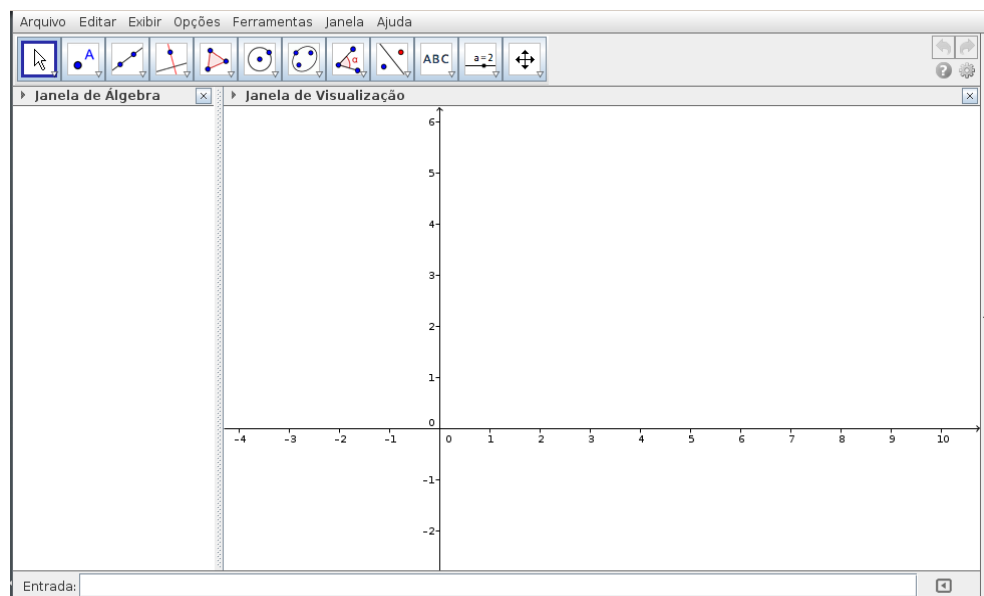
⁷ <http://www.geogebra.org/>

⁸ Expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente. Os usuários possuem livre acesso ao código-fonte do *software* e fazem alterações conforme as suas necessidades.

que os futuros professores tenham mais foco nas associações entre os objetos do que em sua própria construção.

Assim sendo, o *software* Geogebra permite fazer construções com pontos, retas e figuras geométricas para representar funções de forma algébrica e gráfica. Possibilita também o trabalho desde funções mais simples, até derivadas e integrais de funções. Na tela do Geogebra há barras de menus, de ferramentas, janela de comandos, de construção e janela de álgebra. A seguir apresentamos a tela do Geogebra na versão em Português.

Figura 12 – Tela inicial do Geogebra



Fonte: Captura de tela do Geogebra

Com a utilização do Geogebra, os futuros professores modificaram dinamicamente os parâmetros de funções lineares. O conceito de função linear está relacionado com o campo conceitual das estruturas multiplicativas, especificamente com o conceito de proporção simples. Ou seja, a partir de uma relação proporcional podemos encontrar o operador funcional que é o coeficiente a da função linear. Além disso debateram sobre os conceitos que envolvem as representações algébrica e gráfica das funções, que são relevantes para a formação de um conceito (VERGNAUD, 2009).

4.3.1.3 GP Funcional

O objeto de aprendizagem (OA) Grande Prêmio Funcional foi produzido pelo Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem – PROATIVA⁹ que tem por objetivo desenvolver objetos de aprendizagem com a intenção de dividir os conteúdos disciplinares em pequenos trechos que podem ser utilizados em vários ambientes de aprendizagem, bem como realizar pesquisas sobre a utilização desses objetos na escola, como forma de melhorar a aprendizagem dos discentes.

A partir de atividades desenvolvidas com o OA GP Funcional podemos levar os futuros professores aos seguintes conhecimentos:

- a) identificação e interpretação de gráficos de funções lineares;
- b) reconhecimento de uma função crescente e decrescente e de pares ordenados;
- c) desenvolvimento de um pensamento meditativo que lhes permitam a elaboração das relações entre os coeficientes de uma função linear e seu gráfico e habilidades específicas de medir e comparar grandezas presentes em gráficos;
- d) compreensão do significado da variação do sinal das funções lineares.

Na atividade “Conhecendo os coeficientes”, podemos levar os futuros professores a reflexões relevantes para a prática docente, fazendo questionamentos como: i) Como os coeficientes a e b modificam a função? ii) Onde localizamos o termo independente no gráfico? iii) Qual a posição da função quando está crescente? E decrescente? iv) Qual o sinal do coeficiente angular quando a função está crescente? E decrescente?

Consideramos que os futuros docentes ao terem clareza destas questões relativas as funções lineares terão um bom embasamento teórico para a formação de um campo conceitual multiplicativo mais amplo, porque ao trabalharem com múltiplas representações da função linear precisam buscar conceitos de multiplicação, divisão, proporção simples, dentre outros.

Na atividade “Colocando em prática”, por meio do movimento de carros de Fórmula 1 podemos debater a relação entre grandezas e o gráfico da função afim. A seguir podemos visualizar a tela do GP Funcional.

⁹ <http://www.proativa.vdl.ufc.br/> (Texto baseado na descrição dos criadores do projeto)

Figura 13 – Tela inicial do GP Funcional



Fonte: Captura de tela do GP Funcional

Ao manipularem o GP Funcional, os futuros professores formularam seus próprios conceitos de funções lineares e seus respectivos gráficos.

4.3.1.4 Variação da Função Afim

Este objeto de aprendizagem foi desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense (UFF¹⁰) e apresenta um conjunto de atividades interativas que permite estudar o comportamento variacional da função afim. A sequência didática proposta pelos criadores do recurso é composta de cinco etapas.

Em uma primeira etapa são lembrados alguns tópicos já estudados da função afim: definição e interpretação geométrica dos coeficientes e que definem a função. Uma atividade produzida com o *software* Geogebra é utilizada para auxiliar a interpretação geométrica.

Nas três etapas seguintes, foi desenvolvido o estudo propriamente dito do comportamento variacional das funções afins. Esse estudo é realizado inicialmente no item de menu “Taxa de variação” por meio de um aplicativo que faz uso do *software* Geogebra e que permite ao futuro professor observar gráfica e numericamente a variação de uma função.

No item subsequente, função afim e sequências, é apresentada uma atividade que

¹⁰ <http://www.uff.br/cdme/afim/afim-html/guia-do-professor.html> (Texto baseado na descrição dos criadores do projeto)

procura estabelecer a relação entre uma progressão aritmética e a sequência formada pelas imagens dos elementos dessa progressão por uma função afim. Além de uma tabela interativa, uma célula contendo uma representação gráfica da situação escolhida é utilizada para a composição do cenário da atividade. Esperamos que os futuros professores concluam, observando a tabela, que, se é uma progressão aritmética e é uma função afim, então também será uma progressão aritmética.

Em seguida, é apresentada então a caracterização da função afim. Esperamos que os futuros docentes adquiram este conhecimento por meio de sua intuição matemática tal e como fizeram Galileu e os primeiros matemáticos que se aventuraram no mundo do cálculo.

E, por fim, são apresentadas situações problemas que estimulam o desenvolvimento dos conceitos de funções. São utilizadas algumas animações em flash para uma melhor visualização das situações descritas no enunciado dos problemas. Estas animações permitem também que os futuros professores observem os padrões que lhes permitem concluir que a função é uma boa possibilidade para modelar o problema.

Nessa fase da pesquisa, cujos dados foram coletados em gravações de áudio, o pesquisador e os futuros professores tiveram momentos de reflexão sobre a utilização das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática. Essas reflexões foram utilizadas como base para o desenvolvimento profissional dos participantes da pesquisa. A dinâmica de reflexões levou em consideração os elementos do campo conceitual multiplicativo, a partir do estudo de textos e debates entre os participantes. Salientamos a relevância desta atividade de formação dos licenciandos com os objetos de aprendizagem digitais para o desenvolvimento da pesquisa.

A co-produção consiste como o próprio nome sugere: produção, análise dos resultados e a sua difusão para servir ao grupo de pesquisadores e aos futuros professores participantes da pesquisa colaborativa. Teles e Ibiapina (2009) complementam que essa etapa incide no processo de pesquisa como um todo, desde a organização, até a análise dos dados feita em colaboração ou não com os licenciandos. A co-produção, no caso desta pesquisa, consistiu na elaboração do conhecimento acerca dos conceitos de estruturas multiplicativas e funções com suporte das tecnologias digitais, a partir das percepções do pesquisador e dos futuros professores, nas práticas reflexivas, ou seja, perpassou as etapas de co-situação e co-operação. Além disso, elaboramos de forma colaborativa, com os licenciandos, resumos científicos que foram publicados em eventos na Universidade Federal do Cariri (APÊNDICE B). No item 4.4 discorreremos como se deu a coleta e análise dos dados.

4.4 Instrumentos de coleta e análise de dados

Pela característica da teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas, na formação colaborativa analisamos como os futuros professores pensam as situações problemas que foram propostas sobre estruturas multiplicativas. Alguns dos problemas propostos durante a formação foram adaptados dos instrumentais do OBEDUC, outros retirados de pesquisas que trabalharam com foco nas estruturas multiplicativas e alguns criados pelos participantes da pesquisa.

Ainda na formação colaborativa os licenciandos explicitaram para seus pares suas formas de interpretação de elementos relativos às estruturas multiplicativas com suporte das tecnologias digitais. No que se refere aos instrumentos de coleta de dados, utilizamos: a observação; o diário de campo; as narrativas; o áudio, vídeo e/ou imagens; e a entrevista.

A observação é um dos principais instrumentos para coleta de dados na pesquisa qualitativa por ser um recurso relevante para o estudo detalhado dos comportamentos dos participantes da pesquisa. Em particular, optamos pela observação participante, que consiste na inserção do pesquisador no interior do grupo observado, tornando-se parte dele, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação.

As observações desenvolvidas culminaram na elaboração de um diário de campo. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009), este instrumento é essencial na pesquisa, pois é nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos.

No diário de campo, registramos observações acerca das percepções dos futuros professores sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas, suas dificuldades e seus avanços. Registramos também os dados relativos a reflexão sobre a prática docente e os debates dos futuros professores de Matemática em relação ao conceito da covariação de funções com suporte das tecnologias digitais.

Outra técnica utilizada, foram as narrativas, através delas podemos conhecer como os licenciandos observam a sala de aula, contexto em que irão atuar. Além de cumprir um papel fundamental nas investigações qualitativas em educação, as narrativas também têm sido destacadas por sua posição relevante na formação de educadores (MIZUKAMI *et al.*, 2002). A partir da utilização das narrativas na presente pesquisa, realizamos um processo de construção das experiências vivenciadas pelos sujeitos da pesquisa. Nesse processo, o diálogo

foi instalado com o objetivo de garantir cumplicidade e colaboração dos participantes.

Além dos registros do diário de campo e das narrativas, fizemos registros em vídeos, áudios e imagens que foram arquivados pelo pesquisador e utilizados para a análise dos dados da presente pesquisa. Estas formas de registros complementam as citadas no sentido de permitirem que outras pessoas possam visualizar e escutar os recortes dos debates ocorridos durante a formação colaborativa. Esses produtos foram nomeados conforme a identificação dos licenciandos, data e temática abordada.

Para a organização da pesquisa, todos os áudios e vídeos foram transcritos. Entretanto, somente os fragmentos considerados relevantes foram selecionados no editor de texto em diferentes cores de acordo com as categorias apresentadas nos capítulos de resultados e posteriormente analisadas.¹¹

A entrevista, técnica que favorece a obtenção de informações mais detalhadas a partir da consulta aos participantes da pesquisa, foi utilizada em momentos planejados ou não. Definimos como planejados os momentos de entrevista solicitadas pelo pesquisador e como não-planejados quando a solicitação de interação se dava pelos próprios participantes da pesquisa com o objetivo de verificar a evolução do pensamento matemático dos futuros professores. A técnica também foi usada para entender a prática colaborativa e as possíveis formas de interpretação e representação de questões relativas às estruturas multiplicativas.

Para análise dos dados, levamos em conta a compreensão dos futuros professores sobre os conceitos, seus entendimentos sobre as estratégias de ensino discutidas e elaboradas em grupo. Fundamentados na teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas, observamos diferentes situações, invariantes e representações utilizadas e exploradas pelos licenciandos para o desenvolvimento dos conceitos. O tratamento e a análise dos dados ocorreram em todos os estágios da pesquisa colaborativa.

¹¹ Salientamos que todas estas questões foram previamente acordadas com os participantes da pesquisa.

5 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

Neste capítulo estão apresentados e analisados os dados que foram construídos durante o período das etapas de co-situação, co-operação e co-produção da pesquisa colaborativa. A partir dos debates realizados, apresentamos situações que sinalizam características relevantes para entender o conhecimento matemático para o ensino.

Nos debates sobre o campo conceitual multiplicativo, buscamos identificar e explorar os problemas que podem ser abordados com o operador funcional; e elaborar problemas envolvendo os conceitos de covariação das funções a partir das operações de multiplicação e/ou divisão. Assim, percebemos o interesse dos licenciandos pela participação efetiva em uma pesquisa dessa natureza. Os dados colhidos nesta fase foram registrados em diário de campo e em áudios, que debateremos a seguir.

Nesta fase da pesquisa, elegemos um evento principal que se refere a um termo elaborado por Ball, Thames e Phelps (2008), para debater sobre o conhecimento matemático (conhecimento específico) voltado para o ensino (conhecimento pedagógico). Nesse contexto, discutimos os dois conhecimentos em uma só categoria. A seguir passaremos a analisar o conhecimento matemático para o ensino em Ball; Thames; Phelps (2008) dos futuros professores, especificamente para o ensino do campo conceitual multiplicativo cunhado por Vergnaud (1983, 2001), embasados ainda nos trabalhos desenvolvidos por Gitirana *et al.* (2014), Magina, Santos e Merlini (2014) e Santos (2015).

5.1 Conhecimentos prévios sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino

Este momento aconteceu na fase de co-situação, porque nossa intenção era perceber os conhecimentos prévios dos futuros professores sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino, para a partir daí planejar como seria conduzida a formação. Portanto, para os futuros professores, esse era o primeiro contato com as ideias do campo conceitual multiplicativo.

Dentro dos conhecimentos prévios elegemos duas categorias, quais sejam:

- a) conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo; e
- b) conhecimento sobre a prática pedagógica.

A seguir, detalharemos cada uma destas categorias.

5.1.1 Conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo: conceitos de multiplicação

Optamos por esta categoria porque em nossos encontros de formação evidenciamos que os futuros professores tratavam a multiplicação como uma soma de parcelas iguais, que acaba limitando este conceito. No primeiro encontro da pesquisa, os licenciandos foram indagados sobre suas concepções em relação aos conceitos de multiplicação. Nossa intenção foi compreender os conhecimentos prévios dos futuros professores sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino. A seguir, vejamos o que os participantes da pesquisa relataram:

D2 - *A multiplicação é uma soma de parcelas iguais.*

I3 - *Por exemplo 3×4 basta somar $3+3+3+3$.*

J4 - *A vantagem de usar a multiplicação é quando as somas são grandes. Se for uma conta 127×32 não compensa somar o cento e vinte e sete trinta e duas vezes.*

N5 - *Verdade! Mas para números pequenos, se a gente esquecer da tabuada de multiplicar é só a gente somar quantas vezes o número se repete que encontramos a resposta certa.*

Evidenciamos que entre os futuros docentes prevalece a ideia de que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais e que a vantagem de multiplicar é quando ocorre um caso de uma soma muito extensa. A participante N5 ainda relata que se houver um esquecimento da tabuada podemos somar que encontraremos a resposta correta. Ou seja, a futura docente está mais preocupada com o resultado final do que entender o processo de resolução dos estudantes. Após este momento, mesmo com vários questionamentos, não conseguem trazer outras concepções de multiplicação.

Enfatizamos que a concepção da multiplicação ser uma soma de parcelas iguais não é errada, entretanto é limitada porque pode levar o sujeito à falsa ideia de que ao se multiplicar, sempre aumenta. Magina, Santos e Merlini (2014) explicam que essa concepção pode ser oriunda de problemas do ponto de vista didático, em que o professor se limita a explicar a multiplicação como uma continuidade da adição e muitas vezes não aborda o momento que acontece essa ruptura.

5.1.2 Conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo: problemas do campo conceitual multiplicativo

Elaboramos um instrumento (Apêndice G) solicitando aos futuros professores que elaborassem seis problemas sobre estruturas multiplicativas, com o propósito de perceber o conhecimento prévio deles sobre os problemas do campo conceitual multiplicativo. No instrumento, havia a seguinte instrução: “Neste apêndice, também adaptado do OBEDUC, elabore seis problemas distintos envolvendo o conceito de funções a partir das operações de multiplicação e/ou divisão.” Como tínhamos quatro participantes da pesquisa, analisamos um total de vinte e quatro problemas.

Ressaltamos que os futuros professores conheciam basicamente que o campo conceitual multiplicativo são problemas que envolvem as operações de multiplicação e divisão, ou uma combinação de ambas. Esse conceito da Teoria denota a característica básica para um problema multiplicativo, mas que não é suficiente para ser considerado uma situação nos termos de Vergnaud. Problemas matemáticos do tipo arme e efetue, que apenas trazem a expressão matemática para o aluno encontrar a solução, embora contemplem o aspecto das operações, não podem ser consideradas situações. Tais problemas carecem do que Vergnaud (2009) considera o aspecto real do conceito.

Assim, das vinte e quatro elaborações dos futuros professores, três problemas restringiam-se ao simples formato de tarefa do tipo arme e efetue, com ou sem enunciado, e por isso não foram adicionados ao Quadro 3, que organiza a quantidade de situações multiplicativas elaboradas, classificando-as de acordo com o eixo, classe e operação.

Quadro 3 – Classificação das situações multiplicativas propostas pelos futuros professores

Tipos de situação Eixo – classe - operação	Quantidade por futuro professor				
	D2	I3	N5	J4	Total
Proporção Simples – um-para-muitos - multiplicação	1	1	0	3	5
Proporção Simples – um-para-muitos – divisão por partição	1	0	1	1	3
Proporção Simples – um-para-muitos – divisão por cota	1	0	1	0	2
Proporção Simples – muitos-para-muitos – divisão	1	0	0	0	1
Proporção Simples – muitos-para-muitos - multiplicação	0	1	3	0	4
Produto de Medidas – configuração retangular - divisão	0	1	1	0	2
Produto de Medidas – combinatória - multiplicação	1	1	0	0	2
Comparação Multiplicativa – referido desconhecido - divisão	1	1	0	0	2
Total	6	5	6	4	21

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dois dos três problemas do tipo arme e efetue, excluídos do Quadro 3, foram propostos por J4, que tem um bom embasamento em Matemática. Entretanto, continua com a ideia que fazer o algoritmo já é o bastante. Os problemas excluídos tinham como foco elementos da Álgebra, principalmente na introdução do conceito de variável representativa de números, ou seja, a incógnita. A seguir um exemplo do tipo de problema multiplicativo, classificado como arme e efetue com enunciado, indicado por J4:

Pedro tem 8 pacotes de bolinhas de gude, sabendo que a função usada para calcular a quantidade de pacotes de bolinhas de gude é $f(x) = 6x$, quantas bolinhas Pedro tem?

O problema elaborado pelo futuro professor trabalha aspectos procedimentais e mecânicos da resolução de uma função. Evidenciamos também que existe um equívoco na elaboração do referido problema, quando o futuro professor relata que a função será utilizada para calcular a quantidade de pacotes de bolinhas de gude na verdade será utilizada para calcular a quantidade de bolinhas de gude por pacote. Este fato demonstra que ainda existe certa dificuldade no trabalho com duas grandezas. Este tipo de problema representa uma concepção de que a Matemática se resume à resolução de algoritmos, sem uma preocupação com a compreensão da situação.

Das propostas de questões dos futuros professores, de acordo com o Quadro 3, das vinte e uma situações de estruturas multiplicativas apresentadas pelos quatro participantes, quinze eram de Proporção Simples. Consideramos um número elevado, uma vez que tal montante representa mais de 70% das propostas dos problemas efetivamente multiplicativos. Em uma reflexão posterior, os futuros docentes relataram que focaram mais nestes tipos de problemas por ser possível a abordagem funcional.

Destacamos que nenhum dos futuros professores propuseram situações de Proporção Múltipla e Dupla, mesmo dando para abordar o conceito de funções nestes tipos de problemas. Consideramos que a ausência de problemas que contemplem tais conceitos é por conta de uma concepção restrita dos licenciandos sobre os tipos de situações multiplicativas, no momento do início de nossa formação colaborativa e que, em função disso, acabaram explorando situações mais comuns e simples, classificadas como prototípicas (GITIRANA *et al.*, 2014). Representando problemas com relações ternárias, estão os seis problemas restantes, classificados como situações nos eixos de produtos de medidas e comparação multiplicativa.

De posse desses dados, não é possível afirmar que os futuros professores desconheciam os outros tipos de problemas multiplicativos que deixaram de ser propostos. Entretanto, a ausência deles reforça a hipótese de que tais problemas compõem situações que vão além do contexto até então vivenciado pelos licenciandos. Neste sentido, percebemos que os futuros professores ainda têm certas dificuldades no que se refere ao conhecimento de funções dentro do campo conceitual multiplicativo.

Corroboramos com Gitirana *et al.* (2014), em que relatam que a partir da compreensão da natureza do erro podemos desenvolver alternativas educacionais que favoreçam a superação destas dificuldades. Neste contexto, a partir dos erros dos futuros professores tentaremos avançar na busca de um conhecimento especializado do conteúdo.

5.1.3 Conhecimento sobre a prática pedagógica

Esta categoria emergiu a partir da base teórica de Ball, Thames e Phelps (2008) ao tratarem que os professores precisam ter conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino. Como estamos atuando na formação inicial com participantes que ainda não atuam em sala de aula, então não têm um conhecimento sobre os estudantes da Educação Básica e não têm a experiência de ensino. Assim, reunimos os dois conhecimentos em um único, o conhecimento sobre a prática pedagógica. Assim, os futuros professores tiveram a oportunidade de refletir e investigar sobre a prática docente a partir de suas vivências como estudantes.

Dentro deste contexto, iniciamos o nosso debate com os futuros professores sobre as dificuldades do ensino e da aprendizagem da Matemática. A seguir, verificamos as reflexões de dois futuros docentes.

D2 - *Eu acho que é porque os professores foram formados a ensinar de uma forma de decorar, só chegar lá e ensinar uma fórmula e dizer como é a resolução e nem diz por que é e nem pra que é.*

J4 - *É tipo um ensinamento uma coisa mecânica onde você não dá significado aquilo.*

Evidenciamos que os futuros professores foram ensinados como se a Matemática fosse algo pronto e acabado e que a única finalidade é decorar as fórmulas e algoritmos para a resolução de exercícios de fixação. O que percebemos é que esta percepção não é recente, pois D'Ambrósio (1989) já postulava que o ensino dessa disciplina é caracterizado por práticas monótonas, nas quais o professor busca transferir conceitos fundamentais por meio de

aulas cansativas. Ainda de acordo com a autora, alguns professores têm a concepção errada de que passar o máximo de conteúdos, por meio de um grande número de exercícios, é a melhor maneira de ensinar Matemática.

