



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS DE SOBRAL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**E DE COMPUTAÇÃO**

**ALEXANDRE MATOS PESSOA**

**EMPARELHAMENTO DE SUBPORTADORAS E ALOCAÇÃO DE**  
**POTÊNCIA DE TRANSMISSÃO PARA REDES COOPERATIVAS**

**SOBRAL**

**2016**

ALEXANDRE MATOS PESSOA

EMPARELHAMENTO DE SUBPORTADORAS E ALOCAÇÃO DE  
POTÊNCIA DE TRANSMISSÃO PARA REDES COOPERATIVAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e de Computação do *Campus* de Sobral da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de concentração: Sistemas de Informação.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima

SOBRAL

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- P567e Pessoa, Alexandre Matos.  
Emparelhamento de Subportadoras e Alocação de Potência de Transmissão para Redes Cooperativas /  
Alexandre Matos Pessoa. – 2016.  
105 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral, Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica e de Computação, Sobral, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima.
1. Emparelhamento de Subportadoras. 2. Alocação de Potência. 3. Comunicações Cooperativas. 4.  
Qualidade de Serviço. I. Título.

CDD 621.3

---

ALEXANDRE MATOS PESSOA

EMPARELHAMENTO DE SUBPORTADORAS E ALOCAÇÃO DE  
POTÊNCIA DE TRANSMISSÃO PARA REDES COOPERATIVAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e de Computação do *Campus* de Sobral da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de concentração: Sistemas de Informação.

Aprovada em: 20/01/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Richard Demo Souza  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

---

Prof. Dr. Walter da Cruz Freitas Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais e irmãos.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por me proporcionar essa conquista e a oportunidade de concluir mais uma fase importante da minha vida.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe, Maria Antônia Lopes de Matos e meus nove irmãos: Vinícius Matos Pessoa, Guilherme Matos Pessoa, Beatriz Matos Pessoa, João Paulo Matos Pessoa, Vânia Laélia Matos Pessoa, Evaristo Matos Pessoa, Nilton Matos Pessoa, Evanda Matos Pessoa e Vanira Matos Pessoa, pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Ao meu orientador, Rafael Lima, pela organização, comprometimento e ajuda no desenvolvimento deste trabalho e de tantos outros. Não poderia esquecer de agradecer aos professores da vertente de Telecomunicações do Curso de Engenharia da Computação (UFC-Sobral): Carlos Alexandre e Daniel Benevides, pelas disciplinas cursadas, pela dedicação, pelo incentivo e pelo comprometimento com o trabalho durante todo esse tempo.

Agradeço a meus amigos de curso: Weskley Vinícius Fernandes Maurício e Lászlón Rodrigues da Costa, pelas incontáveis brincadeiras e incentivos durante a elaboração dessa dissertação.

Agradeço à UFC, pelos professores de alto nível e comprometimento com o trabalho. Por fim, agradeço a FUNCAP pelo suporte financeiro durante a realização deste trabalho.

“O homem é do tamanho do seu sonho”. Fernando Pessoa.

## RESUMO

Rede de repetidores e comunicação cooperativa se consolidaram como duas importantes tecnologias presentes na quarta geração das comunicações móveis devido ao seu potencial em combater o desvanecimento em pequena e larga escalas e ampliar a zona de cobertura das células. Além disso, o gerenciamento dos recursos de rádio de forma eficiente aplicado em redes de repetidores tem se mostrado como uma importante ferramenta para melhorar o desempenho dos sistemas de comunicações móveis em termos de diversidade espacial, cobertura, eficiência espectral e energética. Um dos pilares de nosso estudo foi a consideração de um mapeamento discreto entre a qualidade de canal de comunicação geralmente representada pela SNR (do inglês, *Signal-to-Noise Ratio*) e a taxa de dados. Essa consideração está em consonância com o uso de MCSs (do inglês, *Modulation and Coding Schemes*) e tem sido ignorada em grande parte dos trabalhos da área. Nesta dissertação, formulamos dois problemas. O primeiro problema consiste na maximização da taxa total em um cenário cooperativo através do emparelhamento de subportadoras e alocação adaptativa de potência de transmissão. O segundo problema consiste na maximização do número de usuário satisfeitos com o QoS (do inglês, *Quality of Service*) solicitado. Para ambos os problemas, provemos a solução ótima, propriedades básicas e soluções subótimas de baixo custo computacional. Através de simulações computacionais mostramos que a solução subótima para o problema de maximização de taxa apresentou erro máximo de 0.1% em relação a solução ótima. Além disso, a solução subótima para o problema de maximização do número de usuário satisfeitos foi capaz de atender a perdas de desempenho menores que 10% com relação ao ótimo, utilizando muito menos potência em ambos os saltos.

**Palavras-chave:** Emparelhamento de Subportadoras, Alocação de Potência, Comunicações Cooperativas, Qualidade de Serviço.



## ABSTRACT

Relay networks and cooperative communications have been established as two key technologies present in the fourth generation of mobile communications due to its potential to combat fading and extend the cell coverage area. In addition, efficient radio resource management when applied to relay networks is capable of improving the performance of mobile communication systems in terms of space diversity, coverage, spectral and energy efficiencies. One of the main assumptions in our work is a discrete mapping between channel quality and transmit data rate. This discrete mapping models the use of finite MCSs and has been neglected by most of the articles in the literature. In this master thesis we formulate two problems. The first problem consists in the maximization of the total data rate in a cooperative system through subcarrier pairing and transmit power allocation. The second problem aims at maximizing the number of satisfied users with the demanded QoS. For both problems we provide the optimal solution, some basic properties and suboptimal solutions with low computational complexity. By means of computational simulations, we show that the proposed solution to the total data rate maximization problem has a maximum error to the optimal solution lower than 0.1%. Furthermore, the heuristic solution proposed to the problem of maximizing the number of satisfied users is capable of attaining a performance loss in the number of satisfied users not higher than 10% to the optimal solution with much lower transmit power leading to energy efficiency gains.

**Key-words:** Subcarrier Matching, Bit Loading, Cooperative Communications, Quality of Service.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) e (b) Espectros FDM (do inglês, <i>Frequency Division Multiplexing</i> ) e OFDM (do inglês, <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> ), respectivamente. . . . .	17
Figura 2 – Cenário ponto-a-ponto OFDM. . . . .	18
Figura 3 – Mapeamento entre taxa de dados e SNR par uma subportadora OFDM no cenário ponto-a-ponto. . . . .	19
Figura 4 – Exemplo de diversidade cooperativa com repetidor. . . . .	22
Figura 5 – Modelo de Sistema Cooperativo com dois saltos. . . . .	30
Figura 6 – Mapeamento discreto entre SNR e taxa de dados para as subportadoras dos saltos 1 e 2. . . . .	32
Figura 7 – Emparelhamento de Subportadora dado pela sub matriz $\pi'_{n,q}$ . . . . .	41
Figura 8 – Emparelhamento de Subportadora dado pela sub matriz $\pi^*_{n,q}$ . . . . .	43
Figura 9 – Método para o cálculo do limitante inferior do problema RIP (Restrição Individual de Potência). . . . .	50
Figura 10 – Fluxograma do algoritmo MMPR-LI para o problema RIP. . . . .	52
Figura 11 – Taxa de dados ótima para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com $J = 1$ . . . . .	55
Figura 12 – Fator de correção $\phi$ sobre a equação ES-1 (Estimativa de Simetria N° 1 ).	56
Figura 13 – Linhas de contorno da Figura 11 destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2 (Estimativa de Simetria N° 2). . . . .	57
Figura 14 – Taxa de dados ótima para o problema RTP (Restrição Total de Potência) em função da SNR média de cada salto com $J = 1$ . . . . .	58
Figura 15 – Ganho relativo percentual da solução ótima RTP (Figura 14) sobre a solução ótima RIP (Figura 11). . . . .	58
Figura 16 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RIP em função da SNR média em cada salto com $J = 1$ . . . . .	59
Figura 17 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RTP em função da SNR média em cada salto com $J = 1$ . . . . .	60
Figura 18 – (a) Taxa de dados ótima para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com $J = 5$ . . . . .	61
Figura 19 – Linhas de contorno da Figura 18 destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2. . . . .	61
Figura 20 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com $J = 5$ . . . . .	62
Figura 21 – Linhas de contorno para a taxa de dados da solução ótima RIP destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2 para $J = 100$ . . . . .	63

Figura 22 –Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI (Maximização da Mínima Potência Residual com Limitante inferior) e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP em função da SNR média do salto 1. Consideramos $J = 1$ e SNR do salto 2 foi fixada em 7,5 dB . . . . .	64
Figura 23 –Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP em função da SNR média do salto 2. Consideramos $J = 1$ e a SNR do salto 2 foi fixada em 22,5 dB. . . . .	65
Figura 24 –Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP considerando $J = 5$ . . . . .	66
Figura 25 –Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP considerando $J = 100$ . . . . .	66
Figura 26 –Primeira ocorrência do ES (Emparelhamento de Subportadora) não ordenado para a solução ótima $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j^r\}$ . . . . .	71
Figura 27 –Modelo de ES proposto pela solução viável $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^r\}$ . . . . .	71
Figura 28 –Etapa 1 da heurística para o problema (64)–(69). . . . .	77
Figura 29 –Etapa 2 da heurística proposta para o problema (64)–(69). . . . .	79
Figura 30 –Etapa 3 da heurística para o problema (64)–(69). . . . .	82
Figura 31 –FDA (Função de Distribuição Acumulada) do número de usuários satisfeitos para as soluções Otm-MaxJ, Heu-MP e Otm-RIP considerando $t_j = 13$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	84
Figura 32 –FDA do número de usuários satisfeitos para as soluções Otm-MaxJ, Heu-MP e Otm-RIP considerando $t_j = 21$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	84
Figura 33 –FDA da diferença entre o número de usuários satisfeitos pelas soluções Otm-MaxJ e Heu-MP da Figura 31. . . . .	85
Figura 34 –FDA da diferença entre o número de usuários satisfeitos pelas soluções Otm-MaxJ e Heu-MP da Figura 32. . . . .	85
Figura 35 –FDA da potência consumida no salto 1 para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando $t_j = 13$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	86
Figura 36 –FDA da potência consumida no salto 2 para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando $t_j = 13$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	87
Figura 37 –FDA da taxa de dados atingida para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando $t_j = 13$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	88
Figura 38 –FDA da taxa de dados atingida para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando $t_j = 21$ bits/s e $J = 12$ usuários no sistema. . . . .	88
Figura 39 –Análise da perda por escalabilidade. . . . .	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição das variáveis do sistema de dois saltos. . . . .	34
Tabela 2 – Conclusão a partir das Etapas <b>i</b> e <b>ii</b> . . . . .	72
Tabela 3 – Número de operações feitas pelo algoritmo MMPR-LI. . . . .	100
Tabela 4 – Número de operações feitas pelas Etapas 1, 2 e 3. . . . .	104

## LISTA DE ABREVIATURAS

<b>1G</b>	do inglês, <i>First Generation</i>
<b>2G</b>	do inglês, <i>Second Generation</i>
<b>3G</b>	do inglês, <i>Third Generation</i>
<b>4G</b>	do inglês, <i>Fourth Generation</i>
<b>5G</b>	do inglês, <i>Fifth Generation</i>
<b>AF</b>	do inglês, <i>Amplify and Forward</i>
<b>AP</b>	Alocação de Potência
<b>AP-1</b>	Alocação de Potência com RIP no Salto 1
<b>AP-2</b>	Alocação de Potência com RIP no Salto 2
<b>AS</b>	Assinalamento de Subportadora
<b>BB</b>	do inglês, <i>Branch and Bound</i>
<b>CSI</b>	do inglês, <i>Channel State Information</i>
<b>DF</b>	do inglês, <i>Decode and Forward</i>
<b>ERB</b>	Estação Rádio Base
<b>ES</b>	Emparelhamento de Subportadora
<b>ES-1</b>	Estimativa de Simetria N° 1
<b>ES-2</b>	Estimativa de Simetria N° 2
<b>FDA</b>	Função de Distribuição Acumulada
<b>FDM</b>	do inglês, <i>Frequency Division Multiplexing</i>
<b>HH</b>	do inglês, <i>Hughes Hartogs</i>
<b>IDFT</b>	do inglês, <i>Inverse Discrete Fourier Transform</i>
<b>ILP</b>	do inglês, <i>Integer Linear Problem</i>
<b>MCS</b>	do inglês, <i>Modulation and Coding Scheme</i>
<b>MIMO</b>	do inglês, <i>Multiple Input Multiple Output</i>
<b>MMPR</b>	Maximização da Mínima Potência Residual
<b>MMPR-LI</b>	Maximização da Mínima Potência Residual com Limitante inferior
<b>OFDM</b>	do inglês, <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
<b>OFDMA</b>	do inglês, <i>Orthogonal Frequency Division Multiple Access</i>
<b>QoS</b>	do inglês, <i>Quality of Service</i>
<b>RIP</b>	Restrição Individual de Potência
<b>RRA</b>	do inglês, <i>Radio Resource Allocation</i>
<b>RTP</b>	Restrição Total de Potência
<b>SISO</b>	do inglês, <i>Single Input Single Output</i>
<b>SNR</b>	do inglês, <i>Signal-to-Noise Ratio</i>
<b>TM</b>	Terminal Móvel

