



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E
DE COMPUTAÇÃO

ANDERSON BARBOSA RODRIGUES

ALOCAÇÃO DE RECURSOS DE RÁDIO PARA SISTEMAS SC-FDMA
BASEADO EM RELAXAMENTO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

SOBRAL

2016

ANDERSON BARBOSA RODRIGUES

ALOCAÇÃO DE RECURSOS DE RÁDIO PARA SISTEMAS SC-FDMA BASEADO
EM RELAXAMENTO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de Concentração: Sistemas de Comunicação

Orientador: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima

SOBRAL

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R611a Rodrigues, Anderson.

Alocação de Recursos de Rádio para Sistemas SC-FDMA Baseado em Relaxamento e Programação Linear / Anderson Rodrigues. – 2016.
74 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral, Programa de Pós-Graduação em Biotecnologia, Sobral, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima.

1. Alocação de Recursos de Rádio. 2. Otimização. 3. SC-FDMA. 4. LTE. I. Título.

CDD 660.6

ANDERSON BARBOSA RODRIGUES

ALOCAÇÃO DE RECURSOS DE RÁDIO PARA SISTEMAS SC-FDMA BASEADO
EM RELAXAMENTO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de Concentração: Sistemas de Comunicação

Aprovada em: 20 de dezembro de 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Rafael Marques
Lima (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Emanuel Bezerra Rodrigues
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vicente Ângelo de Sousa Júnior
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
(UFRN)

O autor dedica este trabalho a sua esposa,
Jéssica Alexia do Monte Rodrigues, por ser o
pilar fundamental desta empreitada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre repor minhas forças e me fazer superar todos os obstáculos.

A minha esposa, pela paciência, compreensão e apoio neste período tão importante de minha vida. Sem sua força e incentivos este trabalho não seria possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Lima, por sua paciência, orientação, conselhos e incentivos que foram cruciais para a conclusão desta dissertação.

Aos meus pais pelo apoio essencial durante toda minha vida, pois sem eles o percurso até essa conquista seria muito mais difícil.

Ao meu irmão, que mesmo distante conseguiu me motivar através de boas energias e ser um pilar fraternal inefável.

Ao GTEL-UFC (Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem-fio) pela confiança e disponibilização de suas ferramentas de simulação.

“Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele
conduz somente até onde os outros já foram.”

(Alexander Graham Bell)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de maximização do somatório das taxas de dados ponderadas no enlace reverso de um sistema sem fio que emprega *Single Carrier - Frequency Division Multiple Access* (SC-FDMA). O esquema de múltiplo acesso SC-FDMA apresenta uma importante restrição quanto a alocação de recursos que não está presente em sistemas *Orthogonal Frequency Division Multiple Access* (OFDMA) (esquema utilizado no enlace direto de sistemas *Long Term Evolution* (LTE)): a contiguidade ou adjacência de blocos de recursos na frequência. A restrição de adjacência implica que a alocação dos blocos de recursos a cada terminal móvel deve ser feita de forma contígua na frequência. Na ótica de alocação de recursos em redes móveis, essa nova restrição não só inviabiliza o uso das soluções desenvolvidas para OFDMA encontradas na literatura, mas também torna o problema bem mais desafiador do ponto de vista matemático e computacional. Primeiramente, nós discutimos sobre a solução ótima desse problema que pode ser obtida através de programação inteira. Motivado pela alta complexidade computacional desta solução, propomos o uso de técnicas de relaxamento do problema de otimização inteiro e aplicação de programação linear (contínua). Através de simulações computacionais, demonstramos que o esquema proposto é capaz de encontrar a solução ótima em pelo menos 55% das simulações realizadas com uma complexidade computacional muito menor. Para os casos em que a solução obtida pela programação linear contínua não é inteira, o estudo propõe um algoritmo que obtém uma solução inteira através de técnicas de arredondamento. Apresentamos também uma análise de desempenho comparando o algoritmo desenvolvido com algoritmos presentes na literatura.

Palavras-chave: Alocação de Recursos de Rádio. Otimização. SC-FDMA. LTE.

ABSTRACT

In this work, we study the maximization problem of the sum of the weighted data rates in the wireless system's uplink that uses SC-FDMA. The SC-FDMA multiple access scheme was adopted in the LTE uplink especially because it eases the power amplifier design in the mobile terminals. However, SC-FDMA presents an important restriction in radio resource allocation that is not present in OFDMA that was adopted in the LTE downlink: the resource adjacency or contiguity. With the resource adjacency constraint, the blocks of frequency resources assigned to each mobile terminal should be adjacent in the frequency domain. From the resource allocation point of view, this new constraint not only makes ineffective all previous resource allocation solutions proposed for OFDMA but also turns the problems even more harder in terms of computational complexity. In this work, we study the total data rate maximization problem in uplink SC-FDMA systems. Firstly, we discuss about the optimal solution of the problem that can be obtained through the use of integer optimization techniques. Motivated by the high computational complexity of this solution, we propose an alternative solution based on integer optimization relaxation and application of linear programming. The simulation results show that our proposed scheme is able to achieve the optimal solution in 55% (at least) of the simulations with a much lower computational complexity. For the cases where the solution obtained by continuous linear programming is not integer, the study proposes an algorithm that obtains an integer solution through rounding techniques. We also present a performance analysis comparing the algorithm developed with algorithms present in the literature.

Keywords: Radio Resource Allocation. Optimization. SC-FDMA. LTE.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Bloco de Recursos em uma representação tempo-frequência. Adaptada de (LIMA, 2012).	19
Figura 2 – Formato de um <i>Frame</i> LTE	21
Figura 3 – Diagrama de blocos de um transmissor e receptor SC-FDMA	22
Figura 4 – Cenário de rede sem fio utilizado para ilustrar justiça na alocação de recursos de rádio	25
Figura 5 – Ilustração do espaço de busca do <i>Branch-and-Bound</i> (BB)	31
Figura 6 – Ilustração gráfica do espaço de soluções de um Problema de Programação Linear	33
Figura 7 – Ilustração Modelo do Sistema	38
Figura 8 – Fluxograma da proposta de arredondamento.	49
Figura 9 – Percentual de acerto versus o número de Bloco de Recursos (BRs) no sistema com 6 terminais móveis no sistema.	54
Figura 10 – Percentual de acerto versus o número de terminais móveis.	55
Figura 11 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 12 BRs.	57
Figura 12 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.	58
Figura 13 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs. Análise dos TTIs em que a solução ótima não foi obtida através do relaxamento.	59
Figura 14 – Somatório das taxas ponderadas dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 12 BRs.	60
Figura 15 – Somatório das taxas ponderadas dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.	61
Figura 16 – Somatório das taxas totais dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.	62
Figura 17 – Gráfico em barras da taxa atingida por usuário (a), taxa ponderada por usuário (b).	63

Figura 18 – Canal médio por usuário (a) e pesos definidos por usuário (b) em um <i>Transmission Time Interval</i> (TTI) escolhido aleatoriamente no cenário em que a justiça é avaliada.	64
Figura 19 – Comparação taxas obtidas pelos usuários em um TTI considerando (a) maximização da taxa de dados total e (b) maximização da taxa de dados ponderada pelos pesos calculados.	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 2 – Exemplo de <i>Jain's index</i>	27
Tabela 3 – Parâmetros de simulação.	53
Tabela 4 – Complexidade dos Algoritmos Analisados	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

16QAM	16 <i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
3G	3 ^a Geração
3GPP	3 rd <i>Generation Partnership Project</i>
4G	4 ^a Geração
64QAM	64 <i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
ADSL	<i>Asymmetric Digital Subscriber Line</i>
ARR	Alocação de Recursos de Rádio
BB	<i>Branch-and-Bound</i>
BPSK	<i>Binary Phase-Shift Keying</i>
BR	Bloco de Recurso
CQI	<i>Channel Quality Indicator</i>
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
ERB	Estação Rádio Base
FDD	<i>Frequency Division Duplex</i>
FDM	<i>Frequency Division Multiplexing</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
IDFT	<i>Inverse Discrete Fourier Transform</i>
ILP	<i>Integer Linear Program</i>
IP	<i>Internet Protocol</i>
ISI	<i>Inter Symbol Interference</i>
LP	<i>Linear Programming</i>
LTE	<i>Long Term Evolution</i>
LTE-A	<i>Long Term Evolution - Advanced</i>
MCS	<i>Modulation and Coding Scheme</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
OFDM	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
OFDMA	<i>Orthogonal Frequency Division Multiple Access</i>
PAPR	<i>Peak-to-Average Power Ratio</i>
QoS	<i>Quality of Service</i>
QPSK	<i>Quadri-Phase Shift Keying</i>
RAN	<i>Radio Access Network</i>

SC-FDMA	<i>Single Carrier - Frequency Division Multiple Access</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
TDD	<i>Time Division Duplexing</i>
TDMA	<i>Time Division Multiple Access</i>
TM	Terminal Móvel
TTI	<i>Transmission Time Interval</i>
TUM	<i>Totally Unimodular Matrix</i>
WCDMA	Wideband CDMA

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Escopo do Problema e Motivação	17
1.2	Fundamentação Teórica	18
1.2.1	<i>OFDMA</i>	18
1.2.2	<i>SC-FDMA</i>	19
1.2.3	<i>3GPP Long Term Evolution</i>	20
1.2.3.1	<i>Transmissão no enlace reverso (Uplink)</i>	21
1.2.4	<i>Alocação de Recursos de Rádio</i>	23
1.2.5	<i>Justiça</i>	24
1.2.6	<i>Problemas de Otimização</i>	29
1.2.6.1	<i>Branch and Bound</i>	29
1.2.6.2	<i>Programação Linear</i>	32
1.3	Estado da Arte e Limitações	34
1.4	Objetivos e Contribuições	35
1.5	Metodologia	36
1.6	Produção Científica	37
1.7	Organização da Dissertação	37
2	MODELAGEM DO SISTEMA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	38
2.1	Modelagem do Sistema	38
2.2	Formulação Problema	42
3	SOLUÇÕES ÓTIMAS E SUB-ÓTIMAS	44
3.1	Caracterização da Solução Ótima	44
3.1.1	<i>Complexidade Computacional da Solução Ótima</i>	44
3.2	Solução Proposta	45
3.2.1	<i>Solução usando Programação Linear</i>	45
3.2.2	<i>Proposta de arredondamento</i>	48
3.2.3	<i>Complexidade Computacional da Solução Proposta</i>	48
3.3	Soluções Sub-Ótimas Presentes na Literatura	50
3.3.1	<i>Solução de Ian Wong</i>	50

3.3.2	<i>Solução de Mengying Zhang</i>	50
3.3.3	<i>Solução Heurística de Soares</i>	51
3.3.4	<i>Solução Heurística de Lima</i>	51
4	VALIDAÇÃO DE DESEMPENHO E ANÁLISE	52
4.1	Parâmetros de Simulação	52
4.2	Resultados	54
4.2.1	<i>Análise de Taxa de Acerto</i>	54
4.2.2	<i>Maximização da Taxa Total do Sistema</i>	56
4.2.3	<i>Maximização da Soma das Taxas Ponderadas</i>	58
4.2.4	<i>Análise Geral</i>	61
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	66
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICES	72
	APÊNDICE A – Complexidade Computacional da Solução Proposta 72	
A.1	Complexidade da Solução Proposta	72

1 INTRODUÇÃO

As comunicações móveis têm experimentado um grande desenvolvimento desde a primeira geração de sistemas celulares, que era analógica, até os sistemas atuais mais modernos. Dentre as razões que motivaram essa evolução, podemos mencionar a busca por maiores eficiência energética e espectral, assim como a busca por atender os novos requisitos de Qualidade de Serviço ou do inglês, *Quality of Service* (QoS) (ITU, 2008).

Com a evolução destes sistemas, houve uma expansão dos serviços oferecidos pelas operadoras. Esta expansão corroborou na necessidade de taxas de dados cada vez mais altas e também no aumento da quantidade de usuários conectados a estas redes. Segundo previsões apresentadas no *Mobile World Congress* (MWC), em 2022 teremos um aumento de 25% na quantidade de dispositivos sem fio conectados a rede e o uso de banda larga móvel aumentará cerca de 90% (ERICSSON, 2016). Este cenário induz a necessidade de otimização da eficiência espectral e energética, assim como o aumento da capacidade do sistema (WANG *et al.*, 2014).

Esforços multidisciplinares envolvendo pesquisa em protocolos de comunicação móvel, processamento de sinais, otimização, entre outros, são responsáveis pelos avanços que as comunicações móveis têm alcançado. Dois exemplos concretos de avanços tanto no núcleo da rede como na parte de acesso de rádio são a convergência da redes de transporte para o *Internet Protocol* (IP) e o uso de transceptores com múltiplas antenas, respectivamente.

Alocação de Recursos de Rádio (ARR) destaca-se como uma funcionalidade eficiente para otimizar o desempenho das redes modernas. Os algoritmos de ARR são responsáveis pelo gerenciamento dos escassos recursos de rádio tais como potência, *slots* de tempo, canais espaciais e faixas de frequência (LIMA *et al.*, 2010; SADR *et al.*, 2009). A fim de que os principais objetivos de redes móveis possam ser otimizados, tais como QoS, eficiência espectral e eficiência energética, devemos ter um uso racional e eficiente dos recursos de rádio.

Neste trabalho, estudamos o problema de maximização da soma das taxas dos usuários ponderadas por pesos (ou prioridades) para sistemas empregando o esquema de múltiplo acesso SC-FDMA. Diferentemente do enlace direto, em que o esquema OFDMA foi adotado, o sistema LTE emprega SC-FDMA no enlace reverso. A motivação para tal é diminuir a razão entre a potência de transmissão de pico e a média, facilitando assim

o projeto de amplificadores de potência para os Terminais Móveis (TMs). Apesar desse benefício, SC-FDMA torna soluções de problemas de ARR mais difíceis de serem obtidas devido ao requisito que os blocos de recursos alocados a cada usuário devem ser contíguos na frequência. Definimos esse requisito como contiguidade ou adjacência de recursos. Esse requisito não é necessário com OFDMA.

Este trabalho visa apresentar um estudo elaborado sobre algoritmos de alocação de recursos em uma rede SC-FDMA com o objetivo de otimizar o desempenho dos sistemas. É desenvolvida uma análise sobre a complexidade da solução do problema de otimização e proposta uma técnica alternativa que reduz a complexidade para encontrar a resposta ótima. Realizamos uma análise detalhada dos resultados e uma comparação com resultados de algoritmos presentes na literatura.

1.1 Escopo do Problema e Motivação

Em comunicações móveis, percebe-se que há uma tendência ao aumento da demanda por conectividade de dispositivos a rede. Estes dispositivos não se resumem exclusivamente a *smartphones*. Com a Internet das Coisas cada vez mais presente, notamos uma grande variedade de dispositivos conectados a rede móvel. Conforme já apresentamos anteriormente, teremos, segundo previsões, um acréscimo de dispositivos conectados às redes móveis. Um grande desafio que surge nesse cenário consiste na acomodação destes dispositivos em um espectro eletromagnético limitado.

Na literatura, diversos estudos buscam alternativas para otimizar o uso do espectro eletromagnético. Em (GROBE *et al.*, 2013), (JOVICIC *et al.*, 2013) e (BURCHARDT *et al.*, 2014), por exemplo, os autores apresentam soluções que utilizam comunicação sem fio por luz visível. Já em (ESCH, 2012) e (FRAGKIADAKIS *et al.*, 2013), os autores utilizam a técnica conhecida como rádio cognitivo para maximizar a eficiência no uso do espectro eletromagnético utilizado e, desta forma, atender as demandas das redes de comunicações móveis.

Na seção a seguir, apresentaremos as bases teóricas que serviram como alicerce para o estudo em questão. Abordaremos conceitos utilizados neste trabalho e que serão utilizados no decorrer do texto.

1.2 Fundamentação Teórica

1.2.1 OFDMA

OFDMA é uma técnica de múltiplo acesso baseado em *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM). OFDM é uma tecnologia de transmissão usada em comunicações com fio e sem fio. Dois exemplos de tecnologias que utilizam este tipo de técnica em meio cabeado são: *Asymmetric Digital Subscriber Line* (ADSL) e *Power Line Communications*. Em sistemas sem fio, podemos destacar o padrão IEEE 802.11 a/g, LTE, LTE-Advanced (LTE-A) e o padrão IEEE 802.16 (WiMAX).

Em OFDM, a banda de frequência utilizada para transmissão é dividida em sub-portadoras com largura de banda mais estreita que a banda de coerência do canal, assim como sistemas *Frequency Division Multiplexing* (FDM) (LIU; LI, 2005). Contudo, as sub-portadoras do OFDM são modeladas para serem ortogonais entre si, o que torna esta técnica mais eficiente que a FDM. Transmissores e receptores OFDM podem ser facilmente modelados utilizando *Fast Fourier Transform* (FFT), e como consequência da estreita largura de banda, não é necessário uso de estruturas complexas de equalização na recepção. Baseado nisto, a taxa de dados transmitida em cada sub-portadora é baixa e consequentemente os símbolos gerados por este esquema de transmissão são mais longos que o espalhamento espectral experimentado, o que torna o OFDM robusto a *Inter Symbol Interference* (ISI). Com o objetivo de reduzir ainda mais os efeitos da ISI, é inserido, antes de cada símbolo OFDM, um intervalo de guarda nomeado de prefixo cíclico.

Com OFDMA, implementa-se o múltiplo acesso através do assinalamento de sub-portadoras, ou conjunto de sub-portadoras a usuários do sistema e em diferentes períodos de tempo (LIU; LI, 2005). Portanto, OFDMA é utilizado em conjunto com *Time Division Multiple Access* (TDMA). Quando assumimos um sistema de antenas únicas, os recursos do sistema podem ser arranjados em uma grade tempo-frequência como apresentado na Figura 1. No eixo da frequência há uma subdivisão de sub-portadoras ou um conjunto delas. No eixo do tempo há uma subdivisão de símbolos OFDM. Um BR é definido como a unidade básica a ser alocada. Consiste em um conjunto de sub-portadoras adjacentes, na dimensão da frequência, e um conjunto de símbolos OFDM consecutivos. A definição da quantidade de sub-portadoras e símbolos OFDM depende do sistema em questão.

Para não gerar interferência intracelular no sistema sem fio, o mesmo BR não pode ser assinalado a mais de um usuário ao mesmo tempo em uma mesma célula. Apresentaremos mais adiante que esta restrição gera uma componente combinatória estudada em problemas de alocação de recursos de rádio. Definimos esta restrição como restrição de **exclusividade**.

