



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

FORTALEZA

2015

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Evandro Parente Junior, D.Sc.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M485e Melo, Carlos David Rodrigues.
Estudo do colapso progressivo de pórticos planos de concreto armado via análise não linear / Carlos David Rodrigues Melo. – 2015.
112 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2015.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
1. Concreto Armado. 2. Análise Não Linear. 3. Colapso Progressivo. 4. Elementos Finitos. I. Título.
CDD 624.1
-

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: 30/09/2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Ph.D. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. João Batista Marques de Sousa Junior, D.Sc. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D.Sc. (Membro Externo)
Universidade Federal de Ouro Preto(UFOP)

Que este trabalho possa beneficiar, direta
ou indiretamente, todos os seres vivos.

AGRADECIMENTOS

Há uma frase de Sir Isaac Newton que traduz muito bem meu sentimento ao escrever este texto de agradecimentos: "Se vi mais longe é porque me apoiei nos ombros de gigantes". E, no meu caso, foram vários gigantes aos quais gostaria de prestar esta singela homenagem.

Gostaria de agradecer à minha Mãe, Maria do Socorro Rodrigues Melo, e à Tia Sônia por terem me criado tão bem e por sempre terem feito tantos sacrifícios por mim, mesmo quando eu era tolo em não reconhecer. Sem dúvida, sem o amor e os cuidados de vocês duas não teria chegado onde cheguei, não só no aspecto profissional, mas humano, moral e emocional.

Gostaria de agradecer à minha amada esposa Patrícia por ser tão companheira, amiga, parceira e amorosa. Obrigada por dividir a vida comigo.

Gostaria de agradecer também ao Centro Budista Kadampa Bodhisattva por tantos ensinamentos, gestos de carinho e acolhimento nos melhores e piores momentos desta caminhada. À todos os Budas e Bodhisattvas por tantas bênçãos, carinho, proteção, sabedoria e compaixão. Ao querido amigo Geshe Kelsang Gyatso (Geshe-la) por ser um refúgio 24 horas por dia. À minha querida professora Gen Kelsang Zangmo, por ter tanta paciência, compaixão, sabedoria e boa vontade com este humilde aluno. À Neide Maia por tantas conversas, caronas, desabafos e carinho e a toda a minha querida sanga.

Gostaria de agradecer aos professores e funcionários do PEC-UFC por tudo que fizeram por mim, em especial ao Professor Evandro Parente Junior por toda a orientação profissional e moral em todos esses anos. Muito obrigado por ser um modelo para todos nós alunos. Espero um dia ser um professor e orientador tão bom para meus alunos quanto o senhor foi para mim.

Ao Bergson, por tantas discussões enriquecedoras e valiosas contribuições para a realização deste trabalho.

À todos os companheiros do Laboratório e do mestrado: Elias, Rafael, Eduardo, Edson, Lucas, Luiz Antônio, Iuri, Pedro, Daniel e todos os outros. Obrigado por tantos momentos de parceria, companheirismo e valiosas discussões sempre tão enriquecedoras e agradáveis.

À todos que, de uma maneira direta ou indireta, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

"O amor é a verdadeira bomba atômica que destrói todos os inimigos, pois quando se ama todos os seres, não há mais ninguém a quem chamar de inimigo.

Venerável Geshe Kelsang Gyatso Rinpoche

RESUMO

A garantia da segurança é uma das principais preocupações dos projetos de estruturas civis. Além das falhas devidas aos carregamentos permanentes e acidentais, é preciso considerar também aquelas ocasionadas por carregamentos especiais ou situações extremas, como sismos, incêndios e explosões. Um dos mecanismos de falha que tem atraído o interesse dos projetistas e pesquisadores nos últimos anos é o Colapso Progressivo (CP), onde uma ação inicialmente localizada acaba tendo um efeito desproporcional sobre a estrutura, podendo levá-la até ao colapso total. Visando contribuir para o estudo deste fenômeno, este trabalho busca desenvolver uma ferramenta computacional capaz de modelar de forma adequada o Colapso Progressivo de estruturas planas de concreto armado. Esta ferramenta é constituída de elementos de pórtico plano baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e leva em consideração a não-linearidade geométrica e a não-linearidade física. Para a primeira é utilizada a descrição cinemática corrotacional de maneira a permitir a representação adequada do comportamento da estrutura quando sujeita a grandes deslocamentos e rotações. Para representação da não-linearidade física, foram implementados modelos constitutivos inelásticos uniaxiais para o concreto e o aço baseados na Teoria da Plasticidade e da Mecânica do Dano. Para a integração dos esforços internos e da matriz tangente na seção transversal da barra, foram utilizados o Método das Fatias e a Quadratura de Gauss. Todas as formulações foram implementadas no programa acadêmico FAST (*Finite Element Analysis Tool*) que vem sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). A ferramenta foi verificada e validada pela modelagem de exemplos disponíveis na literatura. Inicialmente foram considerados exemplos clássicos (*benchmarks*) de vigas e pórticos com comportamento elástico e elastoplástico, seguido da análise de pórticos de concreto armado ensaiados em estudos sobre colapso progressivo. Os resultados obtidos para os exemplos elastoplásticos apresentam uma concordância muito boa com os resultados esperados. No caso das estruturas de concreto armado, os resultados obtidos foram satisfatórios, considerando a maior complexidade do problema e o desconhecimento de alguns dados importantes para a simulação computacional. Assim, pode-se verificar que a ferramenta mostrou-se capaz de modelar o comportamento não linear físico e geométrico de estruturas de concreto em situação de colapso progressivo, incluindo a perda inicial de resistência e a recuperação desta devido ao efeito catenária. Os estudos paramétricos realizados mostraram que a taxa de armadura é o parâmetro mais importante para a resistência ao colapso progressivo, influenciando tanto a capacidade de carga inicial quanto após o aparecimento do efeito catenária. Por outro lado, a resistência do concreto teve pequena influência, enquanto o cobrimento da armadura tem um efeito importante sobre a capacidade de carga inicial, mas não apresenta influência sobre o efeito catenária.

Palavras-chave: Concreto Armado, Análise Não Linear, Colapso Progressivo, Elementos Finitos.

ABSTRACT

Safety is one of the major concerns of structural engineering. Therefore, in the design of building structures may be necessary not only to consider the dead load and live loads, but also special situations, as earthquakes, fire and explosions. In this sense, progressive collapse is a failure mechanism that has attracted the interest of designers and researchers in the last fifteen years, especially after the collapse of the World Trade Center in 2001. Progressive collapse may be defined as a phenomenon where an initially localized damage causes a disproportionate effect on the structure, including its partial or total collapse. The goal of this work is to contribute to the study of this phenomenon developing a computational tool capable of modeling the progressive collapse of reinforced concrete structures. This tool is based on Finite Element Method and uses plane frame elements based on the Euler-Bernoulli theory of beams. Both geometric and material nonlinearity are modeled. The co-rotational kinematic description is used in order to allow adequate representation of the behavior of the structure when subjected to large displacements and rotations. Inelastic constitutive models based on plasticity theory and damage mechanics are used to model the mechanical behavior of reinforced concrete. The integration of sectional forces and the tangent matrix is carried out using the Gauss quadrature or the fiber method. The mathematical formulations presented in this work were implemented in the open source program FAST (Finite Element Analysis Tool) that has been developed in the Laboratory of Computational Mechanics and Visualization (LMCV) of the Federal University of Ceará (UFC). Initially, the tool was tested using classical examples of beams and frames with the geometric and material nonlinearity, and very good results were obtained. After verification, the program was used to analyze reinforced concrete frames tested in laboratory to study progressive collapse. Good agreement was obtained considering the complexity of the problem and the lack of knowledge of some important data required by the computational simulation. Therefore, the computational tool developed in this work was able to model the physical and geometric behavior of concrete structures subjected to progressive collapse, including the initial failure and the recovery of strength due to the catenary effect. The parametric studies performed showed that the reinforcement ratio is the most important parameter for resistance to progressive collapse, while the compressive strength has little influence. In addition, the cover for reinforcement has a significant effect on the initial response and peak load, but loses importance for large deformations where the response is dominated by the catenary effect.

Keywords: Reinforced Concrete, Nonlinear Analysis, Progressive Collapse, Finite Element.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Edifício Ronan Point após o colapso parcial.	8
Figura 2	– Edifício Alfred P. Murrah.	9
Figura 3	– Desmoronamento do Ed. Liberdade no Rio de Janeiro-RJ em 2012 ⁶ . . .	10
Figura 4	– Metodologias e estratégias para prevenção do colapso progressivo. . . .	14
Figura 5	– Critério de verificação do GSA para prevenção do CP.	16
Figura 6	– Efeito Catenária	19
Figura 7	– Ensaio de um pórtico de quatro vãos e três andares	19
Figura 8	– Efeito Membrana	20
Figura 9	– Classificação de ligações segundo o Eurocode.	22
Figura 10	– Diagrama para cálculo da resistência de ligação (F_t) ^{40,41}	23
Figura 11	– Locação de retirada de colunas segundo o GSA.	25
Figura 12	– Descrição cinemática corrotacional.	29
Figura 13	– Modos de deformação local para o elemento de pórtico plano.	29
Figura 14	– Aproximação da integral de $f(x)$ pelo Método das Fatias	40
Figura 15	– Divisão de uma seção retangular pelo Método das Fatias.	41
Figura 16	– Caminhos de equilíbrio.	42
Figura 17	– Modelo constitutivo do aço para a tração e compressão.	44
Figura 18	– Modelo constitutivo do concreto para a compressão.	45
Figura 19	– Ilustração do comportamento de um material hiperelástico.	45
Figura 20	– Descarregamento considerando comportamento elástico e plástico. . . .	46
Figura 21	– Plasticidade perfeita.	48
Figura 22	– Esquema para representar o comportamento elastolástico perfeito.	48
Figura 23	– Comportamento do dispositivo de atrito de Coulomb.	49
Figura 24	– Ilustração do campo de tensões admissíveis.	50
Figura 25	– Ilustração de uma trajetória de tensão admissível.	51
Figura 26	– Ilustração do campo de tensões admissíveis com o <i>hardening</i>	52
Figura 27	– Representação da estrutura matemática do <i>Hardening</i>	53
Figura 28	– Ilustração do Algoritmo de Mapeamento e Retorno no FAST.	57
Figura 29	– Modelo em treliça utilizado para testar os modelos constitutivos.	57
Figura 30	– Teste do modelo de plasticidade perfeita.	58
Figura 31	– Teste dos modelos com encruamento isotrópico.	59
Figura 32	– Teste do modelo <i>ReBar</i>	60
Figura 33	– Teste do modelo constitutivo plástico para o aço na compressão e tração. .	61
Figura 34	– Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão. . .	62
Figura 35	– Processo de evolução de fissuração distribuída para a uma trinca discreta. .	63
Figura 36	– Área intacta e fissurada.	63

Figura 37 – Modelos constitutivos com dano e plasticidade.	66
Figura 38 – Modelo de dano bilinear.	67
Figura 39 – Modelo de dano bilinear	67
Figura 40 – Descrição do carregamento aplicado.	69
Figura 41 – Teste do modelo de dano na compressão.	69
Figura 42 – Visão geral da arquitetura do FAST.	70
Figura 43 – Condições de contorno, geometria e propriedades do material do exemplo.	73
Figura 44 – Curva carga-deslocamento vertical da viga em balanço.	74
Figura 45 – Curvas carga-deslocamento da viga em balanço.	74
Figura 46 – Geometria e propriedades do Pórtico Toggle.	75
Figura 47 – Efeito do número de elementos.	76
Figura 48 – Efeito do número de fatias.	77
Figura 49 – Efeito no número de pontos de Gauss.	77
Figura 50 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle.	78
Figura 51 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle com imperfeição.	78
Figura 52 – Ensaio do pórtico IMF-NIST.	80
Figura 53 – Dados do pórtico IMF-NIST.	80
Figura 54 – Modelo 1 do pórtico IMF-NIST.	81
Figura 55 – Modelo 2 do pórtico IMF-NIST.	81
Figura 56 – Modelo 3 do pórtico IMF-NIST.	81
Figura 57 – Comparação entre os modelos do pórtico IMF-NIST.	82
Figura 58 – Comparação entre os modelos para aço do pórtico IMF-NIST.	83
Figura 59 – Efeito do cobrimento da armadura do pórtico IMF-NIST.	84
Figura 60 – Geometria e seções transversais do Pórtico de Yi.	85
Figura 61 – Malha utilizada no Pórtico de Yi.	86
Figura 62 – Relação carga-deslocamento do pórtico de Yi.	87
Figura 63 – Variação do f_{ck} do Pórtico de Yi.	88
Figura 64 – Variação da área de aço do Pórtico de Yi.	89
Figura 65 – Variação do cobrimento da armadura do Pórtico de Yi.	90
Figura 66 – <i>Return Mapping</i> do modelo de plasticidade com encruamento linear.	98
Figura 67 – <i>UpdateState</i> do modelo de plasticidade com encruamento linear.	98
Figura 68 – <i>Return Mapping</i> do modelo de plasticidade com encruamento não linear.	99
Figura 69 – <i>UpdateState</i> do modelo de plasticidade com encruamento não linear.	99
Figura 70 – <i>Return Mapping</i> do modelo de plasticidade com encruamento exponencial.	100
Figura 71 – <i>UpdateState</i> do modelo de plasticidade com encruamento exponencial.	100
Figura 72 – <i>Return Mapping</i> do modelo de plasticidade para o aço.	101
Figura 73 – <i>UpdateState</i> do modelo de plasticidade para o aço.	101
Figura 74 – <i>Return Mapping</i> do modelo de plasticidade para o concreto.	102
Figura 75 – <i>UpdateState</i> do modelo de plasticidade para o concreto.	103

Figura 76 – <i>Return Mapping</i> do modelo de dano bilinear para o concreto.	104
Figura 77 – <i>UpdateState</i> do modelo de dano bilinear para o concreto.	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Caracterização ocupacional e requerimentos de projeto segundo o DoD. . .	18
Tabela 2	– Fator de incremento de carga para análise linear segundo o GSA.	26
Tabela 3	– Fator de incremento de carga para análise não linear segundo o GSA. . .	26
Tabela 4	– Pontos de Gauss.	39
Tabela 5	– Funções $G(\alpha)$ utilizadas	56
Tabela 6	– Propriedade das barras de aço do Pórtico IMF-NIST.	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Estrutura deste trabalho	11
2	COLAPSO PROGRESSIVO	12
2.1	Abordagem Não Estrutural ou Controle de Eventos	15
2.2	Abordagens Estruturais	17
2.2.1	Métodos Indiretos de Projeto	17
2.2.1.1	<i>Método da Força de Conexão (Tie Force Method)</i>	21
2.2.2	Métodos Diretos de Projeto	23
2.2.2.1	<i>Método da Resistência Local Específica</i>	23
2.2.2.2	<i>Método do Caminho Alternativo de Carga</i>	24
3	ANÁLISE NÃO LINEAR	28
3.1	Formulação corrotacional	29
3.1.1	Elemento local	33
3.2	Integração Numérica	37
3.2.1	Quadratura de Gauss	38
3.2.2	Método das Fatias	39
3.3	Solução de Sistemas de Equações Não Lineares	41
3.4	Modelos Constitutivos para Concreto Armado	43
3.4.1	Modelos Constitutivos Elásticos	43
3.4.2	Modelos Constitutivos Elastoplásticos	46
3.4.2.1	<i>Plasticidade Perfeita</i>	47
3.4.2.2	<i>Plasticidade com Endurecimento Isotrópico</i>	51
3.4.2.3	<i>Algoritmo de Mapeamento de Retorno</i>	56
3.4.2.4	<i>Modelos Constitutivos Elastoplásticos</i>	57
3.4.2.5	<i>Modelo Constitutivo Elastoplástico do Aço</i>	59
3.4.2.6	<i>Modelo Constitutivo Elastoplástico do Concreto</i>	61
3.4.3	Mecânica do Dano	62
3.4.3.1	<i>Modelo de Dano Bilinear</i>	66
3.5	Implementação Computacional	70
3.5.1	A classe <i>cMaterial</i> e Modelos Constitutivos	71
4	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	73
4.1	Viga em Balanço	73
4.2	Pórtico Toggle	75

4.3	Pórtico IMF-NIST	79
4.4	Pórtico de Yi (2008)	84
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	92
	REFERÊNCIAS	93
6	APÊNDICE A - ALGORITMO DE MODELO CONSTITUTIVO ELASTO- PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR, NÃO LINEAR E EXPO- NENCIAL	98
7	APÊNDICE B - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO ELASTO- PLÁSTICO PARA O AÇO	101
8	APÊNDICE C - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO ELASTO- PLÁSTICO PARA O CONCRETO	102
9	APÊNDICE D - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO CONSIDERANDO DANO LINEAR	104

1 INTRODUÇÃO

No projeto de estruturas, deve-se tentar prever as solicitações que ocorrerão ao longo da sua vida útil e buscar evitar, ou pelo menos amenizar, os seus efeitos críticos. Isto permite diminuir possíveis riscos à vida e à própria edificação.

No que diz respeito às ações externas, deve-se considerar efeitos devidos aos carregamentos permanentes, acidentais e situações extremas. Estas, apesar de menos comuns, podem ter efeitos catastróficos, sendo uma das possíveis consequências o Colapso Progressivo (CP). Este fenômeno tem ganhado foco nas pesquisas e nos textos normativos internacionais nos últimos anos e ocorre quando uma ação localizada provoca uma avaria desproporcional em relação ao dano inicial, como na queda de um castelo de cartas¹⁻³.

O CP ganhou mais atenção a partir do colapso parcial do edifício *Ronan Point*, em Londres, no ano de 1968⁴. Este edifício era constituído de painéis de concreto pré-moldado e entrou parcialmente em colapso após uma explosão causada por um vazamento de gás no 18º andar, conforme ilustra a Figura 1. Estudos posteriores mostraram que a edificação carecia de ductilidade devido ao tipo de ligação adotada para os painéis de concreto⁴⁵.

Figura 1 – Edifício Ronan Point após o colapso parcial.

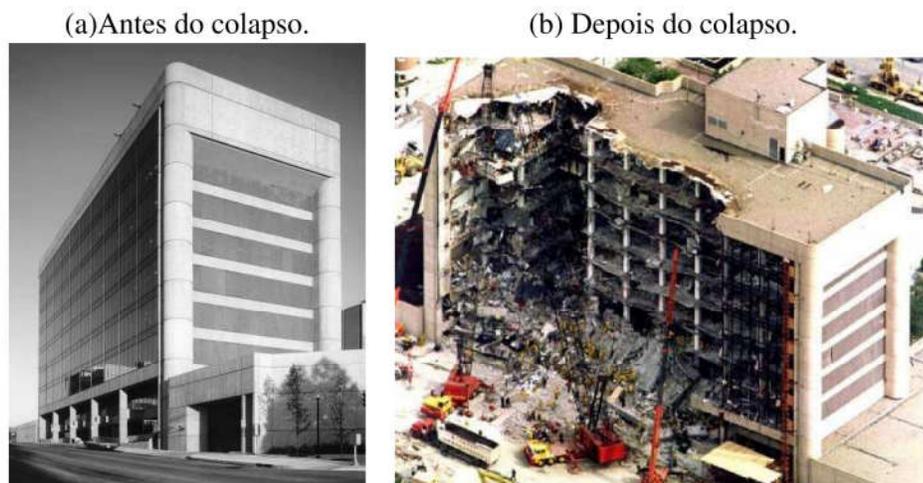


fonte: <http://www.failedarchitecture.com/the-downfall-of-british-modernist-architecture/>, acessado em Setembro de 2015.

Outro caso bastante significativo foi o ataque terrorista ao Edifício *Alfred P. Murrah*, instalação de diversos escritórios do governo americano em *Oklahoma City*, no ano de 1995. Um caminhão bomba que estava estacionado na frente do prédio explodiu causando um dano muito grande à parte norte da estrutura conforme mostram as Figuras 2 (a) e (b). Estudos¹ mostraram que o dano se espalhou por cerca de 21,3 m de largura do edifício e que três pilares que sustentavam uma viga no terceiro andar foram imediatamente destruídos pela explosão,

provocando um colapso progressivo dos andares superiores.

Figura 2 – Edifício Alfred P. Murrah.



fonte: <http://www.failedarchitecture.com/the-downfall-of-british-modernist-architecture/>, acessado em Setembro de 2015.

Casos de Colapso Progressivo também podem ser encontrados no Brasil. Em 2012, no Rio de Janeiro, entrou em colapso o Edifício Liberdade. Este tinha vinte andares e seu desabamento desencadeou o colapso de mais dois edifícios vizinhos: o Edifício Colombo, com dez andares, e o Edifício Treze de Maio, com quatro andares. Na Figura 3 é possível verificar a disposição destes edifícios antes do colapso. A perícia indicou que as modificações realizadas por uma reforma no 9º andar comprometeram a estrutura e provocaram o desencadeamento do colapso em um efeito dominó⁶. Ao todo, morreram 22 pessoas neste acidente.

Desde o emblemático caso do *Ronan Point* na década de 60, diversos estudos significativos vem sendo realizados com a finalidade de melhor compreender e modelar o colapso progressivo. Trabalhos pioneiros como o de Ellingwood⁷, por exemplo, já começavam a discutir algumas abordagens para análise e prevenção do CP em 1978 e viriam a influenciar diversos códigos normativos no mundo.

No entanto, Mohamed⁸ lembra que, desde o atentado terrorista ao *World Trade Center* em Nova York no ano de 2001, a literatura científica e técnica relacionada ao CP tem crescido significativamente, pois o aumento da preocupação com a robustez das edificações, aliada ao desenvolvimento da Mecânica Computacional e da capacidade de processamento dos computadores propiciou o aumento da capacidade e viabilidade de análises estruturais cada vez mais complexas.

Figura 3 – Desmoronamento do Ed. Liberdade no Rio de Janeiro-RJ em 2012⁶



Fonte: <http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2012/01/peritos-investigam-causas-de-desabamento-no-rio.html>", Acessado em Setembro 2015.

Nos últimos quatorze anos pode-se encontrar diversos trabalhos que deram importantes contribuições para o estudo e prevenção do CP. Exemplo destes são Li *et al*⁹, que propões um novo método para calcular a força de ligação (*Tie Force*) entre elementos de estruturas de concreto armado considerando uma redistribuição espacial de esforços, efeitos dinâmicos e correção de força interna. Tem-se ainda Salem *et al*¹⁰, que se utiliza de um modelo de fissuração discreta tridimensional para estudar e obter um projeto econômico e eficiente para resistir ao CP. Também é importante destacar diversos trabalhos que realizaram ensaios, em escala real e reduzida, de estruturas de concreto armado¹¹⁻¹³ e/ou em aço¹⁴⁻¹⁷ que além de contribuir para o entendimento do fenômeno em si, podem ser utilizados como *benchmarks* para diversos modelos computacionais.

Nesse sentido, o desenvolvimento de modelos computacionais capazes de captar o colapso progressivo mostra-se de grande utilidade para se obter edificações cada vez mais seguras e econômicas, pois, sem grandes custos, pode-se verificar a sua capacidade de resistir a diversos agentes externos críticos como impactos de automóveis, ataques terroristas, sismos etc. No entanto, efeitos que levam o concreto armado ao seu limite de utilização tem forte dependência da consideração da não-linearidade geométrica e física para a acurácia da sua modelagem. Dessa forma, o modo como a diferença de resistência à tração e compressão, fissuração, localização de deformação etc, são levadas em consideração estão diretamente rela-

cionados com a segurança e economia da edificação.

Visto a limitada literatura técnica sobre CP no Brasil, esse trabalho tem o principal objetivo de contribuir para a melhor compreensão deste fenômeno. Para isso, busca-se desenvolver uma ferramenta computacional capaz de considerar de maneira adequada o efeito do CP em estruturas planas de concreto armado, além de realizar um extenso levantamento bibliográfico capaz de caracterizar o estado da arte do assunto na atualidade.

A ferramenta desenvolvida é utilizada em todos os exemplos deste trabalho e tem potencial para ser para explorar diversos aspectos do CP não explorados aqui. Dessa forma, um objetivo secundário dessa pesquisa é servir de suporte para que futuros trabalhos no assunto possam ser realizados.

Nesta dissertação é utilizado o programa acadêmico FAST (*Finite Element Analysis Tool*). Este programa é baseado no Método dos Elementos Finitos e contém elementos unidimensionais, planos e sólidos. Além disso, vem sendo desenvolvido por diversos alunos e professores do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). Antes da realização deste trabalho, o programa já possuía a formulação cinemática corrotacional para a captação de grandes deslocamentos. Dessa forma, este trabalho se concentra apenas o aspecto da não-linearidade física, sendo considerada através de modelos constitutivos unidimensionais inelásticos baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica dos Dano. A integração dos esforços e da Matriz de Rigidez Tangente é realizada utilizando a Quadratura de Gauss e o Método das Fatias.

1.1 Estrutura deste trabalho

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro está a introdução, motivação e objetivos desse trabalho. Neste, busca-se traçar um panorama geral do colapso progressivo na atualidade, de maneira a apresentar casos ocorridos, o que já se conhece sobre o assunto e o que pode ser feito para aprofundar esses conhecimentos.

O Capítulo 2 busca apresentar o estado da arte da modelagem e prevenção do colapso progressivo. É traçado um panorama de acordo com os principais textos normativos internacionais que tratam do assunto, bem como dos mais recentes avanços do conhecimento relacionado.

Já no Capítulo 3, apresenta-se os conceitos de análise não linear utilizados para a modelagem do CP. Neste encontram-se a formulação do elemento utilizado, descrição cinemática, técnicas de integração e modelos constitutivos. Estes últimos são apresentados através da descrição do comportamento esperado, formulação matemática, quadros resumos e algoritmos implementados.

No Capítulo 4 estão os testes realizados para validar a ferramenta e estudar diversos aspectos do fenômeno. E, finalmente, no Capítulo 5 estão as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 COLAPSO PROGRESSIVO

Não há na literatura técnica uma definição única para colapso progressivo. Do ponto de vista do *United States General Services Administration (GSA)*, conforme descrito no *Progressive Collapse Analysis and Design Guidelines* de 2013², o CP está relacionado a um dano desproporcional à magnitude do evento inicial, fato que o leva a ser também conhecido como Colapso Desproporcional.

O relatório elaborado pelo *United States National Institute of Standards and Technology (NIST-7396)* em 2007 intitulado *Best Practices for Reducing the Potential for Progressive Collapse in Buildings*¹, assim como a norma *ASCE/SEI 7-10 Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*¹⁸, definem CP como uma propagação de danos locais, a partir de um evento iniciador, de um elemento para outro, resultando eventualmente no colapso de uma estrutura inteira ou uma parte desproporcionalmente grande desta.

No Eurocode,¹⁹ não há uma definição específica para CP. No entanto, há o conceito de robustez, definida como a habilidade de uma estrutura resistir a eventos extremos como incêndios, explosões, impactos ou consequência de erros humanos, sem ser danificada de maneira desproporcional ao dano original. Dessa forma, quanto mais robusta for uma estrutura, menos suscetível ao CP ela será.

Apesar dessas e de diversas outras normas técnicas apresentarem diferentes modos de definir esse evento, todos concordam em caracterizá-lo como a ocorrência de um dano desproporcional a uma falha inicial da estrutura. Starossek²⁰ complementa essas definições afirmando que há diferentes mecanismos que dão origem ao CP e propõe uma classificação baseada nestes conforme pode ser visto a seguir:

- **Colapso tipo panqueca (*pancake-type collapse*):** É provocado pela perda da capacidade total ou parcial de um elemento estrutural vertical. Esta faz com que uma parte superior da estrutura, como uma laje, desabe sobre a imediatamente abaixo e fazendo com que esta também venha a colapsar pelo excesso de carga, gerando uma reação em cadeia. Neste tipo de colapso, a propagação do dano é essencialmente vertical, foi o caso o ocorrido no atentado do *World Trade Center*, em Nova York.
- **Colapso tipo zíper (*zipper-type collapse*):** Colapso provocado pela falha de um dos elementos estruturais fazendo surgir uma carga impulsiva na estrutura com uma propagação de dano tipicamente transversal. Um exemplo é à falha de um cabo em uma ponte estaiada ou um dos tirantes em uma cortina de contenção atirantada.
- **Colapso tipo dominó (*domino-type collapse*):** Colapso característico de sistemas horizontais como redes de transmissão de energia. Neste, o tombamento de um elemento provoca a falha do seguinte e assim por diante. A transmissão de

dano pode ser paralela ou perpendicular à força aplicada, mas essencialmente horizontal.

- **Colapso de seção (*section-type collapse*):** Colapso provocado pela propagação de um corte na seção originado pelo rompimento de um filete de solda ou pela ruptura de uma barra da armadura de uma viga de concreto, por exemplo. Isto provoca a falha da seção e sobrecarrega criticamente outros elementos que também colapsam. O autor afirma que a principal diferença entre este e o colapso do tipo zíper é que no primeiro o mecanismo de falha trabalha com um sistema contínuo e o segundo com um discreto.
- **Colapso do tipo misto (*mixed-type collapse*):** Dado pela combinação dos outros tipos de colapso. Pode ser encontrado no caso do atentado ao edifício *Alfred P. Murrah*, dado pela associação do colapso tipo panqueca e do tipo zíper.

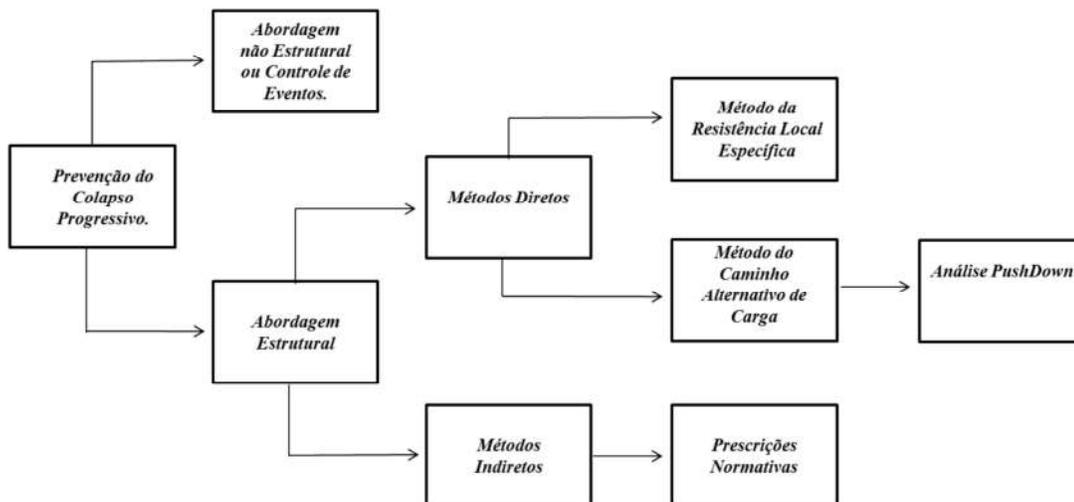
Baseado nestas definições, o autor afirma que uma melhor compreensão teórica das diversas categorias do fenômeno podem contribuir para o desenvolvimento e melhoria dos mecanismos de prevenção ao CP.

Geralmente, divide-se a abordagem de controle do colapso progressivo em dois ramos: **Abordagem Não Estrutural** e **Abordagem Estrutural**. Na primeira há a preocupação de prevenir que a estrutura seja exposta a eventos que possam desencadear o CP. Para isso, são tomadas medidas de segurança de caráter exclusivamente preventivo. Assim, esta abordagem também é conhecida como **Controle de Eventos**.