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
1.1	Motivação . . . . .	15
1.2	Fundamentação Teórica . . . . .	16
1.2.1	<i>Sistemas OFDM e OFDMA</i> . . . . .	16
1.2.2	<i>Alocação de Recursos de Rádio</i> . . . . .	17
1.2.3	<i>Qualidade de Serviço</i> . . . . .	20
1.2.4	<i>Comunicação Cooperativa</i> . . . . .	21
1.3	Revisão Bibliográfica . . . . .	23
1.4	Contribuições e Produção Científica . . . . .	28
1.4.1	<i>Contribuições</i> . . . . .	28
1.4.2	<i>Produção Científica</i> . . . . .	29
2	MODELAGEM DO SISTEMA . . . . .	30
2.1	Caracterização do Cenário . . . . .	30
2.2	Modelagem Matemática para os Subproblemas AS, ES e AP .	32
3	PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA TAXA TOTAL DE DADOS . . . . .	37
3.1	Formulação do Problema . . . . .	37
3.2	Solução Ótima para os Subproblemas ES, AS e AP dos Pro- blemas RIP e RTP . . . . .	37
3.2.1	<i>Solução Ótima para o Subproblema AS</i> . . . . .	38
3.2.2	<i>ES com Mesma Taxa de Dados em Cada Salto</i> . . . . .	39
3.2.3	<i>Solução ótima para o Subproblema ES</i> . . . . .	40
3.2.4	<i>Reformulação do Problema</i> . . . . .	45
3.2.5	<i>Solução Ótima para o Problema RTP</i> . . . . .	47
3.2.6	<i>Solução Ótima, Limitantes Superior e Inferior para o Pro- blema RIP</i> . . . . .	48
3.3	Solução Heurística para o Problema RIP . . . . .	50
3.3.1	<i>Algoritmo MMPR-LI</i> . . . . .	51
3.4	Avaliação de Desempenho . . . . .	54
3.4.1	<i>Parâmetros de Simulação</i> . . . . .	54
3.4.2	<i>Resultados</i> . . . . .	54
4	PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE USUÁRIOS SATISFEITOS . . . . .	67
4.1	Formulação do Problema . . . . .	67
4.2	Solução Ótima . . . . .	68

4.2.1	<i>Emparelhamento de Subportadoras com Mesma Taxa de Dados em Cada Salto</i> . . . . .	68
4.2.2	<i>Condicionamento para o Emparelhamento Ordenado</i> . . . . .	70
4.3	Reformulação do Problema . . . . .	73
4.4	Solução Heurística . . . . .	76
4.4.1	<i>Etapa 1</i> . . . . .	76
4.4.2	<i>Etapa 2</i> . . . . .	78
4.4.3	<i>Etapa 3</i> . . . . .	80
4.5	Avaliação de Desempenho . . . . .	81
4.5.1	<i>Parâmetros de Simulação</i> . . . . .	81
4.5.2	<i>Resultados</i> . . . . .	83
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS . . . . .	91
	REFERÊNCIAS . . . . .	93
	APÊNDICE A – REGIÃO DE SIMETRIA DO PROBLEMA	
	RIP . . . . .	97
	APÊNDICE B – COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL . . .	99

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o contexto e alguns fundamentos básicos que darão suporte ao estudo realizado nesta dissertação de mestrado. A seção 1.1 apresenta o contexto e as motivações para o desenvolvimento deste trabalho. A seção 1.2 está dividida em quatro subseções que têm por finalidade prover uma fundamentação teórica essencial ao entendimento da pesquisa aqui desenvolvida. Por fim, as seções 1.3 e 1.4 apresentam a revisão bibliográfica e as contribuições dessa dissertação, respectivamente.

## 1.1 Motivação

Desde o surgimento do padrão 1G (do inglês, *First Generation*), dos sistemas celulares na década de 1980, diversos estudos foram desenvolvidos a fim de melhorar a comunicação sem fio. Como resultado desses esforços, nas décadas subsequentes ocorreu o desenvolvimento do padrão 2G (do inglês, *Second Generation*), que trouxe uma significativa vantagem com técnicas de transmissão digital. Após os sistemas 2G, tivemos o advento dos sistemas 3G (do inglês, *Third Generation*), que apresentou significativas melhorias nas taxas de transmissão de dados, na robustez da comunicação e na quantidade de usuários que o sistema pode suportar [1].

Atualmente, vivemos a era do padrão 4G (do inglês, *Fourth Generation*), que apresenta significativas melhorias em comparação ao 3G tais como aumento na capacidade de tráfego e cobertura. Destacamos a seguir, algumas das principais características desse padrão [2, 3, 4]:

- Serviços móveis de alta qualidade;
- Uso exclusivo de comutação de pacotes;
- Compatibilidade com o padrão 3G;
- Suporte a elevadas taxa de transmissão de dados (100 Mbps para alta mobilidade e 1 Gbps para baixa mobilidade).

A fim de que as características supracitadas sejam satisfeitas, são necessárias técnicas sofisticadas, como sistemas cooperativos [5], roteamento de pacotes e MIMO (do inglês, *Multiple Input Multiple Output*) [6], dentre outras. Embora estes avanços tenham sido significativos com o padrão 4G, os problemas associados a exigência de melhor qualidade nos serviços de telefonia e o aumento da demanda por maiores taxas de dados persistem. Assim, o gerenciamento de recursos (tais como faixa de frequência e potência de transmissão) de forma eficiente continua sendo um dos gargalos dos sistemas 4G.

Nesse contexto, os serviços que as redes móveis 4G passaram a fornecer aos usuários se diversificaram, causando um acréscimo exponencial na demanda de tráfego de dados [7]. De acordo com as previsões do relatório [8], divulgado pela Ericsson em Junho



de 2015, o número de *smartphones* em uso no mundo irá mais que dobrar em 2020. Além disso, entre os anos de 2014 e 2015 verificou-se um aumento de 55% no tráfego de dados móveis e, segundo as previsões deste mesmo relatório, em 2020, 80% do tráfego móvel será destinado ou originado de *smartphones*. Também vale ressaltar que a transmissão de vídeos *online* é apontada como um fator chave de crescimento, representando 60% do tráfego total das redes móveis em 2020.

Dentre as tecnologias chaves do padrão 4G, a comunicação cooperativa vem sendo alvo de diversos estudos devido a suas potencialidades em combater o desvanecimento, prover diversidade espacial e aumentar a zona de cobertura da célula [9]. Essa tecnologia associada com técnicas de gerenciamento dos recursos de rádio se torna uma forte alternativa para atender as especificações do padrão 4G, principalmente em termos de demanda de tráfego bem como na qualidade da comunicação de forma a atender requisitos de QoS na rede.

## 1.2 Fundamentação Teórica

Esta seção apresenta a base teórica fundamental para o entendimento desta dissertação e está dividida em quatro subseções: sistemas OFDM e OFDMA (do inglês, *Orthogonal Frequency Division Multiple Access*), RRA (do inglês, *Radio Resource Allocation*), QoS e comunicação cooperativa.

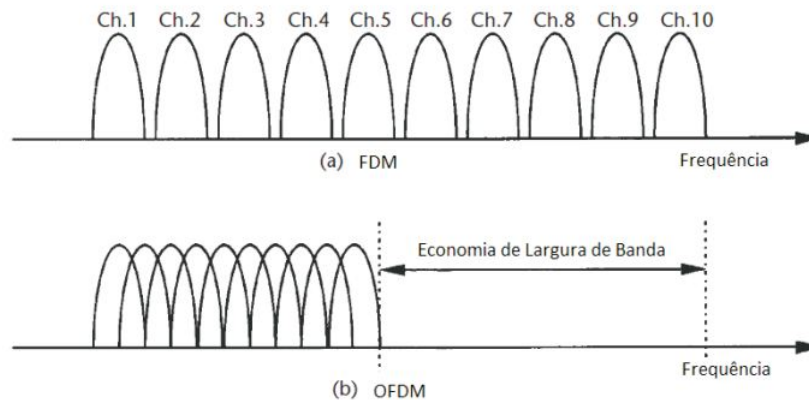
### 1.2.1 Sistemas OFDM e OFDMA

OFDM é uma técnica de modulação multiportadora que transmite um fluxo de dados de banda larga em canais paralelos de banda estreita, denominados subportadoras. Dessa forma, a ideia fundamental da técnica OFDM consiste em dividir o fluxo de dados de banda larga em  $N$  pequenos fluxos de banda estreita e em seguida transmiti-los simultaneamente através de  $N$  subportadoras [10]. Para gerar as subportadoras utiliza-se uma técnica matemática denominada IDFT (do inglês, *Inverse Discrete Fourier Transform*). As subportadoras geradas são ortogonais duas-a-duas e por isso podem ter seus espectros sobrepostos, evitando o uso de banda de guarda como ocorre em FDM [11]. A Figura 1 compara, de forma ilustrativa, quanto do espectro de frequência é necessário para transmitir um sinal banda larga com as técnicas OFDM e FDM, onde vê-se claramente a eficiência da técnica OFDM.

Dessa forma, quando se faz uso de subportadoras para transmitir dados, a largura de banda associada a cada subportadora é pequena quando comparada com a banda de coerência do canal e com isso as subportadoras irão experimentar um desvanecimento plano em frequência.

Essa condição de desvanecimento plano decorre, em parte, do tempo de transmissão de cada símbolo  $\Delta t$  que idealmente deve ser muito maior que o espalhamento do

Figura 1 – (a) e (b) Espectros FDM e OFDM, respectivamente.



Fonte: Figura retirada de [11].

atraso  $\delta t$  (atraso das múltiplas réplicas do sinal que chegam no receptor devido ao canal multipercurso), algo que leva a uma grande robustez na qualidade do sinal recebido [10, 11].

Assim, as principais vantagens e desvantagens da técnica OFDM podem ser resumidas como segue:

1. Vantagens:

- Alta eficiência espectral;
- Fácil implementação;
- Robustez ao desvanecimento;
- Capacidade em combater de forma eficiente os efeitos negativos de canais seletivos em frequência.

2. Desvantagens:

- Sensibilidade ao deslocamento em frequência devido a sobreposição do espectro das subportadoras;
- Exigência de sincronização precisa na frequência das subportadoras, uma vez que desvios em frequência causam perda de ortogonalidade entre as subportadoras e com isso ocorre um deslocamento na fase dos símbolos recebidos.

OFDMA consiste em uma técnica de múltiplo acesso que designa subconjuntos de subportadoras para os usuários permitindo a transmissão dos tráfegos individuais simultaneamente. Assim, a técnica OFDMA consiste na versão multiusuário da OFDM e por isso também tem grande eficiência espectral, possui robustez ao desvanecimento e combate os efeitos negativos dos canais seletivos em frequência.

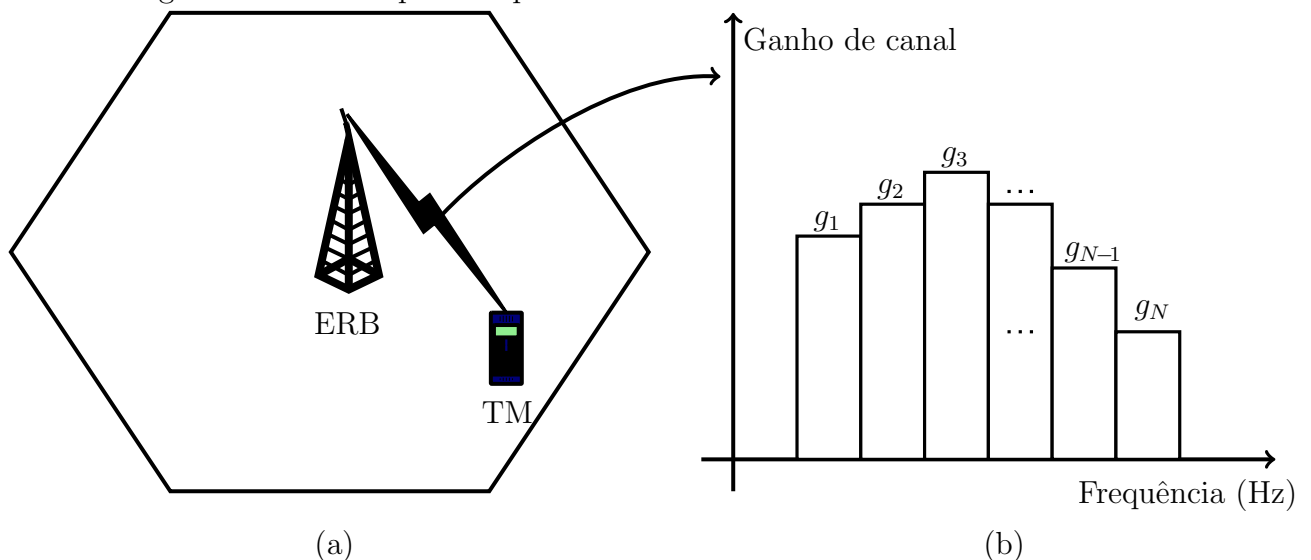
### 1.2.2 Alocação de Recursos de Rádio

Os sistemas de comunicações celulares atuais são caracterizados por uma grande quantidade de usuários e sofrem com limitações de potência em cada torre de

transmissão e da largura de banda. Dessa forma, é necessário que seja feito o uso eficiente do espectro de frequência bem como da potência a ser alocada a cada usuário que requisite serviço nesse sistema. Este tipo de sistema geralmente apresenta um canal de comunicação seletivo em frequência e por isso implementa a técnica OFDMA com o objetivo de transformar o canal seletivo em subportadoras com ganho plano em frequência. Assim, em sistemas OFDMA o problema de alocação de recursos de rádio geralmente consiste no assinalamento de subportadoras e na distribuição potência ótima de forma que a capacidade de transmissão de dados seja máxima. Dependendo do tipo de cenário, os algoritmos que apresentam a solução ótima para a alocação dos recursos de rádio são inviáveis em termos de complexidade computacional, forçando os projetistas desses sistemas a trabalhar com soluções subótimas [12].

Um exemplo clássico de RRA e de relevante importância para o entendimento deste trabalho é mostrado na Figura 2(a) em que ilustramos um cenário OFDM ponto-a-ponto constituído por uma ERB (Estação Rádio Base) com potência total  $P_T$  e um TM (Terminal Móvel). A Figura 2(b) mostra os  $N$  ganhos de canal ( $g_1, g_2, \dots, g_N$ ) planos em frequência de cada uma das subportadoras do canal de comunicação entre a ERB e o TM. Note que o ganho  $g_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , é dado pela relação  $g_i = |h_i|^2/\sigma^2$ , em que  $h_i$  é a resposta complexa em frequência do canal de comunicação e  $\sigma^2$  é a potência média do ruído. Nesse cenário, deseja-se maximizar a taxa de dados transmitida da ERB para o TM.