Os participantes da pesquisa relataram em suas falas que os professores geralmente não explicam a origem dos conceitos matemáticos, o que acaba ficando sem significado para os estudantes. O ensino acontecendo desta maneira é possível que os estudantes continuem com muitas dúvidas em relação aos conceitos matemáticos. Por meio da Matemática, podemos levar nossos alunos a compreenderem e atuarem no mundo, pois o conhecimento gerado nessa área do saber é fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Entretanto, para que os futuros docentes tenham esta concepção sobre a referida disciplina é necessário conhecer o ensino de uma maneira diferente da que eles geralmente foram ensinados.

A seguir iniciamos uma conversa com os futuros professores sobre suas experiências enquanto estudantes da Educação Básica. Vejamos o que os licenciandos comentaram:

***D2** - O professor chegava na sala e eu era daqueles que sentavam lá atrás e ele falava bem baixinho, aí ele escrevia uma fórmula na lousa é, isso é igual a isso sobre isso aí você coloca esse número aqui soma, multiplica, divide aí dá isso, aí isso aqui representa tal unidade, mas eu não sabia pra que era nem porque era, no caso eu esqueci. Quando eu cheguei aqui na UFCA eu senti tanta dificuldade nisso porque é como se tivesse aprendendo novamente como se tivesse vendo isso pela primeira vez.*

***I3** - No meu primeiro e segundo ano de Matemática era perfeito porque eu adorava Matemática, quando chegou no terceiro ano, eu não sei se era o professor ou o que aconteceu desandou a Matemática pra mim, ficou muito difícil eu não sei o que aconteceu.*

***J4** - Desde o fundamental até o médio, eu sempre fui o melhor da sala em Matemática.*

***N5** - Os alunos tinham medo da professora e não da Matemática, mas assim, era bem tranquila a forma de ensinar, só que, ela sabia, ela sabe, aliás, é, dar a aula, é, a metodologia que ela usa é bem clara mas não tinha o significado das coisas, não tinha muito, mas assim, era uma aula que dava pra o aluno entender alguma coisa.*

Quanto à vivência dos futuros professores com a Matemática, percebemos que o J4 sempre se destacou em Matemática, fato que pode ser constatado no seu desempenho durante a pesquisa. Entretanto, os demais participantes da pesquisa relataram que em alguns momentos não tiveram uma convivência muito harmoniosa e este fato afastou os estudantes

desta disciplina. Ou seja, alguns alunos acham que não são capazes de compreender estes conceitos e que não irão lhe ajudar em nada, a consequência disso é uma trajetória escolar sempre abaixo da média em Matemática e estudando somente por obrigação para ser aprovado no final do ano.

Esta série de fatores gerou diversos problemas posteriormente, tanto para os futuros professores que precisam de um conhecimento especializado em Matemática para o ensino, quanto para a sociedade que precisa de cidadãos com um bom embasamento teórico em Matemática para exercerem as diversas profissões. Nesta perspectiva, precisamos reformular objetivos do ensino e aprendizagem da Matemática, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade exige (D'AMBRÓSIO, 2010), ou seja, precisamos preparar melhor os nossos estudantes para que o Brasil supere a carência em professores de ciências exatas, de engenheiros e outros profissionais que precisam constantemente da Matemática.

O grande desafio dos professores será tentar acompanhar e trazer para a escola este avanço constante da Matemática, consideramos que para isso acontecer um fator necessário é uma boa formação docente, assim, traremos a seguir as concepções dos licenciandos sobre um bom professor de Matemática.

D2 - *A formação é um grande desafio, vem logo na cabeça que a graduação não é o suficiente para tornar um graduado em um docente ativo. Precisamos procurar novas metodologias e ter uma experiência teórica e prática.*

I3 - *Têm professores que sabem Matemática, mas não sabem ensinar. Aí quando um aluno, por exemplo, pergunta por que é aquela fórmula ele não sabe explicar, porque ele sabe um pouco sobre a Matemática só que ele não sabe explicar a Matemática.*

J4 - *Muitas vezes o professor sabe Matemática, mas não sabe transmitir pra os alunos.*

N5 - *O professor tem que saber transmitir.*

De acordo com os participantes da pesquisa, um professor de Matemática precisa ter o conhecimento específico do conteúdo e o conhecimento pedagógico. Este entendimento dos futuros docentes vai ao encontro das propostas levantadas por alguns teóricos da Educação Matemática, quais sejam, Fiorentini (2003, 2004), Ball, Thames, Phelps (2008) e Ponte (2009). Esses autores destacam que para os professores adquirirem os conhecimentos específico e pedagógico é necessário que a teoria e a prática sejam trabalhadas de forma conjunta.

A partir dessas reflexões, evidenciamos que a formação inicial é um ponto crucial na tentativa de amenizar a problemática do ensino e aprendizagem da Matemática. Neste momento de formação, propusemos reflexões para auxiliar os futuros docentes no desenvolvimento de práticas que propiciem o aprendizado discente. É neste contexto que nossa pesquisa foi inserida.

Quanto ao questionamento se os futuros professores compreendiam quais seriam os objetivos pedagógicos para o ensino de Matemática, estes refletiram da seguinte maneira:

***D2** - São os instrumentos usados na prática docente, como pincel, lousa, data show, brinquedos educativos, etc.*

***I3** - São conceitos e objetivos que você vai ter em sala de aula.*

***J4** - Penso eu que seria objetivos mais eficientes de ensinar, transmitir conhecimento de forma mais eficaz.*

***N5** - Objetivos a serem alcançados dentro de sala, tanto do conteúdo dado como também o desempenho mostrado pelo aluno.*

Resolvemos refletir sobre os objetivos, porque no decorrer de nossa prática como professor da licenciatura percebemos que os estudantes não têm clareza dos elementos de um plano de aula principalmente em relação aos objetivos pedagógicos. Nos deparamos, diversas vezes, com situações em que os futuros professores não sabem ao certo se os objetivos são para o professor ou para os alunos. Percebemos que o participante D2 ainda não entende bem o que são os objetivos, pois o mesmo confundiu com os recursos utilizados em sala de aula. Assim, é importante refletir com os futuros docentes sobre as aprendizagens da profissão de professor. Neste caso sobre a importância da clareza dos objetivos pedagógicos para os licenciandos. Para que se planejem para produzir o conhecimento matemático necessário em sala de aula.

Após percebermos os conhecimentos prévios dos futuros professores, trataremos a seguir sobre os conhecimentos adquiridos durante a formação, ou seja, objetivamos compreender o avanço dos licenciandos a partir da presente pesquisa.

5.2 Conhecimentos adquiridos na formação sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino

Estes momentos aconteceram durante nossa formação colaborativa, porque nosso objetivo era perceber os conhecimentos adquiridos pelos futuros professores sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino, para a partir daí compreender a evolução teórica dos

licenciandos. Portanto, os futuros professores já tinham tido alguns contatos com as ideias do campo conceitual multiplicativo.

Dentro dos conhecimentos adquiridos elegemos cinco categorias, quais sejam:

- a) ruptura do campo conceitual aditivo com o multiplicativo;
- b) diferentes significados da multiplicação;
- c) conhecimentos em relação aos conceitos de proporção simples;
- d) do pensamento proporcional ao pensamento funcional; e
- e) representação tabular e gráfica da função linear.

Abaixo detalharemos cada uma das categorias de análise utilizadas.

5.2.1 Ruptura do campo conceitual aditivo com o multiplicativo

Para este debate, foi escolhido o texto: “O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas”, de autoria de Magina, Santos e Merlini (2014). Nesta discussão, a ruptura do campo aditivo com o multiplicativo era um aspecto considerado de pouca relevância entre os futuros professores. A partir deste embasamento teórico, passaram a dedicar mais atenção ao assunto.

Consideramos esta categoria relevante para a nossa pesquisa por compreendermos que atividades envolvendo funções podem ser desenvolvidas desde o campo conceitual aditivo até o multiplicativo pelo fato de que operações aritméticas também são funções (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2012). Dessa forma, a compreensão aprofundada da aritmética requer considerações de natureza algébrica (SCHLIEMANN; CARRAHER, 2016), ou seja, também requer uma natureza funcional.

Ao longo da leitura do texto, evidenciamos que, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, o raciocínio dos estudantes tende a ser aditivo e, mais adiante, passa a ser multiplicativo. Este último campo é percebido como uma maneira mais rápida da soma de parcelas iguais, que já tinha sido uma percepção apresentada pelos futuros professores em seus conhecimentos prévios. De acordo com Magina, Santos e Merlini (2014), como o processo de adição repetida seria muito exaustivo, introduz-se a multiplicação. Nas falas abaixo, constatamos um diálogo sobre um dos casos em que ocorreram a referida ruptura.

Pesquisador – Vocês falaram que a multiplicação pode ser uma adição de parcelas sucessivas, mas haverá o momento da ruptura. Vocês se lembram que momento é esse?

D2 – Essa ideia de que somar sempre aumenta, só é válida no território dos naturais, porque no dos racionais é furada! Por exemplo, $0,2 \times 0,3$ é igual a $0,06$. A gente mostrou um caso em que multiplicamos dois números e obtemos um número menor. Nesses casos que acontecem a ruptura do campo aditivo para o multiplicativo.

I3 – Quando o resultado de uma multiplicação der menor do que esperado!

J4 – Multiplicação de decimais! Se a gente estiver trabalhando com o conjunto dos naturais pode até ser verdade, mas quando a gente passa para os racionais tem essa ruptura, multiplicar dois números vai diminuir, então é importante que os alunos entendam todo esse contexto.

A partir do estudo do campo conceitual multiplicativo, percebemos o avanço no ponto de vista dos estudantes da licenciatura. Nos conhecimentos prévios dos licenciandos, estas questões eram praticamente desconhecidas, e, no atual momento, os futuros professores já se mostram familiarizados com a teoria de Vergnaud.

Destacamos que a fala dos licenciandos vai ao encontro dos pressupostos teóricos de Magina, Santos e Merlini (2014). Os autores afirmam que, do ponto de vista didático, restringir multiplicação à adição de parcelas iguais repetidas implica considerar que multiplicação sempre aumenta, o que não é verdade no campo dos números racionais. A seguir, debateremos um problema do texto para continuarmos refletindo sobre a ruptura do campo conceitual aditivo para o multiplicativo.

“Dona Benta faz 35 bolos por mês, e ela gasta 4 ovos em cada bolo, quantos ovos ela gastará no mês?” A partir do problema proposto, explicitamos os seguintes argumentos:

I3 – A gente pode resolver somando 35 mais 35 mais 35 mais 35 ou multiplicando 35 vezes 4.

J4 – O resultado é o mesmo!

Pesquisador – E as grandezas serão as mesmas?

J4 – O 35 representa bolos! E o quatro, ovos!

Pesquisador – O que podemos concluir a partir da fala do J4?

I3 – O resultado vai ser o mesmo, mas a grandeza será diferente.

Pesquisador – Aí vocês podem ver outra ruptura do campo aditivo para o multiplicativo.

D2 – É que no aditivo a gente trabalha só com uma grandeza e no multiplicativo a gente têm duas grandezas.

Segundo Magina, Santos e Merlini (2014), no raciocínio aditivo, as situações podem ser analisadas a partir da relação parte e todo, ou seja, as partes têm a mesma grandeza, são conhecidas e se procura o todo ou o todo e uma das partes são conhecidas e se procura a outra parte. Nas situações envolvendo o raciocínio multiplicativo, constatamos uma relação entre duas grandezas e uma relação constante entre elas.

Apesar dos discursos mostrarem uma ampliação da percepção dos estudantes acerca do campo multiplicativo, esse problema não abrange todo o debate do referido campo. Constatamos que existem inúmeras situações que precisam ser dominadas pelos estudantes da licenciatura para que eles possam expandir seus conhecimentos sobre esse campo conceitual. Ao interagir com situações que requerem distintos raciocínios, acontecerá a apropriação e a expansão do campo conceitual multiplicativo (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). Adiante, argumentaremos sobre a segunda categoria que emergiu na pesquisa durante o estudo da teoria, qual seja, os diferentes significados da multiplicação.

5.2.2 Diferentes significados da multiplicação

A compreensão sobre os diferentes significados da multiplicação pode auxiliar os futuros professores na elaboração de situações de ensino que possibilitem uma efetiva aprendizagem da Matemática. Assim, os futuros professores podem ampliar seus conhecimentos sobre multiplicação e divisão.

Para Gitirana *et al.* (2014), a classificação dos problemas oferece uma estrutura teórica que auxilia o futuro professor no entendimento das diferentes representações simbólicas da multiplicação e divisão. Para compreendermos melhor os diferentes significados, debateremos dois problemas elaborados por Gitirana e colaboradores que culminam em uma mesma operação, qual seja, 2×4 , entretanto abordam situações que apresentam diferentes complexidades.

“A receita de brigadeiro de Dona Maria leva 1 lata de leite condensado para 4 colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 2 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate usará para fazer sua receita de brigadeiro corretamente?”.

A partir do problema proposto, explicitamos os seguintes debates:

Pesquisador – *Como é que vocês resolveriam este problema?*

D2 - *Uma lata para quatro colheres. É dois vezes quatro, que dá oito.*

I3 – *Se é uma lata para quatro colheres, duas latas vão precisar de oito colheres.*

J4 – *Quando dobra o número de latas, dobra também o número de colheres.*

N5 – *É uma proporção simples. Dá para fazer uma relação entre grandezas iguais ou diferentes!*

O raciocínio esboçado por D2 e I3 é da relação entre as grandezas latas e colheres, mas ao serem indagados sobre a forma que representaram sua explicitação os participantes disseram que fizeram a multiplicação de quatro vezes dois e como justificativa alegaram que desta maneira era mais fácil. Esta maneira de resolução é a que mais se aborda na escola, por isso é mais familiar para o sujeito. Entretanto, não é possível compreender o verdadeiro significado desta multiplicação.

O sujeito J4 relatou que como o número de latas dobrou o de colheres também será o dobro, ao explicitar seu pensamento coloca que basta encontrar o escalar que é 2. Ao fazer esta reflexão, o futuro professor expressou seu modo de entender a situação por meio da propriedade fundamental da proporção (SANTOS, 2015). N5 coloca que a proporção simples pode ser resolvida com grandezas de mesma espécie ou diferentes, ou seja, além de pensar com o operador escalar a participante traz como estratégia o operador funcional, que é um conhecimento central para o trabalho com funções (SANTOS, 2015). Evidenciamos que J4 e N5 tiveram um pensamento mais elaborado sobre esta situação problema, podemos constatar um conhecimento especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), que é um aspecto fundamental para a prática docente. A seguir, passaremos a discutir o segundo problema que demonstra os diferentes significados da multiplicação.

“Uma loja de Shopping vende tudo 2 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R\$ 4,00 na lojinha da esquina. Quanto a mesma sandália custará na loja do Shopping?”

A partir do problema, emergiu a seguinte discussão:

Pesquisador – *Como vocês explicariam o raciocínio desta questão?*

D2 – *A sandália custa oito reais no shopping.*

I3 – *É o mesmo cálculo, dois vezes quatro.*

J4 – *São grandezas de mesma espécie. A gente faz uma comparação: Qual é a mais cara, qual é a mais barata e quantas vezes é mais cara ou mais barata.*

N5 – *Mesmo o cálculo sendo o mesmo, no problema anterior a gente trabalhou com duas grandezas e agora é só uma grandeza.*

Evidenciamos que os participantes D2 e I3 em vez de explicarem o raciocínio da questão se preocuparam mais com a resolução da questão e com o resultado final, ou seja, continuam com o conhecimento comum do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Na presente pesquisa tentamos levar os futuros professores a compreenderem os diferentes significados da Matemática, particularmente das estruturas multiplicativas. Mostramos que entender o processo de resolução da questão é muitas vezes mais eficiente do que só olhar para a resposta correta.

Os sujeitos J4 e N5 perceberam que embora o cálculo fosse o mesmo havia uma diferença nas grandezas envolvidas, segundo os futuros professores, o primeiro problema tinha duas grandezas, já o segundo tem somente uma grandeza. Constatamos que ambos os participantes demonstram ter uma compreensão do que sejam as relações quaternárias e ternárias (VERGNAUD, 1983) e ter um bom entendimento das diferentes maneiras de lidar com a multiplicação (SANTOS, 2015). As concepções dos futuros professores demonstram um conhecimento especializado do conteúdo, ou seja, uma boa bagagem teórica para exercer a prática docente (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). A nossa intenção é que todos os participantes da pesquisa possam chegar a este nível de conhecimento.

Nesta perspectiva, por trás de uma operação básica como: 2×4 é possível elaborarmos problemas com inúmeros raciocínios. De acordo com Gitirana *et al.* (2014), o primeiro problema debatido neste evento, trata de conceitos de proporção simples, assim como a taxa de 4 colheres de chocolate por 1 lata de leite condensado, refere-se a um quociente entre duas grandezas. Ou seja, o número 4 significa o operador funcional, que é um conceito fundamental para a compreensão de funções. Ainda de acordo com as autoras, o segundo problema propõe a comparação entre grandezas de mesma natureza, no caso, o valor monetário. Observamos ainda que no segundo problema o número 2 representa o operador escalar, ou um número sem dimensões. Assim, passamos a entender que a compreensão dos futuros professores sobre os diversos significados da multiplicação, mais especificamente

sobre os operadores escalar e funcional, é relevante para o entendimento da covariação de uma função.

5.2.3 Conhecimentos em relação aos conceitos de proporção simples

Para constatar os conhecimentos adquiridos de proporção simples dos futuros professores aplicamos um instrumental do OBEDUC E-MULT, solicitando aos licenciandos que identificassem e explorassem os problemas que podem ser abordados com o operador funcional, conceito fundamental para a compreensão de funções. O referido instrumental tinha 13 problemas dentre os quais 6 problemas eram possíveis fazer a relação com o operador funcional. A seguir explicitaremos os problemas, por ordem de numeração, que os participantes da pesquisa poderiam resolver com o operador funcional e em seguida analisaremos os dados produzidos pelos futuros professores.

1) Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?
3) Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?
4) A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?
6) Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?
8) Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?
12) Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?

Quanto a identificação dos 6 problemas que poderiam ser trabalhados com o operador funcional, os participantes da pesquisa demonstraram o seguinte conhecimento: D2 e J4 identificaram todos os problemas de forma correta; já I3 e N5 selecionaram 5 problemas que podem ser trabalhados com o operador funcional e deixaram o problema oito de fora desta possibilidade. Em uma reflexão posterior com os participantes da pesquisa, D2 e J4

relatarem que não sentiram nenhuma dificuldade na identificação dos problemas. I3 e N5 relataram que têm algumas dúvidas relativas à ideia de função, por isso não conseguiram identificar que o problema de número oito abordava o operador funcional.

Consideramos relevante o momento de identificar os problemas que trabalham com o operador funcional para continuar o debate com os futuros professores sobre os diversos significados da multiplicação (GITIRANA *et al.*, 2014). De acordo com a abordagem teórica de Ball, Thames e Phelps (2008), podemos considerar a identificação do operador funcional com um conhecimento matemático necessário para o ensino.

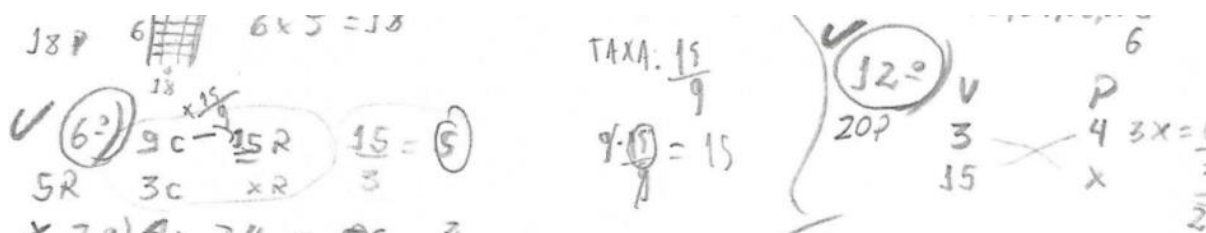
No momento posterior da formação, solicitamos aos futuros professores que resolvessem as referidas questões com o objetivo de gerar um debate para entender a forma de raciocínio dos futuros professores. Dentre os seis problemas selecionados, fizemos a seguinte divisão: os problemas um para muitos, quais sejam, 1, 4 e 8 e os problemas muitos para muitos, quais sejam, 3, 6 e 12.

Após o referido momento, dentre os seis problemas selecionamos dois que geraram maior debate entre os participantes da pesquisa para explorarmos a resolução feita pelos licenciandos e analisarmos o conhecimento comum e especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) dos futuros professores.

6) Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?

12) Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?

Figura 14 – Resoluções de D2 para os problemas 6 e 12



Fonte: Material utilizado na pesquisa.

Figura 15 – Resoluções de I3 para os problemas 6 e 12

⑥ Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar? $3 \times 15 = 45 \text{ reais}$.

Fonte: Material utilizado na pesquisa.

O participante D2 resolveu ambas as questões utilizando o procedimento da regra de três. Teve dificuldades em entender a ideia do operador funcional, é tanto que na questão de número seis o pesquisador teve que demonstrar como seria uma maneira de identificar o operador funcional. Além disso, embora chegando ao resultado correto fez a sexta questão de maneira errada, utilizou apenas uma divisão $15:5 = 3$, mas na verdade a questão pedia bem mais do que isso. O sujeito I3 errou a solução de ambas as questões, utilizou uma relação ternária e deixou explícito que não conseguiu compreender os significados da covariação, ou seja, coordenar os operadores escalar e funcional.

Constatamos que uma concepção predominante é de que as proporções simples formam uma relação de três termos e não de quatro. Vergnaud (1983) explica que esse tipo de resolução é correto apenas se forem consideradas as variáveis como números e não como dimensão. Convém ressaltar, que mesmo com uma formação colaborativa sobre o campo conceitual multiplicativo, alguns dos futuros professores continuam com o conhecimento comum em relação a estes conceitos.

Figura 16 – Resoluções de J4 para os problemas 6 e 12

⑥ $\begin{array}{l} 9c - 15r \\ 3 - x \end{array}$ pela razão mais fácil

$$9x = 45$$

$$x = \frac{45}{9} \Rightarrow 5$$

⑥ $\begin{array}{l} 3 - 4 \\ 15 - x \end{array}$

$$3x = 60$$

$$x = \frac{60}{3} = 20 \text{ pontos}$$

Fonte: Material utilizado na pesquisa.

Figura 17 – Resoluções de N5 para os problemas 6 e 12

06. *Problema de regra de três* regra

9	—	15	Razão = $\times 3$
3	—	$x = 5$	

$\rightarrow 3$ coisas de regra de três

07. Área total = $24m^2$ R\$ 5,00

10. *Voltagem* Pontos

3	—	4	Razão = $\times 5$
15	—	$x = 20$	

votar mancou 20 pontos

Fonte: Material utilizado na pesquisa.

J4 resolveu ambas as questões de forma correta, mas pela regra de três e disse que pela razão é mais fácil. O participante fez um indicativo de trabalho com o operador escalar, mas em momento algum mencionou o operador funcional. N5 também acertou a resolução, mas resolveu pelo operador escalar por também considerar menos complicado. A partir da resolução das questões, constatamos que mesmo com a formação os futuros professores não compreenderam por completo a ideia de covariação, pois para o entendimento deste conceito é necessário a coordenação de ambos os operadores e isto não aconteceu em nenhum momento. Os sujeitos que avançaram mais conseguiram chegar ao operador escalar.