Na segunda opção, considera-se que o evento desencadeador do CP já ocorreu e que deve-se voltar a atenção em verificar se a estrutura vai ser capaz de resistir aos esforços solicitantes calculados. Para isso, pode-se fazer uma análise estrutural e dimensionar os elementos diretamente, abordagem conhecida como Método Direto de Projeto (*Direct Design Approach*). Este contém dois métodos principais: o Método da Resistência Local Específica (*Specific Local Resistance Method*) e o Método do Caminho Alternativo de Carga (*Alternate Load Path Method*). As análises geralmente utilizadas incluem as estáticas e dinâmicas, lineares e não lineares. Uma abordagem alternativa é a Análise *Push-Down*, que consiste em uma aproximação estática de respostas obtidas em uma análise dinâmica. Esta foi adaptada para o CP a partir da *Análise Push-over*, geralmente utilizada para sismos²¹⁻²⁴.

A outra opção consiste em utilizar uma série de prescrições normativas para garantir a continuidade e redundância adequada da estrutura sem a necessidade de procedimentos mais complexos e trabalhosos. Esta abordagem é conhecida como Método Indireto de Projeto (*Indirect Design Approach*). A organização destas metodologias e estratégias podem ser visualizadas na Figura 4.

Figura 4 – Metodologias e estratégias para prevenção do colapso progressivo.



Fonte: Próprio autor.

De maneira geral, estas metodologias visam reduzir a probabilidade de que o colapso progressivo (CP) venha a ocorrer. No entanto, se utilizam de procedimentos diferentes. Isso pode ser mais facilmente compreendido analisando a expressão:

$$P(CP) = P(CP|LD) \cdot P(LD|H) \cdot P(H) \quad (1)$$

onde $P(CP)$ é a probabilidade de haver colapso progressivo na estrutura, $P(H)$ é a probabilidade de haver um evento crítico (H), $P(LD|H)$ é a probabilidade do evento (H) provocar um dano local (LD) e $P(CP|LD)$ é a probabilidade de um dano local (LD) seja transmitido a outras partes da estrutura e provoque um Colapso Desproporcional (CP)¹.

Analisando a Equação (1), pode-se traçar uma perspectiva global do modo como os diversos textos normativos e trabalhos científicos abordam o CP. No Controle de Eventos, o foco é na diminuição de $P(H)$, isto é, visa exclusivamente impedir que haja eventos que venham a aplicar cargas prejudiciais à estrutura. Já na *abordagem estrutural*, considera-se que o evento inicial já ocorreu, $P(H) = 1$, e deve-se projetar a estrutura para receber o carregamento adicional.

No Método da Resistência Local Específica (MRLE), considera-se que o evento (H) não deve gerar um dano inicial na estrutura. Isto é, visa diminuir $P(LD|H)$. Isso é realizado através do reforço de todos ou apenas alguns pilares específicos (pilares-chaves) de maneira que estes não sofram danos significativos devido aos esforços adicionais e nem os transmitam aos demais elementos da estrutura.

Já no Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC), considera-se que $P(LD|H)$ e $P(H)$ são iguais a 1. Isto é, já houve um evento com potencial para provocar colapso progressivo e este já causou um dano local como a perda de um ou mais pilares. O método consiste em

propiciar continuidade e redundância estrutural para que o esforço extra seja redistribuído aos outros elementos da estrutura sem causar uma propagação desproporcional do dano.

As *Prescrições de Projeto* tem objetivos semelhantes ao MCAC. No entanto, esta realiza uma série de recomendações para tornar a estrutura mais robusta de maneira mais rápida e sem grandes cálculos.

2.1 Abordagem Não Estrutural ou Controle de Eventos

Esta abordagem é discutida profundamente no NIST 7396¹ e consiste em adotar medidas não estruturais e preventivas para diminuir a probabilidade de que um evento em potencial (H) desencadeie um CP. É considerada a metodologia com melhor custo-benefício e inclui mudanças no local de construção do edifício, controle de acesso e de materiais inflamáveis/explosivos etc.

As medidas a serem tomadas são proporcionais ao grau de proteção que a edificação requer e, portanto, necessitam de um espectro de risco da mesma. Há diferentes maneiras de definir a faixa de risco de uma dada edificação. Cada texto normativo utiliza-se de um critério e, de acordo com a classe de risco requerida, uma ou mais abordagens podem ser recomendadas.

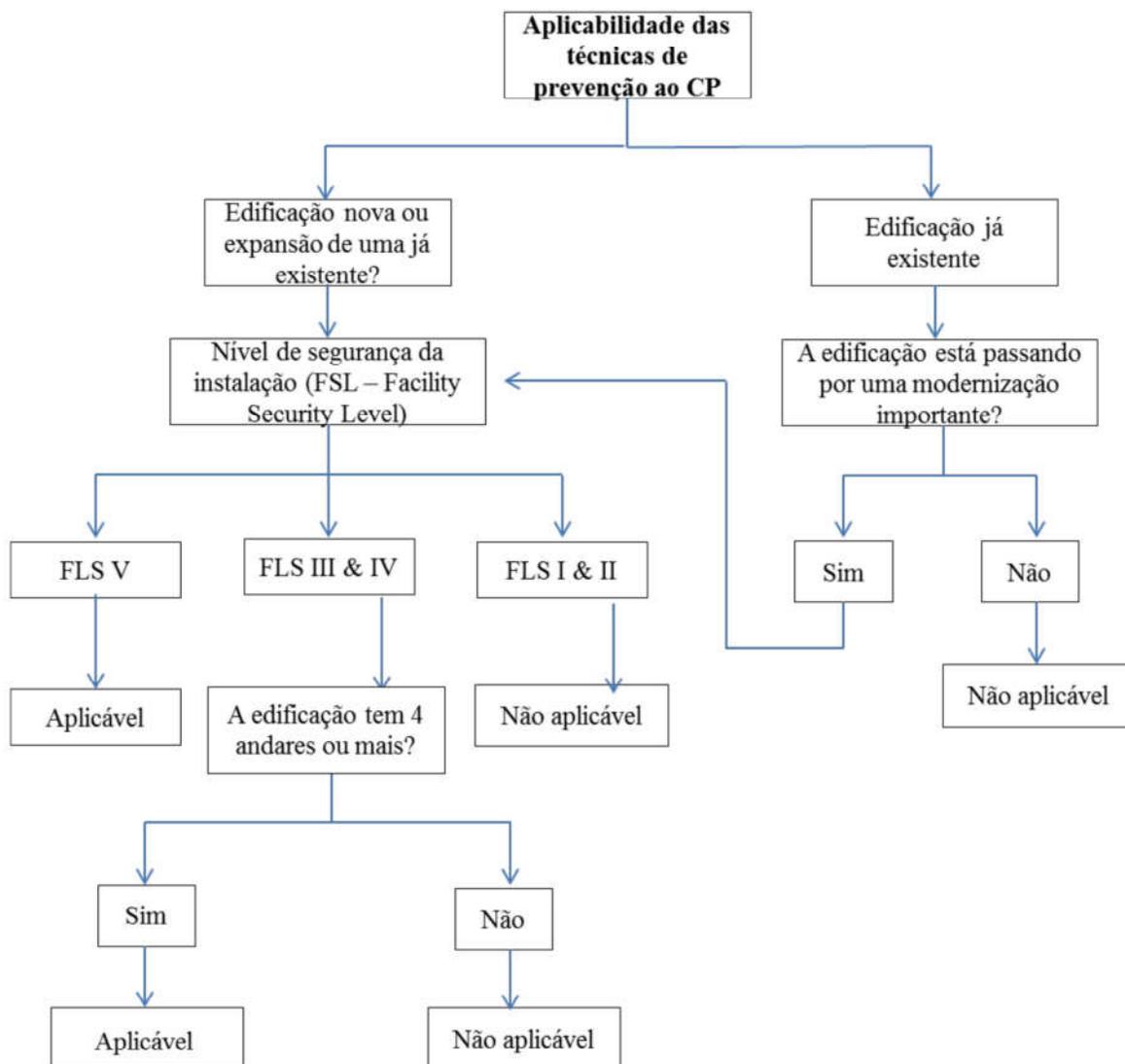
Um exemplo deste mapa de perigos é proposto na norma americana IS-892-2010 - *Physical Security Criteria for Federal Facilities*²⁵ (Critério de Segurança Física para Instalações Federais). Esta propõe a classificação da estrutura em classes de risco denominadas FSL (*Facility Security Levels*) que variam de I a V. Algumas normas, como o GSA², utilizam este coeficiente para verificar a necessidade de medidas de prevenção do CP, como indica a Figura 5.

Dessa forma, de acordo com a classificação de utilização da edificação, podem ser adotados níveis de medida de segurança diferentes. De maneira geral, o NIST 7396¹ recomenda que as medidas não estruturais de prevenção ao Colapso Progressivo devem contemplar a análise de quatro pontos muito importantes:

- Avaliação dos riscos inerentes à edificação;
- Medidas para diminuir os riscos associados e a exposição da edificação;
- Avaliação das consequências da falha;
- Avaliação de medidas alternativas para reduzir as consequências da falha.

A avaliação dos riscos inerentes diz respeito à identificação dos eventos críticos inerentes ao tipo de utilização da construção. Por exemplo, um laboratório onde haverá manipulação de substâncias inflamáveis terá risco de explosão, um prédio que tem os pilares expostos à rua correrá risco de impacto de veículos e assim por diante.

Figura 5 – Critério de verificação do GSA para prevenção do CP.



Fonte:²

Já as medidas para diminuir a exposição da edificação e dos riscos associados descrevem o que pode ser feito para diminuir a probabilidade destes ocorrerem. No caso de edificações com alto risco de impactos de veículos, pode-se tentar realocar os pilares para uma posição mais afastada da rua ou criar barreiras para absorver o impacto.

A avaliação das consequências da falha incentiva uma análise dos efeitos frente ao colapso da edificação. Esta também depende do uso que é dada à mesma e pode elevar o grau de proteção requerido. Por exemplo, o colapso de um hospital pode ter consequências muito mais devastadoras do que o de uma ponte.

E, por último, na avaliação de medidas alternativas para reduzir as consequências da falha buscam-se tomar medidas para diminuir os impactos do item anterior caso um dado

evento crítico não possa ser evitado. Um exemplo é mudar a utilização de uma edificação (de um hospital para um prédio de escritório, por exemplo), colocar alas mais críticas de um hospital para uma zona menos exposta ao CP ou até mesmo mudar a localização da construção.

Uma outra medida simples e não estrutural que pode ser tomada, diz respeito a reformas. Uma alteração em um dado elemento estrutural sem a avaliação de um especialista pode ter resultados trágicos, como aconteceu no colapso do Edifício Liberdade⁶ citado anteriormente. Neste caso, o maior rigor dos órgãos responsáveis pode prevenir diversos casos de CP em potencial.

2.2 Abordagens Estruturais

Como comentado anteriormente, a abordagem estrutural objetiva reduzir a probabilidade de ocorrência do colapso progressivo $P(CP)$ dado que um evento crítico em potencial já ocorreu, ou seja, $P(H) = 1$. Portanto, busca-se aqui a redução da probabilidade do evento provocar um dano local $P(LD|H)$ (Método da Resistência Local específica) e/ou da probabilidade de um dano local $P(CP|LD)$ ser transmitido a outras partes da estrutura (Método do Caminho Alternativo de Carga e Prescrições Normativas).

2.2.1 Métodos Indiretos de Projeto

Esta metodologia consiste em regulamentar uma série de prescrições normativas de maneira a oferecer continuidade e robustez à estrutura. Geralmente, esta abordagem não necessita de análises estruturais mais complexas, é considerada como uma prevenção inicial ou primária do colapso progressivo, sendo comumente indicada para edificações com baixo risco inerente de utilização^{1,3,18}.

Esta é a principal abordagem adotada pelo Código Britânico BS 5950-2000 desde o incidente do Ronan Point em 1968⁸ e pode ser encontrada também em diversos outros textos normativos, como a NBR 6118:2014²⁶, Eurocode 1:2004¹⁹ e ACI 318-2011²⁷.

Nesse sentido, o ASCE 7-10¹⁸ estabelece uma série de recomendações de projetos para melhorar a integridade estrutural que incluem: utilizar um sistema integrado de ligações entre os elementos estruturais, considerar o efeito catenária das lajes e vigas, compartimentalização da estrutura e assim por diante. No entanto, não há nenhuma indicação quantitativa no que diz respeito a utilização dos métodos Diretos ou Indiretos de Projeto.

Já o DoD³ classifica inicialmente a estrutura em uma Categoria de Ocupação (*Occupation Category*) que varia de I a IV. A partir disso são feitas indicações sobre as abordagens de prevenção do CP que devem ser adotadas, conforme pode ser visualizado na Tabela 1.

Tabela 1 – Caracterização ocupacional e requerimentos de projeto segundo o DoD.

CLASSIFICAÇÃO OCUPACIONAL	REQUERIMENTOS DE PROJETO
I	Sem requisitos específicos
II	Opção 1: Método da Força de Conexão (<i>Tie Force Method</i>) para toda a estrutura e o Método da Resistência Local Específica <i>Enhanced Local Resistance</i> para os pilares ou paredes estruturais dos cantos e os penúltimos no primeiro andar. ou Opção 2: Método do Caminho Alternativo de Carga (<i>Alternate Path Method</i>) para pilares específicos e mudança de locação das paredes estruturais.
III	Método do Caminho Alternativo de Carga para pilares específicos, mudança de locação das paredes estruturais e Método do Caminho Alternativo de Carga para todo o perímetro de pilares e paredes estruturais do primeiro andar.
IV	Método da Força de Conexão e Método do Caminho Alternativo de Carga para pilares e paredes estruturais e Método do Caminho Alternativo de Carga para todo o perímetro de pilares e paredes estruturais do primeiro andar.

Fonte:³

No texto normativo brasileiro, NBR 6118:2014²⁶, a consideração do colapso progressivo é feita em dois tópicos: no item 14.6.4.3, que propõe condições de ductilidade para formação de rótulas plásticas em elementos reticulados (vigas e pilares) e no item 19.5.4, que propõe uma armadura contra o colapso progressivo durante o detalhamento das lajes, quando existirem pilares no seu interior.

Estudos mais aprofundados e comparativos sobre o modo como esse assunto é abordado nas principais normas técnicas que tratam do assunto podem ser encontradas nos trabalhos de Mohamed⁸, Menchel²⁴ e, no já citado, NIST 7396¹.

O foco das especificações técnicas concentra-se na resistência das ligações dos elementos para que, caso um dos destes seja danificado, geralmente um pilar, a estrutura possa redistribuir os esforços adicionais e evitar a progressão do colapso. Este efeito é conhecido na literatura técnica como *Bridge Over*²⁴.

O *Bridge Over* ocorre devido a dois fenômenos chamados de *Efeito Catenária* e *Efeito de Membrana*. O primeiro ocorre quando, na perda de um pilar central, por exemplo, uma viga deixa de estar submetida a um estado de flexão e passa a estar sob flexo-tração com a seção completamente tracionada e apresentando comportamento semelhante à um cabo^{28,29}. Esse efeito pode ser facilmente visualizado na Figura 6.

Figura 6 – Efeito Catenária



Fonte: <http://engineering.uottawa.ca/downloads/pdf/blast.pdf>, Acessado em Setembro 2014.

O *Efeito Catenária* já é bastante conhecido e tem sido foco de diversos estudos teóricos e práticos. Valipour e Foster²⁹, por exemplo, aplicaram uma formulação de elementos finitos baseados no Método da Forças (*Forced-Based Formulation*) para captar o Efeito Catenária no caso de CP de estruturas de concreto.

Já Yi *et al*¹¹ realizaram um estudo experimental em um pórtico plano de quatro vãos e três andares, ver Figura 7, e descrevem, entre outras coisas, o exato momento em que o Efeito Catenária inicia e qual o seu impacto na estrutura como um todo.

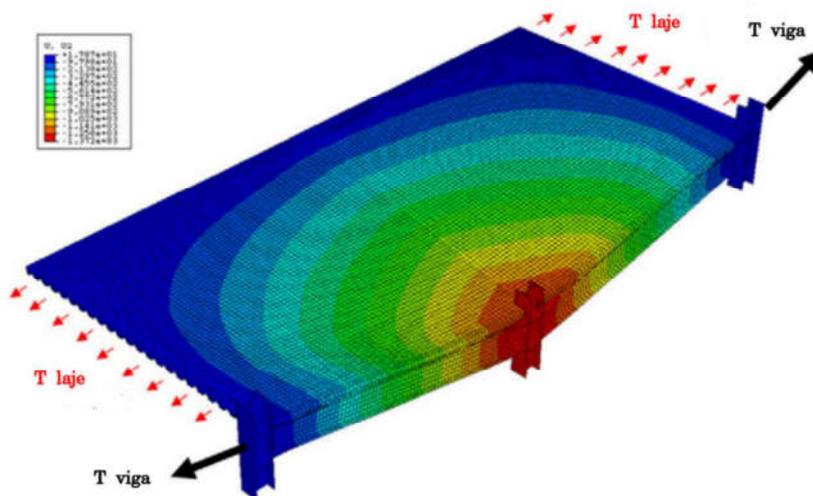
Figura 7 – Ensaio de um pórtico de quatro vãos e três andares



Fonte:¹¹.

O *Efeito de Membrana* ocorre quando os esforços axiais da laje não podem ser mais desprezados passando a contribuir, assim como o efeito catenária, para a resistência da estrutura ao CP^{30,31}. Na Figura 8, pode-se visualizar uma ilustração de como isso ocorre.

Figura 8 – Efeito Membrana



Fonte:³⁰.

Nesse sentido, Kim *et al*³⁰ apresentam um modelo analítico do efeito da laje considerando a perda de um dos pilares. Inicialmente uma relação tensão-deformação simples é proposta a partir de uma análise de elementos finitos. Em seguida, adicionando a parcela de energia absorvida pela laje à equação de equilíbrio energética, propõe uma metodologia de análise não linear estática de colapso progressivo baseada no equilíbrio energético.

Em outro trabalho teórico importante, Keyvani *et al*³² consideram o efeito das forças de compressão de membrana e afirmam que sua consideração melhora a resistência a falha progressiva da estrutura e que sua desconsideração subestima a resistência da mesma.

Há também diversos estudos experimentais como o já citado de Yi *et al*³¹ e Kokot *et al*³³. Neste último, estudou-se extensivamente a interação da laje com os elementos do pórtico, ambos de concreto armado, através de dados obtidos em ensaios e análises numéricas. Ao final, utilizando-se do Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC) e considerando efeitos quasi-estáticos e dinâmicos, além da consideração do local do elemento colapsado, afirmam que o fator dinâmico igual a 2 é demasiado conservativo (valores mais exatos obtidos estão entre 1,72 e 1,87) e que a desconsideração do efeito dinâmico no estudo do CP pode trazer resultados contra a segurança.

Além dos trabalhos apresentados, diversos estudos na literatura técnica buscam uma melhor compreensão da redistribuição dos esforços nas estruturas, sendo a maioria dos trabalhos experimentais relacionados à estruturas metálicas³⁴⁻³⁸.

2.2.1.1 Método da Força de Conexão (*Tie Force Method*)

O Método da Força de Conexão (*Tie Force Method*) foi o primeiro método utilizado para prevenir o CP depois do incidente com o *Ronan Point*. Inicialmente foi adotado pelo Código Normativo Britânico (*British Code*) e posteriormente pelo Eurocode e outros códigos internacionais^{8,39}.

Este método consiste em conectar mecanicamente elementos estruturais (vigas e pilares) de maneira que estes possam desenvolver caminhos alternativos de carga em caso de colapso de um de seus membros. A principal diferença deste para os demais métodos é o fato dessas conexões serem dimensionadas através de correlações presentes nos textos normativos referentes. Isto é, sem a necessidade de análises estruturais mais complexas. Para o concreto armado, isto é feito através da adição de armaduras extras nas ligações de maneira a oferecer continuidade à estrutura como um todo. Vale salientar que, as armaduras de ligação são diferentes das de reforço, típicas deste tipo de material, pois são obtidas por metodologias diferentes e tem funcionalidades distintas.

De forma semelhante ao Código Britânico (BS6399⁴⁰ e BS8110⁴¹), o Eurocode 2⁴² classifica estas ligações em quatro classes de acordo com a sua localização na estrutura, conforme é listado abaixo e ilustrado na Figura 9.

- Ligação interna;
- Ligação periférica;
- Ligação horizontal de colunas ou paredes estruturais;
- Ligação vertical.

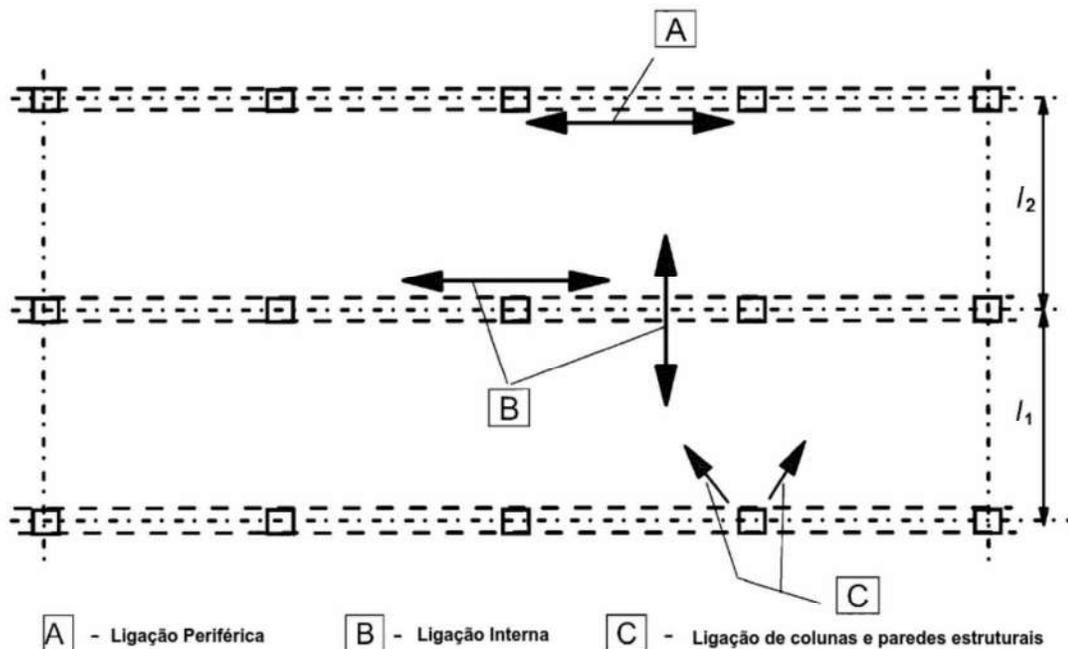
Segundo esse código, as ligações internas devem ser colocadas em cada andar e no teto e devem ser colocadas em direções de aproximadamente noventa graus, conforme ilustra a Figura 9. Em cada direção, a armadura deve ser capaz de resistir a uma força de tração ($F_{tie,int}$) no valor de $20kN$ por comprimento de vão ($20kN/m$). No entanto, estes valores podem mudar de acordo com os anexos nacionais (*National Annexes*) de cada país.

Ligações periféricas também devem ser utilizadas em cada andar e no teto, mas com um comprimento de 1,2 m depois da ligação. Esta deve resistir a uma força $F_{tie,per}$ calculada por:

$$F_{tie,per} = l_i \cdot q_1 \geq Q_2 \quad (2)$$

onde $F_{tie,per}$ é a força de ligação entre os elementos periféricos, l_i é o comprimento do vão, q_1 e Q_2 são $10kN/m$ e $70kN$, respectivamente. No entanto, outros valores podem ser obtidos de acordo com os anexos nacionais (*National Annexes*) de cada país. Vale ressaltar que as ligações periféricas devem ser conectadas com as internas de maneira a garantir a transmissão do esforço.

Figura 9 – Classificação de ligações segundo o Eurocode.



Fonte:⁴².

Já nas ligações horizontais de pilares e/ou paredes estruturais, todos estes elementos do perímetro devem ser ligados horizontalmente em cada andar e no teto, sendo que as dos cantos devem ser ligadas em duas direções utilizando as armaduras das ligações periféricas.

As ligações verticais assemelham-se à funcionalidade do Método da Resistência Local Específica, isto é, busca-se evitar que o dano seja transferido dos pilares para os elementos a estes ligados. Devem ser utilizadas para edificações acima de 5 andares e cada uma deve resistir uma força de $20kN$ por metro de fachada.

Li³⁹ diz que no código britânico^{40,41}, as ligações também seguem essa classificação, mas são calculadas de maneira diferentes. Inicialmente calcula-se a força de ligação (F_l) para cada uma e depois esse valor é multiplicado por um coeficiente específico. Há duas maneiras de fazer isto, a saber: a primeira é empírica e definida por:

$$F_l = 4n_0 + 20kN \quad (3)$$

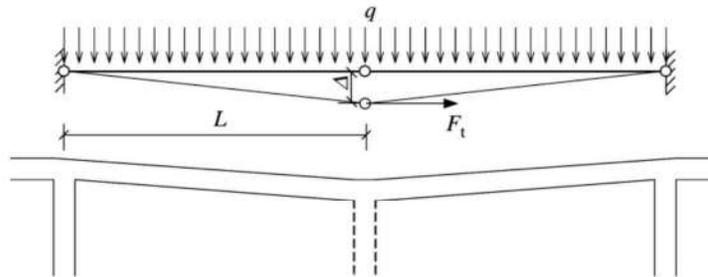
com n_0 sendo número de andares. A segunda opção é calcular de acordo com o esquema da Figura 10 e definida pela expressão:

$$F_l = \frac{q l^2}{2\Delta} \quad (4)$$

onde q é a carga distribuída, Δ é a deflexão e L é o vão entre dois pilares. Utilizando $q = 5$

kN/m, $\Delta = L/5$ e $L = 5$ m, obtêm-se $F_t = 60$ kN/m, valor normalmente utilizado.

Figura 10 – Diagrama para cálculo da resistência de ligação (F_t)^{40,41}



Fonte:³⁹

No entanto, o mesmo autor afirma que essas recomendações não são seguras e propõe uma reformulação na segunda metodologia para calcular F_t . Agora deve ser incluído o efeito da distribuição interna de deformação e da distribuição espacial.

2.2.2 Métodos Diretos de Projeto

Nos métodos diretos de projeto, as ligações da estrutura são definidas a partir de análise mais complexas da estrutura como um todo. Geralmente, divide-se em dois métodos: 1) **Resistência Local Específica** (*Specific Local Resistance*) e 2) **Método do Caminho Alternativo de Carga** (*Alternative Load Path*).

2.2.2.1 Método da Resistência Local Específica

O foco desse método são os pilares da estrutura. Considera-se que houve um evento capaz de transmitir cargas anormais à estrutura e que alguns destes elementos terão que suportar tais cargas sem provocar o surgimento de um dano local ($P(LD|H)$).

Este método é caracterizado por ser uma abordagem contra ameaças específicas (explosões, impactos e incêndios) e pode dar-se de duas maneiras: cada membro é localmente enrijecido e detalhado para resistir as tais cargas ou apenas alguns elementos-chave são dimensionados de maneira a não sofrer danos significativos e sem transmiti-los aos elementos ligados a este¹.

O DoD³ afirma que o Método da Resistência Local Específica (MRLE) também pode ser utilizado como um método indireto de projeto. Para isto, este faz prescrições de forma que o pilar, ou parede estrutural, não atinja sua capacidade última de cisalhamento antes da de flexão. Dessa forma:

$$\phi R_n \geq R_u \quad (5)$$

onde ϕ é fator de redução da resistência; R_n é a resistência nominal, nesse caso a capacidade última de flexão; R_u é a resistência requerida, nesse caso a de cisalhamento e ϕR_n é a resistência de projeto. Vale salientar que no caso do MRLE, $\phi = 1$.

2.2.2.2 Método do Caminho Alternativo de Carga

Nesta abordagem, considera-se que o pilar, ou parede estrutural, não é suficiente para conter as cargas extras advindas de um evento crítico e entra em colapso. Desta forma, deve-se dispor caminhos alternativos de redistribuição de esforços na estrutura para que o dano inicial não seja propagado aos demais membros. Assim, o principal objetivo dessa método é diminuir $P(CP|LD)$.

Geralmente, esta metodologia é a que fornece o maior nível de detalhamento e acurácia e que exige mais esforço do projetista, pois análises mais complexas precisam ser realizadas. Três tipos de estudos podem ser feitos: análise linear estática, análise não linear estática e análise não linear dinâmica. Vale salientar que, em se tratando do primeiro trabalho, utilizou-se apenas a análise estática linear e não linear.

As principais normas técnicas que consideram o Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC) são o GSA² e DoD³. No entanto, também está presente no ASCE 7-10¹⁸ e NIST 7396¹.

De maneira geral, esta metodologia é muito parecida em ambos nos códigos normativos GSA e DoD e há bons níveis de detalhamento e informação. No entanto, apesar de contemplar os três casos, o GSA só fornece um passo a passo mais detalhado da análise linear estática, enquanto o DoD, fornece um nível de descrição mais completo de todos os casos.

O procedimento geral do método consiste em analisar a estrutura frente a perda de um ou mais pilares. Nesse sentido, há três aspectos importantes a serem verificados, a saber: a localização das colunas a ser retiradas, as cargas a serem aplicadas e o procedimento geral da análise.

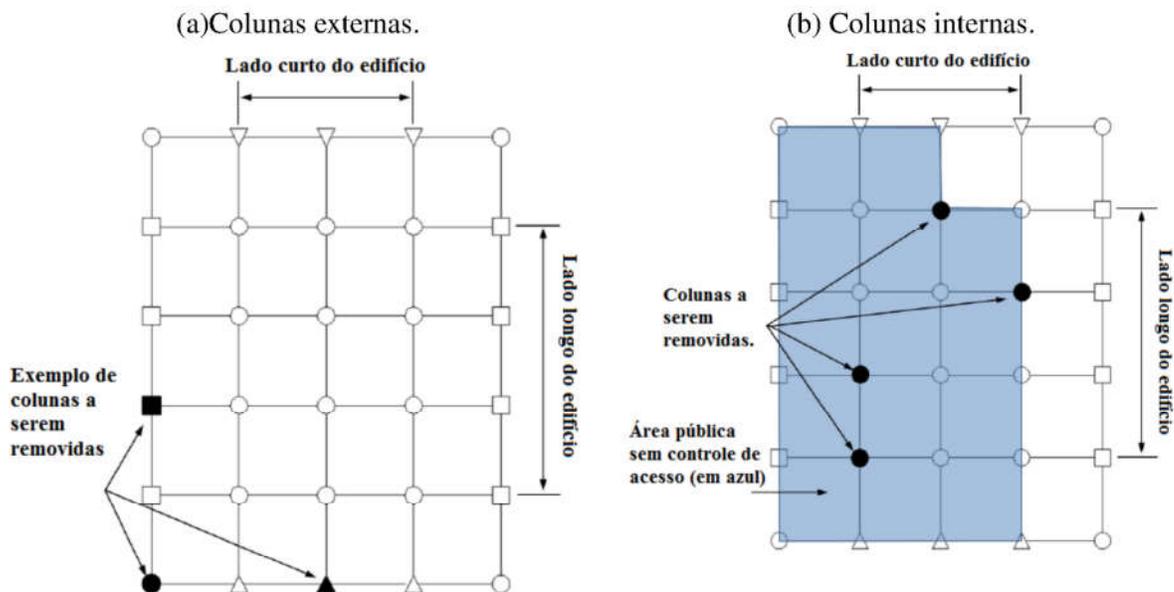
No GSA², conforme descrito Figura 5, a classificação das colunas as serem removidas varia com o FSL (*Facility Security Level*), que variam de I a V. Para FSL III e IV, os elementos verticais externos do primeiro andar acima do solo e todos os pilares de andares abaixo do solo, como estacionamentos, devem ser retirados. Já para FSL V, colunas externas e internas de cada andar devem ser removidos. Algo semelhante é utilizado no DoD, mas com um índice de usabilidade da edificação OC (*Occupation Category*) que varia de I a IV.