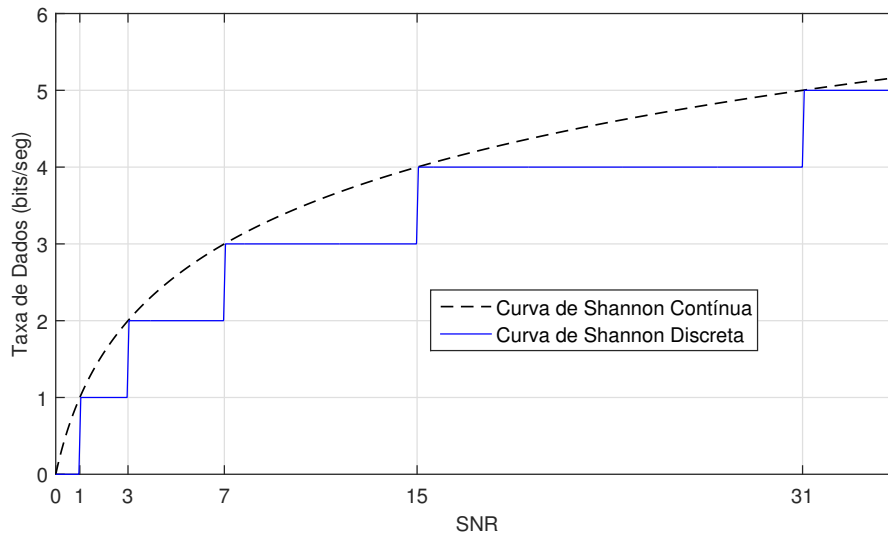
Figura 2 – Cenário ponto-a-ponto OFDM.



Fonte: Próprio Autor.

Para tal devemos considerar uma curva de adaptação de enlace, isto é, devemos considerar um modelo que mapeia cada SNR experimentada em cada subportadora  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) para uma respectiva taxa de dados transmitida. A curva de adaptação de enlace está relacionada com o esquema de MCS empregado e pode ser discreta ou contínua, conforme ilustrado na Figura 3. Para esta dissertação de mestrado e também no exemplo aqui

Figura 3 – Mapeamento entre taxa de dados e SNR par uma subportadora OFDM no cenário ponto-a-ponto.



Fonte: Próprio Autor.

discutido, iremos considerar a curva de Shannon discreta como função de adaptação de enlace pois ela é mais realista para os sistemas de comunicações práticos devido ao fato de que a quantidade de bits transmitidos é sempre um número discreto.

Dessa maneira, podemos definir um conjunto de variáveis para elaborar um problema de otimização que objetiva atribuir a potência  $P_T$  ao longo das  $N$  subportadoras de forma a maximizar a taxa de dados do sistema apresentado na Figura 2(a), conforme a seguir:

- $r_m$ : número de bits transmitidos no  $m$ -ésimo nível de MCS que pode assumir os seguintes valores  $r_m \in \{0, 1, 2, \dots, M - 1\}$ . No caso da Figura 3, temos  $M = 6$  e  $r_m \in \{0, 1, \dots, 5\}$  bits em cada nível.
- $P_{n,m}$ : potência mínima necessária para a  $n$ -ésima subportadora atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS. Note que  $P_{n,m}$  pode ser obtida a partir da curva de Shannon discreta, isto é:  $r_m = \log_2(1 + P_{n,m} g_n) \Rightarrow P_{n,m} = (2^{r_m} - 1)/g_n$ .
- $z_{n,m}$ : variável binária que recebe valor 1 se a  $n$ -ésima subportadora atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS e 0, caso contrário.

Feito essas definições, o problema de otimização que objetiva maximizar a taxa

de dados transmitida para o TM será dado por [13]:

$$\max_x \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M z_{n,m} r_m \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{m=1}^M z_{n,m} \leq 1, \forall n, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M z_{n,m} P_{n,m} \leq P_T, \quad (3)$$

em que a equação (1) representa a função objetivo do problema e expressa a taxa total atingida. A equação (2) garante que cada subportadora somente poderá transmitir dados em um dos  $M$  níveis de MCS existentes. Por fim, a equação (3) assegura que a potência total utilizada pelas  $N$  subportadoras do sistema é limitada pela potência da ERB.

O problema (1)–(3) é bem conhecido na literatura e é resolvido de forma ótima pelo algoritmo HH (do inglês, *Hughes Hartogs*) [14]. Este algoritmo funciona de uma forma bem simples: a cada iteração ele incrementa em um nível de MCS e conseqüentemente a taxa de dados da subportadora que consome a menor quantidade de potência para ganhar essa taxa.

### 1.2.3 Qualidade de Serviço

A principal meta dos atuais sistemas de telefonia móvel celular é prover aos usuários o acesso a uma grande variedade de serviços que estarão disponíveis com o advento das próximas gerações das comunicações móveis. Para atingir tal meta há uma série de desafios a serem considerados, tais como: qualidade de transmissão do meio, largura de banda limitada, gerenciamento de localização e custo da conexão.

Assim, pode-se considerar que em um sistema de telefonia celular o nível de QoS percebido pelos usuários está relacionado com a eficiência da técnica de alocação de canais utilizada e com a potência atribuída a cada usuário. Portanto, é possível utilizar os principais parâmetros que medem a eficiência das técnicas de alocação de canais como parâmetros de QoS de uma rede móvel celular, sendo eles [15, 16]:

- Vazão: é a medida da transmissão de dados ou tráfego total de informação que é movida de um ponto a outro de uma rede sem fio durante um intervalo de tempo específico. Portanto, a vazão indica a capacidade de transmissão da rede e consiste em um dos parâmetros mais básicos de QoS;
- Taxa de perda de pacotes: é um índice que quantifica a porcentagem dos pacotes que são perdidos durante a transmissão entre dois elementos da rede sem fio, isto é, este índice mensura a fração dos pacotes que foram transmitidos mas não foram

recebidos. Dessa forma, esta taxa é medida a partir do receptor, sendo definida como a relação entre a quantidade de pacotes perdidos e a quantidade total de pacotes transmitidos;

- Taxa de erro: consiste na fração total dos pacotes que chegam ao receptor e que apresentam conteúdo (sequência de bits) diferente do pacote que foi transmitido inicialmente. Esta diferença entre o conteúdo do pacote transmitido e o pacote recebido dá-se o nome de erro de transmissão. Tais erros geralmente ocorrem devido às condições de ambiente que influencia na qualidade do canal de comunicação ou até mesmo erros de *hardware*. A taxa de erro é um parâmetro fundamental no projeto de uma rede sem fio, pois está intimamente relacionado com a taxa de dados útil que trafega pela rede;
- Atraso ou latência: consiste no intervalo de tempo em que um pacote de dados leva para se deslocar do transmissor para o receptor em uma rede sem fio. A latência é decorrente de uma série de fatores, tais como o atraso de propagação do sinal de rádio no ambiente, o tempo de processamento do sinal nos equipamentos de comunicação e o escalonamento de pacotes. O atraso de propagação é um parâmetro constante do sistema e independe das técnicas utilizadas na transmissão de dados. Por outro lado, o tempo de processamento do sinal em equipamentos é decorrente da qualidade do *hardware* e pode apresentar variações significativas. O escalonamento de pacotes, que consiste em determinar a ordem em que os pacotes serão transmitidos da fonte para o destino, também pode apresentar atrasos significativos, pois uma transmissão simultânea de pacotes nem sempre é possível e assim os dados de alguns nós da rede podem ser armazenados por um certo tempo no transmissor antes de serem enviados levando a ocorrência de atrasos;
- *Jitter*: o *jitter* consiste na maior variação da latência de um conjunto de blocos de dados que são transmitidos em um sistema de comunicação móvel. Portanto, podemos entender o *jitter* como uma medida complementar à latência, pois enquanto a latência mensura o atraso total na transmissão de dados, o *jitter* mensura a máxima variação da latência.

Assim, alguns desses parâmetros podem ser utilizados como meio de definir os requisitos de QoS empregados no sistema de telefonia móvel.

#### 1.2.4 Comunicação Cooperativa

O estudo da comunicação cooperativa vem sendo um tema bastante explorado nos últimos anos e constitui uma das tecnologias chave do padrão 4G e 5G (do inglês, *Fifth Generation*) [9, 17]. A comunicação cooperativa consiste em um conjunto de nós de uma rede de comunicação que compartilham suas antenas provendo diversidade (melhora na qualidade do sinal transmitido) e/ou multiplexação (aumento na taxa) de dados entre

os elementos da rede.

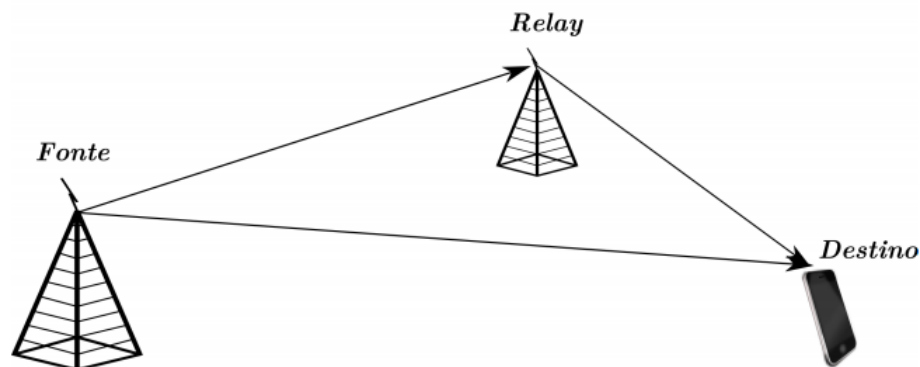
Um tipo de diversidade bastante explorada é a diversidade espacial, que é caracterizada quando um mesmo sinal é transmitido por várias antenas e recebido por uma ou mais antenas, caracterizando assim um sistema MIMO [18]. Considerando que as cópias do sinal transmitido experimentem desvanecimento independente e seja  $p$  a probabilidade de uma cópia apresentar erro na recepção, então a probabilidade de  $N$  sinais apresentarem erro será de  $p^N$ . Uma vez que  $0 < p < 1 \rightarrow p^N < p$ , isto é, quando o sinal é replicado e transmitido, a probabilidade de erro na recepção será menor.

Alternativamente, podemos multiplexar os dados (pacotes distintos) ao longo de  $N$  antenas de transmissão e então obter um aumento significativo na taxa dados. Assim, vemos a versatilidade do sistema MIMO que é capaz de gerar diversidade quando as condições do canal são ruins e multiplexar dados quando o canal é favorável.

A Figura 4 ilustra um esquema simplificado de diversidade cooperativa. O funcionamento desse tipo de diversidade é baseado no uso do repetidor (*relay*) que recebe o sinal da fonte e então o retransmite para o destino (terminal móvel). Dessa forma, o terminal móvel receberá duas cópias com desvanecimento decorrelacionados da mesma mensagem: uma seguindo o caminho direto fonte-destino e a outra seguindo o caminho alternativo fonte-repetidor-destino.

Este tipo de abordagem é especialmente interessante em sistemas celulares com reuso de frequência existentes em grandes centros urbanos, em que o posicionamento correto dos repetidores melhora de forma significativa a cobertura do sinal na borda da célula e atenua os efeitos de desvanecimento.

Figura 4 – Exemplo de diversidade cooperativa com repetidor.



Fonte: Próprio Autor.

O processamento que o sinal transmitido recebe no repetidor é determinado pelo tipo de protocolo empregado. Os protocolos AF (do inglês, *Amplify and Forward*) e DF (do inglês, *Decode and Forward*) são largamente difundidos nos sistemas de comunicação cooperativa [19]. O protocolo AF é mais simples de implementar pois não considera o conteúdo da informação a ser enviada para o destino. Portanto, este protocolo aplica um ganho no sinal recebido (que está corrompido pelo ruído) e o reenvia para o

destino final. Por sua simplicidade de implementação, o protocolo AF também amplifica o ruído, algo que aumenta a taxa de erro na recepção do sinal.

O protocolo DF tem um funcionamento mais complexo e exige um *hardware* mais robusto quando comparado com o AF, pois requer a decodificação do sinal proveniente da fonte (eliminando o efeito do ruído) seguido de uma codificação e retransmissão do sinal para o destino. A maior complexidade no processamento do sinal recebido no repetidor ao empregar esse protocolo tem a vantagem de reduzir a taxa da erro de *bit* nas transmissões fonte-repetidor-destino dividindo as correções no processo de decodificação, algo que não ocorre no AF. Além disso, para um mesmo cenário, a taxa de dados total atingida pelo sistema cooperativo que faz uso do protocolo DF é maior ou igual a taxa de dados atingida quando se considera o protocolo AF.

### 1.3 Revisão Bibliográfica

Nesta seção apresentaremos uma breve discussão sobre as contribuições de outros trabalhos que serviram como base para a realização dessa dissertação. Primeiramente, faremos uma discussão sobre trabalhos voltados para sistemas cooperativos envolvendo RRA sem considerar restrições de QoS como meio de motivar o estudo primeiro do problema abordado nessa dissertação. Em seguida, faremos uma discussão sobre trabalhos que consideram RRA em sistemas cooperativos envolvendo restrições de QoS como meio de motivar o segundo problema abordado nessa dissertação.

Em [20] os autores consideram a otimização de potência de transmissão em uma rede de repetidores considerando um canal de comunicação do tipo Rayleigh e plano em frequência (portadora única) com objetivo de minimizar a probabilidade de *outage*. Nesse trabalho, o *outage* é definido como a probabilidade de a SNR fim-a-fim ser menor que um dado limiar. Assim, os autores desenvolvem expressões matemáticas fechadas que determinam o esquema de alocação de potência ideal para um número qualquer de repetidores que empreguem os protocolos AF e DF, definidos no trabalho como *Non-Regenerative System* e *Regenerative System*, respectivamente. O principal resultado nesse trabalho consiste em mostrar que o emprego do protocolo DF apresenta a menor probabilidade de *outage* quando comparado ao protocolo AF e também com a comunicação direta ERB-destino.

Distribuição de subportadoras e alocação de potência objetivando maximização da taxa de dados em um sistema cooperativo OFDM que emprega protocolo AF foi estudado em [21]. Nesse artigo, os autores apresentam o conceito de emparelhamento de subportadoras (em inglês: *subcarrier pairing* ou *subcarrier matching*) que consiste na associação de uma subportadora  $n$  no enlace fonte-repetidor com uma subportadora  $q$  do enlace repetidor-destino. Assim, toda informação transmitida através da subportadora  $i$  no enlace fonte-repetidor deverá ser retransmitida pela subportadora  $j$  do enlace



repetidor-destino. Diferentes configurações de emparelhamento podem levar a significativas variações no desempenho do sistema, sendo este um dos focos de análise desse trabalho. Outra contribuição de [21] foi a construção de um problema de otimização composto por outros dois subproblemas acoplados: emparelhamento de subportadoras e alocação de potência. Os autores propuseram uma heurística para o problema acoplado que consiste em resolver o emparelhamento de subportadoras por meio do algoritmo Húngaro [22] considerando alocação de potência igualitária nas subportadoras de ambos os saltos. Uma vez encontrada uma solução para o emparelhamento de subportadoras, os autores em [21] resolvem o problema de alocação de potência por meio do algoritmo *Water Filling* [23]. Nenhuma solução ótima foi fornecida pelos autores e houve uma consideração irrealista ao supor uma única restrição de potência total para a fonte e para o repetidor.