Ao refletirmos sobre as resoluções listadas acima, todos os participantes da pesquisa relataram que preferem resolver pelo procedimento da regra de três, maneira que aprenderam na escola, em vez de resolver utilizando o operador funcional. Quanto à resolução, pelo operador funcional os futuros professores relataram ter dificuldades em relacionar as grandezas e que muitas vezes a relação é dada com números fracionários fato que dificulta mais ainda a resolução. Santos (2015) alerta que o contato com a resolução por meio do operador funcional é fundamental para a compreensão do conceito de função linear. Nesta perspectiva, evidenciamos que o não entendimento da relação de grandezas pode acarretar em dificuldades posteriores em relação ao ensino e à aprendizagem de funções e do entendimento de covariação.

Os dados que foram relatados acima vão ao encontro dos pressupostos teóricos de Ball, Thames e Phelps (2008), pois evidenciamos que os futuros professores têm apenas um

conhecimento comum sobre o operador funcional que não é suficiente para exercer a profissão docente. A partir destes achados, vamos tentar amenizar esta situação no decorrer de nossa formação, até chegarmos ao conhecimento especializado do conteúdo.

5.2.4 Do pensamento proporcional ao pensamento funcional

Na definição abordada sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas, partimos da ideia de que o conceito de proporção simples e função linear estão dentro deste campo conceitual. Desta maneira, debatemos sobre as suas relações.

Pesquisador – Vamos continuar o debate de um problema já discutido para compreendermos a relação de proporção simples com função linear? Dona Benta faz 35 bolos por mês, e ela gasta 4 ovos em cada bolo, quantos ovos ela gastará no mês?

Pesquisador – Como poderíamos resolver este problema?

J4 – Multiplicando 35 vezes 4!

Pesquisador – E em relação as grandezas?

D2 – O resultado seria em ovos!

Pesquisador – Por que?

D2 – Porque a questão pede em ovos!

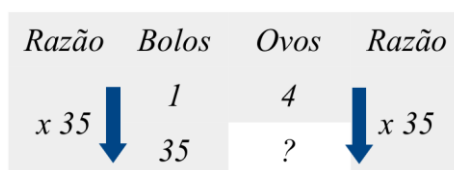
I3 – De acordo com as estruturas multiplicativas, isto é uma relação quaternária.

D2 – Agora entendi! A questão é essa, vamos usar a regra de três, mas lembrando que a regra de três não é um conteúdo, é uma forma de resolução, aí a gente pensa: pra fazer 1 bolo são 4 ovos, e 35 bolos levariam quantos ovos? Aí usaremos a regra de três.

Segundo Gitirana *et al.* (2014), os problemas de proporção simples abordam situações em que há uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, que estão relacionadas por um operador escalar multiplicativo e por um operador funcional. O primeiro operador trabalha dentro da mesma grandeza já o segundo entre duas grandezas.

Vejamos as ilustrações abaixo:

Figura 18 – Diagrama de resolução com operador escalar



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Diagrama de resolução com operador funcional

<i>Bolos</i>	<i>Razão</i>	<i>Ovos</i>
1	$\xrightarrow{x \ 4}$	4
35	$\xrightarrow{x \ 4}$	?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nosso foco será na abordagem do operador funcional. No exemplo citado acima pelo participante D2, podemos relacionar as grandezas bolos e ovos. A seguir, teremos o desfecho deste debate:

Pesquisador – E se fossemos resolver pelo operador funcional?

J4 – É 4!

Pesquisador – Por que?

J4 – Porque é um pra 4!

Pesquisador – É, 1 vezes 4, coloca uma seta para o 4, de 1 pra chegar em 4, multiplica por quanto?

D2 – Por 4!

Pesquisador – Então por que que é operador funcional?

D2 – Porque trabalha com grandezas diferentes, e o escalar trabalha com a mesma grandeza, mas o nosso foco é no operador funcional. $f(x) = 4x$.

Pesquisador – Vocês podem ver que a vantagem que a gente tem de trabalhar com o operador funcional, é que podemos envolver qualquer padrão, e vai dar certo pra tudo, 100 bolos, 200 bolos, pra gente não precisar ficar usando aquela soma sucessiva, e futuramente iremos trabalhar com gráficos, usando isso aqui, vocês sabem pelo que será representada essa função?

J4 – Uma reta que passa pela origem!

Pesquisador – Por que?

J4 – Porque o coeficiente linear é igual a zero!

Evidenciamos que a estratégia utilizada pelos futuros professores foi encontrar o operador funcional que correlaciona as duas grandezas, quais sejam, bolos e ovos. Chegamos à conclusão de que a relação de proporcionalidade é: $f(x) = ax$, em que a é igual ao valor do operador funcional. Esta generalização é a lei de formação da função linear, caso particular da função afim, com $b = 0$. Fato que também foi relatado pelo participante J4 ao afirmar que o gráfico seria uma reta por ser uma função afim e passaria pela origem por b ser igual a zero. A partir da discussão acima, constatamos que os participantes da pesquisa partiram do conceito de proporção simples e chegaram ao conceito de função linear e que ambos os conceitos estão

intimamente relacionados. Assim, evidenciamos que os estudantes têm dificuldades em funções porque muitas vezes não compreendem a relação entre as grandezas, ou seja, a covariação.

Em seguida, apresentamos um problema de proporção simples que elaboramos de forma conjunta e solicitamos que os futuros professores debatessem e resolvessem o referido problema.

Bruno comprou 12 litros de suco integral de uva para tomar em 6 dias. Ele quer tomar a mesma quantidade de suco todos os dias. Quantos litros de suco ele beberá por dia?

I3 – O operador escalar é $\frac{1}{6}$ e o funcional é $\frac{1}{2}$

N5 – Com o operador escalar a gente trabalha com a mesma grandeza

D2 – E com o funcional com grandezas diferentes, tá começando a fazer sentido as duas coisas

J4 – Basta multiplicar 12 por $\frac{1}{6}$ ou x por $\frac{1}{2}$ e considerar igual a 1 que encontramos a quantidade de suco que Bruno deve beber por dia.

O problema acima visou identificar o operador escalar e funcional que relaciona os dias com a quantidade de litros de suco de uva. Os futuros professores identificaram o operador escalar ao encontrarem um número que multiplicado por 6 resulta em 1, ou seja $\frac{1}{6}$, neste momento os participantes da pesquisa trabalharam com uma grandeza (tempo) e utilizaram a ideia de proporcionalidade para encontrarem a quantidade de litros de suco que Bruno deveria tomar por dia. Após este momento, passaram a discutir como relacionar duas grandezas, ou seja, trabalhar com o operador funcional. Os licenciandos evidenciaram que multiplicando 12 por $\frac{1}{2}$ obtemos 6, ou seja, o operador funcional neste problema é $\frac{1}{2}$ e a partir daí relacionaram volume e tempo. Segue a resolução de J4:

Figura 20 – Resolução do participante da pesquisa J4

LITROS DE SUCO	DIAS	OPERADOR ESCALAR = $\frac{1}{6}$
$\downarrow$ ESCALAR $\downarrow$ X OPERADOR FUNCIONAL = $\frac{1}{2}$	$\frac{12}{6}$ $\frac{6}{1}$ FUNCIONAL	$12 \cdot \frac{1}{6} = x$ $\frac{12}{6} = x$ $x = 2$
$x \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$ $x = 2$		

Fonte: Material utilizado na pesquisa.

Chamamos de f a relação entre dias e litros de suco, em que $f(1\text{dia})$ é a quantidade de litros de suco para um dia. Com essa notação, podemos evidenciar que a relação de proporcionalidade é $f(x) = ax$, em que a é igual ao operador funcional, ou seja $f(x) = \frac{1}{2}x$. Nessa perspectiva, evidenciamos que o operador funcional é igual, numericamente, não em termos dimensionais, ao valor da unidade (GITIRANA *et al.*, 2014).

Evidenciamos também que a partir das formações os futuros professores adquiriram um bom conhecimento teórico sobre o trabalho com grandezas e também com números fracionários, ambos eram apontados como dificuldades pelos licenciandos. Neste momento já conseguiram identificar os dois operadores e D2 relata que está fazendo sentido as duas coisas, quando indagado o que estava fazendo sentido o sujeito respondeu que eram estas relações de operador escalar e funcional, ou seja, constatamos que os futuros professores estão começando a entender as relações de covariação. Além disso, a resolução do problema de J4 fica evidente que estão passando do conhecimento comum para o especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Outra situação que dá significado à multiplicação e a ideia de função é a da composição de duas proporções simples, definida por Vergnaud (2009) de proporção múltipla. Nestes tipos de problemas, quando alteramos o valor de qualquer das grandezas envolvidas as outras grandezas também são alteradas. Vejamos o problema a seguir¹²:

Na região do Cariri, interior do Ceará, tem uma tradição de se preparar o baião molhado. O referido prato contém como ingredientes principais: arroz, feijão e creme de leite. No restaurante do seu Gil Bila o preparo acontece da seguinte maneira: para cada caixa de creme de leite ele usa 4 copos de arroz e para cada copo de arroz, 2 copos de feijão. Para preparar o baião usando 2 caixas de creme de leite, quantos copos de feijão ele precisará?

N5 – São duas proporções simples juntas

J4 – Quando a gente muda a quantidade de creme leite, muda também a quantidade de arroz e feijão

D2 – O operador funcional de creme de leite para copos de arroz é 4 e de copos de arroz para copos de feijão é 2

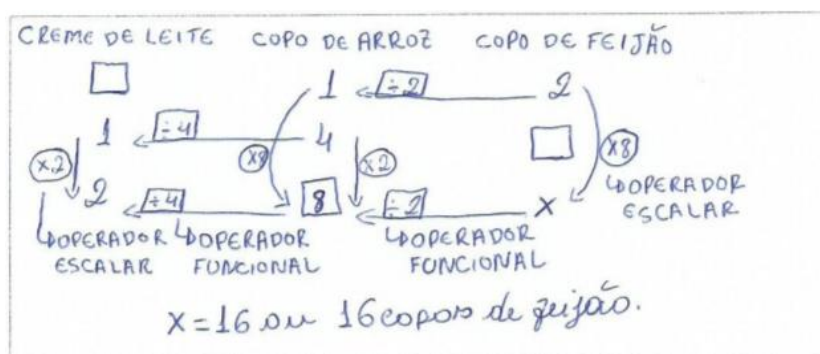
I3 – Então vai dar 16 copos de feijão

¹² Este problema foi debatido em nosso aporte teórico e por ser um problema que geralmente os futuros professores tinham dificuldades em responder optamos por repeti-lo na formação.

No problema debatido, temos a quantidade de caixas de creme de leite e a quantidade de copos de arroz relacionadas pelo operador funcional 4, ou seja, para cada caixa de creme de leite precisaremos de 4 copos de arroz. Por sua vez, a quantidade de copos de arroz, se relaciona com a quantidade de copos de feijão por outro operador funcional, qual seja, 2 copos de feijão por copo de arroz.

A composição dessas duas proporções simples origina outra relação de proporcionalidade entre a quantidade de creme de leite e a quantidade de copos de feijão. Essa composição é também uma proporção simples, onde foi trabalhada a ideia da covariação da função. Nesse contexto, observamos também mais um operador funcional que relaciona a quantidade de caixas de creme de leite com a de copos de feijão. Elencamos como exemplo, para 1 caixa de creme de leite temos 8 copos de feijão. Consequentemente, a partir da ideia de proporcionalidade, para 2 caixas de creme de leite precisaremos de 16 copos de feijão. Segue resolução de I3:

Figura 21 – Resolução do participante da pesquisa I3



Fonte: Material utilizado na pesquisa.

Nesta perspectiva, evidenciamos que as relações estabelecidas formam uma composição de funções. Ressaltamos, portanto, a relevância das formações, pois, no início da pesquisa, os futuros professores tinham dificuldades em estabelecer relação entre duas grandezas, e agora entre três grandezas que é ainda mais difícil todos os licenciandos resolveram de acordo com o diagrama apresentado e relataram, em um debate posterior, a compreensão das relações dos operadores escalar e funcional, ou seja, da covariação.

A participante N5 percebeu que as três medidas, quais sejam, caixas de creme de leite, copos de arroz e de feijão estavam relacionadas e formavam a composição de duas proporções simples. Nos momentos de reflexão com os futuros professores, constatamos que

perceberam as relações de dependência entre as medidas, organizaram as relações de modo a indicar que a relação funcional entre caixas de creme de leite e copos de arroz é de $f(x) = 4x$. A outra relação estabelecida pelos futuros docentes foi entre copos de arroz e copos de feijão que identificaram a função linear $f(x) = 2x$. Assim, evidenciamos que a partir dos momentos de formação os licenciandos estão começando a adquirir uma importante bagagem teórica para o ensino de função.

Por fim, ao verificarmos as relações presentes nas situações de proporção múltipla, percebemos que todas as grandezas envolvidas possuem algum tipo de correspondência, ou seja, relações dependentes. A última categoria que emergiu foi sobre a representação tabular e gráfica da função linear.

5.2.5 Representação tabular e gráfica da Função Linear

Esta categoria foi selecionada a partir de debates com os futuros professores acerca do conceito de função até chegar nas representações tabulares e gráficas. Para este momento da formação nossa intenção era discutir sobre as representações tabulares e gráficas da função linear, mas os futuros professores propuseram antes do trabalho com representações um debate sobre o conceito de função, como nosso trabalho aconteceu de forma colaborativa acatamos a proposta.

Começamos o debate trazendo que o conceito de função foi criado e desenvolvido a partir da atividade humana, sua origem se deu a partir da necessidade do homem em resolver problemas. Nesse contexto, os futuros docentes demonstram perceber o conceito de função de uma forma mais ampla do que uma simples substituição de valores.

I3 - O conceito de função vai além de uma lei de formação, é fruto de fatores históricos e sociais.

N5 - Por isso que devemos levar os estudantes a formalizarem seus próprios conceitos pela resolução de problemas e não chegar já dando a fórmula do $f(x)$.

Evidenciamos que a compreensão dos futuros professores em relação ao conceito de função vai ao encontro das ideias abordadas por Caraça (2000). Este autor destaca o movimento histórico e a necessidade de produção de conhecimento para a formalização do conceito de função, afirmando que este conteúdo é um organismo vivo, impregnado de condição humana e subordinado às grandes necessidades do homem. Além disso,

evidenciamos na fala da participante N5 a proposta do trabalho por meio da resolução de problemas que vai ao encontro dos pressupostos teóricos de Vergnaud (2009).

Debatemos também sobre os aspectos de variável dependente e independente como fundamentais para a compreensão da covariação das funções e as três partes componentes de uma função $f: A \rightarrow B$, um conjunto A , chamado o **domínio** da função, ou o conjunto onde a função é definida. Um conjunto B , chamado o **contradomínio** da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$, chamado o **valor** que a função assume em x . Vejamos o que os futuros professores relataram sobre o assunto.

***D2** - Em qualquer função existe a relação de dependência e covariância.*

***J4** - Podemos relacionar a variável independente com o domínio e a variável dependente com o contradomínio e esse valor que a função assume é a imagem.*

Os futuros docentes demonstraram ter um conhecimento especializado (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) sobre o conceito de função. Em suas explanações os licenciandos explicitam as variáveis e a relação de dependência e covariância, que são fundamentais na compreensão deste conceito. De posse de alguns conceitos relevantes sobre funções passaremos a discutir sobre a sua representação tabular.

Iniciamos este momento apresentando um quadro, a partir de uma pesquisa feita pelos futuros professores, em que relaciona o preço de uma carne com a quantidade de quilogramas. Consideramos este momento relevante para ampliar ainda mais o conhecimento dos futuros docentes na coordenação da covariação das funções. No quadro abaixo, são apresentadas duas grandezas que dependem uma da outra. Ela mostra a covariação do preço de uma carne por quilograma.

Quadro 4 – Representação de grandezas

Quantidade de Carne (Kg)	1	2	3	4	5
Preço (R\$)	16,00	32,00	48,00	64,00	80,00

Fonte: Elaboração dos futuros professores

Neste caso, o valor que pagaremos depende da quantidade de carne que compramos. Neste contexto, solicitamos aos licenciandos para calcularem o valor a ser pago por 40 kg de carne. Seguem as estratégias de resolução explicitadas:

D2 – *Se 4 Kg desta carne custa R\$ 64,00 então 40 Kg custa R\$ 640,00, é só aumentar 10 vezes o valor.*

I3 – *Utilizei proporção simples. Se 1 Kg de carne custa R\$ 16,00 então 40 Kg custará quanto? Basta encontrar o operador funcional*

J4 – *Multipliquei 40 por 16*

N5 – *Há! Podemos multiplicar qualquer valor por 16 que dá certo*

Pesquisador - *Como assim, qualquer valor que dá certo?*

D2 – *O operador funcional é 16, fica $f(x) = 16x$*

J4 – *É lei de formação da função linear*

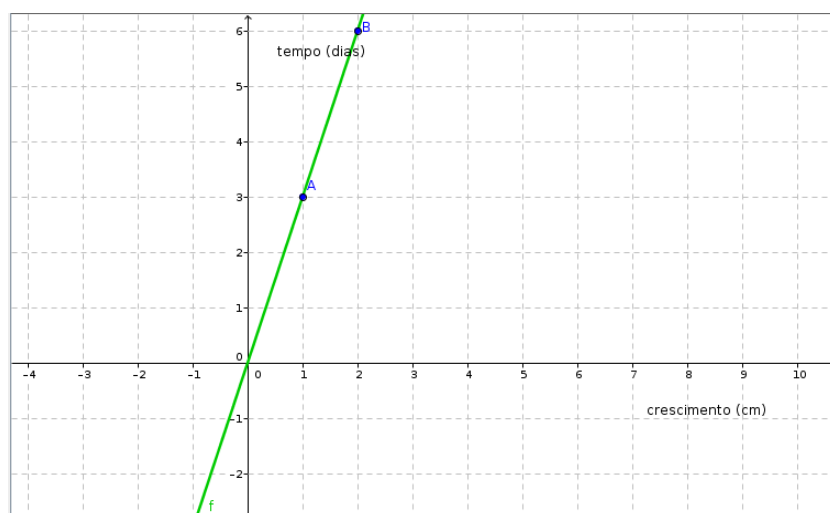
Evidenciamos que D2 utilizou uma estratégia de raciocínio do pensamento proporcional, percebeu que quatro quilos de carne custam sessenta e quatro reais, então quarenta quilos são dez vezes o valor. O sujeito I3 já menciona como forma de resolução a proporção simples, isto demonstra uma familiaridade com a teoria dos campos conceituais com foco nas estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009). J4 relata que basta multiplicar 40 por 16, em um momento posterior o futuro professor explicitou que foi buscar relação com um quilo de carne, ou seja, a relação um para muitos. E, por fim, a participante N5 inicia um processo de generalização até que os licenciandos chegam a conclusão da lei de formação da função linear, $f(x) = 16x$, ou seja, o operador funcional é 16.

As tabelas são formas de representações que desempenham um relevante papel nas generalizações, pois permitem o registro de resultados e a busca de padrões de um determinado conjunto de dados (CASTRO, 2016). A compreensão do padrão desta tabela se deu, principalmente, pelo operador funcional. Os futuros professores demonstram compreender como essas relações funcionais estabelecidas influenciam no conjunto de dados que compõem cada grandeza envolvida na tabela, atestando, portanto, o entendimento da covariação.

Carraher, Schliemann e Brizuela (2000) explicam que é mais comum o indivíduo perceber a relação aditiva entre as linhas do que as relações funcionais entre as colunas. Nesta perspectiva, levar os futuros professores a pensarem sobre a relação invariante entre as grandezas requer momentos didáticos específicos. Nesse contexto, constatamos a efetividade da formação colaborativa ao possibilitar aos futuros professores perceberem e explicitarem as relações funcionais dos dados tabulares. A compreensão das relações funcionais é também requisitada na interpretação e construção dos gráficos lineares, que são debatidos a seguir.

Iniciamos este momento apresentando um gráfico construído no *software* Geogebra, a partir de um problema criado pelos futuros professores, em que relaciona o crescimento (cm) de certa espécie de bambu em virtude do tempo (dias). Consideramos este momento relevante para ampliar ainda mais o conhecimento dos futuros docentes na coordenação da covariação das funções. No gráfico abaixo, são apresentadas duas grandezas que dependem uma da outra.

Figura 22 – Representação gráfica no Geogebra



Fonte: Elaboração dos futuros professores

I3 – Pelo gráfico dá pra perceber que 1cm cresce em 3 dias

N5 – Utilizando a proporção simples a gente encontra os pares ordenados para representar no gráfico

D2 – O operador escalar é 2 e o funcional é 3. Pelo operador funcional a gente sabe que a lei de formação da função é $f(x) = 3x$

J4 – É o gráfico de uma função linear, pois é uma reta [...] que passa pela origem

I3 – A reta passa sempre pelos pares ordenados (cm, dias)

Constatamos que os futuros professores conseguiram explicitar as grandezas envolvidas, estabelecer as relações funcionais para a reta representada. Assim, evidenciamos a compreensão dos licenciandos em relação aos conceitos de covariação na situação representada no gráfico. Elencamos como exemplo quando D2 aborda a coordenação dos operadores escalar e funcional.

I3 ponderou que a reta é formada por pontos que relacionam as duas medidas, quais sejam, centímetros e dias. Constatou ainda que a relação centímetros por dias, origina o

par ordenado (1,3) que representa um ponto (x;y) no plano cartesiano. A verificação desses pontos é relevante, porque é a partir da ideia de par ordenado e da relação formada por esses pares que foi introduzido o uso do *software* Geogebra.

Salientamos que os debates nos momentos de formação foram fundamentais para que os futuros professores tivessem esta compreensão sobre a representação gráfica da função linear. Evidenciamos que os licenciandos passaram a analisar um conjunto de dados seguindo o mesmo padrão, ou seja, avançaram na análise de gráficos. Passaram, portanto, a coordenar a variação de duas variáveis (CONFREY; SMITH, 1995), aqui apresentado como grandezas ou por x e $f(x)$. Castro (2016) afirma que a coordenação de grandezas é um aspecto relevante para o entendimento da covariação.

A partir do que foi discutido na presente pesquisa, percebemos que o raciocínio covariacional tem relevância na interpretação e representação de informações em um gráfico de uma função (conhecimento especializado do conteúdo) e também é fundamental para se pensar sobre a prática pedagógica. Entendemos que os futuros professores precisam conhecer o conteúdo que ensinam e serem capazes de usar a Matemática que é necessária no trabalho docente, ou seja, precisa também conhecer sobre a prática pedagógica.

5.3 Conhecimento especializado do conteúdo a partir da utilização pedagógica das tecnologias digitais

Neste tópico estão apresentados e analisados os dados que foram construídos durante o período em que ocorreu o nosso processo de formação, na etapa de co-operação da pesquisa colaborativa. A partir dos debates realizados, apresentamos situações que sinalizam características relevantes para entender o conhecimento especializado do conteúdo a partir da utilização pedagógica das tecnologias digitais.

Neste momento da pesquisa organizamos o conhecimento que emergiu entre os futuros professores em categorias, quais sejam, relações entre grandezas, múltiplas representações da função linear e variação de uma função afim. Elegemos uma categoria principal que se refere a um termo elaborado por Ball, Thames e Phelps (2008) para debater sobre o conhecimento especializado do conteúdo a partir da utilização pedagógica das tecnologias digitais (MISHRA; KOEHLER, 2006).