Não necessariamente, todos os pilares devem ser removidos, pois é comum haver indicações dos elementos mais críticos. No entanto, estas normas deixam claro que a interpretação do responsável tem participação fundamental. Por exemplo, para as colunas externas, recomenda-se remover os pilares externos perto da metade do lado curto do edifício, perto da metade do lado longo do edifício, nos cantos e adjacências ao canto do edifício, conforme mostrado na Figura 11 (a). No entanto, também devem ser removida pilares considerados críticos

conforme o julgamento do responsável técnico.

Já para os pilares internos, devem-se remover colunas internas perto da metade do lado curto, perto da metade do lado longo e nos cantos da região sem controle de acesso, conforme ilustra a Figura 11 (b).

Figura 11 – Locação de retirada de colunas segundo o GSA.



Fonte:².

O GSA restringe a análise linear estática conforme o número de andares, no máximo dez, e por um coeficiente chamado DCR (*Demand-Capacity Ratio*):

$$DCR = \frac{Q_{UDlim}}{Q_{CE}} \quad (6)$$

onde, Q_{UDlim} é a resultante das ações internas e Q_{CE} é a resistência esperada do elementos. Este é representado pela razão a resultante de esforços internos e a resistência da peça e, nesse caso, deve ser menor do que 2 para todos os componentes.

Para a análise linear estática, deve-se retirar previamente a coluna escolhida e aplicar a carga:

$$G_{LD} = \Omega_{LD}[1,2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (7)$$

para os vão imediatamente adjacentes ao pilar perdido e:

$$G = 1,2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S) \quad (8)$$

nos demais vãos, onde, G_{LD} é a carga a ser aplicada nos vão imediatamente ao pilar perdido,

G é a carga a ser aplicada nos demais vãos, Ω_{LD} é um fator de incremento de carga definido pela Tabela 2, m_{LIF} é um coeficiente de segurança que depende de cada material, D é a carga permanente (*dead load*), L é a carga acidental (*live load*).

Tabela 2 – Fator de incremento de carga para análise linear segundo o GSA.

Material	Tipo de Estrutura	Ω_{LD} , controle de deformação	Ω_{LD} , controle de carga
Aço	Pórtico	$0.9m_{LIF} + 1.1$	2.0
Concreto Armado	Pórtico	$1.2m_{LIF} + 0.80$	2.0
Concreto Armado	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Alvenaria	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Madeira	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Aço formado a frio	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0

Fonte:².

Para os casos em que uma análise linear estática não é suficiente, pode-se utilizar uma análise não linear estática. Neste caso, os carregamentos devem seguir um raciocínio semelhante ao anterior, isto é, aplicando-se a carga:

$$G_N = \Omega_N [1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (9)$$

para os vãos imediatamente adjacentes ao elemento retirado e a carga:

$$G = 1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S) \quad (10)$$

nos demais vãos, onde, G_N é a carga a ser aplicada nos vãos imediatamente ao pilar perdido, G é a carga a ser aplicada nos demais vãos, Ω_N é um coeficiente de majoração dinâmica da carga definido pela Tabela 3, θ_{pra} é o ângulo de rotação plástica segundo critério de segurança e θ_y é a rotação de escoamento efetiva do elemento conectado ao elemento colapsado.

Tabela 3 – Fator de incremento de carga para análise não linear segundo o GSA.

Material	Tipo de Estrutura	G_N
Aço	Pórtico	$1.08 + 0.76(\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0.83)$
Concreto Armado	Pórtico	$1.04 + 0.45(\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0.48)$
Concreto Armado	Parede estrutural	2.0
Alvenaria	Parede estrutural	2.0
Madeira	Parede estrutural	2.0
Aço formado a frio	Parede estrutural	2.0

Fonte:².

É importante destacar que ambos os códigos recomendam que sejam feitos, no mínimo, dez incrementos de carga até atingir a carga total.

Por outro lado, em uma análise não linear dinâmica, toda a estrutura deve ser carre-

gada com a mesma carga dada por:

$$G_{ND} = [1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (11)$$

onde, G_N é a carga a ser aplicada nos vão imediatamente ao pilar perdido.

Inicialmente, nenhuma coluna deve ser retirada do modelo. Deve-se aplicar a referida carga, Equação (11) até a estrutura encontrar o equilíbrio. Logo após, deve-se retirar o pilar escolhido e realizar a análise não linear dinâmica até encontrar o máximo deslocamento ou um ciclo de movimento vertical ocorrer no local da coluna ou parede retirada, o que for maior.

Vale salientar que todas essas análises citadas contém vantagens e desvantagens e, dessa forma, cabe ao engenheiro responsável julgar qual será a mais adequada para o caso em estudo.

3 ANÁLISE NÃO LINEAR

No que diz respeito à análise de estruturas de concreto armado via Método dos Elementos Finitos, dependendo do que pretende ser estudado, podem ser adotadas duas metodologias diferentes, uma local e outra global.

A local é utilizada quando se pretende representar de forma detalhada o comportamento da estrutura, incluindo aspectos como padrão de fissuração, efeito do confinamento, plastificação de regiões comprimidas etc. Para isso utilizam-se normalmente elementos finitos planos ou tridimensionais. Geralmente, esta abordagem é utilizada para estudar em detalhe o comportamento de algum elemento estrutural específico, como uma viga, coluna ou ligação. Esta abordagem permite a obtenção de resultados bastante precisos, mas normalmente demanda considerável custo computacional.

No entanto, no projeto de estruturas, é necessária a análise do comportamento global de um edifício formado por um número elevado de elementos estruturais. Neste caso, a adoção de elementos finitos planos ou sólidos resultaria em um custo computacional proibitivo para situações práticas. Dessa forma, adotam-se elementos unidimensionais de viga ou pórtico. Essa abordagem pode ser definida como uma metodologia global de análise que, ao invés de observar um elemento isolado, atenta-se para o trabalho conjunto da estrutura como um todo.

Quando a estrutura é levada ao extremo de sua capacidade, como ocorre no Colapso Progressivo, a consideração da não linearidade geométrica e física mostra-se fundamental para a precisão da análise. Nesse caso, para estudar o efeito desse fenômeno em pórticos de concreto armado, deve-se considerar o comportamento global através da utilização de elementos de pórtico (planos ou espaciais) que permitam representar grandes deslocamentos e que considerem modelos constitutivos que permitam representar de forma adequada os principais aspectos físicos do comportamento dos materiais utilizados.

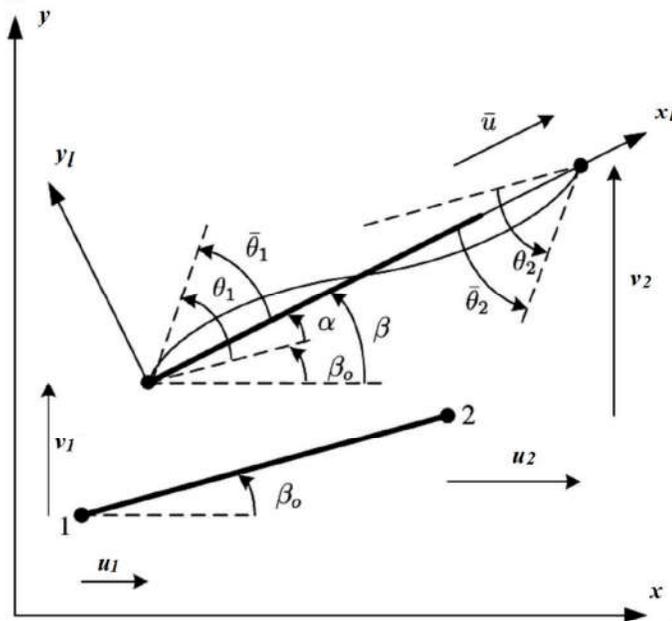
No que diz respeito à não linearidade geométrica, os elementos devem ser capazes de representar não só o efeito dos grandes deslocamentos e rotações que ocorrem próximo à ruína da estrutura, como o efeito da força normal sobre a rigidez dos elementos estruturais. Esse segundo aspecto é fundamental na simulação do CP devido a necessidade de representar de forma adequada o Efeito Catenária.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizado um elemento finito de pórtico plano baseado na teoria de Euler-Bernoulli. Este considera a não linearidade geométrica através da formulação corrotacional e já estava presente no programa utilizado, FAST^{43,44}. No entanto, é importante destacar que os recursos de não linearidade física disponíveis no FAST eram limitados a modelos elásticos linear e não lineares. Dessa maneira, a principal contribuição deste trabalho concentra-se na implementação de modelos constitutivos baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo para o aço e concreto, bem como sua utilização para o estudo do CP.

3.1 Formulação corrotacional

A não linearidade geométrica foi considerada através da formulação corrotacional⁴³⁻⁴⁶. Esta descrição cinemática visa separar de forma explícita os deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento, através da utilização de um sistema de coordenadas auxiliar que acompanha o elemento, como ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Descrição cinemática corrotacional.



Fonte:⁴⁶

É importante notar que existem apenas três modos de deformação para o elemento de pórtico plano, conforme ilustrado na Figura 13, sendo um modo associado à deformação axial do elemento (\bar{u}) e dois associados às deformações de flexão ($\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$).

Figura 13 – Modos de deformação local para o elemento de pórtico plano.



Fonte: Próprio autor.

Com base nos parâmetros da Figura 13, pode-se definir os deslocamentos devidos

às deformações do elemento como:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= L_n - L_o \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \alpha \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \alpha\end{aligned}\tag{12}$$

onde L_n e L_o são os comprimentos final e inicial, respectivamente, e θ_1 e θ_2 são as rotações globais dos nós 1 e 2, respectivamente. Por outro lado, \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são o deslocamento axial e as rotações dos nós no sistema local, respectivamente. Por fim, α representa a rotação de corpo rígido do elemento, que é definida como:

$$\alpha = \beta - \beta_o\tag{13}$$

onde β e β_o são os ângulos do elemento no sistema global, conforme descrito na Figura 12.

Os comprimentos inicial e deformado do elemento podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}L_o &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ L_n &= \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}\end{aligned}\tag{14}$$

sendo:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) + (u_2 - u_1) \\ \Delta y' &= y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)\end{aligned}\tag{15}$$

Um passo fundamental da formulação corrotacional é a separação das rotações totais na parcela de corpo rígido e na parcela associada às deformações. Partindo-se da Equação (13), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin(\beta - \beta_o) = s.c_o - c.s_o \\ \cos \alpha &= \cos(\beta - \beta_o) = c.c_o + s.s_o\end{aligned}\tag{16}$$

em que os senos e cossenos dos ângulos de inclinação dos elementos são calculados como:

$$\begin{aligned}c_o &= \cos \beta_o = \Delta x / L_o \\ s_o &= \sin \beta_o = \Delta y / L_o \\ c &= \cos \beta = \Delta x' / L_n \\ s &= \sin \beta = \Delta y' / L_n\end{aligned}\tag{17}$$

É importante notar que a Equação (16) é capaz de determinar a rotação rígida da barra desde que α esteja dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$. Contudo, esta expressão pode ser facil-

mente estendida para rotação de qualquer magnitude utilizando uma forma incremental^{43,44}.

A análise da estrutura completa é realizada no sistema global, assim é necessário que se calcule o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento e se faça a transformação para o sistema global. O vetor de deslocamentos no sistema local é dado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2 \right]^T \quad (18)$$

Enquanto o vetor de deslocamentos no sistema global é dado por:

$$\mathbf{u} = \left[u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \right]^T \quad (19)$$

Utilizando a Equação (12), pode-se escrever os deslocamentos virtuais no sistema local como:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta \theta_1 - \alpha \\ \delta \theta_2 - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta \theta_1 - \delta \beta \\ \delta \theta_2 - \delta \beta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Utilizando as Equações (14) e (15) e fazendo uma série de manipulações pode-se escrever:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T} \delta \mathbf{u} \quad (21)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -\frac{s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 1 & \frac{s}{L_n} & -\frac{c}{L_n} & 0 \\ -\frac{s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 1 & \frac{s}{L_n} & -\frac{c}{L_n} & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças internas no sistema local é definido pelos esforços conjugados aos deslocamentos definidos na Equação (12), sendo uma força axial e dois momentos nodais:

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

como o trabalho é um escalar, o trabalho virtual interno é indiferente para qualquer sistema, assim:

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (23)$$

Substituindo a Equação (21) na expressão acima, obtém-se uma equação capaz de transformar

o vetor de forças internas do elemento no sistema local para o sistema global:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (24)$$

A solução das equações não lineares de equilíbrio é realizada normalmente utilizando o Método de Newton-Raphson⁴⁵, que requer a utilização da matriz de rigidez tangente \mathbf{k}_T . Esta matriz relaciona o incremento do vetor de forças internas com o incremento de deslocamentos:

$$d\mathbf{g} = \mathbf{K}_T d\mathbf{u} \quad (25)$$

Portanto, a determinação da matriz de rigidez no sistema global pode ser realizada diferenciando a Equação (24):

$$d\mathbf{g} = \mathbf{T}^T d\bar{\mathbf{g}} + d\mathbf{T}^T \mathbf{g} = \mathbf{K}_E d\mathbf{u} + \mathbf{K}_G d\mathbf{u} \quad (26)$$

onde \mathbf{K}_E corresponde parcela da matriz de rigidez dependente do material e \mathbf{K}_G à matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais. Pode-se calcular a matriz de rigidez tangente como:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (27)$$

A matriz de rigidez tangente do sistema local $\bar{\mathbf{K}}_T$ relaciona o incremento de deslocamentos e forças neste sistema:

$$d\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}_T d\bar{\mathbf{u}} \quad (28)$$

Esta matriz pode incluir tanto os efeitos da não linearidade geométrica quanto física. Utilizando as Equações(21) e (26), obtém-se a expressão da matriz \mathbf{K}_E no sistema global, que será simétrica sempre que a matriz de rigidez tangente local for simétrica^{43,44}:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_T \mathbf{T} \quad (29)$$

A matriz de rigidez geométrica vem da segunda parcela da Equação(26) correspondente à variação da matriz de transformação:

$$\mathbf{K}_G d\mathbf{u} = d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \bar{N} dt_1 + \bar{M}_1 dt_2 + \bar{M}_2 dt_3 \quad (30)$$

onde t_k indica a coluna k da matriz \mathbf{T}^T . Derivando a Equação (30) em relação aos deslocamentos, pode-se escrever a matriz de rigidez geométrica no sistema global como^{43,44}:

$$\mathbf{K}_G = \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_n} + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \frac{1}{L_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \quad (31)$$

onde os vetores \mathbf{r} e \mathbf{z} são definidos como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

3.1.1 Elemento local

O elemento utilizado neste trabalho é baseado na Teoria Clássica de Vigas (Euler-Bernoulli). Esta teoria propõe que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga quando esta se deforma. Em consequência, o efeito do cisalhamento é desprezado.

Utilizando esta hipótese pode-se mostrar que a deformação na direção do eixo de barra (ϵ_x) pode ser escrita como:

$$\epsilon_x = \epsilon_m - y\kappa \quad (34)$$

onde ϵ_m é a deformação no centroide da seção transversal (deformação de membrana), y é a distância vertical do ponto considerado até o centroide da seção e

$$\kappa = v_{,xx} \quad (35)$$

é a curvatura da viga.

O elemento corrotacional utilizado neste trabalho inclui a não linearidade geométrica tanto na transformação local-global discutida anteriormente como na definição da deformação de membrana. Assim, o efeito dos deslocamentos transversais no sistema local são considerados através da deformação de Green-Lagrange:

$$\epsilon_m = u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 \quad (36)$$

Nota-se que o termo $1/2u_{,x}^2$ da deformação de Green-Lagrange foi desprezado porque os deslocamentos axiais (u) são pequenos em relação aos transversais (v).

É importante ressaltar que a expressão da curvatura é linear porque o elemento considera que as rotações no sistema local são sempre pequenas. Por outro lado, a deformação de membrana é não linear, incorporando o efeito dos deslocamentos transversais por meio do uso da deformação de Green-Lagrange. Alternativamente, poderia ser considerada apenas a parcela linear da deformação de membrana, pois os deslocamentos transversal no sistema local são pequenos⁴⁵. Contudo, o uso da deformação Green-Lagrange no sistema local torna o elemento

mais preciso, permitindo reduzir a discretização da estrutura.

Devido à ordem das derivadas que aparecem na Equação (40), o deslocamento u e v requerem funções com continuidade C^0 e C^1 , respectivamente⁴⁷. Portanto, o deslocamento axial será interpolado de forma linear, enquanto para o deslocamento transversal será utilizado um polinômio cúbico:

$$u = L_2 \bar{u} \quad e \quad v = H_2 \bar{\theta}_1 + H_4 \bar{\theta}_2 \quad (37)$$

onde L_2 é um polinômio de Lagrange linear e H_2 e H_4 são polinômios de Hermite. As variáveis \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são os deslocamentos e rotações nodais no sistema, respectivamente, conforme apresentado nas Figuras 12 e 13.

Considerando intervalo $0 \leq x \leq L$, a função de interpolação dos deslocamentos axiais pode ser definida como

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (38)$$

Enquanto polinômios de Hermite podem ser definidos como⁴⁷:

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad e \quad H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (39)$$

Nota-se que as interpolações dos deslocamentos axiais e transversais são feitas utilizando polinômios de graus diferentes, o que pode causar o travamento em membrana devido ao desbalanceamento dos termos transversais e axiais. Assim, Crisfield⁴⁵ recomenda a utilização de deformação média:

$$\epsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \left(u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right) dx \quad (40)$$

Dessa forma, utilizando a Equação (37) e integrando as expressões resultantes, as expressões para calcular ϵ_m e κ ficam^{43,44}:

$$\epsilon_m = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{30} (2\bar{\theta}_1^2 - \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2^2) \quad e \quad \kappa = v_{,xx} \quad (41)$$

A deformação de membrana pode ser escrita na forma matricial como:

$$\epsilon_m = \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}} \quad (42)$$

onde

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{m0} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{mL} \quad (43)$$

com

$$\mathbf{B}_{m0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

e

$$\mathbf{B}_{mL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{30} & \frac{4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{30} \end{bmatrix} \quad (45)$$

A determinação do vetor de forças internas requer as deformações virtuais. A deformação de membrana virtual pode ser obtida a partir da Equação (41):

$$\delta\varepsilon_m = \frac{\delta\bar{u}}{L} + \frac{1}{30} [(4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)\delta\bar{\theta}_1 + (4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)\delta\bar{\theta}_2] \quad (46)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma matricial como:

$$\delta\varepsilon_m = \bar{\mathbf{B}}_m \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (47)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}}_m = \mathbf{B}_{m0} + \mathbf{B}_{mL} \quad (48)$$

No caso da curvatura, tem-se:

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & H_{2,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Esta expressão pode ser escrita matricialmente como:

$$\varepsilon = \mathbf{B}_b \bar{\mathbf{u}} \quad (50)$$

Substituindo as derivadas das funções de forma, pode-se escrever \mathbf{B}_b como:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L}\right) \end{bmatrix}$$

Juntando as parcelas de membrana e de flexão, as deformações virtuais podem ser escritas como:

$$\delta\varepsilon = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_m \\ \delta\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}} \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (51)$$

Dessa forma, o vetor de forças internas pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (52)$$

Na análise de estruturas reticuladas é mais cômodo trabalhar com esforços internos (resultante de tensões ou tensões generalizadas) do que com as tensões propriamente ditas:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ M &= \int_A (-y \sigma_x) dA \end{aligned} \quad (53)$$

onde σ_x é a tensão normal na direção do eixo da barra, A é a área da seção transversal, N é a força normal e M o momento fletor. Assim, pode-se definir o vetor de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (54)$$

No caso da teoria clássica de vigas pode-se escrever o trabalho virtual interno (δU) como:

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon_x \sigma_x dV = \int_0^L \int_A (\delta \epsilon_m - y \delta \kappa) \sigma_x dA dx = \int_0^L (N \delta \epsilon_m + M \delta \kappa) dx \quad (55)$$

Utilizando os vetores de tensões e deformações generalizadas tem-se:

$$\delta U = \int_0^L \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (56)$$

A formulação deste elemento inclui o cálculo das deformações ($\boldsymbol{\epsilon}$), forças internas ($\bar{\mathbf{g}}$) e matriz de rigidez tangente ($\bar{\mathbf{K}}_T$). Esta última pode ser calculada a partir das segundas da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{K}}_T = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{K}}_E + \bar{\mathbf{K}}_G \quad (57)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_E$ é a matriz de rigidez material e $\bar{\mathbf{K}}_G$ é a matriz de rigidez geométrica. A primeira matriz pode ser escrita como⁴³:

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \mathbf{A} \int_0^L N dx \quad (58)$$

onde a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{30} & -\frac{1}{30} \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{4}{30} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Já a matriz de rigidez material $\bar{\mathbf{K}}_E$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}}_E = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (60)$$

Portanto, esta matriz pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_E = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dx \quad (61)$$

onde \mathbf{C}_T é a matriz constitutiva tangente que relaciona incrementos de tensões e deformações generalizadas:

$$\mathbf{C}_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Diferenciado as tensões generalizadas (N e M) em relação às deformações generalizadas (ε_m e κ) chega-se a:

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_A E_T dA \\ \overline{ES} &= - \int_A E_T y dA \\ \overline{EI} &= \int_A E_T y^2 dA \end{aligned} \quad (63)$$

onde E_T corresponde ao módulo tangente da curva tensão-deformação do material:

$$E_T = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \quad (64)$$

3.2 Integração Numérica

O cálculo dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente é realizado através das integração das tensões e módulo tangente na seção transversal da viga, conforme mostrado nas Equações (53) e (63), respectivamente. Estas integrais podem ser resolvidas analiticamente se o material apresenta comportamento elástico linear. Contudo, o problema é mais complexo quando são utilizados modelos constitutivos não lineares. Nestes casos, a integração na seção transversal requer a utilização de técnicas analíticas sofisticadas ou de métodos numéricos.

Além da integração na seção transversal, o cálculo do vetor de forças internas $\bar{\mathbf{g}}$, Equação (52), e da matriz de rigidez tangente, Equações (58) e (61), requer a integração ao

longo do comprimento do elemento. No caso de materiais elástico lineares, estas expressões podem ser integradas analiticamente. No entanto, quando a não linearidade física é considerada, é necessário recorrer à integração numérica⁴⁵.

A Integração Numérica ou Quadratura corresponde a aproximação de uma integral definida de uma função que, devido a sua complexidade, não pode ser obtida analiticamente. Como discutido anteriormente, a consideração da não linearidade física faz com que seja necessário o uso da integração numérica, tanto na seção transversal quanto ao longo do comprimento do elemento.

Sabe-se do Cálculo Diferencial e Integral que dada uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, existe uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, ou seja, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Dessa forma, a ideia básica da integração numérica é substituir $f(x)$, cujas características a impedem de ser integrada diretamente, por um polinômio que aproxime esta função em um intervalo $[a, b]$. Assim o problema pode ser reduzido a integração de polinômios, cuja solução é trivial.

Os pontos de integração e os pesos dependem da regra específica utilizada e da precisão necessária para a aproximação. Como exemplos, podem ser citar a Quadratura de Newton-Cotes e a Quadratura de Gauss⁴⁸. A principal diferença entre estas é que a Quadratura de Newton-Cotes usa pontos igualmente espaçados e somente os pesos são desconhecidos. Já na Quadratura de Gauss, os pontos não são igualmente espaçados e suas posições e, assim como os pesos, podem ser determinado de forma a obter uma maior precisão na integração.

3.2.1 Quadratura de Gauss

Na Quadratura de Gauss, o número de pontos de integração e seus respectivos pesos dependem do grau do polinômio $f(x)$ a ser integrado. De forma a facilitar e tornar a aplicação desta mais geral, pode-se transformar um dado intervalo de integração $[a, b]$ em intervalo padrão $[-1, 1]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \quad (65)$$

onde

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)a + \frac{1}{2}(1 + \xi)b \quad \text{e} \quad \phi(\xi) = f(x(\xi)) J \quad (66)$$

Neste equação, o termo J representa o Jacobiano da transformação entre as coordenadas cartesianas e paramétricas:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2} \quad (67)$$

A partir disso, podem-se obter^{47,49} os pesos W e as coordenadas paramétricas ξ dos pontos de integração, que são os pontos onde a função ϕ será calculada (pontos de amostragem). Dessa forma, a aproximação da integral I é dado por:

$$I = W_1 \phi(\xi_1) + W_2 \phi(\xi_2) + \dots + W_n \phi(\xi_n) = \sum_{i=1}^n \phi_i W_i \quad (68)$$

Os pontos e pesos de Gauss são determinados de forma que com n pontos seja possível integrar exatamente um polinômio de grau $p = 2n - 1$. A Tabela 4 mostra as coordenadas e pesos de Gauss até 4 pontos, tabelas mais completas podem ser encontradas na literatura.

Tabela 4 – Pontos de Gauss.

Ordem (n)	Pontos de Integração $\phi(\xi_i)$	Peso W_i
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	± 0.774596669241483	$\pm 0.555555555555555 = \pm \frac{5}{9}$
	0	$0.888888888888888 = \frac{8}{9}$
4	± 0.861136311594053	$\pm 0.347854845137454 = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{1.2}}$
	± 0.339981043584856	$\pm 0.652145154862546 = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{1.2}}$

Fonte:⁴⁷.

Vale salientar que a Quadratura de Gauss não é exata para funções não polinomiais. Contudo, quanto mais pontos se utiliza, menor o erro na integração. De forma geral, a convergência é muito rápida no casos de funções suaves, como é o caso das funções continuamente diferenciáveis.

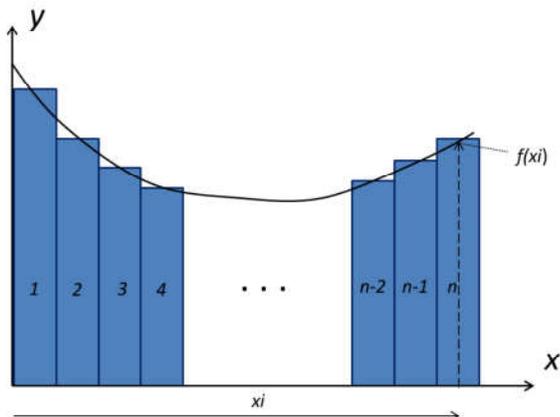
Devido a sua simplicidade de utilização e elevada precisão numérica, a Quadratura de Gauss é o método padrão para integração da matriz de rigidez e do vetor força interna em elementos finitos^{47,48}. Além de elementos de barra, ela pode ser utilizada em elementos planos e tridimensionais.

No caso de elementos de viga com material elástico linear, o polinômio de maior grau a ser integrado no cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente é cúbico. Portanto, a integração exata requer apenas 2 pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento. No caso de materiais com comportamento não linear, a integração não é exata, mas o uso de 2 pontos de Gauss leva a resultados satisfatórios⁴⁴.

3.2.2 Método das Fatias

O Método das Fatias é uma opção mais simples para aproximação de uma integral do que a Quadratura de Gauss. Neste método, a área abaixo de uma curva dada pela função $f(x)$ é aproximada por retângulos com uma espessura constante Δx e altura igual ao valor desta função na coordenada central x_i de cada retângulo, conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Aproximação da integral de $f(x)$ pelo Método das Fatias



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, a aproximação da integral I pelo Método das Fatias fica:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (69)$$

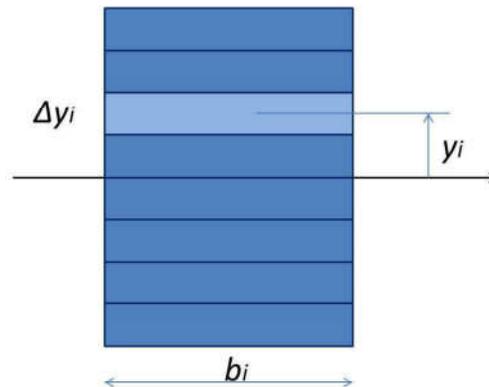
onde n é o número de fatias, $\Delta x = (b - a)/n$ é a espessura de cada fatia e as coordenadas dos pontos de integração são dadas por:

$$x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x \quad (70)$$

Verifica-se que a precisão do método depende do número de fatias adotado. Como a função é considerada constante em cada fatia, a convergência para o caso de funções suaves é mais lenta que a da Quadratura de Gauss.

Contudo, na análise não linear física utilizando elementos de viga, as deformações variam suavemente na seção transversal, mas o mesmo não ocorre com as tensões, principalmente no caso de materiais com comportamento inelástico, como é o caso dos modelos de elastoplásticos e de dano contínuo. Assim, o Método das Fatias tem sido largamente utilizado na análise fisicamente não linear para integração das tensões e módulo tangente na seção transversal dos elementos^{43,50-52}. A Figura 15 ilustra a divisão de uma seção retangular para integração pelo Método das Fatias.

Figura 15 – Divisão de uma seção retangular pelo Método das Fatias.



Fonte: Próprio autor.

A título de exemplo, utilizando este método, o momento fletor é calculado como:

$$M = \int_A -y \sigma dA = - \sum_{i=1}^n (y_i \sigma_i \Delta A_i) \quad (71)$$

onde ΔA_i é a área de cada fatia e $\sigma_i = \sigma(y_i)$, onde y_i é calculado de forma similar à Equação (70). No caso de seções retangulares, como a mostrada na Figura 15, a área de cada fatia é dada por $\Delta A_i = b \Delta y$. Dessa forma, as integrais das Equações (53) e (63) são calculadas de forma análoga.

Uma das vantagens do Método das Fatias é a facilidade com que ele trata de seções transversais de geometria complexa, como T, I ou C. Neste caso, basta considerar a variação da largura b ao longo da altura da seção. Pode-se ainda considerar casos de flexão composta oblíqua, onde as fatias serão divididas agora em retângulos que não se estendem por toda a largura de forma constante, mas discretizada nos dois sentidos da seção transversal. Este procedimento é conhecido como Método das Fibras.