Em [24] os autores consideraram um sistema semelhante ao abordado em [21] e provaram que se considerarmos alocação de potência igualitária em ambos os saltos, o emparelhamento ordenado maximiza a taxa de dados fonte-destino. O emparelhamento ordenado consiste em associar a subportadora de maior ganho do primeiro salto com a subportadora de maior ganho do segundo salto e assim por diante. O trabalho [25] estudou o emparelhamento de subportadoras considerando um conjunto de repetidores distribuídos de forma paralela entre fonte e o destino e também propôs uma heurística baseada em ganhos de canal ordenados.

Os trabalhos [26, 27] estudaram um problema semelhante ao abordado em [21], mas fizeram a consideração realista de ter uma restrição individual de potência na fonte e no repetidor, algo que torna a solução ótima do problema mais complexa. Particularmente em [27], os autores demonstram de forma ótima considerando o uso do protocolo DF, que o emparelhamento de subportadoras ordenado consiste na solução ótima que maximiza a taxa de dados do sistema cooperativo fonte-repetidor-destino. Além disso, os autores em [27] também demonstram como efetuar o esquema de alocação de potência ótimo cuja complexidade computacional é superior a complexidade do algoritmo *Water Filling*, embora uma análise de complexidade computacional não tenha sido apresentada pelos autores. Os autores também apresentam uma heurística de baixa complexidade baseada no algoritmo *Water Filling*. Assim, esse trabalho resolve de forma analítica o problema de emparelhamento de subportadoras e alocação de potência em um sistema cooperativo composto por uma fonte, um repetidor (que emprega protocolo DF) e um usuário destino.

O trabalho [28] considera alocação de potência e emparelhamento de subportadoras em um sistema cooperativo envolvendo a seleção de repetidor (que empregam protocolo AF) como objetivo de maximizar a taxa de dados fonte-repetidor-destino. Nesse trabalho os autores resolvem de forma ótima os subproblemas de alocação de potência, emparelhamento de subportadoras e seleção dos repetidores com elevado custo computacional. Além disso, os autores mostram que se um dado repetidor é selecionado para transmitir dados, então as subportadoras a ele associadas devem ser emparelhadas de forma

ordenadas com as subportadoras do enlace fonte-repetidor. A solução ótima para determinar a seleção dos repetidores é baseada no método Húngaro e o esquema de alocação de potência ótima é obtido através de métodos baseados em multiplicadores de Lagrange e apresenta elevada ordem de complexidade computacional.

O trabalho [29] contém resultados analíticos para emparelhamento de subportadoras e alocação de potência em cenários de comunicação cooperativa com múltiplos saltos considerando os protocolos AF e DF. Nesse trabalho também objetiva-se maximizar a taxa de dados em um sistema cooperativo composto por uma fonte, múltiplos repetidores em série e múltiplos destinos. Os autores demonstram que o emparelhamento de subportadoras ótimo é ordenado em cada repetidor para ambos os protocolos de comunicação e independe do número de repetidores considerados entre a fonte e os usuários. A solução ótima para o assinalamento subportadora-receptor consiste em assinalar cada subportadora ao receptor que apresenta maior ganho de canal nessa subportadora. Além disso, a solução ótima para o problema de alocação de potência foi obtida com elevado custo computacional, sendo obtida por métodos baseados em multiplicadores de Lagrange. Nenhuma heurística é apresentada pelos autores a fim de provar soluções menos complexas para os problemas estudados.

O trabalho [30] considera um caso particular de [29], isto é, considera a maximização da taxa de dados em um sistema cooperativo composto por uma fonte, um repetidor que emprega protocolo DF e um receptor. Os autores empregam emparelhamento de subportadoras ordenado (solução ótima) e resolvem o problema de alocação de potência através de uma heurística de baixa complexidade baseada no algoritmo *Water Filling*.

O trabalho [31] considera um sistema cooperativo tal como em [20] e objetiva maximizar a taxa de dados total fonte-repetidor-destino. Além disso, os autores também consideram a comunicação direta entre a fonte e usuário destino bem como uma configuração fixa para o emparelhamento de subportadoras. Nesse caso, restará apenas um problema de alocação de potência. Os autores apresentam a solução ótima do problema com elevada complexidade computacional e apresentam uma solução heurística baseada no algoritmo *Water Filling*.

Nenhum dos trabalhos anteriormente citados consideram restrições de QoS. Conforme sabemos, os problemas de maximização de taxa de dados quando não consideram exigências de QoS distribuem os recursos de forma muito desbalanceada, isto é, os usuários de melhor qualidade de canal de comunicação ficam com quase todos os recursos do sistema e o percentual de satisfação dos usuários da rede fica muito baixo. Assim, a seguir faremos uma discussão sobre trabalhos da literatura que fazem considerações de QoS como meio de garantir uma melhor distribuição dos recursos no sistema de comunicação móvel.

O trabalho [32] lida com maximização da eficiência espectral em sistemas

SISO (do inglês, *Single Input Single Output*) e MIMO considerando restrição de QoS e distribuição igualitária de potência para todas as subportadoras do sistema. Este trabalho fornece a solução ótima para o problema proposto em ambos os cenários com um alto custo computacional e apresenta uma solução aproximativa de baixo custo computacional que deve assinalar subportadoras de forma que o QoS seja atingido. Esse trabalho considera níveis de MCS discretos, isto é, modela o mapeamento entre taxa de dados e SNR como sendo discreto. Essa consideração é mais realista e retrata os sistemas de comunicações atuais de forma mais precisa, entretanto o problema torna-se combinatorial (inteiro) e técnicas baseadas na convexidade de funções e no uso de multiplicadores de Lagrange não podem ser aplicadas nesse caso [33].

Os trabalhos [34, 35, 36] consideram o problema de maximização do número de usuários satisfeitos em um sistema OFDMA convencional (sem cooperação). Em [34], o QoS é modelado como a taxa de dados total transmitida a cada usuário a longo de  $T$  slots de tempo, isto é, se ao final da transmissão, um determinado usuário no sistema atingiu sua taxa requisitada, então esse usuário foi satisfeito. Nesse trabalho nenhuma solução ótima é apresentada, entretanto, os autores propõem uma solução heurística de baixa complexidade que consiste em dividir o problema estudado em assinalamento dinâmico de recursos (atribuição de subportadoras) e alocação de potência adaptativa e então apresentam uma heurística para cada um dos subproblemas gerados. A heurística de alocação de potência somente considera a taxa requisitada pelos usuário a cada intervalo não levando em consideração a taxa total atingida por cada usuário nos intervalos de transmissão anteriores. Em [36], os autores ampliam o cenário apresentado em [34] e apresentam uma heurística para realizar a maximização da satisfação que considera em substituir a função objetivo do problema inicial (discreta) por uma função sigmoideal (contínua) e o assinalamento dos recursos é feito de forma a maximizar a função sigmoideal proposta. Nesse trabalho, os autores mostram que o uso da função sigmoideal apresenta um desempenho superior a outras técnicas presentes na literatura em termos de número de usuários satisfeitos.

O trabalho [37] estuda a minimização da potência total de transmissão e assinalamento de subportadoras em um sistema cooperativo multiusuário considerando restrições de QoS. O cenário é caracterizado por um conjunto de  $M$  ERBs com canais OFDM planos em frequência e alocam seus recursos de forma coordenada/conjunta para o conjunto de usuários existentes no sistema. Cada usuário do sistema considera um taxa de dados requisitada como sendo a métrica de QoS. O problema formulado não é resolvido de forma exata, entretanto, os autores fornecem algumas propriedades matemáticas da solução ótima e baseados em tais propriedades apresentam uma heurística para a seleção dos usuários e outra para a alocação de potência.

O trabalho [38] considera a maximização de eficiência energética um sistema cooperativo composto por uma ERB um repetidor empregando protocolo DF e múltiplos usuários no nó destino. A eficiência energética é definida como a relação entre taxa de

dados total transmitida e a potência total utilizada na transmissão. O problema formulado considera três subproblemas: assinalamento de subportadoras (atribuir as subportadoras aos receptores), emparelhamento de subportadoras e alocação de potência de transmissão. Nesse trabalho o QoS é modelado de forma a considerar uma restrição total de taxa, isto é, a taxa de dados total atingida deve ser maior ou igual a um limiar estabelecido. O problema considerado em [38] é misto, inteiro e não linear. Ao considerar a relaxação das variáveis binárias os autores aplicam otimização convexa e demonstram que a solução do problema relaxado também é ótima do problema global. Em seguida, apresentam um algoritmo que converge para o ótimo global em poucas iterações. Nesse trabalhos os autores fazem a consideração irrealista ao assumir uma restrição global de potência no sistema, entretanto, o algoritmo por eles proposto converge em menos de 10 iterações para os parâmetros do sistema considerados e tem ganhos de desempenhos significativos com relação a outros métodos subótimos existentes na literatura para o mesmo cenário.

Em [39] é estudado o problema de maximização de taxa de dados no *uplink* em um sistema cooperativo envolvendo seleção de repetidor, assinalamento de subportadora e alocação de potência segundo uma restrição total de potência. Nesse trabalho o QoS é modelado de forma a exigir que cada usuário no sistema transmita uma taxa maior ou igual a um limiar considerado. A seleção de repetidor, o assinalamento de subportadora e a alocação de potência são resolvidos de forma exata através de decomposição dual e método do subgradiente. Motivados pela alta complexidade da solução ótima, os autores em [39] desenvolvem duas soluções heurísticas de baixa de complexidade computacional para o problema estudado.

Todos os trabalhos acima citados, com exceção de [32, 34], consideram uma curva de adaptação de enlace contínua entre a SNR atingida e taxa de dados transmitida. De fato, em sistemas realistas o mapeamento entre SNR atingida e a taxa de dados transmitida é feita de forma discreta, algo que aumenta significativamente a dificuldade de se desenvolver soluções exatas e de baixo custo computacional para os problemas que envolvem RRA. Nesse sentido, os problemas de otimização formulados tendem a ser completamente combinatoriais e métodos clássicos da literatura baseados na convexidade/continuidade das restrições que envolvem os problemas de otimização não podem ser aplicados [33]. Além disso, conforme vimos na seção 1.2.4, a demanda por serviços de dados em redes móveis está crescendo de forma exponencial e nesse mesmo cenário as operadoras de telefonia móvel tem a constante preocupação em fornecer serviços de alta qualidade a seus usuários/assinantes na tentativa de evitar a evasão desses usuários para outras operadoras. Sob tais considerações, propomos nessa dissertação de mestrado um estudo de dois cenários envolvendo comunicações cooperativas: maximização da taxa dados e maximização do número de usuários satisfeitos considerando QoS.

## 1.4 Contribuições e Produção Científica

### 1.4.1 Contribuições

As contribuições dessa dissertação consistem em prover resultados analíticos e empíricos que melhoram o gerenciamento dos recursos de rádio para dois problemas importantes nos sistemas cooperativos: *i*) maximização da taxa de dados e *ii*) maximização da satisfação com restrição de QoS. Assim, nossas principais contribuições são:

1. Com relação ao problema *i*:

- Formulação de um problema de otimização não linear com objetivo de maximizar a taxa de dados em um sistema cooperativo de dois saltos com múltiplos usuários. Consideramos uma curva de adaptação de enlace discreta (realista) bem como uma restrição individual e uma total de potência por cada salto. O problema apresentado é composto de três subproblemas: AS (Assinalamento de Subportadora), ES e AP (Alocação de Potência) que em conjunto determinam o gerenciamento de recursos do sistema.
- Demostramos como resolver de forma exata o AS e ES e AP para o problema apresentado quando consideramos a restrição total de potência.
- Demonstramos como resolver de forma exata o AS e ES para o problema apresentado quando consideramos a restrição individual de potência por cada salto. Neste caso, o problema de AP restante foi resolvido de forma exata com elevado custo computacional através do algoritmo BB (do inglês, *Branch and Bound*).
- Desenvolvemos limitantes superior (e inferior) para a solução ótima do problema de AP restante e mostramos que eles convergem para um mesmo valor sob determinadas condições.
- Propomos uma heurística de baixo custo computacional quase ótimo para o problema de AP restante.
- Avaliamos o desempenho da solução heurística bem dos limitantes superior/inferior através de simulações computacionais.

2. Com relação ao problema *ii*:

- Formulamos um problema de otimização não linear com objetivo de maximizar o número de usuários satisfeitos com restrições de QoS em um sistema cooperativo de dois saltos com múltiplo usuários. Consideramos uma curva de adaptação de enlace discreta. O problema apresentado é composto de três subproblemas: AS, ES e AP.
- Reformulamos o problema apresentado reduzindo a quantidade de variáveis existentes e o transformamos em linear. O problema foi resolvido de forma ótima com elevado custo computacional através do algoritmo BB.
- Apresentamos três heurísticas de baixa complexidade para os subproblemas de AS, ES e AP, que em conjunto compõem uma solução heurística para o

problema apresentado.

- Avaliamos os resultados das heurísticas propostas por meio de simulações computacionais.

#### 1.4.2 *Produção Científica*

Durante o desenvolvimento dessa dissertação foram submetidos e publicados os seguintes artigos científicos:

**PESSOA, A. M.;** LIMA, F. R. M.; MACIEL, T. F.; CAVALCANTI, F. R. P.: *Joint Bit Loading and Subcarrier Matching in Two-Hop Cooperative System*, em XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Santarém-PA, 2016.

**PESSOA, A. M.;** LIMA, F. R. M., LIMA, C. A. A.: *Maximização da Satisfação em Sistemas Cooperativos com Restrições de QoS*, em XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Santarém-PA, 2016.