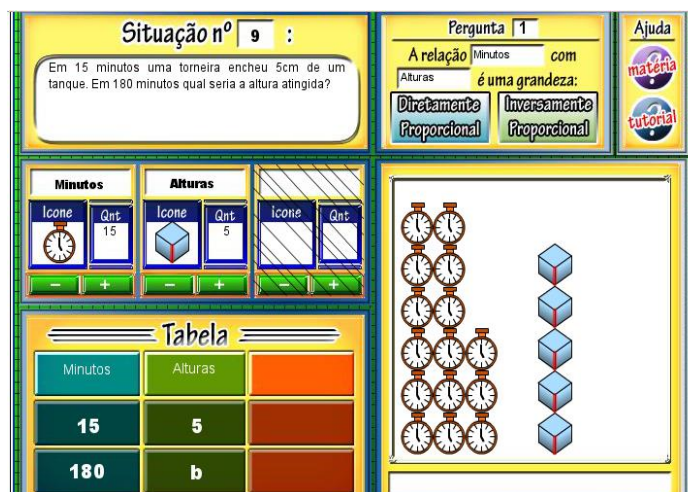
5.3.1 Relações entre grandezas

Como parte dos objetivos desta pesquisa nos propomos a desenvolver estratégias pedagógicas voltadas ao conhecimento da compreensão das estruturas multiplicativas selecionados em alguns objetos de aprendizagem. Para trabalharmos didaticamente o conhecimento das relações entre grandezas, identificamos os objetos de aprendizagem: Equilibrando proporções e GP Funcional.

As situações do equilibrando proporções são problemas de proporção simples com correspondência muitos-para-muitos e exploram o campo numérico dos números racionais, com relações entre as grandezas (CASTRO, 2016). Diante das possibilidades existentes no recurso para explorar as representações de uma grandeza e suas relações de diferentes formas, solicitamos que os futuros professores identificassem o tipo de relação das grandezas e, quando as grandezas fossem diretamente proporcionais.

A seguir, detalhamos um dos problemas trabalhados durante esta pesquisa. O problema está apresentado na figura 23, seguido dos debates acontecidos com os futuros professores.

Figura 23 - Problema explorado com o OA Equilibrando Proporções



Fonte: Captura de tela do Equilibrando Proporções

Este problema apresenta uma situação de correspondência muitos-para-muitos, de multiplicação e divisão. O recurso permite a interação com seus ícones, sendo possível aumentar ou diminuir a quantidade de uma grandeza e ver como essa variação influencia na

quantidade da outra grandeza, já que elas estão relacionadas. Temos, ainda, a representação da relação entre as grandezas de forma tabular. Segue o debate sobre o referido problema:

J4 - Temos uma grandeza diretamente proporcional.

Pesquisador - Diretamente, por quê?

J4 - Porque quanto mais tempo eu tenho, mais a torneira vai encher o tanque.

D2 - Então se em quinze minutos uma torneira encheu cinco centímetros, se aumentar o número de minutos então vai aumentar os centímetros.

Pesquisador - Qual seria o nosso operador escalar e funcional?

I3 - O operador escalar é 12 e o funcional é 3.

Pesquisador - Em relação ao operador funcional: Seria vezes três ou dividido por três?

J4 - $f(x) = 3x$

Pesquisador - Quem seria o $f(x)$? O $f(x)$ seria os centímetros ou os minutos?

D2 - A variável x seria os centímetros e o $f(x)$ os minutos! $f(x) = 3x$

J4 - Mas também a variável x pode ser os minutos e o $f(x)$ os centímetros! $f(x) = x/3$

Evidenciamos que o debate dos futuros docentes girou em torno de quem seria a variável dependente e independente, ou seja, uma relação entre as grandezas tempo e comprimento. Além disso, percebemos que os licenciandos chegaram à conclusão de que, em determinado momento, a variável dependente poderia ser os minutos e a independente os centímetros e vice-versa. Tudo isso fica a depender da relação entre as grandezas na lei de formação que estabelecemos. A “lei” citada é uma generalização que vai além de uma simples fórmula. Diante do exposto, evidenciamos que ocorreu uma integração do conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006). A seguir continuamos um debate sobre o problema escolhido no equilibrando proporções:

Pesquisador: Sabemos que as funções $f(x) = 3x$ e $f(x) = x/3$ indicam as relações entre grandezas. Nestas funções o que significa o $f(x)$, o x , o $3x$, o $x/3$, o 3 e o $1/3$?

N5: O $f(x)$ e o x significam a imagem e o domínio de uma função, no problema que discutimos a imagem e o domínio eram os minutos e os centímetros a depender da lei de formação que seria escolhida.

J4: O $3x$ e o $x/3$ é uma relação funcional que estabelecemos entre as grandezas.

D2: E o 3 e o $1/3$ são os operadores funcionais.

A modificação de estratégias entre o domínio e a imagem mostra a ampliação de competências que foram possibilitadas pela interação com recurso digital ao simular, por meio de múltiplas representações, situações de correspondência muitos-para-muitos de diferentes

formas, possibilitando o desenvolvimento da compreensão da covariação (CASTRO, 2016), a partir das relações entre grandezas.

Segundo Schliemann e Carraher (2016), o ensino de Matemática que enfatiza relações entre as grandezas, incluindo as relações funcionais, contribui para a compreensão das operações de aritmética e álgebra. Além disso, contribui para a abordagem dos conceitos de grandezas, proporções e funções, inter-relacionando esses tópicos como parte de um campo conceitual mais amplo (VERGNAUD, 1996).

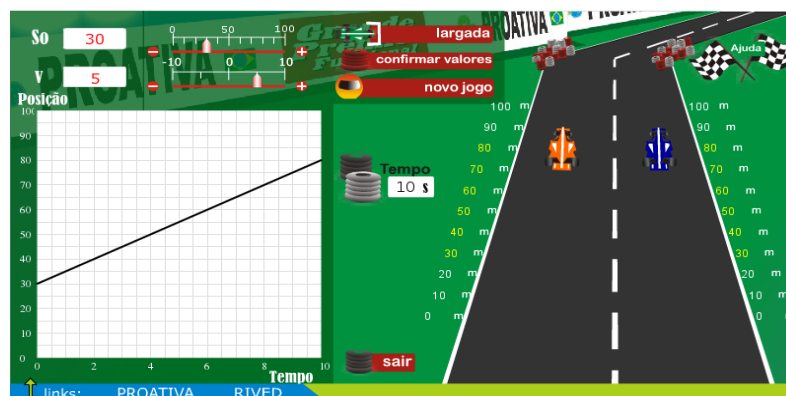
O entendimento do conceito de grandezas é necessário para que os futuros professores compreendam as três partes componentes de uma função: domínio, imagem e o valor que a função assume. A formalização de que em uma função linear existe uma variável dependente e outra independente é um passo fundamental para a compreensão de covariação.

No problema debatido, em determinado momento, a lei de formação envolvia uma multiplicação. Em outro momento, uma divisão ou uma relação entre ambas. Neste contexto, reforçamos os pressupostos da teoria dos campos conceituais com foco nas estruturas multiplicativas acerca da indissociabilidade entre as operações de multiplicação e de divisão (SANTOS, 2015).

O ensino e a aprendizagem de Matemática, privilegiando as relações entre grandezas e os conceitos de funções, permitem também que, a partir da análise de situações, enunciados verbais e quantidades no mundo físico e das representações intuitivas propostas pelos futuros professores, as representações convencionais como tabelas de funções, gráficos e notações algébricas, sejam introduzidas como representações alternativas dos mesmos conceitos matemáticos (SCHLIEMANN; CARRAHER, 2016).

Na continuidade da abordagem das relações entre grandezas, a seguir abordaremos a exploração do OA GP Funcional. Nesta ferramenta, é disponibilizado um jogo de corrida de Fórmula 1, que possibilitou os sujeitos a perceberem a relação entre as grandezas velocidade, distância e tempo, conforme apresentado na figura abaixo.

Figura 24 – Colocando em prática



Fonte: Captura de tela do GP Funcional

Neste momento, os futuros professores colocaram a opção largada e o carro laranja saiu da posição 30 metros e foi até à posição 80 metros em um tempo de 10 segundos. O desafio para os futuros docentes era manusear o espaço inicial e a velocidade do carro azul para conseguirem chegar na mesma posição. A seguir, vejamos o debate que aconteceu:

I3 - O carrinho azul precisa sair de 30 metros também, que é a mesma posição do carrinho laranja. Coloca aí!

D2 - Agora vamos calcular a velocidade do carrinho laranja, para colocar a mesma velocidade no carrinho azul.

J4 - Basta a gente dividir o espaço percorrido pelo tempo gasto. Dá 5 m/s

N5 - Envolve os conceitos de multiplicação e divisão das estruturas multiplicativas.

D2 - Realmente não dá para ensinar multiplicação e divisão de forma separada.

J4 - Com o resultado dá para fazer uma proporção simples. Se percorrer 5 metros em 1 segundo, irá percorrer 10 metros em 2 segundos. E assim por diante.

N5 - Então a função linear é $f(x) = 5x$.

Nestes debates os licenciandos refletiram e generalizaram situações. Elencamos como exemplo, a atividade de livre manipulação do objeto de aprendizagem; o momento de desenvolvimento das ações de elaboração dos conceitos sobre grandezas e a discussão desses momentos como oportunidade de socializar o conhecimento pedagógico do conteúdo alinhado ao uso das tecnologias digitais (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Os futuros professores também relataram que não dá para trabalhar multiplicação e divisão de forma separada, isto foi uma concepção que adquiriram durante a formação colaborativa. As concepções dos licenciandos estão de acordo com os pressupostos teóricos de

Vergnaud (1991), que considera que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é um conjunto de situações que pedem multiplicação, divisão ou a combinação de tais operações.

No debate acima destacamos a última fala de J4 e de N5, respectivamente. Tal destaque é pertinente para esta categoria em análise, por ser o momento do debate que o foco é na relação entre grandezas. J4 relata que com o resultado dá para fazer uma proporção simples, ou seja, se percorrer 5 metros em 1 segundo, percorrerá 10 metros em 2 segundos e assim sucessivamente. Já N5 aborda que esta relação é uma função linear, qual seja, $f(x) = 5x$.

A percepção de J4 consistiu em uma efetiva relação entre grandezas, ao relacionar comprimento e tempo o futuro professor trabalhou com duas grandezas que indicam a compreensão de uma relação funcional. Constatou que a relação proporcional entre duas grandezas permanece a mesma após transformações proporcionais nas duas grandezas relacionadas. Evidenciamos que o futuro professor representou e compreendeu a relação entre as duas grandezas, em vez de apenas trabalhar com operações sobre dois números.

Em diálogo posterior com N5, a participante da pesquisa relatou que quando abordou a função linear teve como objetivo representar a relação entre as grandezas comprimento e tempo. A futura docente determinou que o valor de uma grandeza deveria ser multiplicado por 5 para se obter o valor de outra grandeza e produziu a função linear $f(x) = 5x$. Constatamos que a participante da pesquisa ao determinar que uma grandeza deveria ser multiplicada por 5 para se encontrar a outra grandeza encontrou o valor da invariância que é 5 e que ajuda a compreender a covariação.

Os participantes da pesquisa fizeram uma relação da resposta encontrada com a proporção simples e função linear. Este fato foi possível porque os futuros professores avançaram em relação ao entendimento dos conceitos de grandezas, percebendo-a não apenas como um dado numérico, mas partindo de uma compreensão indissociável entre número e unidade de medida. De acordo com Gitirana *et al.* (2014), o problema resolvido pelo fator funcional relaciona grandezas e é fundamental para o entendimento do conceito de funções.

A partir da interação dos participantes da pesquisa com os recursos digitais foi possível averiguar uma melhor compreensão da relação entre grandezas, permitindo aos futuros docentes o efetivo entendimento deste conceito. Tal constatação coaduna com os estudos de Castro (2016), ao perceber a importância de observar que as situações que envolvem grandezas ajudam na compreensão da covariação, por serem problemas de proporção simples. Tendo em vista que os futuros professores compreenderam as relações entre grandezas passaremos a debater a seguir as múltiplas representações da função linear.

5.3.2 Múltiplas representações da Função Linear

Nesta categoria nosso objetivo foi identificar os momentos que os graduandos debateram e compreenderam as múltiplas representações da função linear. Inicialmente trazemos estes debates por meio da utilização do *software* Geogebra e posteriormente com o OA GP Funcional. Com estes recursos digitais combinamos elementos algébricos e geométricos da função linear.

No Geogebra, observamos que a opção janela de álgebra permite visualizar a representação algébrica dos objetos representados geometricamente na janela principal, ou seja, o *software* demonstra claramente em sua interface a ideia do trabalho com múltiplas representações. A seguir temos a fala dos futuros docentes sobre a relevância da utilização do Geogebra na geração de múltiplas representações:

D2 - *Podemos abordar a forma gráfica e algébrica das funções.*

J4 – *Estas representações são importantes para entendermos o conceito de função.*

Pesquisador – *Por que são relevantes para compreendermos o conceito de função?*

J4 – *Porque a gente consegue entender a relação que existe entre a representação gráfica e algébrica e deixamos de tratar isso como coisas que não têm relação.*

D2 aponta a relevância de se trabalhar com as representações gráficas e algébricas no Geogebra. J4 relata que com a utilização do Geogebra podemos passar a entender a relação existente entre as representações algébricas e gráficas de uma função. Observamos um avanço dos futuros professores no que se refere ao conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006). Nesta perspectiva, Borba e Penteado (2010) afirmam a importância dos estudantes coordenarem múltiplas representações para a aprendizagem do conteúdo de funções e que isto se torna possível em ambientes computacionais.

A partir do manuseio do Geogebra, percebemos que a manipulação deste recurso está bem além do alcance do lápis e do papel. Outras vantagens evidenciadas, de acordo com Borba e Penteado (2010, p. 37), é que os recursos digitais “[...] além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação”.

Durante a formação chegamos ao consenso de que os futuros professores iriam elaborar situações-problema sobre os conceitos de função linear, que tem por objetivo colocá-

los diante da tríade $C = (S, I, R)$ de Vergnaud (1991). Ainda segundo o autor, é por meio das situações, dos invariantes e das representações que um conceito adquire sentido para o sujeito. Para esta categoria, as representações é o nosso foco.

Por solicitação dos participantes da pesquisa, este momento foi realizado em dupla. Apresentamos a situação-problema de uma dupla porque a situação-problema da outra dupla foi análoga à da primeira mudando somente as variáveis.

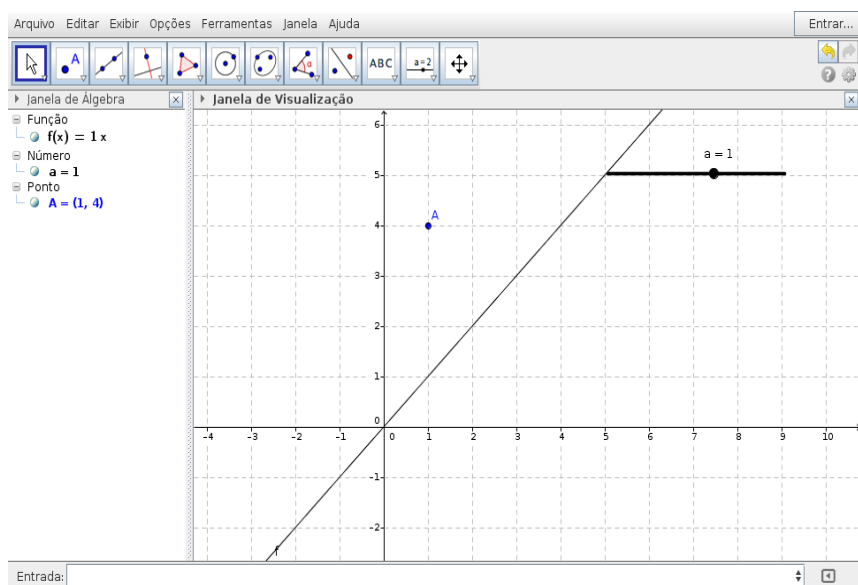
D2 e J4 - *Um grupo de escoteiros vai a pé desde a Quinta da Léguas até o Vale das Lonjuras. Eles estão tão habituados a fazer este trajeto que a sua velocidade é praticamente constante. Percorrem 4 quilômetros em uma hora. Após caminhar cinco horas eles terão percorrido aproximadamente quantos quilômetros?*

Primeiramente os futuros professores colocaram no Geogebra os pares ordenados (1,4) que estavam explícitos no problema. O par ordenado x eles escolheram para representar as horas e o par ordenado y os quilômetros percorridos. Em seguida, criaram um controle deslizante no plano cartesiano do *software*, como o próprio nome sugere o referido controle é utilizado para mover os coeficientes de uma função, neste caso uma função linear, e perceber o movimento da reta e o seu comportamento no gráfico.

Os futuros professores relataram que depois de colocarem o par ordenado (1,4) e em seguida criarem o controle deslizante a , inseriram no campo de entrada a função do tipo $f(x) = ax$. Inicialmente consideraram o $a = 1$ e perceberam que a reta não passava pelo ponto (1,4).

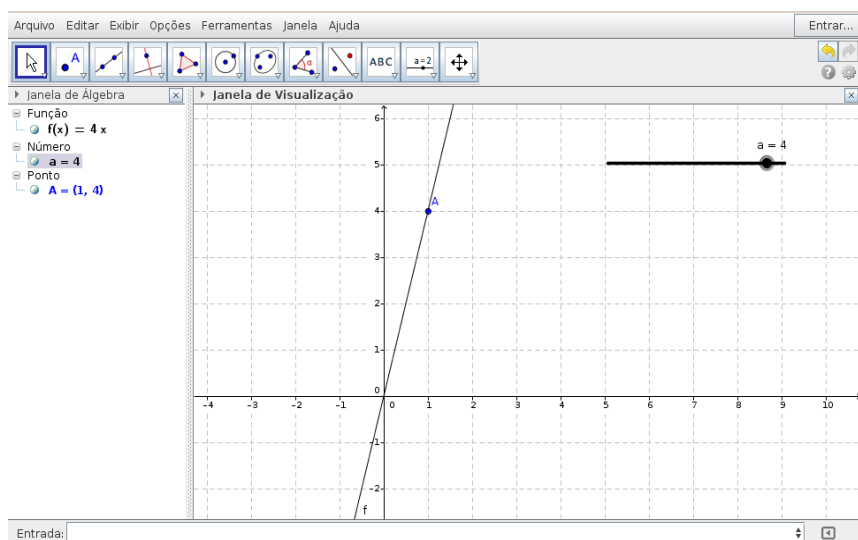
Em seguida resolveram colocar o controle deslizante para animar, com o movimento da reta perceberam que quando o controle deslizante atingia o valor 4, ou seja $a = 4$, a reta tocava no ponto (1,4). Desta maneira, os futuros professores relataram que a função seria $f(x) = 4x$. Vejamos a seguir as imagens da manipulação realizada pelos participantes da pesquisa e em seguida os seus comentários:

Figura 25 – Manipulação no Geogebra



Fonte: Captura de tela do Geogebra

Figura 26 – Controle deslizante



Fonte: Captura de tela do Geogebra

J4 – A inclinação da reta mudou. A medida que o controle deslizante estava animando, a reta foi mudando também de ângulo.

N5 – Agora ficou claro porque o coeficiente da função linear é também chamado de coeficiente angular. E que as representações gráfica, algébrica e do par ordenado estão todas relacionadas.

Constatamos que o diferencial deste momento de manipulação com as tecnologias digitais foi a possibilidade das representações gráficas e algébricas, ou seja, com as tecnologias podemos abordar as múltiplas representações. Além disso, a forma dinâmica do Geogebra permitiu que os futuros professores ao mudarem os coeficientes encontrassem a lei de formação que estavam procurando.

Pesquisas como as de Confrey (1992) e Borba e Vilarreal (2005) afirmam que a abordagem de múltiplas representações por meio de ambientes computacionais propiciam a simulação de situações, melhoram as visualizações e possibilitam a formulação e construção de conceitos. Os ambientes dinâmicos de computadores que incluem múltiplas representações podem simular a mudança que ocorre continuamente na covariação de uma função. Dessa maneira, compreendemos que os conceitos matemáticos podem ser trabalhados por meio de múltiplas representações, dentre eles o de função.

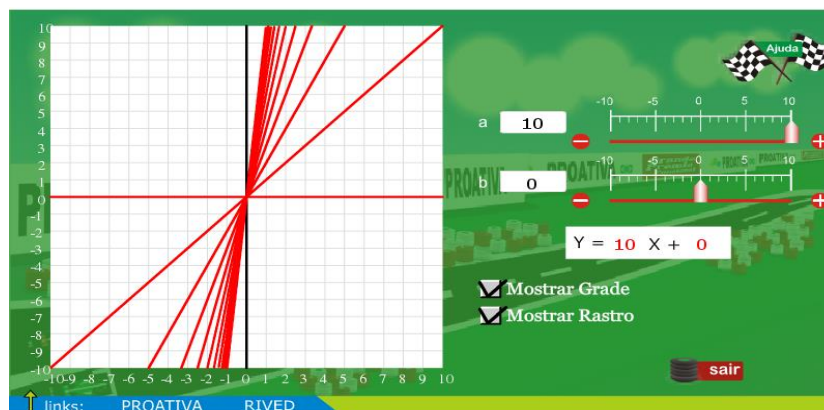
Um ambiente de múltiplas representações permite a representação de um problema e a sua solução de diversas maneiras. Isto torna o ambiente virtual mais eficiente e pode levar o sujeito à aprendizagem de um conceito por meio da coordenação simultânea das representações algébricas e gráficas.

Os participantes da pesquisa relataram ainda que, após a manipulação no Geogebra, utilizaram o operador funcional 4 que é um valor fixo, ou seja, a invariância e a partir da relação de um para muitos, multiplicaram o tempo pelo operador funcional e encontraram a covariação da função linear. De acordo com Santos (2015), a partir da identificação do operador funcional nos problemas de proporção simples podemos desenvolver os conceitos de função.

Além disso, os futuros professores explicitaram que em cinco horas os escoteiros percorrem vinte quilômetros. Ou seja, $f(x) = 4 \cdot 5 \rightarrow f(x) = 20 \text{ km}$. Os licenciandos representaram também em forma de par ordenado (5, 20). Estas ações foram potencializadas devido ao uso do *software* Geogebra, que proporcionou dinamicidade ao processo de construção e reflexão dos conceitos de função. Assim, permitiu que o foco fosse na compreensão das relações e no estabelecimento de generalizações. A relação funcional estabelecida entre duas variáveis e a relação invariante entre x e $f(x)$ foram relevantes para a construção do conceito de covariação (CASTRO, 2016).

A seguir apresentamos uma produção de gráfico dos futuros professores, no GP Funcional que ficou explícito o debate e a compreensão das múltiplas representações da função linear.

Figura 27 – Gráficos no GP Funcional, $b = 0$



Fonte: Captura de tela do GP Funcional

Neste momento de geração de gráficos no GP Funcional, os futuros docentes consideraram o coeficiente $b = 0$, com a intenção de perceber o movimento da reta no gráfico de uma função linear e a função na forma algébrica que se formava. Desta maneira, constataram que a inclinação da reta muda sem sair da origem. Vejamos o debate dos futuros docentes sobre a experiência:

N5- A gente começou a manusear a reta no gráfico deste que sua representação algébrica era $f(x) = 0x + 0$. Resolvemos não alterar o coeficiente b para realizarmos o trabalho com uma função linear. Ao movimentarmos a representação algébrica de $f(x) = 1x$ até $f(x) = 10x$ percebemos que na representação geométrica o coeficiente angular foi se alterando e o linear permaneceu sempre na origem.