3.3 Solução de Sistemas de Equações Não Lineares

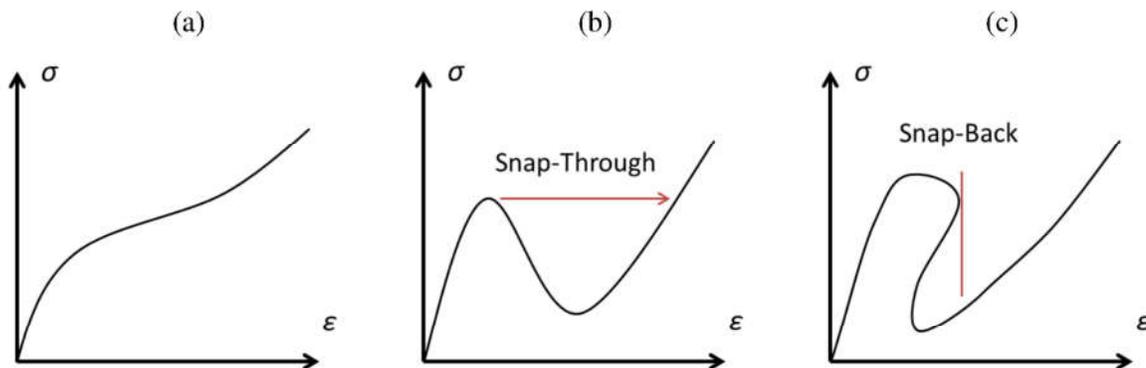
A análise linear elástica considera que o sistema sofre pequenos deslocamentos e que o material encontra-se no trecho elástico e linear. Isso permite aproximar a configuração final como sendo a indeformada, evitando o efeito de segunda ordem, bem como considerar a Lei de Hooke. Com isso, o sistema de equações pode ser resolvido diretamente sem a necessidade de iterações. Já na análise não linear, considera-se que pelo menos uma das condições acima não é verdade e que o sistema não pode mais ser resolvido diretamente. No Método dos Elementos Finitos (MEF), a equação geral a ser resolvida é:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f} \quad (72)$$

onde, $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ é o vetor de forças desbalanceadas ou resíduo em função do vetor deslocamento \mathbf{u} , \mathbf{g} é o vetor força interna e λ é um fator de carga, grandeza escalar que permite controlar o nível de carga externa, representado pelo vetor \mathbf{f} .

A Equação (72) é resolvida de maneira iterativa pelo Método de Newton-Rahpson e proporciona a obtenção da curva carga-deslocamento ou caminho de equilíbrio. Na Figura 16 a seguir, pode-se ver três exemplos de curvas e comportamentos geralmente obtidos^{45,53}.

Figura 16 – Caminhos de equilíbrio.



Fonte: Próprio autor.

As curvas acima são obtidas a partir da Equação (72). Na curva (a), observa-se que a carga e o deslocamento são sempre crescentes. Esta é obtida incrementando a carga aplicada e medindo a variação do deslocamento, este método é conhecido como Método de Controle de Carga (MCC); Na curva (b), apenas o deslocamento é sempre crescente. Dessa forma, faz-se variar o deslocamento e calcula-se a força interna, já este método é conhecido como Método do Controle de Deslocamentos (MCD). Ainda na curva (b), pode-se perceber que esta é caracterizada por um salto dinâmico ou *snap-through*. Já na curva (c), nota-se que nem a carga e nem o deslocamento são sempre crescentes. Para obter a curva com esse comportamento de retorno da carga e do deslocamento conhecido como *snap-back*, é necessário incrementar ambos a carga e o deslocamento de maneira conjunta, este método é conhecido como Método do Comprimento de Arco (MCA). Todos estes métodos são baseados na solução iterativa pelo Método de Newton-Raphson e diferenciam-se apenas pelo modo como a equação é incrementada.

A solução da Equação (72) pelo MCC estabelece que o fator de carga λ seja incrementado e deve permanecer constante até que uma nova configuração de equilíbrio, representada pelo vetor deslocamento \mathbf{u} , seja encontrada. Neste caso, através do Método de Newton-Raphson, lineariza-se a referida equação em relação ao incremento de deslocamento $\delta\mathbf{u}$ e este é calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u} = -\mathbf{r}_i \quad (73)$$

onde \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente, $\delta\mathbf{u}$ é o incremento do vetor deslocamento e \mathbf{r}_i é o

resíduo. O novo resíduo é obtido por:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_T \cdot \delta \mathbf{u} \quad (74)$$

onde i refere-se ao índice da iteração.

Quando \mathbf{r}_{i+1} for menor ou igual a uma dada tolerância, incrementa-se o novo vetor deslocamento através da seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u} \quad (75)$$

Seguindo essa linha de raciocínio para o MCD, verifica-se que são os deslocamentos \mathbf{u} que serão incrementados e uma força interna $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ será obtida pela iteração da Equação (72). De Borst *et al*⁵³ explica que quando não houver preferência entre o MCC e o MCD, este último deve ser escolhido, pois a matriz de rigidez tangente é melhor condicionada para o MCD do que para o MCC, o que resulta em uma maior velocidade de convergência. Além disso, no MCC a matriz de rigidez tangente se torna singular no ponto limite no diagrama tensão-deformação, não só na falha global, o que nunca ocorre para o MCD.

É importante ressaltar que os três métodos incrementais-iterativos citados já estavam implementados no FAST antes da realização deste trabalho.

3.4 Modelos Constitutivos para Concreto Armado

Neste item serão apresentados os modelos constitutivos uniaxiais utilizados para a consideração da não linearidade física de estruturas de concreto armado. Os principais efeitos a serem modelados serão: a plastificação do aço, com e sem a consideração de encruamento (*hardening*), e a fissuração e esmagamento do concreto, principalmente depois da tensão máxima onde há uma diminuição da tensão com o aumento da deformação (*softening*).

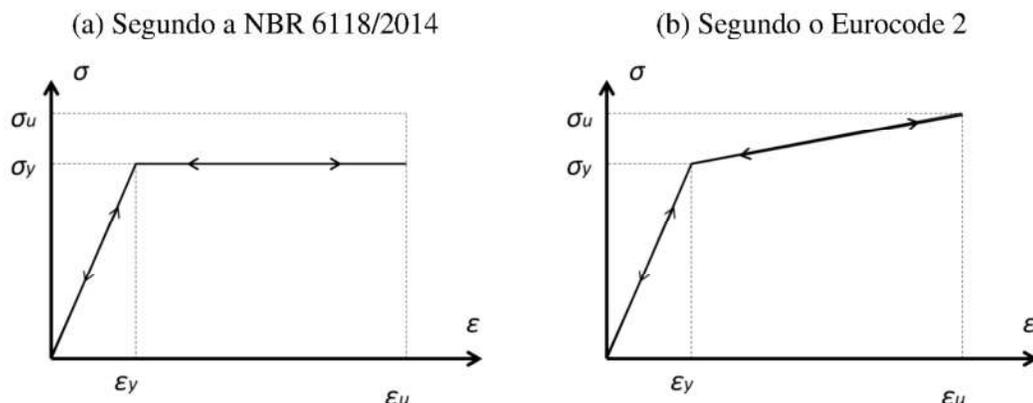
3.4.1 Modelos Constitutivos Elásticos

Para todos os materiais sólidos existe um domínio no espaço das tensões cujas deformações são reversíveis devido ao pequeno movimento dos átomos. Para muitos materiais como o aço, cerâmica, concreto, madeira e polímeros, para uma pequena taxa de deformação, as hipóteses de isotropia e linearidade são suficiente para muitas aplicações práticas na engenharia. Neste caso, a relação entre tensão (σ) e deformação (ϵ) é dada pela clássica lei de Hooke:

$$\sigma = E \epsilon \quad (76)$$

onde, E é o Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade. Um exemplo da aplicação desta relação linear e elástica pode ser vista no trecho inicial do modelo constitutivo do aço adotado pela NBR 6118/2014 e pelo Eurocode 2:2014, ver Figuras 17 (a) e (b).

Figura 17 – Modelo constitutivo do aço para a tração e compressão.



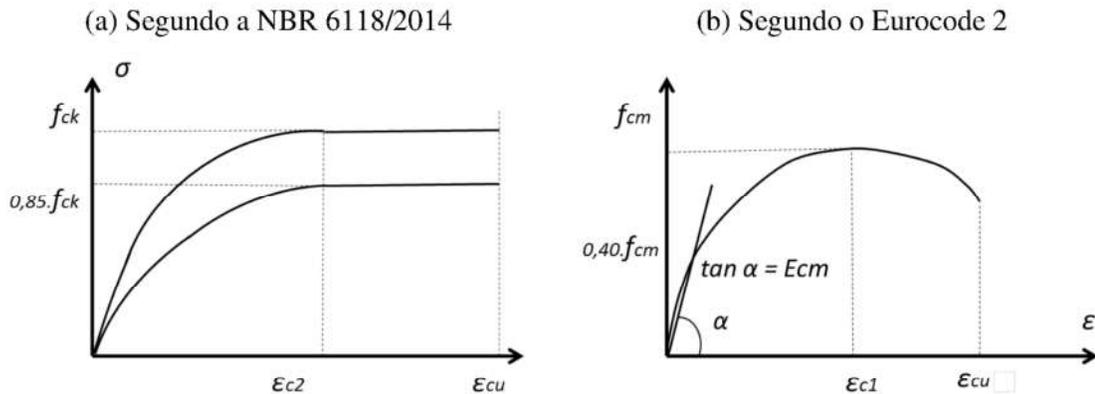
Fonte:^{26,42}.

Ambos os modelos apresentados nas Figuras 17 (a) e (b) representam o mesmo comportamento apresentado na tração e na compressão. Além disso, a tensão de escoamento σ_y marca o início do escoamento e o ponto a partir do qual os modelos se diferenciam. O da NBR mantém a tensão indefinidamente com o mesmo valor de σ_y e o do Eurocode 2 apresenta um encruamento ou *hardening*. Note que não importa em qual trecho ocorra descarregamento, a deformação sempre voltará para a origem, ou seja, não há acumulação de deformação permanente.

Em modelos multilíneares (*piecewise linear*) é possível descrever o comportamento de diversos materiais através da discretização de sua curva tensão deformação por trechos lineares. Nos modelos constitutivos do aço apresentados nas Figuras 17 (a) e (b), por exemplo, tem-se modelos bilineares, pode-se incluir uma reta vertical no valor da deformação admitida como sendo a última para obter um modelo trilinear e assim sucessivamente.

O comportamento elástico também pode ocorrer em modelos não lineares. Exemplos são os modelos constitutivos do concreto adotados também pelas normas NBR 6118/2014 e Eurocode 2:2014, ver Figuras 18 (a) e (b). Neste, nota-se um comportamento elástico parecido com os do aço, no entanto, a variação da tensão com a deformação não segue uma função linear. Nas figuras, f_{ck} é a tensão última característica à compressão do concreto, f_{cm} é a tensão última média à compressão do concreto, ϵ_{c1} e ϵ_{c2} são as deformações de escoamento e ϵ_u é a deformação última.

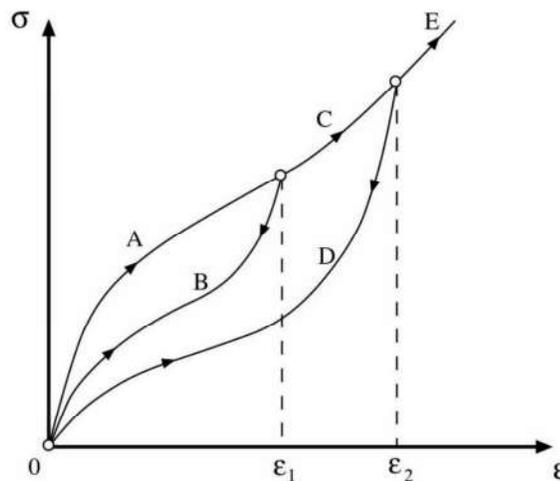
Figura 18 – Modelo constitutivo do concreto para a compressão.



Fonte:^{26,42}.

Há ainda modelos hiperelásticos, materiais que apresentam uma grande capacidade de deformação e de recuperação elástica, como a borracha. Estes são largamente explorados por Souza Neto *et al*⁵⁴ e de Borst *et al*⁵³ e um comportamento típico desses materiais pode ser visto na Figura 19.

Figura 19 – Ilustração do comportamento de um material hiperelástico.



Fonte:⁵⁴

Os modelos elásticos são largamente utilizados não só no contexto de projeto, mas também em pesquisas e simulações numéricas mais sofisticadas. Parente *et al.*⁴⁴ utilizaram modelos constitutivos elásticos para o concreto (Eurocode e NBR 6118) e o aço (bilinear) na análise não linear de pórticos planos de concreto armado, obtendo excelentes resultados na comparação com resultados de ensaios monotônicos.

Contudo, estes modelos podem não ser adequados para a simulação do colapso progressivo, pois neste caso, após a retirada de um pilar a parte da viga que estava comprimida devido à flexão passa a ser tracionada devido ao efeito catenária. Esta inversão de sinal das deformações e tensões representa uma forma de descarregamento da estrutura, fazendo com que o carregamento não possa ser considerado monotônico e que modelos constitutivos mais complexos sejam necessários.

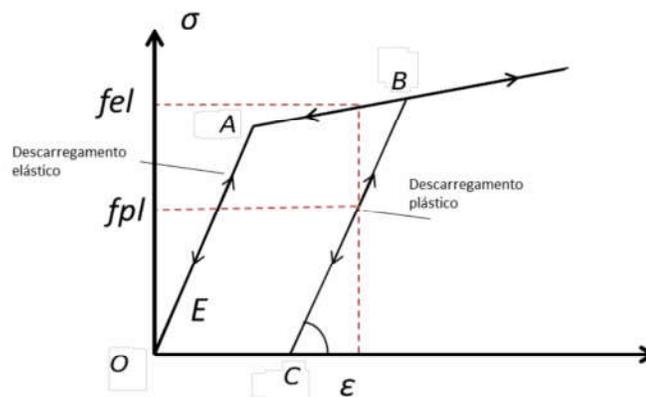
3.4.2 Modelos Constitutivos Elastoplásticos

Tanto a teoria da elasticidade quanto a da plasticidade são por natureza fenomenológicas. Isto é, ambas são a formalizações de observações feitas no comportamento macroscópico de ensaios de corpos deformáveis e não necessitam de muitos conhecimentos físicos e químicos para serem compreendidas de forma geral⁵⁵.

Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que após atingida a carga de escoamento do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo. Isto é, a estrutura do material se modifica de maneira irreversível, mas mantendo a parcela de deformação elástica constante. Vale salientar que para todos os casos analisados nesse trabalho, a deformação dita permanente é independente da velocidade do carregamento aplicado (*Rate-Independent Plasticity*).

Analisando a Figura 20, pode-se caracterizar de maneira muito clara a diferença entre o modelo elástico e o plástico. No caso de um carregamento monotônico OAB não há diferença entre os dois, mas quando se inicia um descarregamento a partir de um estágio de carga acima da tensão de escoamento, percebe-se que o primeiro tende a apresentar uma resposta contra a segurança. Isto ocorre porque considerando o descarregamento elástico BAO obtém-se uma tensão f_{el} maior do que a f_{pl} , obtida a partir do descarregamento inelástico BC .

Figura 20 – Descarregamento considerando comportamento elástico e plástico.



Fonte: Próprio autor.

Chen e Han⁵⁵ afirmam que a teoria da plasticidade é uma extensão necessária da teoria da elasticidade e que é necessário levar em consideração dois aspectos muito importantes na sua formulação. O primeiro é a necessidade de obter uma relação tensão-deformação que descreva de maneira adequada o comportamento macroscópico observado. Essa relação é própria de cada material, mas pode-se ser dividida em três grupos, de acordo com o comportamento apresentado após a carga de escoamento.

O primeiro grupo corresponde aos materiais que apresentam aumento de resistência após o escoamento. Este fenômeno é conhecido como endurecimento ou *hardening*, sendo muito comuns em metais, como o aço. O segundo grupo apresenta amolecimento ou *softening*, caracterizado pela redução da tensão mesmo com o aumento da deformação após a carga de pico. Este comportamento é comum à materiais frágeis como concreto e rochas. Finalmente, um terceiro caso é a plasticidade perfeita, onde após a tensão atingir o valor de escoamento, esta se mantém constante indefinidamente.

O segundo aspecto importante ao se utilizar modelos elastoplásticos é a necessidade de adotar técnicas numéricas adequadas para descrição do comportamento tensão-deformação no contexto da análise de estruturas. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos mostra sua eficiência pela facilidade com que essa e outras características podem ser consideradas.

A formulação matemática da plasticidade tendo em vista a utilização em elementos finitos unidimensionais é mais simples porque dispensa a utilização de critérios de falha como os de von mises, tresca etc. No entanto, Souza Neto⁵⁴ afirma que apesar de simples, esta formulação contém todas as características que formam a base matemática da referida teoria. Os modelos de elastoplásticos implementados neste trabalho foram obtidos a partir dos trabalhos de Simo e Huges⁵⁶ e Yaw⁵⁷.

3.4.2.1 Plasticidade Perfeita

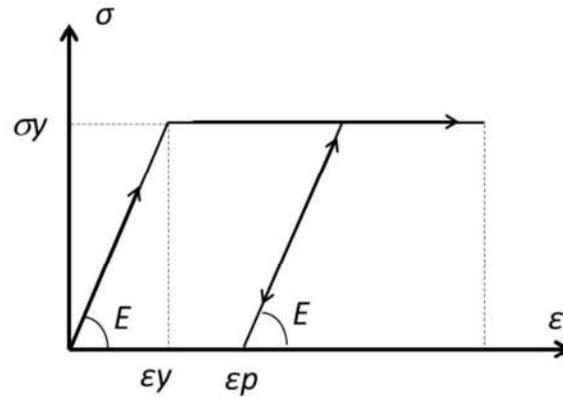
No Modelo de Plasticidade Perfeita, considera-se que, após o material atingir a sua tensão de escoamento (σ_Y), esta vai se manter constante enquanto a deformação total (ϵ) aumenta. Assim, a deformação total terá uma parcela irrecuperável (ϵ_P) que cresce enquanto o carregamento continuar, como mostrado na Figura 21.

Pode-se compreender mais facilmente este comportamento analisando o sistema mecânico apresentado na Figura 22. Neste, uma mola com módulo de elasticidade E está ligada a um dispositivo de atrito de Coulumb com constante $\sigma_Y > 0$.

Considerando que a tensão (σ) provocará uma deformação total (ϵ) no sistema, esta pode ser dividida em duas partes: a deformação devido a mola (ϵ^e), correspondendo à parte elástica, e a deformação devido ao dispositivo de atrito (ϵ^p), correspondendo à parcela plástica:

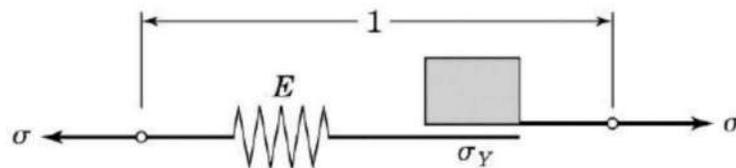
$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (77)$$

Figura 21 – Plasticidade perfeita.



Fonte: Próprio autor.

Figura 22 – Esquema para representar o comportamento elastolástico perfeito.



Fonte:⁵⁶

Dessa forma, para um valor constante de E , obtém-se para o valor da tensão σ dado por:

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (78)$$

Sabendo-se que o intervalo de tensão para esse modelo de plasticidade restringe-se a $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$ e que o dispositivo de atrito só funcionará se $\varepsilon^p \neq 0$, ou seja $|\sigma| = |\sigma_Y|$. Pode-se isolar o comportamento deste dispositivo como representado nas Figuras 23 (a) e (b).

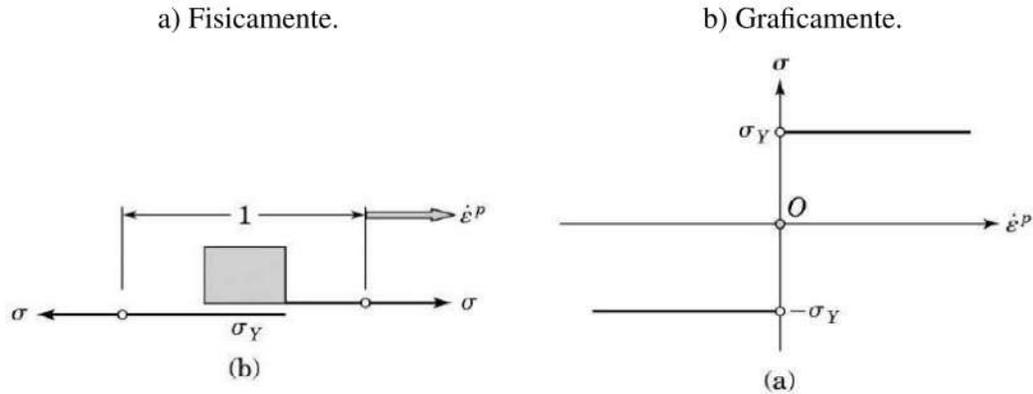
Portanto, considerando que σ_Y será sempre positivo, pode-se definir o Critério de Escoamento $f(\sigma)$ como sendo:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \quad (79)$$

Desse modo, verifica-se que:

- Se $f(\sigma) < 0 \Rightarrow$ o material estará no trecho elástico $\dot{\varepsilon}^p = 0$.
- Se $f(\sigma) = 0 \Rightarrow$ o material estará no trecho plástico $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$.

Figura 23 – Comportamento do dispositivo de atrito de Coulomb.



Fonte:⁵⁶

Pode-se ainda definir a *Taxa de Escoamento* (γ) como sendo a evolução da deformação permanente com o carregamento. Sabendo-se da irreversibilidade do fenômeno plástico, tem-se que γ sempre será maior ou igual a zero e que este se relaciona com a variação da deformação plástica no tempo ($\dot{\epsilon}^P$) da seguinte maneira:

- $\dot{\epsilon}^P = \gamma$, se $\sigma = \sigma_Y$
- $\dot{\epsilon}^P = -\gamma$, se $\sigma = -\sigma_Y$

vale salientar que, o sinal negativo de γ indica um incremento da deformação plástica na compressão e não que γ será menor do que zero. De maneira geral,

$$\dot{\epsilon}^P = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (80)$$

onde:

$$\text{sign}(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma|} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma > 0, \\ -1 & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

Observa-se ainda que:

$$\begin{aligned} f(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ f(\sigma) = 0 &\Rightarrow \gamma > 0 \end{aligned} \quad (81)$$

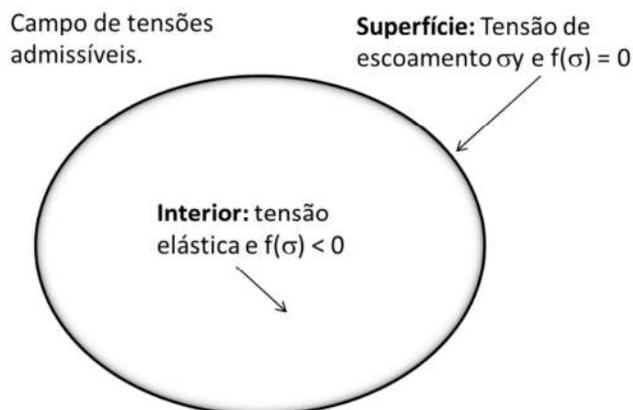
logo,

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (82)$$

As Equações (81) e (82) são conhecidas como Condições de Complementaridade ou de Kuhn-Tucker⁵⁶. Esta é uma condição que expressa a necessidade de que a tensão seja admissível,

ou seja, esteja dentro da região ilustrada na Figura 24. Esta figura ilustra um estado de tensão bidimensional por motivos didáticos. Contudo, o estado de tensões considerado neste trabalho é unidimensional.

Figura 24 – Ilustração do campo de tensões admissíveis.



Fonte: Próprio autor.

Uma deformação total $\epsilon(t)$ e uma deformação plástica $\epsilon^p(t)$ em um dado instante de tempo t implicam em uma tensão $\sigma(t)$ definida por:

$$\sigma(t) = E [\epsilon(t) - \epsilon^p(t)] \quad (83)$$

A partir disso, nota-se que o critério de escoamento também será uma função do tempo e que deve obedecer a condição: $\dot{f}(t) \leq 0$, o que fica claro analisando os incremento (BC) e o descarregamento (CD) ilustrados na Figura 25. De forma geral:

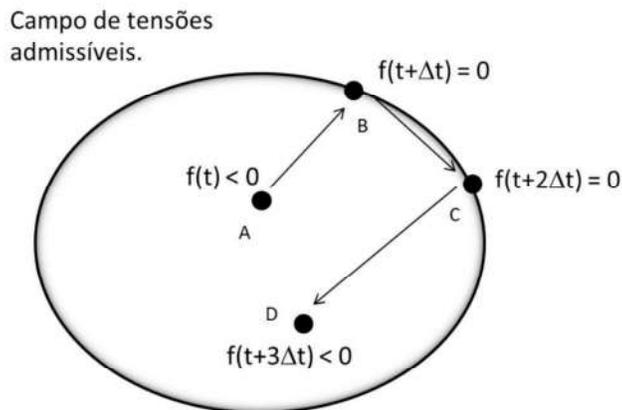
$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ \dot{f}(\sigma) = 0 &\Rightarrow \gamma > 0 \end{aligned} \quad (84)$$

logo

$$\gamma \dot{f}(\sigma(t)) = 0 \quad (85)$$

as Equações (84) e (85) são conhecidas como Condições de Consistência e expressa a necessidade de que $\dot{\epsilon}^p \geq 0$. Organizando todos os conceitos acima pode-se construir o resumo abaixo:

Figura 25 – Ilustração de uma trajetória de tensão admissível..



Fonte: Próprio autor.

Relação Tensão-Deformação

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (86)$$

Lei de Fluxo (*Flow Rule*)

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (87)$$

Condição de Escoamento

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0 \quad (88)$$

Condição de Complementariedade de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0 \quad \gamma f(\sigma) = 0 \quad (89)$$

Condição de Consistência

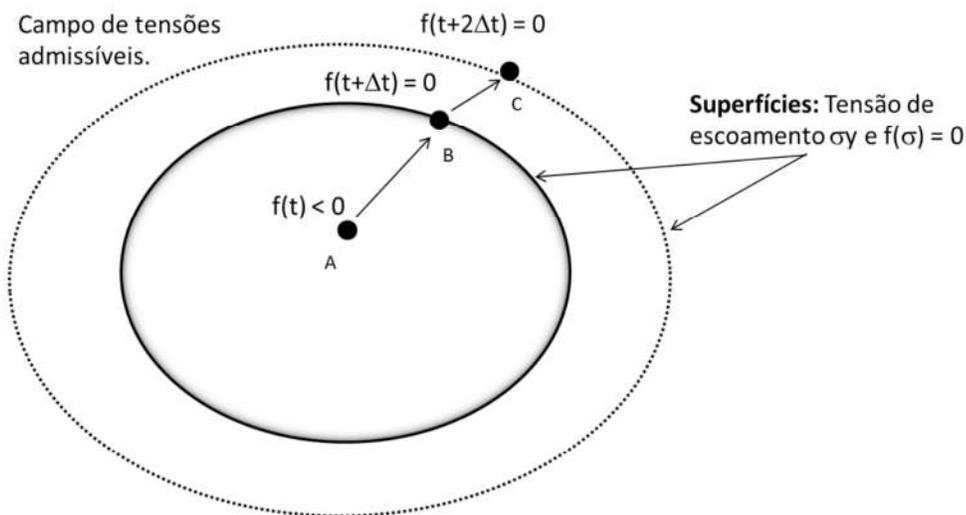
$$\gamma \geq 0, \quad \dot{f}(\sigma) \leq 0 \quad \gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (90)$$

3.4.2.2 Plasticidade com Endurecimento Isotrópico

O fenômeno do endurecimento ou *hardening* é caracterizado por haver uma expansão do limite de escoamento do material conforme a carga aumenta além do limite elástico, ver Figura 26. Em outras palavras, os limites do intervalo composto pela tensão de escoamento na tração e na compressão $[-\sigma_Y^C, \sigma_Y^T]$ mudam quando o material começa a plastificar. O encrua-

mento pode ser classificado em três categorias de acordo com o modo com que essa mudança ocorre, a saber: Encruamento Isotrópico, Encruamento Cinemático e Encruamento Independente.

Figura 26 – Ilustração do campo de tensões admissíveis com o Endurecimento ou *hardening*.



Fonte: Próprio autor.

Para compreender a diferença entre os três tipos de encruamento é necessário compreender o *Efeito Bauschinger*. Este está relacionado com a modificação da tensão de escoamento na compressão a partir de um carregamento inelástico na tração e vice versa. O que evidencia que em um modelo constitutivo elastoplástico, a deformação não é uma função apenas da tensão, mas também da história de carregamento e descarregamento do material. Diz-se então que o comportamento do material é dependente do caminho ou trajetória de carregamento (*Load Path Dependent*)⁵⁵.

No Encruamento Isotrópico, o *Efeito Bauschinger* é completamente desprezado e o intervalo $[\sigma_Y^C, \sigma_Y^T]$ é aumentado de forma isométrica, ou seja, a parcela que a tensão de escoamento na tração for incrementada será a mesma para a tensão na compressão dado um carregamento inelástico na tração e vice versa. Vale salientar que este foi o modelo utilizado neste trabalho.

Por outro lado, o Encruamento Cinemático considera totalmente o *Efeito Bauschinger* de forma que a relação $|\sigma_Y^C| - |\sigma_Y^T|$ se mantém constante ao longo do carregamento. Já o Encruamento Independente tem a variação dos dois lados do intervalo variando de forma independente um do outro. Ambos são profundamente explorados por Chen e Han⁵⁵ e Simo e Hughes⁵⁶.

Para compreender matematicamente o efeito do encruamento, deve-se definir duas variáveis. A primeira é a *Variável de Hardening* (α) e a segunda é o *Módulo Plástico* (K). Neste

trabalho, a variável que descreve o encruamento é a deformação plástica acumulada⁵⁶:

$$\alpha = \int_0^t |\dot{\epsilon}^p| dt \quad (91)$$

o que nos leva a:

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \quad (92)$$

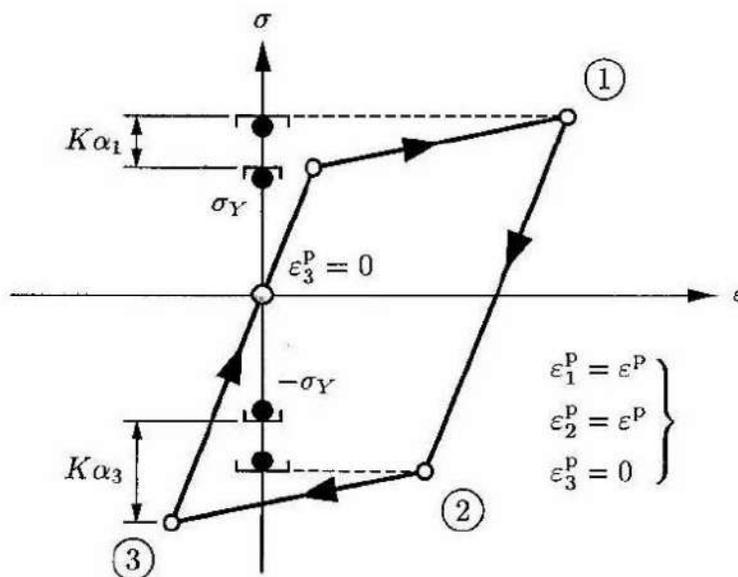
O uso do módulo da taxa de deformação plástica deve-se à consideração de encruamento isotrópico.

O módulo plástico está ligado à variação da tensão de escoamento σ_Y com o aumento da deformação plástica. O caso mais simples, e mais utilizado na prática, corresponde ao encruamento linear ilustrado na Figura 27. Este encruamento pode ser representado matematicamente como:

$$G(\alpha) = \sigma_Y + K \alpha \quad (93)$$

onde $G(\alpha)$ corresponde à tensão de escoamento do material com encruamento isotrópico. Desse modo, com um valor positivo de K tem-se uma inclinação positiva do trecho de plastificação, indicando *hardening*. Caso K seja negativo, tem-se uma inclinação negativa da curva tensão-deformação, indicando *softening*. Finalmente, $K = 0$ corresponde ao modelo elastoplástico perfeito.