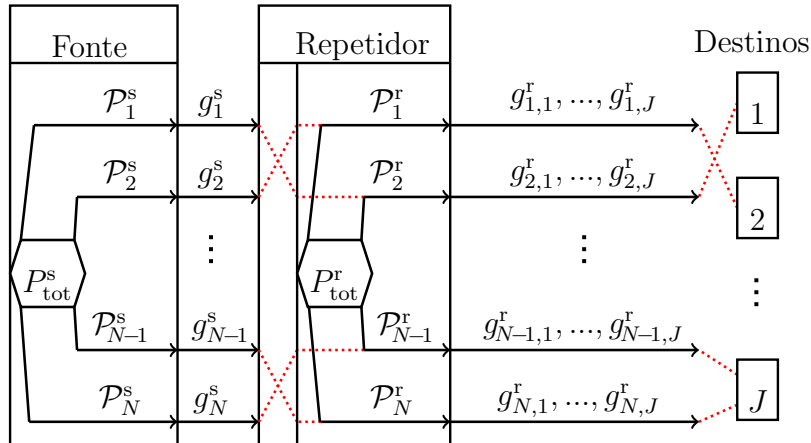
## 2 MODELAGEM DO SISTEMA

Este capítulo é dedicado a descrever as propriedades do sistema cooperativo a ser estudado neste trabalho sobre o qual construiremos dois problemas de otimização. A princípio, descrevemos as características do sistema que dizem respeito aos métodos de transmissão de dados que serão empregados e depois apresentaremos um conjunto de equações matemáticas que darão suporte a construção dos problemas de otimização.

### 2.1 Caracterização do Cenário

O cenário considerado é mostrado na Figura 5 e consiste em um sistema cooperativo de dois saltos composto por uma fonte com potência de transmissão  $P_{\text{tot}}^s$ , um repetidor com potência de transmissão  $P_{\text{tot}}^r$  e um conjunto  $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$  de receptores representados por nós usuários/destinos. Além disso, o sistema contém um conjunto  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  de subportadoras OFDMA que são utilizadas para transmitir dados da fonte para os  $J$  usuários através do repetidor. Esse sistema é representativo de um sistema celular no enlace direto em que o nó fonte representa uma ERB, os nós destinos representam TMs e finalmente os repetidores podem ser tanto estações rádio base de menor porte como terminais móveis. A transmissão ocorre em dois diferentes *slots* de tempo de modo que no primeiro slot de tempo as  $N$  subportadoras serão utilizadas para transmitir dados da fonte para o repetidor e no *slot* de tempo seguinte as mesmas  $N$  subportadoras serão reutilizadas para transmitir dados do repetidor para os  $J$  usuários.  $\mathcal{P}_n^s$  e  $\mathcal{P}_q^r$  denotam as potências alocadas para as subportadoras  $n \in \mathcal{N}$  e  $q \in \mathcal{N}$  dos saltos 1 e 2, respectivamente. Nós assumimos que o repetidor emprega protocolo DF e que todas as subportadoras experimentam desvanecimento Rayleigh independente e que todos os nós do sistema possuem CSI (do inglês, *Channel State Information*) perfeita.

Figura 5 – Modelo de Sistema Cooperativo com dois saltos.



Fonte: Próprio Autor.

Nós definimos o ganho de canal normalizado na subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto

1 e na subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2 com relação ao usuário  $j \in \mathcal{J}$  como  $g_n^s \equiv \frac{|h_n^s|^2}{\sigma^2}$  e  $g_{q,j}^r \equiv \frac{|h_{q,j}^r|^2}{\sigma^2}$ , respectivamente, em que  $h_n^s$  é a resposta em frequência da subportadora  $n \in \mathcal{N}$  no salto 1 e  $h_{q,j}^r$  é a resposta em frequência da subportadora  $q \in \mathcal{N}$  no salto 2 com respeito ao usuário  $j \in \mathcal{J}$ . Por fim,  $\sigma^2$  é a potência média do ruído experimentado por cada subportadora do sistema.

Os bits a serem transmitidos na subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto 1 devem ser retransmitidos por somente uma subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2. Além disso, os bits retransmitidos na subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2 foram transmitidos por somente uma subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto 1. Dessa forma, definimos ES como a funcionalidade do sistema que associa (em pares) as subportadoras do salto 1 com as subportadoras do salto 2 em uma relação um-para-um. A Figura 5 exemplifica o processo de emparelhamento: veja que as subportadoras 1, 2,  $N-1$  e  $N$  do salto 1 foram emparelhadas com as subportadoras 2, 1,  $N$  e  $N-1$  do salto 2, respectivamente.

Definimos AS como a funcionalidade do sistema que atribui cada uma das subportadoras do salto 2 a um dos  $J$  usuários (ou nós destinos). Conforme ilustrado na Figura 5, vemos que as subportadoras 1, 2,  $N-1$  e  $N$  do salto 2 foram atribuídas aos usuários 2, 1,  $J$  e  $J$ , respectivamente. Finalmente, definimos AP como a funcionalidade do sistema que determina a quantidade de potência  $\mathcal{P}_n^s$  e  $\mathcal{P}_q^r$  que deve ser atribuída às subportadoras  $n \in \mathcal{N}$  e  $q \in \mathcal{N}$  dos saltos 1 e 2, respectivamente.

A maioria dos trabalhos da literatura consideram um mapeamento contínuo entre SNR e taxa de dados  $R$  para todas as subportadoras do sistema de dois saltos com largura de banda  $B$ , sendo este mapeamento representado pela equação da capacidade de Shannon:

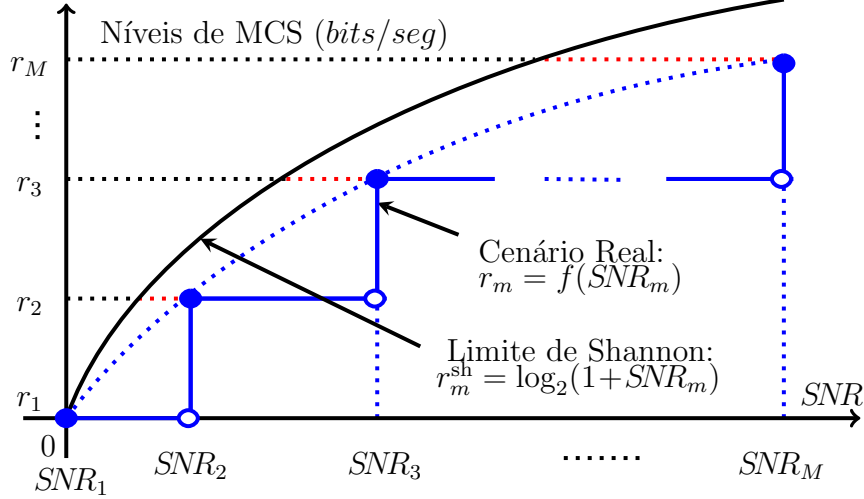
$$R = B \log_2(1 + SNR). \quad (4)$$

Matematicamente esta abordagem é vantajosa, pois existem diversos recursos matemáticos baseados na continuidade e convexidade da função objetivo e das restrições de problemas de otimização que nos possibilitam obter uma solução analítica e/ou numérica para estes problemas. Fisicamente esta abordagem é irrealista, pois em sistemas práticos o mapeamento entre SNR e taxa de dados é feito de forma discreta e esta abordagem inviabiliza a utilização das técnicas matemáticas baseadas na continuidade e convexidade de funções. Buscando uma abordagem mais realista, consideramos neste trabalho um mapeamento discreto entre SNR e taxa de dados (ou nível de MCS) conforme mostrado na Figura 6. Nesta figura podemos entender a diferença entre o mapeamento discreto e contínuo: o aumento da SNR sempre implica em aumento da taxa de dados no mapeamento contínuo, entretanto, no mapeamento discreto a taxa de dados só aumenta para valores específicos de SNR. Assim, sendo  $f(\cdot)$  uma função genérica monotônica crescente que faz o mapeamento discreto entre SNR e taxa de dados, então é válida a seguinte



propriedade: quando a SNR experimentada numa dada subportadora encontra-se no intervalo  $SNR_m \leq SNR < SNR_{m+1}, \forall m \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ , então a taxa de dados  $r_m$  é transmitida e sempre que  $SNR \geq SNR_M$  então a taxa de dados  $r_M$  é atingida.

Figura 6 – Mapeamento discreto entre SNR e taxa de dados para as subportadoras dos saltos 1 e 2.



Fonte: Próprio Autor.

Devemos notar que as três propriedades anteriormente citadas: AS, ES e AP em conjunto com a mapeamento discreto entre SNR e taxa de dados determinam o gerenciamento dos recursos do sistema cooperativo descritos na Figura 5.

## 2.2 Modelagem Matemática para os Subproblemas AS, ES e AP

Nesta seção apresentaremos um conjunto de variáveis e equações que nos permitem modelar matematicamente o gerenciamento dos recursos do sistema cooperativo descrito na seção anterior.

Dessa maneira, apresentamos a seguir a descrição de algumas variáveis importantes na construção dos problemas otimizações posteriormente estudados:

- $N, J$  e  $M$ : número de subportadoras em cada salto, número de usuários no sistema e número de níveis de MCS, respectivamente.
- $\mathcal{N}, \mathcal{J}$  e  $\mathcal{M}$ : conjunto de subportadoras, conjunto dos usuários e conjunto dos níveis de MCS definidos por  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}, \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, J\}$  e  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ , respectivamente.
- $P_{\text{tot}}^s$  e  $P_{\text{tot}}^r$ : potência total disponível na fonte e no repetidor, respectivamente.
- $P_{\text{tot}}^{s,r}$ : restrição total de potência sobre todos os nós do sistema cooperativo dada por  $P_{\text{tot}}^{s,r} = P_{\text{tot}}^s + P_{\text{tot}}^r$ .
- $P_{n,m}^s$ : mínima potência necessária para a  $n$ -ésima subportadora do salto 1 atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS.

- $P_{q,j,m}^r$ : mínima potência necessária para a  $q$ -ésima subportadora do salto 2 que foi assinalada ao  $j$ -ésimo usuário atingindo o  $m$ -ésimo nível de MCS.
- $r_m$ : taxa de dados atingida em qualquer subportadora do sistema quando o  $m$ -ésimo nível de MCS é empregado.
- $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ : conjunto de subportadoras e conjunto de níveis de MCS definidos por  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  e  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ , respectivamente.
- $r_n^s$ : taxa de dados transmitida na  $n$ -ésima subportadora do salto 1.
- $r_{q_n}^r$ : taxa de dados transmitida na  $q$ -ésima subportadora do salto 2 que esteja pareada com a  $n$ -ésima subportadora do salto 1.
- $r_n^{s,r}$ : taxa de dados transmitida sobre o  $n$ -ésimo *link*. O  $n$ -ésimo *link* é definido como o pareamento de  $n$ -ésima subportadora do salto 1 com a  $q$ -ésima subportadora do salto 2.
- $t_j$ : taxa de dados requisitada pelo  $j$ -ésimo usuário.
- $f(\cdot)$ : função matemática que realiza o mapeamento discreto entre a SNR e a taxa de dados atingida em cada nível de MCS  $m \in \mathcal{M}$ , isto é,  $r_m = f(SNR_m)$ ,  $\forall m \in \mathcal{M}$ .
- $y_{n,m}^s$ : variável binária que assume valor 1 se a  $n$ -ésima subportadora do salto 1 atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS e assume valor 0 caso contrário.
- $y_{n,q,j,m}^r$ : variável binária que assume valor 1 se a  $q$ -ésima subportadora do salto 2 for emparelhada com a  $n$ -ésima subportadora do salto 1, atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS e for assinalada para o  $j$ -ésimo receptor, caso contrário assume valor 0.

A fim de facilitar o entendimento da definição das variáveis feita anteriormente e possibilitar uma consulta rápida, a Tabela 1 contém a descrição das principais variáveis e constantes do problema de otimização que será construído. Note que  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,q,m}^r$  são, de fato, as variáveis de otimização e os demais elementos da tabela são constantes e possuem informações sobre características do sistema. Dessa forma, as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,q,m}^r$  são responsáveis por determinar como os recursos do sistema cooperativo serão distribuídos durante a transmissão e portanto determinam como serão abordados os problemas ES, AS e AP.

Considerando o sistema cooperativo descrito na seção anterior, podemos fazer um conjunto de restrições sobre as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,q,m}^r$  de modo que elas possam estar coerentes com o sistema aqui descrito. Conforme ilustrado na Figura 6, cada subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto 1 pode atingir somente um nível de MCS. Dessa forma temos:

$$\sum_{m=1}^M y_{n,m}^s \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (5)$$

Analogamente, a mesma restrição é aplicada para as subportadoras do salto 2, isto é, cada subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2 deve atingir somente um nível de MCS  $m \in \mathcal{M}$ . Além disso, cada subportadora do salto 1 deve ser emparelhada com somente uma subportadora do salto 2 bem como cada subportadora do salto 2 deve ser emparelhada com somente

Tabela 1 – Definição das variáveis do sistema de dois saltos.

Elemento	Descrição
$N, J$ e $M$	Número de: subportadoras em cada salto, usuários no sistema e níveis de MCS, respectivamente.
$\mathcal{N}, \mathcal{J}$ e $\mathcal{M}$	Conjunto de: subportadoras, usuários e níveis de MCS, respectivamente, definidos por $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ , $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, J\}$ e $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ .
$P_{\text{tot}}^s$ e $P_{\text{tot}}^r$	Potência total disponível na fonte e no repetidor, respectivamente.
$P_{\text{tot}}^{s,r}$	Restrição total de potência dada por $P_{\text{tot}}^{s,r} = P_{\text{tot}}^s + P_{\text{tot}}^r$ .
$P_{n,m}^s$	Mínima potência necessária para a $n$ -ésima subportadora do salto 1 atingir o $m$ -ésimo nível de MCS.
$P_{q,j,m}^r$	Mínima potência necessária para a $q$ -ésima subportadora do salto 2 que foi atribuída ao $j$ -ésimo usuário atingir o $m$ -ésimo nível de MCS.
$r_m$	Taxa de dados transmitida quando o $m$ -ésimo nível de MCS é atingido.
$r_n^s$	Taxa de dados transmitidas na $n$ -ésima subportadora do salto 1.
$r_{n_q}^r$	Taxa de dados transmitida na $q$ -ésima subportadora do salto 2 que esteja pareada com a $n$ -ésima subportadora do salto 1.
$r_n^{s,r}$	Taxa de dados transmitida no $n$ -ésimo <i>link</i> fim-a-fim, com $n \in \mathcal{N}$ .
$t_j$	Taxa de dados requisitada pelo $j$ -ésimo usuário.
$f(\cdot)$	Função matemática que representa um mapeamento discreto entre os níveis de MCS $m \in \mathcal{M}$ e a taxa de dados $r_m$ .
$y_{n,m}^s$	Variável binária que assume valor 1 se a $n$ -ésima subportadora do salto 1 atingir o $m$ -ésimo nível de MCS, caso contrário assume valor 0.
$y_{n,q,j,m}^r$	Variável binária que assume valor 1 se a $q$ -ésima subportadora do salto 2 atingir o $m$ -ésimo nível de MCS, for emparelhada com a $n$ -ésima subportadora do salto 1 e for atribuída para o $j$ -ésimo usuário, caso contrário assume valor 0.