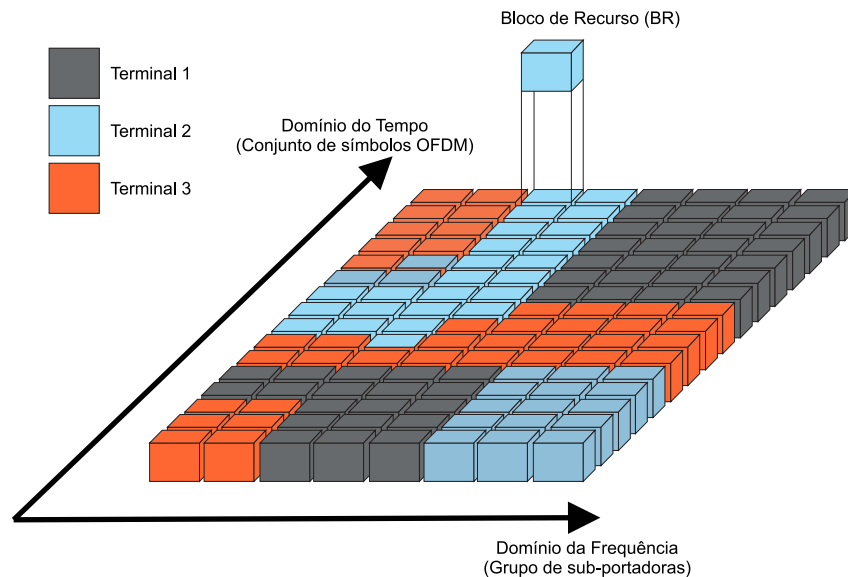


Figura 1 – Bloco de Recursos em uma representação tempo-frequência. Adaptada de (LIMA, 2012).

1.2.2 SC-FDMA

Apesar das vantagens do OFDMA, esta técnica sofre de fortes variações de envoltória causando altos valores de *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR). SC-FDMA oferece ao sistema performance e complexidade similar a OFDMA. Contudo, a principal vantagem do SC-FDMA está relacionada com a baixa PAPR do sinal transmitido. PAPR é definida como a razão da potência de pico e a potência média do sinal transmitido. Esse parâmetro é a principal preocupação dos TMs. Altas PAPRs implicam em um fardo para os usuários devido a necessidade do uso de amplificadores de potência lineares nos dispositivos para evitar excessivas distorções no sinal. Motivada por esta razão e outros aspectos práticos, *3rd Generation Partnership Project* (3GPP) escolheu SC-FDMA como técnica de múltiplo acesso para o enlace reverso em redes LTE.

SC-FDMA é uma forma modificada de OFDMA em que os símbolos no domínio do tempo são transformados para o domínio da frequência utilizando *Discrete Fourier*

Transform (DFT) antes de seguirem o esquema de modulação padrão do OFDMA. Se comparado ao OFDMA, SC-FDMA possui, intrinsecamente, baixa PAPR. Contudo, com o objetivo de reduzir a interferência inter-simbólica, a Estação Rádio Base (ERB) deve empregar equalização adaptativa no domínio da frequência. Em resumo, SC-FDMA reduz a necessidade de amplificadores de potência com grande região linear nos dispositivos móveis, mas requer a implementação de técnicas de equalização no domínio da frequência na ERB (KELLY *et al.*, 1998).

SC-FDMA gera algumas restrições adicionais a problemas de ARR quando comparamos ao OFDMA. Os BRs assinalados a um TM devem ser adjacentes entre si. Isto é necessário para obter os benefícios relacionados à redução da PAPR. Esta restrição adiciona dificuldade extra na alocação dos recursos da rede quando comparamos a alocação de recursos utilizando OFDMA. Somada a esta restrição, há ainda a restrição de exclusividade, que está presente também quando utilizamos OFDMA. Em resumo, as duas restrições mencionadas compõem as premissas básicas para o desenvolvimento de algoritmos que tem o objetivo de realizar a alocação dos recursos de rede.

1.2.3 3GPP Long Term Evolution

Long Term Evolution - Advanced (LTE-A) é a tecnologia que o 3GPP adotou para a quarta geração de telefonia móvel e corresponde a um aprimoramento do LTE, que apresentou-se como uma tecnologia transitória entre a 3ª Geração (3G), que usa Wideband CDMA (WCDMA), e a 4ª Geração (4G). O LTE e o LTE-A utilizam OFDMA no enlace direto, e SC-FDMA é usado no enlace reverso.

Redes destinadas a comunicações móveis normalmente são divididas em *Radio Access Network* (RAN) e o núcleo da rede. A RAN lida com as funcionalidades relacionadas a camada física e a camada de enlace, tais como codificação, modulação, compressão, dentre outras. E funções relacionadas ao gerenciamento dos recursos de rádio, que é o foco principal deste trabalho. O núcleo da rede lida com as informações relacionadas aos terminais móveis, como por exemplo, políticas de utilização de dados, gerencia de mobilidade e a interconexão com outras redes externas.

O objetivo do LTE é promover taxas de transmissão de pelo menos 100 Mbps no *downlink* e 50 Mbps no *uplink* operando em uma largura de banda de 20 MHz. Em termos de eficiência espectral, o sistema LTE promete 5 bits/s/Hz no *downlink* e 2,5

bit/s/Hz no *uplink*. Estes valores de taxa de transmissão foram projetados para serem obtidos por usuários estáticos ou móveis a uma velocidade máxima de 15 Km/h.

Um sistema LTE é compatível com as técnicas *Frequency Division Duplex* (FDD) e *Time Division Duplexing* (TDD) para implementação de modo *full-duplex* no enlace direto e reverso. Isto significa que, em FDD, diferentes bandas de frequência são utilizadas para o *downlink* e *uplink* enquanto que em TDD, o *downlink* e *uplink* utilizam a mesma banda de frequência em *slots* de tempo distintos.

Conforme ilustramos na Figura 2, um sistema LTE divide o tempo em *frames* de 10 ms. Cada *frame* possui 20 *slots* de 0,5 ms. Dois *slots* adjacentes compõem um sub-*frame* de um 1 ms de duração, definido como um TTI. Cada *slot* é composto por sete símbolos OFDM com prefixo cíclico de tamanho normal ou seis símbolos OFDM com prefixos cíclicos de tamanho estendido. Este modelo de sistema serviu como base das simulações em que os algoritmos desenvolvidos e analisados neste documento foram testados.

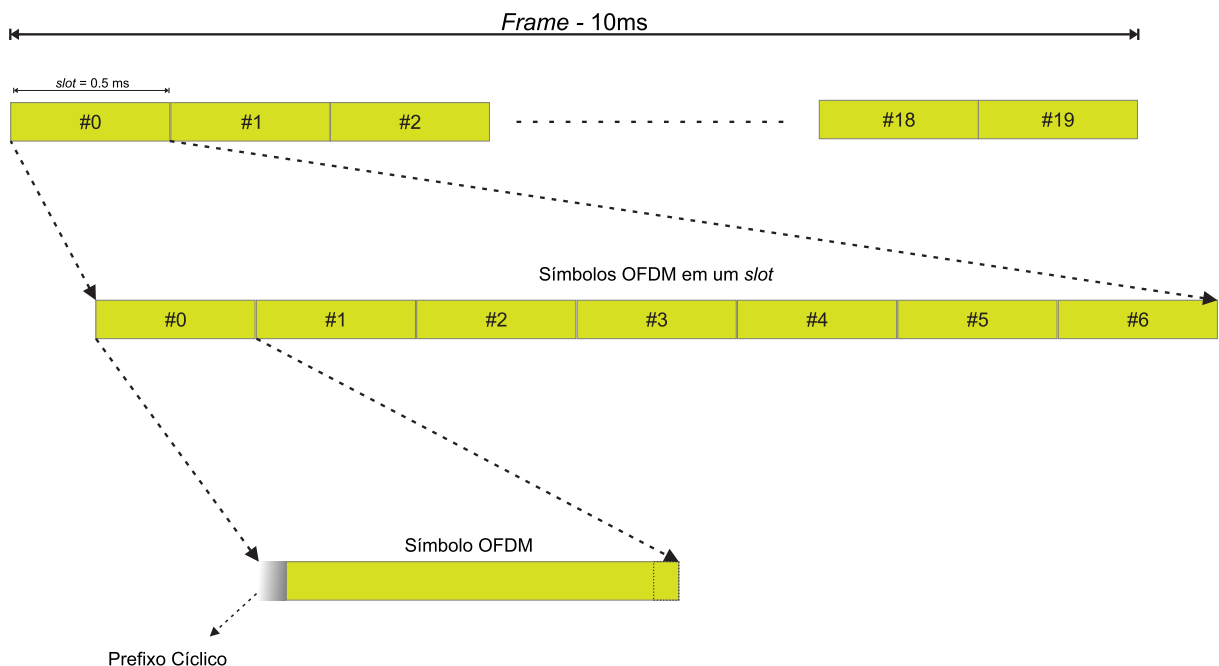


Figura 2 – Formato de um *Frame* LTE

1.2.3.1 Transmissão no enlace reverso (*Uplink*)

Para ilustrar o cenário explorado nesta dissertação, apresentamos o esquema de transmissão no enlace reverso que é baseado em SC-FDMA. Iniciamos expondo a Figura 3,

que apresenta um diagrama de blocos para ilustrar o processo de transmissão e recepção utilizando SC-FDMA. De forma geral, o transmissor converte uma sequência de dados binários em um sinal modulado através das sub-portadoras para serem transmitidas pelo canal de rádio.

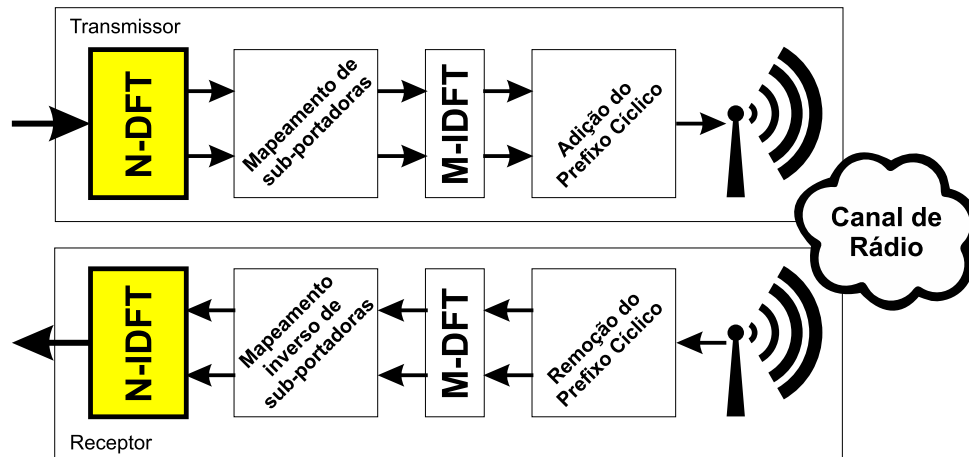


Figura 3 – Diagrama de blocos de um transmissor e receptor SC-FDMA

Um conjunto de símbolos são modulados por um modulador banda base com o objetivo de convertê-los em uma sequência de símbolos complexos modulados. LTE usa um esquema de modulação adaptativa, que depende da qualidade do canal. De acordo com a qualidade de canal, o sistema adota uma técnica de modulação adequada. Dentre as técnicas de modulação utilizadas em LTE, destacam-se a *Binary Phase-Shift Keying* (BPSK), *Quadri-Phase Shift Keying* (QPSK), *16 Quadrature Amplitude Modulation* (16QAM) e *64 Quadrature Amplitude Modulation* (64QAM). O próximo passo é converter a sequência de dados modulados em N fluxos de dados paralelos. Em seguida, estes fluxos são processados por uma DFT que transforma símbolos modulados no domínio do tempo em símbolos no domínio da frequência.

O próximo passo consiste em associar os símbolos no domínio da frequência a uma das M sub-portadoras ortogonais. M é o número de sub-portadoras ortogonais. M deve ser maior que N , e M deve ser um inteiro múltiplo de N , $M = N \cdot Q$, onde Q é conhecido como fator de expansão de largura de banda e também representa a quantidade máxima de usuários que o sistema suporta. Como exemplo, se $N = 64$ e $M = 256$ então $Q = 4$. Neste caso, a quantidade máxima de usuários usando o sistema simultaneamente seria quatro. Após a geração dos símbolos complexos, aplica-se uma *Inverse Discrete Fourier Transform* (IDFT) para transformar os símbolos no domínio da frequência em

um sinal no domínio do tempo. Caso $M = N$, pode-se ignorar as etapas de realização da DFT, mapeamento das sub-portadoras e IDFT. Após isso, os fluxos de dados paralelos são serializados.

Em seguida, deve-se incluir o prefixo cíclico ao símbolo. O prefixo cíclico é a replicação do final de um símbolo no início deste mesmo símbolo. Isto tem como objetivo eliminar a interferência inter-simbólica. A utilização do prefixo cíclico também é útil para tornar a operação de convolução linear do sinal com a resposta ao impulso do canal de comunicação em uma convolução cíclica. Isto é possível pois o símbolo torna-se periódico quando utiliza-se esta técnica de prefixação (GOLDSMITH, 2005). Para facilitar a equalização do sinal, o tamanho do prefixo cíclico deve ser, no mínimo, igual ao máximo atraso experimentado no canal (*delay spread* do canal de comunicação).

No receptor, o processo é exatamente o inverso do que foi apresentado no transmissor. Primeiramente, o sinal é demodulado para uma frequência mais baixa. Realiza-se um processo de conversão analógica digital e remove-se o prefixo cíclico do cabeçalho dos símbolos. Em seguida, é aplicada uma DFT no sinal recebido para que este possa ser representado no domínio da frequência. Após isso, é realizado um mapeamento inverso das subportadoras e, em seguida, é realizada uma equalização no domínio na frequência. O sinal equalizado é aplicado a uma IDFT para ser transformado para o domínio do tempo, onde a detecção é realizada.

1.2.4 Alocação de Recursos de Rádio

Alocação de Recursos de Rádio é responsável por alocar os recursos disponíveis na rede de acesso de rádio aos TMs que compõem o sistema. Uma alocação de recursos de rádio eficiente consiste em uma das principais soluções para aumento de capacidade dos sistemas.

Dentre os recursos disponíveis para alocação nas redes de telefonia, podemos citar largura de banda de frequência ou sub-portadoras (quando um esquema OFDMA ou SC-FDMA são empregados), *slots* de tempo, potência e sub-canais espaciais (em esquemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO)) (LIMA, 2012). Todos estes recursos são limitados e podem obedecer a restrições específicas do sistema. Como exemplo dessas restrições, tem-se que o assinalamento de sub-portadoras, ou um grupo delas, deve ser de acordo com as restrições de múltiplo acesso consideradas. Outro exemplo é que a alocação de sub-canais

espaciais está sujeita a restrição da quantidade de antenas utilizadas no transmissor e receptor.

A alocação de recursos varia de acordo com a técnica empregada para transmissão do sinal. Por exemplo, sistemas SC-FDMA impõem restrições de adjacência de sub-portadoras e exclusividade. A restrição de adjacência de sub-portadoras não está presente quando empregamos a técnica OFDMA. Isto torna a solução ótima da alocação de recursos mais complexa quando empregamos SC-FDMA. O conhecimento do estado do canal, quando trabalha-se com alocação de recursos de rádio, é de fundamental importância quando pretende-se explorar diversidade de frequência e espacial. Com o conhecimento do estado do canal, algoritmos de alocação de recursos de rádio podem utilizar da seletividade de frequência do canal sem fio (diversidade de frequência) e também explorar diferentes canais de propagação experimentados por usuários diferentes (diversidade espacial).

1.2.5 Justiça

O campo das comunicações móveis tem experimentado um crescimento exponencial na quantidade de usuários conectados e serviços oferecidos. Este crescimento motiva o surgimento de novas técnicas eficientes de alocação de recursos da rede. Neste cenário, em que diversos dispositivos conectam-se a uma rede a fim de utilizarem um serviço, a alocação de recursos apresenta-se como um importante requisito. Em um cenário que os recursos do sistema são disputados por uma certa quantidade de usuários (cenário multiusuário) que utilizam serviços multimídia, questões que envolvem o compartilhamento e justiça na alocação de recursos passam a ser relevantes.

Justiça é um tópico de pesquisa interdisciplinar que frequentemente está associado a alocação de recursos. Em (SHI *et al.*, 2014), o autor apresenta exemplos de aplicação desta temática na área de economia e comunicações. As receitas de uma empresa devem ser devidamente distribuídas entre seus sócios. Esta distribuição segue premissas que definem a sociedade, como cota de cada sócio, nível de envolvimento em projetos empresariais, entre outros. Estas premissas ponderam a divisão dos lucros para que haja justiça. Em arquitetura de computadores, recursos computacionais são compartilhados entre todos os processos em execução. Em redes de computadores, os terminais esperam uma justa largura de banda ou nível de qualidade de serviço em suas conexões.

Para explicar o significado de justiça aplicado a redes de comunicações sem

fo, (SHI *et al.*, 2014) usa um cenário simplificado de rede *ad-hoc* apresentado na Figura 4. Os nós A, B, C, D e E são dispositivos que estão interconectados entre si através dos links L_1 a L_5 . O nó C age como um *gateway* com a Internet através do link L_6 . Os demais nós conectam-se a Internet através do nó C.

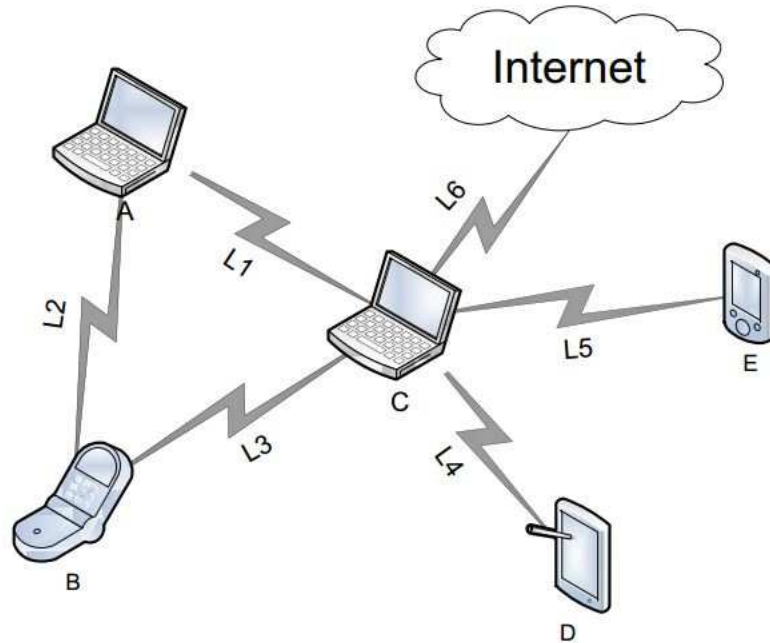


Figura 4 – Cenário de rede sem fio utilizado para ilustrar justiça na alocação de recursos de rádio

Neste cenário, muitas discussões podem ser exploradas. Como exemplo, o acesso a Internet por intermédio do *gateway* pode ser disponibilizado de forma justa. Largura de banda a ser compartilhada, satisfação de qualidade de serviço, consumo de energia, são exemplos de outras variáveis deste cenário que podem ser trabalhadas sobre a ótica da justiça. Neste trabalho aplicamos justiça no contexto de redes sem fio.