Figura 27 – Representação da estrutura matemática do *Hardening*.



Fonte:⁵⁶.

A interpretação da irreversibilidade deste fenômeno é semelhante à da plasticidade perfeita, de maneira que $\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$. Novamente, esta característica fenomenológica é representada pelas condições de Kuhn-Tucker e pelas condições de consistência. A principal diferença deste modelo concentra-se na definição da função de escoamento, que agora será uma função de vários parâmetros, entre eles K e α . Esta função pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha) \quad (94)$$

onde $G(\alpha)$ é uma função que descreve a variação da tensão de escoamento σ_Y . A expressão desta função para o caso de encruamento linear é mostrada na Equação (93).

De maneira geral, pode-se organizar os conceitos acima no quadro abaixo:

Relação Tensão-Deformação

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (95)$$

Lei de Fluxo

$$\dot{\varepsilon} = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad e \quad \dot{\alpha} = \gamma \quad (96)$$

Condição de Escoamento

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha) \leq 0 \quad (97)$$

Condição de Complementariedade de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0 \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (98)$$

Condição de Consistência

$$\dot{\gamma} f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (\text{para } f(\sigma, \alpha) = 0) \quad (99)$$

Sabendo-se que $\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$ (condição de consistência), pode-se dizer que quando $\gamma > 0$, necessariamente $\dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$. Portanto, utilizando da regra da cadeia, tem-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \quad (100)$$

ou seja,

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} + (-1) \frac{\partial G}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (101)$$

sabendo que:

$$E_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial t}}{\frac{\partial \epsilon}{\partial t}} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \quad (102)$$

tem-se:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (103)$$

Substituindo a Equação (103), $\dot{\alpha} = \gamma$ e $\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$ na Equação (101):

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma) E (\dot{\epsilon} - \gamma \text{sign}(\sigma)) - \frac{\partial G}{\partial \alpha} \gamma = 0 \quad (104)$$

sabendo que $(\text{sign}(\sigma))^2 = 1$ e resolvendo para γ , tem-se:

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\epsilon}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \quad (105)$$

como:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = E(\dot{\epsilon} - \gamma \text{sign}(\sigma)) \quad (106)$$

Utilizando a Equação (105) na Equação (106):

$$\dot{\sigma} = E \left(\dot{\epsilon} - \frac{(\text{sign}(\sigma))^2 E \dot{\epsilon}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \right) \quad (107)$$

$$\dot{\sigma} = \left[\frac{E \frac{\partial G}{\partial \alpha}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \right] \dot{\epsilon} = E_T \dot{\epsilon} \quad (108)$$

Assim, pode-se escrever o módulo tangente elastoplástico (E_t) como:

$$E_T = \frac{E \frac{\partial G}{\partial \alpha}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \quad (109)$$

No caso do encruamento linear, Equação (93), o módulo tangente elastoplástico é dado por:

$$E_T = \frac{E K}{E + K} \quad (110)$$

Isolando-se o valor de K na Equação (110), tem-se:

$$K = \frac{E E_p}{E - E_p} \quad (111)$$

De acordo com a função $G(\alpha)$ tem-se diferentes módulos tangentes e, portanto, variações da tensão de escoamento de formas diferentes. Exemplos de diferentes função G são apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Funções $G(\alpha)$ utilizadas

$G(\alpha)$	Tipo	Autor
$G(\alpha) = \sigma_y + k\alpha$	Linear	Simo e Hughes ⁵⁶
$G(\alpha) = \sigma_y + (1 + k\alpha^h)$	Não Linear	Iribaren <i>et al</i> ⁵⁰
$G(\alpha) = \sigma_y + e^{\delta\alpha}$	Não Linear	Yaw ⁵⁷

3.4.2.3 Algoritmo de Mapeamento de Retorno

O último passo necessário para o desenvolvimento de modelos constitutivos elasto-plásticos para o aço e para o concreto é a definição de um algoritmo que estabeleça um processo incremental inelástico. Neste trabalho foi utilizado o mesmo que Simo e Hughes⁵⁶, Yaw⁵⁷ e Souza Neto⁵⁴ utilizaram, o Algoritmo de Mapeamento de Retorno (*Return-Mapping Algorithm*).

Este algoritmo começa pelo preditor elástico, isto é, inicialmente, considera-se um estado auxiliar que pode não corresponder ao estado atual do corpo. Este é obtido considerando-se um comportamento puramente elástico de forma que, para um passo $n + 1$, serão utilizados os parâmetros do último passo convergido n , ou seja, ϵ_n^p e α_n . Dessa forma:

$$\hat{\sigma}_{n+1} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p) \quad (112)$$

$$\hat{\epsilon}_{n+1}^p = \epsilon_n^p \quad (113)$$

$$\hat{\alpha}_{n+1}^p = \alpha_n^p \quad (114)$$

$$\hat{f}_{n+1} = \hat{\sigma}_{n+1} - (|\sigma_Y| + G(\hat{\alpha}_{n+1}^p)) \quad (115)$$

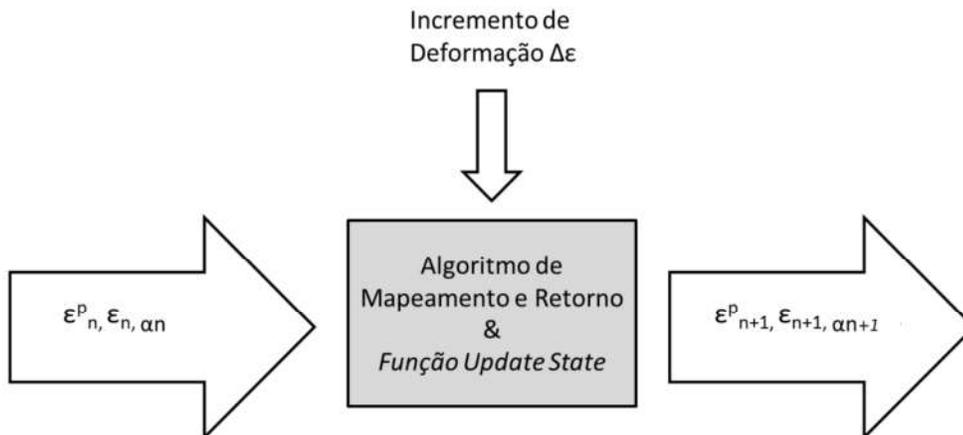
onde $\hat{\sigma}_{n+1}$, $\hat{\epsilon}_{n+1}^p$, $\hat{\alpha}_{n+1}^p$ e \hat{f}_{n+1} são parâmetros provisórios obtidos a partir de dados do último passo convergido.

Após o estabelecimento deste estado auxiliar, preditor elástico, obtém-se a condição de escoamento \hat{f}_{n+1} de acordo com a Equação (115) e é então averiguado se o sistema está no regime elástico ou inelástico. No primeiro caso, as variáveis estabelecidas como provisórias ($\hat{\sigma}_{n+1}$, $\hat{\epsilon}_{n+1}^p$ e $\hat{\alpha}_{n+1}^p$) serão fixadas como os valores convergidos do passo $n + 1$. Caso contrário, estes valores devem ser recalculados de acordo com o tipo de função $G(\alpha)$ utilizada e só então fixados como os valores finais do passo atual $n + 1$. Na Figura 28 este processo é ilustrado no contexto utilizado no FAST, programa este onde as implementações foram realizadas.

Ainda analisando a Figura 28, o *UpdateState* é um comando específico do programa FAST onde os parâmetros convergidos como os do passo atual são fixados. As variáveis $\hat{\sigma}_{n+1}$, $\hat{\epsilon}_{n+1}^p$ e $\hat{\alpha}_{n+1}^p$ só se tornam σ_{n+1} , ϵ_{n+1}^p e α_{n+1}^p após a utilização deste comando. Mais informa-

ções sobre o *Update State* podem ser encontradas no item *Implementação Computacional* deste trabalho.

Figura 28 – Ilustração do Algoritmo de Mapeamento e Retorno no FAST.



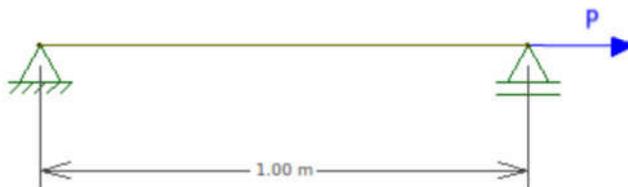
Fonte: Próprio autor.

3.4.2.4 Modelos Constitutivos Elastoplásticos

De posse das informações acima, resolveu-se inicialmente implementar modelos constitutivos elastoplásticos a partir das três funções $G(\alpha)$ apresentadas na Tabela 5. Estes modelos não têm a intenção de representar um material em específico, mas sim um comportamento geral. Além disso, não possuem um limite de ruptura. Dessa forma, a partir da função $G(\alpha) = \sigma_y + k\alpha$, criou-se o modelo *IsoLinHard*, a partir da função $G(\alpha) = \sigma_y + (1 + k\alpha^h)$ criou-se o modelo *IsoNonLinHard* e, finalmente, da função $G(\alpha) = \sigma_y + e^{\delta\alpha}$ obteve-se o modelo *IsoExpHard*. O algoritmo de cada um deles encontra-se no Apendice A.

A fim de avaliar os modelos implementados, resolveu-se testá-los utilizando um único elemento de treliça sob condições de carregamentos e apoios apresentados na Figura 29. Esta tem um comprimento 1 m, uma seção transversal de 10^{-4} m^2 , um módulo de elasticidade de 200 GPa e uma tensão de escoamento 400 MPa.

Figura 29 – Modelo em treliça utilizado para testar os modelos constitutivos.

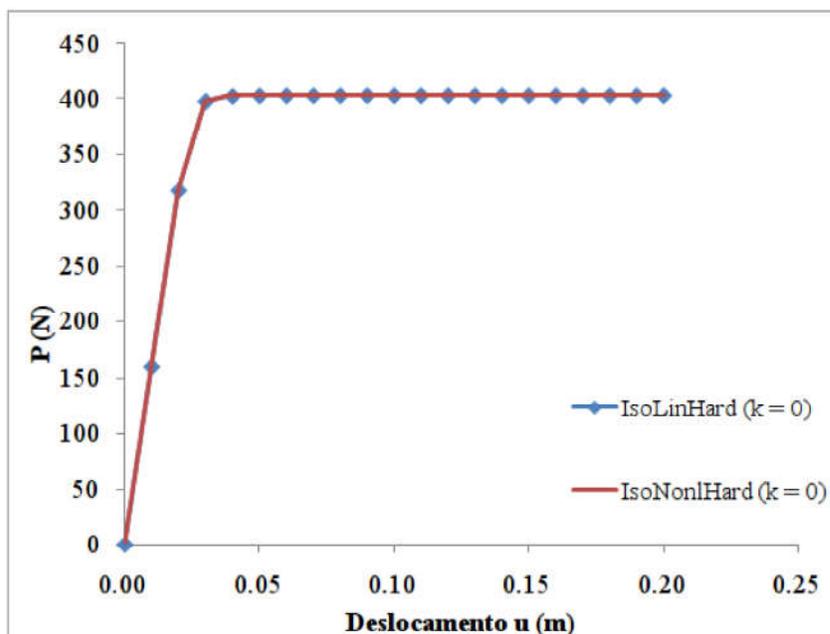


Fonte: Próprio autor.

Optou-se por um elemento de treliça para que fosse considerado apenas o comportamento do modelo constitutivo, sem a influência de erros inerentes à integração de elementos de pórtico.

Para representar a plasticidade perfeita, basta utilizar o modelo *IsoLinHard* e *IsoNonLinHard* com $K = 0$. Dessa forma, modelou-se o elemento de treliça citado com ambos e com os parâmetros apresentados. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 30.

Figura 30 – Teste do modelo de plasticidade perfeita.



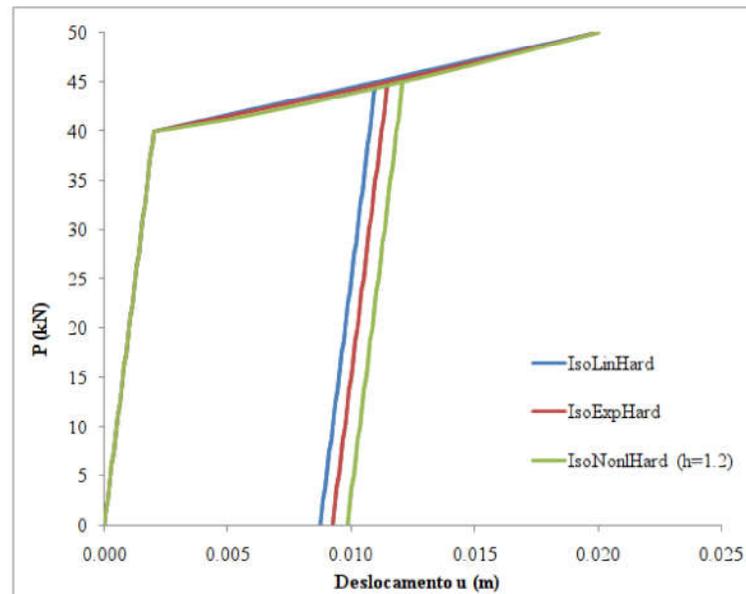
Fonte: Próprio autor.

Como era esperado, os modelos foram capazes de representar um comportamento de plasticidade perfeita. Ambos apresentam resultado exatamente iguais, o que mostra a equivalência dos modelos para este caso.

O encruamento isotrópico foi testado utilizando os três modelos descritos anteriormente. Nestes testes, utilizou-se os modelos *IsoExpHard* com $K = 5.7142857 \cdot 10^9$ GPa, *IsoNonLinHard* com $K = 32$ Pa e $h = 1.2$ e o modelo *IsoExpHard* com $\delta = 12.75106$. Estes parâmetros foram escolhidos de maneira a obter-se curvas tensão-deformação similares para o carregamento aplicado. Nestes testes, o elemento foi submetido a um carregamento monotônico de tração até o patamar de escoamento ser atingido. Em seguida, este foi submetido a um ciclo de carregamento, descarregamento e recarregamento. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 31.

Assim como no resultado anterior, os modelos obtiveram respostas equivalentes, mostrando sua capacidade de representar o comportamento em estudo. Como esperado, ao descarregar e recarregar, os modelos o fizeram em trechos paralelos ao trecho elástico inicial,

Figura 31 – Teste dos modelos com encruamento isotrópico.



Fonte: Próprio autor.

o que mostra que a principal e única diferença entre os modelos é a variação da tensão de escoamento com a deformação plástica acumulada.

3.4.2.5 Modelo Constitutivo Elastoplástico do Aço

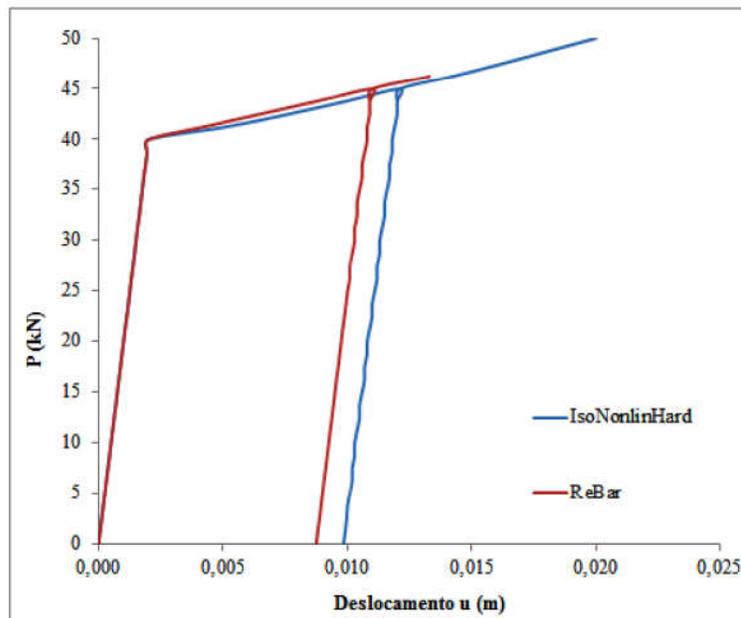
O modelo elastoplástico com encruamento linear (*IsoLinHard*) foi utilizado como base para construir o modelo constitutivo do aço utilizado como armadura do concreto armado (barras de reforço). Este modelo foi escolhido porque o aço apresenta os mesmos valores da tensão de escoamento para a compressão e para a tração, como ocorre no encruamento isotrópico.

No entanto, o modelo *IsoLinHard* não considera o rompimento do material após a deformação última, mas que o material continuaria se deformando plasticamente sem limite, fazendo com que a tensão neste material atingisse valores acima da realidade. Dessa forma, para caracterizar o comportamento do aço, foram colocados limites de deformação máxima para caracterizar a ruptura do material. Estes limites são parâmetros do modelo e devem ser definidas a partir das características do aço utilizado. Caso a deformação ultrapasse este limite, então a tensão é considerada nula para o resto da análise, de forma a simular a ruptura da barra, que é um fenômeno irreversível. O algoritmo deste modelo pode ser visto no Apêndice B.

O mesmo elemento de treliça da Figura 29 foi utilizado no teste deste modelo. Os parâmetros utilizados foram módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, tensão de escoamento $\sigma_Y = 400$ MPa, módulo plástico $K = 5.7142857 \times 10^9$ GPa e deformação última $\epsilon_u = 12 \times 10^{-3}$. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 32. É importante notar que a análise para na

deformação de ruptura, pois o material não é mais capaz de suportar o carregamento aplicado, ao contrário do que ocorre com o modelo que considera um encruamento isotrópico puro.

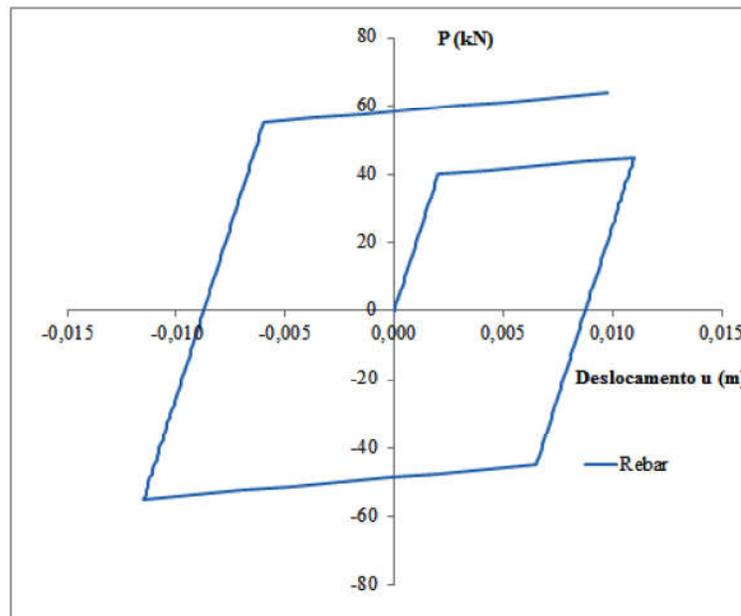
Figura 32 – Teste do modelo *ReBar*.



Fonte: Próprio autor.

Com objetivo de testar o modelo na compressão e na tração, o elemento de treliça foi carregado até plastificar na tração, depois este foi descarregado e em seguida comprimido até plastificar na compressão. Depois recarregou-se a barra até esta atingir a tensão de escoamento na tração outra vez. A curva carga-deslocamento obtida é apresentada na Figura 33.

Figura 33 – Teste do modelo constitutivo plástico para o aço na compressão e tração.



Fonte: Próprio autor.

Conforme pode ser visto nas Figuras 32 e 33, o modelo constitutivo das barras de reforço (armadura) foi capaz de captar o comportamento elasto-plástico. Este apresentou uma variação isotrópica das tensões de escoamento (na compressão e na tração), mas considerando a ruptura do material.

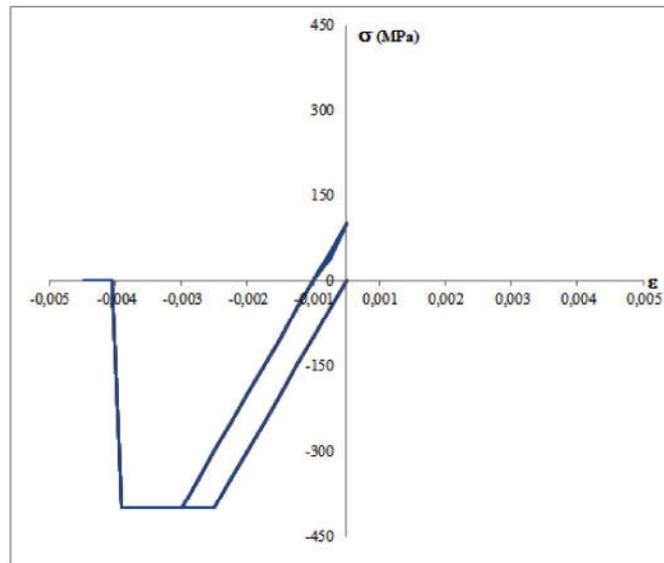
3.4.2.6 Modelo Constitutivo Elastoplástico do Concreto

Para construir o modelo constitutivo para o concreto (*PlastConcrete*) utilizou-se o modelo *IsoNonLinHard* como base. Para isso, deve-se utilizar o valor de K negativo e o de h conforme o tipo de *softening* requerido (linear ou não linear). Mais uma vez, o modelo tomado com base não possui limite de ruptura e este parâmetro foi modificado para melhor representar este material. Além disso, considera que os limites de escoamento para a compressão e tração são os mesmos, fato este que não condiz com o comportamento do concreto. Dessa forma, o algoritmo contém um mecanismo que trata os dois parâmetros de forma diferenciada, conforme os valores de entrada do usuário. Optou-se por manter o trecho elástico como sendo linear e que o material perde a sua total capacidade de suporte caso venha a colapsar na compressão ou na tração. O algoritmo produzido para este modelo pode ser visto no Apêndice C.

Para testar este modelo, utilizou-se o elemento de treliça da Figura 29. Para isso, foram utilizados os mesmos parâmetros do caso anterior (entre outras coisas, $K = 0$). Fez-se a barra ser comprimida até uma tensão acima do limite elástico para em seguida ser descarregada de modo que volte a sua geometria inicial. Em seguida, a barra foi recarregada, desta vez até a ruptura a compressão. Conforme pode ser visto na Figura 34, devido ao acúmulo de

deformações permanentes, apenas descarregar a barra não é suficiente para a geometria voltar ao inicial, é preciso aplicar uma tensão de tração para forçar este retorno.

Figura 34 – Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão.



Fonte: Próprio autor.

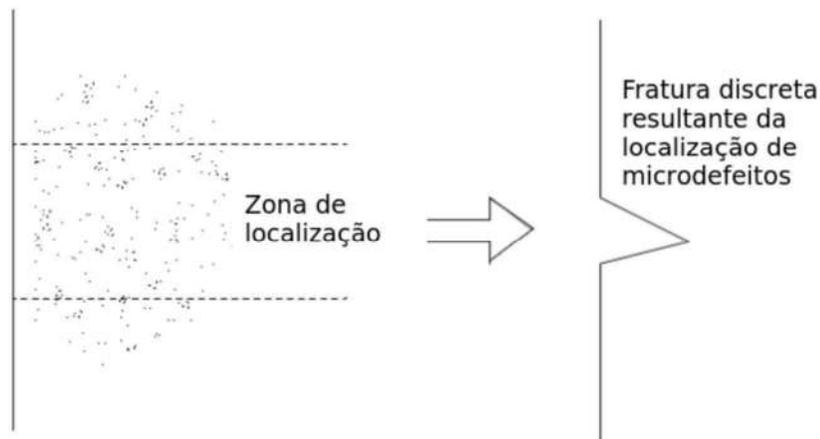
3.4.3 Mecânica do Dano

A resposta inelástica dos sólidos observada macroscopicamente é uma manifestação de processos irreversíveis que ocorrem em sua microestrutura, tais como: escorregamentos relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contorno de grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros⁵⁸. Esses processos dão origem a microdefeitos que constituem o dano do material para um estado de carga.

A Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura referem-se à parte da Mecânica dos Sólidos que estuda o modo como esses microdefeitos evoluem em um dado material. A primeira considera que a microfissuração afetará a rigidez do material de forma contínua e a segunda considera que esta perda de rigidez evoluirá até o surgimento de fissuras discretas. Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada da seguinte forma: na Mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuração) considerado continuamente distribuído. Já na Mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um defeito discreto macroscópico, como uma trinca em num meio mecanicamente intacto^{54,58}, conforme ilustra a Figura 35.

O primeiro modelo de dano foi proposto por Kachanov em 1958, mas foi Robo-tinov em 1963, que propôs a redução da seção transversal devido a microfissuração com um

Figura 35 – Processo de evolução de fissuração distribuída para a uma trinca discreta.



Fonte:⁵⁸.

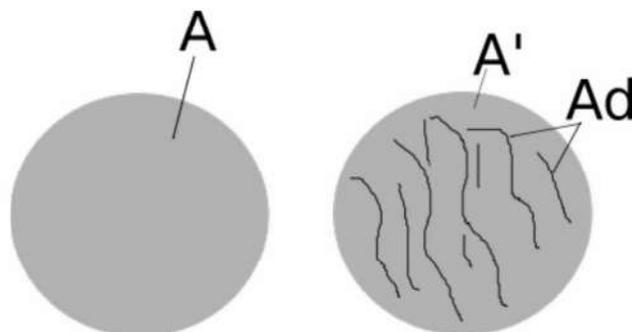
coeficiente adequado para medir o estado interno de danificação do material⁵⁴. Essa variável interna (D), conhecida como Coeficiente de Dano, é utilizada para descrever a evolução do microdefeito do material, sendo definida como:

$$D = \frac{A - A'}{A} = \frac{A_d}{A} \quad (116)$$

onde A é a área da seção transversal totalmente intacta, A' é a área efetiva, ou seja, a área que ainda não foi danificada por um dado carregamento e A_d representa a parcela da área que foi danificada^{59,60}, ver Figura 36.

Quando o material está intacto, ainda não há nenhuma zona danificada ($A_d = 0$) e, portanto, $D = 0$. No entanto, quando o material é submetido a um dado estado de carregamento, inicia-se a fissuração e a área de dano começa a aumentar. Com isso, tem-se que o pior caso de degradação do material será quando a área de dano fosse igual a área da seção transversal totalmente intacta, ou seja, $A_d = A$ e, portanto, $D = 1$.

Figura 36 – Área intacta e fissurada.



De maneira geral, podemos relacionar a área intacta com a área efetiva da seguinte maneira:

$$D = \frac{A - A'}{A} \Rightarrow A' = (1 - D) A \quad (117)$$

Dessa forma, o estágio de dano do material provocará a diminuição da área que resiste a um dado esforço e, portanto, provocará uma mudança na tensão original (σ), originando uma tensão efetiva (σ') dada por:

$$\sigma' = E \varepsilon' \quad (118)$$

onde ε' é a deformação efetiva. Considerando que a força aplicada se mantém contante, pode-se escrever:

$$\sigma' = \frac{F}{A'} \Rightarrow F = \sigma' A' = \sigma A \quad (119)$$

isolando-se a tensão efetiva (σ') e sabendo que $A' = (1 - D)A$, tem-se:

$$\sigma' = \frac{\sigma A}{A'} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (120)$$

substituindo a Equação (120) em (118):

$$\sigma' = \frac{\sigma A}{A'} = E \varepsilon' \quad (121)$$

resultando em:

$$\sigma = (1 - D) E \varepsilon' \quad (122)$$

Considerando o meio como sendo contínuo, a deformação ε fica igual a deformação efetiva ε' , resultando em:

$$\sigma = (1 - D) E \varepsilon \Rightarrow \sigma = E' \varepsilon \quad (123)$$

onde E' é o módulo de elasticidade do material para um dado estágio de dano, sendo definido por $E' = (1 - D) E$.

No caso do concreto, material no qual a fissuração é responsável de modo dominante pela resposta não-linear, a Mecânica do Dano é, sem dúvida, capaz de formular modelos constitutivos bastantes representativos e que também podem ser utilizados de maneira eficiente em análise de estruturas de concreto armado⁵⁸.

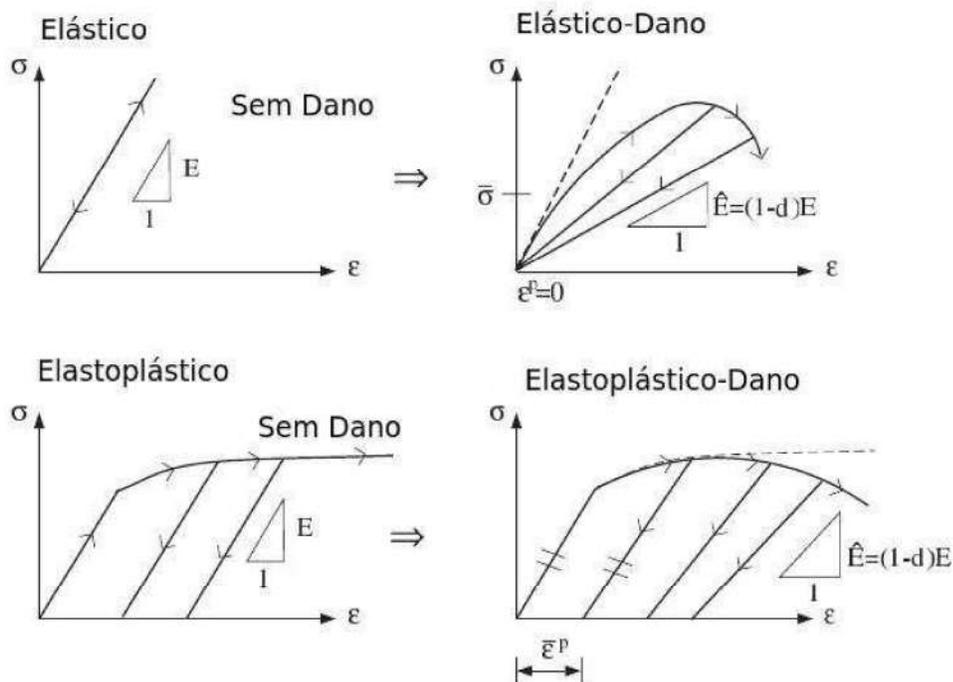
A Mecânica do Dano Contínuo, formalizada por Lemaitre e Chaboche⁵⁹, baseia-se em uma metodologia fundamentada na termodinâmica dos meios contínuos. Nesta, a Primeira

e a Segunda Lei da Termodinâmica são combinadas de forma a gerar uma inequação conhecida como *Desigualdade de Clausius-Duhem*^{54,60}. Esta desigualdade é utilizada como um critério de aceitação de um modelo de dissipação de energia devido a evolução do dano. Esta deve valer para processos reversíveis, quando houver apenas deformações elásticas, e irreversíveis, para quando houver processos inelásticos.

Existem diversos modelos de concreto amado na literatura que consideram este efeito. Légeron *et al*⁶⁰ apresentam um modelo constitutivo baseado na lei de dano proposta por La Borderie⁶¹. Este é utilizado para avaliar o comportamento de estruturas de concreto armado frente a sismos. Os resultados obtidos mostram-se satisfatórios, confirmando que a consideração do dano para modelos de concreto armado mostra-se eficiente em representar mais precisamente o comportamento não linear deste material.