Fonte: Próprio Autor.

uma subportadora do salto 1. Estas restrições podem ser modeladas conforme a seguir:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r \leq 1, \quad \forall q \in \mathcal{N}, \quad (6)$$

$$\sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (7)$$

Observe que a restrição (6) assegura que cada subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2 atinja um nível de MCS  $m \in \mathcal{M}$ , seja emparelhada com apenas uma subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto 1 e seja assinalada para algum usuário  $j \in \mathcal{J}$  do segundo salto. De for similar, a restrição (7) assegura que cada subportadora  $n \in \mathcal{N}$  do salto 1 seja emparelhada com apenas uma subportadora  $q \in \mathcal{N}$  do salto 2 a qual atinja um nível de MCS  $m \in \mathcal{M}$  e seja assinalada para algum usuário  $j \in \mathcal{J}$  do segundo salto.

Considerando restrição individual de potência em cada nó do sistema cooperativo, a potência total disponível na fonte e no repetidor é dada por  $P_{\text{tot}}^s$  e  $P_{\text{tot}}^r$ , respectivamente. Dessa forma, a restrição individual de potência na fonte e no repetidor será dada por:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s P_{n,m}^s \leq P_{\text{tot}}^s, \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r P_{n,q,j,m}^r \leq P_{\text{tot}}^r, \quad (9)$$

respectivamente. consideremos como restrição total de potência o caso em que não há obrigatoriedade de que a potência consumida em cada salto se restrinja a potência disponível no respectivo nó. Apesar dessa consideração ter sido assumida por diversos trabalhos na literatura, ela é irrealista do ponto de vista prático, porém traz simplificações matemáticas e fornece um limitante superior para o problema com restrição individual de potência. Dessa forma, a restrição total de potência é dada pela soma das restrições (8) e (9), conforme a mostrado a seguir:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s P_{n,m}^s + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r P_{q,j,m}^r \leq P_{\text{tot}}^{s,r}. \quad (10)$$

Conforme mostrado na Figura 6, consideramos mapeamento discreto entre a SNR e a taxa de dados atingida em cada subportadora do sistema. Dessa forma, a taxa de dados transmitida na  $n$ -ésima subportadora do salto 1 é dada por:

$$r_n^s = \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s r_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (11)$$

e a taxa de dados transmitida na  $q_n$ -ésima subportadora do salto 2 que foi emparelhada com a  $n$ -ésima subportadora do salto 1 é dada por:

$$r_{q_n}^r = \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r r_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (12)$$

Considerando o emprego do protocolo DF no repetidor, a taxa de dados ao longo do  $n$ -ésimo *link* é dada pelo menor valor entre as taxas individuais das subportadoras que compõem este link *link* e portanto estão emparelhadas. Dessa maneira, vemos que as restrições (11) e (12) descrevem a taxa de dados em um par de subportadoras que formam um *link*. Assim, combinamos estas duas equações para obter a taxa atingida ao longo do

$n$ -ésimo *link* conforme a seguir:

$$r_n^{s,r} = \{r_n^s, r_{q_n}^r\}, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (13)$$

### 3 PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA TAXA TOTAL DE DADOS

Nesse capítulo formularemos o problema de maximização da taxa total de dados no sistema descrito na Figura 5 considerando RIP e também RTP. Na seção 3.2 desenvolvemos um limitante inferior e um limitante superior para o problema RIP e também desenvolvemos algumas proposições que nos permitem resolver analiticamente o problema RTP e reduzir drasticamente o número de variáveis e restrições do problema RIP. Por fim, na seção 3.3, apresentamos uma solução subótima de baixa complexidade computacional para o problema RIP.

#### 3.1 Formulação do Problema

Considerando as definições de presentes na Tabela 1 e as restrições (5) até (13), o problema de otimização que objetiva maximizar a taxa de dados envolvendo conjuntamente os subproblemas ES, AS e AP com RIP e RTP pode ser formulado conforme a seguir:

$$\min_{\{y_{n,m}^s, y_{n,q,j,m}^r\}} - \sum_{n=1}^N r_n^{s,r}, \quad (14)$$

Sujeito a:

(5), (6), (7), (8) e (9), para o problema RIP,

(5), (6), (7) e (10), para o problema RTP.

Note que o problema RIP consiste em maximizar a taxa de dados do sistema considerando uma restrição individual de potência na fonte e no repetidor. Já o problema RTP também consiste em maximizar a taxa de dados do sistema, porém considera uma restrição global de potência envolvendo a fonte e o repetidor. Ambos problemas apresentados são do tipo inteiro ou combinatorial e não linear devido a função objetivo que é decorrente do uso do protocolo DF no repetidor.

#### 3.2 Solução Ótima para os Subproblemas ES, AS e AP dos Problemas RIP e RTP

Nesta seção iremos apresentar algumas proposições que servirão de base para demonstrar como resolver os subproblemas ES, AS e AP considerando RIP e RTP. Ressaltamos que o problema RTP será completamente solucionado a partir das proposições apresentadas. Entretanto, essas proposições nos permitem resolver completamente apenas os subproblemas AS e ES do problema RIP, restando o problema de AP. Além disso, o procedimento para resolver analiticamente o ES e AS dos problemas RIP e RTP é idêntico, já a AP em cada problema será resolvida de forma diferente.

### 3.2.1 Solução Ótima para o Subproblema AS

Considerando as definições apresentadas na Tabela 1, os índices  $q$  e  $j$  da variável  $y_{n,q,j,m}^r$  determinam uma submatriz binária que realiza o AS. Definindo esta submatriz por  $\alpha_{q,j}$ ,  $q \in \mathcal{N}$  e  $j \in \mathcal{J}$ , então podemos escrever:

$$\alpha_{q,j} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r, \quad q \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{J}. \quad (15)$$

Note que, se  $\alpha_{q,j} = 1$  então a  $q$ -ésima subportadora do salto 2 foi assinalada para o  $j$ -ésimo usuário, caso contrário teremos  $\alpha_{q,j} = 0$ . Dessa forma, existindo uma solução ótima para o problema RIP/RTP em (14) implica que a submatriz  $\alpha_{q,j}$  assinala os ganhos de canal  $g_{q,j}^r$  para  $q \in \mathcal{N}$  e  $j \in \mathcal{J}$  de forma que a taxa de dados do problema seja maximizada. Definida a matriz  $\alpha_{q,j}$ , considere a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.** *Seja  $\{y_{n,m}^{sl}, y_{n,q,j,m}^{rl}\}$  uma solução ótima para o problema RIP/RTP e  $\alpha'_{q,j}$ ,  $q \in \mathcal{N}$  e  $j \in \mathcal{J}$ , sua respectiva submatriz de AS. Seja  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  uma solução candidata para este problema que difere de  $\{y_{n,m}^{sl}, y_{n,q,j,m}^{rl}\}$  somente pela sua submatriz  $\alpha_{q,j}^*$  que determina o AS, dada por,*

$$\alpha_{q,j}^* = \begin{cases} 1, & \text{se para cada } q \in \mathcal{N}, j = \operatorname{argmax}\{g_{q,1}^r, \dots, g_{q,J}^r\}, \forall q \in \mathcal{N}. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (16)$$

então  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  também é uma solução ótima para o problema RIP/RTP.

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 3.1,  $\{y_{n,m}^{sl}, y_{n,q,j,m}^{rl}\}$  difere de  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  somente pela equação (16), então é imediato que  $y_{n,m}^{sl} = y_{n,m}^{s*}, \forall n \in \mathcal{N}$  e  $m \in \mathcal{M}$ . Além disso, a equação (16) determina que cada subportadora no salto 2 será assinalada ao usuário com maior ganho de canal. Assim, o ganho de canal na  $q$ -ésima subportadora do salto 2 na solução candidata  $\alpha_{q,j}^*$  será maior ou igual ao ganho de canal nesta mesma subportadora da solução ótima  $\alpha'_{q,j}$ .

Sejam  $R_{\text{tot}}^*$  e  $R'_{\text{tot}}$  as taxas de dados totais obtidas a partir das soluções  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  e  $\{y_{n,m}^{sl}, y_{n,q,j,m}^{rl}\}$ , respectivamente.  $R_{\text{tot}}^*$  e  $R'_{\text{tot}}$  podem ser obtidas pela substituição das equações (11) e (12) em (13) e finalmente (13) na função objetivo do problema (14) resultando em

$$R_{\text{tot}}^* = \sum_{n=1}^N \min \left\{ \overbrace{\sum_{m=1}^M f(P_{n,m}^s g_n^s) y_{n,m}^{s*}}^{r_n^{s*}}, \overbrace{\sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f(P_{q,j,m}^r g_{q,j}^r) y_{n,q,j,m}^{r*}}^{r_{qn}^{r*}} \right\}, \quad (17)$$

e

$$R'_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^N \min \left\{ \overbrace{\sum_{m=1}^M f(P_{n,m}^s g_n^s) y_{n,m}^{s'}}_{r_n^{s'}}, \overbrace{\sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f(P_{q,j,m}^r g_{q,j}^r) y_{n,q,j,m}^{r'}}_{r_{q_n}^{r'}} \right\}, \quad (18)$$

respectivamente. Observe que a constante  $r_m$  nas equações (11) e (12) foi substituída por  $f(P_{n,m}^s g_n^s)$  e  $f(P_{q,j,m}^r g_{q,j}^r)$ , respectivamente. Como  $y_{n,m}^{s'} = y_{n,m}^{s*}, \forall n \in \mathcal{N}$  e  $m \in \mathcal{M}$ , então a taxa de dados na  $n$ -ésima subportadora do salto 1 será a mesma para as soluções ótima e candidata, isto é,  $r_n^{s'} = r_n^{s*}, \forall n \in \mathcal{N}$ . Além disso, podemos interpretar a taxa de dados  $r_{q_n}^{r'}$  (da solução ótima) e  $r_{q_n}^{r*}$  (da solução candidata) como função dos ganhos de canal do salto 2 visto que ambas as soluções  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  e  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  possuem mesma AP e ES. Como os ganhos de canal que fazem parte da solução candidata são maiores ou iguais aos ganhos de canal da solução ótima e sabendo que  $f(\cdot)$  é monotônica não decrescente, então  $r_{q_n}^{r*} \geq r_{q_n}^{r'}, \forall q_n \in \mathcal{N}$ . Assim, a taxa de dados em cada *link* da equação (17) da solução candidata será maior ou igual a taxa de dados de cada *link* da equação (18) da solução ótima, isto é,  $\min\{r_n^{s*}, r_{q_n}^{r*}\} \geq \min\{r_n^{s'}, r_{q_n}^{r'}\}, \forall n \in \mathcal{N}$ . Disso é imediato que  $R_{\text{tot}}^* \geq R'_{\text{tot}}$ .  $\square$

### 3.2.2 ES com Mesma Taxa de Dados em Cada Salto

Neste tópico mostraremos que existe ao menos uma solução ótima para o problema RIP/RTP de modo que  $r_n^s = r_{q_n}^r, \forall n \in \mathcal{N}$ . Este resultado será de bastante utilidade pois nos permite remover o operador  $\min\{\cdot, \cdot\}$  da função objetivo do problema (14) algo que o torna linear. Além disso, esta propriedade nos ajudará a demonstrar como efetuar o ES de forma ótima.

**Proposição 3.2.** *Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as soluções ótimas para o problema RIP/RTP, então existe  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\} \in \mathcal{S}$  tal que  $r_n^s = r_{q_n}^r, \forall n \in \mathcal{N}$ .*

*Demonstração.* Inicialmente devemos assumir que existe pelo menos uma solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  com pelo menos um *link* de modo que as subportadoras que se encontram emparelhadas tenham taxa de dados diferentes, isto é,  $\exists n$  e  $q_n \in \mathcal{N}$  tal que  $r_n^{s'} \neq r_{q_n}^{r'}$ .

A taxa de dados total  $R'_{\text{tot}}$  obtida a partir da solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  é dada pela equação (17) e a taxa de dados atingida na  $n$ -ésima subportadora do salto 1 e na  $q_n$ -ésima do salto 2 que compõem o  $n$ -ésimo *link* será

$$r_n^{s'} = \sum_{m=1}^M f(P_{n,m}^s g_n^s) y_{n,m}^{s'}, \quad (19)$$

e

$$r_{q_n}^{r'} = \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f(P_{q,j,m}^r g_{q,j}^r) y_{n,q,j,m}^{r'}, \quad (20)$$



respectivamente.