Um dos desafios da aplicação dos conceitos de justiça está nas ações a serem desempenhadas por sistemas e algoritmos quando injustiça, neste tipo de cenário, ocorre. Nota-se que os estudos estão mais concentrados em desenvolver técnicas de alocação de recursos de forma justa do que o desenvolvimento de técnicas que tenham o objetivo de mitigar os efeitos causados pela ocorrência de injustiça.

O trabalho (SHI *et al.*, 2014) sugere duas estratégias para tratar as ocorrências da injustiça em redes sem fio:

- Compensação da alocação de recursos injusta no *slot* de tempo passado. Esta

injustiça deve ser considerada na *slot* de alocação atual.

- Ajuste da alocação dos recursos para garantir equidade. Nesta estratégia não há compensação a nós tratados injustamente no passado.

Para ilustrar as duas estratégias de alocação dos recursos é necessário analisar o cenário apresentado na Figura 4. O nó A possui 5% da capacidade da rede, o nó B possui 35% e os outros nós possuem 20% cada no primeiro *slot* de tempo. Observa-se uma alocação totalmente injusta. No segundo *slot* de tempo, se adotarmos a primeira estratégia, a alocação da capacidade da rede deve ser da seguinte forma: o nó A ser alocado com 35% da capacidade, o nó B 5% e os demais nós alocados com 20% da capacidade da rede, compensando, então, a injustiça do primeiro momento penalizando o nó B. A segunda estratégia sugere que no segundo momento todos os nós devem ser alocados com 20% da capacidade, tornando o sistema justo e sem impor penalidades aos nós que receberam recursos a mais.

Quando discutimos justiça, é necessário analisar técnicas de como mensurá-la. Medir justiça permite a verificação se a alocação de recursos em um determinado sistema é justa com os usuários que o compõem. As métricas de mensurar justiça são classificadas como métricas quantitativas e métricas qualitativas. Assumiremos um sistema que possui um tipo de recursos totalizado por x e que há n indivíduos compartilhando esses recursos. $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ descreve a alocação dos recursos em que x_i é o total de recursos alocados para o indivíduo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. A soma de todos os recursos alocados deve ser menor ou igual ao total de recursos disponíveis, ou seja, $\sum_{i=1}^n x_i \leq x$.

A medida de justiça quantitativa geralmente é representada por um número real. O artigo (SHI *et al.*, 2014) define $f(\mathbf{X}) : \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como a função de medida de justiça baseado em \mathbf{X} . Este mesmo trabalho também define um conjunto de requisitos que essa função deve seguir:

- R1: $f(\mathbf{X})$ deve ser contínua em $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_n^+$.
- R2: $f(\mathbf{X})$ deve ser independente da quantidade de usuários n .
- R3: O intervalo de $f(\mathbf{X})$ deve ser facilmente mapeado a $[0, 1]$.
- R4: A função $f(\mathbf{X})$ deve ser válida para o caso de um sistema com múltiplos recursos.
- R5: $f(\mathbf{X})$ deve ter implementação fácil.
- R6: $f(\mathbf{X})$ deve ser sensível a variações de \mathbf{X} .

Os requisitos R1 e R2 descrevem a generalidade de $f(\mathbf{X})$ para diferentes

Tabela 2 – Exemplo de *Jain's index*

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
x_A	0%	5%	10%	20%
x_B	5%	40%	30%	20%
x_C	30%	50%	30%	20%
x_D	0%	5%	10%	20%
x_E	65%	0%	20%	20%
$f(\mathbf{X})$	0,3883	0,4819	0,8333	1

alocações de recursos e indivíduos. R3 mostra a escalabilidade de $f(\mathbf{X})$. R4 e R5 apresentam a facilidade de se implementar $f(\mathbf{X})$.

Uma das técnicas de medir justiça de maneira quantitativa é a *Jain's Index* proposta em (JAIN *et al.*, 1984). Neste trabalho os autores definem a medida de justiça quantitativa da alocação \mathbf{X} como sendo:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{[\sum_{i=1}^n x_i]^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.1)$$

Para esta métrica, $0 \leq f(\mathbf{X}) \leq 1$. Quanto mais próximo de 1 a alocação, mais justa ela será. Esta técnica é amplamente utilizada para aferir justiça em sistema de alocação de recursos. A Tabela 2 apresenta 4 exemplos de soluções (casos 1 a 4) de alocação de recursos para 5 indivíduos (A a E). O caso 4 apresenta um modelo de alocação em que, segundo esta métrica de justiça, é completamente justa.

Outra maneira de aferir justiça de um sistema é através de medidas qualitativas. Medida qualitativa não usa um número real em sua definição. Contudo, estas são maneiras de avaliar se uma determinada alocação foi justa. Dentre as técnicas utilizadas para isso, destacamos duas: *max-min* e justiça proporcional, do inglês *proportional fairness*.

Consideramos que uma alocação de x recursos para n usuários obedece os esquema de justiça *max-min* se para cada usuário i , x_i não pode ser incrementado sem decrementar x_j , em que $x_j \leq x_i, (x_i \neq x_j)$. Podemos inclusive usar pesos para manter os critérios da justiça *max-min*. Ao considerarmos $\mathbf{W} = \{w_i | w_i \in \mathbb{R}^+\}$ como pesos a serem aplicados em \mathbf{X} , é possível modelar o esquema *max-min* ponderado. Desta forma, ocorre justiça *max-min* quando não é possível incrementar x_i sem decrementar x_j , onde $x_j/w_i \leq x_i/w_j, (x_i \neq x_j)$.

Outra técnica para se analisar justiça de maneira qualitativa é a *proportional fairness*. Esta técnica foi proposta em (KELLY, 1997) baseado em um cenário de redes de computadores. Consideramos um sistema com um conjunto de recursos

$\Lambda = \{\Psi_j | j = 1, 2, \dots, m\}$, e temos que C_j é definida como a capacidade do recursos Ψ_j , e \mathbf{X} , agora modelado como uma matriz bidimensional $m \times n$, em que cada linha desta matriz corresponde a alocação do recurso Ψ_j entre os n usuários, e x_{ji} é o total do recursos Ψ_j alocado ao usuário i . A alocação do usuário i pode ser escrita como $x_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}]$, onde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e corresponde ao vetor da coluna i da matriz \mathbf{X} . A alocação dos usuários obedece a uma justiça proporcional se ela satisfaz três condições definidas em (KELLY, 1997):

- $x_{ji} \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^n x_{ji} \leq C_j$.
- Para qualquer outra alocação, x_i^* a soma das diferenças entre x_i^* e x_i dever ser menor ou igual a zero. Isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_{ji}^* - x_{ji}}{x_{ji}} \leq 0. \quad (1.2)$$

Proportional fairness possui uma variação chamada $(p - \alpha)$ -*proportional fairness* que é usada na aplicação de pesos para cada usuário. Define-se $P_i = (p_1, \dots, p_m)$ como os pesos de um usuário i e α é um número positivo. x_i é $(p - \alpha)$ -*proportional fairness* se satisfaz as seguintes condições apresentadas em (MO; WALRAND, 2000):

- $x_{ji} \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^n x_{ji} \leq C_j$.
- Para qualquer outra alocação, x_i^* a soma das diferenças entre x_i^* e x_i ponderadas por p_j deve ser menor ou igual a zero. Isto é,

$$\sum_{i=1}^n p_j \frac{x_{ji}^* - x_{ji}}{x_{ji}} \leq 0. \quad (1.3)$$

Quando $p_k = p_j, (k \neq j)$ e $\alpha = 1$, $(p - \alpha)$ -*proportional fairness* torna-se *proportional fairness*. Quando α torna-se muito grande, esta avaliação converge a *max-min fairness* (MO; WALRAND, 2000).

Redes de comunicações móveis utilizam conceitos de justiça mesclados a eficiência espectral, em que há um compromisso de maximizar taxa de transmissão obedecendo critérios de justiça aplicados a cada cenário de comunicação sem fio. Neste trabalho, um dos aspectos explorados consiste em: justiça e seu compromisso com eficiência espectral.

1.2.6 Problemas de Otimização

De forma muito recorrente na literatura, problemas de ARR são formulados como problemas de otimização em que há uma função objetivo e um conjunto de restrições. Neste trabalho, que possui o objetivo de maximizar a soma das taxas de dados ponderadas em um sistema de comunicações sem fio, a aplicação de algoritmos de otimização é determinante para que os recursos sejam alocados de forma ótima ou sub-ótima entre os terminais móveis. Dependendo da complexidade computacional para obtenção das soluções dos problemas aqui estudados, soluções heurísticas sub-ótimas podem ser utilizadas de forma a atingir um bom compromisso entre complexidade e desempenho.

Os problemas de planejamento conhecidos como problemas de otimização combinatória compartilham das seguintes propriedades: são problemas de otimização com formulação fácil e possuem um número finito mas, frequentemente, muito grande de soluções viáveis. Alguns destes problemas apresentam algoritmos polinomiais utilizados para encontrar soluções ótimas, como por exemplo, o problema de menor caminho e o problema da árvore geradora mínima. Contudo, a maioria dos problemas de otimização combinatória não utilizam métodos polinomiais para solução. Alguns exemplos são: roteamento veicular, escolha de tripulação e, o que é explorado neste trabalho, alocação de recursos de rádio. Estes problemas são conhecidos como \mathcal{NP} -Difíceis (CORMEN *et al.*, 2009).

Como será apresentado nas seções adiante, o problema explorado neste estudo, envolve a alocação de BRs aos terminais móveis. A seguir, apresentamos alguns algoritmos e técnicas que são pertinentes para este estudo. Primeiro, apresentaremos uma técnica de resolução de problemas combinatoriais chamado BB. Em seguida, apresentamos um tipo de problema de otimização contínuo (não combinatorial), mas que será relevante para o desenvolvimento de soluções de baixo custo computacional para nosso problema.

1.2.6.1 Branch and Bound

Problemas \mathcal{NP} -Difíceis discretos demandam alto custo computacional e algoritmos eficientes para obtenção de soluções. BB é a principal ferramenta utilizada para resolver este tipo de problema (CLAUSEN, 1999). O algoritmo BB percorre o espaço de soluções para retornar a melhor solução possível. Este método é capaz de diminuir o espaço

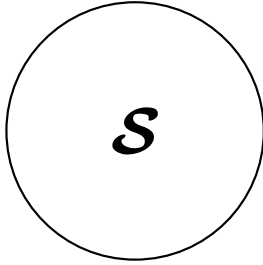
de procura de soluções, reduzindo assim, o tempo para obtenção da solução ótima. Contudo, a complexidade computacional de pior caso do método BB cresce exponencialmente com o número de restrições e variáveis. Nesta seção, apresentaremos o funcionamento deste algoritmo. Ele é utilizado como base para as soluções ótimas exploradas neste trabalho.

Em qualquer momento do processo de solução do problema, o estado da solução é caracterizado como a solução encontrada até o momento e o subconjunto de soluções viáveis que ainda não foram exploradas pelo algoritmo. Inicialmente, o algoritmo possui apenas um subconjunto, que representa todo espaço de soluções viáveis para o problema, e o valor da função objetivo da melhor solução encontrada, que para o caso de maximização é $-\infty$. Os subespaços de soluções que ainda não foram explorados são representados por uma árvore de pesquisa que é gerada dinamicamente pelo algoritmo. Inicialmente, apenas o nó raiz desta árvore existe. A cada iteração do algoritmo, ele processa apenas um nó, gerando, ou não, novos nós a partir do nó explorado. Por padrão, o algoritmo BB possui três componentes principais: seleção do nó que será processado, cálculo dos limites (*bounding*) e ramificação do nó explorado (*branching*) (CLAUSEN, 1999).

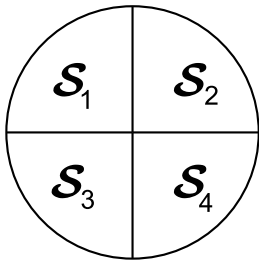
A Figura 5 ilustra a situação inicial e o primeiro passo do processo de busca. Os passos subsequentes da solução envolve, por exemplo, a escolha do próximo nó avaliado. A escolha do próximo nó avaliado varia de acordo com a estratégia adotada na implementação do algoritmo. Caso a seleção do próximo nó (subproblema) seja baseada nos valores limites calculados, então a primeira operação de uma iteração, após o nó ser selecionado, é a ramificação, isto é, o espaço de soluções é subdividido em dois ou mais subespaços que serão explorados nas iterações subsequentes. Para cada nó da árvore de soluções, o algoritmo gera uma solução que é comparada com a melhor solução atual. O algoritmo mantém a melhor solução. Conforme ilustrado na Figura 5c, o valor limite é calculado na etapa *bound* e caso um subespaço de soluções não seja apto para fornecer uma resposta melhor que a melhor solução atual, todo subespaço de soluções é descartado. Na Figura 5c, os subespaços de soluções S_1 e S_4 são descartados. Este valor limite, da etapa *bound* é calculado usando *Linear Programming* (LP) e usado pelo BB para explorar espaços mais promissores.

O algoritmo de BB segue a dinâmica de percorrer subespaços de soluções, que formam uma árvore de soluções. A pesquisa termina quando não existe mais nenhum subespaço de soluções a ser explorado e a solução ótima é, então, a solução registrada

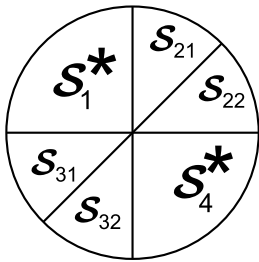
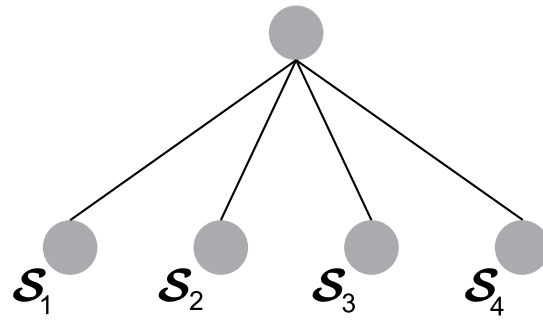
como melhor solução nesta iteração final.



(a) Primeira Iteração



(b) Segunda Iteração



(c) Terceira Iteração

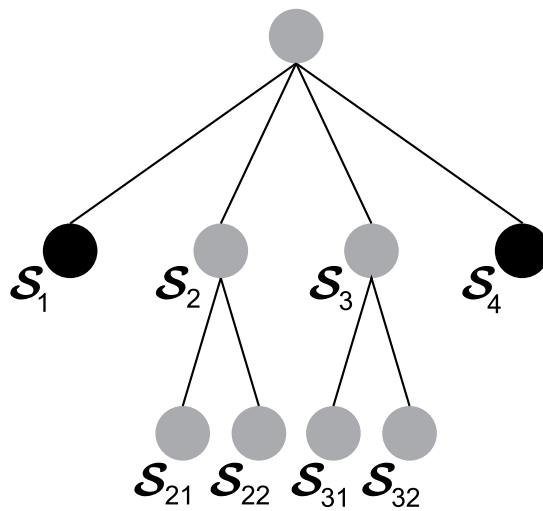


Figura 5 – Ilustração do espaço de busca do BB

1.2.6.2 Programação Linear

Um Problema de Programação Linear, ou do inglês LP pode ser definido como um problema de maximização ou minimização de uma função objetivo sujeito a restrições lineares. As restrições podem ser equações ou inequações. Os problemas abordados neste trabalho, que envolvem a resolução de um problema linear combinatorial e não contínuo para maximização de taxa de transmissão, utilizam esta técnica. O problema e as restrições serão apresentados nos próximos capítulos.

Podemos utilizar um exemplo básico para ilustrar matematicamente o uso de LP. Suponha que desejamos maximizar a soma $x_1 + x_2$, sujeita às seguintes restrições

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Neste problema temos duas variáveis desconhecidas e cinco restrições. Todas as restrições são inequações lineares que envolvem as variáveis apresentadas na função que se deseja maximizar. As duas primeiras restrições, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, são conhecidas como restrições de não-negatividade e são frequentemente utilizadas em problemas de programação linear. As outras restrições são conhecidas na literatura como restrições principais. A função a ser maximizada (ou minimizada) é chamada de função objetivo. No exemplo citado, a função objetivo é $x_1 + x_2$.

Como no exemplo apresentado só existem duas variáveis, pode-se resolvê-lo graficamente desenhando o conjunto de pontos no plano que satisfaz todo o conjunto de restrições e então encontrar o conjunto de pontos que maximiza a função objetivo. Cada restrição, que é uma inequação, é representada graficamente como um semi-plano e o conjunto de restrições é a interseção de todos os semi-planos. Para o exemplo que estamos explorando, o conjunto de restrições é a parte sombreada, de cinco lados, na Figura 6.

O objetivo é encontrar o ponto (x_1, x_2) , que maximize a função objetivo obedecendo às restrições apresentadas. Observa-se também que, para a função objetivo, o máximo (ou mínimo) sempre está no vértice do poliedro formado pelas retas geradas pelas restrições do problema. Em alguns casos, o máximo (ou mínimo) pode ocorrer por toda a

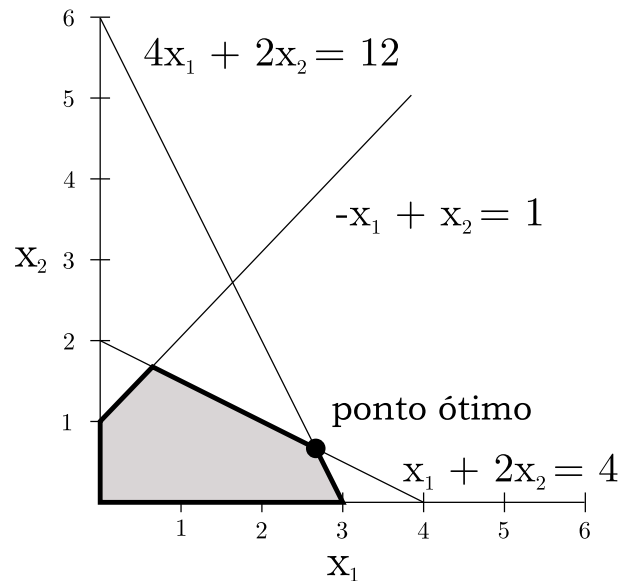


Figura 6 – Ilustração gráfica do espaço de soluções de um Problema de Programação Linear

superfície do poliedro, mas sempre obedecendo a regra que o máximo (ou mínimo) está no vértice do poliedro.

Nem todos os problemas de programação linear tem resolução fácil, pois isto depende do conjunto de restrições impostas no problema. No entanto, o problema explorado neste trabalho utiliza um formato padrão pertencentes aos problemas de maximização utilizando programação linear. Neste problema, todas as variáveis são não negativas e todas as restrições são equações ou inequações.

O formato padrão deste problema pode ser modelado através de um vetor m -ário, $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_m]^T$, um vetor n -ário, $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T$ e uma matriz $m \times n$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

de números reais.