O processo de falha de qualquer material é caracterizado pelo acúmulo de deformações permanentes (plásticas) e pela degradação do material, ambos ilustrados na Figura 37. Modelos constitutivos que incorporam ambos esses aspectos tem potencial para uma descrição mais realista do comportamento do concreto. Nesse sentido, é importante citar o trabalho de Lee e Fenves⁶². Este propõe um modelo constitutivo uniaxial para estruturas de concreto armado que considera a Mecânica do Dano baseado na energia de fratura (*Fracture-Energy-Based Damage*) e a Plasticidade. Os autores comprovam a validade desse modelo analisando diversos exemplos já conhecidos pela literatura e que consideram carregamentos monotônicos e cíclicos. Contudo, neste trabalho optou-se por não considerar esses modelos acoplados.

Figura 37 – Modelos constitutivos com dano e plasticidade.

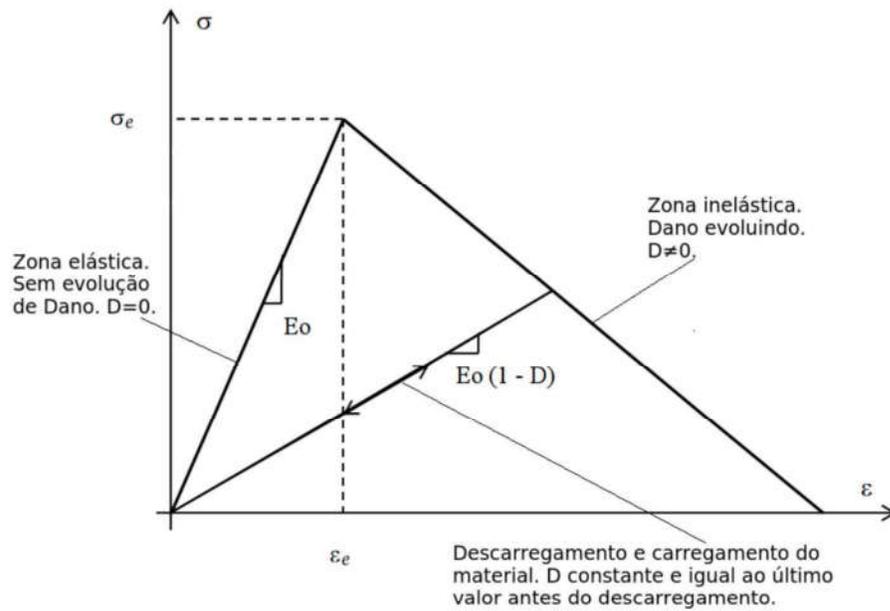


Fonte:⁵⁸.

3.4.3.1 Modelo de Dano Bilinear

Este modelo utiliza duas retas para representar o carregamento, conforme ilustra a Figura 38. Este comportamento é utilizado para os esforços na compressão e na tração e a determinação da variável de dano D pode ser obtida por geometria simples. Conforme pode ser percebido na mesma Figura 38, considerou-se que no trecho elástico não há nenhum acúmulo de dano, permanecendo sempre com $D = 0$, independente da quantidade de descarregamentos e carregamentos.

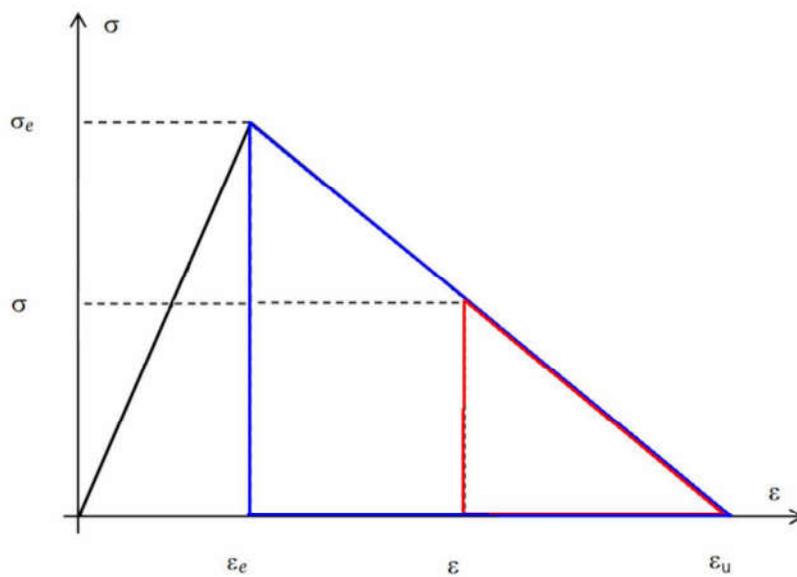
Figura 38 – Modelo de dano bilinear.



Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 38 pode-se isolar os triângulos demarcados na Figura 39, onde ϵ é a deformação atual que o corpo, ϵ_e é o limite elástico, ϵ_u é a deformação última, σ_e é a tensão máxima do material (tensão de pico).

Figura 39 – Modelo de dano bilinear



Fonte: Próprio autor.

Com isso, pode-se construir a seguinte relação por semelhança de triângulos:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_u - \varepsilon} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} \quad (124)$$

isolando o valor de σ ,

$$\sigma = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} (\varepsilon_u - \varepsilon) \quad (125)$$

Sabendo que $\sigma_e = E \varepsilon_e$ e colocando ε em evidência, tem-se:

$$\sigma = \frac{E \varepsilon_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon \quad (126)$$

no entanto, $\sigma = (1 - D) E \varepsilon$. Substituindo na Equação (126) e simplificando obtém-se:

$$D = \frac{\varepsilon_u (\varepsilon - \varepsilon_e)}{\varepsilon (\varepsilon_u - \varepsilon_e)} \quad (127)$$

Analisando a Equação (127) percebe-se que substituindo $\varepsilon = \varepsilon_e$ tem-se $D = 0$. Isto é, o material ainda não sofreu nenhuma degradação, pois considera-se neste trabalho que o trecho elástico não contribui com a incrementação da variável de dano. No entanto, quando $\varepsilon = \varepsilon_u$, tem-se $D = 1$. Isto é, o material atingiu a degradação máxima e não possui agora nenhuma resistência.

Ainda analisando a Figura 38, quando o material está sendo carregado no trecho sem dano, o módulo tangente (E_T) é positivo. No entanto, quando a tensão aplicada fica além da tensão de pico, verifica-se que a inclinação da reta fica negativa indicando uma perda de rigidez. Neste caso, o módulo tangente pode ser calculado da seguinte forma:

$$E_T = \frac{0 - \sigma_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} = - \frac{\sigma_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} \quad (128)$$

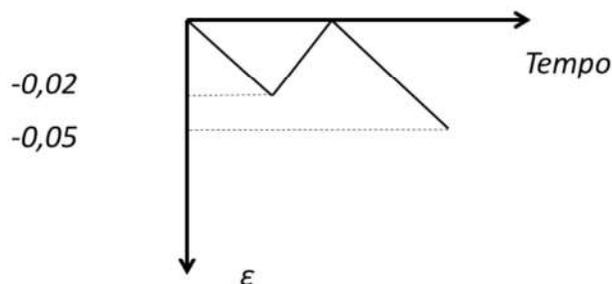
Considerando o desenvolvimento acima, bem como o conceito de *Return Mapping* e preditor elástico anteriormente utilizado para os modelos baseados na Teoria da Plasticidade, pode-se desenvolver um algoritmo para a utilização do Modelo de Dano Bilinear (*Linear Damage*) de forma semelhante aos modelos elastoplásticos. Este algoritmo pode ser visto em mais detalhes no Apêndice D.

Vale salientar que, a partir do modelo descrito acima, pode-se representar a relação constitutiva do concreto. Para isso, deve-se informar os valores do módulo de elasticidade E , aqui considerado igual na compressão e na tração, para os dois materiais, bem como os valores das tensões de pico e a deformação última de cada trecho.

Para testar o modelo apresentado utilizou-se o mesmo exemplo do elemento de treliça da Figura 29. Os testes foram feitos com controle de deformação e na Figura 40 segue a seqüência de carregamento-descarregamento-recarregamento aplicada. Desprezou-se o efeito

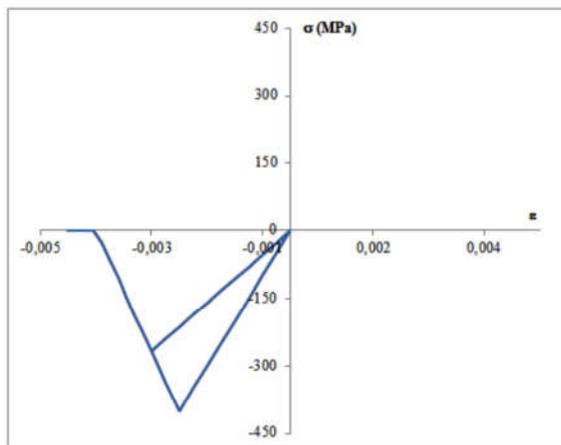
da tração e considerou-se os parâmetros de resistência à compressão como sendo $E = 200GPa$, $\sigma_e = 400MPa$ e $\epsilon_u = 3,5\%$. Ver Figura 41.

Figura 40 – Descrição do carregamento aplicado.



Fonte: Próprio autor.

Figura 41 – Teste do modelo de dano na compressão.



Fonte: Próprio autor.

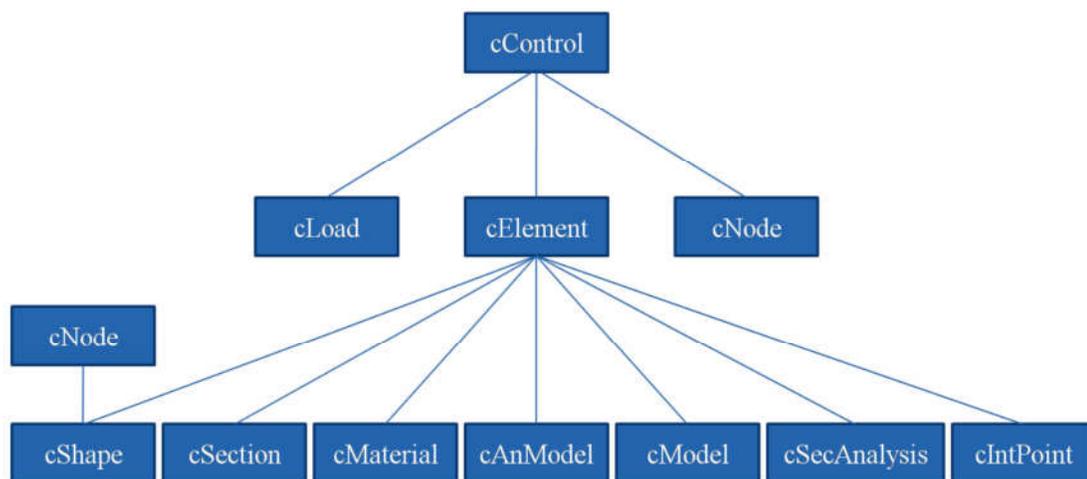
Conforme pode ser notado nas Figuras, o modelo representou a perda de rigidez (*softening*) após a tensão de pico conforme sugere o comportamento do concreto. Além disso, representou o descarregamento e o recarregamento com a mesma inclinação. Dessa forma, percebe-se que o modelo consegue representar de maneira efetiva o comportamento esperado para o material em estudo.

3.5 Implementação Computacional

A implementação dos modelos constitutivos discutidos nos itens anteriores foi realizada no software de elementos finitos FAST (*Finite Element Analysis Tool*). O FAST é um programa de código aberto implementado na linguagem C++ utilizando conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO). Este foi criado e vem sendo continuamente aperfeiçoado no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará^{43,63–65}.

A estrutura do software faz uso dos conceitos de herança e polimorfismo a fim de evitar operações desnecessárias e repetições nos códigos, facilitando a implementação computacional. A estrutura global do programa, mostrando a associação entre as principais classes, é apresentada na Figura 42. Vale salientar que as linhas mostradas não representam uma relação de herança, mas uma relação do tipo *has a*.

Figura 42 – Visão geral da arquitetura do FAST.



Fonte: Próprio autor.

A classe *cControl* é a classe responsável pelo controle dos diversos tipos de análises disponíveis (estáticas, dinâmicas, lineares e não lineares). Estes diferentes tipos de análise são implementados através da função virtual *Solver* implementada por cada sub-classe, através do mecanismo de polimorfismo. De particular interesse para este trabalho são as classes disponíveis para análise não linear estática, incluindo métodos como Controle de Carga, Controle de Deslocamentos e Comprimento de Arco. Por outro lado, a classe base implementa uma série de funções utilizadas pelos diversos métodos, através do mecanismo de herança. Estes métodos incluem a montagem de vetores (forças internas e externas) e matrizes globais (e.g. rigidez e massa), numeração dos graus de liberdade, impressão dos dados de saída etc.

A classe *cLoad* define o comportamento geral das cargas externas em um sistema de elementos finitos e contém os métodos que são comuns para os diferentes tipos de cargas

a serem aplicadas (e.g. concentrada e distribuída em linha). As características específicas, incluindo a forma de cálculo do carregamento nodal equivalente, de cada uma são implementadas em classes derivadas desta principal. Esta classe também é responsável pelo armazenamento de todas as cargas presentes na malha. Um característica importante da implementação é que todas as cargas podem variar no tempo, com esta variação sendo descrita com diferentes tipos de funções, como senoidal e linear por partes.

A classe *cNode* define o comportamento geral dos nós dos elementos finitos e lida com uma série de atributos (condições de contorno, graus de liberdade etc.) associada aos nós do modelo de análise.

As classes *cMaterial* e *cSection* são responsáveis pela leitura e armazenamento dos dados dos materiais e seções transversais, respectivamente. Estas classes ainda possuem métodos que permitem a consulta dos dados armazenados. Esta consulta pode ser realizada por objetos de outras classes, como *cModel* e *cSecAnalysis*.

A classe *cElement* gerencia todas as tarefas individuais de cada elemento da malha, contendo um objeto da classe *cShape*, que armazena suas funções de forma, um modelo de análise *cAnModel*, que é responsável pelo modelo matemático do problema a ser resolvido (campo de deslocamentos, deformações, graus de liberdade etc.) e um modelo de análise de seção *cSecAnalysis*, que realiza integrações na seção transversal do elemento, se necessário.

Além disso, para cada ponto de integração do elemento, um objeto da classe *cInt-Point* é criado e, para cada um destes, é criado um objeto *cSecAnalysis*. Este objeto *cSecAnalysis* cria por sua vez, quantos modelos constitutivos (*cModel*) forem necessários. Assim, no caso de elementos isoparamétricos planos e tridimensionais, para cada ponto de integração é criado um modelo constitutivo, enquanto no caso de treliças, apenas um modelo constitutivo é criado por elemento, uma vez que as deformações são constantes. No caso de elementos de pórtico, cada objeto *cSecAnalysis* cria quantos pontos de integração ao longo da seção transversal forem necessários, em função do método utilizado (Gauss ou fibras).

3.5.1 A classe *cMaterial* e Modelos Constitutivos

É na classe *cMaterial* que todos os modelos constitutivos, elásticos e inelásticos, estão presentes. Neste trabalho foram impletados seis modelos constitutivos inelásticos unidimensionais (1D), conforme discutido anteriormente. A saber:

- *cMod1DPlastIsoLinHard*;
- *cMod1DPlastIsoNonLinHard*;
- *cMod1DPlastIsoExpHard*;
- *cMod1DPlastReBar*;
- *cMod1DPlastConcrete*;

- *cModIDDamageConcrete*.

Os modelos constitutivos para elementos unidirecionais são estabelecidos na classe *cModelID*, enquanto nos demais modelos isto é feito na classe *cModel*. Essa divisão é feita para reduzir o custo computacional, dado a diferença entre o número de variáveis e integração entre os elementos unidirecionais e os demais, planos e sólidos.

É importante notar que cada modelo constitutivo (i.e. objeto da classe *cModelID* ou *cModel*), armazena suas variáveis internas, como a deformação plástica acumulada ou a variável de dano. Por outro lado, os parâmetros do material, como o módulo de elasticidade e o módulo plástico, são armazenados no objeto da classe *cMaterial* associado ao modelo constitutivo. Este aspecto é importante para evitar o armazenamento de dados desnecessários, pois o número de materiais diferentes em uma malha geralmente é pequeno, enquanto que o número de pontos de integração, e portanto de modelos constitutivos, pode ser muito grande.

Uma relação similar existe entre as classes *cSection* e *cSecAnalysis*. A classe *cSection* armazena a geometria e os materiais de cada seção transversal, sendo seus objetos criados durante a leitura de dados. Por outro lado, a classe *cSecAnalysis* é responsável pela criação e armazenamento dos modelos constitutivos, bem como pela integração dos esforços internos e matriz tangente da seção transversal. Portanto, é criado um objeto desta classe para cada ponto de integração ao longo do comprimento do elemento.

Em cada modelo, a obtenção das tensões para o passo de carga e do módulo tangente são feitas em funções diferentes. No primeiro caso, é utilizada a função *Stress* e no segundo a função *cMatrix*. Estas funções são chamadas quando os elementos precisam calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente, respectivamente. Após a convergência de cada passo, o algoritmo de controle, via elemento, chama a função *UpdateState* para que as variáveis internas do modelo constitutivo sejam atualizadas, deixando-o pronto para o próximo incremento de deformação. Os algoritmos referentes a estas funções estão descritos nos Apêndices A ao D.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

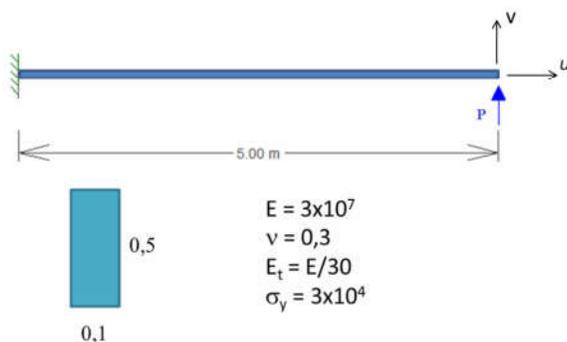
Os elementos finitos e modelos constitutivos apresentados no capítulo anterior são utilizados agora na análise não linear física e geométrica de quatro estruturas. As duas primeiras correspondem a exemplos bem conhecidos na literatura e bastante utilizados para teste de modelos elásticos e elastoplásticos na análise de estruturas com grandes deslocamentos. O objetivo dessas duas análises é fazer uma verificação da implementação realizada, demonstrando a capacidade da ferramenta numérica desenvolvida neste trabalho.

Os dois últimos exemplos correspondem à estruturas de concreto armado que foram ensaiadas em laboratório com objetivo de estudar o fenômeno do colapso progressivo. Estes exemplos são utilizados inicialmente para validação dos modelos constitutivos implementados neste trabalho e posteriormente para estudo do efeito de alguns parâmetros de projeto, como a resistência ao colapso progressivo.

4.1 Viga em Balanço

Este exemplo trata de uma viga em balanço com comprimento de 5 m e uma carga pontual atuando em sua extremidade. Detalhes sobre a seção transversal e as propriedades dos materiais utilizados são apresentados na Figura 43.

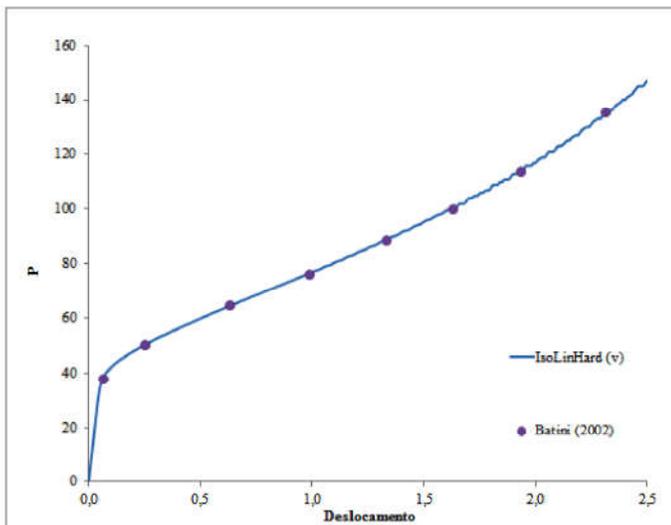
Figura 43 – Condições de contorno, geometria e propriedades do material do exemplo.



Fonte: Próprio autor.

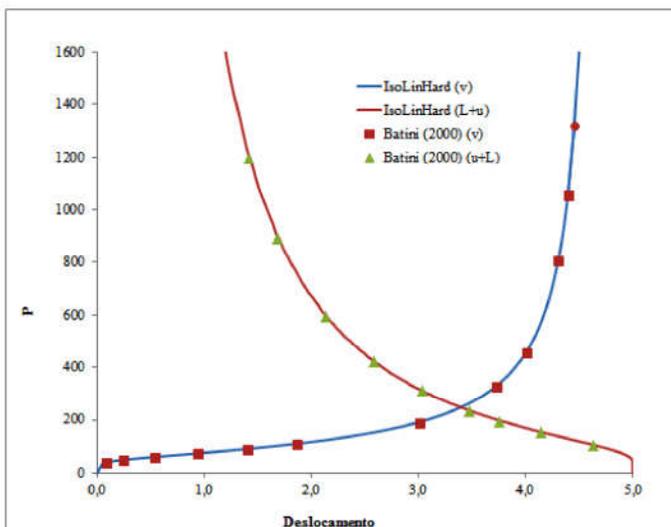
A análise elástica desta estrutura foi realizada por Euler em 1744 e tem sido bastante utilizada por diversos autores para avaliar a eficiência das suas ferramentas computacionais em representar grandes deslocamentos de forma adequada. O fato sua solução analítica ser conhecida fez deste exemplo um *benchmark* utilizado em diversos trabalhos^{46,66}. No presente trabalho foram utilizados 4 elementos de pórtico com formulação corotacional e com modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico (IsoLinHard). Para a integração foram utilizados inicialmente 100 fatias e posteriormente 4 pontos de Gauss. Foi utilizado o Método de Controle de Carga com uma tolerância de 10^{-5} .

Figura 44 – Curva carga-deslocamento vertical da viga em balanço.



Fonte: Próprio autor.

Figura 45 – Curvas carga-deslocamento da viga em balanço.



Fonte: Próprio autor.

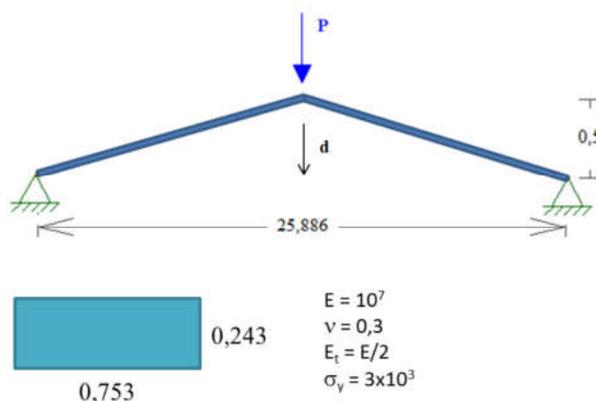
As curvas carga-deslocamento desta estrutura considerando as não-linearidades física e geométrica são apresentadas na Figuras 44 e 45. Na primeira figura tem-se apenas o trecho inicial do caminho de equilíbrio de maneira a analisar apenas o deslocamento vertical. Por outro lado, a segunda mostra o comportamento dos deslocamentos vertical e horizontal para todo o carregamento aplicado. Analisando as curvas, verifica-se que os resultados obtidos apresentaram elevada proximidade quando comparados aos de Battini⁴⁶, tanto para o trecho com pequenos deslocamentos, Figura 44, como para grandes deslocamentos, Figura 45. Além disso,

os resultados apresentam a eficácia do modelo para este caso e sua eficiência, já que foram utilizados apenas 4 elementos. Este problema foi resolvido diminuindo o número de fatias até 50 e utilizando 4 pontos de Gaus, em ambos os casos não notou-se variação significativa dos resultados.

4.2 Pórtico Toggle

O Pórtico Toggle (*Toggle Frame*), assim como o exemplo anterior, é um importante *benchmark* na literatura. É composto por uma estrutura plana formada por duas barras com uma angulação obtusa e com dois apoios do segundo gênero. Detalhes sobre a sua geometria e as propriedades materiais utilizadas são apresentadas na Figura 46.

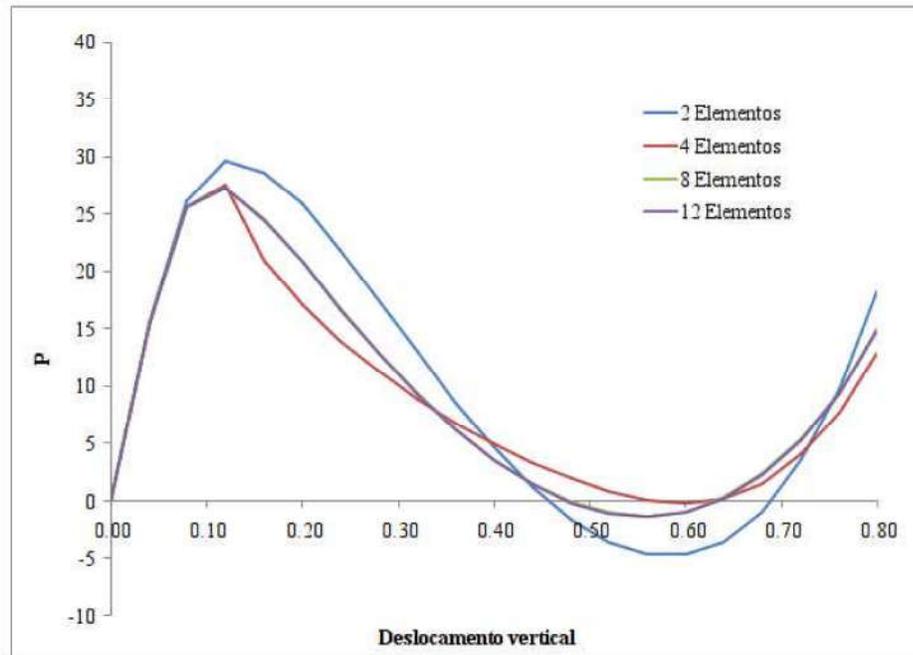
Figura 46 – Geometria e propriedades do Pórtico Toggle.



Fonte: Próprio autor.

Por se tratar de um exemplo que apresenta um comportamento mais semelhante ao objeto de estudo deste trabalho, colapso progressivo, resolveu-se realizar um estudo de convergência mais detalhado comparado ao exemplo anterior. Foi utilizado o elemento de pórtico de Bernoulli com a formulação corrotacional e com modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico (IsoLinHard). Além disso, foram utilizados 100 fatias para a integração da seção. Foi utilizado o Método de Controle de Carga com uma tolerância de 10^{-5} . Conforme pode ser visto na Figura 47, o modelo convergiu com 8 elementos (4 elementos por barra). A partir disso, não houve mais nenhuma diferença significativa com o refinamento da malha.

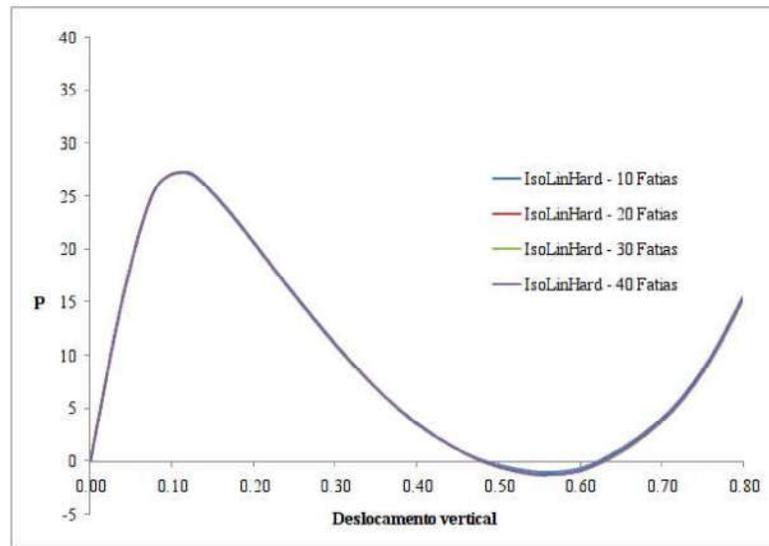
Figura 47 – Efeito do número de elementos.



Fonte: Próprio autor.

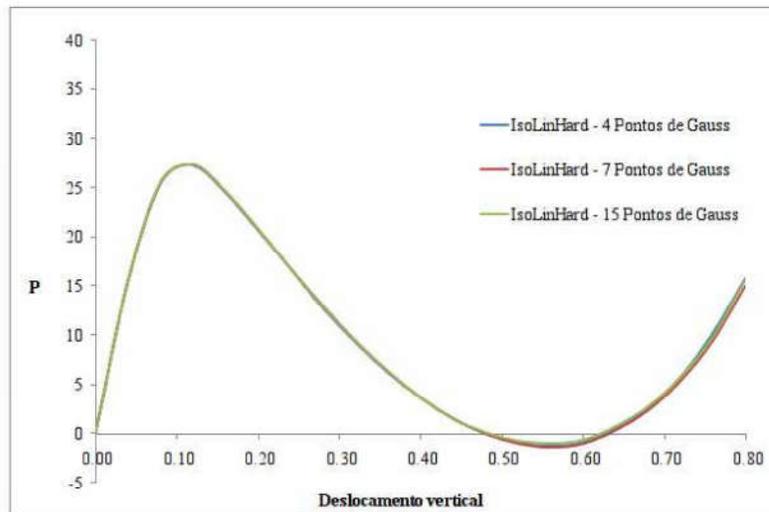
Fixando a malha com 4 elementos por barra, variou-se o número de fatias e pontos de Gauss a fim de estudar a convergência da integração da seção. Analisando as Figuras 48 e 49, percebe-se que não houve variação significativa nos resultados para os casos utilizados. Dessa forma, nota-se que não é necessário um grande número de fatias ou pontos de Gauss para a obtenção de resultados satisfatórios. Este aspecto é importante, pois o custo computacional, em termos tanto de memória quanto de tempo de processamento, aumenta com o número de pontos de integração adotados.

Figura 48 – Efeito do número de fatias.



Fonte: Próprio autor.

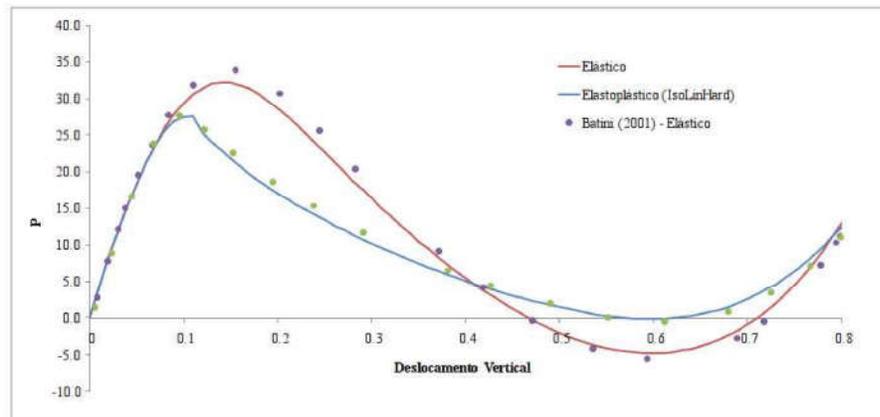
Figura 49 – Efeito no número de pontos de Gauss.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, os resultados obtido considerando 4 elementos por barra e 40 fatias na seção transversal são comparados com os resultados de Battini⁴⁶ na Figura 50. Esses mostram a adequação do modelo, haja visto a boa concordância com os resultados de Battini⁴⁶.

