UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RIVELINO DE SOUSA CÂMARA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

FORTALEZA
2016

RIVELINO DE SOUSA CÂMARA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C174r Câmara, Rivelino de Sousa.
Resolução de problemas : uma proposta metodológica / Rivelino de Sousa Câmara. – 2016.
94 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Resolução de problemas. 2. Proposta metodológica. 3. Coletânea de problemas. 4. Ensino - aprendizagem. I. Título.

CDD 510

RIVELINO DE SOUSA CÂMARA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

A Deus.

“A utopia está lá no horizonte. Aproximo-me dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.”

(Eduardo Galeano)

RESUMO

Em oposição ao uso exagerado de exercícios rotineiros, resolvidos por meio de regras e procedimentos padronizados, que não estimulam a iniciativa nem a autonomia matemática do aluno, apresentamos uma coletânea de problemas contendo uma quantidade mínima de conteúdos para resolvê-los, porém exigindo bastante criatividade e raciocínio. São problemas interessantes, com a finalidade de instigar, provocar, desafiar o aluno, proporcionando assim um interesse maior pelo estudo da Matemática, bem como tornando as aulas dessa disciplina mais atrativas e prazerosas. Elencamos também a solução de cada um deles, expondo comentários e algumas considerações ao professor. Paralelo a isso, como abordagem metodológica, sugerimos a resolução de problemas – teoria desenvolvida pelo matemático húngaro George Polya – que procura estimular a capacidade de “aprender a aprender” do aluno, habituando-o a determinar as próprias respostas, seguir suas estratégias, expor suas dificuldades, analisar e verificar suas soluções. Chamamos a atenção do equilíbrio pregado por Elon Lages entre a conceituação, a manipulação e a aplicação como componentes fundamentais ao processo ensino-aprendizagem da Matemática. Propomos também um projeto futuro de aplicação deste trabalho, visto que a sua fonte inspiradora nasce de uma necessidade de mudança na realidade vivida nas escolas públicas com relação ao ensino da Matemática.

Palavras-chave: Coletânea de problemas. Resolução de problemas. Ensino–aprendizagem.

ABSTRACT

In contrast to the overuse of routine exercises, resolved through rules and standard procedures, which do not stimulate initiative and mathematics student autonomy, we present a collection of problems containing a minimal amount of content to address them, but demanding enough creativity and reasoning. They are interesting problems, in order to instigate, provoke, challenge the student, thus providing a greater interest in the study of mathematics and making the lessons of this most attractive and enjoyable course. also we list the solution of each of them, exposing some comments and considerations to the teacher. Parallel to this, as a methodological approach, we suggest solving problems - theory developed by Hungarian mathematician George Polya - that seeks to stimulate the ability to "learn to learn" the student, accustoming him to determine the answers themselves, following their strategies, expose their difficulties, analyze and verify their solutions. We call the attention of the balance preached by Elon Lages between conceptualization, handling and application as fundamental components to the learning of mathematics process. We also propose a future project of application of this work, as their source of inspiration is born of a need to change the reality experienced in public schools regarding the teaching of mathematics.

Keywords: Collection of problems. Troubleshooting. Education-learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O caráter cumulativo da Matemática é de conhecimento de quem a leciona, como também de quem a estuda. Cada passo avançado numa direção se liga, fortemente, aos passos anteriores dados. Essa realidade nos remete à considerável importância da Matemática ensinada nos anos iniciais para o desempenho futuro de um aluno.

O primeiro contato da criança com a Matemática formal se dá por volta dos seis anos, no Ensino Fundamental I. Nessa fase, boa parte de seus professores possui uma sólida formação pedagógica, mas estudou Matemática apenas até o Ensino Médio, ministrando aulas semelhantes às que receberam e repassando, muitas vezes, uma ojeriza pela referida disciplina. Por volta dos onze anos, no Ensino Fundamental II, depara-se com um grupo de professores que, embora graduados e habilitados para ensinar Matemática, não são devidamente valorizados, submetendo-se assim a uma excessiva carga horária de trabalho para compensar sua baixa remuneração. Além do desgaste natural da profissão, há a diminuição de seu tempo e de sua qualidade de estudo, levando-os à prática rotineira de investir somente nos assuntos em que se sentem confiantes de abordar, quase sempre exercitando as questões que já estão habituados a resolver. Chegando ao Ensino Médio, por volta dos quinze anos, além dessa problemática docente se repetir, o discente se depara com o "velho e conhecido vestibular", que impõe uma sistemática de ensino voltada à assimilação rápida de inúmeros conteúdos novos e a revisão do que já foi visto nos anos anteriores, bem como o preparatório para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Assim, no cotidiano da sala de aula, deixar nossos alunos encantados pela beleza da Matemática é uma prática cada vez mais árdua.

É nesse contexto que apresentamos este trabalho como uma proposta pedagógica de melhoria da prática docente. Diferentemente do que ocorre na maioria das aulas de Matemática dos Ensinos Básico e Médio, em que os exercícios apresentados são solucionados pela utilização direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos que, em geral, não fomentam a curiosidade do aluno nem o desafiam, objetivamos criar uma base de dados com uma significativa quantidade de problemas, cuja essência é estimular a iniciativa e a criatividade, de forma a serem desafiadores, interessantes e a propiciarem várias estratégias de resolução. Estes problemas, devidamente propostos e resolvidos neste estudo, procurarão enriquecer as aulas de Matemática, auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem e resgatar o encantamento de nossos alunos por essa disciplina tão importante para o desenvolvimento de uma nação.

Sugerimos também a **resolução de problemas** como metodologia de ensino para desenvolver essa base de dados, pois aquela propicia ao aluno a utilização das mais diversas estratégias em busca da solução desses problemas, tais como: criatividade, imaginação, intuição, iniciativa, autonomia, estabelecimento de conexões, tentativa e erro, interpretação de resultados etc. Além disso, provoca no professor uma reflexão sobre sua prática pedagógica; estimula-o a pesquisar novos problemas, ampliando essa base de dados; encoraja-o a "sair de uma zona de conforto", onde quase tudo é previsível, controlável, e a "entrar numa zona de risco", em que o imprevisível e o aleatório ocorrem, naturalmente, na busca de soluções para tais problemas.

1.1 Objeto de estudo, motivação e definição do tema

Iniciei minha experiência profissional, como professor de Matemática do Ensino Médio, em 1997, na rede estadual de ensino. Em 2001, ingressei também na rede municipal, trabalhando com o Ensino Fundamental II, do 6º ao 9º ano. Anteriormente aos dois, por volta de 1992, já participava da rede particular, em preparatórios para concursos militares, IFCE e vestibulares.

Nas três redes de ensino, algo que me chamou a atenção foi a semelhança da prática profissional do professor de Matemática em relação a um aspecto: os exercícios propostos aos alunos. Guardadas as devidas exceções, enquanto os professores da rede pública se detêm, basicamente, aos exercícios do livro, os da particular substituem o livro didático por uma apostila ou utilizam os dois, dependendo da instituição onde lecionam. No Ensino Médio, essa prática se torna ainda mais evidente quando o conteúdo é fragmentado para três ou quatro professores, em que constatamos a enorme resistência do docente em permutar sua parte com a do outro, ou seja, em "sair da sua zona de conforto". Tal fato é tão aparente que os alunos se admiram de os professores saberem, muitas vezes, todas as respostas de cor, devido ao tempo em que ensinam o mesmo assunto.

No início de 2014, ingressei no Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Curso que visa a atender professores de Matemática em exercício no Ensino Básico, especialmente na escola pública, que buscam aprimorar sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

Em 2015, por fazer parte do quadro de efetivos da rede municipal de ensino de Fortaleza, fui convidado a participar de uma escola de tempo integral da Prefeitura como coordenador das áreas de Matemática e Ciências da Natureza. Essa experiência me aproximou ainda mais da complexa realidade dos professores de Matemática da escola pública municipal. Além de um grande número de professores substitutos, com uma não tão qualificada formação pedagógica e matemática, há uma elevada discrepância salarial em relação ao professor efetivo, seguida de uma enorme dependência docente ao livro didático, servindo este como principal referência para as aulas no que concerne à conceituação, manipulação e aplicação.

É nesse momento que essas duas realidades se encontram: um mestrado que objetiva minha melhoria profissional e a necessidade, como coordenador da área de Matemática, de intervir naquilo que estivesse ao meu alcance para melhorar a complexa situação dos professores da escola pública municipal, quanto a sua formação. Surgem, portanto, as primeiras ideias para a escolha de um tema que fosse significativo à prática docente desse público específico.

Era março de 2015 quando, no PROFMAT, foi ofertada a valiosa disciplina de verão intitulada "Resolução de Problemas - MA21", cujo livro adotado foi **Iniciação à Matemática**, de Krerley Oliveira e Adán J. Corcho. Foi ministrada, com grande esmero, pelos professores Jonatan Floriano da Silva e José Afonso de Oliveira. Durante as aulas, eram admiráveis as discussões sobre os inúmeros problemas propostos por nossos mestres, principalmente, no que diz respeito à busca do melhor caminho a seguir para a solução dos mesmos. Curioso, eu observava as reações manifestadas pela turma quando aqueles exibiam um problema na lousa e, sem se preocupar em acertar ou não, partiam para a discussão da melhor maneira de atacá-lo, levando em conta nossos conhecimentos prévios, nossa experiência, criatividade, persistência e determinação. A turma, por se sentir desafiada, demonstrava maior interesse em chegar à sua solução. Todos nós partilhávamos as discussões na tentativa de obter a melhor saída e, talvez, o principal de tudo, sentíamos a obrigação de estudar o conteúdo antes para contribuir, durante a aula, de modo mais positivo e eficiente. Ressalto que experiência assim somente fora vivenciada nas aulas de “Geometria I – MA13”, com o professor Marcos Ferreira Melo. Outro grande mestre que nos chamava à lousa para discutir, com seu jeito simples e tranquilo, as mais diversas e interessantes questões de Geometria Plana. Sem a mínima pretensão de saber tudo, também colocava em nossas mãos a tarefa de apresentar os melhores caminhos para encontrar as soluções.

Chegado o dia da primeira avaliação da disciplina de verão, deparamo-nos com um inquietante problema proposto por nossos mestres: "*Temos 10 sacos de moedas, numerados de 1 a 10, cada um contendo 20 moedas de 10 centavos. Em um dos sacos cada moeda pesa 9g, e nos demais sacos cada moeda pesa 10g. Todas as moedas têm a mesma aparência. Usando uma balança, com um único prato de pesagem (digital), e realizando uma única pesagem, como podemos descobrir o saco das moedas mais leves*?".

Mais uma vez, foi surpreendente ver a reação de experientes professores de Matemática que, ao se depararem com um "simples problema de pesagem", bravamente, lutaram em busca de uma solução. Como crescemos quando "saímos de nossa zona de conforto" e mergulhamos em mares desconhecidos! Não tive dúvidas de que, com os problemas certos e a metodologia adequada, teríamos grandes chances de transformar a tão "temida Matemática" numa disciplina mais prazerosa e encantadora para os alunos. Nessa perspectiva, defini o tema para minha dissertação de mestrado: ***Resolução de problemas: uma proposta metodológica***.

1.2 Justificativa do tema

Não há mágica para se aprender Matemática, muito menos um padrão para ensiná-la. Cada pessoa é única e também tem sua maneira específica de aprender. Como educadores, devemos propiciar aos alunos as mais diversas metodologias possíveis na tentativa de que, experimentando cada uma delas, o aluno perceba a Matemática de forma mais interessante, agradável e encantadora.

Assim sendo, trabalhar problemas curiosos e desafiadores, nos anos iniciais de estudo, acredito ser uma estratégia fundamental para despertar, no aluno, o prazer pela Matemática e motivar, no professor, o gosto pelo estudo e pela pesquisa. Associar estes problemas a uma metodologia de resolução que promova o debate, a troca de ideias, a tomada de decisões, a análise de resultados e o trabalho em equipe, contribuirá ainda mais para uma formação matemática consistente tanto do professor quanto do aluno.

A capacidade de resolver problemas, por ser uma habilidade indispensável tanto em sala de aula como fora dela, por nos oferecer condições de identificar, analisar e agir efetivamente sobre nossas dificuldades em geral, vem sendo incluída mais frequentemente nos programas de avaliação em larga escala no Brasil, dentre os quais destacamos três, cujas avaliações têm como foco essa competência:

a) **Indicador de Alfabetismo Funcional (Inaf)**, que é uma pesquisa realizada em parceria com a ONG "Ação Educativa" e com o IBOPE, que mensura o nível de alfabetismo funcional da população brasileira entre 15 e 64 anos, avaliando suas habilidades e práticas de leitura, de escrita e de realização de cálculos aplicadas ao cotidiano.

b) **Sistema de Avaliação da Educação Básica** (**Saeb**), que é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala. Seu objetivo é realizar um diagnóstico do sistema educacional brasileiro e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino que é ofertado. As informações produzidas visam a subsidiar a formulação, reformulação e o monitoramento das políticas na área educacional nas esferas municipal, estadual e federal, contribuindo para a melhoria da qualidade, a equidade e eficiência do ensino. Trata-se de uma avaliação censitária (**Prova Brasil**), envolvendo os alunos de 5º e 9º anos do Ensino Fundamental das três esferas. As escolas que participam desta avaliação possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nos anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo.

c) **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes** (**PISA**), que é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Em cada país participante há uma coordenação nacional. No Brasil, o PISA é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Em 2015, Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas entraram nas avaliações.

Sendo os resultados dessas avaliações indicadores importantes para se mensurar a qualidade do ensino num país, entendemos como necessário trabalhar problemas que desenvolvam essa capacidade, bem como uma metodologia que a fortaleça.

Portanto, não há dúvida quanto à relevância desse tema tanto para a melhoria da qualidade do ensino da Matemática em nossas escolas, como para a melhoria dos resultados das avaliações externas nacionais e internacionais contempladas por nosso país.

1.3 Estrutura e organização do trabalho

Além da parte introdutória, o trabalho encontra-se estruturado em capítulos dispostos da seguinte forma:

No primeiro capítulo, tratamos da resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da Matemática, sua fundamentação teórica e importância metodológica.

No segundo capítulo, criamos a base de dados propriamente dita, composta por um número expressivo de problemas escolhidos**,** com uma pequena introdução teórica para cada bloco.

No terceiro capítulo, comentamos a resolução dos problemas apresentados e damos algumas sugestões para utilização dos mesmos em sala. Fazemos também algumas considerações ao professor sobre o tópico apresentado.

No quarto capítulo, apresentamos uma proposta concreta para ser aplicada junto aos professores do Ensino Fundamental II das Escolas Públicas de Tempo Integral de Fortaleza.

E, no quinto capítulo, fazemos as considerações finais sobre o trabalho, mencionando algumas reflexões sobre a formação do professor e a melhoria de sua prática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

> "Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objetivo".
>
> (George Polya)

2.1 Abordagem histórica

O surgimento da Matemática e seu desenvolvimento, basicamente, deram-se a partir dos problemas enfrentados pelo homem em seu cotidiano. O fato de nos depararmos com situações em que era necessário contar, agrupar, medir, posicionar astros... nos levou a criar e desenvolver o que é hoje, segundo Gauss, a "rainha das ciências". Portanto, a essência da Matemática é a resolução de problemas, o que nos permite afirmar que, para seu ensino, não basta apenas conhecê-la, é necessário instigar, provocar, desenvolver a criatividade dos alunos, fazê-los participar das resoluções, enfim, desafiá-los. A resolução de problemas apresenta-se como um método eficiente para propiciar esse desafio, aprimorar o raciocínio e encorajar os alunos para o estudo da Matemática.

A resolução de problemas ganhou força no início da década de 80, em reação a uma série de propostas apresentadas, anteriormente, para o ensino da Matemática. No início do século XX, tínhamos a ênfase no ensino por repetição, em que o recurso à memorização tinha um enorme destaque. Avaliava-se o aluno através de testes em que se determinava que ele sabia, caso conseguisse repetir, de forma satisfatória, o que o professor apresentava. Em pouco tempo, porém, a maioria dos alunos esquecia o que memorizara. Após essa fase, já com outra motivação, os alunos deveriam aprender Matemática com compreensão. Censuravam-se, agora, a tabuada e seus treinos. Embora com alguns avanços, essa nova proposta ainda não favorecia ao aluno a participação efetiva na construção do próprio conhecimento.

No Brasil, nas décadas de 1960 e 1970, tivemos a influência da Matemática Moderna, que resultou na renúncia da Geometria e dos cálculos numéricos em detrimento de exageros na utilização da Teoria dos Conjuntos. Preocupava-se, excessivamente, com abstrações matemáticas, mesmo apresentando uma linguagem matemática universal, precisa e concisa. Salientava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Nesse contexto, ficou ainda mais difícil o aluno perceber a ligação entre a Matemática ensinada e aquela utilizada fora da escola. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas.