O problema de maximização utilizando programação linear basicamente consiste em encontrar um vetor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, a fim de maximizar

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \quad (1.6)$$

sujeita as restrições modeladas vetorialmente como,

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

e

$$\mathbf{x} \geq 0.$$

Esta modelagem buscando a otimização de uma função objetivo é utilizada neste estudo. Aplicamos LP com o objetivo de buscar a alocação que maximize a soma das taxas ponderadas de um sistema de comunicação móvel. Vale ressaltar que o problema explorado neste trabalho trata-se de um problema combinatorial (não contínuo). Através do relaxamento desse problema, usamos LP combinada a uma heurística de arredondamento para encontrar soluções sub-ótimas de alocação dos recursos de rádio.

1.3 Estado da Arte e Limitações

Conforme mencionado antes, problemas de ARR são formulados matematicamente como problemas de otimização composto por uma função objetivo e um conjunto de restrições que limitam o espaço de soluções possíveis. Na literatura, podemos encontrar problemas de ARR com diferentes objetivos e restrições. Dependendo do esquema de múltiplo acesso, novas restrições são impostas ao problema.

Diferentemente de trabalhos que estudam ARR no enlace direto com OFDMA, a análise de problemas de ARR no enlace reverso com SC-FDMA é recente. Verificamos que, diferentemente do cenário com OFDMA, soluções ótimas de ARR para SC-FDMA são mais difíceis de se obter. Em (LIM *et al.*, 2006a) os autores realizam um estudo considerando o problema de maximização de taxa no cenário SC-FDMA que é um caso particular do problema de maximização da soma das taxas ponderadas dos usuários. Entretanto, em (LIM *et al.*, 2006a) os autores ignoram a existência da restrição de contiguidade de recursos comentada anteriormente. Em (NWAMADI *et al.*, 2008) os autores consideram o mesmo problema de (LIM *et al.*, 2006a) e assumem a existência da restrição de adjacência de recursos. Contudo, eles assumem que os TMs devem receber o mesmo número de recursos na frequência, o que na prática não ocorre. Em (WONG *et al.*, 2009), os autores

formulam o problema de maximização da soma das taxas ponderadas dos usuários através de um problema binário-inteiro em que a solução ótima pode ser obtida sem o emprego de força bruta. Reconhecendo a complexidade deste problema, os autores de (WONG *et al.*, 2009) propõem um algoritmo subótimo de menor complexidade computacional. Outros artigos tais como (PAO; CHEN, 2010), (LIM *et al.*, 2006b), (CALABRESE *et al.*, 2008a), (CALABRESE *et al.*, 2008b) e (TEMINO *et al.*, 2008) exploraram o problema de maximização da taxa total em sistemas SC-FDMA e fizeram propostas subótimas todas baseadas em heurísticas a fim de obter soluções com melhor compromisso entre desempenho e complexidade computacional. Contudo, todos estes trabalhos falham em modelar aspectos de camada física de sistemas sem fio reais tal como a existência de níveis discretos de taxa de transmissão: *Modulation and Coding Schemes* (MCSs). Em sistemas reais, as possíveis taxas de transmissão são limitadas a um conjunto discreto e são definidas pelos níveis de modulação e taxas de codificação de canal. Em (YAACOUB; DAWY, 2012), o autor explora a alocação de recursos no enlace reverso empregando a técnica OFDMA. Em (ZHANG; ZHU, 2013), o autor desenvolve uma heurística gulosa para a alocação dos sub-canais e não emprega programação linear na sua solução. Paralelo ao desenvolvimento do nosso trabalho, o autor do trabalho (SOARES, 2016) empregou relaxamento do problema *Integer Linear Program* (ILP) combinado a uma heurística de arredondamento diferente da explorada neste documento. Em (LIMA *et al.*, 2016), o autor aborda o problema de ARR no enlace reverso utilizando uma heurística que tem como objetivo atender às restrições consideradas neste estudo. As propostas dos artigos (LIMA *et al.*, 2016), (SOARES, 2016), (ZHANG; ZHU, 2013) e (WONG *et al.*, 2009) serão avaliadas neste estudo uma vez que estas modelam os principais aspectos do cenário que estudamos.

1.4 Objetivos e Contribuições

Neste trabalho, tratamos de apresentar, dentro de técnicas de alocação de recursos de rádio, algoritmos eficientes para distribuição de BRs a usuários candidatos a utilizar o espectro eletromagnético. Nosso objetivo consiste em desenvolver técnicas que permitam otimizar certos critérios de desempenho tais como eficiência espectral e justiça.

Além de uma modelagem mais precisa de sistemas SC-FDMA, neste trabalho, nós abordamos o problema de maximização da soma das taxas ponderadas dos usuários

em sistemas SC-FDMA: exploramos a versão relaxada do problema de otimização inteiro. Mostramos através de simulações computacionais, que o problema linear contínuo obtido do relaxamento fornece a solução ótima do problema original (inteiro) em um grande número de realizações. Para as realizações em que a solução não é binária, propomos uma solução alternativa.

Realizamos uma análise dos resultados obtidos por simulações computacionais com algoritmos presentes na literatura para que fosse possível verificar a eficiência das técnicas desenvolvidas neste estudo.

1.5 Metodologia

Este estudo objetiva a análise de técnicas de alocação de recursos de rádio no enlace reverso. Para a verificação destas das técnicas presentes na literatura e a comparação do desempenho destas técnicas com a estratégia proposta neste trabalho, primeiramente foi necessário o estudo de uma ferramenta computacional que simula aspectos reais de uma rede de telefonia móvel. Este simulador implementa um sistema celular com usuários com localizações geográficas aleatórias e usando serviços móveis aleatórios. Além de emular os usuários, esta ferramenta simula aspectos reais da camada física de um real sistema celular. Sobre estas simulações reais foram aplicados os algoritmos de alocação dos recursos.

Para uma perfeita comparação, as variáveis aleatórias durante a simulação do intervalo de transmissão simulado geravam as mesmas características em todas as cargas. Isto foi importante para garantir que as condições físicas das simulações fossem as mesmas na carga de todos os algoritmos, como perda de percurso, sombreamento, ruído.

Para a coleta dos resultados, os algoritmos estudados foram programados dentro da ferramenta e foram simulados 3 s de transmissão. Parâmetros como quantidade de usuários e recursos disponíveis foram variados em cada pacote de simulação para que fosse possível verificar resultados sobre estas variações.

Após as simulações e de posse dos dados gerados, compila-se informações que reflitam o desempenho de cada algoritmo em cada pacote de parâmetros simulados. De posse das informações geradas pelos dados resultantes das simulações, realiza-se a comparação e análise dos resultados para que, por fim, seja possível concluir o estudo.

Desta forma, a metodologia empregada neste trabalho concentra-se no uso de um simulador sistêmico que será alicerce para implementação dos algoritmos estudados e

base para apuração de resultados.

1.6 Produção Científica

A contribuição científica deste trabalho está presente no artigo publicado no XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais:

- **Rodrigues, A. B.**; Lima, F. R. M; Maciel, T. F.; Cavalcanti, F. R. P., "*Alocação de Recursos para Sistemas SC-FDMA baseado em Relaxamento e Programação Linear*". XXXIV Simpósio brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais. 2016.

As novas técnicas apresentadas nesta dissertação serão compiladas para que, em uma nova oportunidade, sejam submetidas à publicação.

1.7 Organização da Dissertação

Em resumo, este trabalho está organizado conforme explicado a seguir. No capítulo 2 será apresentada a modelagem do sistema enquanto que no capítulo 3 apresentamos a formulação do problema e a solução ótima inteira. Ainda neste Capítulo, serão apresentados conceitos de solução relaxada e otimalidade assim como nossa solução alternativa para o problema estudado. No capítulo 4 apresentaremos os resultados das simulações. Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos as conclusões do estudo e perspectivas para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM DO SISTEMA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo apresenta a modelagem do sistema e introduz o problema abordado. Na seção 2.1 será apresentado o modelo do sistema adotado neste trabalho. Na seção 2.2 será apresentado o problema de maximização das taxas ponderadas em sistemas SC-FDMA.

2.1 Modelagem do Sistema

Assumimos, neste trabalho, um sistema celular composto por um determinado número de células setorizadas. Para um dado setor de uma célula, há um grupo de TMs conectados a ERB da célula. Neste trabalho será considerado o *uplink* em que há o emprego da combinação das técnicas de múltiplo acesso SC-FDMA e TDMA. Conforme apresentado antes, os recursos disponíveis são organizados em uma grade de recursos no domínio do tempo e frequência, onde a quantidade mínima de recursos que podem ser alocados, ou BR, é definida como um grupo de uma ou mais sub-portadoras adjacentes e um número de símbolos OFDM consecutivos, no domínio do tempo. A Figura 7 ilustra a dinâmica de conexão entre os TMs e a ERB. Em seguida é realizada a ponderação dos usuários do sistema para que os recursos sejam alocados.

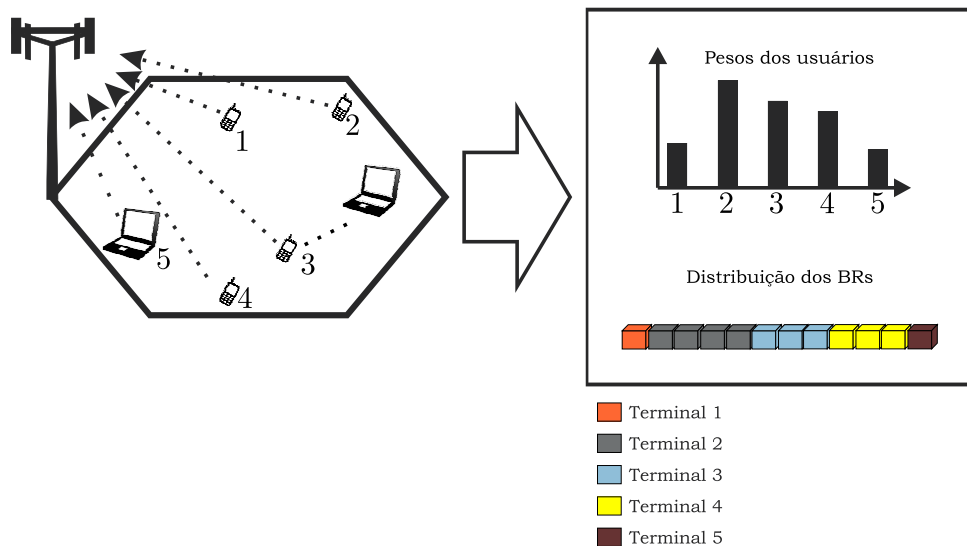


Figura 7 – Ilustração Modelo do Sistema

Neste trabalho, a cada intervalo de tempo de transmissão, o objetivo é resolver o problema de alocação de recursos aos TMs que compõem o sistema, dado o estado do canal e os pesos aplicados por usuário que podem modelar conceitos de QoS e justiça.

O esquema SC-FDMA impõe ao sistema duas restrições relacionadas a alocação

de BRs:

- **Exclusividade**, em que os BRs não podem ser compartilhados entre terminais móveis associados a mesma estação rádio base;
- **Adjacência**, em que os BRs assinalados a cada terminal móvel devem ser adjacentes no domínio da frequência.

Nesta parte do trabalho serão apresentadas algumas variáveis importantes para o entendimento do estudo e que serão utilizadas nos capítulos adiante e definem o escopo do trabalho.

Em um determinado intervalo de transmissão, há J TMs que estão aptos a transmitir para ERB no enlace reverso. Assumimos que existem N BRs disponíveis. \mathcal{J} e \mathcal{N} representam o conjunto de todos os TMs disponíveis e todos os BRs disponíveis, respectivamente.

Assume-se, no modelo explorado, que o estado do canal permanece constante durante o intervalo de transmissão. Esta premissa é especialmente verdade quando o tempo de coerência do canal é muito maior que o intervalo de tempo utilizado para a transmissão. É importante destacar que as informações de estado do canal são consideradas como sendo perfeitamente conhecidas pelo transmissor e pelo receptor. Considera-se informação do canal, a amplitude e a fase da função de transferência do canal.

Outro ponto a se destacar no cenário analisado é que a potência no *uplink* em cada terminal é P_t , distribuída igualmente para cada BR assinalado. Assim, cada BR utiliza uma potência fixa definida como P_t/N . Trabalhos futuros podem definir algoritmos de alocação de potência mesclados às propostas apresentadas neste documento e analisar os impactos destas estratégias sobre o problema estudado. De toda forma, alocação de potência desigual entre BRs pode causar efeitos negativos quanto a PAPR do sinal temporal transmitidos.

Utilizamos também uma técnica conhecida como adaptação de enlace, que é uma funcionalidade do sistema presente na maioria das redes de comunicações móveis modernas, em que, basicamente, os parâmetros da camada física são adaptados de acordo com o estado atual do canal. Entre os parâmetros de transmissão pode-se mencionar o tipo de modulação, tamanho da constelação e taxa de codificação do canal. Baseado na adaptação dos parâmetros de transmissão, os TMs podem transmitir em diferentes taxas de dados. Esta adaptação de enlace é outra característica do modelo estudado neste

trabalho.

Assumimos que em um determinado intervalo de transmissão, devemos maximizar a soma das taxas ponderadas do sistema em que os pesos podem estar relacionados ao conceito de justiça. Neste cenário, a justiça pode estar relacionada ao nível de satisfação mínimo, medido pelo QoS de cada usuário. Justiça também pode ser modelada na problemática abordada neste estudo, como priorização de recursos a usuários com diferentes planos junto a operadora em que usuários que assinam planos mais caros podem ter prioridade no recebimento de recursos de rádio e, conseqüentemente, melhores taxas.

Definimos um padrão de assinalamento SC-FDMA como um conjunto de BRs contíguos que podem ser alocados a um dado usuário. O número de possíveis padrões de assinalamento, P , depende de N e é dado por (WONG *et al.*, 2009):

$$P = \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N + 1, \quad (2.1)$$

em que N é o número de BRs disponíveis no sistema. Assumimos que $\mathcal{P} = \{1, \dots, P\}$ é o conjunto com os índices de todos os possíveis padrões de assinalamento. A restrição de adjacência pode ser modelada utilizando uma matriz binária $N \times P$, \mathbf{A} , composta pelos elementos $a_{n,p}$ com $n \in \mathcal{N}$ e $p \in \mathcal{P}$, assumindo valor 1 se o BR n pertencer ao padrão de assinalamento p , e 0 caso contrário. Uma possível instância da matriz \mathbf{A} quando $N = 4$ (e conseqüentemente $P = 11$) é ilustrada a seguir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Definimos \mathbf{X} como a matriz de assinalamento entre os terminais móveis e os padrões de assinalamento, cuja dimensão é $J \times P$. Os elementos $x_{j,p}$ assumem o valor 1 se o padrão de assinalamento $p \in \mathcal{P}$ é assinalado ao terminal $j \in \mathcal{J}$, e 0, caso contrário. Algumas condições devem ser impostas a matriz \mathbf{X} a fim de garantir a exclusividade e adjacência de BRs conforme veremos ainda neste capítulo. Um exemplo de matriz gerada

pela alocação dos padrões de assinalamento é ilustrada a seguir,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Para este exemplo, consideramos um modelo com $N = 4$ e $|\mathcal{J}| = 4$. Pela equação 2.1, $P = 11$. Pela matriz do exemplo, temos $x_{1,6}$, $x_{2,2}$, $x_{3,8}$ e $x_{4,1}$ iguais a 1 e os demais valores zerados. Isso significa que o padrão de assinalamento índice 6 foi assinalado ao TM 1, que o padrão de assinalamento índice 2 foi assinalado para o TM 2, que o padrão de assinalamento índice 8 foi assinalado para o TM 3 e que o padrão de assinalamento índice 1 foi assinalado para o TM 4.

Consideramos o modelo de canal no domínio da frequência. Definimos a variável $h_{j,z,n}$ como a função de transferência do canal relativo ao enlace entre o terminal j e a estação rádio base servidora, para a z -ésima subportadora do BR n . A razão sinal-ruído ou do inglês, *Signal-to-Noise Ratio* (SNR) experimentada pela ERB devido a transmissão para o terminal j usando a subportadora z do BR n é dada por

$$\gamma_{j,z,n} = \frac{((P_t / (c \cdot N)) \cdot \alpha_j \cdot |h_{j,z,n}|^2)}{(\sigma^{sub})^2}, \quad (2.4)$$

em que α_j representa a junção dos efeitos de perda de percurso e sombreamento no enlace entre o terminal j e a ERB servidora, $(\sigma^{sub})^2$ representa a potência do ruído no receptor na largura de banda ocupada por uma subportadora e c é o número de subportadoras que compõe o BR. Assumimos que a potência total disponível no terminal móvel, P , é igualmente distribuída entre as subportadoras.

Um equalizador no domínio da frequência deve ser utilizado na estação rádio base quando SC-FDMA é utilizado no enlace reverso a fim de mitigar a interferência intersimbólica. Neste trabalho, assumimos um equalizador do tipo Mínimo Erro Quadrático Médio (MEQM). Então, utilizando as definições de (SHI *et al.*, 2004), a SNR dos dados recebidos por um conjunto de BRs utilizando este tipo de equalizador pode ser escrita

como:

$$\gamma_{j,p}^{MEQM} = \left(\frac{1}{\frac{1}{c \cdot |\mathcal{N}_p|} \sum_{n \in \mathcal{N}_p} \sum_{z=1}^c \frac{\gamma_{j,z,n}}{\gamma_{j,z,n+1}}} \right)^{-1}, \quad (2.5)$$

em que $\gamma_{j,p}^{MEQM}$ é a SNR efetivamente experimentada pelos dados transmitidos do terminal j com os BRs contidos no padrão de assinalamento p e \mathcal{N}_p é o conjunto de BRs que compõe o padrão assinalado p .

Através do uso de adaptação de enlace, um terminal pode transmitir em diferentes taxas de dados de acordo com a qualidade do canal, potência alocada e ruído/interferência percebida. Assumimos que a função $f(\cdot)$ mapeia a SNR a uma determinada taxa de transmissão. Então, modelamos a taxa de transmissão do terminal j usando o padrão de assinalamento p como

$$r_{j,p} = f\left(\gamma_{j,p}^{MEQM}\right). \quad (2.6)$$

2.2 Formulação Problema

O problema explorado neste trabalho trata-se de um problema de otimização combinatória binária que consiste na maximização da soma das taxas de transmissão ponderadas a cada TM. Este problema deve ser resolvido em cada intervalo de tempo de transmissão ou TTI. O problema é formulado matematicamente como:

$$\max_{\mathbf{x}} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{p \in \mathcal{P}} w_j \cdot r_{j,p} \cdot x_{j,p} \right), \quad (2.7)$$

sujeito às restrições

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{p \in \mathcal{P}} a_{n,p} \cdot x_{j,p} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} x_{j,p} = 1, \forall j \in \mathcal{J}, \quad (2.9)$$

$$x_{j,p} \in \{0, 1\}, \forall j \in \mathcal{J} \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}. \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.7) é a soma das taxas dos usuários ponderadas por pesos ou prioridades no enlace reverso. O termo w_j representa a prioridade ou peso do terminal móvel j . As restrições (2.8) e (2.10) asseguram que os BRs não serão reutilizados dentro da mesma célula. A restrição (2.9) garante que apenas um padrão de assinalamento será atribuído a cada terminal.