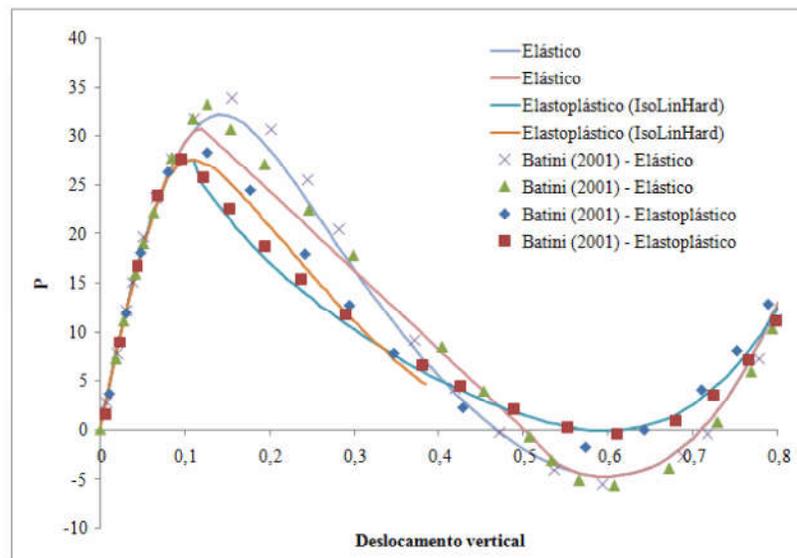
Figura 50 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle.



Fonte: Próprio autor.

Finalmente, na Figura 51 comparou-se o resultado utilizando o material elástico e colocando uma pequena imperfeição na malha para representar o efeito desta no comportamento da estrutura, assim como foi feito inicialmente por Battini⁴⁶. Analisando a figura, percebe-se que o material elástico apresentou um comportamento mais rígido do que o elastoplástico e, dessa forma, superestimando a capacidade de carga da estrutura.

Figura 51 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle com imperfeição.



Fonte: Próprio autor.

No geral, pode-se afirmar que o modelo constitutivo para elastoplástico com endurecimento linear, acrescido da não-linearidade geométrica via formulação corrotacional, mostrou-se efetivo em captar o comportamento não linear físico e geométrico desta estrutura.

4.3 Pórtico IMF-NIST

Este exemplo trata de um pórtico plano de concreto armado ensaiado pelo *National Institute of Standards and Technology* (NIST)⁶⁷ e descrito por Sadek *et al*^{12,67}. Neste estudo foram ensaiados dois pórticos de concreto armado projetados para duas classes de carga sísmicas diferentes: *Intermediate Moment Frame* (IMF) para a Categoria de Projeto Sísmico C e *Special Moment Frame* (SMF) para a Categoria de Projeto Sísmico D.

Os ensaios realizados buscaram simular o efeito da perda de um dos pilares e a consequente redistribuição das cargas entre os elementos restantes. Nestes estudos as estruturas foram levadas até a ruptura, como pode ser visto na Figura 52. Mais detalhes sobre os ensaios realizados podem ser encontrados nas referências citadas.

Neste trabalho será considerado apenas o pórtico IMF, cujos dados de geometria, seção transversal e armadura podem ser vistos na Figura 53. Para o aço, considerou-se um modelo elastoplástico bilinear cujas propriedades materiais das barras utilizadas são definidas na Tabela 6. No entanto, seguindo o modelo utilizado por Oliveira⁵¹ e Iribarrem⁵⁰, serão adotados valores médios dos citados para todas as barras da estrutura. Dessa forma, tem-se a tensão de escoamento como sendo $\sigma_y = 469$ MPa, a tensão última como sendo $\sigma_u = 645$ MPa e a deformação última como sendo $\epsilon_u = 19,5\%$. O valor do Módulo de Elasticidade foi adotado como sendo $E = 200$ GPa.

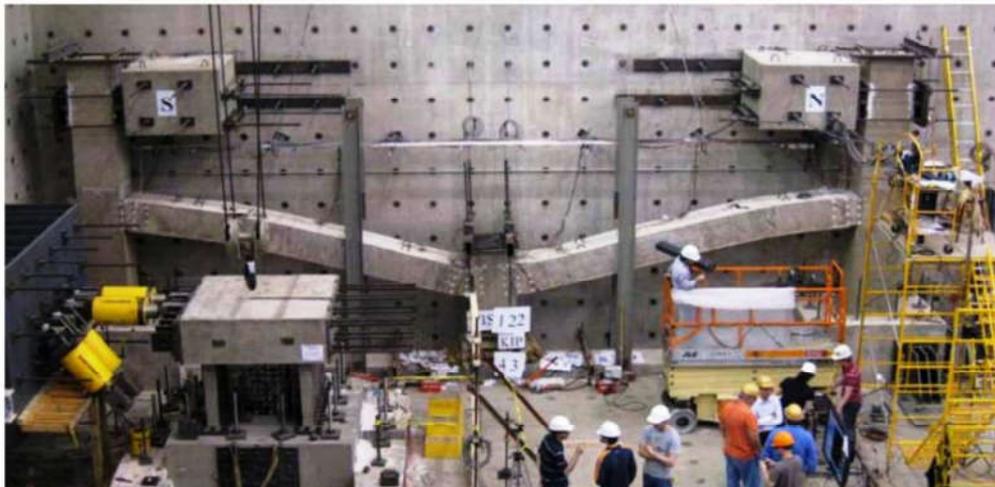
Tabela 6 – Propriedade das barras de aço do Pórtico IMF-NIST.

Elemento	Diâmetro (mm)	σ_y (MPa)	σ_u (MPa)	ϵ_u
Viga	25,40	472	648	21,0
Viga	28,65	462	641	18,0
Pilar	28,65	483	690	17,0

Fonte:⁶⁷

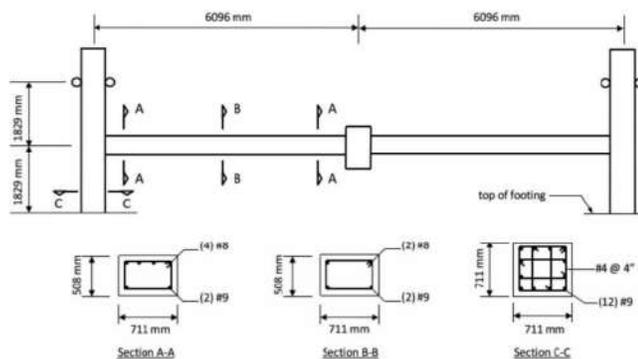
Para o concreto, ainda de acordo com os autores citados, adotaram-se os valores das propriedades do material: $f_{ck} = 38$ MPa, Módulo de Elasticidade $E = 27$ GPa e deformação última como sendo $\epsilon_u = 0,9\%$. Este elevado valor da deformação última deve-se a consideração do efeito do confinamento do concreto devido aos estribos⁵¹.

Figura 52 – Ensaio do pórtico IMF-NIST.



Fonte: 12.67

Figura 53 – Dados do pórtico IMF-NIST.

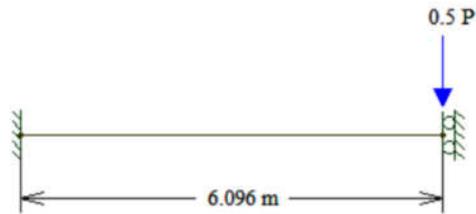


Fonte: 12.67.

Inicialmente, estudou-se a influência do modelo estrutural adotado considerando comportamento dos materiais como elástico. Foram considerados três modelos distintos (Figuras 54, 55 e 54). No Modelo 1 (Figura 54), considera-se a simetria do modelo e modela-se apenas a viga com a extremidade do pilar engastada. O Modelo 2 (Figura 55), também considera a simetria, mas inclui o pilar de extremidade no modelo. Finalmente, o Modelo 3 (Figura 56) considera o pórtico completo.

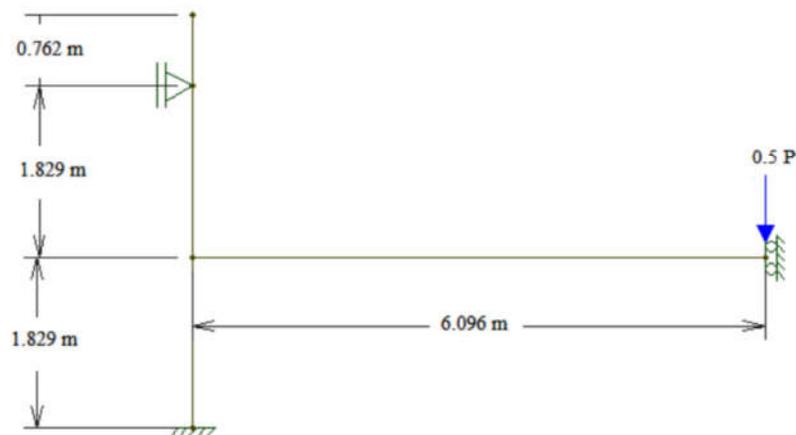
O modelo convergiu com uma malha de 12 elementos para o Modelo 1, 21 elementos para o Modelo 2 e 44 elementos para o Modelo 3. Foi utilizado o Método de Controle de Deslocamentos com uma tolerância de erro de 10^{-5} e um máximo de 50 interação por cada passo ou incremento de carga. Após estudo de convergência, foi utilizado 100 fatias para a integração da seção.

Figura 54 – Modelo 1 do pórtico IMF-NIST.



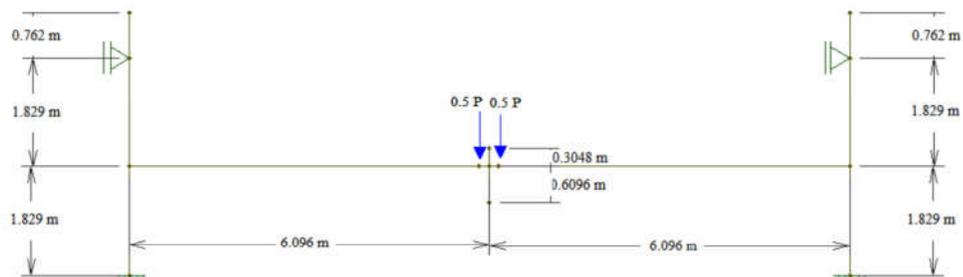
Fonte: Próprio autor.

Figura 55 – Modelo 2 do pórtico IMF-NIST.



Fonte: Próprio autor.

Figura 56 – Modelo 3 do pórtico IMF-NIST.



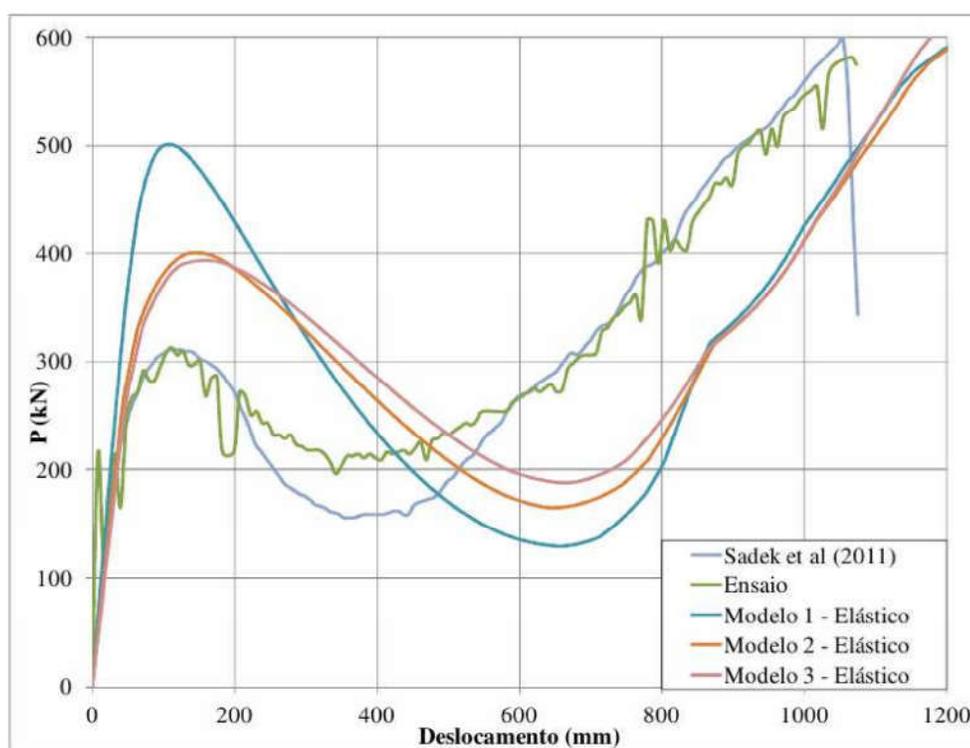
Fonte: Próprio autor.

O relatório NIST 1720⁶⁷ não fornece o cobrimento utilizado, apenas afirmando que o valor do cobrimento obedeceu aos limites prescritos pelo ACI 318-02. Neste, o valor do co-

brimento varia de no mínimo 1 polegada (25.4 mm) para concreto não expostos a intempéries ou em contato com o solo, até 3 polegadas (76.2 mm) para concreto projetado ou permanentemente expostos a intempéries ou em contato com o solo. Dessa forma, inicialmente foi utilizado o valor mínimo.

Os resultados da análise desses três modelos são apresentados no gráfico da Figura 57. Analisando as curvas, verifica-se que o Modelo 1 é excessivamente rígido e não representa de forma adequada o comportamento do pórtico ensaiado. Os Modelos 2 e 3 obtiveram resultados mais próximos entre si e dos resultados experimentais. É importante notar que apesar dos modelos não conseguirem captar de forma precisa a carga de ruptura, o efeito catenária foi representado de maneira adequada. Isto mostra que a formulação corrotacional mostra-se eficiente para esse tipo de situação, mesmo com esse tipo de modelo constitutivo. Nota-se também que a consideração da ligação viga-pilar como perfeitamente rígida não representa de forma adequada o comportamento global do pórtico, mostrando a necessidade de uma modelagem mais sofisticada da ligação viga-pilar¹².

Figura 57 – Comparação entre os modelos do pórtico IMF-NIST.

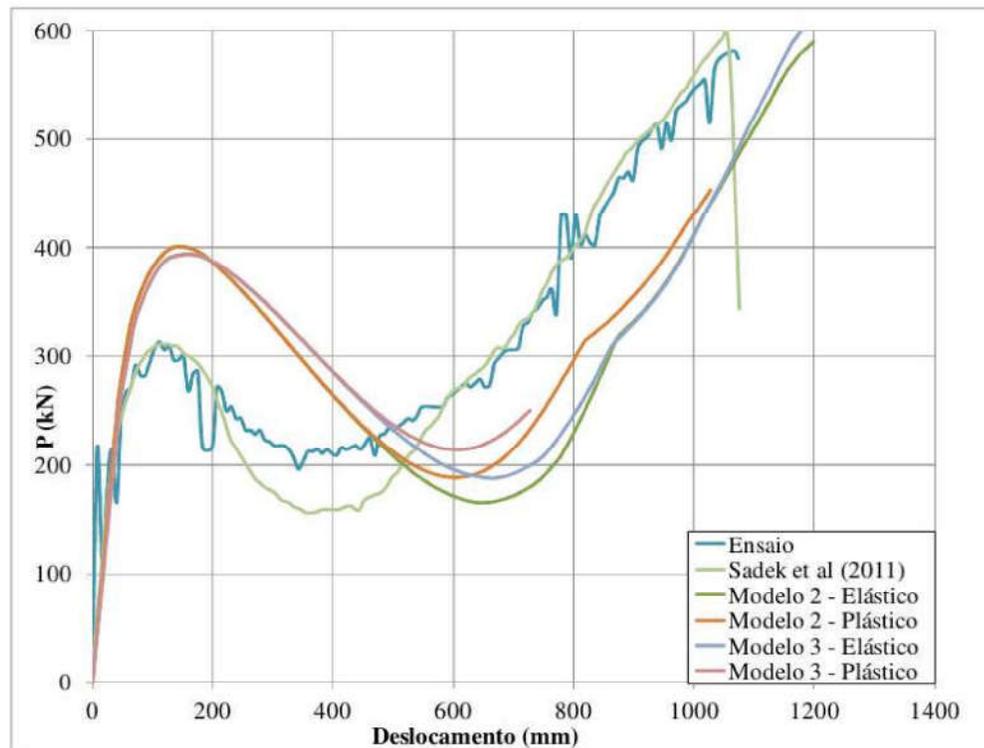


Fonte: Próprio autor.

Em seguida, avaliou-se os Modelos 2 e 3 considerando o aço com comportamento elastoplástico. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 58. Observa-se que a consideração da plasticidade do aço não teve influência significativa sobre o valor da carga máxima da estrutura (ponto limite), mas melhorou a representação da recuperação da resistência da estru-

tura devido ao efeito catenária. Por outro lado, observou-se maior dificuldade de convergência da análise, não sendo possível obter a curva carga-deslocamento completa, principalmente no caso do Modelo 3.

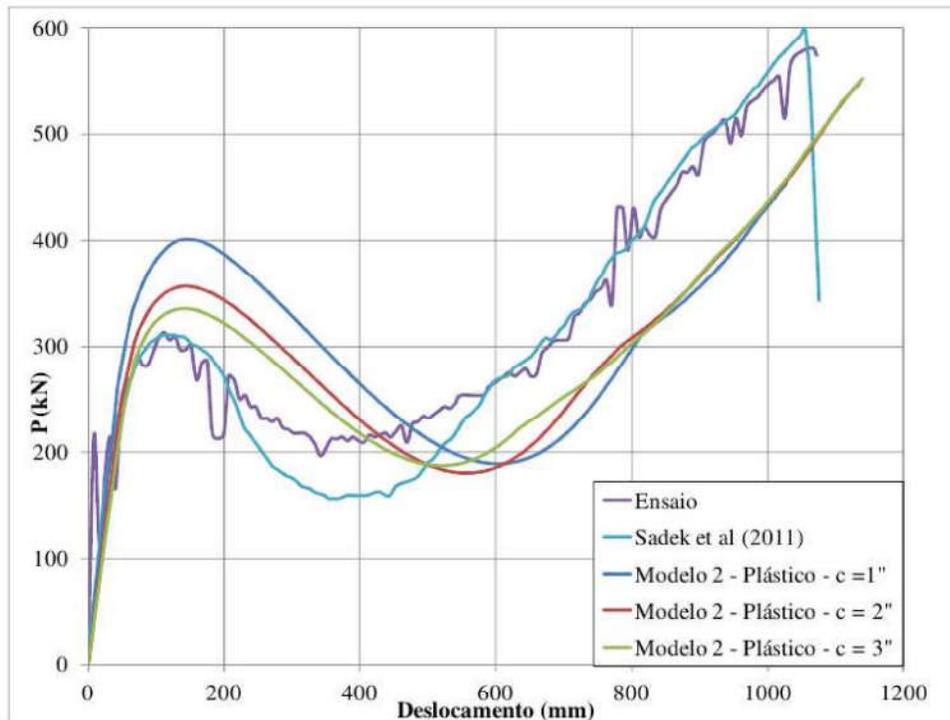
Figura 58 – Comparação entre os modelos para aço do pórtico IMF-NIST.



Fonte: Próprio autor.

Como o cobrimento da armadura não foi fornecido, resolveu-se estudar o efeito deste parâmetro sobre o comportamento da estrutura. Os resultados obtidos variando o cobrimento entre os limites mínimo e máximo do ACI são apresentados na Figura 59. Avaliando as curvas obtidas, percebe-se que a variação do cobrimento influenciou de forma significativa a carga máxima da estrutura (ponto limite), mas não teve praticamente nenhuma influência sobre a recuperação de capacidade da carga devido ao efeito catenária.

Figura 59 – Efeito do cobrimento da armadura do pórtico IMF-NIST.



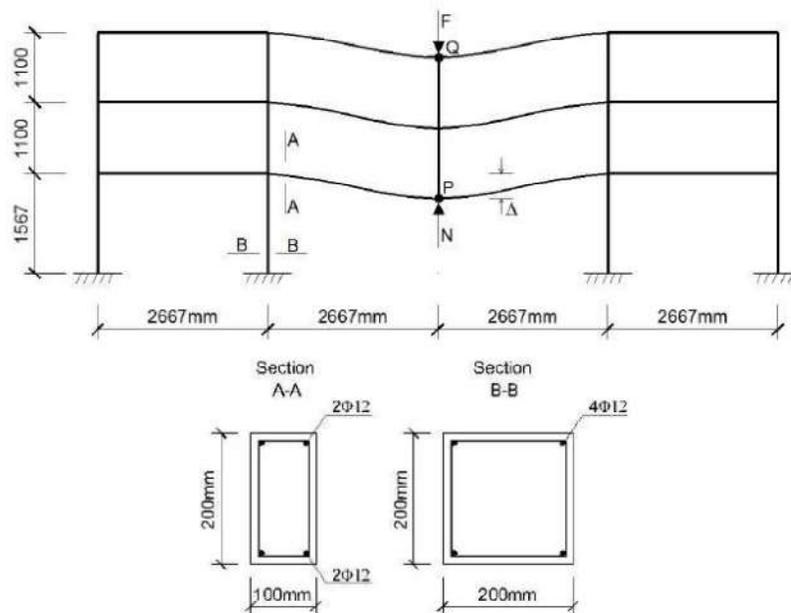
Fonte: Próprio autor.

Uma explicação para esta observação é que o aumento do cobrimento reduz o braço do binário entre os bordos comprimidos e tracionados, reduzindo assim o momento resistente da viga. Por outro lado, o efeito catenária está ligado à tração que aparece na viga para grandes deslocamentos, fazendo com que ela trabalhe de forma semelhante a um tirante. Assim, para o efeito catenária, o determinante é a área de aço, sem importar sua distribuição na seção transversal.

4.4 Pórtico de Yi (2008)

A quarta aplicação utilizada para estudo paramétrico é um pórtico plano de três andares e quatro vãos ensaiado por Yi¹¹. Este pórtico, que é apresentado na Figura 60, foi projetado segundo a norma chinesa de estruturas de concreto GB50010-2002⁶⁸ e foi construído em um terço da uma escala real. O pórtico é apresentado na Figura 60.

Figura 60 – Geometria e seções transversais do Pórtico de Yi.



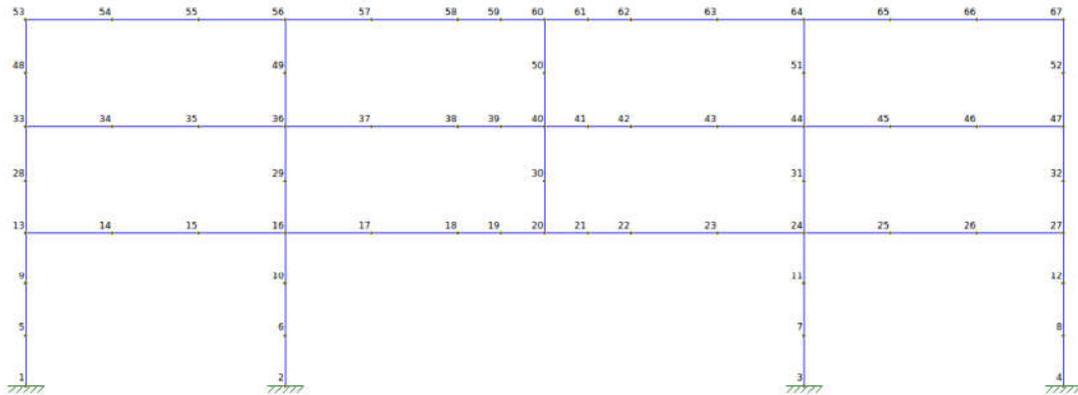
Fonte:^{11,51}.

Para o aço foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento linear e ruptura (ReBar) com Módulo de Elasticidade de 200 *GPa*, tensão de escoamento e última de 416 MPa e 526 MPa, respectivamente. Além disso, considerou-se que o aço tem uma deformação última igual a 10 %. Para o concreto, foi considerado um modelo elástico multilinear com um resistência a compressão de 25 MPa. O módulo de elasticidade foi estimado segundo a NBR 6118²⁶ como sendo $E = 0.85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}}$ e, portanto, tem o valor de 23.8 *GPa*. A deformação última do concreto na compressão foi estimada como sendo 0.35% e a resistência à tração foi desprezada.

A análise foi realizada através do Método do Controle de Carga com uma tolerância de 10^{-5} e máximo de 50 iterações por passo de carga. A carga $F = 109$ kN aplicada no topo do pórtico é mantida constante durante a análise. Por outro lado, a carga N é inicialmente igual à F , mas é reduzida paulatinamente de maneira a simular a perda do pilar.

Foram utilizados 74 elementos finitos corrotacionais, sendo cinco por cada coluna do solo para o topo, quatro elementos por viga imediatamente adjacentes ao pilar retirado e três para as demais vigas, como mostrado na Figura 61. A integração na seção transversal foi realizada utilizando 100 fatias, de forma a garantir uma alta precisão.

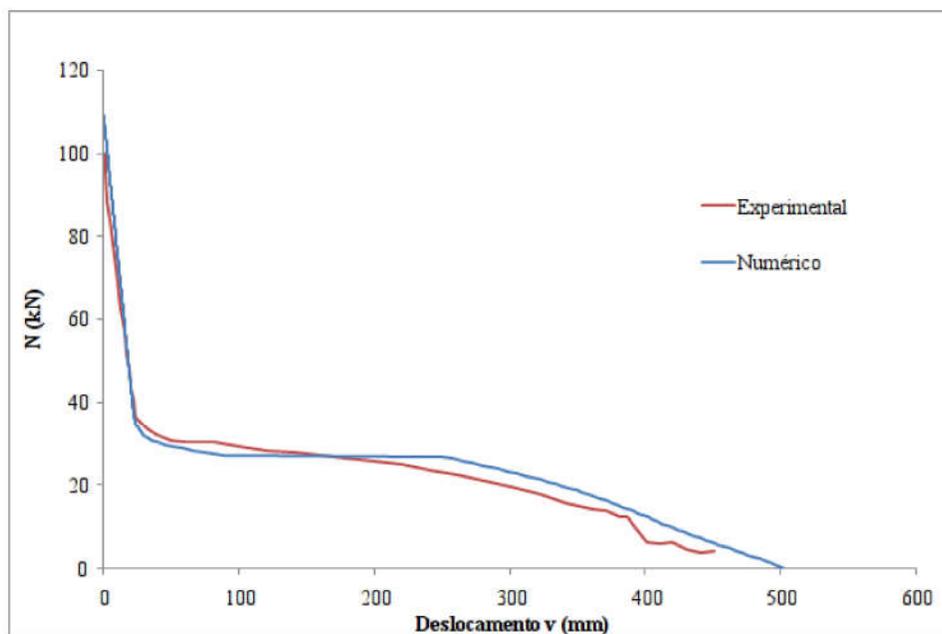
Figura 61 – Malha utilizada no Pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

A curva carga (N) x deslocamento vertical do ponto P é mostrada na Figura 62. Pode-se perceber que o modelo de elementos finitos adotado apresentou boa aproximação com resultado experimental. Observa-se que, para deslocamentos em torno de 30 mm a estrutura apresenta uma perda significativa de rigidez e grande aumento dos deslocamentos verticais, caracterizando a falha da estrutura inicial da estrutura. Contudo, com o crescimento dos deslocamentos verticais do ponto P, as vigas adjacentes passam a trabalhar como tirantes (efeito catenária), permitindo a redistribuição dos esforços e um ganho de rigidez e capacidade de carga por parte da estrutura.

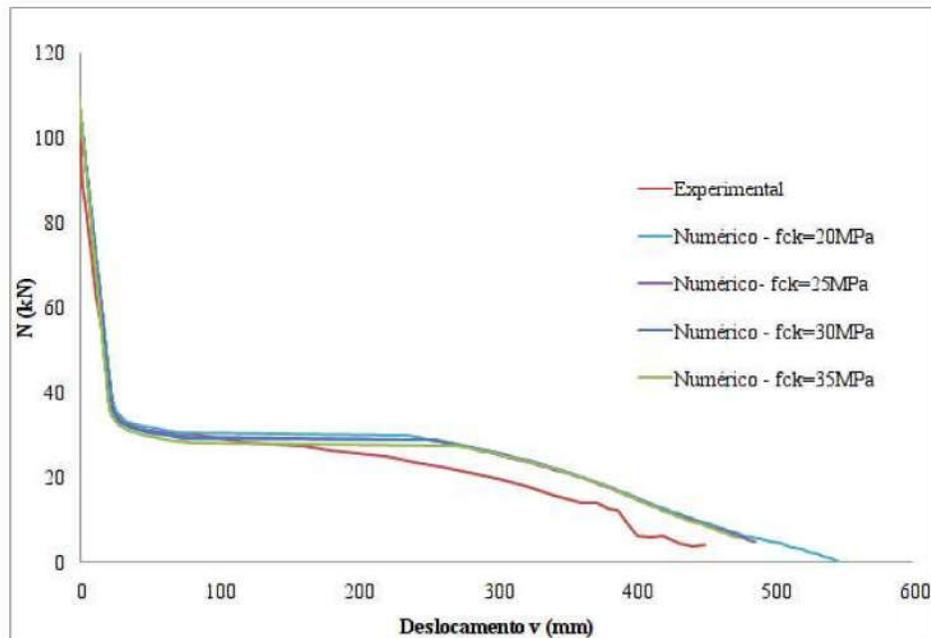
Figura 62 – Relação carga-deslocamento do pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

Vale a pena ressaltar que tentou-se utilizar os modelos elastoplástico e de dano bilinear para o concreto, mas esses apresentaram problemas de convergência, não sendo possível obter a curva carga-deslocamento da estrutura. Como os resultados obtidos utilizando o modelo elástico multilinear para o concreto foram muito bons, considerou-se mais importante para o presente trabalho estudar o efeito de alguns parâmetros de projeto sobre a resistência ao colapso progressivo.

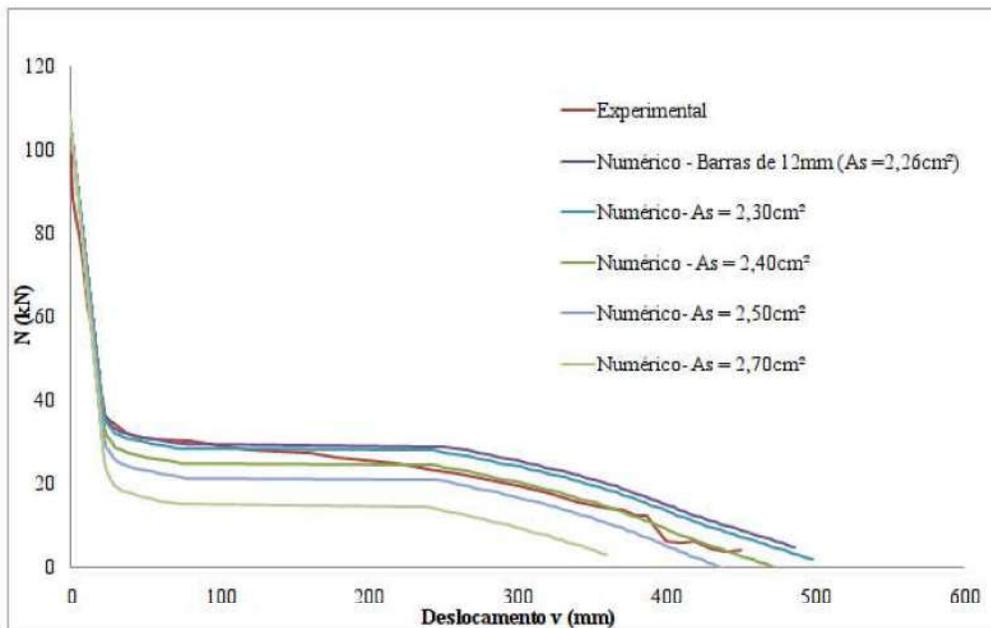
Inicialmente, fez-se variar a resistência do concreto entre 20 MPa e 35 MPa, mantendo constantes os demais parâmetros do modelo. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 63. Analisando os caminhos de equilíbrio obtidos, conclui-se que o incremento da resistência do concreto leva a um pequeno aumento na carga de falha inicial da estrutura. Por outro lado, este parâmetro não teve efeito significativo sobre o ganho de resistência da estrutura após o aparecimento do efeito catenária. Deve-se a isto o fato de que, o efeito catenária só tem início depois da falha da estrutura de concreto, estando mais relacionado com as propriedades da armadura.