Finalmente, voltando ao início da década de 80, a resolução de problemas começou a tomar espaço quando, nos Estados Unidos, em 1980, foi editada uma publicação da NCTM – *National Council Teachers of Mathematics – An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's* (Conselho Nacional de Professores de Matemática - Uma Agenda para a Ação: Recomendações para a Matemática Escolar de 1980), cujo anseio principal era reunir um grande grupo de interessados na melhoria do ensino da Matemática. E a primeira dessas recomendações dizia: "resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80" (NCTM, 1980) e realçava que

> o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática. (NCTM, 1980)

Iniciaram-se, aqui, de forma mais concreta, os esforços para melhoria do ensino da matemática, utilizando-se a resolução de problemas. Currículos foram desenvolvidos, materiais para professores e para alunos foram organizados, estratégias de trabalho foram sugeridas, orientações para avaliações foram propostas. Contudo, devido às diferentes concepções que as pessoas tinham a respeito da *resolução de problemas ser o* *foco da matemática escolar*, tal proposta não obteve o resultado esperado, sofrendo várias críticas de pesquisadores no final da década de 80. Começara-se, então, a se pensar a resolução de problemas numa perspectiva didático-pedagógica, como uma metodologia de ensino. Essa ideia passou a ser o lema das pesquisas e dos estudos para a década de 90.

2.2 Resolução de problemas: uma metodologia de ensino

> "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas, se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, para toda a vida, a sua marca na mente e no caráter".
>
> (George Polya)

A resolução de problemas, estruturada como metodologia de ensino, concebe o problema como um componente estratégico no processo de construção do conhecimento. Eles são formulados com o intuito de auxiliar na elaboração de conceitos, anteriormente à exibição formal destes. Os problemas são relevantes não apenas para se aprender Matemática, mas, também, para tê-los como pontapé inicial a esse aprendizado.

Sistematizar, portanto, uma orientação pedagógica para a Matemática, que seja fundamentada na resolução de problemas, deve ser estimulada nas escolas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Ao solucionarem problemas, os estudantes desenvolvem a capacidade de gerenciar informações, mobilizar conhecimentos, ampliar seu entendimento acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, além de propiciar a iniciativa, a criatividade, a autonomia, bem como a habilidade de elaborar um raciocínio lógico.

Observemos algumas recomendações a respeito da prática da resolução de problemas em sala de aula. São indicações para a escolha dos problemas, os questionamentos em sala, a forma de abordá-los, enfim, são caminhos que podemos seguir para aplicar**,** de maneira apropriada**,** essa metodologia:

a) Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL, 1997), que sinalizam alguns caminhos para o "fazer Matemática" em sala de aula e, no que diz respeito ao recurso à resolução de problemas, sugerem algumas orientações:

- O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los;
- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
- O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Lembramos que os PCN's não devem ser adotados como um "pacote pedagógico", mas como orientações curriculares feitas e refeitas na prática escolar.

b) George Pólya, matemático húngaro, em seu livro *A Arte de Resolver Problemas* (1995), propõe quatro etapas independentes para se resolver um problema. Estas etapas são um conjunto de indagações extremamente úteis àqueles que desejam resolver o problema por si próprio:

1) *Compreender o problema* – Nessa etapa, o aluno é motivado a questionar, arguir sobre o problema. O que é solicitado? Qual a incógnita? Quais os dados apresentados no problema? Quais as condições? É possível satisfazer tais condições? As condições são suficientes para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Que fórmulas e/ou algoritmos podem ser utilizados? Faz-se necessário um desenho, um esquema para entender melhor a situação problema?

2) *Estabelecer um plano* – Nessa etapa, o aluno é motivado a estabelecer conexões entre o que foi dado e o que é pedido, é o momento de buscar problemas semelhantes para definir um caminho a seguir. Já viu o problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado com este? Havendo um problema correlato e já antes resolvido, é possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu método? É possível reformular o problema? É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? É possível obter dos dados algo útil? Utilizou todos os dados?;

3) *Executar o plano* – Nessa etapa, o aluno deve seguir o caminho escolhido para resolução do problema. Executar passo a passo o que foi estabelecido no plano. É possível verificar, claramente, se cada passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

4) *Refletir sobre o trabalho realizado* – Nessa etapa, o aluno é motivado a verificar o resultado obtido. Verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou buscar outra maneira de resolver o problema de forma mais simples. É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por caminhos diferentes? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Ressaltamos uma característica importante nessas indagações apresentadas: são de aplicações gerais e podem ser utilizadas com sucesso ao tratarmos de qualquer tipo de problema.

c) Dante (1991) sugere trabalhar com todos os alunos de uma turma com problemas desafiadores e interessantes. Propõe um tempo razoável para compreensão do problema e faz algumas recomendações: a) Facilite a discussão entre os alunos ou faça perguntas para esclarecer os dados, as condições do problema e o que nele se pede; b) Procure certificar-se de que o problema está completamente entendido por todos; c) Lembre-se de que uma das maiores dificuldades do aluno, ao resolver um problema, é ler e compreender o texto; d) Dê um bom tempo para os alunos trabalharem no problema porque a resolução não se pode transformar numa competição de velocidade, e eles precisam muito mais de tempo para pensar e trabalhar no problema do que de instruções específicas para resolvê-lo; e) Procure criar, entre os alunos, um clima de busca, exploração e descobertas, deixando claro que mais importante do que obter a resposta correta é pensar e trabalhar no problema durante o tempo que for necessário para resolvê-lo. Inventar problemas é uma forma de adquirir conhecimentos e capacidades. Esses problemas podem ser simples, mas têm que ser interessantes para os alunos.

2.3 Conceituação, manipulação e aplicação

Elon Lages Lima (1999), em um texto para a *Revista do Professor de Matemática*, aborda alguns aspectos do ensino da Matemática com relação a sua estrutura, levando em conta a natureza peculiar dessa disciplina, os alunos aos quais ela se destina e os motivos de sua inclusão no currículo. Esclarece que, para o aluno familiarizar-se com o método matemático, adquirir habilidades para lidar, de forma eficiente, com os mecanismos do cálculo e saber utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais: a *conceituação*, a *manipulação* e as *aplicações*. Afirma que da dosagem adequada desses componentes dependem o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar, além das técnicas aprendidas nas aulas, o discernimento, a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento desses três componentes fundamentais.

Salientamos que a **conceituação** compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos, sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações.

Um exemplo de desequilíbrio desses componentes foi no período da Matemática Moderna (décadas de 60 e 70), em que a conceituação predominou com relação à manipulação e à aplicação. Assim, a Matemática estudada nas escolas se resumia a um vago e inútil exercício de generalidades, incapaz de suprir as necessidades das demais disciplinas científicas e mesmo do uso prático no dia a dia.

Observamos que a **manipulação** está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e as escalas musicais estão para a música. A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e de energia com detalhes secundários.

O desequilíbrio na manipulação ocorre com frequência nos livros adotados em nossas escolas. E, por consequência, é estendido à sala de aula através das listas de exercícios repletas de questões que, embora necessárias, não são motivadoras, não provêm de problemas reais, não estão relacionadas com a vida atual, nem com as demais ciências e nem mesmo com outras áreas da Matemática. A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral, é como se a Matemática se resumisse a ela. Com isso, a Geometria também sofre significativas perdas, pois várias afirmações são declaradas verdadeiras, sem justificativa, reduzindo muitas vezes os problemas geométricos a manipulações numéricas. Perde-se assim um dos maiores méritos da Matemática, que é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses e que o processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão se chama demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo.

Destacamos ainda que as **aplicações** são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do cotidiano a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, tecnológicas ou mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e, certamente, cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, esta arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender.

As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente da Matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. Encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor. Elas devem fazer parte das aulas, ocorrer em muitos exercícios e ser objeto de trabalhos em grupo. Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada.

3 BASE DE DADOS

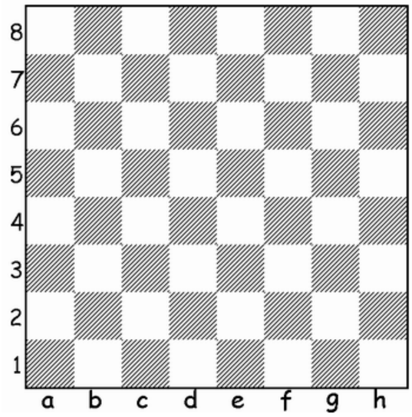
Muitos problemas atraentes de matemática elementar, expressos numa linguagem coloquial, têm parte de seu fascínio no fato de poderem ser formulados e, muitas vezes, resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. É com esta concepção que iniciamos nossa base de dados, construída por significativos problemas, cuja finalidade é proporcionar ao aluno um maior interesse pela Matemática, e ao professor, uma oportunidade de melhoria de sua formação, bem como uma ferramenta sugestiva de ensino-aprendizagem.

3.1 Problemas envolvendo paridade

O conceito de paridade é um tema simples que pode ser apresentado em todos os anos do Ensino Básico. Um número par tem paridade par e um número ímpar tem paridade ímpar. Sua beleza está na resolução de muitos problemas em que, a priori, não imaginaríamos usar tal conceito.

Problema 1

É possível um cavalo começar na posição a1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em h8 visitando cada um dos quadrados restantes, exatamente uma vez, ao longo do caminho?



Problema 2

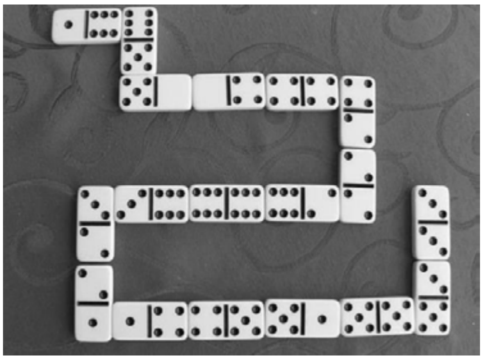
Três discos de borracha, A, B e C, utilizados no hóquei sobre o gelo, estão no campo. Um jogador bate em um deles de tal forma que ele passa entre dois outros discos. Ele faz isto 25 vezes. É possível que este jogador retorne os três discos às suas posições iniciais?

Problema 3

Kátia e seus amigos estão em um círculo. Os dois vizinhos de cada uma das crianças são do mesmo sexo. Se o círculo contém cinco meninos, quantas meninas estão neste círculo?

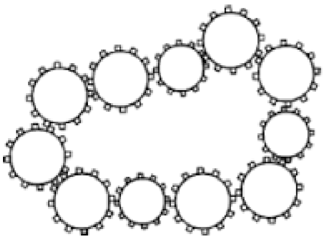
Problema 4

Todos os dominós em um conjunto estão colocados em uma cadeia (de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes é igual). Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual o número de bolinhas na outra extremidade?



Problema 5

Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia, como na figura abaixo. Todas as engrenagens podem girar simultaneamente?



Problema 6

Supondo que nossa moeda (o Real) possua somente notas de R$1,00, R$ 3,00, R$ 5,00 e R$ 25,00, é possível trocar uma nota de R$25,00 em dez notas com valores de 1, 3 ou 5 reais?

Problema 7

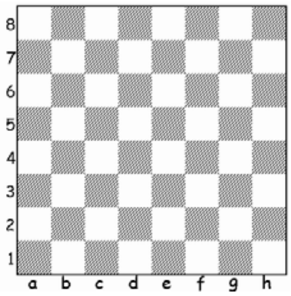
Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vítor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Essa soma poderia ser igual a 1990?

Problema 8

É possível formar um “quadrado mágico” com os 36 primeiros números primos? (Aqui um “quadrado mágico” é uma tabela 6 x 6 contendo um número em cada célula de modo que as somas dos números, ao longo de qualquer linha, coluna ou diagonal, são iguais).

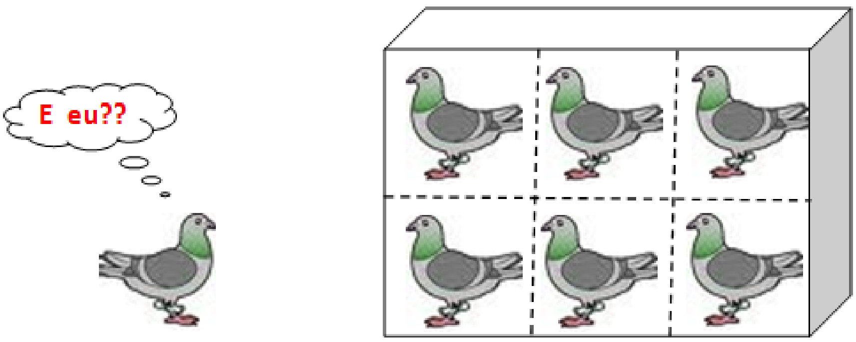
Problema 9

Um tabuleiro de xadrez usual 8 x 8 pode ser coberto por dominós 1 x 2 de modo que só permaneçam livres os quadrados a1 e h8?

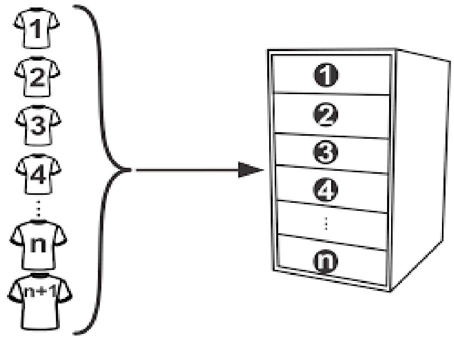


3.2 Problemas envolvendo o “princípio das casas de pombos” ou “princípio das gavetas”

Se tivermos que colocar sete pombos em seis casas, então alguma das casas terá que conter dois pombos ou mais. Colocando apenas um pombo por casa, observe o que acontecerá com o sétimo pombo.



Generalizando, temos: se colocarmos n + 1 objetos em n gavetas, então haverá pelo menos uma gaveta com dois ou mais objetos.



O “princípio das casas de pombos” foi utilizado, pela primeira vez, pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), em 1834, e por isso é também conhecido como **“**Princípio das Gavetas de Dirichlet”**.**

Problema 10

Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas, entre elas, fazem aniversário no mesmo mês?

Problema 11

Um saco contém contas de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de contas que precisam ser retiradas do saco, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das contas retiradas sejam da mesma cor?

Problema 12

Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?

Problema 13

Mostre que, em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.

Problema 14

Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Problema 15

A cidade de Leningrado tem cinco milhões de habitantes. Sabendo que nenhuma pessoa tem mais de um milhão de cabelos em sua cabeça, mostre que pelo menos dois dos habitantes têm que ter o mesmo número de cabelos em sua cabeça.

Problema 16

Em cada célula, em uma tabela 3 x 3, está preenchida com um dos números -1, 0, 1. Mostre que, entre as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais, duas delas têm que ser iguais.

Problema 17

Cem pessoas estão sentadas em volta de uma mesa redonda e mais da metade delas são homens. Mostre que dois dos homens estão sentados diametralmente opostos um ao outro.

Problema 18

Escolhem-se cinco pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

3.3 Números primos e compostos

Os números naturais podem ser primos ou compostos. Um número é dito composto se for igual ao produto de dois números naturais menores. Por exemplo, $6 = 2 \cdot 3$. Caso contrário, e se o número não for igual a 1, ele é dito primo. O número 1 não é primo nem composto.

Números primos são como tijolos com os quais você pode construir todos os números naturais. Vamos considerar o 300. É claro que ele é composto. Ele pode ser representado, por exemplo, como $30 \cdot 10$. Mas os números 30 e 10 também são compostos. De fato, $30 = 6 \cdot 5$ e $10 = 2 \cdot 5$. Como $6 = 2 \cdot 3$, temos $300 = 30 \cdot 10 = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Esta é a “decomposição” completa de nosso número (sua representação como produto de números primos).

Mas se tentarmos fatorar o número 300 de outra maneira? Por exemplo, poderíamos começar com $300 = 20 \cdot 15$. Você pode ficar surpreso com o fato de que sempre terminamos com a mesma representação (Produtos que só diferem na ordem de seus fatores são considerados idênticos – em geral, arrumamos os fatores em ordem crescente.). Isso pode parecer evidente, porém não é fácil de demonstrar. Ele é o Teorema Fundamental da Aritmética: Qualquer número natural diferente de 1 pode ser representado de maneira única como um produto de números primos em ordem crescente.

Problema 19

O número $2^9 . 3$ é divisível por 2?

Problema 20

O número $2^9 . 3$ é divisível por 5?

Problema 21

O número $2^9 . 3$ é divisível por 8?

Problema 22

O número $2^9 . 3$ é divisível por 9?

Problema 23

O número $2^9 . 3$ é divisível por 6?

Problema 24

É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 3, ele deve ser divisível por $4 . 3 = 12$?

Problema 25

É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 6, ele deve ser divisível por $4 . 6 = 24$?

Problema 26

O número A não é divisível por 3. É possível que o número 2A seja divisível por 3?

Problema 27

O número A é par. É verdade que 3A deve ser divisível por 6?

Problema 28

O número 5A é divisível por 3. É verdade que A deve ser divisível por 3?

3.4 Restos

Imagine que você está em um lugar onde existem moedas de diversos valores em circulação e quer comprar um pirulito que custa 5 centavos em uma máquina. Você tem uma moeda de 20 centavos em seu bolso, mas não possui moedas de 5 centavos, que é do que precisa para comprar o pirulito. Felizmente, você vê uma máquina de troco que fornece moedas de 5 centavos. É claro que, colocando o dinheiro na máquina**,** você obtém 4 moedas de 5 centavos em troca da moeda de 20 centavos. Mas se tivesse uma moeda de 23 centavos? Então, obteria 4 moedas de 5 centavos e 3 centavos de troco. Temos $23 = 4 \cdot 5 + 3$. Esta é a representação da operação de divisão de 23 por 5 com resto.