Os pesos w_j podem ser ajustados para projetar diferentes regras de escalonamento tais como (FEMENIAS *et al.*, 2012):

- Justiça proporcional ou do inglês, *proportional fairness*, que consiste na maximização do somatório do logaritmo das taxas de dados individuais dos usuários. Em geral essa regra é aplicada considerando $w_j = 1/\bar{r}_j$, em que \bar{r}_j é a taxa média efetivamente alocada ao usuário j ao longo do tempo.
- Maximização da soma das taxas dos usuários que pode ser implementada com $w_j = 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}$.

Seguindo as definições de (SHI *et al.*, 2014), os pesos w_j também podem ser ajustados a fim de mitigar alocações de BRs injustas entre os TMs. Duas estratégias são apresentadas quando injustiças acontecem:

- Compensação individual por alocação de recursos injusta em intervalo de tempo anterior;
- Ajustar a alocação dos recursos para garantir justiça, sem a preocupação em compensar os terminais que foram prejudicados em uma alocação passada.

A manipulação dos pesos pode ser utilizada pelas duas estratégias.

3 SOLUÇÕES ÓTIMAS E SUB-ÓTIMAS

Neste capítulo, apresentaremos a caracterização matemática da solução ótima do problema apresentado nas equações (2.7) a (2.10). Apresentaremos a estratégia utilizada neste trabalho para solução do problema apresentado no capítulo anterior. Na seção 3.1, será apresentada a solução ótima explorada para resolução do problema de ARR. Na seção 3.2 será mostrada a técnica explorada nesse trabalho: relaxamento do problema inteiro mesclada a utilização de heurística de arredondamento. Por fim, na seção 3.3, apresentamos soluções sub-ótimas presentes na literatura.

3.1 Caracterização da Solução Ótima

O problema formulado pelas equações (2.7) a (2.10) é um problema de programação linear inteiro ou do inglês, ILP. De acordo com (LEE *et al.*, 2009), a restrição de adjacência de recursos é suficiente para tornar o problema *NP*-Difícil. A solução ótima para esse tipo de problema pode ser obtida por métodos numéricos tal como o algoritmo BB (NEMHAUSER; WOSLEY, 1999). Este método é capaz de diminuir o espaço de procura de soluções, reduzindo assim, o tempo para obtenção da solução ótima. Contudo, a complexidade computacional de pior caso do método BB cresce exponencialmente com o número de restrições e variáveis que são $J + N$ e $J \cdot P$, respectivamente, em nosso problema.

3.1.1 Complexidade Computacional da Solução Ótima

A solução ótima explorada neste estudo pode ser obtida através do algoritmo BB. Este problema é formulado através de $J \cdot P$ variáveis e $J + N$ restrições. O número total de operações¹ é $\sqrt{2}^{(JP)} 2(JP + J + N)(2(JP)(J + N) - 3(J + N) + JP)$. Considerando os termos de maior ordem, identificamos que a complexidade dessa solução é $\mathcal{O}(2^{JP})$. Como P é definido em termos de N na equação 2.1, a complexidade de pior caso pode ser apresentada como $\mathcal{O}(2^{JN^2})$.

¹ As operações consideradas para o cálculo da complexidade foram somas, subtrações, multiplicações, divisões e comparações.

3.2 Solução Proposta

Conforme exposto anteriormente, a solução ótima para o problema explorado neste estudo conduz a um problema de elevada complexidade computacional. Em cenários práticos, esse problema é classificado como *NP*-Difícil. A viabilidade de aplicação de algoritmos com o objetivo de otimizar a alocação de recursos de rádio está relacionada a possibilidade de executá-los em um intervalo de tempo compatível com os sistemas de comunicações móveis. O objetivo desse estudo é apresentar uma estratégia alternativa à solução ótima para que se consiga otimizar a taxa de transmissão total do sistema. A estratégia usada envolve aplicação de LP através do relaxamento do problema original mesclada a heurísticas de arredondamento de baixa complexidade.

3.2.1 Solução usando Programação Linear

Um problema ILP é um problema de otimização em que as variáveis a serem otimizadas necessariamente devem ser inteiras e as restrições e objetivo do problema são lineares. O caso especial em que as variáveis a serem otimizadas pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$ é conhecido como problema de programação linear binário. Conforme comentado anteriormente, estes problemas, em geral, tornam-se difíceis de se resolver à medida que a dimensão das variáveis de entrada aumentam.

Em sistemas de comunicações móveis, as decisões sobre alocação de recursos devem ser tomadas na ordem de milissegundos. Portanto, a resolução direta do problema ILP através dos métodos supracitados é inviável em cenários práticos. Atrasos na tomada de decisões sobre alocação de recursos poderiam inclusive impactar em métricas de desempenho dos sistemas como a latência em camadas superiores da pilha de protocolos. Ou seja, em sistemas práticos, a redução do tempo de resposta para solução do problema explorado neste trabalho é importante.

Do ponto de vista matemático, o espaço de procura do problema (2.7) a (2.10) é formado por uma série de pontos discretos em um espaço com dimensão $J \cdot P$. Devido ao caráter discreto do espaço de procura, temos que este não é um espaço convexo. Contudo, caso as restrições do problema sejam lineares e as variáveis de otimização sejam reais, temos que o espaço de procura torna-se convexo. Mais especificamente, caso façamos a

substituição da restrição (2.10) pela restrição a seguir

$$0 \leq x_{j,p} \leq 1, \forall j \in \mathcal{J} \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}, \quad (3.1)$$

temos uma nova classe de problemas de otimização chamada de programação linear ou do inglês, LP. A esse procedimento de trocar o caráter inteiro das variáveis de otimização dos problemas ILP para números reais com limites inferiores e superiores chamamos de relaxação do problema ILP (BAZARAA *et al.*, 1991).

Com muita frequência, encontra-se na literatura estratégias de substituir um espaço de procura discreto de problema combinatoriais por espaços de procura contínuos (GONZALEZ, 2007). Por exemplo, em (SKUTELLA, 2001) os autores realizam a relaxação da variável de otimização de um problema inteiro quadrático transformando-o em um problema convexo de programação quadrática. Em (AUBIN; EKELAND, 1976) os autores apresentam condições em que um problema primal não convexo combinatorial possui solução semelhante ao seu dual que consiste em um problema convexo. A essa diferença denomina-se de lacuna de dualidade ou do inglês, *duality gap*. Trabalhos posteriores a (AUBIN; EKELAND, 1976) e no contexto de telecomunicações tais como (YU; LUI, 2006) e (KOMODAKIS; PESQUET, 2015) mostram que o lacuna de dualidade tende a zero a medida que o número de subportadoras OFDM tende a infinito. Além disso, estes trabalhos mostram que essa condição de zero *duality gap* já pode ser encontrada para números práticos de subportadoras usadas em sistemas atuais. Contudo, deve-se observar que em geral, alocação de recursos em redes reais não é feita em termos de subportadoras mas em termos blocos de subportadoras devido a alta complexidade na estimação de qualidade de canal. Isso dificulta a obtenção da condição de lacuna de dualidade igual a zero para esses problemas.

Em nosso estudo, substituímos o espaço de procura discreto por um espaço de procura contínuo obtendo assim, um problema LP. Problemas LP, que consistem em problemas convexos, podem ser resolvidos de forma bastante eficiente pelo método dos pontos interiores que possuem uma complexidade de pior caso polinomial (BAZARAA *et al.*, 1991).

O espaço de soluções ou conjunto viável de problemas LP consiste em politopos. Como a função objetivo de problemas LP são lineares e portanto convexas, temos que em problemas LP com espaço de soluções limitados, cada mínimo/máximo local corresponde

a um mínimo/máximo global. Além disso, a solução ótima de problemas LP está sempre na fronteira do espaço de procura representado pelo polítopo, ou seja, nos vértices dos polítopos. Na literatura é comum denotar as soluções presentes nos vértices dos polítopos como soluções básicas viáveis.

Note que, caso os vértices do polítopo sejam soluções inteiras, temos que a solução ótima do problema LP corresponde a solução ótima do problema ILP. Do ponto de vista computacional, temos que esse tipo de cenário é muito atrativo visto que as soluções dos problemas ILP podem ser obtidas por algoritmos com complexidade polinomiais (método dos pontos interiores, por exemplo) aos invés de algoritmos com complexidade exponencial (BB, por exemplo).

Matematicamente, sabemos que as soluções do problema relaxado corresponde a solução do problema inteiro sempre que a matriz de restrição do problema relaxado é totalmente unimodular ou do inglês, *Totally Unimodular Matrix* (TUM). Uma matriz é TUM quando todas submatrizes dessa matriz é unimodular. Uma matriz é unimodular quando seu determinante é 1 ou -1. Infelizmente, as restrições do problema apresentado nas equações (2.7), (2.8), (2.9) e (3.1) não são TUM. Contudo, pode ser mostrado que certas soluções básicas viáveis (ou vértices do polítopo) do problema aqui estudado são soluções inteiras. Isso deve-se ao fato de que algumas submatrizes da matriz que representa as restrições do problema relaxado são unimodulares. Assim, esperamos que em algumas instâncias do problema estudado, consigamos resolver o problema original ILP de forma ótima através da solução do problema LP.

Em resumo, mostraremos no próximo capítulo, por meio de simulações computacionais, que a relaxação do problema de ARR formulado neste trabalho resulta na solução ótima do problema original ILP com frequência satisfatória. Isso permite uma redução drástica em complexidade computacional da alocação dos recursos de rádio. Vale a pena ressaltar que até onde vai nosso conhecimento, não há precedente de outros artigos que tenham identificado problemas de ARR inteiros que admitam soluções relaxadas inteiras no contexto de alocação de recursos para telecomunicações no enlace reverso utilizando SC-FDMA. Em (MORETTI; TODINI, 2007), os autores exploram o problema de alocação de recursos para minimizar a potência de transmissão considerando o mesmo modo de transmissão para todos os usuários tornando, desta forma, um problema TUM. O uso de matrizes do tipo TUM para fixação de escalonamento para resolver problema de escalona-

mento, assinalamento de subportadoras e alocação de potência em redes OFDM pode ser observado em (ZHANG; LETAIEF, 2006). Em (SANDELL; COON, 2009), verificamos a aplicação de TUM para resolver o problema de assinalamento de subportadoras por antena. Observamos, em (CHU *et al.*, 2012), o uso de TUM para maximizar a eficiência energética em redes de comunicações móveis.

Verificamos, nos resultados das simulações, que serão apresentados no próximo capítulo, que a utilização de LP resolve, de forma ótima, uma frequência satisfatória das realizações. Para tratar os demais casos, propomos, neste trabalho, técnicas que atuam sobre a matriz de alocação de padrões de arranjos de BRs que não são TUMs. Desta forma, para os casos em que a solução do problema relaxado não é inteira, propomos algoritmos de arredondamento que recebem como entrada a solução do problema LP fracionada e retorna uma solução inteira viável para o problema estudado.

3.2.2 *Proposta de arredondamento*

O fluxograma do algoritmo de arredondamento é apresentado na Figura 8. No passo (1) o algoritmo recebe como entrada a matriz \mathbf{X} , que representa a solução do problema ILP relaxado, ou LP. Caso essa matriz seja binária, o algoritmo ILP relaxado resolveu o problema de forma ótima (passos (2) e (3)). Entretanto, se a matriz solução não for binária, o algoritmo realiza, no passo (4), os assinalamentos de padrões a usuários em que as entradas são 1. No passo (5), o algoritmo seleciona a linha j^* e coluna p^* da matriz \mathbf{X} correspondente ao maior valor diferente de 1. O passo (6) associa o assinalamento p^* ao usuário j^* atribuindo 1 na matriz \mathbf{X} e 0 para as demais colunas da linha j^* . As entradas da matriz \mathbf{X} que estejam violando as restrições de exclusividade também devem receber o valor 0. O passo (7) verifica se há valores de assinalamentos diferentes de 1 e 0. Caso ainda existam, o processo de arredondamento continua no passo (5).

3.2.3 *Complexidade Computacional da Solução Proposta*

O algoritmo proposto é dividido em duas etapas. Devido ao relaxamento do problema original, o algoritmo aplica LP para resolução do problema. LP é resolvido usando métodos de pontos interiores que resolvem este tipo de problema em complexidade polinomial. O artigo (ANSTREICHER, 1999) apresenta a complexidade da resolução de um problema linear através da aplicação de pontos interiores, como $\mathcal{O}((J^3 N^6 / \ln(JN^2)))$.

Figura 8 – Fluxograma da proposta de arredondamento.

O algoritmo de arredondamento possui três laços de repetição aninhados: os dois primeiros com J repetições com operações internas de complexidade $\mathcal{O}(1)$, e o mais interno que percorre os P padrões de assinalamento. Isto resulta em uma complexidade de pior caso igual a $\mathcal{O}((JN)^2)$.

Desta forma, a complexidade computacional do algoritmo proposto em pior caso é dominada pela resolução do problema LP e é dada por $\mathcal{O}((J^3N^6/\ln(JN^2)))$.

3.3 Soluções Sub-Ótimas Presentes na Literatura

Neste estudo, abordaremos, no próximo capítulo, uma análise comparativa de desempenho e eficiência do algoritmo proposto neste trabalho com outros algoritmos presentes na literatura. Nesta seção, nós realizaremos uma descrição sobre os algoritmos utilizados para realizar tais análises.

3.3.1 Solução de Ian Wong

A heurística gulosa abordada em (WONG *et al.*, 2009) é baseada na progressão ascendente da função objetivo do problema. A cada iteração do algoritmo, especificamente um BR é alocado de maneira que o assinalamento maximize o incremento da função objetivo. Inicialmente, o algoritmo configura todos os recursos como assinaláveis a todos os usuários. A cada iteração, o algoritmo realiza uma análise de maximização da função objetivo de cada assinalamento e fixa o BR. Quando um recurso é fixado, o conjunto de recursos assinaláveis de cada TM é atualizado considerando o recurso que foi fixado a um TM e as restrições impostas pelo problema. A complexidade computacional de pior caso desta solução é $\mathcal{O}(JN^2)$.

3.3.2 Solução de Mengying Zhang

A estratégia gulosa adotada por (ZHANG; ZHU, 2013) promove a alocação de recursos no cenário explorado neste estudo. O artigo (ZHANG; ZHU, 2013) adota uma técnica conhecida como justiça proporcional, que busca maximizar a soma dos logaritmos das taxas de dados experimentadas pelos TMs por meio de uma heurística gulosa. O algoritmo guloso divide-se em duas etapas, em que a primeira consiste em dividir a banda de frequência total em sub-conjuntos de sub-canais. O tamanho do sub-conjunto da banda de frequência depende da banda de coerência do canal. Basicamente, a proposta é assinalar usuários aos sub-conjuntos gerados. Este assinalamento é realizado considerando-se apenas um sub-canal presente no sub-conjunto formado. Ou seja, para um usuário ser assinalado ao sub-conjunto, ele não precisa ter potencial de assinalamento em todo sub-conjunto, mas apenas em um sub-canal pertencente a ele. O assinalamento dos sub-canais pertencentes ao sub-conjunto são assinalados aos usuários dele seguindo critérios gulosos de alocação. O algoritmo realiza esse procedimento atendendo às restrições impostas pelo problema

base estudado neste trabalho. A complexidade computacional de pior caso desta solução é $\mathcal{O}(JN^2)$.

3.3.3 Solução Heurística de Soares

A proposta de alocação de recursos descrita em (SOARES, 2016) utiliza relaxamento do ILP como primeira etapa seguida por heurística de arredondamento. Contudo, a estratégia para arredondar valores não inteiros utilizada segue fluxo diferente da abordada neste trabalho. Basicamente, para os usuários que não obtiveram assinalamento inteiro, o algoritmo aloca o padrão com maior valor real no intervalo $\{0, 1\}$. Após isso, o algoritmo realiza uma classificação decrescente dos padrões alocados. Esta considera o valor obtido do número binário formado pelo padrão de assinalamento. Após isso, o algoritmo realiza a alocação dos BRs seguindo a ordem (dos padrões), estabelecida anteriormente, a fim de assinalar todos os BRs disponíveis. O trabalho de (SOARES, 2016) não aborda diretamente a maximização da taxa total ponderada e foi necessário realizar adaptações para que fosse possível realizar as simulações. Este trabalho explora o relaxamento do problema e a complexidade do algoritmo proposto é a mesma do apresentado em nosso estudo.

3.3.4 Solução Heurística de Lima

Nos trabalhos (LIMA, 2012) e (LIMA *et al.*, 2016), os autores modelam uma heurística para alocação dos BRs no enlace reverso SC-FDMA sujeito às restrições de exclusividade e adjacência. Inicialmente o algoritmo realiza uma alocação semelhante a usada pelo esquema OFDMA, que não garante adjacência. Em seguida, a partir de regras pré-estabelecidas, o algoritmo cria alocações virtuais com o objetivo de atender as restrições de adjacência não consideradas a priori. Dentre as alocações virtuais, o algoritmo seleciona aquela que possui melhor desempenho (taxa de transmissão total), verifica se atende as restrições de adjacência e, caso sejam atendidas, finaliza o procedimento de alocação. Caso as restrições do enlace reverso SC-FDMA não sejam atendidas, o algoritmo realiza uma iteração para repetir o procedimento novamente. Isso se mantém até que as restrições sejam resolvidas. A complexidade computacional de pior caso desta solução é $\mathcal{O}(JN^2)$.

4 VALIDAÇÃO DE DESEMPENHO E ANÁLISE

Neste capítulo, apresentamos a avaliação de desempenho da solução proposta neste documento e comparamos com outras propostas presentes na literatura. Na seção 4.1 apresentamos o cenário utilizado para simulação enquanto que na seção 4.2 apresentamos os resultados obtidos assim como suas respectivas análises.

4.1 Parâmetros de Simulação

A modelagem do sistema descrita no capítulo 2 foi implementada em um simulador computacional. Avaliamos a alocação de recursos no enlace reverso em um sistema celular setorizado empregando SC-FDMA. Para as simulações, consideramos que um BR é composto por um grupo de 12 subportadoras no domínio da frequência e uma duração temporal de 1 ms (duração de um TTI). Além disso, assumimos que adaptação de enlace baseia-se na informação de canal reportada pelo terminal móvel quantizada em 15 níveis de qualidade ou do inglês, *Channel Quality Indicators* (CQIs) utilizados pelo sistema LTE (3GPP, 2009). Os limiares de chaveamento ou troca de MCSs foram obtidos através de simulações de nível de enlace realizados em (MEHLFUHRER *et al.*, 2009).