D2 – Agora a gente entende que a representação algébrica da função linear $f(x) = 10x$ está ligada a sua representação geométrica que sempre será uma reta que nunca sai da origem. Massa! Na medida que movimentamos a representação algébrica a gente também movimentava a representação geométrica.

I3 - É importante perceber que a forma algébrica de uma função pode ser representada por um gráfico e vice-versa.

N5 – O trabalho com estas duas representações de forma conjunta é importante e o OA pode ajudar nisso.

Segundo Borba e Penteado (2010), no ensino deste conteúdo é necessário abordar diferentes representações para uma mesma função. Nesse contexto, os licenciandos passam a coordenar representações, que é uma competência fundamental na aprendizagem deste conceito. Essa abordagem ganha força no GP Funcional que gera gráficos vinculados a expressões algébricas.

Percebemos que utilizando as tecnologias digitais os futuros professores partiram da ação para chegar à formalização. Ao movimentar os coeficientes livremente os futuros

docentes compreenderam a coordenação entre as representações algébricas e gráficas de uma função linear. Chegaram também à conclusão de que a curva do gráfico de uma função linear sempre será uma reta (BALDINI, 2016).

De acordo com Ferraz e Gitirana (2007), em uma primeira abordagem de gráficos de funções, o método de manipular livremente gráficos é importante para que o sujeito possa ter a ideia da curva que representa o gráfico da função. Para cada família de função, há um tipo de curva geométrica que corresponde a seu gráfico, como, por exemplo, na função linear a curva é uma reta. Evidenciamos que manipulando o GP Funcional os futuros professores conseguiram compreender os conceitos em estudo (ALMEIDA; VALENTE, 2011).

Percebemos que os debates durante os momentos de formação provocaram o avanço dos futuros professores na compreensão da coordenação entre as representações de uma função linear. Nesse contexto, destacamos a importância do conhecimento pedagógico das tecnologias no ensino de funções. Segundo Borba e Penteado (2010), as mídias digitais associadas a uma adequada mediação do professor transformam o tipo de Matemática abordada em sala de aula.

A contribuição dos recursos digitais abordados nesta categoria foi devido a capacidade de gerar diversas representações matemáticas para as funções e ao fato de que as referidas funções podem ser representadas não só por notação algébrica, mas também geometricamente, mediante representação gráfica, ficando assim evidente a coordenação das representações. No próximo item discutiremos a variação de uma função afim.

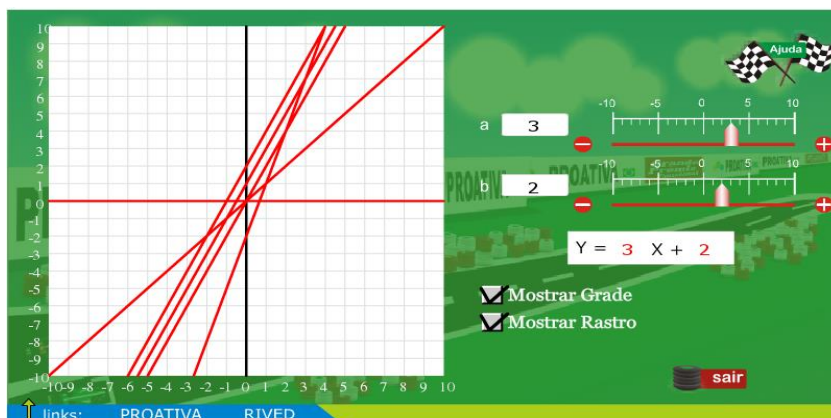
5.3.3 A variação de uma Função Afim

Nesta categoria nossa intenção foi perceber os momentos que os futuros professores compreenderam a variação de uma função afim. Primeiramente expomos uma discussão por meio da utilização do GP Funcional e posteriormente com o recurso digital Variação da Função Afim.

Solicitamos aos futuros docentes que entrassem no GP Funcional na opção “conhecendo os coeficientes”, para manipularem livremente os coeficientes a e b e observarem e discutirem como o gráfico se comportava. Após a manipulação, iniciamos alguns debates para entender as percepções dos licenciandos, nossa estratégia foi estabelecer condições para as mediações necessárias entre os futuros professores e o conhecimento especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) a partir da utilização das

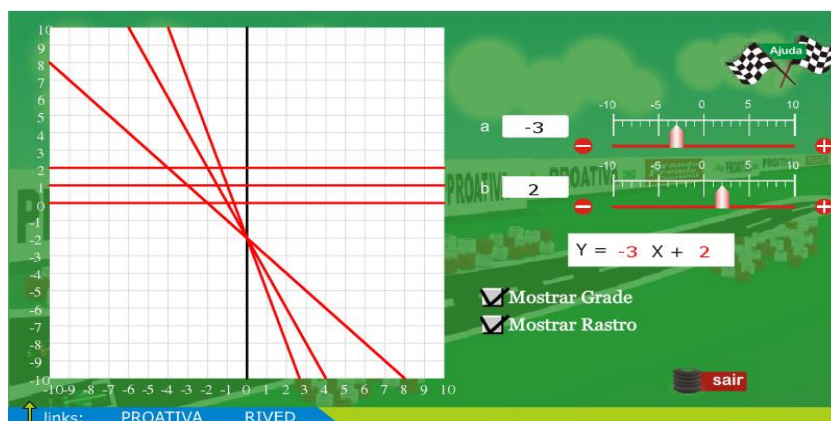
tecnologias digitais. A seguir temos a geração de gráficos no GP Funcional realizada pelos futuros professores.

Figura 28 – Gráficos no GP Funcional, $a > 0$



Fonte: Captura de tela do GP Funcional

Figura 29 – Gráficos no GP Funcional, $a < 0$



Fonte: Captura de tela do GP Funcional

Nos gráficos acima, os futuros professores escolheram as funções $f(x) = 3x + 2$ e $f(x) = -3x + 2$ na forma algébrica. Colocaram a opção mostrar rastro da reta que é um comando que mostra o caminho percorrido pela reta no gráfico. Por meio desta possibilidade do GP Funcional, os futuros professores visualizaram todo o caminho percorrido pela reta desde a origem, fato que ficaria impossível apenas com a manipulação do papel e do lápis. A seguir, vejamos o que os futuros docentes comentaram sobre este momento:

Pesquisador – Quando alteramos os valores das funções o que acontece com a posição das retas no gráfico?

N5 - As retas mudam de inclinação.

D2 – Esta ideia de mostrar o rastro da reta é muito legal! A partir daí a gente pode perceber o caminho da reta desde a origem até a função escolhida neste momento.

I3 – O interessante D2 é que a gente vai visualizando o movimento do coeficiente angular e linear da função afim e depois podemos constatar o que cada um significa na função.

Pesquisador – Vocês poderiam me dizer o que cada um significa na função?

N5 – O coeficiente angular significa o valor da inclinação de uma reta em relação ao eixo das abscissas. Já o linear o ponto da reta que toca o eixo das ordenadas.

D2 – Realmente agora compreendo como uma função vai variando.

I3 – Tem toda uma ligação entre a representação algébrica e gráfica. Tive noção disso agora com o uso dos recursos digitais, antes pensava que não tinha nenhuma relação.

D2 – A tecnologia utilizada de maneira pedagógica para ensinar um conteúdo faz toda a diferença.

Ao compartilhar e articular ideias, os futuros docentes puderam ensinar uns aos outros e assim construírem e compreenderem conceitos de como variam os coeficientes de uma função afim. Neste caso, o OA fomentou o levantamento, a troca, a experimentação (BORBA; PENTEADO, 2010) e partilha de ideias pelos aprendizes. A tecnologia contribuiu com os licenciandos para perceberem a variação dos coeficientes a e b da função afim. Os futuros professores constataram que o coeficiente a tem relação com a inclinação da reta e o b têm relação com a ordenada do ponto $(0;b)$ e que as representações gráfica e algébrica têm uma relação e são formas distintas de representar uma mesma função. Em geral, observamos que os efeitos de translação e rotação mantêm um padrão de variação em qualquer função de variável real.

Os futuros professores além de conseguirem estabelecer uma relação entre os coeficientes de uma função afim, conseguiram representar a função seguindo esse mesmo padrão, seja de forma algébrica ou gráfica. Passaram, portanto, a coordenar a variação de uma função (CONFREY; SMITH, 1994, 1995).

Os licenciandos relataram que agora compreendem efetivamente o comportamento variacional de uma função afim e que com a utilização de recursos tecnológicos foi possível compreender melhor estes conceitos. Portanto, evidenciamos que os futuros docentes conseguiram compreender um conceito por meio da utilização pedagógica das tecnologias, ou seja, tomaram consciência da relevância do conhecimento pedagógico da

tecnologia e do conteúdo e que estes três aspectos não devem ser trabalhados de forma separadas (MISHRA; KOEHLER, 2006).

A seguir abordamos a exploração do recurso digital Variação da Função Afim da UFF para continuarmos o debate de como a referida variação acontece em uma função afim. Iniciamos com uma manipulação colaborativa para que os futuros professores explorassem o recurso como ferramenta para a compreensão da variação da função afim. Posteriormente, os licenciandos resolveram e debateram uma atividade proposta no presente recurso.

Com este recurso, abordamos o comportamento variacional da função afim fazendo uso de diversas representações, quais sejam, recursos gráficos, tabulares, numéricos e algébricos. Também caracterizamos uma função afim por meio de seu comportamento variacional; e resolvemos problemas do cotidiano, tendo como referência o comportamento variacional da função afim.

Em nosso primeiro debate com este recurso digital, começamos lembrando a definição de uma função afim. Definimos como função afim quando existem números reais e tais que o gráfico de uma função afim é uma reta onde os números reais assumem um papel especial no traço dessa reta. A expressão dos participantes da pesquisa sobre esta questão pode ser verificada abaixo:

Pesquisador – A expressão $f(x)=ax+b$ o que significa?

D2 – A lei de formação!

N5 – A lei de formação, generaliza a função.

Pesquisador – E o que significa o x ?

D2 – x é o que varia de forma independente, você atribui valores a ele e encontra os pares ordenados para fazer o gráfico!

Pesquisador – Quem é o domínio e a imagem da função?

I3 – O domínio é onde eu posso atribuir valores a vontade e a imagem são os valores que eu encontro a partir de uma lei de formação.

Futuros Professores – O domínio é o x e a imagem é o $f(x)$. E o a e b são os coeficientes angular e linear. No linear a reta toca no eixo y .

A partir desta discussão, que lembrava sobre o conceito da função afim em suas representações algébrica e gráfica, evidenciamos que os futuros professores conseguiram chegar a um conhecimento especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Os futuros docentes muitas vezes esbarravam no conhecimento comum do conteúdo, mas agora podemos constatar esta evolução. Possivelmente podemos atribuir como uma das contribuições das tecnologias digitais abordadas no processo de formação colaborativa. Assim, os licenciandos passaram do conhecimento comum para o conhecimento especializado do conteúdo, aspecto fundamental para o exercício da prática docente.

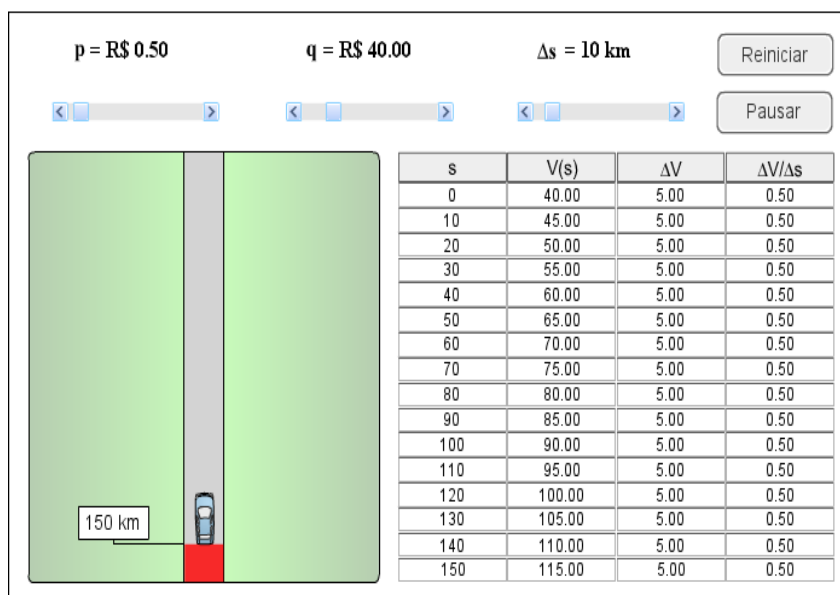
A seguir temos a atividade que foi explorada com a utilização do recurso digital variação da função afim. Segue o enunciado do problema: Uma locadora de automóveis cobra “p” reais por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de “q” reais. Os valores de p e de q variam de acordo com o modelo de automóvel escolhido. Como se trata de uma empresa informatizada, ela dispõe de um aplicativo que simula para o cliente o valor a ser pago pelo aluguel. Para o aluguel de um carro popular a empresa cobra R\$ 40,00 de taxa fixa e R\$ 0,50 para cada quilômetro rodado. Sugerimos escolher o valor de 10 km para Δs . Isto significa que o aplicativo irá calcular o valor a ser pago pelo cliente a cada 10 km.

Desta maneira, os futuros professores adotaram os seguintes passos:

- deslocaram os botões de acordo com os valores indicados;
- clicaram no botão iniciar para executar o aplicativo;
- observaram as variações que foram registradas; e
- realizaram um debate a partir de suas observações.

A seguir temos, a imagem do que aconteceu com a manipulação do referido recurso digital e em seguida o debate realizado pelos futuros docentes.

Figura 30 – Variação da Função Afim



Fonte: Captura de tela do Variação da Função Afim

I3 – Os Km variam com os reais.
D2 – Percebi que os km influenciam no preço a ser pago.
N5 – Quanto mais quilômetros a gente andar, mais caro vai ser.
J4 – Além da variação a gente percebe uma relação de dependência.
I3 – Exato! O valor que a gente paga depende da distância percorrida
J4 – Duas questões fundamentais para o entendimento do conceito de funções.
Pesquisador – Quais?
Futuros Professores – A variação e a dependência
Pesquisador – Quem seria a lei de formação desta função?
D2 – $f(x) = 0.5x + 40$
N5 – Legal que a gente trabalhou com as representações algébrica e tabular.
Pesquisador – Vocês saberiam me dizer o que significa o AV?
J4 – A variação do valor
I3 – Significa que a cada 10 km aumenta 5 reais.
Pesquisador – E o AV/AS?
D2 – A divisão da variação do valor pela variação do espaço.
N5 – Olha aí as estruturas multiplicativas. A multiplicação e a divisão sempre interligadas.

Ressaltamos que os futuros professores, por meio da visualização e da experimentação, constatarem duas importantes características do conceito de função, quais sejam, a variância e a dependência. Estas características são fundamentais para a compreensão da covariação, ou seja, a coordenação entre grandezas. Outro aspecto retratado pelos licenciandos foi sobre as representações algébrica e tabular. Coordenar múltiplas representações também é relevante para o entendimento do conceito de função (BORBA; PENTEADO, 2010).

Segundo Confrey e Smith (1995), as representações tabulares são relevantes porque necessitam que sejam gerados um padrão de sequências e isto envolve a covariação. Assim, os futuros professores ao percebem a covariação entre duas grandezas foram capazes de descrever como uma grandeza muda em relação a outra.

Blanton e Kaput (2005) analisaram que representações tabulares e animações icônicas podem ser utilizadas para expressar generalizações, ou seja, utilizar um conjunto de representações que compõe um conceito. De acordo com Vergnaud (1991, p. 76) "[...] a verificação do significado de representações simbólicas depende não só da habilidade que o sujeito tenha para representar as entidades e as relações entre elas, mas principalmente de elementos conceituais que devem ser levados em conta.". Desta maneira, compreendemos que a tabela e as animações icônicas podem ser usadas para introduzir abordagem mais explícita da covariação em funções.

Nesta perspectiva, constatamos que os futuros docentes avançaram do conhecimento comum para o especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e que o componente tecnológico trabalhado na formação foi fundamental para este avanço e para ampliar a percepção dos licenciandos em relação a utilização pedagógica da tecnologia. Quando iniciamos a abordagem com as tecnologias digitais, os licenciandos tinham a percepção que estes recursos eram somente para entretenimento, ou seja, tinham o conhecimento em si das tecnologias, mas desconheciam a parte pedagógica. Ao longo das categorias analisadas na presente pesquisa, percebemos que esta realidade foi mudando e que os futuros docentes adquiriram um conhecimento pedagógico das tecnologias (MISHRA; KOEHLER, 2006). Podemos considerar este um dos grandes ganhos da nossa formação colaborativa.

5.4 Conhecimento pedagógico da tecnologia para o ensino de funções

Neste tópico estão apresentados e analisados os dados que foram construídos durante as etapas de co-operação e co-produção da pesquisa colaborativa. A partir dos debates realizados, apresentamos situações que sinalizam características relevantes para entender o conhecimento pedagógico da tecnologia para o ensino de funções.

Neste momento da pesquisa os futuros professores refletiram sobre os recursos digitais trabalhados na formação; produziram e compartilharam um vídeo didático; elaboraram planos de aulas com a utilização das tecnologias digitais; e avaliaram a experiência com a pesquisa. Elegemos uma categoria principal que se refere a um termo elaborado por Mishra e Koehler (2006), para debater sobre o conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo, especificamente de funções.

Iniciamos um debate sobre a utilização de recursos digitais em sala de aula. Todos os participantes da pesquisa consideraram importante o trabalho com as tecnologias digitais no ensino de Matemática, justificam que o mundo está em evolução contínua e atualizar o trabalho docente é necessário. Percebemos que os futuros professores tinham um conhecimento em si das tecnologias, elencamos com exemplos: sabiam manusear um computador com internet, acessavam redes sociais e conheciam diversas séries e jogos *online*, dentre outros. Mas, no que se refere ao uso pedagógico da tecnologia, não tinham a menor ideia de como utilizá-la em sala de aula. Após este momento, debatemos sobre Informática Educativa e Educação Matemática. A partir destes debates teóricos, os futuros professores

relataram que por meio das tecnologias podem mostrar algo que seria impossível somente com um pincel e quadro. Por fim, solicitamos aos futuros docentes que comentassem sobre uma proposta para utilização de recursos digitais em sala de aula. Seguem os relatos:

D2 - *Softwares educacionais*

I3 - *Implantar jogos digitais e desafios com conteúdos abordados*

J4 - *Seria interessante levar para salas de programas computacionais para simular situações que não é possível representar no quadro*

N5 - *O uso de softwares educativos, podem ser utilizados através dos recursos digitais*

A partir da fala dos participantes da pesquisa, percebemos que a maioria focou nos *softwares* educacionais e não abordaram nenhuma proposta com foco no conteúdo de Matemática, ou seja, mesmo após debates sobre tecnologias digitais no ensino da disciplina, os futuros docentes continuam com uma visão superficial sobre o uso pedagógico das tecnologias.

Nessa perspectiva, é fundamental a formação de professores para o uso adequado de tais recursos nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Diante deste contexto, refletimos com os futuros professores sobre a utilização de objetos de aprendizagem e *software* educacional para o ensino de funções.

5.4.1 Reflexões dos futuros professores sobre os recursos digitais trabalhados na formação

Neste tópico nossa proposta foi trazer as reflexões que os futuros professores fizeram a respeito dos recursos digitais trabalhados durante a formação, assim, conseguimos captar o conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo.

Nossa primeira reflexão foi sobre a utilização do OA Equilibrando Proporções para a compreensão do conceito de proporcionalidade e função linear, passamos a discutir com os futuros docentes sobre suas percepções em relação a utilização pedagógica do referido recurso. A seguir, vejamos o que os participantes da pesquisa relataram e destacamos para realizar as análises:

N5 - *Eu acho que as imagenzinhas que ajudam na compreensão do conceito.*

Pesquisador – *N5 você poderia explicar como estas imagens podem ajudar na compreensão do conceito?*

D2 – *Ela falou das representações das figuras.*

N5 – *Isso! A gente pode movimentar os valores dos números que as figuras também se alteram.*

J4 - Essa questão das representações é interessante! Podemos visualizar a representação da tabela e do desenho. A representação é um dos temas que o Vergnaud aborda em sua teoria

I3 - Com diferentes representações a gente aprende melhor.

Pesquisador – *Por que com diferentes representações a gente aprende melhor?*

I3 – Porque podemos visualizar e raciocinar melhor com mais de uma representação.

Segundo Vergnaud (2009), as representações têm um papel relevante no ensino e na aprendizagem da Matemática. No subconjunto da tríade do conceito, o autor define que as representações linguísticas e simbólicas permitem a representação do conceito e de suas propriedades, das situações às quais ele se aplica e dos procedimentos de resolução destas situações. Assim, é fundamental para a prática docente que os futuros professores desenvolvam a capacidade de coordenar as representações, tais como a língua materna, aritmética, algébrica, gráfica, tabular e pictórica.

Evidenciamos que os futuros docentes compreenderam a importância de se trabalhar com diversas representações e fazem uma análise coerente do OA, ou seja, demonstram avanços no conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo. Constatamos que é fundamental os futuros professores terem conhecimento para ensinar Matemática com tecnologias. Este conhecimento emergiu quando os futuros docentes atentaram para a importância das tecnologias no desenvolvimento de diversas representações. Isto demonstra uma relação apropriada entre tecnologia e conhecimento específico (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Após compreendermos a percepção dos futuros docentes sobre a utilização pedagógica do recurso digital equilibrando proporções, abrimos um fórum no ambiente Sócrates para que os licenciandos refletissem, até o próximo encontro presencial, sobre os momentos que consideraram relevantes durante o manuseio do OA. Consideramos essa uma oportunidade interessante porque os futuros professores tinham mais um tempo para maturar suas ideias e era uma maneira de não ficarmos distantes do debate durante a semana. A seguir temos a fala de dois licenciandos:

J4 - A princípio achei o objeto de aprendizagem um pouco sem sentido. Mas resolvendo as questões percebi que o objeto de aprendizagem é interessante, e que através do modo como o mesmo faz a representação de um problema pode facilitar o entendimento da questão.

***D2** - No começo senti uma certa dificuldade em entender o sentido, comecei a achar que era melhor ensinar no quadro mesmo. Mas foi só pensar um pouco e comecei a compreender melhor.*

***J4** – Como foi essa compreensão?*

***D2** – Percebi a importância de manipular as representações para a aprendizagem do conceito de grandezas.*

Constatamos que os futuros professores ao iniciarem o manuseio com o equilibrando proporções sentiram certas dificuldades em entender o sentido do trabalho com o referido recurso digital para o ensino de proporcionalidade. Em conversas com os licenciandos eles relataram que era melhor ensinar somente com o quadro e o pincel, pois assim complicaria menos. Constatamos que os futuros professores se sentiram desequilibrados porque o OA desafiou os conhecimentos que eles tinham sobre a maneira de ensinar grandezas.

De posse da abordagem teórica de Mishra e Koehler (2006) esta percepção pode ocorrer entre os futuros professores pela falta do conhecimento pedagógico da tecnologia, ou seja, por desconhecerem como a tecnologia é utilizada em contextos de ensino e aprendizagem. Mesmo em alguns momentos percebendo que houve um avanço na percepção dos futuros professores quando falaram que o OA começou a fazer sentido, por meio de suas representações, e que pode contribuir na compreensão dos conceitos abordados. Constatamos que a formação ainda não foi suficiente para mudar algumas concepções dos futuros professores. Por isso, mais uma vez, evidenciamos a importância de uma adequada formação docente para a utilização pedagógica das tecnologias. Em seguida, passaremos a debater a reflexão sobre a utilização do *software* Geogebra na interpretação de gráficos da função linear.