Como funciona a máquina de troco? Ela fornece moedas de 5 centavos até que o resto seja menor que 5. Depois fornece moedas para este resto, que pode ser igual a 0, 1, 2, 3 ou 4. O resto será zero se, e somente, o número original (o valor da moeda colocada na máquina) for divisível por 5. Dividir um número natural **a** pelo número natural **b** com um resto significa representar **a** como $\mathbf{a = k \cdot b + r}$, em que $0 \leq r < b$. Chamamos **r** de resto da divisão de **a** por **b**.

Suponha, agora, que uma pessoa coloque 22 moedas de 3 centavos e 21 moedas de 7 centavos na máquina de troco. Qual vai ser o troco após a pessoa receber as moedas de 5 centavos?

Temos apenas que encontrar o resto da divisão de $N = 22 \cdot 3 + 21 \cdot 7$ por 5. O interessante é que não precisamos fazer a soma dos produtos para respondermos a esta pergunta.

Vamos substituir cada um dos números da expressão pelos restos na divisão por 5. Então $N' = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$, que é igual a 8. Oito tem **resto três** ao ser dividido por 5. Afirmamos que o resto da expressão original, isto é, do número N, também é igual a 1. A razão é que o lema a seguir é sempre verdadeiro:

Lema sobre os restos – O resto da divisão por 5 da soma (ou do produto) de dois números naturais quaisquer é igual ao resto da divisão por 5 da soma (ou do produto) de seus respectivos restos. Lembramos que o lema sobre restos do número 5 pode ser substituído por qualquer outro número natural.

Problema 29

Encontre o resto da divisão de $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ por 7.

Problema 30

Encontre o resto da divisão de 9^{100} por 8.

Problema 31

Mostre que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, qualquer que seja o número natural n.

Problema 32

Mostre que $p^2 - 1$ é divisível por 24 se p for um número primo maior que 3.

Problema 33

Encontre o resto da divisão de 2^{100} por 3.

Problema 34

Encontre o último algarismo do número $1^2 + 2^2 + ... + 99^2$.

3.5 Operações básicas

O domínio das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão são essenciais para o desempenho matemático de um aluno. Ajudá-lo a apropriar-se dos algoritmos dessas operações deve ser uma meta a ser alcançada pelo professor. Além disso, submeter o aluno a situações-problemas em que tenha que decidir qual operação ou quais operações deverá utilizar terá um papel importantíssimo na apropriação ou assimilação do tema.

3.5.1 Adição / subtração

Problema 35

Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Problema 36

Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um algarismo atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o algarismo atrás do cartão com a letra M?

Problema 37

Cinco dados foram lançados e a soma dos pontos obtidos nas faces de cima foi 19. Em cada um desses dados, a soma dos pontos da face de cima com os pontos da face debaixo é sempre 7. Qual foi a soma dos pontos obtidos nas faces debaixo?

Problema 38

Gustavo possui certa quantidade de moedas de 1, 10, 25 e 50 centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente 1 real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?

Problema 39

Na conta indicada a seguir, as letras X, Y e Z representam algarismos distintos. Qual é o algarismo representado pela letra Z?

$$\begin{array}{r} XXXX \\ YYYY \\ +\ ZZZZ \\ \hline YXXXZ \end{array}$$

Problema 40

Ana listou todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é par e os outros dois são ímpares e diferentes entre si. Beto faz outra lista com todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é impar e os outros dois são pares e diferentes entre si. Qual é a maior diferença possível entre um número da lista de Ana e um número da lista de Beto?

Problema 41

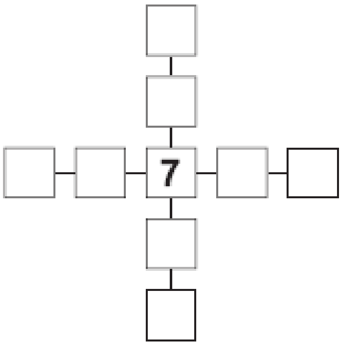
Um feirante possui uma balança de pratos e 3 pesos: um de 1Kg, um de 3Kg e outro de 9Kg. Quantas “pesagens” diferentes ele pode realizar?

Problema 42

Milena começou a estudar quando seu relógio digital marcava 20 horas e 14 minutos e só parou quando o relógio voltou a mostrar os mesmos algarismos pela última vez antes da meia noite. Quanto tempo ela estudou?

Problema 43

Na figura, o número 7 ocupa a casa central. É possível colocar os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, um em cada uma das casas restantes, de modo que a soma dos números**,** na horizontal**,** seja igual à soma dos números na vertical. Qual é essa soma?

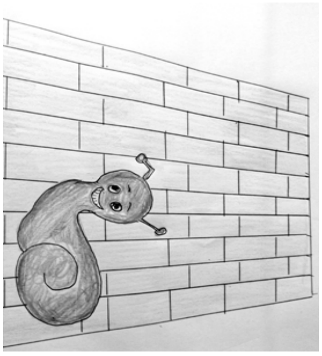


Problema 44

Como é possível retirar de um rio exatamente 6 litros de água, dispondo apenas, para medir a água, de dois recipientes: um com 4 litros e outro com 9 litros de capacidade?

Problema 45

Uma lesma deseja subir um muro de 12 metros. Durante o dia, ela sobe 3 metros e, à noite, dorme e escorrega 2 metros. Quantos dias levará a lesma para subir este muro?



Problema 46

Quatro participantes de uma gincana precisam cruzar uma ponte à noite. Na verdade, é uma pinguela que suporta, no máximo, duas pessoas. O grupo tem apenas uma lanterna e é necessário usá-la na travessia. O desfiladeiro é largo demais para que alguém se arrisque a atirá-la para o outro lado. Não são permitidas travessias pela metade. Cada membro do grupo atravessa a ponte em uma velocidade. Os tempos da travessia são:

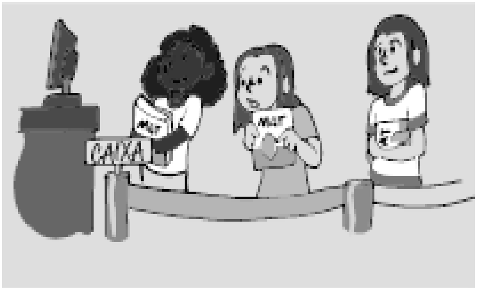
Participante A: 1 minuto;
Participante B: 2 minutos;
Participante C: 5 minutos;
Participante D: 10 minutos.

Se duas pessoas atravessam juntas, vale a velocidade do indivíduo mais lento. Encontre o menor tempo em que o grupo todo pode atravessar a ponte.

3.5.2 Multiplicação / divisão

Problema 47

As colegas de sala, Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R$ 43,00 e Aurora com R$ 68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora?



Problema 48

A prefeitura de certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de um litro vazias por uma garrafa de um litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?

Problema 49

Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 84 animais. Se ao todo há 246 pés, quantos coelhos há nesse quintal?

Problema 50

Isabel tem oito saquinhos com 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13 e 16 balas, respectivamente. Ela distribuiu os saquinhos para três crianças, de tal modo que cada uma delas recebeu a mesma quantidade de balas. Uma das crianças recebeu o saquinho com 4 balas. Dentre os saquinhos que essa criança recebeu, qual continha mais balas?

Problema 51

Um time ganha 3 pontos por vitória, 1 ponto por empate e nenhum ponto em caso de derrota. Até hoje cada time já disputou 20 jogos. Se um desses times venceu 8 jogos e perdeu outros 8 jogos, quantos pontos ele terá agora?

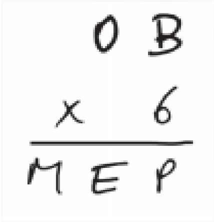
Problema 52

Cada quadrinho, na figura, deve ser preenchido com um sinal de adição (+) ou de multiplicação (x). Qual é o maior valor possível da expressão obtida depois de preenchidos todos os quadrinhos?

$$2 \ \square \ 3 \ \square \ 0 \ \square \ 8 \ \square \ 9 \ \square \ 1$$

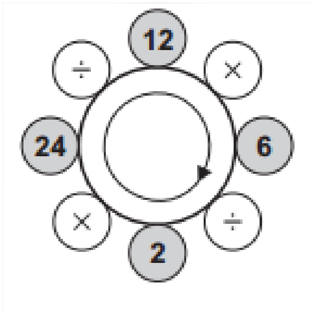
Problema 53

Os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 foram usados na multiplicação indicada ao lado, em que cada letra da sigla OBMEP representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra O?



Problema 54

Partindo do número 2, na figura, e fazendo as quatro contas no sentido da flecha, o resultado é 12, porque $2 \times 24 = 48$, $48 \div 12 = 4$, $4 \times 6 = 24$ e $24 \div 2 = 12$. Se fizermos a mesma coisa partindo do maior número que aparece na figura, qual será o resultado?



3.6 Potenciação / desigualdades

O ato de comparar acompanha-nos desde criança. Quem é mais forte: o papai ou o titio? Quem corre mais rápido: um leão ou um leopardo? São perguntas inocentes que trazem, sutilmente, a ideia de aferir o que nos rodeia. Estimar também é outra habilidade que nos cerca. Apresentaremos, neste tópico, problemas associados ao conceito de potenciação e faremos o uso deste para provar desigualdades, comparando e aproximando resultados.

Problema 55

Qual a soma dos algarismos do número que se obtém ao calcular $2^{100} \times 5^{103}$?

Problema 56

Qual número é maior: 31^{11} ou 17^{14}?

Problema 57

Mostre que $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Problema 58

Qual número é maior: 2^{300} ou 3^{200}?

Problema 59

Qual número é maior: $1234567 \cdot 1234569$ ou 1234568^2 ?

Problema 60

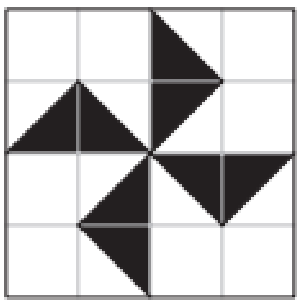
Qual número é maior: 100^{100} ou $50^{50} \cdot 150^{50}$?

3.7 Frações

Desde cedo, as frações estão presentes em nosso cotidiano. Metade, metade da metade, terça parte são expressões usadas, normalmente, muito antes do estudo formal daquelas. Propomos questões que facilitem o entendimento e despertem a curiosidade do aluno para o tema. É, também, uma oportunidade de utilizar conceitos aritméticos associados a conceitos geométricos.

Problema 61

A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadrinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

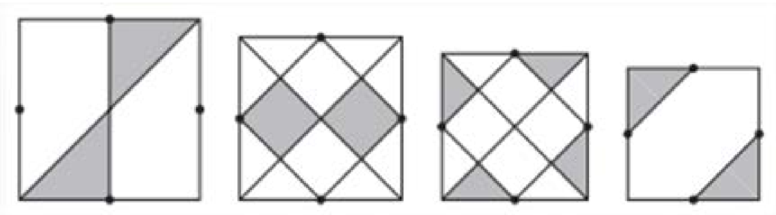


Problema 62

Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

Problema 63

Os pontos destacados, nos quadrados abaixo, são pontos médios dos lados. Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?



Problema 64

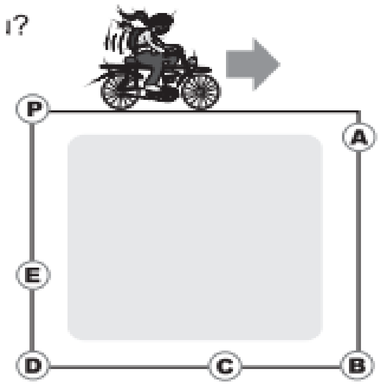
Pedrinho colocou um copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

Problema 65

A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?

Problema 66

Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice P, no sentido indicado pela flecha, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Qual ponto indica o lugar em que Sueli caiu?



Problema 67

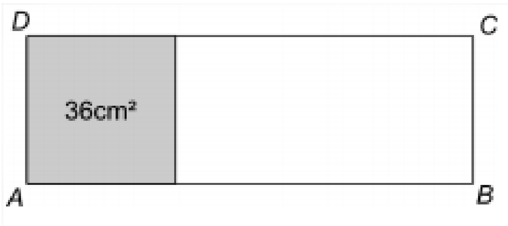
Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos, $\frac{2}{5}$ são homens e, entre os mineiros, $\frac{3}{7}$ são mulheres. Entre todos os estudantes, quantas são as mulheres?

Problema 68

Qual o sinal (+ , - , x , $\div$) que Clotilde deve colocar no lugar do “?” para que a igualdade fique correta?

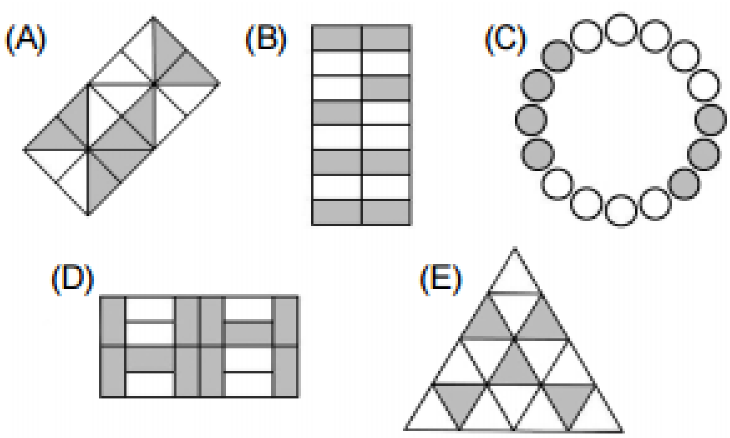
Problema 69

A região cinza, na figura, é um quadrado de área 36 cm² que corresponde a $\frac{3}{8}$ da área do retângulo ABCD. Qual é o perímetro desse retângulo?



Problema 70

Cada uma das figuras está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?

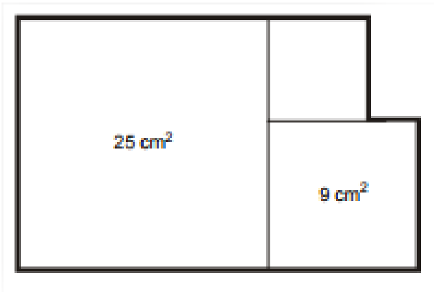


3.8 Perímetro e área

Medir uma grandeza significa compará-la com outra de mesma espécie tomada como unidade. Neste tópico, mediremos o perímetro e a área de figuras. Para encontrar o perímetro de uma figura F, devemos comparar seu contorno com um determinado segmento tomado como unidade. Quanto à área, devemos comparar a superfície da figura F com a de outra figura tomada como unidade. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes o contorno de F contém a unidade de comprimento, no caso do perímetro, e quantas vezes a superfície de F contém a unidade de área.

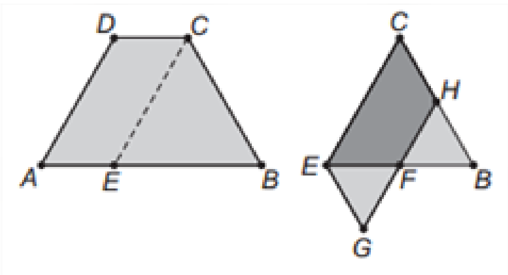
Problema 71

A figura é formada por três quadrados, um deles com área de 25 cm² e o outro com 9 cm². Qual é o perímetro da figura?



Problema 72

O trapézio ABCD foi dobrado ao longo do segmento CE, paralelo ao lado AD, como na figura. Os triângulos EFG e BFH são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?

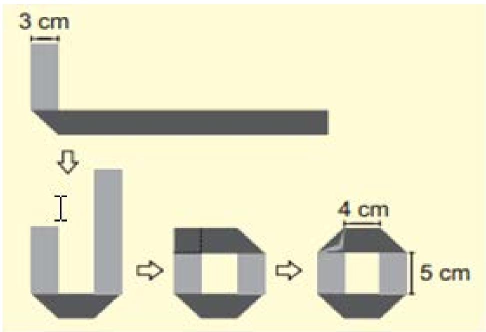


Problema 73

Uma piscina quadrada tem a borda formada por pedras quadradas brancas e pretas alternadas, como na figura. Em um dos lados da piscina há 40 pedras pretas e 39 pedras brancas. Quantas pedras pretas foram usadas na borda?

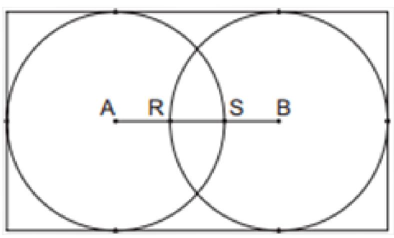
Problema 74

Júlia dobrou várias vezes uma tira retangular de papel com 3 cm de largura, como na figura. Todas as dobras formam um ângulo de 45º com os lados da tira. Qual é o comprimento dessa tira?