Analisamos os resultados para diferentes quantidades de terminais e diferentes quantidades de BRs disponíveis. A potência transmitida por BR foi de 20 dBm. Os resultados foram obtidos através da realização da simulação de várias amostras independentes a fim de validarmos os dados estatisticamente. O modelo de propagação inclui perda de percurso dependente da distância, sombreamento log-normal e uma componente de desvanecimento rápido baseado no modelo *Typical Urban* do 3GPP. Consideramos que os pesos w_j , apresentados no problema estudado, foram ajustados para analisarmos a maximização da soma da taxa total e um cenário que envolve justiça no assinalamento de recursos. Os parâmetros de simulação estão detalhados na Tabela 3.

A fim de resolver os problemas de otimização inteiro (ILP) e sua versão relaxada (LP) utilizamos a biblioteca de otimização numérica IBM ILOG CPLEX (IBM, 2009). A escolha da quantidade de terminais móveis e BRs é limitada pela complexidade computacional para obter a solução ótima do problema ILP. Um dos resultados analisados na próxima seção está relacionado com o percentual de vezes em que a solução do problema relaxado corresponde a solução ótima do problema ILP original. Denominaremos essa

Tabela 3 – Parâmetros de simulação.

Parâmetro	Valor	Unidade
Raio da célula	334	m
Potência transmitida por BR	20	dBm
Número de subportadoras por BR	12	-
Número de BRs	12, 16, 20, 24	-
Desvio padrão do sombreamento	8	dB
Perda de percurso	$35.3 + 37.6 \cdot \log_{10}(d)$	dB
Densidade espectral do ruído	$3.16 \cdot 10^{-20}$	W/Hz
Número de <i>snapshots</i>	3000	-
Número de terminais	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	-
Desvanecimento rápido	<i>Typical Urban</i>	-

métrica como percentual de acerto. Os demais resultados são relacionados ao somatório da taxa de dados total,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{p \in \mathcal{P}} r_{j,p} \cdot x_{j,p}, \quad (4.1)$$

e ao somatório da taxa de dados ponderada

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{p \in \mathcal{P}} w_j \cdot r_{j,p} \cdot x_{j,p}. \quad (4.2)$$

A execução de todas as simulações foram processadas no mesmo servidor com a seguinte configuração de *software/hardware*:

- **Processador:** Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU @ 2.6 GHz
- **Memória instalada (RAM):** 8GB
- **Sistema Operacional:** Microsoft Windows 10 Pro

A solução proposta nesta dissertação, que consiste em resolver o problema inteiro relaxado seguido possivelmente de um algoritmo de arredondamento, foi comparada com as outras soluções encontradas na literatura descritas anteriormente. Nos gráficos a seguir, definimos a seguinte nomenclatura: SUBOPT PROP para o algoritmo proposto, OPT, para a solução ótima obtida no Capítulo 3, SUBOPT IAN WONG, solução subótima baseada em um algoritmo guloso proposta por Ian Wong em (WONG *et al.*, 2009), SUBOPT ZHANG, solução heurística proposta pelo artigo (ZHANG; ZHU, 2013) que leva em conta a banda de coerência do canal, SUBOPT SOARES, solução proposta por (SOARES, 2016) e SUBOPT LIMA, solução proposta por (LIMA *et al.*, 2016).

A próxima seção apresentará os resultados das simulações realizadas. Na subseção 4.2.1, serão apresentados os resultados da taxa de acerto da solução relaxada utilizando LP. Na subseção 4.2.2 apresentaremos uma análise dos algoritmos descritos nesta dissertação quanto ao problema de maximização da taxa total em que ajustamos os pesos, w_j , para o valor 1 para todo j . Na subseção 4.2.3, os algoritmos apresentados são avaliados em um cenário em que os pesos são ajustados de forma a melhorar a divisão dos recursos disponíveis objetivando uma maior justiça.

4.2 Resultados

4.2.1 Análise de Taxa de Acerto

Na Figura 9, apresentamos o percentual de acerto versus o número de BRs assumindo 6 terminais no sistema. Podemos verificar que para 12 BRs o percentual de acerto é acima de 70%. Ou seja, em mais de 70% das realizações foi possível resolver o problema ILP de forma ótima através de sua forma relaxada. Esse percentual diminui a uma taxa reduzida à medida que incrementamos o número de BRs. Contudo, podemos verificar que mesmo para 24 BRs o percentual de acerto ainda é alto (acima de 60%).

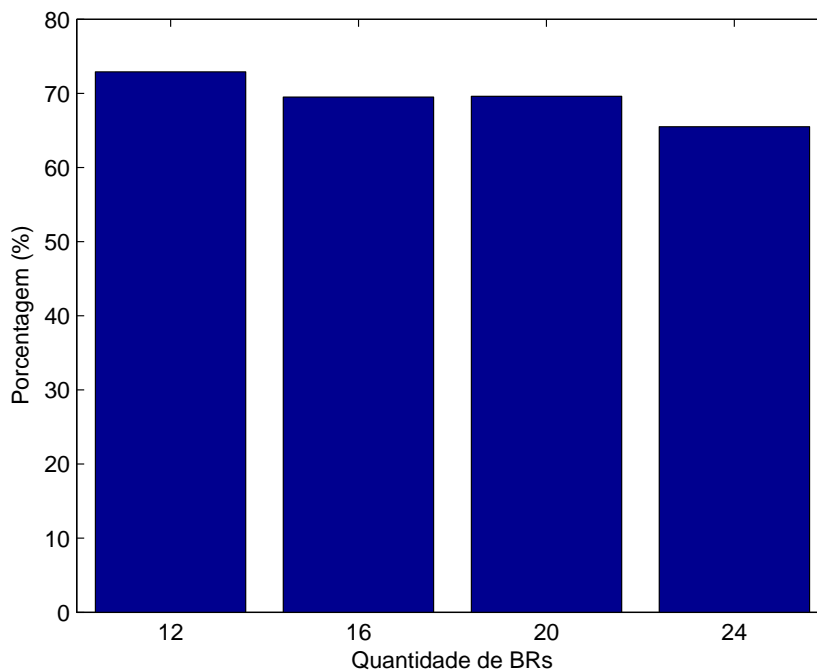


Figura 9 – Percentual de acerto versus o número de BRs no sistema com 6 terminais móveis no sistema.

Na Figura 10, apresentamos o percentual de acerto versus o número de terminais móveis, fixando a quantidade de BRs disponíveis em 12. Neste caso, analisamos o impacto da variação da quantidade de TMs. Nota-se que para 6 terminais móveis o percentual de acerto é acima de 70%. Ou seja, em mais de 70% das realizações foi possível resolver um problema ILP, reconhecidamente complexo, de forma ótima, através de sua forma relaxada, aplicando técnicas de programação linear que possui métodos bastante eficientes do ponto de vista computacional. Esse percentual diminui a uma taxa reduzida à medida que incrementamos o número de terminais. Contudo, podemos verificar que mesmo para 12 terminais, o percentual de acerto ainda é significativo (em torno de 55%).

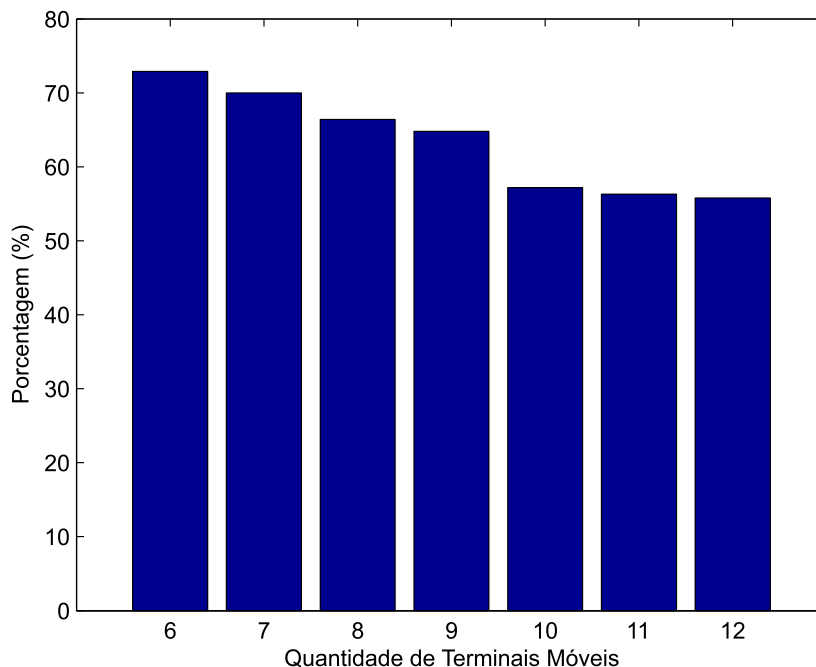


Figura 10 – Percentual de acerto versus o número de terminais móveis.

As Figuras 9 e 10 nos apresentam um resultado bastante interessante. Para os cenários simulados, podemos resolver, de forma ótima, e em um grande número de realizações um problema ILP, reconhecidamente complexo, através de LP, que possui métodos bastante eficientes do ponto de vista computacional. Estes resultados apresentam a eficiência da primeira etapa do algoritmo proposto neste estudo, quando relaxamos a variável de otimização e resolvemos através de LP. A principal razão para esse resultado, consiste no fato de que apesar da matriz de restrição do problema ILP não ser totalmente unimodular, ela possui algumas submatrizes unimodulares. Isso significa que alguns dos vértices do poliedro formado pelas restrições do problema representam soluções totalmente

inteiras (binárias) e outras representam soluções fracionadas. Assim, dependendo dos coeficientes da função objetivo linear (direção de busca), em algumas instâncias do problema, a maximização do objetivo ocorre em vértices do poliedro que são soluções inteiras. A segunda etapa do algoritmo consiste em tratar as realizações em que a solução ótima por LP não foi satisfeita. As próximas seções objetivam avaliar o algoritmo em sua completude e realizar comparações com outros algoritmos presentes na literatura.

4.2.2 Maximização da Taxa Total do Sistema

Nos resultados apresentados nesta subseção, concentramos em verificar o desempenho da solução proposta nesta dissertação (LP + arredondamento) comparada a algumas outras soluções da literatura. Nesta seção, as simulações tiveram o objetivo de avaliar o desempenho dos algoritmos relacionados a maximização da taxa total média do sistema. Ou seja, ajustamos todos os pesos, w_j , para o valor 1 de forma a configurar o objetivo do problema em maximizar a taxa total de dados.

Na Figura 11, apresentamos a taxa de transmissão total do sistema versus o número de usuários. Nestas simulações, haviam 12 BRs disponíveis. Realizamos uma análise de cada algoritmo estudado para que fosse possível realizar uma comparação com o algoritmo proposto neste trabalho. Notamos que o desempenho do algoritmo proposto é muito próximo ao ótimo nas simulações que envolveram até 9 usuários, mantendo-se como melhor proposta até 11 usuários. Para 12 usuários, verificamos que o algoritmo SUBOPT LIMA ultrapassou a eficiência espectral do algoritmo proposto em um pouco menos de 250 kbps.

A Figura 12, realizamos as simulações adotando um total de 24 BRs disponíveis. Para chegar a este resultado, variamos a quantidade de usuários para analisarmos o comportamento da taxa total média do sistema de cada algoritmo estudado. Verificamos que neste cenário, o algoritmo proposto neste estudo possui desempenho superior aos demais para todas as variações de usuários apresentada. Isso mostra, que ao aumentar o número de BRs, os algoritmos de comparação, principalmente os SUBOPT IAN WONG e SUBOPT LIMA, apresentam uma perda de desempenho devido a maior complexidade do problema (devido ao aumento do número de BRs). A isso denominamos de perda de desempenho por escalabilidade. O algoritmo proposto nesta dissertação apresenta uma maior robustez neste quesito.

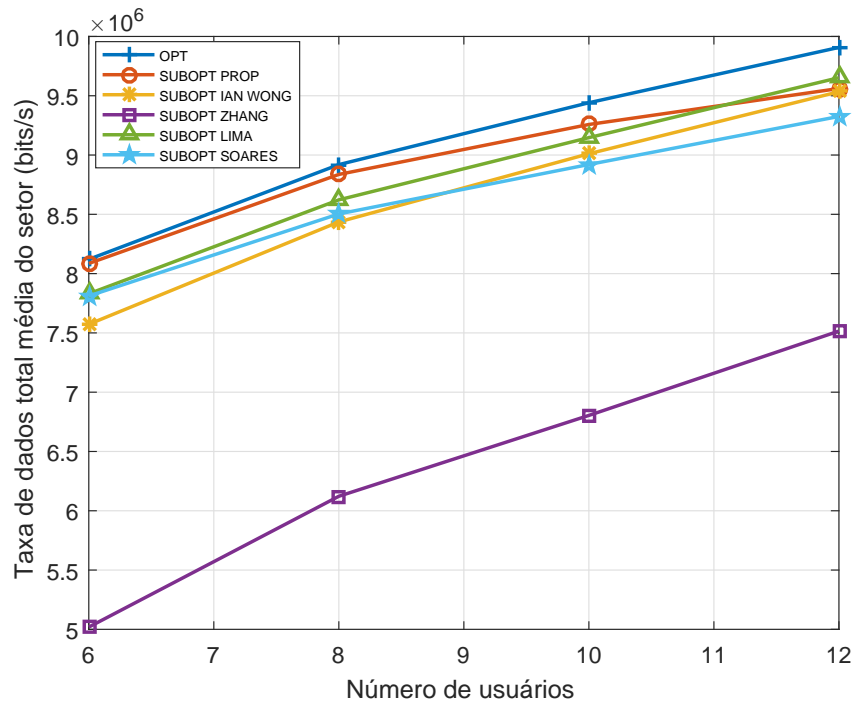


Figura 11 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 12 BRs.

Conforme descrito no capítulo 3, a proposta apresentada por este estudo teve como objetivo utilizar relaxamento do problema e resolve-lo usando LP. Para os casos que LP não resolve o problema de maneira ótima, o algoritmo realiza rotinas de arredondamento. A Figura 13 avalia os resultados da taxa total média do sistema quando o problema não pode ser resolvido de maneira ótima usando LP. O objetivo dessa figura é apresentar uma análise da seção do algoritmo que realiza a alocação dos recursos por rotinas de arredondamento. Para isso, comparamos os resultados obtidos apenas considerando os TTIs que o algoritmo proposto é resolvido pelas rotinas de arredondamento. Esses mesmos TTIs foram considerados na análise dos demais algoritmos presentes na literatura. Nesta figura, as simulações envolveram o total de 24 BRs disponíveis. Podemos verificar que o algoritmo proposto neste estudo, mesmo nos casos em que LP não é utilizada de forma ótima, possui desempenho superior aos demais algoritmos presentes na literatura.

Isso mostra a eficiência do algoritmo de arredondamento utilizado, que embora seja subótimo, ele é superior a outras soluções. Vale a pena lembrar que nos outros TTIs em que a solução inteira é obtida pela solução do LP, o algoritmo proposto elaborado nesta dissertação é ótimo.

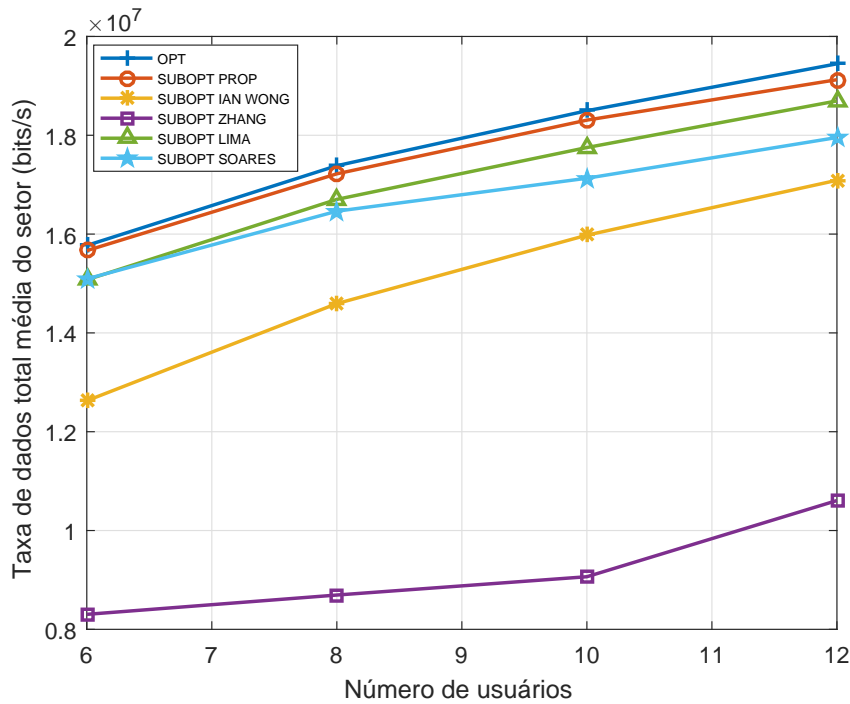


Figura 12 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.

4.2.3 Maximização da Soma das Taxas Ponderadas

Nos resultados apresentados a seguir, concentramos em verificar o desempenho da solução proposta nesta dissertação (LP + arredondamento) comparada a algumas outras soluções da literatura. Neste cenário, consideramos aspectos relativos a justiça. Na definição do problema, apresentado no capítulo 2, verifica-se que a variável w_j aplica uma ponderação às variáveis que descrevem o problema a ser otimizado para cada TM j . Esta variável pode ser usada com o objetivo de inserir justiça em ARR. Na seção anterior, que tinha como objetivo apresentar os resultados da maximização da soma das taxas totais, os pesos aplicados foram todos 1. Para o caso estudado nesta seção, os pesos w_j são usados para impor justiça entre os usuários. Os pesos foram modelados de forma que

$$w_j = \left(\frac{\sum_{p \in \mathcal{P}} r_{j,p}}{|\mathcal{P}|} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

A aplicação destes pesos impõem justiça ao sistema, em que foram priorizadas as alocações para usuários que possuem possíveis menores taxas de dados. Os pesos foram calculados de maneira inversamente proporcionais a média das taxas possivelmente obtidas de cada usuário. A Figura 14 apresenta o comportamento do somatório das taxas

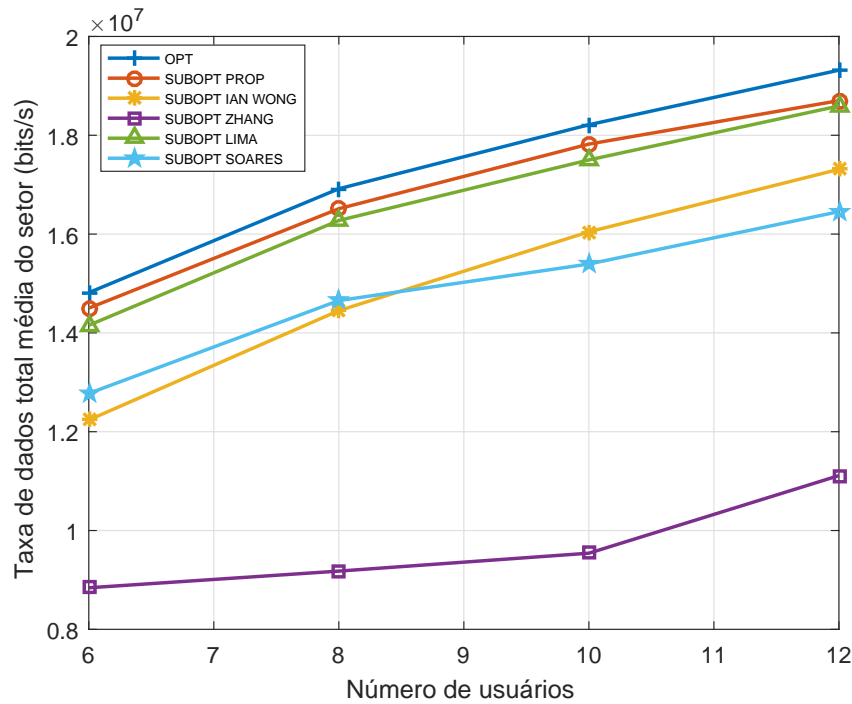


Figura 13 – Somatório das taxas total dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs. Análise dos TTIs em que a solução ótima não foi obtida através do relaxamento.

ponderadas quando variamos a quantidade de usuários considerando 12 BRs. Observamos que para este caso, o algoritmo proposto neste estudo possui desempenho equivalente a solução ótima e conseqüentemente melhor que as demais propostas presentes na literatura. A Figura 15 ratifica os resultados obtidos quando consideramos 24 BRs disponíveis. A aproximação entre a solução ótima e nossa proposta neste cenário é devido a uma perda de flexibilidade na alocação de recursos por parte da solução ótima que neste caso deve fazer a alocação de BRs mesmo a usuários com canais potencialmente ruins visto que esse usuário possui uma alta ponderação.