Para facilitar a notação matemática das equações (19) e (20), considere a seguinte definição: seja  $\mathcal{P}_n^{s'}$  e  $\mathcal{P}_{q_n}^{r'}$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$ , a quantidade ótima de potência obtidas a partir da solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  para as subportadoras  $n$  e  $q_n$  dos saltos 1 e 2 respectivamente, dadas por:

$$\mathcal{P}_n^{s'} = \sum_{m=1}^M P_{n,m}^s y_{n,m}^{s'}, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \mathcal{P}_{q_n}^{r'} = \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M P_{q,j,m}^r y_{n,q,j,m}^{r'}, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (21)$$

Usando a equação (21) podemos reescrever as equações (19) e (20) de uma forma mais simples conforme abaixo:

$$r_n^{s'} = f(\mathcal{P}_n^{s'} g_n^s), \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad r_{q_n}^{r'} = f(\mathcal{P}_{n,q_n}^{r'} g_{q_n}^r), \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (22)$$

em que  $g_{q_n}^r$ ,  $\forall q_n \in \mathcal{N}$ , corresponde a seleção dos ganhos de canal no salto 2 de forma ótima a partir do conjunto  $\{g_{q_n,1}^r, g_{q_n,2}^r, \dots, g_{q_n,J}^r\}$ , isto é, a seleção dos ganhos de canal  $g_{q_n}^r$ ,  $\forall q_n \in \mathcal{N}$ , determina o AS ótimo obtido a partir da solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  e pode ser dado, por exemplo, a partir da Proposição 3.1:  $g_{q_n}^r = \max\{g_{q_n,1}^r, g_{q_n,2}^r, \dots, g_{q_n,J}^r\}$ ,  $\forall q_n \in \mathcal{N}$ . Assim, sendo  $f(\cdot)$  uma função monotônica não decrescente então existem duas possibilidades para a relação entre  $r_n^{s'}$  e  $r_{q_n}^{r'}$ :

- 1)  $r_n^{s'} \geq r_{q_n}^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_n^{s'} g_n^s \geq \mathcal{P}_{q_n}^{r'} g_{q_n}^r$ . Seja  $0 \leq \Delta P_n^s \leq \mathcal{P}_n^{s'}$  a quantidade de potência que deve ser subtraída de  $\mathcal{P}_n^{s'}$  de modo que  $r_n^{s'} = r_{q_n}^{r'} \Rightarrow (\mathcal{P}_n^{s'} - \Delta P_n^s) g_n^s = \mathcal{P}_{q_n}^{r'} g_{q_n}^r$  e então obtemos  $\Delta P_n^s = \mathcal{P}_n^{s'} - \mathcal{P}_{q_n}^{r'} g_{q_n}^r / g_n^s$ .
- 2)  $r_n^{s'} < r_{q_n}^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_n^{s'} g_n^s < \mathcal{P}_{q_n}^{r'} g_{q_n}^r$ . Seja  $0 < \Delta P_{q_n}^r \leq \mathcal{P}_{q_n}^{r'}$  a quantidade de potência que deve ser subtraída de  $\mathcal{P}_{q_n}^{r'}$  tal que  $r_n^{s'} = r_{q_n}^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_n^{s'} g_n^s = (\mathcal{P}_{q_n}^{r'} - \Delta P_{q_n}^r) g_{q_n}^r$  e então obtemos  $\Delta P_{q_n}^r = \mathcal{P}_{q_n}^{r'} - \mathcal{P}_n^{s'} g_n^s / g_{q_n}^r$ .

Portanto, mostramos que dada uma solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  para o problema RIP/RTP que tenha pelo menos um *link*  $n \in \mathcal{N}$  de modo que  $r_n^{s'} \neq r_{q_n}^{r'}$ , então podemos obter uma nova solução a partir de  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  ao redistribuir a potência transmitida no  $n$ -ésimo *link* de modo a garantir a relação  $r_n^{s'} = r_{q_n}^{r'}$  sem perda de otimalidade. Na pior situação, os pares de subportadoras emparelhados que compõem cada  $n$ -ésimo *link* possuem diferentes taxas de dados. Nesse caso, podemos aplicar indutivamente o raciocínio presente nessa proposição  $N$  vezes até obtermos a solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  com a propriedade desejada, isto é,  $r_n^{s*} = r_{q_n}^{r*}$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$ .  $\square$

### 3.2.3 Solução ótima para o Subproblema ES

A seguir, mostraremos que o ES ordenado é ótimo para o problema RIP/RTP. Para tal fim, precisaremos da Proposição 3.2 que garante mesma taxa de dados para os pares de subportadoras que compõem cada *link*.

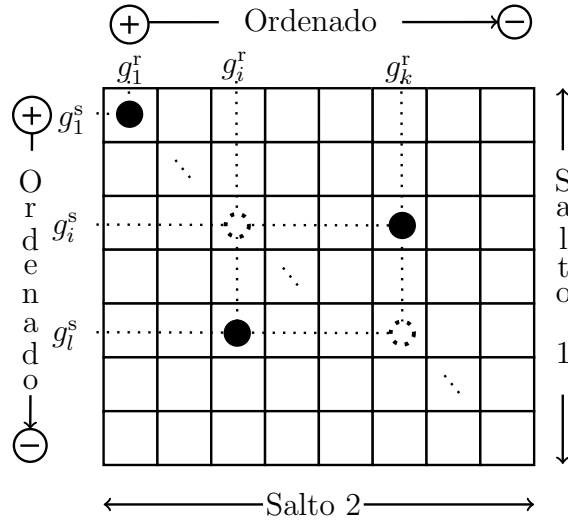
**Proposição 3.3.** *Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as possíveis soluções para o problema RIP/RTP, então existe ao menos um  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\} \in \mathcal{S}$  com a seguinte propriedade: o ES é dado por  $\{(g_1^s, g_1^r), (g_2^s, g_2^r), \dots, (g_N^s, g_N^r)\}$  em que  $g_1^s \leq \dots \leq g_N^s$  e  $g_1^r \leq \dots \leq g_N^r$  ou  $g_1^s \geq \dots \geq g_N^s$  e  $g_1^r \geq \dots \geq g_N^r$ . Isto é, o ES é obtido pelo ordenamento dos ganhos de canal em cada salto (ambos em ordem ascendente ou descendente). Note que  $g_q^r, \forall q \in \mathcal{N}$ , consiste na seleção dos ganhos de canal no salto 2 após aplicarmos o AS de forma ótima (usando a Proposição 3.1, por exemplo).*

*Demonstração.* Definimos  $\pi_{n,q}$ ,  $(n, q) \in \mathcal{N}$  como a submatriz de  $y_{n,q,j,m}^r$  que determina o ES, então podemos escrever:

$$\pi_{n,q} = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r, \quad (n, q) \in \mathcal{N}. \quad (23)$$

Note que, se  $\pi_{n,q} = 1$  então a  $n$ -ésima subportadora do salto 1 que tem ganho de canal  $g_n^s$  será emparelhada com a  $q$ -ésima subportadora do salto 2 que tem ganho de canal  $g_q^r$  determinado a partir da Proposição 3.1, caso contrário  $\pi_{n,q} = 0$ . Assim, considere uma solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\} \in \mathcal{S}$  que não esteja de acordo com a Proposição 3.3 e seja  $\pi'_{n,q}$  a submatriz de ES obtida a partir de  $y_{n,q,j,m}^{r'}$  de acordo com a definição (23). A

Figura 7 – Emparelhamento de Subportadora dado pela sub matriz  $\pi'_{n,q}$ .



Fonte: Próprio Autor.

Figura 7 ilustra um modelo genérico para a submatriz  $\pi'_{n,q}$  que faz parte da solução ótima  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$ . Assim, se  $\pi'_{n,q} = 1$  (círculos preenchidos) indica que o emparelhamento ocorreu entre a  $n$ -ésima subportadora do salto 1 com a  $q$ -ésima subportadora do salto 2, caso contrário  $\pi'_{n,q} = 0$ .

Sem perda de generalidade, consideramos que os ganhos de canal estão ordenados em cada salto da Figura 7, isto é,  $g_1^s \geq \dots \geq g_i^s \geq \dots \geq g_l^s \geq \dots \geq g_N^s$  e  $g_1^r \geq \dots \geq g_i^r \geq \dots \geq g_k^r \geq \dots \geq g_N^r$ . Nessa figura nós destacamos uma região da submatriz  $\pi'_{n,q}$  em que há a primeira ocorrência do emparelhamento não ordenado, isto é, o menor  $i \in \mathcal{N}$  de modo que  $\pi'_{i,i} = 0$ . Assim, temos a certeza que existe  $k > i$  e  $l > i$  tais que  $\pi'_{i,k} = 1, \pi'_{l,i} = 1$  e  $\pi'_{l,k} = 0$ . Seja  $\gamma_n^{s'}$  e  $\gamma_{q_n}^{r'}$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$ , a SNR atingida na  $n$ -ésima subportadora do salto 1 e na  $q_n$ -ésima subportadora do salto 2, respectivamente, então podemos escrever:

$$\gamma_n^{s'} = \mathcal{P}_n^{s'} g_n^s, \forall n \in \mathcal{N}, \quad \gamma_{q_n}^{r'} = \mathcal{P}_{q_n}^{r'} g_{q_n}^r, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (24)$$

em que  $\mathcal{P}_n^{s'}$  e  $\mathcal{P}_{q_n}^{r'}$  foram anteriormente definidas na equação (21). A fim de facilitar a notação matemática, vamos denotar  $q_n$  apenas por  $q$ . Assim, sabendo que a SNR em cada par de subportadoras do  $n$ -ésimo *link* pode ser expressa pela equação (24) e que a Proposição 3.2 nos garante que os pares de subportadoras que compõem cada *link* representado na submatriz  $\pi'_{n,q}$  da Figura 7 possuem mesma taxa de dados, então podemos escrever:

$$r_i^{s'} = r_k^{r'} \Rightarrow \gamma_i^{s'} = \gamma_k^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s = \mathcal{P}_k^{r'} g_k^r, \quad (25)$$

e

$$r_l^{s'} = r_i^{r'} \Rightarrow \gamma_l^{s'} = \gamma_i^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_l^{s'} g_l^s = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r. \quad (26)$$

em que a potência total consumida no salto 1 pelas subportadoras  $i$  e  $l$  será dada por  $\mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'}$ . De forma equivalente, a potência total consumida no salto 2 pelas subportadoras  $i$  e  $k$  será dada por  $\mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'}$ .

Agora iremos propor uma solução candidata  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  para o problema (14) que difere de  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  exclusivamente pelo ES e AP envolvendo os *links*  $i$  e  $l$  destacados na Figura 7. A mudança proposta para ES é mostrada na Figura 8, isto é:  $\pi_{i,i}^* = 1, \pi_{l,k}^* = 1, \pi_{i,k}^* = 0$  e  $\pi_{l,i}^* = 0$ . A mudança proposta para a AP nesses dois *links* será mostrada a seguir.

A Proposição 3.2 nos garante duas propriedades envolvendo as subportadoras da solução candidata  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  conforme mostradas abaixo:

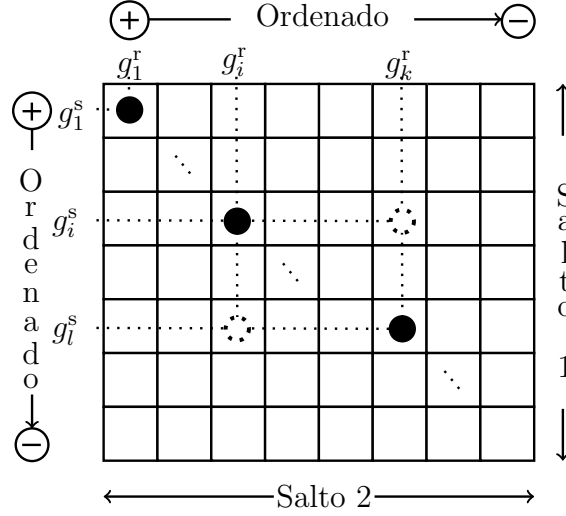
$$r_i^{s*} = r_i^{r*} \Rightarrow \gamma_i^{s*} = \gamma_i^{r*} \Rightarrow \mathcal{P}_i^{s*} g_i^s = \mathcal{P}_i^{r*} g_i^r, \quad (27)$$

e

$$r_l^{s*} = r_k^{r*} \Rightarrow \gamma_l^{s*} = \gamma_k^{r*} \Rightarrow \mathcal{P}_l^{s*} g_l^s = \mathcal{P}_k^{r*} g_k^r. \quad (28)$$

Uma vez que o emparelhamento de subportadoras foi alterado nos *links*  $i$  e  $l$ , espera-se que também haja mudanças na taxa de dados atingida nesses dois *links* pois a taxa em cada *link* depende dos ganhos de canal e da potência alocada para as

Figura 8 – Emparelhamento de Subportadora dado pela sub matriz  $\pi_{n,q}^*$ .



Fonte: Próprio Autor.

subportadoras que foram emparelhadas. Como desejamos que os esquemas ES e AP propostos pela solução candidata diferenciem-se da solução ótima exclusivamente nos *links*  $i$  e  $l$ , então devemos impor uma restrição na potência consumida pela subportadoras associadas a esses dois *links*:

$$\mathcal{P}_i^{s*} + \mathcal{P}_l^{s*} \leq \mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'}. \quad (29)$$

e

$$\mathcal{P}_i^{r*} + \mathcal{P}_k^{r*} \leq \mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'}. \quad (30)$$

Observe que essas duas restrições são necessárias, pois se considerarmos que  $\mathcal{P}_i^{s*} + \mathcal{P}_l^{s*} > \mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'}$  ou  $\mathcal{P}_i^{r*} + \mathcal{P}_k^{r*} > \mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'}$  então o excedente de potência além de  $\mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'}$  (no salto 1) ou  $\mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'}$  (no salto 2) deverá ser obtido a partir de outro *link*  $t \neq (i, l)$  e isso viola a nossa consideração inicial em manter o mesmo ES e AP para todos os demais *links*  $t \neq (i, l)$  de ambas as soluções. Assim garantimos que a solução candidata  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  consumirá uma potência total menor ou igual a potência consumida pela solução ótima inicial  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$ .

Dessa maneira, iremos mostrar que a solução candidata  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  também é ótima através da escolha adequada dos valores de  $\mathcal{P}_i^{s*}$ ,  $\mathcal{P}_l^{s*}$ ,  $\mathcal{P}_i^{r*}$  e  $\mathcal{P}_k^{r*}$ , respeitando as condições impostas pelas equações (29) e (30). Para tal fim, devemos mostrar que a taxa de dados atingida pela solução candidata  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  nos *links*  $i$  e  $l$  é maior ou igual a taxa de dados atingida nesses mesmos *links* da solução ótima  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$ , isto é,  $r_i^{s*} + r_l^{s*} \geq r_i^{s'} + r_l^{s'}$  ou equivalentemente,  $r_i^{r*} + r_k^{r*} \geq r_i^{r'} + r_k^{r'}$ .