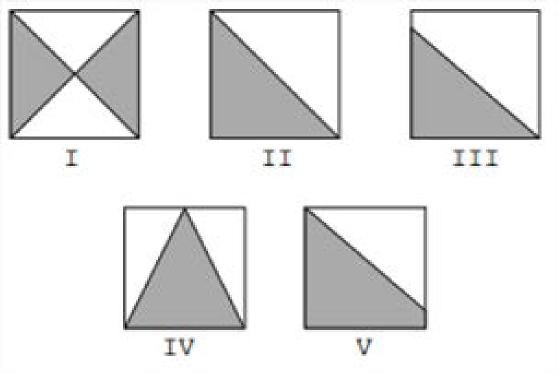
Problema 75

Na figura, as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?



Problema 76

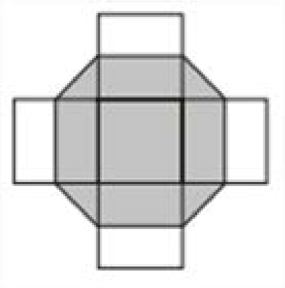
Os quadrados abaixo têm todos o mesmo tamanho.



Em qual deles a região sombreada tem a **maior** área?

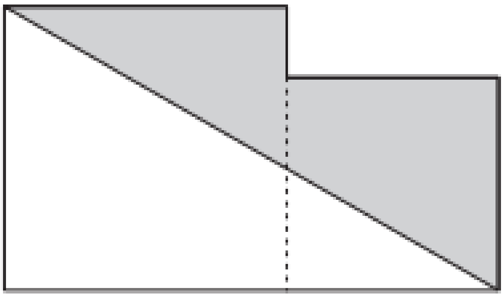
Problema 77

Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm², qual a área do polígono sombreado?



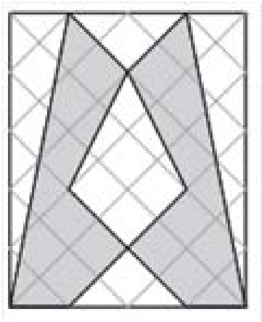
Problema 78

A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?



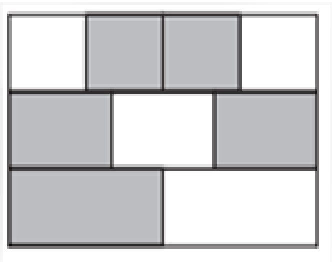
Problema 79

O retângulo abaixo, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?



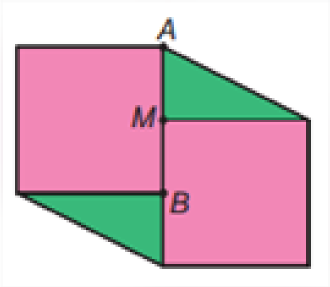
Problema 80

A figura representa um retângulo de área 36m², dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



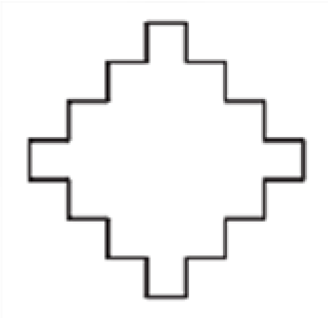
Problema 81

A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se M é o ponto médio de AB, qual é a área total da figura?



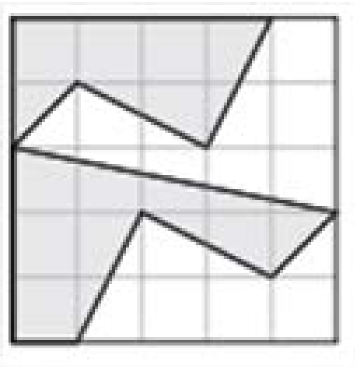
Problema 82

A figura representa um polígono em que todos os lados são horizontais ou verticais e têm o mesmo comprimento. O perímetro desse polígono é 56 cm. Qual é sua área?



Problema 83

Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

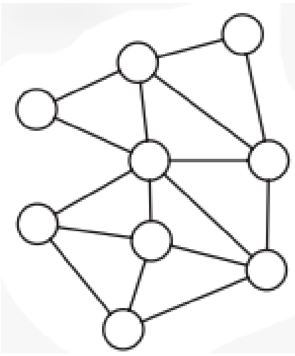


3.9 Contagem

Contar nem sempre é algo tão simples. Em alguns problemas aqui apresentados, teremos a oportunidade de utilizar o princípio fundamental da contagem para quantificar certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. Em outros problemas, elencamos os elementos desses subconjuntos como forma de estimular o aluno a pensar em uma maneira organizada de contar, garantindo a presença de todos os elementos.

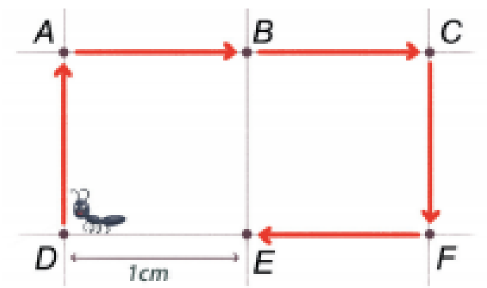
Problema 84

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarela, azul e vermelha, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



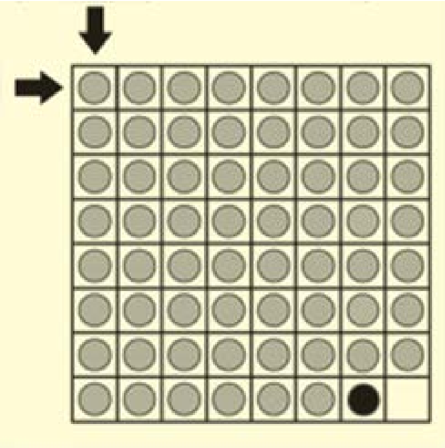
Problema 85

No quadriculado abaixo, foram marcados seis pontos: A, B, C, D, E e F. Uma formiguinha parte de um desses pontos e, andando apenas 5 cm, consegue visitar todos os outros pontos. Um exemplo é mostrado na figura. De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode escolher um ponto de partida e depois visitar todos os outros pontos andando apenas 5 cm?



Problema 86

Joãozinho tem um tabuleiro como o da figura, no qual há uma casa vazia, uma casa com uma peça preta e as demais casas com peças cinzentas. Em cada movimento, somente as peças que estão acima, abaixo, à direita ou à esquerda da casa vazia podem movimentar-se, com uma delas ocupando a casa vazia. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para Joãozinho levar a peça preta até a casa do canto superior esquerdo, indicada pelas setas?



Problema 87

Em uma olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Problema 88

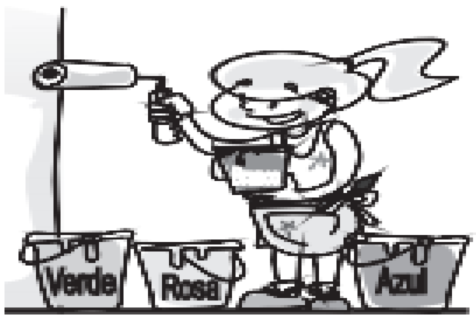
Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

Problema 89

O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles zero. Quantos números possuem exatamente essas características?

Problema 90

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branca, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?



Problema 91

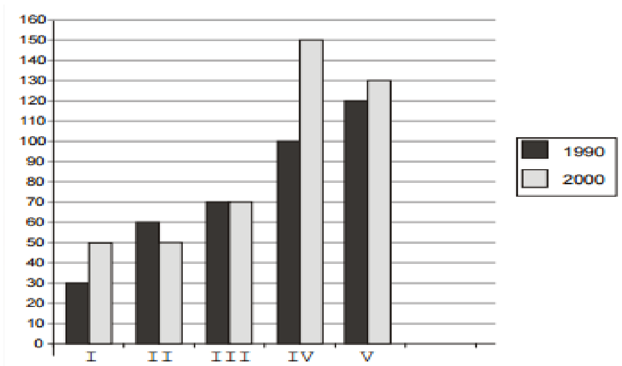
Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

3.10 Tratamento da informação

Atualmente, tratamos com uma imensa quantidade de informações que nos são expostas diariamente, através de jornais, revistas, livros, internet e outros meios. Sejam as informações apresentadas em forma de gráficos ou tabelas, é de fundamental importância preparar nossos alunos para interpretá-las. Eles também devem ser capazes de coletá-las e organizá-las. Os problemas aqui apresentados estimulam, de forma criativa, o desenvolvimento dessas habilidades.

Problema 92

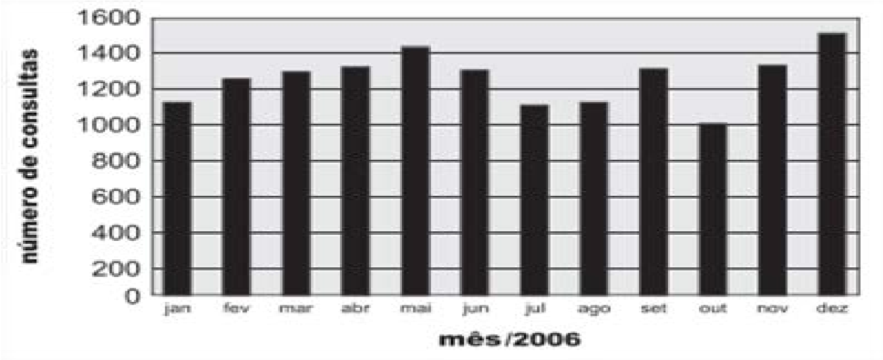
No gráfico, estão representadas as populações das cidades I, II, III, IV e V em 1990 e 2000, em milhares de habitantes. Por exemplo, em 1990, a população da cidade II era de 60.000 habitantes e, em 2000, a cidade IV tinha 150.000 habitantes.



Qual cidade teve o maior aumento percentual de população de 1990 a 2000?

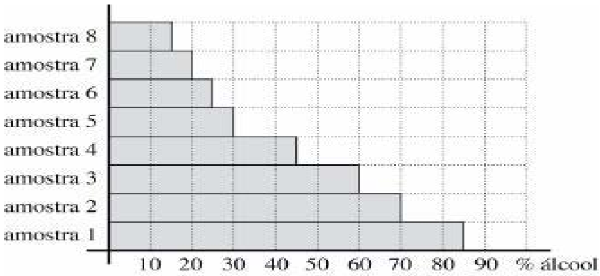
Problema 93

O número de consultas mensais realizadas, em 2006, por um posto de saúde está representado no gráfico abaixo. Em quantos meses foram realizadas mais de 1200 consultas?



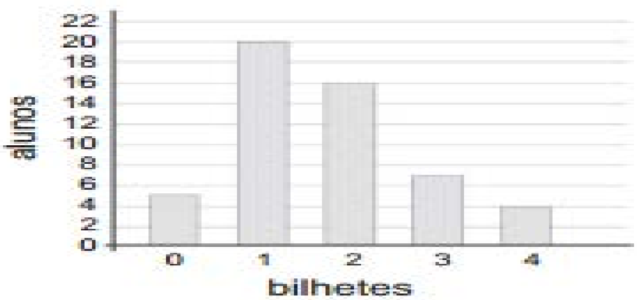
Problema 94

Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra, foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quantas dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?



Problema 95

A turma do Carlos organizou uma rifa. O gráfico mostra quantos alunos compraram um mesmo número de bilhetes; por exemplo, sete alunos compraram três bilhetes cada um. Quantos bilhetes foram comprados?



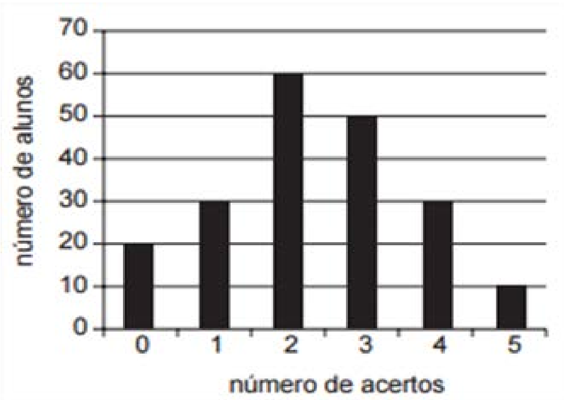
Problema 96

A tabela apresenta as cinco seleções de futebol feminino mais bem classificadas no ano de 2010, segundo a FIFA. Cada X na tabela significa que a seleção na linha correspondente está mais bem classificada do que a seleção na coluna correspondente; por exemplo, a Alemanha está mais bem classificada do que o Brasil. Qual é a seleção que ocupa a quarta posição?

FIFA 2010 Futebol feminino	Alemanha	Brasil	EUA	Japão	Suécia
Alemanha		X		X	X
Brasil				X	X
EUA	X	X		X	X
Japão					
Suécia				X	

Problema 97

Os alunos do sexto ano da Escola Municipal de Quixajuba fizeram uma prova com 5 questões. O gráfico mostra quantos alunos acertaram o mesmo número de questões; por exemplo, 30 alunos acertaram exatamente 4 questões. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



a) Apenas 10% do total de alunos acertaram todas as questões.

b) A maioria dos alunos acertou mais de 2 questões.

c) Menos de 200 alunos fizeram a prova.

d) 40 alunos acertaram pelo menos 4 questões.

e) Exatamente 20% do total de alunos não resolveram nenhuma questão.

Problema 98

Um torneio de futebol foi disputado por seis seleções. Cada uma delas disputou exatamente um jogo com cada uma das outras cinco. A tabela seguinte indica a classificação final do torneio, no qual foram atribuídos 3 pontos por vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto por derrota.

time	vitórias	pontos
Alemanha	3	10
Bolívia	2	8
Camarões	2	7
Dinamarca	1	6
Espanha	1	4
França	0	4

Se a Alemanha ganhou da França, com qual seleção a Alemanha empatou?

Problema 99

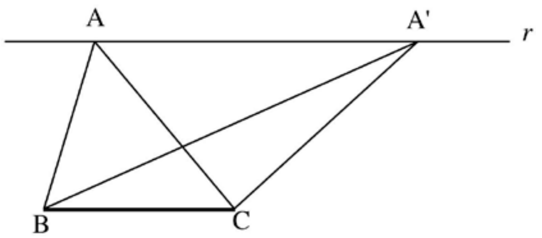
Quatro times disputaram um torneio de futebol em que cada um jogou uma vez contra cada um dos outros. Se uma partida terminasse empatada, cada time ganhava um ponto; caso contrário, o vencedor ganhava três pontos e o perdedor, zero. A tabela mostra a pontuação final do torneio. Quantos foram os empates?

Time	Pontos
Cruzínthians	5
Flameiras	3
Nauritiba	3
Greminense	2

3.11 Área de triângulo

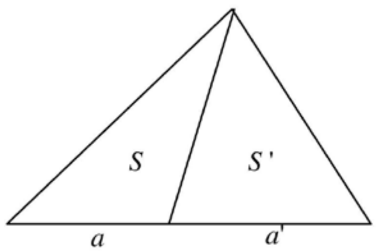
Daremos, neste tópico, atenção especial à área de triângulos. Algumas propriedades inerentes a eles nos permitem propor questões muito criativas com a utilização de pouquíssimos cálculos. Concedem-nos ainda a oportunidade de estimular a procura de soluções geométricas para a medição da área de triângulos.

P_1: A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



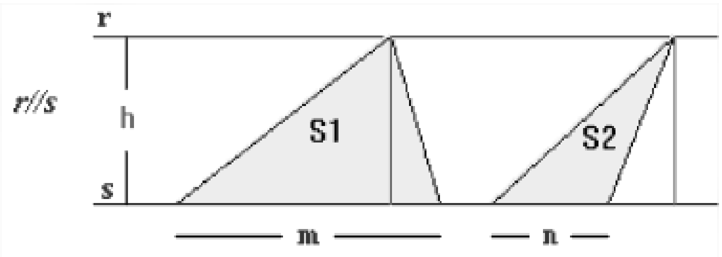
r // BC; S ΔABC = S ΔA'BC. (S – área)

P_2: Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.

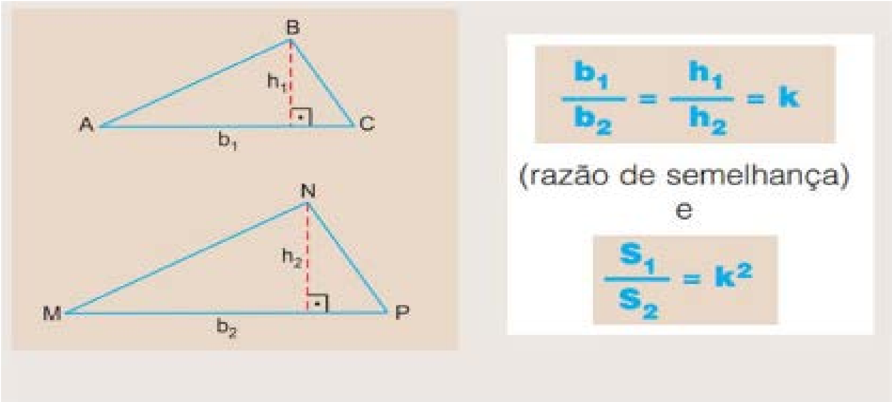


S = S'

P_3: Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$.