A Figura 16 apresenta o comportamento do somatório das taxas totais médias dos usuários sem considerar os pesos calculados na solução do problema. Neste caso, analisamos aspectos relativos a eficiência espectral. Verificamos que a imposição de justiça ao sistema corrobora em um impacto negativo sobre a eficiência espectral, reduzindo a taxa de dados máxima alcançada. Quando comparamos as Figuras 15 e 16 concluímos que os algoritmos que possuem melhor desempenho, considerando aspectos relacionados a justiça, possuem menor eficiência espectral. Esse é um resultado amplamente conhecido na literatura e esperado.

Nas Figuras 17, 18 e 19, apresentamos alguns gráficos que nos ajudam a

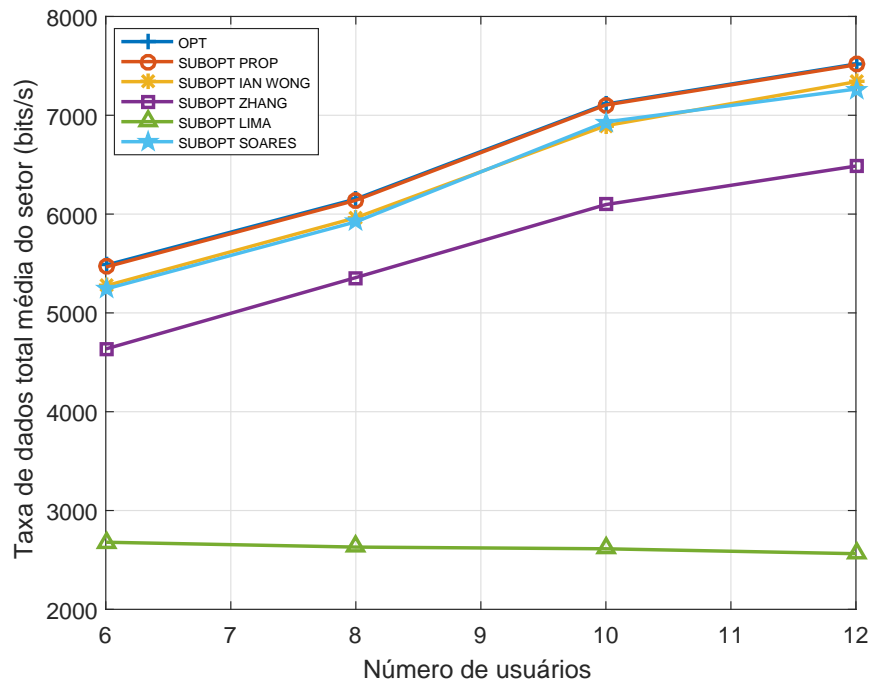


Figura 14 – Somatório das taxas ponderadas dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 12 BRs.

entender o cenário de justiça quando a solução desenvolvida neste trabalho é aplicada. Estas imagens foram obtidas de uma simulação em que consideramos 24 BRs distribuídos entre 6 usuários. Consideramos um *snapshot* aleatório do cenário que aplica justiça. A Figura 17a apresenta a taxa de dados obtida, em bits por segundo, de cada usuário neste TTI. A Figura 17b apresenta a taxa de dados ponderada obtida por cada usuário. Já a Figura 18a mostra a qualidade do canal de cada usuário neste TTI específico. E a Figura 18b apresenta os pesos obtidos pela equação 4.3 para cada usuário. Podemos observar que os pesos calculados são inversamente proporcionais a qualidade do canal obtida por cada TM. Os TMs 5 e 6, que possuem melhores canais, obtiveram os menores pesos. Estes pesos impactam diretamente na solução do problema e aplicam justiça dentro do cenário estudado.

Na Figura 19, é possível verificar o efeito da justiça. A Figura 19a ilustra a taxa de cada usuário quando $w_j = 1 \quad \forall j$, ou seja, o caso em que o problema de maximização da taxa total de dados é buscada. O que podemos observar é que o problema foi resolvido de maneira que os BRs disponíveis fossem alocados, em sua totalidade, aos terminais 5 e 6, pois possuem melhor qualidade de canal. As qualidades dos canais podem ser visualizadas na Figura 18a. A Figura 19b mostra as taxas de dados obtidas pelos usuários quando justiça é aplicada através dos pesos atribuídos a cada usuário. O que podemos concluir é

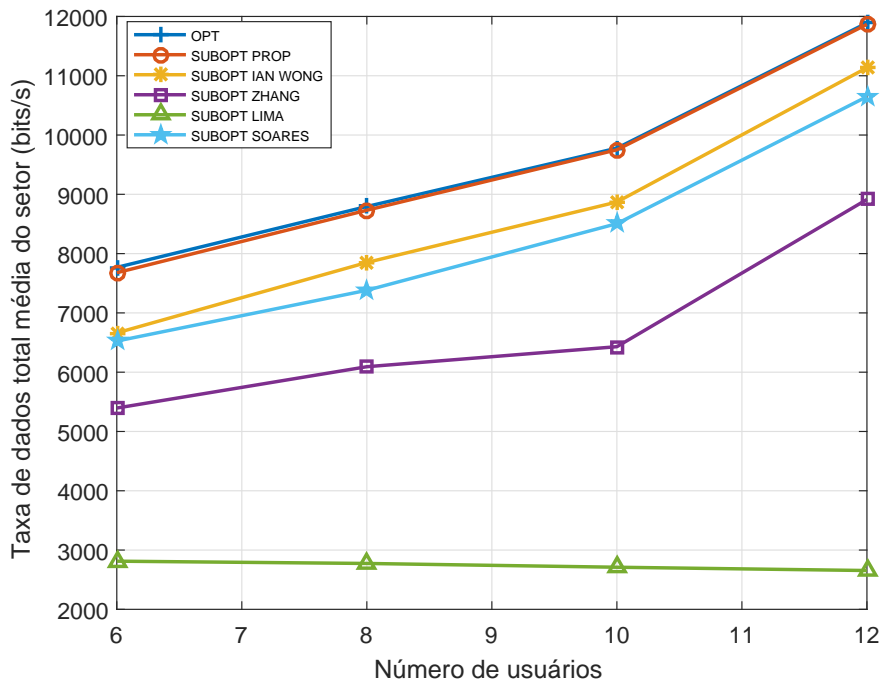


Figura 15 – Somatório das taxas ponderadas dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.

que o algoritmo alocou BRs para todos os TMs. Os usuários que possuem piores qualidade de canal tiveram os maiores pesos. Isso fez a solução do problema priorizar a alocação dos recursos para estes terminais. Esta priorização é aplicada por meio dos pesos calculados.

Portanto, através das Figuras 17, 18 e 19, verificamos os impactos da aplicação de justiça no cenário estudado. Analisamos como os pesos são calculados e o impacto destes pesos na taxa obtida por cada usuário.

4.2.4 Análise Geral

Nas seções 4.2.2 e 4.2.3 estudamos os problemas de maximização da taxa total de dados e da maximização das taxas ponderadas, respectivamente. Em ambos os casos, verificamos o comportamento dos algoritmos com a variação do número de usuários no sistema para os algoritmos SUBOPT PROP, OPT, SUBOPT IAN WONG, SUBOPT ZHANG, SUBOPT SOARES e SUBOPT LIMA. Nestas análises, verificamos que para o cenário de maximização da taxa total, o algoritmo SUBOPT ZHANG fornece o pior desempenho, seguido pelo SUBOPT IAN WONG. Ambos algoritmos são propostas heurísticas que não são capazes de fazer uma busca eficiente pelas melhores soluções em casos mais gerais. Por outro lado, o algoritmo proposto neste trabalho fornece resultados

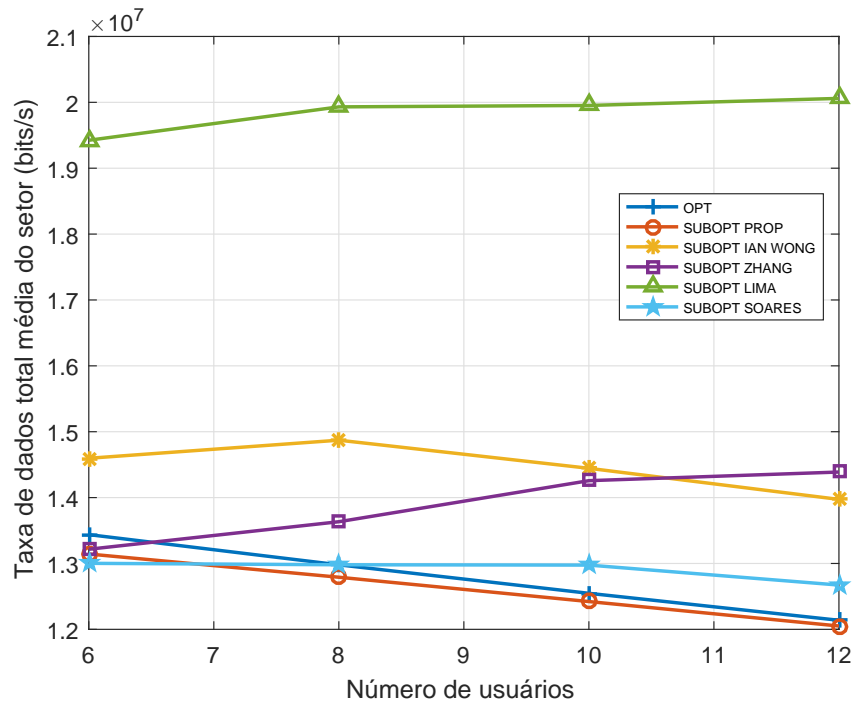
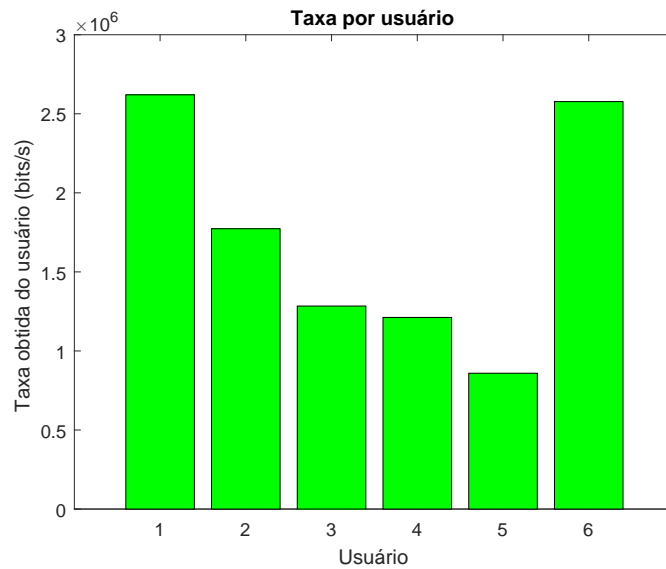


Figura 16 – Somatório das taxas totais dos usuários versus o número de usuários no sistema para os algoritmos estudados com 24 BRs.

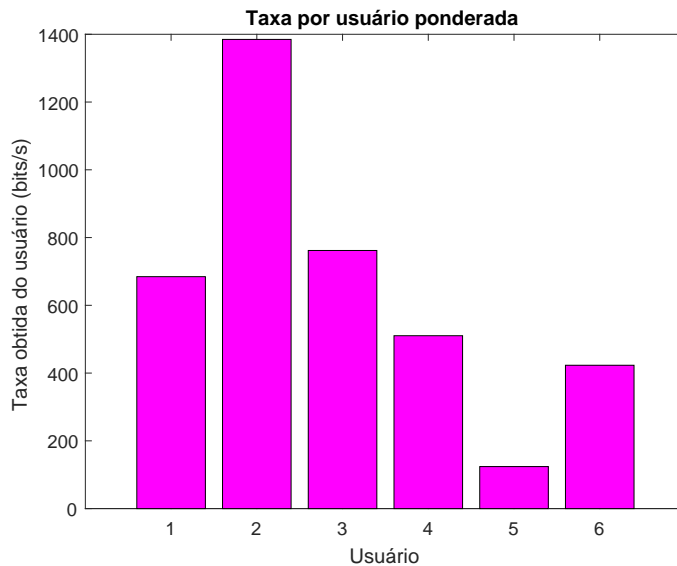
muito próximos ao do ótimo. Este bom desempenho deve-se ao fato de que a solução do problema relaxado já fornece a solução ótima em um grande percentual de realizações conforme mostrado anteriormente. Nos casos em que a solução do problema relaxado não fornece a solução ótima inteira, o algoritmo de arredondamento é capaz de atingir resultados satisfatórios, como foi verificado na Figura 13. Na seção 4.2.3 verificamos que o algoritmo proposto possui desempenho ainda melhor: quase que o mesmo da solução ótima. Nesse cenário, verificamos que o algoritmo SUBOPT LIMA possui desempenho inferior. Isso se explica pelo fato de que este algoritmo não foi projetado para tratar justiça. A Tabela 4 apresenta a complexidade dos algoritmos analisados neste estudo. Podemos verificar que, com exceção do algoritmo ótimo, todos os demais possuem complexidade polinomial no tempo ratificando a eficiência e viabilidade do algoritmo proposto.

Tabela 4 – Complexidade dos Algoritmos Analisados

Algoritmo	Tempo de Execução	Complexidade
OPT	$\mathcal{O}(2^{JN^2})$	Tempo Exponencial
SUBOPT PROP	$\mathcal{O}((J^3 N^6 / \ln(JN^2)))$	Tempo Polinomial
SUBOPT ZHANG	$\mathcal{O}(JN^2)$	Tempo Polinomial
SUBOPT IAN WONG	$\mathcal{O}(JN^2)$	Tempo Polinomial
SUBOPT SOARES	$\mathcal{O}((J^3 N^6 / \ln(JN^2)))$	Tempo Polinomial
SUBOPT LIMA	$\mathcal{O}(JN^2)$	Tempo Polinomial



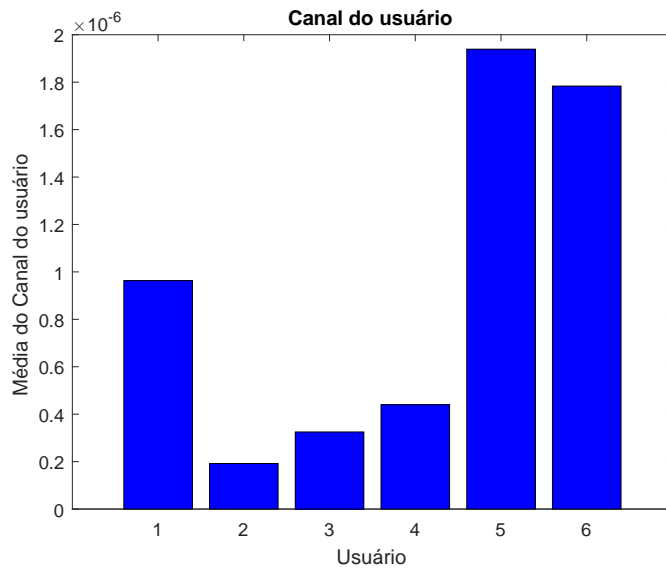
(a)



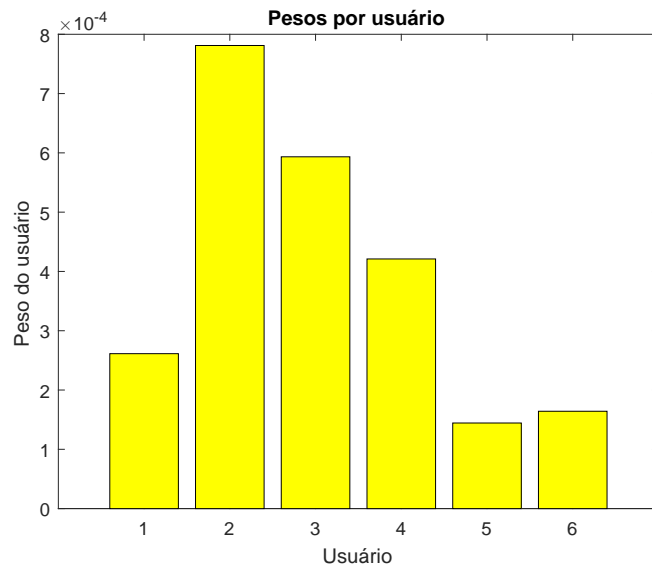
(b)

Figura 17 – Gráfico em barras da taxa atingida por usuário (a), taxa ponderada por usuário (b).