Ao manipularem o Geogebra, os futuros docentes trabalharam com as representações algébricas e gráficas, ou seja, coordenaram diferentes representações. Nesse caminho, constatamos que este evento apresentou evidências de que os futuros professores se inseriram em um movimento de apropriação do conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Posteriormente discutimos a percepção dos futuros docentes sobre a utilização pedagógica do Geogebra. A seguir, vejamos alguns relatos sobre este momento:

***N5** – O ensino de função com o Geogebra a gente visualiza e define conceitos que somente falando sobre isso fica complicado de entender;*

***I3** – A manipulação no software foi importante para entender porque o gráfico de uma função linear é uma reta. Já ouvia dizer isso, mas nunca tinha visto acontecer de forma real.*

Constatamos que os futuros professores a partir da manipulação com o *software* livre Geogebra estão de fato entendendo o significado conceitual de funções. Conseguiram compreender este conceito, por meio de generalizações e também identificando casos particulares. Diante da percepção dos futuros docentes em relação ao Geogebra, fica claro o avanço de suas concepções do que seja o conhecimento pedagógico das tecnologias para o ensino de funções.

Após o encontro presencial, abrimos um fórum no ambiente Sócrates sobre a experiência com o manuseio do *software*. Assim, os futuros professores poderiam expor suas ideias até que o próximo encontro ocorresse. Consideramos este momento relevante porque percebemos que alguns dos futuros professores se sentiam mais à vontade para expressar suas opiniões.

Iniciamos nossas discussões sobre o que os futuros docentes tinham achado de mais relevante no Geogebra. Em seguida a reflexão foi sobre se o *software* contribuiu na compreensão dos conceitos de função linear que com a utilização do papel e lápis ficaria praticamente inviável. A seguir temos um trecho do debate que aconteceu no fórum.

J4 - O mais relevante que achei do software Geogebra é a forma como o mesmo representa uma função. A forma como o geogebra representa graficamente uma função linear ou qualquer outro tipo de função, ajudando muito na compreensão, é esse suporte gráfico do Geogebra que faz do mesmo uma ferramenta poderosa no ensino de matemática. As animações que é possível fazer no mesmo, mostrar como um gráfico se comporta ao alterar os valores dos coeficientes é algo fascinante, algo impossibilitado de demonstrar com o uso apenas do papel e lápis.

Pesquisador - Ótima reflexão, J4! Por favor relate um exemplo de um conceito que você conseguiu aprender melhor com o Geogebra.

J4 - Rodrigo, embora eu já soubesse que o tamanho de uma circunferência varia de acordo com o tamanho do raio, o Geogebra me possibilitou visualizar esse fenômeno de modo mais claro. Eu criei um controle deslizante para o raio que variava entre dois valores e apliquei esse raio a uma equação da circunferência, escolhi a opção animar no Geogebra e observei o que acontecia com o tamanho da circunferência, e isso contribuiu de modo significativo para o meu aprendizado.

J4 relata que o suporte gráfico do Geogebra torna o *software* uma ferramenta relevante para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Coloca como exemplo que mostrar como um gráfico se comporta ao alterar os valores dos coeficientes é algo que não poderíamos realizar apenas com o uso do papel e lápis. Além disso, por meio da manipulação

e experimentação com o Geogebra, visualizou que o tamanho de uma circunferência varia de acordo com o tamanho do raio, dando mais significado a sua aprendizagem.

Outras vantagens dos ambientes computacionais são as escalas proporcionalmente distribuídas para cada eixo e a construção das simulações dinâmicas (CASTRO, 2016). Estes debates estão de acordo com as constatações de Borba e Villarreal (2005) que consideraram que a Matemática produzida com o uso de *softwares* é mais eficiente da produzida, somente, com lápis e papel.

Perceber a forma como os futuros professores compreenderam este recurso no exercício de sua aprendizagem foi relevante para eles estabelecerem relações entre o conhecimento pedagógico da tecnologia e conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim, os futuros professores tomaram ciência da característica multimidiática das tecnologias digitais, para pensar de que maneira isso pode estar a serviço da prática docente.

Os futuros docentes colocaram, ainda, que sentem falta de momentos como este nas disciplinas que estão cursando em sua formação inicial e que estes momentos seriam relevantes para o embasamento teórico da docência. Estas questões colocadas pelos futuros professores vão ao encontro dos pressupostos de Oliveira e Cyrino (2013), ao afirmarem que o debate com mídias digitais tem se mostrado favoráveis à busca de relações entre o conhecimento teórico e prático. Ainda de acordo com os autores estes eventos são necessários para que o futuro professor em formação possa enfrentar os desafios que surgirem na proposição de abordagens de ensino inovadoras.

Solicitamos no ambiente Sócrates que os futuros professores relatassem o que acharam de mais relevante sobre a utilização do OA GP Funcional. A seguir, temos a fala da futura professora.

N5- O momento em que manipulamos os coeficientes de uma função afim, até percebermos como a reta se comporta no gráfico. Isso é interessante para ser feito em sala de aula.

Nesta perspectiva, conseguimos perceber a relevância dos futuros professores debaterem e formalizarem seus próprios conceitos, dessa forma ocorre uma efetiva aprendizagem. Durante o processo de experimentação, os licenciandos desfrutaram de suas próprias descobertas.

Os participantes da pesquisa depois de conhecerem e explorarem o objeto de aprendizagem Variação da Função Afim refletiram, no ambiente Sócrates, o que de mais relevante perceberam no recurso. A seguir, temos os relatos dos futuros docentes:

D2 - O objeto de aprendizagem variação da função afim realmente é uma ótima ferramenta para os amantes da Matemática, pois tem uma certa complexidade e seus aspectos são impecáveis em relação a conceitos. Sim, pois ele trabalha com perguntas, respostas e explicações, e também a discussão decorrente, ajuda na compreensão. Sinceramente, com o objeto de aprendizagem temos uma facilidade em resolver, observar, responder, etc, mas não há uma particularidade que difere e que não possa ser representada no papel.

J4 - Com o objeto de aprendizagem (OA) Variação da função Afim, fica possível fazer observações que antes seria impossível fazer apenas com lápis e papel, pois a opção de fazer animações do tipo variar os coeficientes e observar o que acontece com o gráfico da função é de extrema importância para o entendimento do conteúdo.

D2 - J4, porque a observação da variação dos coeficientes traria um melhor entendimento do conteúdo?

J4 - D2, tipo assim: se você estiver vendo o que acontece com o gráfico da função quando variamos os coeficientes, esse conteúdo com certeza vai fazer mais sentido. Pois esse conteúdo deixa de ser apenas uma coisa teórica e passa a ser prática.

N5 - O objeto de aprendizagem trás uma grande bagagem em volta do conteúdo, que vai desde a introdução do conteúdo até a resolução dos problemas para aplicação do que foi aprendido. Me ajudou sim a compreender o conceito de função, pois é justamente os problemas que ajudam a aperfeiçoar o que a gente aprendeu com a explicação, contando que o software trás diversas opções de problemas. O objeto trás diversas formas de resolução dentre elas tabelas, gráficos, ficando mais fácil resolver no software do que no papel.

I3 - É bem interessante além de abordar conceitos e atividades com amostra de ilustração levando o aluno a prestar mais atenção na Ambiente Virtual, me ajudou um pouco mais, pois já vinha entendendo nos outros portais, os movimentos e animações do ambiente.

D2 relata que, mesmo com uma certa complexidade, o OA é uma boa ferramenta para a apreensão de um conceito. O participante da pesquisa colocou que o recurso é um pouco complexo porque dentre os abordados na formação é o que tem uma linguagem matemática de maior rigor. D2 também coloca que não percebeu nada que tenha no recurso que não dê para trabalhar com o pincel e a lousa. J4 discorda da afirmação de D2 e ambos iniciam um debate conceitual a partir da utilização pedagógica das tecnologias digitais que consideramos relevante para o crescimento acadêmico e profissional dos futuros professores.

Os demais participantes da pesquisa também avaliaram a utilização do recurso digital, variação da função afim, de forma positiva e afirmam que o recurso foi relevante para a compreensão conceitual de funções. Mais uma vez fica evidente a evolução dos futuros docentes durante o processo de formação colaborativa, no início da formação eles

desconheciam estas possibilidades e agora já estão trazendo de forma consciente e crítica suas percepções sobre a utilização pedagógica das tecnologias digitais.

Segundo Cyrino e Oliveira (2016), a criação destes ambientes que são apropriados aos debates das percepções dos futuros professores são produtivos para o desenvolvimento do conhecimento matemático e pedagógico da tecnologia. A seguir, passaremos a analisar a produção de um vídeo didático elaborado pelos futuros professores.

5.4.2 Produção e compartilhamento de vídeo didático

A motivação que fez surgir esta categoria foi a partir do trabalho com o OA GP Funcional. No referido OA, tem um vídeo que relaciona a ideia do espaço percorrido com o tempo. A partir deste vídeo os futuros professores propuseram produzir um vídeo próprio relacionado ao conceito de funções. Seguindo a nossa ideia de formação colaborativa, acatamos a proposta dos licenciandos. A seguir, analisaremos como foi esta caminhada.

Os futuros professores trouxeram reflexões sobre o potencial dos vídeos ao relatarem que este recurso tem uma linguagem comunicadora. Evidenciamos que as imagens do vídeo causam impacto e falam por si mesmas. Pois é um meio de comunicação contemporâneo que integra várias linguagens. Após algumas conversas e pesquisas dos futuros docentes, segue um debate sobre este momento:

I3 - É um instrumento que nos possibilita acessá-lo a qualquer hora. Isso faz com que a gente possa aprender a todo instante e em qualquer lugar.

N5 - É uma ferramenta de informação e comunicação que vai além da sala de aula. Eu mesmo estudo bastante os conteúdos da UFCA pelos vídeos do youtube.

Constatamos que os futuros docentes perceberam a relevância dos vídeos didáticos. I3 relata que, com os vídeos, podemos aprender a todo instante e em qualquer lugar. N5 coloca o potencial deste recurso ao afirmar que vai além das paredes da sala de aula, além disso, a futura professora exemplifica sua própria experiência com a aprendizagem por meio de vídeos didáticos.

De acordo com Machado e Mendes (2013), o vídeo didático é aquele que foi concebido e produzido para a abordagem de determinados conteúdos, desenvolvimento de competências ou apresentação de atividades com foco na aprendizagem dos estudantes. Os autores complementam que o vídeo é um recurso eficaz na sala de aula, pois pode ser usado

no trabalho da memória visual.

Assim, com o objetivo de produzirmos um vídeo que efetivamente leve a aprendizagem de um conceito, fizemos alguns questionamentos iniciais: Quais são as metas e objetivos do vídeo? Qual será o conteúdo? O primeiro questionamento foi relevante, pois precisávamos ter claros quais são os nossos objetivos na produção do vídeo e o que desejamos que os indivíduos aprendam neste momento. Já a segunda pergunta nos levou a refletir que neste tipo de produção didática não devemos esquecer que o foco é a aprendizagem de um determinado conteúdo, no caso do referido trabalho, o conceito de funções. Esclarecidas ambas as questões, partimos para a produção do vídeo didático.

Inicialmente, os futuros docentes realizaram uma pesquisa sobre o assunto do vídeo didático, a fim de compreenderem que caminho era para seguir. Posteriormente escolheram o título do vídeo didático, qual seja, o papel das funções na hora de telefonar! Assim feito passaram para a produção de suas etapas, quais sejam, a introdução; o *storyboard*¹³; a revisão e elaboração; a filmagem; a edição preliminar; a gravação da narração e, por fim, a edição. A seguir temos a fala dos futuros professores:

D2 - *O vídeo possibilitou uma exploração diferente dos temas e uma melhor visualização dos conteúdos.*

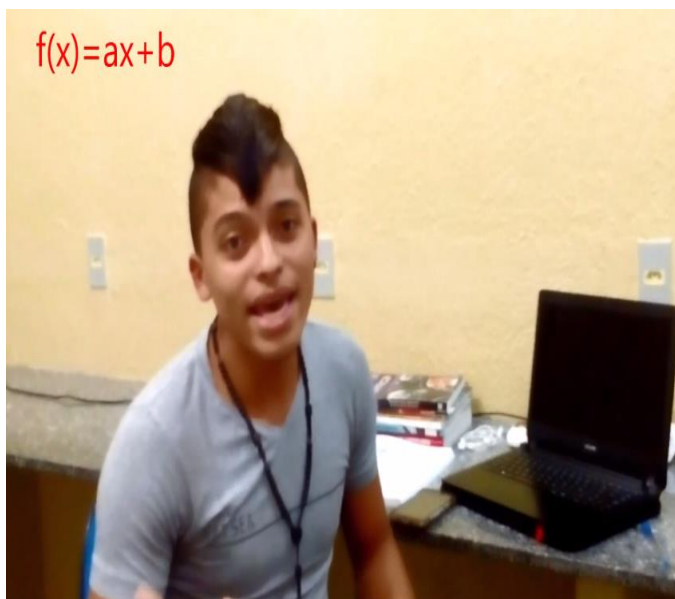
J4 – *Despertou a motivação pela investigação.*

Segundo Mattar (2009), os vídeos têm sido cada vez mais utilizados como recurso pedagógico. O uso de vídeos em educação respeita as ideias de múltiplos estilos de aprendizagem e de múltiplas inteligências: muitos alunos aprendem melhor quando submetidos a estímulos visuais e sonoros, em comparação com uma educação tradicional, baseada principalmente em textos.

A seguir, vejamos algumas das imagens do vídeo produzido pelos futuros docentes.

¹³ Desenhos que narram as principais cenas de uma obra audiovisual.

Figura 31 - Elaboração do vídeo



Fonte: Elaboração dos futuros professores

Figura 32 - Elaboração do vídeo



Fonte: Elaboração dos futuros professores

Em seguida temos a fala dos futuros docentes sobre a criação do vídeo:

D2 - A criação do vídeo foi um aprendizado muito importante. Tanto dos conceitos matemáticos como dos conceitos tecnológicos.

J4 - Tivemos que estudar o conteúdo e tentar dizer aquilo em poucos minutos e ainda aprender alguns efeitos. Muito legal!

Borba e Villarreal (2005) enfatizam o componente visual da Matemática. O vídeo usado para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condiciona o tipo de Matemática que é feita e o tipo do pensamento que está sendo desenvolvido neste processo. Ao mesmo tempo, o processo de visualização atinge uma nova dimensão se considerar um ambiente computacional de aprendizagem com um coletivo pensante particular, onde os futuros professores, a mídia e conteúdos matemáticos residiram juntos.

Diversas pesquisas salientam o uso do vídeo como um recurso potencialmente relevante para a prática docente (STEIN; SMITH, 2009). Além de influenciarem na aprendizagem de conceitos matemáticos dos futuros professores, os vídeos se relacionaram com aspectos da comunicação que foram fundamentais nestes processos de formação inicial (RODRIGUES *et al.*, 2016). Este fato demonstra a relevância de se trabalhar colaborativamente com estas mídias na formação inicial. Desta maneira, os futuros professores têm mais um recurso para ser trabalhado em sala de aula.

No momento de reflexão sobre esta categoria, os futuros professores relataram que com a produção e compartilhamento do vídeo aprenderam os conteúdos matemáticos e as maneiras de utilizar pedagogicamente as tecnologias. Além disso, complementaram dizendo que deixaram de ser meros expectadores e passaram a ser co-autores de conhecimentos matemáticos. Em seguida temos a fala de um futuro professor:

D2 – Na preparação do vídeo tivemos muitos aprendizados. Me senti autor também!

A fala de D2 vai ao encontro de Silva (2012) que relata que, a partir das mídias digitais, somos coautores e coprodutores do conhecimento e agora a educação se faz de A com B, ou seja, de forma colaborativa. A seguir, passaremos a analisar algumas propostas de planos de aulas, com a utilização de tecnologias, elaborados pelos futuros professores.

5.4.3 Elaboração dos planos de aulas com a utilização das tecnologias digitais

No processo de produção dos planos de aulas, os futuros professores definiram os temas de acordo com interesse e curiosidades e construíram suas ideias com a utilização das tecnologias digitais. A ideia foi a de que eles pudessem analisar e discutir, à luz de fundamentos teóricos dos campos conceituais, como um professor organiza uma aula, para que futuramente tenham elementos para organizar a sua própria aula (CYRINO; OLIVEIRA, 2016).

Este ponto da pesquisa demonstrou um crescimento cognitivo nos aspectos conceitual e procedimental, pois, além do domínio e precisão na abordagem dos conceitos matemáticos nos planos de aulas, os futuros professores se apropriaram dos procedimentos necessários em cada etapa, como também, desenvolveram o poder de argumentação e a criatividade, o que condiz com a construção e produção de conhecimento.

Após momentos de debates sobre a utilização pedagógica das tecnologias, propomos aos futuros professores que planejassem uma aula utilizando tecnologias digitais, para isso disponibilizamos um modelo de plano de aula utilizado pelas formações da OBEDUC/Emult e os licenciandos se basearam também no modelo de aula do Portal do Professor¹⁴. Os planos de aulas dos futuros professores que envolviam tecnologias se encontram no Apêndice C.

Em seguida, iniciamos um debate com os futuros docentes sobre como foi este momento de preparação de um plano de aula com a utilização das tecnologias digitais. Buscamos focar se no planejamento os licenciandos conseguiram inserir efetivamente as tecnologias e como esperam trabalhar com estes recursos de forma pedagógica.

Salientamos que, dos quatro participantes da pesquisa, dois utilizaram as tecnologias digitais em seus planos de aulas e os outros dois não fizeram a abordagem com tecnologias. Para melhor organização, traremos primeiramente o debate com os que utilizaram e posteriormente com os que não utilizaram os recursos digitais.

A seguir temos uma discussão com D2 e I3 sobre a utilização das tecnologias em seus planos de aulas. O primeiro fez uma proposta de aula com a utilização do vídeo que haviam produzido e o segundo fez uma proposta com a utilização do Geogebra.

Pesquisador – *Percebemos que vocês propuseram o uso de vídeos e do Geogebra em suas aulas. Qual foi a motivação para estas ideias?*

D2 – *Estas ideias surgiram a partir da formação, pois antes não tinha a menor ideia da utilização pedagógica das tecnologias. Pra falar a verdade não tinha nem ideia de como fazer um plano de aula. Quando produzimos o vídeo, achei que seria interessante propor ele em uma aula de funções, porque posso abordar o vídeo e depois pedir aos meus alunos que criem seus próprios vídeos.*

I3 – *A minha proposta foi explorar e construir com meus alunos o conceito de função afim. Nos momentos de formação achei muito interessante a utilização do Geogebra, daí escolhi este software para observarmos a influência dos coeficientes a e b no gráfico. Podemos gerar gráficos no software Geogebra e a partir daí manipular e*

¹⁴ portaldoprofessor.mec.gov.br/

analisar de forma colaborativa a influência dos coeficientes a e b na função afim.

Evidenciamos que os futuros professores D2 e I3 já se colocam como se estivessem indo para a prática docente e além disso conseguiram perceber a relevância da utilização pedagógica das tecnologias digitais no ensino de Matemática. No uso de vídeos, o participante D2 afirmou que pretendia mostrar o vídeo que os futuros docentes produziram sobre a questão das operadoras de celular e depois trazer um debate sobre funções para a produção de outros vídeos.

A proposta do futuro professor sobre a utilização pedagógica das tecnologias para o ensino de um conceito específico vai ao encontro do *TPACK* (MISHRA; KOEHLER, 2006), principalmente quando o futuro docente demonstra que reservará um momento da aula para que os estudantes produzam seus próprios vídeos. Estamos em uma sociedade da produção e compartilhamento e isto torna o conhecimento mais eficiente.

Em uma das atividades da pesquisa em que produzimos um vídeo, o licenciando D2 relatou que foi uma experiência relevante e que tinha passado de expectador para coautor (SILVA, 2012) e agora faz uma proposta semelhante quando for atuar como docente. Assim, constatamos que a formação colaborativa contribuiu para a prática deste futuro professor.

O participante I3 formulou a proposta de gráficos no *software* Geogebra e a partir daí manipular e analisar de forma colaborativa a influência dos coeficientes a e b na função afim. Ao permitir que os estudantes manipulem livremente os coeficientes e formalizem seus conceitos, o futuro professor insere os alunos na aula como sujeitos ativos do conhecimento. A partir da criação de estratégias para abordar o conteúdo de função afim, evidenciamos as contribuições no processo formativo do futuro professor. A seguir, exporemos a fala dos futuros docentes que não propuseram as tecnologias digitais em seus planos de aulas:

J4 - Fiz a proposta de trabalhar com resolução de problemas. Acho interessante o trabalho com as tecnologias, mas as vezes pode complicar mais.

Pesquisador - *Complicar mais para quem?*

J4 - Para os alunos e para os professores.

N5 - Eu fiz a proposta para a criação de um gráfico, mas não coloquei se era com tecnologias ou não. Mas acho que com tecnologias pode fazer mais sentido.

Pesquisador – *N5 porque você não colocou as tecnologias no plano de aula?*

N5 – Acho que pode fazer mais sentido, mas concordo com J4 que pode complicar em alguns momentos.

A partir das falas de J4 e N5, constatamos que no momento de elaboração do plano de aula não ficou clara a contribuição das tecnologias. A justificativa colocada por estes futuros professores é que os recursos digitais podem complicar mais em alguns momentos. Mesmo que esta proposição seja verdadeira, acreditamos que se de fato a utilização pedagógica das tecnologias tivessem feito sentido para estes futuros professores eles teriam feito essa abordagem em seus planos de aula.

Este dado demonstra que os futuros docentes precisam se familiarizar mais em que as tecnologias digitais podem contribuir para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Estamos trazendo esta reflexão porque no momento de alguns debates todos os participantes mostraram ter algum conhecimento da utilização pedagógica das tecnologias, mas no momento de trazer isto para o planejamento de uma aula nem todos demonstraram este conhecimento.

A partir dos planos de aulas dos futuros professores, evidenciamos que todos os participantes da pesquisa tiveram como foco o conceito de função que está dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Em relação à presença das tecnologias digitais no plano de aula, 50% dos participantes da pesquisa não propuseram a utilização dos referidos recursos, mesmo sendo uma proposta feita anteriormente à elaboração do plano. Este fato demonstra ainda certo afastamento dos futuros professores em relação à utilização pedagógica das tecnologias (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Os resultados discutidos mostram que, mesmo com a continuidade de algumas limitações em relação à utilização pedagógica das tecnologias, os futuros professores conseguiram avançar em relação a este debate. No início da formação, os participantes da pesquisa desconheciam qualquer forma de utilizar pedagogicamente os recursos digitais e ao final da formação colaborativa evidenciamos que existe um empenho para o trabalho com os referidos recursos.

Os recursos digitais utilizados foram relevantes para a exposição dos conhecimentos dos futuros professores. As tecnologias utilizadas durante os eventos foram fundamentais para a construção do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de estruturas multiplicativas, com foco nos conceitos de covariação.

5.4.4 Avaliação dos futuros docentes sobre a experiência da pesquisa

Ao final da pesquisa, consideramos importante trazer as percepções dos futuros professores sobre a participação nas experiências de pesquisa e formação colaborativa, apoiada em tecnologias digitais para o ensino e a aprendizagem do campo conceitual multiplicativo.