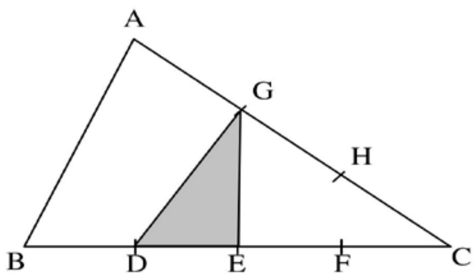


P_4: A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.



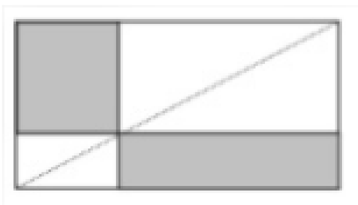
Problema 100

O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?



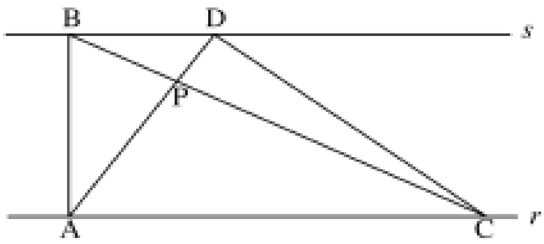
Problema 101

Observe a figura a seguir. Por um ponto da diagonal do retângulo foram traçadas paralelas a seus lados. Mostre que as áreas dos retângulos sombreados são iguais.



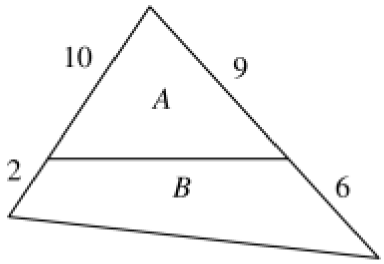
Problema 102

Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas e o segmento AB é perpendicular a ambas. Os segmentos AD e BC cortam-se em P. Mostre que as áreas dos triângulos PAB e PCD são iguais.



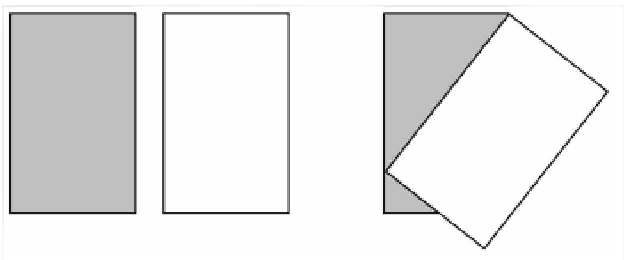
Problema 103

Com os dados da figura abaixo, calcule a razão entre as áreas A e B.



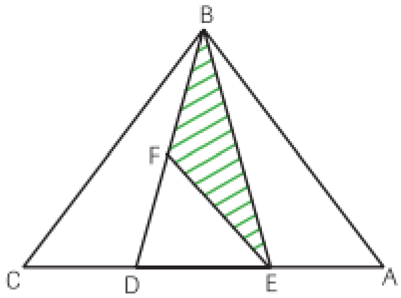
Problema 104

Abaixo, você vê dois retângulos iguais. Colocando um sobre o outro, como mostra a figura, determine se o retângulo de cima cobriu mais da metade do retângulo de baixo, exatamente a metade ou menos da metade.



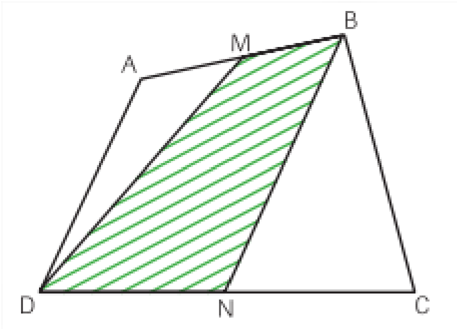
Problema 105

A área do triângulo ABC vale S. Calcule a área da região hachurada, se CD = DE = EA e BF = FD.



Problema 106

A área do quadrilátero ABCD da figura vale 32 m². Calcule a área da região hachurada, se M e N são pontos médios.

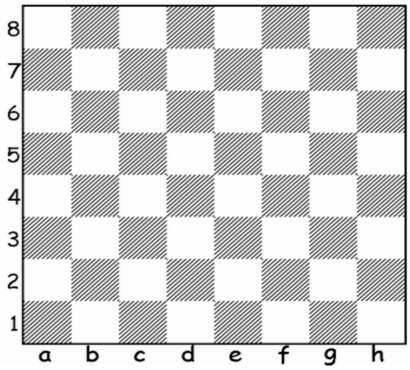


4 PROBLEMAS: COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

4.1 Paridade

Problema 1 – Comentário

Não é possível. Cada movimento realizado pelo cavalo faz com que ele saia de um quadrado de uma cor para outro quadrado de cor oposta. Como a condição do problema exige que ele saia da posição a1 e visite cada um dos quadrados restantes, uma única vez, até chegar por último em h8, concluímos que o cavalo realizará 63 movimentos. Um número ímpar de movimentos o coloca sempre numa casa de cor contrária à de onde ele saiu. Como a1 e h8 possuem a mesma cor, concluímos que o cavalo terminará numa cor contrária à de a1.

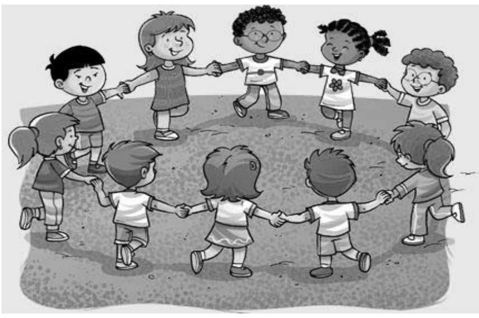


Problema 2 – Comentário

Não pode. Para retornar os discos à posição inicial, ele precisará de um número par de movimentos. Como o número de movimentos estabelecido no problema é de 25, ele jamais voltará à posição inicial.

Problema 3 – Comentário

Cinco. Como os dois vizinhos de cada uma das crianças devem ter o mesmo sexo, então os meninos e as meninas devem se alternar no círculo. Portanto, concluímos que o número de meninas deve ser igual ao número de meninos. (Em um conjunto fechado de objetos alternados, existem tantos objetos de um tipo quanto do outro).

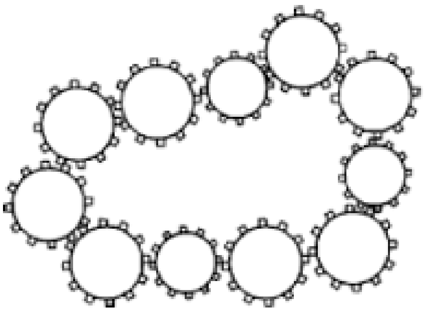


Problema 4 – Comentário

Cinco. Na parte central da cadeia de dominós, cada quantidade de bolinhas apresenta-se aos pares (nas extremidades adjacentes). Como o total de extremidades com cinco bolinhas é igual a oito, no conjunto de peças, então o quadrado da outra extremidade também deverá ter cinco bolinhas.

Problema 5 – Comentário

Não. Observe que duas engrenagens ligadas uma à outra giram em sentidos contrários. Se a 1ª girar no sentido horário, a 2ª girará no sentido anti-horário, a 3ª no sentido horário, a 4ª no sentido anti-horário e assim por diante. As ímpares, de acordo com o sentido estabelecido, girarão sempre no sentido horário e as pares, no sentido anti-horário. Suponha que, no trem de engrenagens abaixo, a 1ª gire no sentido horário. Caso isso aconteça, a 11ª também girará no sentido horário, pois é uma engrenagem de ordem ímpar. Portanto, chegamos a uma contradição, já que engrenagens vizinhas devem girar em sentidos diferentes. Assim, esse trem de engrenagens não gira.



Problema 6 – Comentário

Não. A soma de uma quantidade par de números ímpares é par. Como todas as cédulas têm paridade ímpar e o total de cédulas é 10, então a soma de seus valores será par, não podendo dar R$ 25,00.

Problema 7 – Comentário

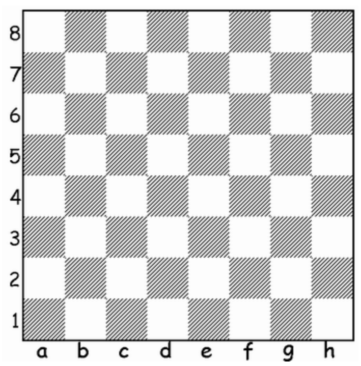
Não. A soma do par de números, em qualquer uma das 25 páginas arrancadas, será sempre um número ímpar. Como a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar, a soma dos 50 números encontrados nas folhas será um valor ímpar, o que torna absurdo o resultado ser 1990.

Problema 8 – Comentário

Não. Entre os trinta e seis primeiros números primos, um é par, o dois. Então as linhas que contiverem esse número terão como soma um valor de paridade ímpar (São seis parcelas em que 5 são ímpares e uma é par.). Já as linhas que não contiverem o dois terão como soma um valor de paridade par (seis parcelas de paridade ímpar), o que foge ao conceito do quadrado mágico.

Problema 9 – Comentário

Não. Observe que as casas a1 e h8 são da mesma cor. Um dominó 1 x 2, ao ser colocado no tabuleiro, cobrirá uma casa preta e outra branca. Retirando-se as casas a1 e h8, teremos 62 casas remanescentes. Embora esse número seja par, não conseguiremos cobrir essas casas devido ao excesso de casas brancas (duas a mais).



Algumas considerações:

A leveza deste assunto permite ao professor a introdução de problemas interessantes para alunos ainda iniciantes em Matemática. Além disso, proporciona, de maneira simples, as noções iniciais de “demonstrações por absurdo”, utilizando-se de problemas que exijam comprovações de impossibilidades. Assim, no Ensino Básico, estaríamos utilizando-nos de uma poderosa ferramenta matemática.

4.2 “Princípio das casas de pombos” ou “princípio das gavetas”

Problema 10 – Comentário

O número mínimo de pessoas é 13. Imagine que os 12 meses do ano sejam as casas e as 13 pessoas, os pombos. Associe assim cada pessoa ao seu mês de nascimento. Pelo “princípio das casas de pombos”, como temos 12 casas e 13 pombos, pelo menos uma das casas receberá dois pombos, ou seja, um dos meses terá pelo menos dois aniversariantes.

Problema 11 – Comentário

Três contas. Considere que as duas cores são as casas e as contas são os pombos. Veja que, com três contas, haverá duas contas da mesma cor.

Problema 12 – Comentário

Quatro meias. Pense nas meias como objetos e nas três cores como as gavetas. Veja que, com quatro meias, haverá duas meias com mesma cor.

Problema 13 – Comentário

Admita os 12 signos como sendo as casas e as 40 pessoas como sendo os pombos. Associe cada pessoa a um signo. Pelo “princípio das casas de pombos”, pelo menos uma das casas receberá, no mínimo, 4 pessoas.

Problema 14 - Comentário

Tome como casas os onze restos possíveis na divisão por 11, de zero a dez. Tome como pombos os dozes números inteiros. Pelo “princípio das casas de pombos”, pelo menos dois inteiros terão o mesmo resto.

$$I_1 = 11m + r$$
$$I_2 = 11n + r$$
$$I_1 - I_2 = 11m + r - 11n - r$$
$$I_1 - I_2 = 11.\,(m - n)$$

$I_1 \rightarrow$ Inteiro um;

$I_2 \rightarrow$ Inteiro dois;

Portanto, a diferença é divisível por 11.

Problema 15 - Comentário

Tomemos como casas o número de cabelos nas cabeças das pessoas (de 1 até 1.000.000) e como pombos o número de habitantes da cidade. Pelo “princípio das casas de pombos”, pelo menos dois habitantes terão o mesmo número de cabelos em sua cabeça.

Problema 16 - Comentário

Realizando todas as somas possíveis com as três parcelas -1, 0 e 1, encontramos sete somas: { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}. Tomemos como casas as sete somas possíveis com as parcelas {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} e como pombos as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais. Pelo “princípio das casas de pombos”, pelo menos duas somas das sete se repetirão.

Problema 17 - Comentário

Divida todas as pessoas em 50 pares, de modo que as pessoas, em cada par, estejam sentadas diametralmente opostas uma à outra. Considere esses pares como sendo as casas de pombos e como pombos o número de homens. Pelo “princípio das casas de pombos”, como mais de 50 dessas pessoas são homens, um dos pares terá que incluir mais de um homem.

Problema 18 - Comentário

Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, que são as casas. Dos 5 pontos (pombos), pelo menos dois pertencerão a um mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses dois pontos será, no máximo, igual à diagonal do quadrado que é $\sqrt{2}$, o que conclui a demonstração.

Algumas considerações:

O Princípio da Casa dos Pombos é um excelente tema a ser inserido no currículo do Ensino Fundamental. Tratado de maneira gradual pode aperfeiçoar competências de investigação, organização bem como a construção de uma redação matemática mais formal e argumentativa. Suas aplicações podem ser apresentadas de maneira simples, acessível e cativante aos estudantes.

4.3 Números primos e compostos

Problema 19 – Comentário

Sim. 2 é um dos fatores na decomposição do número dado.

Problema 20 – Comentário

Não. A decomposição deste número não contém o número primo 5.

Problema 21 – Comentário

Sim. $8 = 2^3$ e existem nove fatores iguais a 2 na decomposição do número dado.

Problema 22 – Comentário

Não. 9 é igual a 3 □ 3 e só existe um 3 na decomposição do número dado.

Problema 23 – Comentário

Sim. 6 = 2 □ 3 e a decomposição do número dado contém ambos os números primos 2 e 3.

Problema 24 – Comentário

Sim. De fato, a decomposição de um número natural que é divisível por 4 tem que conter pelo menos dois fatores iguais a 2. Como o número também é divisível por 3, a decomposição contém, pelo menos, um fator 3. Portanto, nosso número tem que ser divisível por $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Problema 25 – Comentário

Não. Por exemplo, o número 12 pode servir como um contraexemplo. A razão é que, se um número for divisível por 4, sua decomposição tem que conter pelo menos dois fatores iguais a 2; se o mesmo número for divisível por 6, isto significa que sua decomposição contém 2 e 3. Portanto, podemos ter certeza de que sua decomposição tem dois fatores iguais a 2 (Mas não necessariamente três!) e um igual a 3, de modo que só podemos garantir a divisibilidade por 12.

Problema 26 – Comentário

Não. 3 não aparece na decomposição de A e, portanto, não pode aparecer na decomposição de 2A.

Problema 27 – Comentário

Sim. Ambos, 2 e 3, aparecem na decomposição do número 3A.

Problema 28 – Comentário

Sim. A decomposição de 5A contém 3, mas a decomposição de 5, não.

Algumas considerações:

A ideia, neste tópico, é que o professor leve o aluno a compreender que as propriedades de divisibilidade estão, quase que completamente, determinadas pela representação de um número natural como produto de números primos.

4.4 Divisões e seus restos

Problema 29 – Comentário

Zero. Representando por **E** a expressão $1989 \times 1990 \times 1991 + 1992^3$ e por **E’** a mesma expressão trocando cada número pelo seu respectivo resto na divisão por 7, encontramos **E’**$= 1 \times 2 \times 3 + 1^3 = 7$. Como **E’**$=7$ deixa resto zero na divisão por 7, **E** também deixará. (Lema dos restos)

Problema 30 – Comentário

Um. Representando por E a expressão 9^{100} e por E' a mesma expressão trocando o nove pelo resto da divisão de nove por 8, encontramos E'= 1^{100} = 1. Como E'=1 deixa resto 1 na divisão por 8, **E** também deixará. (Lema dos restos)

Problema 31 – Comentário

Dado um número natural **n**, os possíveis restos de sua divisão por **3** são 0, 1 e 2. Analisemos cada caso:

a) Seja **n** um natural que deixa resto **zero** quando dividido por três.

$\rightarrow$Se o resto for igual a **zero**, então ambos**,** n^3 e 2n, são divisíveis por 3 e, consequentemente, $n^3 + 2n$ é divisível por 3. ("Lema dos restos")

b) Seja **n** um natural que deixa resto **um** quando dividido por três.

$\rightarrow$Se o resto for igual a **um**, n^3 deixa resto 1 na divisão por três e 2n deixa resto 2 na divisão por 3. Logo, $n^3 + 2n$ deixa resto 1 + 2 = 3 na divisão por 3. O que implica uma divisão exata.

c) Seja **n** um natural que deixa resto **dois** quando dividido por três.

$\rightarrow$Se o resto for igual a **dois**, n^3 deixa resto 2 na divisão por 3 e 2n deixa resto 1 na divisão por 3. Assim, $n^3 + 2n$ deixa resto 2 + 1 na divisão por 3. O que implica uma divisão exata.

Problema 32 – Comentário

Devemos provar que $p^2 - 1$ é divisível por 3 e por 8.

$p^2 - 1$ = (p -1)□(p+1). Se P>3 é primo, p é ímpar. Logo, ambos, (p-1) e (p+1), são pares e um deles é múltiplo de 4. Portanto, $p^2 - 1$ é divisível por 8.

Como p - 1, p, p+1 são três números consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Se **p** é um primo maior que 3, com certeza não é ele. Neste caso, p-1 ou p+1 é múltiplo de 3. Isto nos garante que $p^2 - 1$ é múltiplo de 24, pois é ao mesmo tempo múltiplo de 8 e de 3.