Em resumo, podemos observar que o uso de técnicas de relaxamento no problema de maximização da soma das taxas dos usuários ponderadas para o enlace reverso utilizando SC-FDMA pode ser resolvido de forma ótima através de algoritmos polinomiais, tal como o método dos pontos interiores em otimização convexa, em um grande percentual de realizações. As realizações que não culminarem em soluções inteiras são contornadas utilizando algoritmos computacionais com complexidade polinomial, garantindo a viabilidade das soluções apresentadas. Notamos, nos resultados apresentados, que as soluções relaxadas mescladas com algoritmos de arredondamento bem projetados são promissores



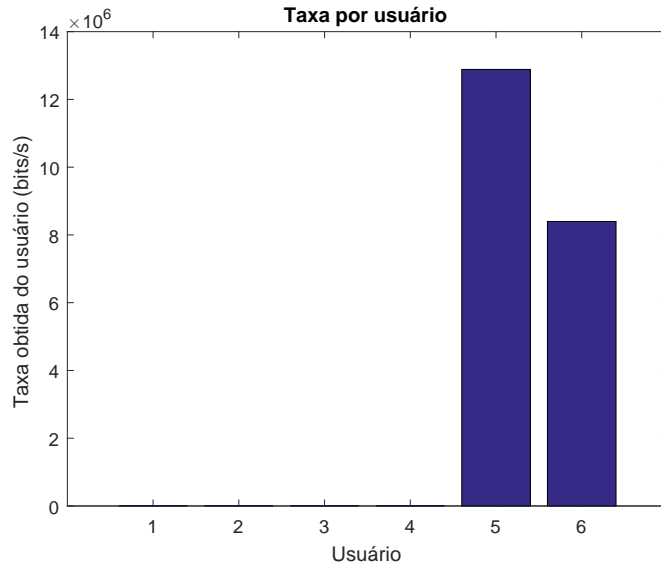
(a)



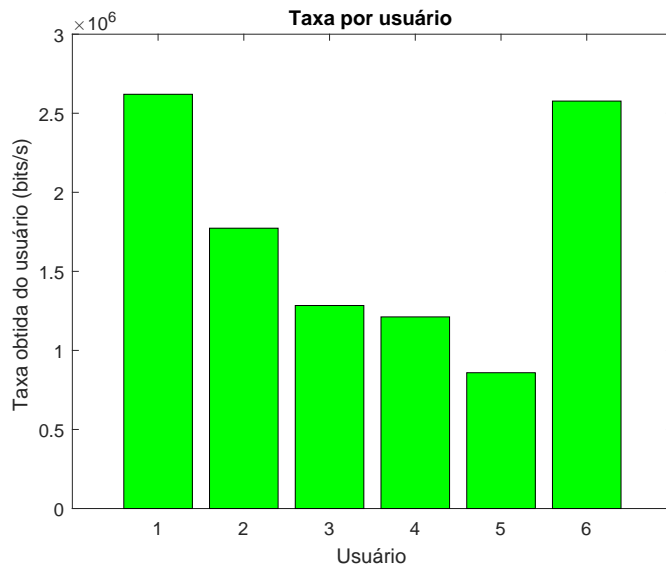
(b)

Figura 18 – Canal médio por usuário (a) e pesos definidos por usuário (b) em um TTI escolhido aleatoriamente no cenário em que a justiça é avaliada.

para atender os cenários mais modernos relativos a telecomunicações.



(a)



(b)

Figura 19 – Comparação taxas obtidas pelos usuários em um TTI considerando (a) maximização da taxa de dados total e (b) maximização da taxa de dados ponderada pelos pesos calculados.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, abordamos o problema de maximização do somatório das taxas ponderadas dos usuários para o enlace reverso de sistemas que empregam SC-FDMA, tal como o LTE. Neste tipo de problema, a restrição de adjacência de recursos na frequência torna a obtenção de soluções ótimas muito onerosa computacionalmente.

Primeiramente, apresentamos o problema supracitado como um problema linear inteiro ou do inglês, ILP. Motivado pela alta complexidade de resolução desta classe de problemas, propomos o relaxamento do problema ILP assumindo que a variável de otimização pode agora assumir qualquer valor real entre 0 e 1. O novo problema obtido é um problema de otimização linear ou do inglês, LP. Essa classe de problemas de otimização admite soluções bastante eficientes com complexidade computacional polinomial.

Através de simulações computacionais, mostramos que em um grande percentual das realizações simuladas, a solução do problema relaxado corresponde com exatidão a do problema ILP original. Para os cenários simulados, pudemos verificar que esse percentual não foi menor que 55%. Para os casos em que a solução do problema relaxado não corresponde a uma solução inteira, propomos um algoritmo de arredondamento. Os resultados das simulações também mostram que a proposta deste artigo não somente é superior a algumas outras selecionadas na literatura, como também possui um desempenho quase ótimo no cenário apresentado.

Como perspectivas de trabalhos futuros, podemos destacar a implementação de outras propostas de arredondamento e distribuição de BRs. Mesclar as conclusões extraídas deste estudo a algoritmos de alocação de potência e a implementação de estratégias de aplicação de justiça utilizando os cenários e algoritmos estudados também são propostas futuras.

Outra perspectiva é estudar outros problemas de alocação de recursos de rádio para sistemas SC-FDMA que possuam objetivos lineares. As técnicas e soluções apresentadas neste estudo possuem potencial de aplicação em qualquer outro problema ILP que preserve o mesmo conjunto de restrições apresentadas nas equações (2.8) a (2.10) mesmo que possuam outras funções objetivos (lineares).

No que se refere a justiça, podemos implementar outros mecanismos para impor justiça ao sistema e verificar estes impactos usando os algoritmos propostos neste estudo. A justiça explorada nesta dissertação apresenta características voltadas a compensação de

prejuízos oriundos da qualidade do canal. Aspectos relativos a justiça em TTIs passados também podem ser explorados em trabalhos futuros.

Por fim, ratificamos a importância de algoritmos de ARR em sistemas de comunicações modernas como fator preponderante para atingirmos o objetivo de atender a expansão das tecnologias móveis no secante de acomodar o crescimento exponencial de usuários e promoção de QoS.

REFERÊNCIAS

3GPP. *Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical Layer Procedures*. [S.l.], 2009.

ANSTREICHER, K. M. Linear programming in $\mathcal{O}((n^3/\ln(n))l)$ operations. **SIAM Journal on Optimization**, v. 9, n. 4, p. 803–812, 1999. ISSN 1553-877X.

AUBIN, J. P.; EKELAND, I. Estimates of the duality gap in nonconvex optimization. **Mathematics of Operations Research**, v. 1, n. 3, p. 225–245, 1976. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1287/moor.1.3.225>>.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **A Multicarrier Primer**. [S.l.]: Amati Communication Corporation and Stanford University, 1991.

BURCHARDT, H.; SERAFIMOVSKI, N.; TSONEV, D.; VIDEV, S.; HAAS, H. Vlc: Beyond point-to-point communication. **IEEE Communications Magazine**, v. 52, n. 7, p. 98–105, July 2014. ISSN 0163-6804.

CALABRESE, F.; MICHAELSEN, P.; ROSA, C.; ANAS, M.; CASTELLANOS, C.; VILLA, D.; PEDERSEN, K.; MOGENSEN, P. Search-tree based uplink channel aware packet scheduling for utran lte. In: **Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1949–1953. ISSN 1550-2252.

CALABRESE, F.; ROSA, C.; ANAS, M.; MICHAELSEN, P.; PEDERSEN, K.; MOGENSEN, P. Adaptive transmission bandwidth based packet scheduling for lte uplink. In: **Vehicular Technology Conference, 2008. VTC 2008-Fall. IEEE 68th**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–5. ISSN 1090-3038.

CHU, F. S.; CHEN, K. C.; FETTWEIS, G. Green resource allocation to minimize receiving energy in ofdma cellular systems. **IEEE Communications Letters**, v. 16, n. 3, p. 372–374, March 2012. ISSN 1089-7798.

CLAUSEN, J. **Branch and Bound Algorithms - Principles and Examples**. Universitetsparken 1, DK- 2100 Copenhagen, Denmark.: University of Copenhagen, 1999.

CORMEN, T. H.; STEIN, C.; RIVEST, R. L.; LEISERSON, C. E. **Introduction to Algorithms, Chapter 34**. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2009. ISBN 9780262533058.

ERICSSON. **Ericsson Mobility Report: ON THE PULSE OF THE NETWORKED SOCIETY**. [S.l.], 2016.

ESCH, J. A survey of security challenges in cognitive radio networks: Solutions and future research directions. **Proceedings of the IEEE**, v. 100, n. 12, p. 3170–3171, Dec 2012. ISSN 0018-9219.

FEMENIAS, G.; DANOBETIA, B.; RIERA-PALOU, F. Unified approach to cross-layer scheduling and resource allocation in ofdma wireless networks. **EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking**, Springer International Publishing, v. 2012, n. 1, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1186/1687-1499-2012-145>>.

FRAGKIADAKIS, A. G.; TRAGOS, E. Z.; ASKOXYLAKIS, I. G. A survey on security threats and detection techniques in cognitive radio networks. **IEEE Communications Surveys Tutorials**, v. 15, n. 1, p. 428–445, First 2013. ISSN 1553-877X.

GOLDSMITH, A. **Wireless Communications**. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521837162.

GONZALEZ, T. F. **Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2007.

GROBE, L.; PARASKEVOPOULOS, A.; HILT, J.; SCHULZ, D.; LASSAK, F.; HARTLIEB, F.; KOTTKE, C.; JUNGNICHEL, V.; LANGER, K. D. High-speed visible light communication systems. **IEEE Communications Magazine**, v. 51, n. 12, p. 60–66, December 2013. ISSN 0163-6804.

IBM. **IBM ILOG CPLEX Optimizer**. 2009. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>. Acessado em 14 de dezembro de 2015. Acessado em 14 de dezembro de 2015.

ITU. **Requirements related to technical performance for IMT-Advanced radio interface(s)**. [S.l.], 2008.

JAIN, R.; CHIU, D.; HAWE, W. A quantitative measure of fairness and discrimination for resource allocation in shared systems, digital equipment corporation. **Technical Report DEC-TR-301**, n. 1, 1984.

JOVICIC, A.; LI, J.; RICHARDSON, T. Visible light communication: opportunities, challenges and the path to market. **IEEE Communications Magazine**, v. 51, n. 12, p. 26–32, December 2013. ISSN 0163-6804.

KELLY, F. Charging and rate control for elastic traffic. **European Trans. Telecommunications**, v. 8, n. 1, 1997.

KELLY, P. F.; MAULLOO, K. A.; TAN, H. D. K. Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability. **Journal of the Operational Research Society**, v. 49, n. 3, p. 237–252, 1998. ISSN 1476-9360. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600523>>.

KOMODAKIS, N.; PESQUET, J. C. Playing with duality: An overview of recent primal-dual approaches for solving large-scale optimization problems. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 32, n. 6, p. 31–54, Nov 2015. ISSN 1053-5888.

LEE, S.-B.; PEFKIANAKIS, I.; MEYERSON, A.; XU, S.; LU, S. Proportional fair frequency-domain packet scheduling for 3gpp lte uplink. In: **INFOCOM 2009, IEEE**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2611–2615. ISSN 0743-166X.

LIM, J.; MYUNG, H.; OH, K.; GOODMAN, D. Channel-dependent scheduling of uplink single carrier fdma systems. In: **Vehicular Technology Conference, 2006. VTC-2006 Fall. 2006 IEEE 64th**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–5.

LIM, J.; MYUNG, H.; OH, K.; GOODMAN, D. Proportional fair scheduling of uplink single-carrier fdma systems. In: **Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2006 IEEE 17th International Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–6.

- LIMA, F. R. M. **Maximizing Spectral Efficiency under Minimum Satisfaction Constraints on Multiservice Wireless Networks**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará - UFC, 2012. 124f.
- LIMA, F. R. M.; MACIEL, T. F.; CAVALCANTI, F. R. P. Radio resource allocation in sc-fdma uplink with resource adjacency constraints. **JOURNAL OF COMMUNICATION AND INFORMATION SYSTEMS**, v. 31, n. 1, 2016.
- LIMA, F. R. M.; WÄNSTEDT, S.; CAVALCANTI, F. R. P.; FREITAS, W. C. Scheduling for improving system capacity in multiservice 3gpp lte. **Journal of Electrical and Computer Engineering**, Hindawi Publishing Corp., v. 2010, p. 3, 2010.
- LIU, H.; LI, G. **OFDM-Based Broadband Wireless Networks: Design and Optimization**. [S.l.]: Wiley, 2005.
- MEHLFUHRER, C.; WRULICH, M.; IKUNO, J.; BOSANSKA, D.; RUPP, M. Simulating the long term evolution physical layer. In: **Signal Processing Conference, 2009 17th European**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1471–1478.
- MO, J.; WALRAND, J. Fair end-to-end window-based congestion control. **IEEE/ACM Trans. Netw. (ToN)**, v. 8, n. 1, 2000.
- MORETTI, M.; TODINI, A. A resource allocator for the uplink of multi-cell ofdma systems. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 6, n. 8, p. 2807–2812, August 2007. ISSN 1536-1276.
- NEMHAUSER, G.; WOSLEY, L. **Integer and Combinatorial Optimization**. [S.l.]: John Wiley Sons, 1999. ISBN 978-0-471-35943-2.
- NWAMADI, O.; ZHU, X.; NANDI, A. Dynamic subcarrier allocation for single carrier-fdma systems. In: IEEE. **Signal Processing Conference, 2008 16th European**. [S.l.], 2008. p. 1–5.
- PAO, W.-C.; CHEN, Y.-F. Chunk allocation schemes for sc-fdma systems. In: **Vehicular Technology Conference (VTC 2010-Spring), 2010 IEEE 71st**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–5. ISSN 1550-2252.
- SADR, S.; ANPALAGAN, A.; RAAHEMIFAR, K. Radio resource allocation algorithms for the downlink of multiuser ofdm communication systems. **Communications Surveys Tutorials, IEEE**, v. 11, n. 3, p. 92–106, rd 2009. ISSN 1553-877X.
- SANDELL, M.; COON, J. P. Per-subcarrier antenna selection with power constraints in ofdm systems. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 8, n. 2, p. 673–677, Feb 2009. ISSN 1536-1276.
- SHI, H.; PRASAD, R. V.; ONUR, E.; NIEMEGEREERS, I. G. M. M. Fairness in wireless networks: issues, measures and challenges. **IEEE Communications Surveys Tutorials**, v. 16, n. 1, p. 5–24, 2014. ISSN 1553-877X.
- SHI, T.; ZHOU, S.; YAO, Y. Capacity of single carrier systems with frequency-domain equalization. In: **Emerging Technologies: Frontiers of Mobile and Wireless Communication, 2004. Proceedings of the IEEE 6th Circuits and Systems Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2, p. 429–432 Vol.2.

- SKUTELLA, M. Convex quadratic and semidefinite programming relaxations in scheduling. **J. ACM**, ACM, New York, NY, USA, v. 48, n. 2, p. 206–242, mar. 2001. ISSN 0004-5411. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/375827.375840>>.
- SOARES, J. **Dissertação de Mestrado: O Problema da Atribuição Conexa**. Tese (Doutorado) — Univesidade Federal do Ceará, 2016. 46f.
- TEMINO, L. Ruiz de; BERARDINELLI, G.; FRATTASI, S.; MOGENSEN, P. Channel-aware scheduling algorithms for sc-fdma in lte uplink. In: **Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2008. PIMRC 2008. IEEE 19th International Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–6.
- WANG, C.-X.; HAIDER, F.; GAO, X.; YOU, X.-H.; YANG, Y.; YUAN, D.; AGGOUNE, H.; HAAS, H.; FLETCHER, S.; HEPSAYDIR, E. Cellular architecture and key technologies for 5g wireless communication networks. **Communications Magazine, IEEE**, v. 52, n. 2, p. 122–130, February 2014. ISSN 0163-6804.
- WONG, I.; OTERI, O.; MCCOY, W. Optimal resource allocation in uplink sc-fdma systems. **Wireless Communications, IEEE Transactions on**, v. 8, n. 5, p. 2161–2165, May 2009. ISSN 1536-1276.
- YAACOUB, E.; DAWY, Z. A survey on uplink resource allocation in ofdma wireless networks. **IEEE Communications Surveys Tutorials**, v. 14, n. 2, p. 322–337, 2012. ISSN 1553-877X.
- YU, W.; LUI, R. Dual methods for nonconvex spectrum optimization of multicarrier systems. **IEEE Transactions on Communications**, v. 54, n. 7, p. 1310–1322, July 2006. ISSN 0090-6778.
- ZHANG, M.; ZHU, Y. An enhanced greedy resource allocation algorithm for localized sc-fdma systems. **IEEE Communications Letters**, v. 17, n. 7, p. 1479–1482, July 2013. ISSN 1089-7798.
- ZHANG, Y. J.; LETAIEF, K. B. Cross-layer adaptive resource management for wireless packet networks with ofdm signaling. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 5, n. 11, p. 3244–3254, November 2006. ISSN 1536-1276.

APÊNDICE A – COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DA SOLUÇÃO PROPOSTA

Nesta seção será apresentada a complexidade computacionais de pior caso da solução sub-ótima explorada neste trabalho.

A.1 Complexidade da Solução Proposta

O algoritmo proposto é dividido em duas etapas. Devido ao relaxamento do problema original, o algoritmo aplica LP para resolução do problema. LP é resolvido usando métodos de pontos interiores que resolvem este tipo de problema em complexidade polinomial.

O artigo (ANSTREICHER, 1999) apresenta a complexidade da resolução de um problema linear como

$$\mathcal{O}((JP)^3/\ln(JP)). \tag{A.1}$$

A segunda etapa da solução explora o resultado da aplicação de LP não binário seguindo o algoritmo 1. Analisando a complexidade deste algoritmo, podemos iniciar pela linha 2, que trata de uma operação de atribuição matricial de custo assintótico 1. Na linha 3, inicia-se um laço de repetição que repete, em pior casos J vezes suas operações internas. Na linha 4, a função *max* executa uma busca por maior valor em uma matriz $J \times P$, esta operação realiza $J \cdot P$ iterações em pior caso. Na linha 5 inicia-se um laço de repetição que realiza P iterações em pior caso. Na linha 6 é realizado uma operação de atribuição de valores de custo assintótico 1. Nas linhas 7, 8 e 9 realizam operações de comparações e atribuição de custo assintótico 1. As linhas 10, 11 e 12 são realizadas operações de comparação e atribuição de valores. Desta forma, a complexidade em pior caso, utilizando notação assintótica, da segunda seção do algoritmo proposto é:

$$\mathcal{O}(J^2P^2). \tag{A.2}$$

Como a complexidade da segunda seção do algoritmo, que trata do arredondamento da solução não binária provinda do processamento utilizando LP, é menor que a

complexidade da seção que resolve o problema utilizando LP, a complexidade, em pior caso, da solução proposta nesta dissertação é

$$\mathcal{O}((JP)^3/\ln(JP)). \tag{A.3}$$

Algoritmo 1: Segunda etapa da solução proposta

Entrada: Matriz não TUM \mathbf{A} , $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$

Saída: Matriz de alocação de padrões totalmente binária

```

1 início
2    $\mathbf{A}_{\text{aux}} \leftarrow \mathbf{A}$ ;
3   para cada padrão  $j$  faça
4      $(\text{column}_{\text{max}}, \text{row}_{\text{max}}) \leftarrow \max(\mathbf{A}_{\text{aux}})$ ;
5     para cada padrão  $p$  faça
6        $\mathbf{A}_{\text{aux}}(\text{row}_{\text{max}}, p) = -\infty$ ;
7       se  $p \neq \text{column}_{\text{max}}$  então
8          $\mathbf{A}(\text{row}_{\text{max}}, p) \leftarrow 0$ ;
9       fim
10      senão
11         $\mathbf{A}(\text{row}_{\text{max}}, p) \leftarrow 1$ ;
12      fim
13    fim
14  fim
15 fim
```