Ao tratarmos sobre a formação, iniciamos um debate sobre as principais contribuições que esta formação trouxe para os futuros professores quanto ao ensino de estruturas multiplicativas. Vejamos a percepção dos licenciandos:

D2 - *Foi de grande ajuda, pois cada momento da formação nos trouxe algo a somar, até porque as atividades propostas de forma colaborativa nos dão outra visão sobre a Matemática em si. Uma contribuição importante da formação foi a ideia de trabalhar os conceitos matemáticos de forma conjunta.*

I3- *Me senti participante da formação, porque as coisas não vieram tudo prontas e poderíamos opinar caso a gente não concordasse com a proposta. Aprendi que quando for ensinar multiplicação já posso também ensinar divisão.*

J4- *Eu sai do modo automático de resolver situações e passei a pensar em outras formas de resolver, procurando entender outros conceitos acerca do mesmo problema. Ainda entendi que nunca aprendemos algo de modo isolado, mas sim em um campo de conceitos.*

N5- *Percebi como os alunos pensam acerca do ensino de matemática e como futura professora essa formação colaborativa foi importante para que eu possa traçar caminhos para facilitar o aprendizado do aluno. Irei mostrar que alguns conteúdos podem ser ensinados de forma conjunta.*

De maneira geral, os futuros docentes consideram que os momentos de formação proporcionaram outra visão da Matemática. Ao questionarmos o que seria este outro modo de perceber a Matemática, os licenciandos relatam que agora compreenderam a relevância de se trabalhar os conceitos de forma conjunta e que os sujeitos não aprendem um conceito isolado, mas sim um campo de conceitos. Evidenciamos que a formação foi relevante para que os futuros professores passassem a compreender os aspectos da teoria dos campos conceituais com foco nas estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009) para o ensino de Matemática.

Os depoimentos dos futuros docentes reforçaram a parceria colaborativa entre os participantes da pesquisa. A experiência de uma formação colaborativa oportunizou que os participantes envolvidos na pesquisa se desenvolvessem profissionalmente. Para o

pesquisador, a realização de sua tese de Doutorado, e para os futuros professores uma oportunidade de produzir conhecimentos acerca do ensino e aprendizagem dos conceitos de estruturas multiplicativas.

Em seguida, tratamos sobre as experiências pedagógicas com as tecnologias digitais, realizamos um debate sobre de que forma a tecnologia pode ser um recurso importante para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Vejamos a fala dos licenciandos:

D2- *Foi inovador e uma experiência muito gratificante, porque percebemos que os estudantes ficam entusiasmados para trabalhar com as tecnologias, e isso nos leva a acreditar que realmente devemos atualizar o currículo dos docentes. Com as tecnologias podemos ir além do papel e da caneta, para que sejam observados aspectos que pelo método tradicional seriam inviáveis.*

I3 - *Foi bem interessante, pois não sabia que tinha diversos OA para a educação. É importante porque tem jogos virtuais que chama a atenção melhor dos alunos.*

J4 – *Foi uma experiência muito proveitosa, pois através dessas tecnologias alguns conceitos da Matemática ficaram claros. A mesma possibilita realizar simulações que seria impossível fazer apenas com o pincel e o quadro.*

N5 – *Foi de grande importância, pois percebi como atuar como professora e percebi quais suportes o aluno precisa para utilizar as tecnologias. As tecnologias abrem portas do entendimento matemático. Por exemplo, fica mais fácil você interpretar o gráfico usando um software do que fazendo na mão.*

Os futuros professores colocaram que as tecnologias digitais ao serem utilizadas pedagogicamente devem ir além do papel e da caneta. Elencaram, como exemplo, que fica mais fácil interpretar o gráfico usando um *software* do que fazendo na mão. Esta percepção se relaciona a um dos pressupostos de Borba e Penteado (2010). Ainda relataram que não conheciam os diversos OA e que por meio das tecnologias foi possível compreender alguns conceitos da Matemática. Nesta perspectiva, constatamos que os futuros docentes ao final desta pesquisa adquiriram um conhecimento pedagógico das tecnologias e do conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Com essa seção, concluímos os resultados da pesquisa. No próximo capítulo, apresentamos as conclusões da pesquisa, discutindo a relevância dos resultados alcançados pela experiência de ensino e de aprendizagem sobre estruturas multiplicativas e funções a partir de uma formação colaborativa apoiada em tecnologias digitais.

6 CONCLUSÕES

A presente pesquisa permitiu fazermos considerações acerca do conceito de funções com o uso das tecnologias digitais, sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais com foco nas estruturas multiplicativas. Os registros feitos a seguir levaram em conta o ensino de estruturas multiplicativas, especificamente na intersecção com o ensino de funções, as tecnologias digitais e a pesquisa colaborativa. Esses pontos contemplam as vertentes deste estudo.

O objetivo principal da pesquisa foi analisar o processo de construção dos conceitos de estruturas multiplicativas e de função, por parte de futuros professores de Matemática, nos domínios conceitual e pedagógico, a partir do uso de tecnologias digitais. O referido objetivo foi atingido quando conseguimos o mapeamento sobre os conhecimentos dos futuros professores acerca dos conceitos de estruturas multiplicativas e de funções e a partir desta identificação desenvolvemos com os futuros docentes estratégias e situações para o trabalho com estruturas multiplicativas e com função, a partir do uso de tecnologias digitais.

Os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais com foco nas estruturas multiplicativas foram fundamentais na condução da pesquisa. Podemos destacar que os conceitos ensinados dentro de um campo conceitual e não de forma isolada os indivíduos se apropriam dos conhecimentos de forma efetiva. Segundo a perspectiva teórica adotada, ensinar o conceito de função somente por meio de definições ou demonstrações não é suficiente para garantir a ocorrência da aprendizagem. Uma ação que não avança no sentido de buscar seus elementos dentro de um campo de conceitos torna a aprendizagem superficial ao contexto específico em que foi abordada.

Assim, por meio da pesquisa colaborativa, fizemos uma parceria entre os futuros professores e o pesquisador para a produção de conhecimentos de funções com tecnologias digitais. A contribuição dos futuros professores como participantes do processo oportunizou que diferentes conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem de funções fossem desenvolvidos. No decorrer do processo, os participantes da pesquisa produziram conhecimentos colaborativamente que contribuíram para a sua formação.

A experiência desenvolvida mostrou que o modelo de formação colaborativa, favoreceu a ampliação do campo conceitual multiplicativo pelos participantes da pesquisa. As tecnologias digitais, considerando os objetos de aprendizagem e os *softwares* explorados, oportunizaram que os futuros professores elaborassem, debatessem e compartilhassem

aspectos diretamente ligados ao ensino de Matemática.

Os futuros professores realizaram movimentos de construção e reconstrução em busca do conhecimento das estruturas multiplicativas, especificamente o conhecimento de funções. Além disso, debateram sobre os conceitos da Teoria dos Campos Conceituais e, principalmente, elementos ligados especificamente ao campo conceitual multiplicativo. Nos momentos de discussão, os participantes expuseram seus pontos de vistas que foram argumentados com os demais membros do grupo. Esse movimento de construção coletiva foi fundamental para este processo de formação colaborativa na busca do conhecimento matemático para o ensino.

Na fase de co-situação evidenciamos que os futuros docentes possuíam um conhecimento comum das situações multiplicativas que caracterizamos como seus conhecimentos prévios sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino. Quando solicitados para proporem tipos de problemas que explorassem o conceito de função por meio das operações de multiplicação e divisão, os participantes da pesquisa apresentaram em sua grande maioria problemas de proporção simples, deixando de lado os problemas de proporção múltipla e dupla. Consideramos que a ausência de problemas que contemplem tais conceitos é por conta de uma concepção limitada dos futuros docentes sobre os tipos de situações multiplicativas. Salientamos também que os futuros professores tratavam a multiplicação como uma soma de parcelas iguais, que acaba limitando este conceito.

Na etapa de co-operação da pesquisa colaborativa os futuros professores ampliaram seus conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo, que caracterizamos de conhecimentos adquiridos na formação sobre o campo conceitual multiplicativo para o ensino. Sublinhamos que, ao longo das atividades desenvolvidas, em que os futuros professores apresentavam seus pontos de vista e argumentavam com seus pares, eles conseguiram adquirir conhecimentos a respeito da ruptura do campo conceitual aditivo com o multiplicativo, dos diferentes significados da multiplicação, dos conhecimentos em relação aos conceitos de proporção simples, passando do pensamento proporcional para o funcional e também sobre as representações tabular e gráfica da função linear.

Evidenciamos situações que sinalizaram características relevantes para o conhecimento especializado do conteúdo e para o entendimento do conhecimento pedagógico da tecnologia para o ensino de funções. Os futuros professores tinham o conhecimento em si das tecnologias, mas em relação à sua utilização pedagógica desconheciam como utilizá-la em sala de aula. A partir destas constatações, fizemos uma formação colaborativa baseada na

utilização de objetos de aprendizagens e *softwares* educacionais nos quais emergiram as seguintes categorias: relações entre grandezas; múltiplas representações da função linear e a variação de uma função afim.

Os futuros docentes adquiriram uma melhor compreensão da relação entre grandezas e do conceito de covariação da função linear. Além disso, os licenciandos compreenderam a relevância do trabalho com diversas representações e demonstraram avanços no conhecimento pedagógico da tecnologia. A partir da interação dos participantes da pesquisa com os recursos digitais foi possível averiguar uma melhor compreensão da relação entre grandezas, permitindo aos futuros docentes o efetivo entendimento deste conceito.

Os recursos digitais proporcionaram dinamicidade ao processo de construção dos conceitos de função linear. Assim, a relação funcional estabelecida entre duas variáveis e a relação invariante entre x e $f(x)$ levaram os futuros docentes ao entendimento do conceito de covariação. Outros aspectos importantes para a compreensão de covariação foi o trabalho com as representações algébricas e gráficas, ou seja, a coordenação de múltiplas representações. Nesta perspectiva, os futuros professores se inseriram em num movimento de apropriação do conhecimento pedagógico da tecnologia e do conteúdo.

A contribuição dos recursos digitais, abordados na categoria das múltiplas representações da função linear, foi devido à capacidade de gerar diversas representações matemáticas para as funções e ao fato de que as referidas funções podem ser representadas não só por notação algébrica, mas também geometricamente, mediante representação gráfica, ficando assim evidente a coordenação das representações.

Neste contexto, os futuros docentes manipularam livremente os recursos digitais e perceberam o comportamento da reta no gráfico e depois formalizaram seus próprios conceitos. Desta maneira, utilizando as tecnologias digitais, os futuros professores chegaram à formalização dos conceitos de função afim e a conclusão de que a curva do seu gráfico sempre é uma reta.

Na categoria que emergiu sobre a variação da função afim, os futuros professores caracterizaram uma função afim por meio de seu comportamento variacional. Por meio da manipulação de recursos digitais, os licenciandos constataram as características de variância e a dependência da função afim. Ambas características foram fundamentais para a compreensão da covariação e para a passagem do conhecimento comum para o especializado do conteúdo.

Consideramos que nossa pesquisa contribuiu para a ampliação das pesquisas que envolvem o campo conceitual multiplicativo e o *TPACK*, este último não foca em um

conteúdo específico e o presente trabalho trouxe este enfoque das estruturas multiplicativas e funções. Outra contribuição foi a pesquisa ter acontecido no âmbito da formação inicial, pois existem poucos trabalhos com estas vertentes para os futuros de professores.

Outra abordagem que foi muito relevante na formação dos licenciandos foi a produção de um vídeo. Os futuros professores compreenderam o potencial dos vídeos e de sua linguagem comunicadora. Os participantes se tornaram autores de suas próprias mídias, este fato foi um diferencial na formação colaborativa. Com a produção deste vídeo, eles representaram e produziram ideias do conceito de função. Na elaboração do plano de aula, os futuros docentes desenvolveram o poder de argumentação e a criatividade, o que condiz com a construção e produção de conhecimento.

A formação colaborativa gerou resultados positivos tanto para o pesquisador quanto para os estudantes que participaram. O pesquisador com a produção de sua tese de doutorado, já os futuros professores através da formação tiveram a oportunidade de produzir conhecimentos acerca do ensino e da aprendizagem dos conceitos de estruturas multiplicativas e de funções.

Os recursos digitais utilizados foram relevantes para a exposição dos conhecimentos dos futuros professores. As tecnologias foram fundamentais para a construção do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de estruturas multiplicativas, com foco nos conceitos de função.

Os encontros virtuais assíncronos, por meio do ambiente Sócrates, permitiram o compartilhamento e acesso as discussões que foram integradas ao grupo, oportunizando aos futuros professores a ampliação acerca dos elementos teóricos e didáticos debatidos. No referido ambiente, os participantes debatiam sobre os recursos digitais utilizados e suas potencialidades para a compreensão de conceitos matemáticos.

Consideramos que nosso trabalho contribuiu para a formação inicial de professores, pois as tecnologias digitais exploradas na experiência de formação colaborativa entre os futuros professores assumiram dimensões favoráveis ao desenvolvimento da formação. A primeira em relação à produção e ao acesso das mídias, dos objetos de aprendizagem e dos *softwares* que fomentaram as práticas de formação colaborativa. A outra dimensão foi relacionada às interações assíncronas no ambiente Sócrates, pois em alguns momentos constatamos que os futuros professores preferiam fazer suas colocações neste espaço. Essas possibilidades das tecnologias digitais representaram uma inovação para o modelo de formação inicial de professores.

A partir da manipulação e experimentação possibilitadas pelas ferramentas tecnológicas adotadas, a formação colaborativa oportunizou o debate de ideias e concepções, bem como a ampliação conceitual. Houve uma ampliação dos conhecimentos dos futuros professores, uma vez que significados foram construídos de forma conjunta e compartilhados entre os participantes acerca do ensino e da aprendizagem de funções.

Do ponto de vista do avanço teórico, os futuros professores demonstraram, por meio de suas interações, que ampliaram sua visão sobre o ensino e a aprendizagem de funções. Pela interação com os participantes da pesquisa foi possível compreender diferentes perspectivas sobre o ensino de funções com tecnologias digitais.

Por fim, a experiência de explorar pedagogicamente as tecnologias digitais contribuiu significativamente para as trocas estabelecidas entre os futuros professores. As tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática favoreceram o trabalho colaborativo e fomentaram a busca por formação matemática em diversos espaços. Entretanto, uma pesquisa realizada em uma universidade com quatro futuros professores tem suas limitações e não é suficiente para mudar a realidade dos cursos de licenciaturas. Desta maneira, propomos que outras pesquisas desta natureza possam ocorrer dentro do âmbito da formação inicial. Nesta perspectiva, esperamos que a experiência realizada neste trabalho possa contribuir para o avanço das pesquisas em Educação Matemática no Ceará e no Brasil.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, E. S. **Conhecimento profissional docente de professores do 5º ano de uma escola com bom desempenho em matemática: o caso das estruturas multiplicativas**. 2012. 182 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2012.
- ALMEIDA, M. E. B. Educação e tecnologias no Brasil e em Portugal em três momentos de sua história. **Educação, Formação & Tecnologias**, v. 1, n. 1, p. 23-36, 2008. Disponível em: <<http://eft.educom.pt/index.php/eft/article/view/19/11>>. Acesso em: 7 jan. 2015.
- ALMEIDA, M. E. B.; PRADO, M. E. B. B. Indicadores para a formação de educadores para a integração do laptop na escola. In: ALMEIDA, M. E. B.; PRADO, M. E. B. B. (Org.). **O computador portátil na escola: mudanças e desafios nos processos de ensino e aprendizagem**. São Paulo: Avercamp, 2011.
- ALMEIDA, M. E. B.; VALENTE, J. A. **Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?** São Paulo: Paulus, 2011.
- ANADÓN, M. E. Novas dinâmicas na pesquisa educativa e formação continuada dos docentes: os modelos participativos. In: COLÓQUIO NACIONAL EPISTEMOLOGIA DAS CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO, 9., 2007, Natal. **Anais...** Natal: EDUFN, 2007. p. 1-14.
- ANTUNES, P.; HENRIQUES, A. O raciocínio estatístico dos alunos sobre covariação usando o Tinkerplots. In: FERNANDES, J. A. et al. (Org.). **Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Braga: Universidade do Minho, 2013. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_S2-P3-Antunes_529d28633fba7.pdf>. Acesso em: 7 jan. 2015.
- BALDINI, L. A. F. Uma aula de funções na perspectiva do ensino exploratório de Matemática: o plano de telefonia. In: CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectivas**. Londrina: EDUEL, 2016.
- BALL, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. **Elementary School Journal**, n. 90, p.449-466, 1990. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1001941>>. Acesso em: 3 ago. 2015.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special?. **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389 – 407, nov./dez. 2008. Disponível em: <<https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/ballmkt.pdf>>. Acesso em: 3 ago. 2015.
- BITTAR, M. A parceria Escola x Universidade na inserção da tecnologia nas aulas de Matemática: um projeto de pesquisa-ação. In: DALBEN, A. et al. (Org.). **Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente: educação ambiental, educação em ciências, educação em espaços não-escolares, educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. p. 591-609.
- _____. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática

pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, n. esp. p. 157-171, 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/11.pdf>>. Acesso em: 13 jan. 2015.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Elementary grades students' capacity for functional thinking. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Oslo. **Proceedings...** Oslo: PME, 2004. v. 2, p. 135-142. Disponível em: <http://emis.math.tifr.res.in/proceedings/PME28/RR/RR033_Blanton.pdf>. Acesso em: 13 out. 2016.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 36, p. 412-446, 2005. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/30034944>>. Acesso em 13 out. 2016.

BOGDAN, R. C.; BLIKEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BORBA, M. C. Pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu, MG. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2014.

BORBA, M. C.; LACERDA, H. D. G. Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno. **Educação Matemática Pesquisa EMP**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 490- 507, 2015. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/25666/pdf>>. Acesso em: 26 jul. 2016.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 27 mar. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares**

para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Princípios orientadores para o uso pedagógico do laptop na educação escolar.** Brasília, 2007.

BRASIL. **Site do Programa Observatório da Educação.** 2014. Disponível em: <<http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao>>. Acesso em: 28 mar. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais.** Brasília, 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 28 ago. 2015.

CARAÇA. B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Gradiva: Lisboa, 2000.

CARR, A. et al. Good ideas to foment educational revolution: the role of systematic change in advancing situated learning, constructivism, and feminist pedagogy. **Educational Technology**, v. 381, p. 5-15, 1998. Disponível em: <<http://plato.acadiau.ca/courses/educ/GMacKinnon/Educ4143/graphics/fem.PDF>>. Acesso em: 18 ago. 2015.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M. **Early algebra, early arithmetic:** treating operations as functions. 2000. Disponível em: <http://earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2003/Carraheretall_PMENA2000_PBS.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2016.

CARVALHO, R. L. **Contribuições da Teoria da Atividade no ensino de funções com o uso do laptop educacional.** 2013. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2013.

CASTRO FILHO, J. A. Tecnologia, educação e formação de professores: superando dificuldades históricas. In: SALES, J. A. M. et al. **Formação e práticas docentes.** Fortaleza: UECE, 2007. p. 179-190.

_____. **Teachers, math, and reform:** an investigation of learning in practice. 1999. 408 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Texas, Austin, 1999.

CASTRO, J. B. **Construção do conceito de covariação por estudantes do Ensino Fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais.** 2016. 273 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

CONFREY, J. Using computers to promote students' inventions on the function concept. In: MALCOM, L.; ROBERTS; SCHEONGOLD, K. **The year in school science.** Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1992. p. 141-174.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 135-164, 1994. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01273661>>. Acesso em: 7 jun. 2016.

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 1, p. 66-86, 1995. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/749228>>. Acesso em 7 jun. 2016.

COSTA, F. M. **Concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação ao conceito de fração**. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

COSTA NETO, C. D.; GIRALDO, V. A.; RANGEL, L. A formação inicial de professores de matemática na UFRJ e a incorporação das tecnologias digitais no sentido do TPACK. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 14., 2015, Chiapas. **Anais...** Chiapas: [s. n.], 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1422>. Acesso em 19 de ago. 2015.

CURY, H. N. et al. Formação de professores de Matemática. **Revista Acta Scientiae**, Canoas, v. 4, n. 1, p. 37-42, jan./jun. 2002.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam Matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectivas**. Londrina: EDUEL, 2016.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 21. ed. Campinas, SP : Papirus, 2010.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar Matemática hoje? **Revista Temas & Debates**, Brasília, ano 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

DESGAGNÉ, S. L'approche collaborative de recherche en education: un rapport nouveau na établir entre recherche et formation. **Revue des Sciences de L'éducation**, v. 27, n. 1, p. 1-48, 2001.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FERRAZ, A. G.; GITIRANA, V. Uma análise do esboço de gráficos de função em livros textos de cálculo diferencial e integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: [s. n.], 2007.

FERREIRA, V. G. G. Aproveitando o potencial dinâmico do computador no ensino de função matemática. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE, 13., 1997,

Natal. **Anais...** Natal: EDUFRRN, 1998.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2003. p. 19-41

FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

_____. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FIORENTINI, D.; SOUZA JÚNIOR, A. J.; MELO, G. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos, In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). **Cartografias do trabalho docente**. Campinas: Mercado de Letras: Associação de Leitura do Brasil, 1998.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p.137-160, 2002. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/1098>>. Acesso em: 20 jan. 2015.

GARRIDO, E.; MOURA, M. O.; PIMENTA, S. G. Pesquisa colaborativa na escola: uma maneira de facilitar o desenvolvimento profissional dos professores. In: MARIN, A. J. (Org.) **Educação continuada**. Campinas: Papirus, 2000. p. 71-84.

GITIRANA, V. *et. al.* **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: PROEM, 2014.

GRANGER, G. G. **A ciência e as ciências**. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 1994.

IBIABINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. Brasília: Líber Livro, 2008.

LADEIRA, V. P.; ROSA, M. O ensino da Matemática em um ambiente de aprendizagem com tecnologia: uma investigação qualitativa sobre a utilização dos dispositivos móveis em sala de aula como um instrumento mediático de aprendizagem. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18., 2014, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2014.

LEHMANN, M. S. **Proposta de uma sequência didática para conceitualização de derivada como taxa de variação instantânea**. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: 34, 1999.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

LIMA, M. S. **Uma proposta da aplicação da teoria dos campos conceituais para o ensino de cálculo em cursos superiores**. 2012. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2012.

LOIOLA, L. J. S. L. **Contribuições da pesquisa colaborativa e do saber prático contextualizado para uma proposta de formação continuada de professores de Educação Infantil**. Fortaleza, 2004. 327 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.

LOPES, R. P.; FÜRKOTTER, M. O papel atribuído às tecnologias digitais de informação e comunicação TDIC em processos de ensino e aprendizagem por futuros professores de Matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre, 2012. Disponível em: <<http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/paper/view/1797/465>>. Acesso em 16 set. 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, B. F.; MENDES, I. A. **Vídeos didáticos de história da matemática: produção e uso na educação básica**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

MAGALHÃES, A. R. **Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções**. 2009. 263 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO FILHO, J. A. *et al.* **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016. p. 65-82.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: UFC: UECE, 2012.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v20n2/1516-7313-ciedu-20-02-0517.pdf>>. Acesso em: 3 set. 2015.

MAIA, D. L. **Ensinar Matemática com o uso de tecnologias digitais: um estudo a partir da representação social de estudantes de Pedagogia**. 2012. 190 f. Dissertação (Mestrado em

Educação) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.

MAIA, D. L.; BARRETO, M. C. Tecnologias digitais na educação: uma análise das políticas públicas brasileiras. **Revista EF&T**, p. 47-61, 2012. Disponível em: <<http://eft.educom.pt/index.php/eft/article/view/213>>. Acesso em 21 Out. 2014.