Figura 63 – Variação do f_{ck} do Pórtico de Yi.

Fonte: Próprio autor.

Assim, para estudar o efeito da armadura, inicialmente variou-se a área de aço em cada bordo de vigas e pilares de $2,26\text{cm}^2$ ($2\phi 12$ mm) até $2,70\text{cm}^2$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 64. Estes resultados mostram que mesmo com uma pequena variação da área de aço, houve um significativo ganho de resistência ao CP. Essa observação está de acordo com os resultados obtidos por Iribarren⁵⁰ e Oliveira⁵¹.

Figura 64 – Variação da área de aço do Pórtico de Yi.



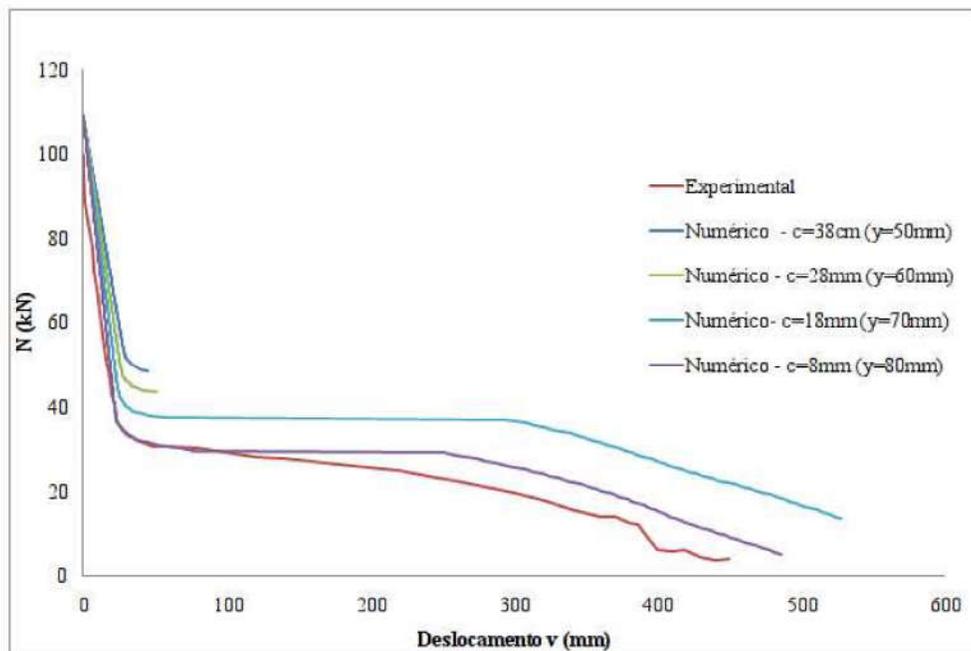
Fonte: Próprio autor.

Por fim, variou-se também o cobrimento da armadura de maneira semelhante ao exemplo realizado no exemplo anterior. Neste estudo o cobrimento (c) foi variado de 8 mm a 38 mm, variando-se em consequência a a distância (y) da armadura em relação ao centroide da seção transversal:

$$y = \frac{h}{2} - \left(c + \frac{\phi}{2} + \phi_r \right) \quad (129)$$

em que $\phi_r = 6$ mm é o diâmetro da armadura transversal (estribos). Os resultados obtidos são apresentados na Figura 65. Através dessa figura, percebe-se que este parâmetro tem grande influência sobre a carga de falha inicial da estrutura. Por outro lado, o ganho de capacidade de carga devido ao efeito catenária varia muito pouco com ele.

Figura 65 – Variação do cobrimento da armadura do Pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo desse trabalho foi a criação de uma ferramenta computacional que fosse capaz de modelar problemas de colapso progressivo. Para isso, modelos constitutivos inelásticos foram implementados e utilizados juntamente com a formulação cinemática corrotacional, previamente presente no programa FAST, onde as implementações foram feitas. Ao total, cinco modelos constitutivos baseados na Teoria da Plasticidade foram implementados e um baseado na Teoria do Dano Linear. No primeiro caso, três modelos foram divididos como sendo gerais, isto é, não direcionados a um material em específico, e dois direcionados para o aço e concreto. Estes são: *IsoLinHard*, *IsoNonLinHard*, *IsoExpHard*, *ReBar* e *PlastConcrete*, respectivamente. Já o último modelo, baseado na Teoria do Dano Linear, foi direcionado para a representação do concreto e foi chamado de *LinearDamage*.

Um outro ponto importante, foi o levantamento bibliográfico sobre o colapso progressivo de forma a apresentar o estado da arte. Isto é importante, pois dado a escassez de material do assunto em português e o fato dessa dissertação ser a primeira a abordar este tema no Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, verifica-se que esta será um importante ponto de partida para trabalhos futuros.

Analisando as aplicações numéricas realizadas, pode-se observar que a ferramenta foi capaz de modelar problemas não lineares clássicos e geralmente utilizados como validação na literatura técnica, além de ensaios em tamanho real^{12,67} e em escala¹¹ de situações relacionadas ao colapso progressivo.

No estudo paramétrico, observou-se que a área de aço foi o parâmetro que apresentou maior sensibilidade no que diz respeito à resposta do modelo. Para um pequeno incremento da área de aço, observou-se grande variação das curvas carga-deslocamento dos problemas estudados. Já a resistência do concreto mostrou-se praticamente desprezível no que diz respeito ao desempenho da estrutura ao colapso progressivo. Por outro lado, os resultados mostraram que o cobrimento da armadura tem grande influência sobre a resistência da estrutura, mas pequena influência sobre a recuperação de resistência causada pelo efeito catenária. Estes resultados mostram-se importantes, pois observou-se que em muitos trabalhos verifica-se a ausência de alguns parâmetros importantes como este, o que pode alterar ou dificultar a representação dos resultados apresentados. No geral, poucos elementos foram necessários para a convergência do problema. Além disso, foram necessárias no máximo 100 fatias e 4 pontos de Gauss para a convergência da integração da seção.

Na modelagem do pórtico Pórtico IMF-NIST^{12,67}, alguns dados e considerações não ficaram muito claras e dificultaram a correta modelagem do pórticos. Além disso, também percebeu-se alguns problemas na convergência do modelo constitutivo para o concreto, o que acredita-se que seja o motivo de ter sido obtida uma resposta mais rígida comparada com o ensaio. Problemas estes que não foram encontrados no pórtico de Yi (2008)¹¹.

Ao final, pode-se verificar que os modelos implementados foram capazes de repre-

sentar os problemas em estudo tanto em modelos de viga quanto de pórtico. Assim, a ferramenta desenvolvida mostrou-se eficaz na utilização para estudos do CP. Dessa forma, pode-se concluir que este trabalho cumpriu seus objetivos e que pode ser considerado um ponto de partida para pesquisas futuras que são apresentadas na forma de sugestões no item a seguir.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Visando a continuidade deste trabalho, são sugeridos temas de pesquisa importantes para a melhor compreensão do CP de estruturas de concreto:

- Estudo e solução do problema de convergência apresentados pelos modelos constitutivos inelásticos para o concreto.
- Consideração dos efeitos dinâmicos causados pela retirada brusca de um pilar;
- Modelagem do colapso progressivo de estruturas de concreto com vigas protendidas;
- Desenvolvimento de modelos para representação adequada do comportamento das ligações viga-pilar próximo ao colapso da estrutura;
- Uso de modelos de pórtico espacial para melhor representar a redistribuição de esforços em edifícios de concreto após a retirada de um pilar;
- Consideração do efeito das lajes sobre o colapso progressivo;
- Simulação do comportamento de um edifício real submetido a retirada de um pilar, de maneira a avaliar a adequação das normas técnicas sobre colapso progressivo.

REFERÊNCIAS

1. ELLINGWOOD, B. R. et al. **Best practices for reducing the potential for progressive collapse in buildings**. Washington, D.C: Nistir 7396, 2007.
2. UNITED STATES GENERAL SERVICES ADMINISTRATION. **GSA 2013**: Alternate path analysis and design guidelines for progressive collapse resistance. Washington, D.C: GSA, 2013.
3. DEPARTMENTE OF DEFENSE (**DoD**): **UNIFIED FACILITIES CRITERIA (UFC)**. **DoD 2013**: Design of structures to resist progressive collapse. Washington, D.C: 2009.
4. PEARSON, C.; DELATTE, N. Ronan point apartment tower collapse and its effect on building codes. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 19, p. 172-177, 2005.
5. GOREN, F.; KOSTEM, N.. **Progressive collapse of multistory buildings, a case study**. Pennsylvania: Lehigh University, 1990.
6. Desabamento de um edificio no Rio de Janeiro por Colapso Progressivo. Disponível em: <<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2012/01/peritos-investigam-causas-dedesabamento-no-rio.html>> Acesso em 15 Setembros 2014.
7. ELLINGWOOD, B.; LEYENDECKER, E. Approaches for design against progressive collapse. **Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 104, p. 266–277, 1978.
8. MOHAMED, O. A. Progressive collapse of structures: Annotated bibliography and comparison of codes and standards. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 20, p. 418–425, 2006.
9. LI, Y.; LU, X.; GUAN, H.; YE, L. An improved tie force method for progressive collapse resistance design of reinforced concrete frame structures. **Engineering Structures**, v. 33, p. 2931-2942, 2011.
10. SALEM, H.; EL-FOULY, A.; TAGEL-DIN, H. Toward an economic design of reinforced concrete structures against progressive collapse. **Engineering Structure**, v. 33, p. 3341-3350, 2011.
11. YI, W.-J.; HE, Q. F.; XIAO, Y.; KUNNATH, S. K. Experimental study on progressive collapse resistant behavior of reinforced concrete frame structures. **ACI structural Journal**, v. 105, p. 433-439, 2008.
12. SADEK, F.; MAIN, J.; LEW, H. S.; BAO, Y. Testing and analysis of steel and concrete beam-column assemblies under a column removal scenario. **Engineering Structure**, v. 129, p. 141-155, 2011.
13. SASANI, M.; KROPELNIKI, J. Progressive collapse analysis of an RC structure. **The Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 17, p. 757–771, 2008.

14. EL-TAWIL, S.; LI, H.; KUNNATH, S. Computational simulation of gravity-induced progressive collapse of steel-frame buildings: Current trends and future research needs. **Journal of Structural Engineering**, v. 140, p. 1-20, 2014.
15. QIN, X.; WANG, W.; CHEN, Y.; BAO, Y. Experimental study of through diaphragm connection types under a column removal scenario. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 112, p. 293-304, 2015.
16. YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive collapse: Experimental tests of beam-column joints and development of component-based models. **Journal of Structural Engineering**, v. 139, p. 1-22, 2013.
17. YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive collapse: Mechanical modelling of bolted-angle connections under tension. **Engineering Structural**, v. 57, p. 153-168, 2013.
18. AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **ASCE/SEI 7-10**: Minimum design loads for buildings and other structures, Virginia, 2010.
19. EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 1** – Actions on structures – Part 1-7: General Actions – Accidental actions. EN 1991-1-7. Brussel, 2006.
20. STAROSSEK, U. Typology of progressive collapse. **Engineering Structural**, v. 29, p. 2302-2307, 2007.
21. KHANDELWAL, K.; EL-TAWIL, S.. Assessment of progressive collapse residual capacity using pushdown analysis. In: STRUCTURES CONGRESS 2008: CROSSING BORDERS, 20., 2008, Vancouver. **Anais**. Vancouver: Anais, 2008. p. 1-15.
22. KHANDEWAL, K.; EL-TAWIL, S. Pushdown resistance as a measure of robustness in progressive collapse analysis. **Engineering Structure**, v. 33, p. 2653–2661, 2011.
23. LIVINGSTON, E.; SASANI, M.; BAZAN, M.; SAGIROGLU, S. Progressive collapse resistance of RC beams. **Engineering Structures**, v. 95, p. 61-70, 2015.
24. MENCHEL, K.. **Progressive collapse: Comparison of main standards, formulation and validation of new computational procedures**. 2009. 131 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universite Libre de Bruxelles, Bruxelles, 2009.
25. CONGRESSIONAL RESERACH SERVICE. **Federal building and facility security**. Washington D.C: CRS, 2010.
26. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto armado - Procedimento. Rio de Janeiro-RJ, 2014.
27. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-11**: Building code requirements for structural concrete. Farmington Hill, 2011.

28. JIAN, H.; ZHENG, Y. Simplified models of progressive collapse response and progressive collapse-resisting capacity curve of RC beam-column substructures. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 28, p. 1-15, 2014.
29. VALIPOUR, H. R.; FOSTER, S. J. Finite element modelling of reinforced concrete framed structures including catenary action. **Computers & Structures**, v. 88, p. 529-538, 2010.
30. KIM, S.; LEE, C.-H.; LEE, K. Effects of floor slab on progressive collapse resistance of steel moment frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 110, p. 183-190, 2015.
31. YI, W.-J.; ZHANG, F.-Z.; KUNNATH, S. K. Progressive collapse performance of RC flat plate frame structures. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 140, p. 1-18, 2014.
32. KEYVANI, L.; SASANI, M.; MIRZAEI, Y. Compressive membrane action in progressive collapse resistance of RC flat plates. **Engineering Structures**, v. 140, p. 554-564, 2014.
33. KOKOT, S.; ANTHOINE, A.; NEGRO, P.; SOLOMOS, G. Static and dynamic analysis of a reinforced concrete flat slab frame building for progressive collapse. **Engineering Structures**, v. 40, p. 205-217, 2012.
34. EL-TAWIL, S.; LI, H.; KUNNATH, S. Computational simulation of gravity-induced progressive collapse of steel-frame buildings: Current trends and future research needs. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 140, p. 1-20, 2014.
35. LEW, H. S.; MAIN, J. A.; ROBERT, S. D.; SADEK, F.; CHIARITO, V. P. Performance of steel moment connections under a column removal scenario. **Journal of Structural Engineering**, v. 139, p. 1-19, 2013.
36. QIN, X.; WANG, W.; CHEN, Y.; BAO, Y. Experimental study of through diaphragm connection types under a column removal scenario. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 112, p. 293-304, 2015.
37. YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive collapse: Mechanical modelling of bolted-angle connections under tension. **Engineering Structures**, v. 57, p. 153-168, 2013.
38. YANG, B.; TAN, K. H. Behavior of composite beam-column joints in a middle-column removal scenario: Experimental tests. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 140, p. 1-15, 2014.
39. LI, Y.; LU, X.; GUAN, H.; YE, L. An improved tie force method for progressive collapse resistance design of reinforced concrete frame structures. **Engineering Structure**, v. 33, p. 2931-2942, 2011.
40. BRITISH STANDARD INSTITUTE. **BS6399**: Loading for buildings, part 1: code of practice for dead and imposed loads. London, 1996.

41. BRITISH STANDARD INSTITUTE. **BS8110**: Structural use of concrete, part 1: code of practice for design and construction. United Kingdom, 1997.
42. EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2** – Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. EN 1991-1-7. Brussel, 2006.
43. MEIRELES NETO, M. **Estabilidade de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas**. 2012. 121 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/5652>>. Acesso em: 25 jun. 2014.
44. PARENTE JR, E. *et al* .Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 7, p. 874-904, 2014.
45. CRISFIELD, M.. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. England: Jhon Wiley & Sons, 1991, v. 1.
46. BATTINI, J. M.. **Co-rotational beam elements in instability problems**. 2002. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.12.2360&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 15 Maio 2014.
47. COOK, R. et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. New York: Jhon Wiley & Sons, 2002.
48. BATHE, K. J.. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
49. RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.
50. IRIBARREN, S.; BERKE, P.; BOUILLARD, P.; VANTOMME, J.; MASSART, T. Investigation of the influence of design and material parameters in the progressive collapse analysis of RC structures. **Engineering Structure**, v. 33, p. 2805-2820, 2011.
51. OLIVEIRA, C. *et al* . Computational analysis of a RC planar frame using corotational multilayered beam FE, correlated to experimental results. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 24., 2013, Pirenópolis. **Anais**. Pirenópolis: Cilamce 2013, 2013. p. 500-513.
52. OLIVEIRA, C. et al. Computational assessment of the progressive collapse of a five story structure considering two different building codes. In: THEMATIC CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN STRUCTURAL DYNAMICS AND EARTHQUAKE ENGINEERING, 21., 2013, Greece. **Anais**. Greece: Ecomas 2012, 2012. p. 325-337
53. BORST, R. et al. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. 2. ed. United Kingdom: Wiley, 2012.
54. SOUZA NETO, E.A; PERIC, D.; OWEN, D.R.J.. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. United Kingdom: Wiley, 2008.
55. CHEN, H. F.; HAN, D. J.. **Plasticity for structural engineering**. New York: Springer-Verlag, 2007.

56. SIMO, J. C.; HUGHES, T.. **Computational inelasticity**. New York: Springer, 2000. 7 v
57. YAW, L. L.. **Nonlinear static - 1d plasticity**: Various forms of isotropic hardening. 2012. Disponível em: <<https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/plasticitypublications/1Dplasticity.pdf>>. Acesso em: 14 ago. 2014.
58. PROENÇA, S.P.B. **Elementos de mecânica do dano em meios contínuos**. 2012. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/resist/SIAE2.0/aulas/apostilas/Aula3.pdf>>. Acesso em: 05 abr. 2014.
59. ZHANG, W.; CAI, Y.. **Continuum damage mechanics and numerical applications**. China: Springer, 2010.
60. LÉGERON, F.; PAUTRE, P.; MAZARS, J. Damage mechanics modeling of nonlinear seismic behavior of concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 131, p. 1-13, 2005.
61. RAGUENEAU, F.; LABORDERIER, C.; MAZARS, J.. Constitutive equations for brittle materials: damage, inelasticity, friction and unilateral effect coupling. In: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING, 20, 2012, Barcelona. **Anais**. Barcelona: Eccomas 2000, 2012. p. 554-570.
62. LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, p. 1-15, 1998.
63. ROCHA, I. B. C.. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013. 157 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/8007?mode=full>>. Acesso em: 15 out. 2014.
64. DANTAS JUNIOR, E. M.. **Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos**. 2014. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/13383>>. Acesso em: 12 out. 2014.
65. MORORÓ, L. A. T.. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2013. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/11683>>. Acesso em: 20 nov. 2014.
66. SILVA, S. S.. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas**. 2011. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
67. LEW, H. et al. **An experimental and computational study of reinforced concrete assemblies under a column removal scenario**. Washington, D.C.: Nistir 1720, 2011.
68. PUBLISHING HAUSE OF BUILDING INDUSTRY IN CHINA. **GB50010**: Code for Design of Concrete Structures. China: 2002.

6 APÊNDICE A - ALGORITMO DE MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR, NÃO LINEAR E EXPONENCIAL

Algoritmos dos modelos constitutivos elastoplásticos considerando o endurecimento linear (*IsoLinHard*), não linear (*IsoNonLinHard*) e exponencial (*IsoExpHard*), respectivamente. As variáveis que contém um acento circunflexo como $\hat{\epsilon}$ e $\hat{\alpha}$, por exemplo, são iterativas e as que não contém são as convergidas. Ao final dos cálculos dos modelos constitutivos, chama-se a função *UpdateState* para transformar as variáveis iterativas nas convergidas do passo $n + 1$. O algoritmo de que apresenta o mapeamento de retorno (*return mapping*) corresponde as funções *Stress* e *cMatrix*, descritas no item 3.5.1

Figura 66 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade com encruamento linear.

<p>Dados: $E, \epsilon_{n+1}, \sigma_y$ e K Resultado: $\hat{\epsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}, \sigma_{n+1}$ e E_t Preditor Elástico ; $\hat{\epsilon}_{n+1}^p = \epsilon_n^p$; $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n$; $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\epsilon_{n+1} - \hat{\epsilon}_{n+1}^p)$; $f(\sigma)_{n+1}^{teste} = \hat{\sigma}_{n+1} - (\sigma_y + K\hat{\alpha}_{n+1})$; se $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$ então $E_t = E$; senão $\Delta\gamma = \frac{f(\sigma)_{n+1}^{teste}}{E+K}$; $\hat{\epsilon}_{n+1}^p = \epsilon_n + \Delta\gamma \text{ sign}(\sigma)$; $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$; $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\epsilon_{n+1} - \hat{\epsilon}_{n+1}^p)$; $E_t = \frac{EK}{E+K}$; fim</p>
--

Fonte: Próprio autor.

Figura 67 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade com encruamento linear.

<p>Dados: $\hat{\epsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}$ Resultado: $\epsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}$ $\epsilon_{n+1}^p = \hat{\epsilon}_{n+1}^p$; $\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1}$;</p>

Fonte: Próprio autor.

Figura 68 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade com encruamento não linear.

```

Dados:  $E, \varepsilon_{n+1}, \sigma_y, K$  e  $h$ 
Resultado:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}, \sigma_{n+1}$  e  $E_t$ 
Preditor elástico ;
 $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$  ;
 $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n$  ;
 $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
 $f(\hat{\sigma}_{n+1}) = |\hat{\sigma}_{n+1}| - \sigma_y(1 + K(\hat{\alpha}_{n+1})^h)$  ;
se  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$  então
|  $E_t = E$  ;
senão
| Utiliza  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma E - G(\hat{\alpha}_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$  para encontrar  $\Delta\gamma$  Utilizando Newton Raphson ;
|  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma)$  ;
|  $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$  ;
|  $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
|  $dG = \sigma_y K h (\hat{\alpha}_{n+1})^{h-1}$  ;
|  $E_t = \frac{E dG}{E + dG}$  ;
fim

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 69 – Atualização do estado (*UpdateState*) do modelo de plasticidade com encruamento não linear.

```

Dados:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}$ 
Resultado:  $\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}$ 
 $\varepsilon_{n+1}^p = \hat{\varepsilon}_{n+1}^p$  ;
 $\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1}$  ;

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 70 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade com encruamento exponencial.

```

Dados:  $E, \varepsilon_{n+1}, \sigma_Y$  e  $\delta$ 
Resultado:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}, \sigma_{n+1}$  e  $E_t$ 
Preditor Elástico ;
 $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$  ;
 $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n$  ;
 $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
 $f(\hat{\sigma}_{n+1}) = |\hat{\sigma}_{n+1}| - \sigma_Y e^{\delta \hat{\alpha}_{n+1}}$  ;
se  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$  então
  |  $E_t = E$  ;
senão
  | Utiliza  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma E - G(\hat{\alpha}_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$  para encontrar  $\Delta\gamma$  Utili-
  | zando Newton Raphson ;
  |  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\hat{\sigma}_{n+1})$ ;
  |  $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$ ;
  |  $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$ ;
  |  $dG = \sigma_Y \delta e^{\delta \hat{\alpha}_{n+1}}$  ;
  |  $E_t = \frac{E dG}{E + dG}$ ;
fim

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 71 – Atualização do estado (*UpdateState*) do modelo de plasticidade com encruamento exponencial.

```

Dados:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}$ 
Resultado:  $\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}$ 
 $\varepsilon_{n+1}^p = \hat{\varepsilon}_{n+1}^p$  ;
 $\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1}$  ;

```

Fonte: Próprio autor.

7 APÊNDICE B - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO ELAS-TOPLÁSTICO PARA O AÇO

Algoritmo do modelo constitutivo elastoplástico para as barras de aço (*ReBar*).

Figura 72 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade para o aço.

```

Dados:  $E, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_u, \sigma_Y$  e  $K$ 
Resultado:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}, \hat{\sigma}_{n+1}$  e  $E_t$ 
Preditor Elástico ;
 $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$  ;
 $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n$  ;
 $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
 $f(\hat{\sigma}_{n+1}) = |\hat{\sigma}_{n+1}| - (\sigma_Y + K\hat{\alpha}_{n+1})$  ;
se  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_u$  então
  | se  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$  então
  | |  $E_t = E$  ;
  | senão
  | |  $\Delta\gamma = \frac{f(\hat{\sigma}_{n+1})}{E+K}$  ;
  | |  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{ sign}(\hat{\sigma}_{n+1})$  ;
  | |  $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$  ;
  | |  $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
  | |  $E_t = \frac{EK}{E+K}$  ;
  | fim
senão
  |  $\hat{\sigma}_{n+1} = 0$  ;
  |  $E_t = 0$  ;
fim

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 73 – Atualização do estado (*UpdateState*) do modelo de plasticidade para o aço.

```

Dados:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}$ 
Resultado:  $\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}$ 
 $\varepsilon_{n+1}^p = \hat{\varepsilon}_{n+1}^p$  ;
 $\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1}$  ;

```

Fonte: Próprio autor.

8 APÊNDICE C - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO ELAS-TOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

Algoritmo do modelo constitutivo elastoplástico para o concreto (*PlastConcrete*).

Figura 74 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de plasticidade para o concreto.

```

Dados:  $E, \varepsilon_{n+1}, \sigma_Y^c, K^c, h^c, \varepsilon_u^c, \sigma_Y^t, K^t, h^t, \varepsilon_u^t$ 
Resultado:  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}, \sigma_{n+1}$  e  $E_t$ 
Preditor Elástico ;
 $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$  ;
 $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n$  ;
 $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
se  $\varepsilon_{n+1} < 0$  e  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_u^c|$  então
     $f(\hat{\sigma}_{n+1}) = |\hat{\sigma}_{n+1}| - \sigma_Y^c(1 + K^c(\hat{\alpha}_{n+1})^{h^c})$  ;
    se  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$  então
         $E_t = E$  ;
    senão
        Utiliza  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma E - G(\hat{\alpha}_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$  para encontrar  $\Delta\gamma$ 
        Utilizando Newton Raphson ;
         $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\hat{\sigma}_{n+1})$  ;
         $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$  ;
         $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
         $dG = \sigma_Y K h (\hat{\alpha}_{n+1})^{h-1}$  ;
         $E_t = \frac{EdG}{E+dG}$  ;
    fim
fim
senão se  $\varepsilon_{n+1} > 0$  e  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_u^t$  então
    se  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) \leq 0$  então
         $E_t = E$  ;
    senão
        Utiliza  $f(\hat{\sigma}_{n+1}) - \Delta\gamma E - G(\hat{\alpha}_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$  para encontrar  $\Delta\gamma$ 
        Utilizando Newton Raphson ;
         $\hat{\varepsilon}_{n+1}^p = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\hat{\sigma}_{n+1})$  ;
         $\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$  ;
         $\hat{\sigma}_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1}^p)$  ;
         $dG = \sigma_Y K h \alpha^{h-1}$  ;
         $E_t = \frac{EdG}{E+dG}$  ;
    fim
fim

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 75 – Atualização do estado (*UpdateState*) do modelo de plasticidade para o concreto.

<p>Dados: $\hat{\epsilon}_{n+1}^p, \hat{\alpha}_{n+1}$</p> <p>Resultado: $\epsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}$</p> <p>$\epsilon_{n+1}^p = \hat{\epsilon}_{n+1}^p;$</p> <p>$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1};$</p>

Fonte: Próprio autor.

9 APÊNDICE D - ALGORITMO DO MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO CONSIDERANDO DANO LINEAR

Algoritmo do modelo constitutivo Bilinear para o concreto considerando a Teoria do Dano (*LinearDamage*).

Figura 76 – Mapeamento de retorno (*return mapping*) do modelo de dano bilinear para o concreto.

```

Dados:  $D_n^c, D_n^t, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^{cmax}, \varepsilon_n^{tmax}, E, \sigma_Y^c, \varepsilon_u^c, \sigma_Y^t, \varepsilon_u^t$ 
Resultado:  $\hat{D}_{n+1}, \hat{\sigma}_{n+1}$  e  $E_t$ 
se  $\varepsilon_{n+1} < 0$  e  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_u^c|$  então
     $\hat{\varepsilon}_{n+1}^{cmax} = \varepsilon_n^{cmax};$ 
     $\hat{D}_{n+1}^c = D_n^c;$ 
    se  $|\varepsilon_{n+1}| \leq |\hat{\varepsilon}_{n+1}^{cmax}|$  então
         $E_t = (1 - \hat{D}_{n+1}^c);$ 
         $\hat{\sigma}_{n+1} = E_t \varepsilon_{n+1};$ 
    senão
         $\hat{\varepsilon}_{n+1}^{cmax} = \varepsilon_{n+1};$ 
         $\hat{D}_{n+1}^c = \left( \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}^{cmax} - \varepsilon_Y^c}{\varepsilon_u^c - \varepsilon_Y^c} \right) \frac{\varepsilon_u^c}{\varepsilon_{n+1}^{cmax}};$ 
         $\hat{\sigma}_{n+1} = (1 - \hat{D}_{n+1}^c) \varepsilon_{n+1};$ 
         $E_t = -\frac{\sigma_Y^c}{\hat{\varepsilon}_{n+1}^{cmax} - \varepsilon_Y^c};$ 
    fim
se  $\varepsilon_{n+1} > 0$  e  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_u^t|$  então
    a  $\hat{\varepsilon}_{n+1}^{tmax} = \varepsilon_n^{tmax};$ 
     $\hat{D}_{n+1}^t = D_n^t;$ 
    se  $\varepsilon_{n+1} \leq \hat{\varepsilon}_{n+1}^{tmax}$  então
         $E_t = (1 - \hat{D}_{n+1}^t);$ 
         $\hat{\sigma}_{n+1} = E_t \varepsilon_{n+1};$ 
    senão
         $\hat{\varepsilon}_{n+1}^{tmax} = \varepsilon_{n+1};$ 
         $\hat{D}_{n+1}^t = \left( \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}^{tmax} - \varepsilon_Y^t}{\varepsilon_u^t - \varepsilon_Y^t} \right) \frac{\varepsilon_u^t}{\varepsilon_{n+1}^{tmax}};$ 
         $\hat{\sigma}_{n+1} = (1 - \hat{D}_{n+1}^t) \varepsilon_{n+1};$ 
         $E_t = -\frac{\sigma_Y^t}{\hat{\varepsilon}_{n+1}^{tmax} - \varepsilon_Y^t};$ 
    fim
se  $|\varepsilon_{n+1}| > |\varepsilon_u^c|$  ou  $\varepsilon_{n+1} > \varepsilon_u^t$  então
     $\hat{\sigma}_{n+1} = 0;$ 
     $\hat{D}_{n+1} = 1;$ 
     $E_t = 0;$ 
fim

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 77 – Atualização do estado (*UpdateState*) do modelo de dano bilinear para o concreto.

<p>Dados: \hat{D}_{n+1} Resultado: D_{n+1} $D_{n+1} = \hat{D}_{n+1};$</p>
--

Fonte: Próprio autor.