Problema 33 – Comentário

2^1 : 3 deixa resto 2

2^2 : 3 deixa resto 1

2^3 : 3 deixa resto 2

2^4 : 3 deixa resto 1

Observando o padrão existente nos restos das divisões de uma potência de 2 por 3, concluímos que o resto de 2^{100} por 3 é 1 porque o expoente do 2 tem paridade par.

Problema 34 – Comentário

Zero. Calculando o último algarismo da soma $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + 9^2$, encontramos 5. Se observarmos que a soma $10^2 + 11^2 + ... + 19^2$ possui a mesma terminação 5, devido aos algarismos das unidades serem os mesmos da soma anterior, poderemos concluir que $1^2 + 2^2 + ... + 99^2$ terminará por **zero**. A soma $0^2 + 1^2 + 2^2 +...+ 99^2$ possui 10 grupos de adições que terminam por 5. Quando juntarmos todas essas adições, o algarismo das unidades 5 será somado 10 vezes, o que resultará em zero como último algarismo da soma total.

Algumas considerações:

Neste tópico, o professor tem uma ótima oportunidade de trabalhar a ideia de análise de casos para provar uma afirmação. É importante que os alunos compreendam que tal análise fornece, de fato, uma demonstração completa. Isso fica evidente no problema 31 apresentado.

4.5 Operações básicas

Problema 35 – Comentário

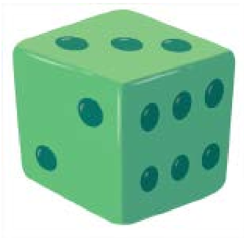
23 kg. Retire da primeira balança o que há na segunda. Sobrará a configuração da terceira balança (64kg – 41kg = 23kg).

Problema 36 – Comentário

O algarismo é 4. Atrás das letras O, B e E estão os números 1, 2 e 3 (único terno de números cuja soma é 6); O e P devem ser 3 e 5, respectivamente, devido à soma 8, assim O=3, P=5, $B \in \{1,2\}$ e $E \in \{1,2\}$. Restou, para o verso do cartão M, o número 4.

Problema 37 – Comentário

A soma foi 16. A soma dos pontos da parte de cima com a debaixo totalizam 35 pontos (5 dados x 7pontos = 35 pontos). Subtraindo deste valor a soma dos pontos da parte de cima, encontraremos a soma da parte debaixo, ou seja, 35 – 19 = 16.



Problema 38 – Comentário

R$ 1,19. Gustavo não pode possuir mais que uma moeda de 25 centavos e 50 centavos, caso contrário formaria 1 real. Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com estas e as moedas de 50 e 25 centavos, não consegue formar 1 real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo porque, se tivesse, formaria 1 real, juntando às mesmas a moeda de 50 centavos, a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo. Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é 50 + 25 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 = 1,19 centavos.

Problema 39 – Comentário

Z = 8. Analisando a soma das unidades, temos: $0 < X + Y \leq 18$ (X e Y são números de um algarismo). $X + Y = 10$ porque, para a soma X + Y + Z terminar em Z, X + Y, deverá terminar por zero. Como X + Y = 10, observemos que, na soma X + Y + Z = Z, vai “1” para a casa das dezenas. Analisando a soma das dezenas, temos: 1 + X + Y + Z = X $\Rightarrow$ 1 + 10 + Z = X $\Rightarrow$ 11 + Z = X, ou seja, 11 + Z possui o mesmo algarismo das unidades que X. E isso só acontecerá se Z + 1 = X. Analisando a soma dos milhares, concluímos que 1 + X + Y + Z = 1 + 10 + Z = 11 + Z deve ser igual a um número de dezena Y e unidade X. Assim, **Y = 1** (1 + X + Y + Z = X vai “1” por ser Z < 9 e Z + 1 = X), **X = 9** (X + Y = 10) e **Z = 8** (X = Z + 1). Portanto, a conta apresentada é

$$\begin{array}{r} 9999 \\ 1111 \\ +\ 8888 \\ \hline 19998 \end{array} \qquad \begin{array}{r} XXXX \\ YYYY \\ +\ ZZZZ \\ \hline YXXXZ \end{array}$$

Problema 40 – Comentário

A maior diferença possível é 885. Para obtermos a maior diferença possível, devemos subtrair do maior número de Ana o menor de Beto. Sendo o maior número de Ana 987 e o menor número de Beto 102, obtemos a diferença 987 – 102 = 885.

Problema 41 – Comentário

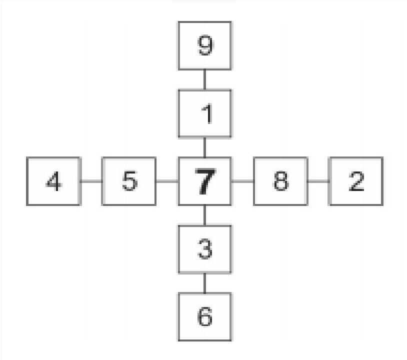
13 pesagens. **1kg** – usa peso de 1kg; **2kg** – usa peso de 1kg num prato e o de 3kg no outro; **3kg** – usa o peso de 3kg; **4kg** – usa o peso de 1kg e o de 3kg no mesmo prato; **5kg** – usa o peso de 9kg num prato e o de 3kg e 1kg no outro; **6Kg** – usa o de 9kg num prato e o de 3kg no outro; **7kg** – usa o de 9kg e o de 1kg num prato e o de 3kg no outro; **8kg** – usa o de 9kg num prato e o de 1kg no outro; **9kg** – usa o peso de 9kg; **10kg** – usa o peso de 9kg e o de 1kg no mesmo prato; **11kg** – usa o de 9kg e o de 3kg de um lado e o de 1kg do outro; **12kg** – usa o de 9kg e o de 3kg num mesmo prato; **13kg** – usa os três pesos num prato só.

Problema 42 – Comentário

86 min. Os horários com os algarismos 0, 1, 2 e 4, a partir de 20h14min, e anteriores à meia noite, em ordem cronológica, são: 20h14min, 20h41min, 21h04min e 21h40min. Portanto, ela estudou das 20h14min às 21h40min, o correspondente a 86 minutos.

Problema 43 – Comentário

26. Observando que o 7 está na horizontal e também na vertical, a soma pedida é igual à metade da soma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 . Portanto, a soma pedida é $\frac{52}{2} = 26$. Com o 7 no meio, devemos separar os números dados em dois grupos de 19.



Problema 44 – Comentário

Enche-se o de 9l e derrama-se no de 4l $\rightarrow$ Esvazia-se o de 4l $\rightarrow$Derrama-se os 5l que ficou no de 9l no de 4l $\rightarrow$Esvazia-se o de 4l $\rightarrow$Derrama-se, no de 4l, 1l que ficou no de 9l $\rightarrow$Enche-se o reservatório de 9l e derrama-se no de 4l $\rightarrow$Como já havia 1l no de 4l, só caberão 3l, ficando o de 9l com 6l.

Problema 45 – Comentário

10 dias. Todos os dias, a lesma sobe 3 metros e desce 2 metros, ou seja, era como se ela subisse 1 metro todos os dias. Isso acontece até o 9º dia. No décimo dia, ela subirá 3 metros e não escorregará mais, pois já chegou ao topo do muro.

Problema 46 – Comentário

17 min. 1º) **A** e **B** vão juntos – 2 min.; 2º) **A** volta com a lanterna – 1 min.; 3º) **C** e **D** vão juntos – 10 min.; 4º) **B** volta com a lanterna – 2 min. e 5º) **A** e **B** vão juntos – 2 min.

Problema 47 – Comentário

Calculemos primeiro o preço do livro: $P = \frac{63+48}{3} = \frac{111}{3} = 37$

Valor da Ana: R$ 43,00 – R$ 37,00 = R$ 6,00

Valor da Aurora: R$ 68,00 – R$ 37,00 = R$ 31,00 [R$ 37,00 – R$ 6,00 = R$ 31,00]

Problema 48 – Comentário

14 litros de leite. 43 ÷ 4 = **10 garrafas cheias,** sobrando 3 garrafas vazias. Esvaziam-se as 10 garrafas cheias. 13 ÷ 4 = **3 garrafas cheias,** sobrando 1 vazia. Esvaziam-se as 3 garrafas cheias. 4 ÷ 4 = **1 garrafa cheia**. Assim, essa pessoa pode obter até 14 litros de leite.

Problema 49 – Comentário

Suponha que todos os animais do quintal sejam galinhas. Caso isso seja verdade, teremos um total de 84□2 = 168 pés. Como, na realidade, há 246 pés, estão faltando colocar 78 pés. Distribuindo-se os 78 pés de dois em dois, pois todos no quintal já possuem dois pés, conseguiremos distribuí-los em 39 animais, que são os coelhos. O número de galinhas será 84 – 39, ou seja, 45 galinhas.

Problema 50 – Comentário

11 balas. Calculemos, primeiro, o número de balas que cada criança receberá.

$$B = \frac{3 + 4 + 7 + 9 + 11 + 12 + 13 + 16}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

A criança que receber o saquinho com 16 balas também receberá o com 9 balas, pois não há como formar 9 balas com os outros saquinhos. Consequentemente, a criança que receber o saquinho com 13 balas também receberá o saquinho com 12 balas e a última criança receberá os saquinhos com 3, 4, 7 e 11. Logo, o saco com mais balas recebido pela criança tem 11.

Problema 51 – Comentário

28 pontos. 8□3 = **24** pontos por vitórias; 4□1 = **4** pontos por empates, totalizando 28 pontos.

Problema 52 – Comentário

79. [2 x 3 + 0 + 8 x 9 + 1 = 79]

Problema 53 – Comentário

Cinco. Observando a multiplicação, concluímos que a letra **B** só pode ser 7 ($6 \times 2 = 12$ – P não pode ser 2; $6 \times 3 = 18$ – não há 8 no conjunto dos números; $6 \times 4 = 24$ – P não pode ser 4; $6 \times 5 = 30$ – não há zero no conjunto dos números; $6 \times 6 = 36$ – P não pode ser 6). Assim, **B = 7** e **P = 2**. A letra **O** poderá ser 3, 4 ou 5. Substituindo, veremos que o único valor adequado será o 5. Se $6 \times 5 + 4 = 34$, logo, **O = 5**, **E = 4** e **M = 3**.

Problema 54 – Comentário

144. [$24 \div 12 = 2$, $2 \times 6 = 12$, $12 \div 2 = 6$ e $6 \times 24 = 144$]

Algumas considerações:

As operações básicas são essenciais para o aluno. Sugerimos a utilização de problemas simples e interessantes. Problemas do cotidiano dos alunos podem também gerar maior interesse, além de mostrar a importância da Matemática em situações corriqueiras. Problemas que permitam mais de uma resposta valem a pena serem discutidos, são ideais para debates em sala.

4.6 Potenciação / desigualdades

Problema 55 – Comentário

A soma é 8. $2^{100} \cdot 5^{103} = (2 \cdot 5)^{100} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 10^{100} = 125 \times 10^{100}$. A soma será $1 + 2 + 5 + 0 = 8$

Problema 56 – Comentário

$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}$

$17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56}$

Assim, $17^{14} > 2^{56} > 2^{55} > 31^{11}$, o que nos garante que $17^{14} > 31^{11}$.

Problema 57 – Comentário

$2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$

$2^{100} < 3^{100}$

Se mostrarmos que $3^{100} + 3^{100} < 4^{100}$, está resolvido o problema.

Afirmar que $3^{100} + 3^{100} < 4^{100} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{100} < 4^{100} \Leftrightarrow 2 < (\frac{4}{3})^{100}$. Isso é verdade, pois $2 < (\frac{4}{3})^{3} = \frac{64}{27}$. Portanto, $3^{100} + 3^{100} < 4^{100}$, o que garante que $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Problema 58 – Comentário

$$2^{300} = (2^{3})^{100} = 8^{100}$$

$$3^{200} = (3^{2})^{100} = 9^{100}$$

Como $9^{100} > 8^{100}$, então $3^{200} > 2^{300}$.

Problema 59 – Comentário

Vamos representar o número 1234568 por x. Como a primeira expressão é $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$, então $x^2 - 1 < x^2$.

Problema 60 – Comentário

$$100^{100} = (100^{2})^{50}$$

$$50^{50} \cdot 150^{50} = (50 \cdot 150)^{50}$$

Como 100^{2} é maior que $50 \cdot 150$, concluímos que $100^{100} > 50^{50} \cdot 150^{50}$.

Algumas considerações:

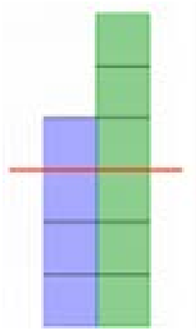
As potências geram uma oportunidade de trabalhar com números bem maiores do que os alunos estão acostumados. Eles têm a chance de comparar esses números utilizando propriedades simples, bem como desenvolver técnicas de aproximação. Vale a pena, também, através da potenciação, ingressar em outras ciências, como a Física e a Química, fazendo o aluno perceber a importância da Matemática em outras disciplinas. Portanto, investir em questões relevantes sobre este tema é fundamental.

4.7 Frações

Problema 61 – Comentário

Observando a figura, concluímos que a parte escura corresponde a 4 quadrinhos dos 16, em que o quadrado grande foi dividido. Assim, $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

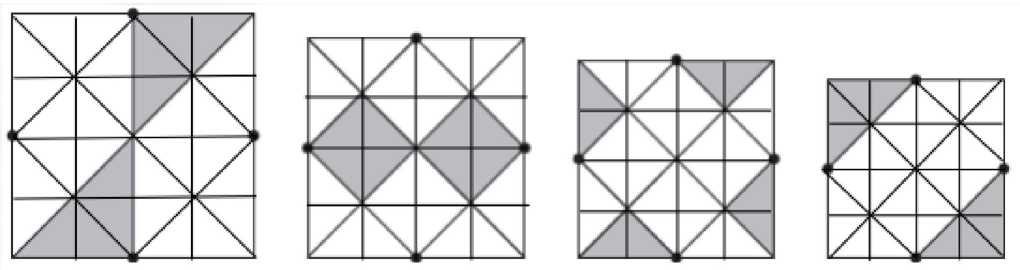
Problema 62 – Comentário



A coluna da direita, em verde, representa 1 litro de água dividido em 6 partes. A coluna da esquerda, em azul, representa a capacidade da caneca $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de 1 litro. A linha vermelha representa $\frac{1}{2}$L de água colocado na caneca. Olhando para a coluna azul como o todo, observamos que $\frac{1}{2}$L de água ocupa $\frac{3}{4}$ da caneca.

Problema 63 – Comentário

Todos. Uma solução seria dividir as figuras da forma abaixo.



$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Problema 64 – Comentário

Inicialmente, Pedrinho colocou 1 copo de suco na jarra. Em seguida, acrescentou 4 copos de água, totalizando um volume de 5 copos na jarra. Para dobrar o volume, Pedrinho colocou mais 5 copos de água, totalizando um volume de 10 copos, sendo 1 de suco e 9 de água. Logo, o percentual é de 1 copo, num total de 10 copos, ou seja, 10%.

Problema 65 – Comentário

$\frac{\text{meninos}}{\text{meninas}} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ (fração irredutível). Por conseguinte, o menor número de alunos possível é 12 + 25 = 37.

Problema 66 – Comentário

Observe que $\frac{3}{5}$ do percurso é maior que $\frac{1}{2}$ do percurso, ponto B, e menor que $\frac{3}{4}$ do percurso, ponto D. Assim sendo, Sueli só pode ter caído no ponto C.

Problema 67 – Comentário

$\frac{2}{5}$ dos alunos baianos são homens $\rightarrow$ Isso me garante que o número de baianos é inteiro e múltiplo de 5, visto que $\frac{2}{5}$ é uma fração irredutível. Do mesmo modo concluímos que o número de mineiros é múltiplo de 7.

M(5) = { 5, 10, 15, 20, 25, 30 }; M(7) = { 7, 14, 21, 28 }. Como 31 é a soma do número de baianos com o número de mineiros, a única possibilidade é que o ônibus tenha 10 baianos e 21 mineiros. Portanto, $\frac{3}{5}$ dos baianos são mulheres e $\frac{3}{7}$ dos mineiros também. Implica dizer que o número de mulheres é igual a $\frac{3}{5} \square 10 + \frac{3}{7} \square 21 = 6 + 9 = 15$ mulheres.

Problema 68 – Comentário

Sinal de divisão. $\frac{3}{7} \div \frac{6}{5} = \frac{3}{7} \square \frac{5}{6} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

Problema 69 – Comentário

Se $\frac{3}{8}$ da área corresponde a 36 cm², $\frac{1}{8}$ equivale a 12 cm² e a área toda a 8 □ 12 = 96 cm². Como o quadrado tem área 36 cm², podemos afirmar que a largura AD do retângulo é 6 cm. Dividindo-se 96 por 6, encontramos o comprimento AB do retângulo igual a 16 cm. Concluímos, pois, que o perímetro mede 2 x (16 + 6) = 44 cm.

Problema 70 – Comentário

Na figura D. Foram pintados 10 de 16 quadrinhos, o que corresponde a $\frac{5}{8}$.