MAIA, D. L.; CARVALHO, R. L.; CASTRO FILHO, J. A. O laptop educacional no ensino de função: experiência de aprendizagem colaborativa com suporte computacional. In: BARRETO, M. C. et al. **Matemática, aprendizagem e ensino**. Fortaleza: UECE, 2013.

MARTINI, C. M.; BUENO, J. L. P. O desafio das tecnologias de informação e comunicação na formação inicial dos professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 385-406, 2014. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/16952/pdf>>. Acesso em 12 abr. 2016.

MATTAR, J. **YouTube na Educação**. Disponível em: <<http://blog.joaomattar.com/youtube-na-educacao/>>. Acesso em: 14 mar. 2016.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MERLINI, V. L. **As potencialidades de um processo formativo para a reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais**: um estudo de caso. 2012. 261 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 4. ed. São Paulo: Hucitec: Abrasco, 1996.

MINAYO, M. C. S.; SANCHES, O. Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade? **Cadernos de Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 3, p. 239-262, jul./set., 1993. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/especializacaofisioto/files/2010/03/Quantitativo-qualitativo-oposi%C3%A7%C3%A3o-ou-complementaridade1.pdf>>. Acesso em: 25 nov. 2014.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Not “what” but “how”: becoming design-wise about educational technology. In: ZHAO, Y. (Ed.). **What teachers should know about technology: perspectives and practices**. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2003. p. 99–122.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n.6, p. 1017-1054, 2006.

MIZUKAMI, M. G. N. et al. **Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação**. São Carlos: UFSCar, 2002.

MONK, S. Students’ understanding of a function given by a physical model. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. **The concept of function: aspects of epistemology and Pedagogy**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 175-193.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a

pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7. n. 1, p. 7-29, 2002.
Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2015.

MOTTA, C. D. V. B. **Um retrato de aprendizagem em educação matemática**: professoras dos anos iniciais do ensino fundamental em processo de inovação curricular. 2011. 332 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thompson, 2002. p. 143-162.

NÓBREGA-TERRIEN, S. M.; TERRIEN, J. O estado da questão: aportes teóricos-metodológicos e relatos de sua produção em trabalhos científicos In: FARIAS, I. M. S.; NUNES, J. B. C; NÓBREGA-TERRIEN, S. M. (Org.). **Pesquisa científica para iniciantes**: caminhando no labirinto. Fortaleza: UECE, 2010. p. 33-51.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, H.; CYRINO, M. Developing knowledge about inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: one study with prospective mathematics teachers. **Sisyphus**: Journal of Education, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013. Disponível em: <<http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/article/view/3712>>. Acesso em: 27 jul. 2016.

OLIVEIRA FILHO, D. V. **Concepções de professores da rede pública estadual de São Paulo acerca do ensino das frações no ensino fundamental**. 2011. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2011.

PEDROSO, L. W. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica**. 2012. 270 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

PIMENTA, S. G. (Org.). **Didática e formação de professores**: percursos e perspectivas no Brasil e em Portugal. São Paulo: Cortez, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. **A investigação sobre o professor de Matemática**: problemas e perspectivas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, 2009.

_____. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: PONTE, J. P. (Ed.). **Educação matemática**: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992. p. 185-239.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções

pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

PRATA C. L.; NASCIMENTO, A. C. A.; PIETROCOLA, M. Políticas para fomento de produção e uso de objetos de aprendizagem. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A. **Objetos de aprendizagem**: uma proposta de recurso pedagógico. Brasília: MEC, 2007. p. 107-122. Disponível em: <<http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf>>. Acesso em 23 fev. 2017.

REALI, A. M. M. R.; TANCREDI, R. M. S. P. Desenvolvendo uma metodologia de aproximação entre a escola e as famílias dos alunos com a parceria da universidade. In: SEMINÁRIO DE METODOLOGIA PARA PROJETOS DE EXTENSÃO, 4., 2001, São Carlos. **Anais...** São Carlos: [s. n.], 2001.

RIBEIRO, A. J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 42B, p. 535-557, abr. 2012. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223574007.pdf>>. Acesso em 18 ago. 2015.

RODRIGUES DE PAULA, S. C. et al. uma investigação sobre o uso de ferramentas computacionais no ensino de cálculo integral e diferencial. **Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 2, dez. 2015. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61394>>. Acesso em: 20 ago. 2015.

RODRIGUES, P. H. et al. Contextos de utilização da mídia vídeo e a formação de professores que ensinam matemática: mapeamento de pesquisas brasileiras. In: CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 33-56.

SALDANHA, L. A.; THOMPSON, P. W. Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: BERENSON, S. et al. **Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Raleigh: PME, 1998. v. 1, p. 298-303.

SANTANA, E. R.; LAUTERT, S. S.; CASTRO FILHO, J. A. **Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no Ensino Fundamental**. Projeto de pesquisa em rede proposto ao Edital OBEDUC 2012. Brasília: CAPES, 2012.

SANTOS, A. **Processos de formação colaborativa em foco no campo conceitual multiplicativo**: um caminho possível com professoras polivalentes. 2012. 340 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

_____. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas**: reflexões teóricas e práticas. Curitiba: Appris, 2015.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. O lugar da álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E. LAUTERT, S. (Org.). **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores**: contribuições da Psicologia da educação matemática. Rio de Janeiro: Autografia, 2016. v. 1, p. 34-73.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. Algebra in elementary school. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n. esp., p. 109-124, 2012.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.). **Os professores e a sua formação**. 2. ed. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1995. p. 79-91.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. In: MESA, L. M.; JEREMIAS, J. M. V. **Las didácticas específicas em la formación del profesorado**. Santiago de Compostela: Tórculo, 1992.

SILVA, A. F. G.; ALENCAR, E. S. O conhecimento profissional docente e sua relação com a ideia de proporcionalidade. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 62, p.175-186, 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/386>>. Acesso em 17 nov. 2015.

SILVA, M. **Sala de aula interativa**. 6. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2012.

SILVA, W. O. **Uma proposta para o ensino de funções e suas representações gráficas**. 2011. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. **Algebra in the early grades**. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 133-163.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: <<http://p3m.ie.ul.pt/files/files/download/fileid/119>>. Acesso em 18 nov. 2015.

TELES, F. P.; IBIAPINA, I. M. L. M. A pesquisa colaborativa como proposta inovadora de investigação educacional. **Diversa**, ano 2, n. 3, p. 1-10, jan./jun. 2009. Disponível em: <http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/parnaiba/arquivos/files/rd-ed3ano2_art_05_a%20pesquisa_colaborativa.pdf>. Acesso em 20 nov. 2104.

TEIXEIRA, C.; MAGINA, S.; MERLINI, V. Introdução do raciocínio funcional para estudantes do 5º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

VALENTE, J. A. Um laptop para cada aluno: promessas e resultados. In: ALMEIDA, M. E. B.; PRADO, M. E. B. B. (Org.). **O Computador portátil na escola: mudanças e desafios nos processos de ensino e aprendizagem**. São Paulo: Avercamp, 2011. p. 20-33.

VASCONCELOS, L. O. **O conceito de função nas pesquisas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática 1987-2013**. 2015. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

VASCONCELOS, M. B. F. **Um estudo das relações entre contextualização e representações do conceito de função linear**. 2014. 190 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structure. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. [S. l.]: Academic Press, 1983. p. 127-174.

_____. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1991.

_____. Teoria dos Campos Conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. p. 1-26.

_____. The theory of conceptual fields. In: STEFFE, L.; NESHER, P. (Ed.). **Theories of mathematical learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1996. p. 219-239.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 2001. p. 155-191.

_____. **A criança, a Matemática e a realidade**: problemas do ensino da Matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2009.

VILLA-OCHOA, J. A. Raciocínio “covariacional”: o caso da função quadrática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2011.

WISEU, F.; MENEZES, L. Development of didactical knowledge of a future mathematics teacher of 7th to 9th grade: the confrontation with the classroom in the preparation and analysis of mathematical modeling tasks. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, v. 17, p. 347-377, 2014.

ZEICHNER, K. El maestro como profesional reflexivo. **Cuadernos de pedagogia**, n. 220, p. 44-49, 1993.

APÊNDICE A – REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA DOCENTE

Estes questionamentos abordam algumas reflexões que iremos fazer com os futuros professores sobre a prática docente.

- 1) O que você entende por objetivos pedagógicos de uma aula?
- 2) Você acha relevante abordar os conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas?
- 3) E o que acha de abordar a resolução de problemas por diferentes estratégias?
- 4) Conhece a teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas?
- 5) Em caso afirmativo da questão anterior, como abordaria os conceitos de estruturas multiplicativas em sala de aula?
- 6) Acha relevante fazer uma relação dos conteúdos com conhecimentos anteriores dos estudantes?
- 7) Quanto a participação dos estudantes, como você faria para que estes se tornem mais ativos em sala de aula?
- 8) Que recursos você utilizaria nas aulas de Matemática?
- 9) É relevante o trabalho com tecnologias analógicas ou digitais?
- 10) Comente alguma proposta para utilização de recursos digitais ou analógicos para os estudantes.

APÊNDICE B – TRABALHO PUBLICADO NO I ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFCA



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E INOVAÇÃO
I ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFCA**

CONTRIBUIÇÕES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Luis David Bonfim Ferreira
Prof. Orientador: Rodrigo Lacerda Carvalho

RESUMO

A formação de professores necessita acompanhar o desenvolvimento tecnológico, produzindo conhecimentos e métodos que se atualizem juntamente com as tecnologias digitais. Nesta perspectiva, abordamos as tecnologias digitais no campo conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2001). Este campo conceitual aborda os conteúdos de função linear, razão, proporção, número racional, multiplicação e divisão. Assim, o nosso objetivo é intervir de forma colaborativa na prática de professores de Matemática, com suporte das tecnologias digitais. Em relação à metodologia, adotamos a pesquisa colaborativa, pois não nos interessa apenas entender a natureza do trabalho desenvolvido pelo professor, mas igualmente pela formulação de alternativas de formação em serviço. O lócus é uma escola de Ensino Médio da rede pública estadual na cidade de Brejo Santo. Estamos desenvolvendo a primeira fase da pesquisa, onde nos socializamos com os professores e realizamos visitas para que todos se interessem por uma pesquisa desta natureza. Também realizamos uma revisão de literatura por meio de produções acadêmicas que tratavam do nosso aporte teórico e sua relação com a formação de professores e as tecnologias digitais. Constatamos dificuldades dos professores em entender o conceito das estruturas multiplicativas, os resultados apontam que sua formação não conteve elementos essenciais para a prática docente, o que é preocupante, pois percebemos um domínio aquém ao esperado sobre este campo conceitual. Em nossa visita ao lócus da pesquisa, verificamos que esta realidade está presente na prática dos professores. Estamos em fase de resultados preliminares, esperamos que nossa pesquisa possa amenizar esta problemática que vem causando diversos prejuízos para a educação e para a sociedade. Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e ao programa PIBIC pela bolsa de estudo concedida para o desenvolvimento da pesquisa.

Palavras-chave: Estruturas multiplicativas. Tecnologias digitais. Formação docente.

APÊNDICE C – TRABALHO PUBLICADO NA II MOSTRA UFCA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI II MOSTRA UFCA

O ENSINO DO CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Natália da Silva Jorge
Orientador: Rodrigo Lacerda Carvalho

INTRODUÇÃO

De acordo com diversas pesquisas no campo da Educação Matemática, constatamos a dificuldade dos alunos em aprender Matemática. Diante deste contexto, nosso intuito é agir dentro do meio escolar e vivenciar o ensino e aprendizagem da referida disciplina no ensino básico, dentro da visão de alguns pesquisadores, dentre eles Vergnaud (2001). O referido teórico pesquisa sobre a teoria dos campos conceituais que analisa um campo de situações que dão significado ao conceito e que de alguma maneira estão intimamente ligadas no processo cognitivo, dessa forma o conhecimento é construído por meio de situações e problemas vivenciados pelos estudantes.

A partir deste contexto, evidenciamos que um conceito para ser entendido deve ser estudado dentro de um campo onde envolva vários conceitos, ou seja, um conceito pra ser interpretado deve ser envolvido em várias situações. Partindo desse pressuposto podemos nos referir a um campo conceitual como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros.

Utilizamos como metodologia a pesquisa colaborativa, pois o nosso interesse não é apenas no trabalho desenvolvido pelo professor, mas igualmente pela formulação de alternativas de formação para o ensino e aprendizagem da Matemática. Nossa intenção primitiva foi colaborar no desenvolvimento profissional dos professores, facilitando a reflexão de suas ações, seguido pelo planejamento reflexivo de suas novas ações. Para tanto, a seguir explicitaremos os objetivos de nossa pesquisa.

OBJETIVOS

Intervir de forma colaborativa na prática de professores da Educação Básica no que tange às Estruturas Multiplicativas, baseados no modelo de formação “ação-reflexão-planejamento-ação”;

Identificar as estratégias de ensino que os professores utilizam para lecionar o campo conceitual das Estruturas Multiplicativas;

Desenvolver estratégias e situações sobre Estruturas Multiplicativas com os professores de Matemática a partir das experiências colaborativas.

A seguir delinearemos os aspectos metodológicos que são fundamentais para a

condução da pesquisa.

METODOLOGIA

De acordo com Ibiapina (2008), a parceria entre a universidade e a escola oferece subsídios para políticas de formação em serviço, considerando questões relacionadas ao processo de interação entre o pesquisador e o professor da escola parceira. Nessa perspectiva, o grande interesse de colaboração entre os participantes da pesquisa está na crença de que a produção de conhecimentos melhora a prática docente.

Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e confiança mútua pela condução das ações. A pesquisa colaborativa é composta por diferentes etapas que vão evidenciando um envolvimento crescente entre os participantes e transformando as práticas de todos. Três caminhos distintos que se complementam estarão na operacionalização metodológica da pesquisa: a co-situação, a co-operação e a co-produção.

A co-situação é o momento que deverá responder às preocupações do contexto do professor e do contexto da pesquisa. Nessa fase, o papel principal do pesquisador consiste em procurar a mediação entre esses dois contextos. Esse momento deve ser construído para que os envolvidos passem a se sentir motivados para colaborar e inserir-se no grupo. Nesta etapa, realizamos visitas periódicas ao lócus da pesquisa. Nos momentos de formação, conversamos com os professores de Matemática acerca do contexto do ensino e da aprendizagem desta disciplina, suas dificuldades e possibilidades.

A co-operação foi a fase do processo de formação, de explicitação dos diálogos entre os pesquisadores e os professores. Nesse primeiro momento, ocorreu planejamento sobre o ensino de funções. O referido planejamento levou em consideração os elementos das Estruturas Multiplicativas, a partir da leitura de textos e debates entre os participantes. Assim, este ciclo da pesquisa foi composto por observação, reflexão, estudo teórico e planejamento.

A co-produção consistiu na produção de conhecimento acerca do ensino de função, a partir das percepções dos participantes da pesquisa. Esta fase perpassou as etapas anteriores.

Esclarecido o método de pesquisa, os critérios para a escolha do lócus e sujeitos da pesquisa foram assim definidos: o ambiente foi uma escola da rede estadual de Educação Básica. Os sujeitos da pesquisa foram dois professores de Matemática desta escola. Trabalhamos com o diário de campo nos momentos de planejamento, o referido diário foi essencial na pesquisa, pois é nele que os pesquisadores registraram observações de fenômenos, fizeram descrições de pessoas e cenários, descreveram episódios e retrataram diálogos. O tratamento e a análise dos dados ocorreram em todas as etapas da pesquisa colaborativa.

RESULTADOS

Neste tópico estão apresentados e analisados os dados que foram sendo construídos durante o período em que ocorreu o nosso processo de formação, nas etapas de co-situação, co-operação e co-produção. A primeira etapa correspondeu ao contato inicial com o lócus e com os participantes da pesquisa, e nele se caracterizou a prática docente dos professores de Matemática. A segunda etapa constituiu-se das formações em serviço, sob o olhar da teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas. Já a co-produção consistiu na elaboração de conhecimentos tanto pelos pesquisadores, quanto pelos professores, nos momentos de vivência da prática pedagógica.

Na etapa de co-situação conversamos com os professores acerca do contexto do ensino da Matemática, suas dificuldades e possibilidades. Abordamos também o potencial do computador para a melhoria do ensino da Matemática. Expusemos a proposta da pesquisa, inclusive os elementos da teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas, tendo em vista perceber o interesse dos professores pela participação efetiva em uma pesquisa dessa natureza.

Consideramos este momento importante para a nossa pesquisa, pois, a partir dessa atividade, iniciamos efetivamente a busca em torno da articulação entre o desenvolvimento profissional dos docentes e a produção do conhecimento científico, conforme preconiza a pesquisa colaborativa.

Os elementos relativos à fase de co-operação vivenciados entre os professores e pesquisadores buscaram planejar as aulas de Matemática de maneira colaborativa. Cada aula foi planejada em conjunto – pesquisadores e professores – visando à produção de motivação em sala de aula para que os alunos aprendessem o conceito de função, sempre tomando por base a teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas. Teles e Ibiapina (2009) afirmam que este momento aproxima a pesquisa científica da escola, logo, viabiliza a aproximação entre teoria e prática.

Este modelo de pesquisa dá destaque à prática, na formação dos participantes e na produção do conhecimento científico, além de possibilitar, entre outras situações, o envolvimento dos professores e dos pesquisadores no processo de construção do conhecimento.

Dada a profusão de dados coletados, eles foram estruturados em dois episódios: 1) conceito de função através do OA Variação da Função Afim; e 2) O uso do Geogebra na interpretação de gráficos da função afim. Em ambos os episódios, trabalhamos de forma colaborativa com um conjunto de atividades interativas que permite estudar o comportamento variacional da função afim. Aproveitamos para relembrar alguns tópicos já estudados da função afim: definição e interpretação geométrica dos coeficientes e que definem a função. Uma atividade produzida com o *software* GeoGebra foi utilizada para auxiliar a interpretação geométrica. Depois destes momentos de formação, podemos constatar um avanço na prática docente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O avanço constatado na percepção dos professores participantes da pesquisa no decorrer da investigação revela que a formação é um espaço relevante para o debate sobre a teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas e também sobre a utilização das tecnologias no ensino de Matemática.

Na fase da co-situação verificamos que os docentes não conheciam a teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas. Ao final desta etapa os professores já se mostraram familiarizados com a teoria de Vergnaud. Consideramos este momento um diferencial na prática docente, pois estes professores poderão levar para a sala de aula com boas reflexões teóricas.

Na co-operação, evidenciamos a importância da pesquisa ter sido planejada em conjunto com todos os participantes, dessa maneira os docentes passaram a investigar e analisar o OA “Variação da Função Afim” e o Geogebra até perceberem sua relevância para o entendimento do conceito de função. Por fim, reforçamos relevância de uma adequada formação para que se possa trabalhar com um campo de conceitos com suporte das tecnologias.

REFERÊNCIAS

IBIABINA, I. M. L. de M. **Pesquisa colaborativa:** investigação, formação e produção de conhecimentos. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

TELES, F. P.; IBIAPINA, I. M. L. de M. **A pesquisa colaborativa como proposta inovadora de investigação educacional.** In: Diversa. Ano 2 - nº 3 : jan./jun, 2009.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais.** In: BRUN, J. (Ed.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. pp. 155-191, 2001.

APÊNDICE D – PLANOS DE AULA ELABORADOS PELOS FUTUROS PROFESSORES

D2: Telefonia Celular: Qual operadora escolher? Um Problema para ser resolvido com a função afim

Conceitos principais a serem trabalhados: Função afim

Desenvolvimento da aula: Apresentação de um vídeo sobre a questão das operadoras de celular. É importante questionar os alunos sobre qual operadora tem um plano melhor para o cliente, para que surjam dúvidas ao longo da atividade, para que eles busquem uma solução viável.

Expectativas do futuro professor: É esperado um bom desenvolvimento da aula, mas os conhecimentos prévios serão necessários, portanto a eficácia e andamento da aula dependerá do foco e esforço dos estudantes.

I3: Explorando e construindo o conceito de função afim: a influência dos coeficientes a e b no gráfico

Conceitos principais a serem trabalhados: Função Afim

Desenvolvimento da aula: Gerar um gráfico no *software* Geogebra e a partir daí manipular e analisar de forma colaborativa a influência dos coeficientes a e b na função afim. Assim, a explicação será mais detalhada, já que o *software* oferece maiores detalhes do gráfico.

Expectativas do futuro professor: Como se trata de um estudo com suporte das tecnologias esperamos que seja uma aula mais interessante e que ocasionará uma aprendizagem mais eficaz.

APÊNDICE E – CONHECIMENTO DO PERFIL DOS FUTUROS PROFESSORES

Este apêndice, foi adaptado do Projeto OBEDUC que tem por objetivo conhecer o perfil dos futuros professores.

Nome:

- 1) Você já tem outro Curso superior? Concluído em (ano):
- 2) Em qual(is) rede(s) você pretende ministrar aulas?
- 3) Em sua trajetória estudantil, qual era o seu gosto pela Matemática?
- 4) Esse gosto mudou? Explique.
- 5) Enumere os blocos de conteúdos na ordem em que você se sente mais seguro(a) para ensinar. Explique a referida ordem.

APÊNDICE F – INSTRUMENTAL APLICADO AOS PARTICIPANTES DA PESQUISA DO PROJETO OBEDUC/E-MULT

Neste apêndice, encontra-se o instrumental aplicado aos alunos das escolas participantes do OBEDUC. Para este primeiro momento, solicitamos aos estudantes da licenciatura que identifiquem e explorem os problemas que podem ser abordados com o operador funcional e posteriormente ampliaremos para problemas mais específicos de funções.

- 1) Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?
- 2) A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?
- 3) Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?
- 4) A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?
- 5) Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?
- 6) Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?
- 7) A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m^2 . A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?
- 8) Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?

- 9) A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches?
- 10) Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?
- 11) Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?
- 12) Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?
- 13) Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?

APÊNDICE G - ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CONCEITO DE FUNÇÕES

Neste apêndice, também adaptado do OBEDUC, solicitamos a elaboração de seis problemas distintos envolvendo o conceito de funções a partir das operações de multiplicação e/ou divisão (a critério do estudante da licenciatura).

APÊNDICE H - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

PESQUISA: CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estamos desenvolvendo uma pesquisa intitulada **CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS**. Com a mesma pretendemos analisar a formação inicial de professores de Matemática acerca das estruturas multiplicativas, com suporte das tecnologias digitais.

O conteúdo será gravado em áudio, as gravações serão usadas exclusivamente para análise dos dados. Informamos que a pesquisa não lhe trará nenhum ônus e que você tem a liberdade para participar ou não da pesquisa, sendo-lhe reservado o direito de desistir da mesma no momento em que desejar, sem que isto lhe acarrete qualquer prejuízo.

Informamos também que **não** haverá divulgação personalizada das informações, que você **não** receberá qualquer espécie de reembolso ou gratificação devido à participação neste estudo e que terá o direito a uma via do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Se necessário, pode entrar em contato com o responsável pela pesquisa, Rodrigo Lacerda Carvalho, pelos telefones (85) 86103974; (88) 99017803 ou e-mail: rodrigo.lacerda@ufca.edu.br.

Assinatura do Responsável pela Pesquisa

Tendo sido informado(a) sobre a pesquisa **CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS**, concordo em participar da mesma de forma livre e esclarecida.

Nome: _____

Assinatura: _____

Brejo Santo/CE, _____ de _____ de _____.