Algumas considerações:

Os problemas com frações permitem ao professor apresentar várias estratégias de resolução, tais como: construção de figuras e utilização de gráficos. Estas estratégias propiciam visualizar melhor a situação e apontam caminhos para melhores saídas. As frações permitem também associar seus conceitos a problemas geométricos, estimulando a criatividade, a observação e ampliando as possibilidades de escolha das questões.

4.8 Perímetro e área

Problema 71 – Comentário

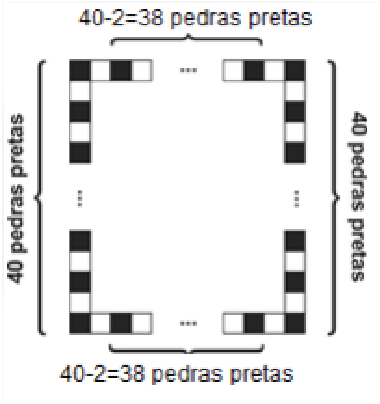
O quadrado grande, de área 25 cm², tem lado 5 cm. O quadrado médio, de área 9 cm², tem lado 3 cm. O quadrado pequeno possui lado igual à diferença entre o lado do quadrado grande e o lado do quadrado pequeno, ou seja, 2 cm. Assim, 2P = 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 26 cm.

Problema 72 – Comentário

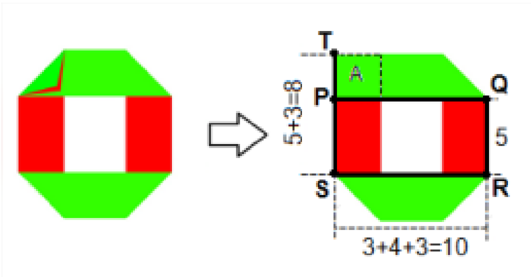
AD = EC $\rightarrow$ lados opostos do paralelogramo AECD. Após a dobradura, AD ocupou a posição de GH, logo, AD = EC = GH = GF + FH = 4 + 4 = 8 cm. DC = Valem também as igualdades AE = EG = 4 cm. Observando que os triângulos EFG e BFH são equiláteros, temos as relações: $\angle CEB = \angle HFB = 60°$ (correspondentes); $\angle EBC = \angle FBH = 60°$; $\angle ECB = 180° - \angle CEB - \angle EBC = 60°$. Assim, o triângulo EBC é equilátero, de lado EB = EF + FB = 8 cm, e o perímetro do trapézio ABCD é AE + EB + BC + DC + AD = 4 + 8 + 8 + 4 + 8 = 32 cm.

Problema 73 – Comentário

Como há alternância de pedras pretas e brancas e mais pedras pretas do que brancas, as quatro pedras dos cantos da piscina devem ser pretas. Observando a figura abaixo, vemos que o total de pedras pretas é 40 + 38 + 40 + 38 = 156.



Problema 74 – Comentário



A figura acima mostra como fica a tira se desfizermos a última dobra realizada por Júlia. Observemos que a fita está com uma sobreposição na região quadrada indicada pela letra A. Para medir o comprimento da tira, mediremos os segmentos indicados na figura, pelas letras P, Q, R, S e T, que compõem a borda da tira, destacada pela linha preta mais grossa. **PQ** = 3+4+3 = 10; **QR** = 5; **RS** = 3+4+3 = 10 **ST** = 5+3 = 8 D. O comprimento da tira é, portanto, igual a 10 + 5 + 10 + 8 = 33 cm.

Problema 75 – Comentário

A largura (L) do retângulo equivale ao diâmetro do círculo: 4 cm.

A base (B) do retângulo corresponde a: 2r + AR + RS + SB (r= raio)

2r = 4 cm ; AR = AS – RS = 2 – 1 = 1cm ; RS = 1cm ; SB = 1cm.

B = 4 + 1 + 1 + 1 = 7cm.

2P = 4 + 7 + 4 + 7 = 22cm

Problema 76 – Comentário

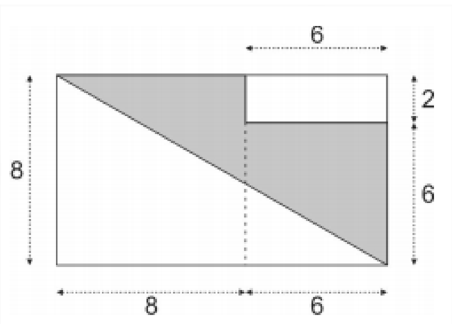
É fácil ver que o triângulo de maior área é o **V**, pois sua área é maior que a metade do quadrado. Com um pequeno ajuste, o triângulo I transforma-se no II. O III é notório ser menor que os demais. Deslocando-se o vértice superior do triângulo IV para um dos vértices do canto superior, a área não se altera e tem valor, numericamente, igual às figuras I e II (metade da área do quadrado).

Problema 77 – Comentário

A região sombreada é formada pelo quadrado central, por quatro retângulos, cada um com metade da área de um quadrado, e por quatro triângulos, cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo, a área da região sombreada é $1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 3{,}5 \text{ cm}^2$.

Problema 78 – Comentário

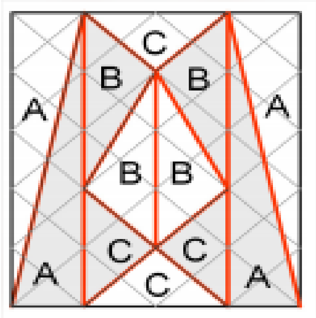
Se juntarmos, à região cinza, o retângulo cujos lados medem 6 cm e 2 cm, como na figura abaixo, teremos um novo retângulo cuja área é 112 cm², com lados medindo 14 cm e 8 cm.



A área da região cinza será igual à diferença entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo que foi acrescentado, isto é, 56 – 12 = 44 cm².

Problema 79 – Comentário

Dividamos a figura em regiões indicadas pelas letras A, B e C, como mostrado abaixo. Regiões com a mesma letra são idênticas, e tanto a parte branca quanto a parte cinzenta consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C. Observemos que a área da parte cinzenta é igual à área da parte branca. Cada uma dessas áreas é a metade da área total do retângulo, que é $4 \times 5 = 20$ cm². A área da parte cinzenta é, pois, 10 cm².



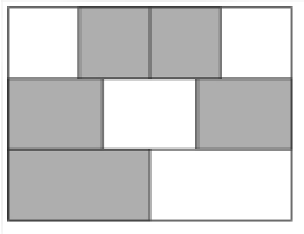
Problema 80 – Comentário

Por serem as faixas retângulos de mesmas dimensões, elas têm a mesma área, que é $\frac{36}{3} = 12\ \text{m}^2$. Assim,

→ na faixa inferior, a área de cada parte é $\frac{12}{2} = 6\ \text{m}^2$; que é a área da parte cinza;

→na faixa do meio, a área de cada parte é $\frac{12}{3} = 4\ \text{m}^2$; as duas partes cinzas têm, então, área total igual a 8 m²;

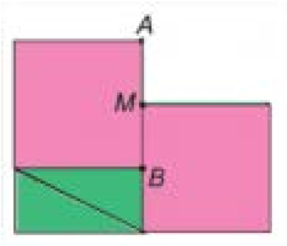
→na faixa de cima, a área de cada parte é $\frac{12}{4} = 3\ \text{m}^2$; as duas partes cinzas têm, então, área total igual 6 m² . A área total da região colorida de cinza é, portanto, 20 m².



Problema 81 – Comentário

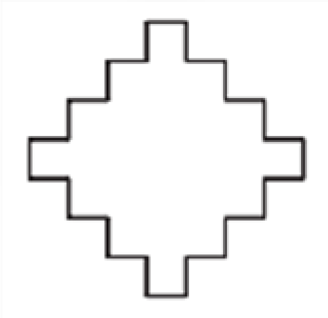
Como os quadrados estão dispostos de forma que os pontos A, M e B estão alinhados e como M é o ponto médio de AB, concluímos que os dois triângulos da figura são triângulos retângulos, com catetos medindo 6 e 3 centímetros. Assim, a área de cada quadrado é 6 × 6 = 36 cm² e a área de cada triângulo é $\frac{6 \text{ x } 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$. A área total da figura é 36 + 36 + 9 + 9 = 90 cm².

Podemos também deslocar um dos triângulos para obter outro método de resolução.



Problema 82 – Comentário

O polígono tem 14 lados que são segmentos verticais e 14 que são segmentos horizontais. Seu perímetro é a soma dos comprimentos desses 28 segmentos; logo, o comprimento de cada segmento é $\frac{56}{28} = 2 \text{ cm}$. Podemos, agora, decompor o polígono em 25 quadrados de 2 cm de lado, como na figura abaixo. A área de cada quadrado é 4 cm² e a do polígono é, portanto, 25 x 4 = 100 cm² .



Problema 83 – Comentário

Uma solução é observar que é possível sobrepor a região branca do quadrado à região cinza, bastando para isso girá-la 180º ao redor do centro do quadrado. Assim, elas têm a mesma área, que é igual à metade da área do quadrado, ou seja, $\frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}^2$.
Outra solução é calcular a área da região cinza por partes.

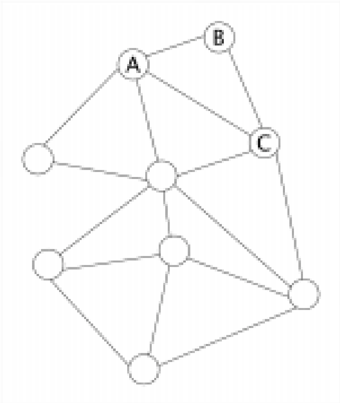
Algumas considerações:

Os conceitos de área e perímetro são excelentes temas para trabalharmos a história da Matemática. Podemos, por exemplo, associar a necessidade de fazer novas medidas de terra, após as inundações no Vale do Rio Nilo, no Egito antigo, ao IPTU – Imposto Predial e Territorial Urbano – que, entre outros fatores, é cobrado em função da área do terreno e da área construída. Apresentar algumas fórmulas, criadas por civilizações antigas, para o cálculo exato ou aproximado da área de figuras é outra boa estratégia para prender a atenção dos alunos. Portanto, são dois assuntos que oferecem variadas possibilidades.

4.9 Contagem

Problema 84 – Comentário

Começamos a colorir a figura pelo círculo marcado com a letra A, como na figura abaixo. Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o círculo B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica, unicamente, determinada pelas condições do problema. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades diferentes de colorir os círculos A, B e C. Notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos círculos restantes ficam unicamente determinadas. Assim sendo, temos 6 maneiras diferentes de colorir os círculos da figura, de acordo com as condições do enunciado.



Problema 85 – Comentário

Fazendo a formiguinha partir de D, temos as seguintes possibilidades:

{D – A – B – C – F – E, D – E – F – C – B – A, D – A – B – E – F – C}.

Por analogia, teremos a mesma situação para os vértices A, C e F, totalizando assim 4 x 3 = 12 possibilidades para os vértices dos cantos.

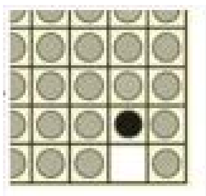
Fazendo a formiguinha partir de E, temos as seguintes possibilidades:

{E – F – C – B – A – D, E – D – A – B – C – F}.

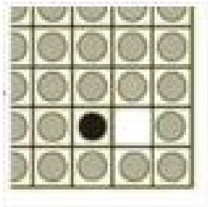
Por analogia, teremos a mesma situação para o vértice B, num total de 2 x 2 = 4 possibilidades para os vértices do meio, totalizando assim 12 + 4 = 16 possibilidades.

Problema 86 – Comentário

Para chegar ao canto superior esquerdo, a bolinha preta deve andar 7 casas para cima e 6 casas para a esquerda. Devemos analisar, agora, o menor número de movimentos para que isso ocorra. Inicialmente, Joãozinho deve andar com a pedra preta para cima, fazendo três movimentos. Se resolvesse andar para a esquerda, seriam 5 movimentos.



Após fazer isso, ele deve andar com a pedra preta para a esquerda, fazendo novos três movimentos. Se ele resolvesse andar para cima, seriam 5 movimentos.



Ressaltamos que, para levar a pedra preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, com o menor número de movimentos possíveis, Joãozinho deve andar com a pedra preta sete casas para cima e seis casas para a esquerda, alternando esses movimentos e começando para cima, gastando sempre três movimentos a cada vez que a pedra preta andar uma casa. Logo, o número mínimo de movimentos necessários é $3 \times 7 + 3 \times 6 = 21 + 18 = 39$ movimentos.

Problema 87 – Comentário

Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: AB , AC , AD , AE , BC , BD , BE , CD , CE , DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, isto é, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são 10 x 9 = 90.

Problema 88 – Comentário

Como os números devem ter dois algarismos, eles não podem ter o algarismo 0 na casa das dezenas; assim, existem 3 possibilidades para a casa das dezenas (1, 2 ou 5) e quatro possibilidades para a casa das unidades (0, 1, 2 ou 5). Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), há 3 x 4 = 12 números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos de 2015, podendo haver repetição de algarismos. Neste caso, os números podem ser, explicitamente, listados: 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52 e 55.

Problema 89 – Comentário

Faremos essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número. Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos, então, 3 possibilidades para colocar o algarismo 0. Colocado o zero, sobram três posições para colocar o algarismo ímpar e, como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para colocar o algarismo ímpar no número. Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número. Deste modo, há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8. Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos, assim, 12 possibilidades de colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é 3 x 15 x 12 = 540.

Problema 90 – Comentário

Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é 4 × 2 × 2 x 1 = 16 .

Problema 91 – Comentário

Os casais 1, 2 e 3 podem sentar-se em seis ordens distintas: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas: com o namorado à direita ou à esquerda de sua namorada. Salientamos que, em cada uma das 6 ordens possíveis para os casais, temos 2 × 2 × 2 = 8 possibilidades. Logo, o número de ordens distintas em que as seis pessoas podem sentar-se é 6 × 8 = 48.

Algumas considerações:

Neste tópico, o professor tem a oportunidade de trabalhar os conceitos combinatórios, mesmo que de forma básica, familiarizando o aluno com situações em que é necessário contar, descrever e representar os casos possíveis, sem a utilização inicial de regras, de modo que ele adquira um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas. É uma oportunidade de introduzir também o jogo como ferramenta de aprendizagem.

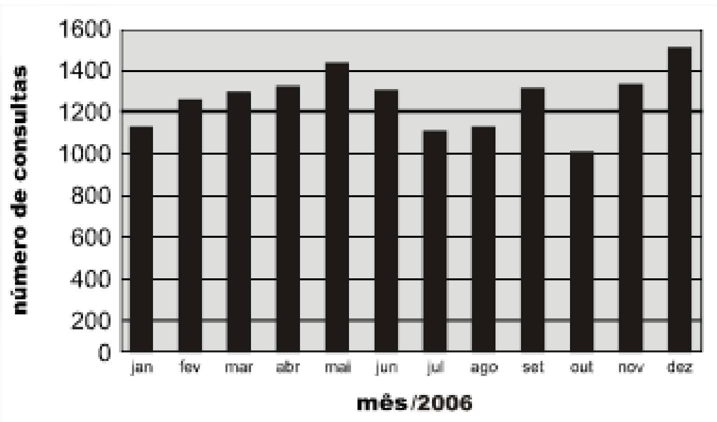
4.10 Tratamento da informação

Problema 92 – Comentário

Cidade	Pop. 1990	Pop. 2000	Aumento Pop.	% de Aumento
I	30	50	20	66,67% ($\frac{20}{30}$)
II	60	50	decresceu	-
III	70	70	0	0
IV	100	150	50	50% ($\frac{50}{100}$)
V	120	130	10	8,3% ($\frac{10}{120}$)
Maior aumento percentual ocorreu na cidade I				

Problema 93 – Comentário

Foram efetuadas mais de 1200 consultas nos meses cujas colunas no gráfico ultrapassam a marca de 1200. Esses meses são fevereiro, março, abril, maio, junho, setembro, novembro e dezembro, totalizando 8 meses.



Problema 94 – Comentário

As amostras cujo percentual de álcool é maior que o de gasolina são aquelas que contêm mais de 50% de álcool. No gráfico, estas amostras correspondem àquelas cuja barra horizontal ultrapassa a marca de 50%, que são as amostras 1, 2 e 3.

Problema 95 – Comentário

Vamos ler as informações contidas no gráfico a seguir:

→ 5 alunos não compraram bilhetes. 5 x 0 = 0 bilhetes

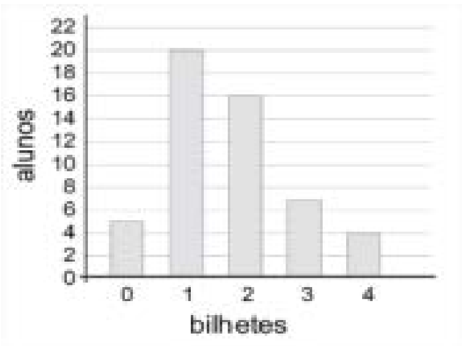
→20 alunos compraram 1 bilhete cada um. 20 × 1 = 20 bilhetes

→16 alunos compraram 2 bilhetes cada um. 16 x 2 = 32 bilhetes

→7 alunos compraram 3 bilhetes cada um. 7 x 3 = 21bilhetes

→4 alunos compraram 4 bilhetes cada um. 4 x 4 = 16 bilhetes

→Logo, o número total de bilhetes comprados foi 20 + 32 + 21 + 16 = 89 bilhetes.



Problema 96 – Comentário

Observando a tabela, vemos apenas um “X” na linha correspondente à seleção da Suécia, o que quer dizer que a Suécia está melhor classificada do que apenas uma seleção, que é a do Japão. Como são cinco as seleções, a Suécia está em quarto lugar na classificação.

Problema 97 – Comentário

O gráfico mostra que 20 + 30 + 60 + 50 + 30 + 10 = 200 alunos fizeram a prova. Vamos às alternativas:

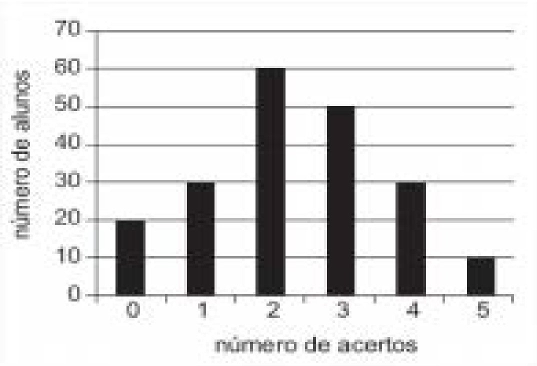
A→ É falsa, pois 10% de 200 é 20 e o número de alunos que não resolveram nenhuma questão é 10, o equivalente a 5% do total de alunos.

B→ É falsa, pois a quantidade de alunos que acertaram mais de 2 questões é 50 + 30 + 10 = 90, menos do que a metade de alunos que fizeram a prova.

C→ É falsa, pois o gráfico mostra que exatamente 200 alunos fizeram a prova.

D→ É verdadeira, pois o número de alunos que acertaram 4 ou 5 questões é 30 + 10 = 40.

E→ É falsa, pois 20% de 200 é 40 e o número de alunos que não resolveram nenhuma questão é 20, que corresponde a 10% do total de alunos.



Problema 98 – Comentário

Vamos ampliar a tabela do enunciado, acrescentando mais dados:

	Número de vitórias	Pontos	Número de empates	Número de derrotas
Alemanha	3	10	1	1
Bolívia	2	8	2	1
Camarões	2	7	1	2
Dinamarca	1	6	3	1
Espanha	1	4	1	3
França	0	4	4	1

→ A França não ganhou de ninguém e jogou 5 jogos. Para ter 4 pontos, ela deve ter empatado 4 jogos e perdido 1.

→Como a Alemanha ganhou da França, a França empatou com a Bolívia, com Camarões, com a Dinamarca e com a Espanha.

→A Espanha empatou só uma vez e este empate foi com a França.

→Camarões empatou só uma vez, portanto, este empate também só pode ter acontecido com a França.

→A Dinamarca empatou 3 vezes e, como acabamos de ver, estes empates não podem ter acontecido contra a Espanha ou contra Camarões. Logo, a Dinamarca empatou com a Alemanha, com a Bolívia e com a França.

→A Alemanha empatou com a Dinamarca.

Problema 99 – Comentário

Cada time jogou três vezes. Com 5 pontos, o Cruzínthians só pode ter vencido uma partida e empatado duas porque, se tivesse vencido duas partidas, teria 6 pontos no mínimo e, se não tivesse vencido nenhuma, teria 3 pontos no máximo. O Greminense não venceu nenhuma partida, pois obteve apenas 2 pontos; logo empatou duas partidas e perdeu uma. O Flameiras, em segundo lugar com 3 pontos, não venceu nenhuma partida. Se isso tivesse acontecido, ele deveria ter perdido duas. Como o Greminense não ganhou nenhuma e o Cruzínthians apenas uma, ele teria perdido para o Nauritiba. Mas o mesmo raciocínio mostra que o Nauritiba, tendo ganhado a partida com o Flameiras, deveria ter perdido para Flameiras. Como isso não pode acontecer, concluímos que o Flameiras e o Nauritiba empataram suas três partidas. Logo, o número de empates foi 5. {Cruzinthians venceu Greminense e houve **empate** entre: Cruzinthians e Flameiras; Cruzinthians e Nauritiba; Flameiras e Nauritiba; Flameiras e Greminense; Nauritiba e Greminense}

	Cruzinthians	Flameiras	Nauritiba	Greminense
Cruzinthians		1	1	3
Flameiras	1		1	1
Nauritiba	1	1		1
Greminense	0	1	1	

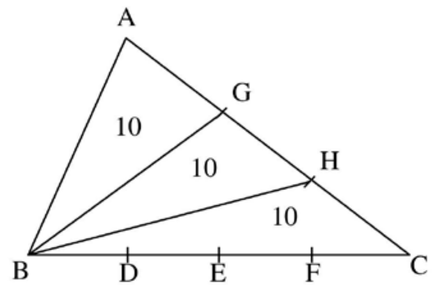
Algumas considerações:

Este tópico favorece aos professores trazerem, para o cotidiano da sala de aula, as informações presentes nos distintos meios de comunicação, tais como jornais e revistas; na vida de seus alunos e no dia a dia de sua escola. A importância do tratamento da informação é reconhecida, hoje, nos mais diversos campos, das pesquisas científicas e sociais, no mundo dos negócios etc., constituindo, assim, relevantes ferramentas para outras disciplinas.

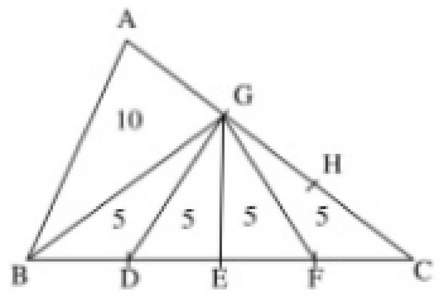
4.11 Área de triângulos

Problema 100 – Comentário

Ligando-se o vértice B aos pontos G e H, obtemos três triângulos de mesma base e mesma altura, consequentemente, de mesma área $\frac{30}{3} = 10$. Observamos também que o triângulo BGC possui área 20.



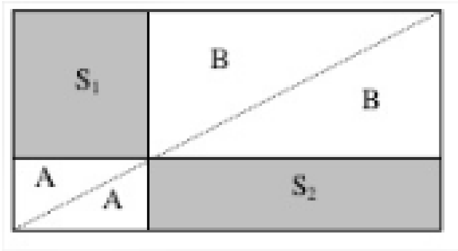
Ligando-se, agora, o ponto G aos pontos D, E e F, obtemos quatro triângulos de mesma base e mesma altura, consequentemente, de mesma área $\frac{20}{4} = 5$.



Concluímos, assim, que a área do triângulo GDE vale 5.

Problema 101 – Comentário

A diagonal de um retângulo divide-o em dois triângulos congruentes, portanto, de mesma área.

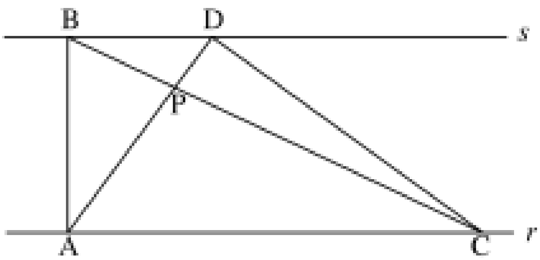


Chamando de S_1 e S_2 as áreas dos triângulos sombreados, temos:

$A + S_1 + B = A + S_2 + B.$

Concluímos que $S_1 = S_2$.

Problema 102 – Comentário



Observando a figura, temos:

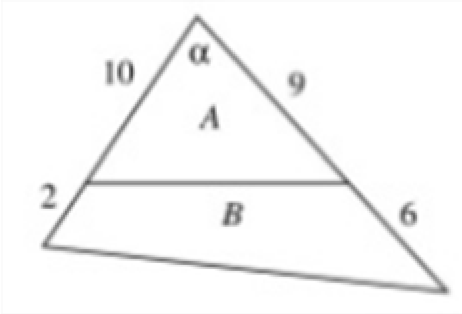
$\rightarrow S_{\Delta PAB} = S_{\Delta DAB} - S_{\Delta PBD}$

$\rightarrow S_{\Delta PCD} = S_{\Delta DBC} - S_{\Delta PBD}$

Como as áreas dos triângulos DAB e DBC são iguais (mesma base e mesma altura), concluímos que $S_{\Delta PAB} = S_{\Delta PCD}$.

Problema 103 – Comentário

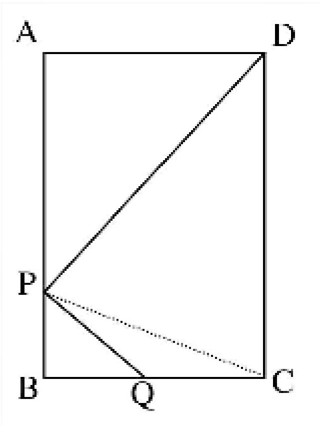
Seja α o ângulo do vértice superior do triângulo e T = A + B, a área do triângulo é maior, conforme a figura abaixo.



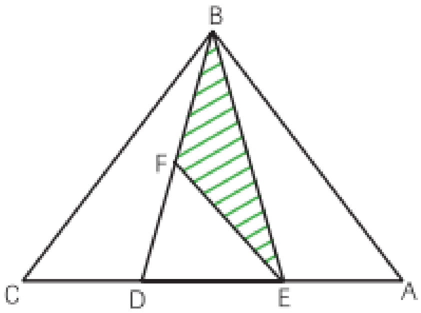
$$\frac{A}{T} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot \text{sen}\alpha}{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{1}{2}$$, ou seja, a área A representa a metade da área T do triângulo maior. Assim, a área B representará a outra metade. Portanto, a razão entre as áreas A e B será $\frac{A}{B} = 1$.

Problema 104 – Comentário

O quadrilátero DPQC representa a parte coberta. Observemos que o triângulo DPC tem área igual à metade da área do retângulo. Logo, a parte coberta ultrapassa 50% da área do retângulo. Ressaltamos que a área que excede a metade da área do retângulo é a área do triângulo PQC.



Problema 105 – Comentário



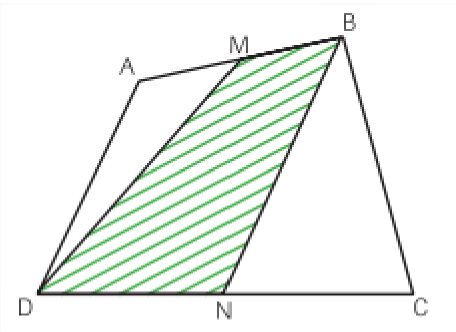
$$S_{\Delta BDE} = \frac{S_{\Delta BCA}}{3} = \frac{S}{3}$$ (os triângulos BCD, BDE e BEA possuem a mesma base e a mesma altura).

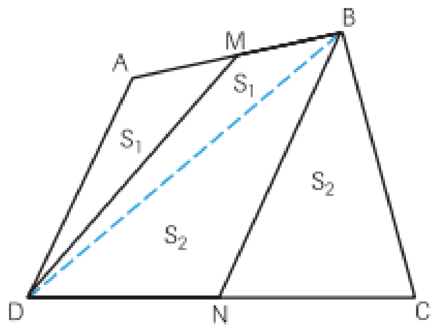
$$S_{\Delta BFE} = \frac{S_{\Delta BDE}}{2} = \frac{\frac{S}{3}}{2} = \frac{S}{6}$$ (os triângulos BFE e FED possuem a mesma base e a mesma altura).

Portanto, $S_{\Delta BFE} = \frac{S}{6}$.

Problema 106 – Comentário

Tracemos, na figura abaixo, o segmento DB e representemos por S_1 as áreas dos triângulos DAM e DMB (mesma base e mesma altura). Por S_2 representemos as áreas dos triângulos DBN e NBC (mesma base e mesma altura).





Assim, temos que $2S_1 + 2S_2 = 32$ m². Portanto, $S_1 + S_2 = 16$ m², que equivale à área procurada.

Algumas considerações:

A ideia aqui é olharmos de maneira diferenciada para algumas expressões utilizadas no cálculo da área de triângulos, em particalar na fórmula $\frac{b\ .\ h}{2}$, compreendendo que triângulos com a mesma base e a mesma altura possuem a mesma área. Esse “novo olhar” nos permite sugerir maiores possibilidades de aplicação de problemas criativos no ensino da área desta figura.

5 PROJETOS FUTUROS

> "É preciso diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, até que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática."
>
> (Paulo Freire)

Realizar um projeto evidenciando uma melhoria na formação dos professores e esperar que o mesmo reflita no seu cotidiano, em sala de aula, só faz sentido se o professor puder conhecer o trabalho, envolver-se com a ideia e motivar-se a realizá-lo.

Por que fazemos o que fazemos? E por que fazemos dessa maneira e não de outra? Questionar nossa prática já não é tão fácil e mudá-la exige mais esforço ainda. Como foi falado antes, sair de nossa zona de conforto e nos arriscar em "mares desconhecidos" exige coragem, convencimento e vontade de alterar o que não está dando certo.

Nossa proposta concreta é iniciar um grupo de estudo com os PCA's das ETI's – Escolas de Tempo Integral de Fortaleza. Num total de catorze professores, eles serviriam de multiplicadores do projeto junto às suas respectivas escolas. Salientamos que cada PCA coordena, diretamente, pelo menos três professores de Matemática. Seriam 56 professores envolvidos na proposta de imediato. Estimulados a estudar sua disciplina, motivados a selecionar problemas interessantes, encorajados a praticar a metodologia e preparados para trocar experiências exitosas e fazer ajustes, temos certeza de que estaremos dando um passo importante para melhoria do ensino da Matemática na escola pública.

Em relação aos alunos, basta imaginar que, em cada ETI, dispomos de 350 alunos, em média. Já seriam em torno de 5.000 alunos experimentando alternativas que podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

No tocante às avaliações, acreditamos que o tempo se encarregará de mudar o cenário de questões em que o aluno apenas aplique as fórmulas diretamente, por problemas curiosos e interessantes, capazes de levá-los a várias alternativas de resolução. A expectativa é iniciar esse trabalho no segundo semestre de 2016, tendo a certeza de obtermos indícios de mudanças dentro do próprio semestre.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As ideias apresentadas nesta dissertação objetivam sugerir caminhos que possam colaborar para o exercício da prática docente que, devido à formação e às questões pedagógicas, exige do professor uma preparação contínua que articule, efetivamente, teoria e prática. É importante termos profissionais competentes, dotados de uma fundamentação teórica consistente, que sejam capazes de analisar e refletir, criticamente, sobre os aspectos que compõem e influenciam o contexto escolar, tais como: aprendizagem, indisciplina, avaliações externas, avaliações internas, família e outros.

Com este estudo, não pretendemos esgotar as possibilidades teórico-metodológicas tampouco apresentá-lo como “a forma ideal” de o professor proceder em sala de aula, intencionamos apenas expor elementos que o ajudem a construir uma prática pedagógica mais positiva para ele e mais significativa para o aluno, quanto ao processo ensino-aprendizagem.

Ressaltamos que o PROFMAT – Programa de Pós-Graduação em Matemática Stricto Sensu, em nível de mestrado, na modalidade profissional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, tem desempenhado um relevante papel na formação docente, constituindo-se um elemento essencial na garantia da qualidade do ensino, sobretudo no que diz respeito à Educação Básica.

E, por último, esperamos ter contribuído, significativamente, para a melhoria do Ensino da Matemática, com um trabalho que muito falta para ser concluído, visto ser apenas um catalisador, no sentido de que outros tópicos ainda serão propostos; vários problemas ainda serão acrescentados e mais estudos e ajustes serão feitos na sua execução.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Plácido. **Matemática fundamental**. Fortaleza: UFC – Departamento de Matemática, 2001.

BÁSICA, Diretoria de Avaliação de Educação. **Avaliação educacional em larga escala**. 1. ed. Juiz de Fora: CAEd, 2008.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Magistério em ação. **Revista do professor de matemática**. Rio de Janeiro, v. 18, jan./abr. 1992.

FORMIN, Dmitri et al. **Cículos matemáticos**: a experiência russa. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GREMAUD, Amaury Patrick et al. **Guia de estudo**: avaliação continuada Ceará. 1. ed. Juiz de Fora: FADEPE, 2009.

HUMANIDADES, Instituto de Ciencias y. **Problemas Selectos**. Peru: Lumbreras, 2008.

LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino da matemática. **Revista do professor de matemática**. Rio de Janeiro, v. 28, mai./ago. 1995.

______. Conceituação, manipulação e aplicações. **Revista do professor de matemática**. Rio de Janeiro, v. 41, set./dez. 1999.

______, Elon Lages et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2005.

______. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2007.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

NCTM. **An agenda for action**: recommendations for school mathematics for the 1980s. Reston: NCTM, 1980.

SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2005.

OSORIO, Didy Ricra. **Geometría**: Áreas. Peru: CUZCANO, 2005.

POLYA, George. O ensino por meio de problemas. **Revista do professor de matemática**. Rio de Janeiro, v. 7, mai./ago. 1989.

______. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PÚBLICAS, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas. **Provas e soluções**: edições 2005 a 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm.>. Acesso em: 02 ago. 2016.