Destacamos que a demonstração a seguir considera que toda a potência disponível  $\mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'}$  (no salto 1) e  $\mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'}$  (no salto 2) será utilizada pelas subportadoras da solução candidata e portanto teremos uma igualdade nas equações (29) e (30) ao invés

da desigualdade “ $\leq$ ”. Feita esta observação, dividimos a demonstração em duas etapas:

**Etapa i)** Assumimos que (25)  $\geq$  (26), isto é,  $(r_i^{s'} = r_k^{r'}) \geq (r_l^{s'} = r_i^{r'})$ .

Vamos repetir o esquema de AP da solução ótima para as subportadoras  $i$  e  $l$  do salto 1, isto é,  $\mathcal{P}_i^{s*} = \mathcal{P}_i^{s'} \Rightarrow r_i^{s*} = r_i^{s'}$  e  $\mathcal{P}_l^{s*} = \mathcal{P}_l^{s'} \Rightarrow r_l^{s*} = r_l^{s'}$ . Usando a equação (28) e o fato anteriormente comentado que  $\mathcal{P}_l^{s*} = \mathcal{P}_l^{s'}$ , podemos determinar a potência  $\mathcal{P}_k^{r*}$  necessária para a  $k$ -ésima subportadora do salto 2 ter a mesma taxa de dados ( $r_k^{r*} = r_l^{s*}$ ) da  $l$ -ésima subportadora do salto 1 com quem ela está emparelhada na solução candidata  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$ , isto é:

$$\mathcal{P}_k^{r*} = \mathcal{P}_l^{s'} \frac{g_l^s}{g_k^r}. \quad (31)$$

Devemos notar que potência  $\mathcal{P}_k^{r*}$  consumida pela  $k$ -ésima subportadora do salto 2 da solução candidata não excede a quantidade máxima de potência estipulada pela equação (30). Para observar essa propriedade basta usar a equação (31) e nossa consideração inicial nesta etapa que considera  $r_l^{s'} \leq r_k^{r'} \Rightarrow \mathcal{P}_l^{s'} g_l^s \leq \mathcal{P}_k^{r'} g_k^r$ , isto é,  $(\mathcal{P}_k^{r*} g_k^r = \mathcal{P}_l^{s'} g_l^s) \leq \mathcal{P}_k^{r'} g_k^r \Rightarrow \mathcal{P}_k^{r*} \leq \mathcal{P}_k^{r'}$ . A partir disso, podemos determinar a potência que ficará disponível para a  $i$ -ésima subportadora do salto 2 da solução candidata  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  ao substituirmos a equação (31) em (30), conforme abaixo:

$$\mathcal{P}_i^{r*} = \mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'} - \mathcal{P}_l^{s'} \frac{g_l^s}{g_k^r}. \quad (32)$$

Note ainda que  $\mathcal{P}_i^{r*} \geq \mathcal{P}_i^{r'}$  pois  $\mathcal{P}_k^{r'} - \mathcal{P}_l^{s'} \frac{g_l^s}{g_k^r} \geq 0$ , conforme mostrado anterior. Por fim, atribuímos toda a potência  $\mathcal{P}_i^{r*}$  para a  $i$ -ésima subportadora do salto 2 e então devemos mostrar que a SNR nela atingida é tal que  $\gamma_i^{r*} \geq (\gamma_i^{s'} = \gamma_i^{s*}) \Rightarrow r_i^{r*} \geq (r_i^{s'} = r_i^{s*})$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} \gamma_i^{r*} &= \left( \mathcal{P}_i^{r'} + \mathcal{P}_k^{r'} - \mathcal{P}_l^{s'} \frac{g_l^s}{g_k^r} \right) g_i^r = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r + \mathcal{P}_k^{r'} g_i^r - \overbrace{\mathcal{P}_l^{s'} g_l^s \frac{g_i^r}{g_k^r}}^{(26)} = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r + \mathcal{P}_k^{r'} g_i^r - \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \frac{g_i^r}{g_k^r} = \\ & \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \left( 1 - \frac{g_i^r}{g_k^r} \right) + \overbrace{\mathcal{P}_k^{r'} g_i^r}^{(25)} = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \left( 1 - \frac{g_i^r}{g_k^r} \right) + \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \frac{g_i^r}{g_k^r} = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \left( 1 - \frac{g_i^r}{g_k^r} \right) + \underbrace{\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \frac{g_i^r}{g_k^r}}_{(26)} + \underbrace{(\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s - \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r)}_{(25)} \\ & \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s = \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \left( 1 - \frac{g_i^r}{g_k^r} \right) + \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \left( \frac{g_i^r}{g_k^r} - 1 \right) + \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s = \left( \frac{g_i^r}{g_k^r} - 1 \right) \left( \underbrace{\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s}_{(25)} - \underbrace{\mathcal{P}_i^{r'} g_i^r}_{(26)} \right) + \underbrace{\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s}_{(25)} = \\ & \underbrace{\left( \frac{g_i^r}{g_k^r} - 1 \right)}_{\geq 0} \underbrace{(\gamma_i^{s'} - \gamma_i^{r'})}_{\geq 0} + \gamma_i^{s'} \Rightarrow \gamma_i^{r*} \geq \gamma_i^{s'} \Rightarrow r_i^{r*} \geq r_i^{s'}. \end{aligned}$$

**Etapa ii)** Assumimos que (25)  $<$  (26), isto é,  $(r_i^{s'} = r_k^{r'}) < (r_l^{s'} = r_i^{r'})$ .

A demonstração é similar ao que foi feito na **Etapa i**, porém iremos manter o esquema de AP para as subportadoras do salto 2 em vez do salto 1, tal como foi feito na **Etapa i**. Dessa maneira temos  $\mathcal{P}_i^{r*} = \mathcal{P}_i^{r'} \Rightarrow r_i^{r*} = r_i^{r'}$  e  $\mathcal{P}_k^{r*} = \mathcal{P}_k^{r'} \Rightarrow r_k^{r*} = r_k^{r'}$ . Usando a equação (28) podemos determinar a potência  $\mathcal{P}_l^{s*}$  necessária para a  $l$ -ésima subportadora do salto 1 ter a mesma taxa de dados ( $r_k^{r*} = r_l^{s*}$ ) da  $k$ -ésima subportadora do salto 2 com

quem ela está emparelhada na solução candidata  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$ , isto é:

$$\mathcal{P}_l^{s*} = \mathcal{P}_k^{r'} \frac{g_k^r}{g_l^s}. \quad (33)$$

Substituindo a equação (33) em (29) obtemos a potência que ficará disponível para a  $i$ -ésima subportadora do salto 1 da solução candidata, conforme abaixo:

$$\mathcal{P}_i^{s*} = \mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'} - \mathcal{P}_k^{r'} \frac{g_k^r}{g_l^s}. \quad (34)$$

Finalmente, atribuímos toda a potência  $\mathcal{P}_i^{s*}$  para a  $i$ -ésima subportadora do salto 1 e então devemos mostrar que a SNR nela atingida é tal que  $\gamma_i^{s*} \geq (\gamma_i^{r'} = \gamma_i^{r*}) \Rightarrow r_i^{s*} \geq (r_i^{r'} = r_i^{r*})$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} \gamma_i^{s*} &= \left( \mathcal{P}_i^{s'} + \mathcal{P}_l^{s'} - \mathcal{P}_k^{r'} \frac{g_k^r}{g_l^s} \right) g_i^s = \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s + \mathcal{P}_l^{s'} g_i^s - \overbrace{\mathcal{P}_k^{r'} g_k^r \frac{g_i^s}{g_l^s}}^{(25)} = \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s + \mathcal{P}_l^{s'} g_i^s - \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \frac{g_i^s}{g_l^s} = \\ &\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \left( 1 - \frac{g_i^s}{g_l^s} \right) + \overbrace{\mathcal{P}_l^{s'} g_i^s}^{(26)} = \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \left( 1 - \frac{g_i^s}{g_l^s} \right) + \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \frac{g_i^s}{g_l^s} = \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \left( 1 - \frac{g_i^s}{g_l^s} \right) + \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \frac{g_i^s}{g_l^s} + \left( \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r - \right. \\ &\left. \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \right) = \mathcal{P}_i^{s'} g_i^s \left( 1 - \frac{g_i^s}{g_l^s} \right) + \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r \left( \frac{g_i^s}{g_l^s} - 1 \right) + \mathcal{P}_i^{r'} g_i^r = \left( \frac{g_i^s}{g_l^s} - 1 \right) \left( \overbrace{\mathcal{P}_i^{r'} g_i^r}^{(26)} - \overbrace{\mathcal{P}_i^{s'} g_i^s}^{(25)} \right) + \overbrace{\mathcal{P}_i^{r'} g_i^r}^{(26)} = \\ &\underbrace{\left( \frac{g_i^s}{g_l^s} - 1 \right)}_{\geq 0} \underbrace{\left( \gamma_i^{r'} - \gamma_i^{s'} \right)}_{> 0} + \gamma_i^{r'} \Rightarrow \gamma_i^{s*} \geq \gamma_i^{r'} \Rightarrow r_i^{s*} \geq r_i^{r'}. \end{aligned}$$

Com isso mostramos que partindo de uma solução ótima  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  em que o ES não é ordenado, conseguimos obter outra solução ótima  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  que difere de  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$  exclusivamente pelo ES e AP nos *links*  $i$  e  $l$ . Além disso, a mudança nos *links*  $i$  e  $l$  levou ao emparelhamento ordenado da  $i$ -ésima subportadora do salto 1 com a  $i$ -ésima do salto 2 que não se encontravam emparelhadas na solução ótima inicial  $\{y_n^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}\}$ . Dessa forma, podemos aplicar todo o raciocínio desenvolvido nessa proposição sobre a solução ótima  $\{y_n^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  recentemente obtida e então obtermos uma nova solução ótima que irá emparelhar de forma ordenada mais um par de subportadoras. Podemos aplicar este raciocínio de forma indutiva até que finalmente obtemos uma solução cujo ES é completamente ordenado.  $\square$

### 3.2.4 Reformulação do Problema

O problema de otimização apresentado em (14) pode ser substancialmente simplificado através das proposições 3.1, 3.2 e 3.3. As Proposições 3.1 e 3.3 resolvem os subproblemas AS e ES de forma ótima, respectivamente. Portanto, podemos remover das variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,q,j,m}^r$  os índices referentes aos subproblemas AS e ES pois essas variáveis foram definidas de forma a representar três subproblemas (AS, ES e AP) dos quais a solução ótima era desconhecida, entretanto, sabemos como obter a solução ótima para os

subproblemas AS e ES. Assim, a variável  $y_{n,q,j,m}^r$  se reduzirá a  $y_{q,m}^r$  após a remoção do AS e ES, isto é,  $y_{q,m}^r = 1$  se a  $q$ -ésima subportadora do salto 2 atingir o  $m$ -ésimo de MCS, caso contrário  $y_{q,m}^r = 0$ .

Devemos notar que as variáveis restantes  $y_{n,m}^s$  e  $y_{q,m}^r$  e dizem respeito exclusivamente ao subproblema AP, isto é, as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,m}^r$  contêm informações exclusivamente sobre o nível de MCS (ou taxa de dados) das subportadoras dos saltos 1 e 2, respectivamente. Além disso, a Proposição 3.2 determina que subportadoras emparelhadas possuem mesmo nível de MCS, o que nos permite concluir que as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{q,m}^r$  contêm a mesma informação, isto é,  $\{y_{n,m}^s\} = \{y_{q,m}^r\}, \forall (n, q) \in \mathcal{N}$  e  $\forall m \in \mathcal{M}$ .

Para fim de clareza, renomearemos as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{q,m}^r$  (que são iguais) por  $x_{n,m}$  em que  $x_{n,m}$  assume valor 1 se o  $n$ -ésimo *link* atinge o  $m$ -ésimo nível de MCS, caso contrário  $x_{n,m}$  assume valor 0. Dessa forma, podemos reformular o problema de otimização (14) considerando RIP/RTP conforme a seguir:

$$\min_{\{x_{n,m}\}} - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{n,m} r_m, \quad (35)$$

Sujeito a:

$$\sum_{m=1}^M x_{n,m} \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{n,m} P_{n,m}^s \leq P_{\text{tot}}^s, \quad (37)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{n,m} P_{n,m}^s \frac{g_n^s}{g_n^r} \leq P_{\text{tot}}^r, \quad (38)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{n,m} P_{n,m}^s \left( 1 + \frac{g_n^s}{g_n^r} \right) \leq P_{\text{tot}}^{s,r}, \quad (39)$$

em que o problema com RIP é dado pelas equações (35)–(38) e o problema com RTP é dado pelas equações (35), (36) e (39).

Note que a função objetivo do problema inicial (14) foi linearizada e expressa de forma mais simples pela equação (35). Além disso, as restrições (5), (6) e (7) do problema inicial foram simplificadas resultando apenas na restrição (36). Observe que as restrições de potência (38) (39) foram simplificadas pelo uso de Proposição 3.2 a qual determina que subportadoras emparelhadas possuem mesma SNR, isto é:  $P_{q,m}^r g_q^r = P_{n,m}^s g_n^s \Rightarrow P_{q,m}^r = P_{n,m}^s g_n^s / g_q^r$ . Por fim, veja que o problema RIP em (14) possui  $N^2 JM + NM$  variáveis e  $3N + 2$  restrições, Já o problema RIP reformulado em (35) possui apenas  $NM$  variáveis e  $N + 2$  restrições.

A seguir, iremos expressar o problema RIP reformulado de forma matricial compacta de maneira que esse problema possa ser resolvido através de softwares comerciais

existentes no mercado.

A variável de otimização  $x_{n,m}$  pode ser expressa matricialmente conforme a seguir:

$$\mathbf{x} = [x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,M}, \dots, x_{N,M}]^T, \quad (40)$$

em que o operador “ $T$ ” representa a transposição de matriz/vetor. A forma matricial da variável  $\mathbf{x}$  na equação (40) será utilizada como base para expressar também de forma matricial as demais restrições do problema de otimização. Assim, existem matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  com dimensões  $N \times NM$ ,  $1 \times NM$  e  $1 \times NM$ , respectivamente, que permitem reescrever as restrições (36), (37) e (38) conforme a seguir:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{1}_{N,1} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1,M} & \emptyset_{1,M} & \cdots & \emptyset_{1,M} \\ \emptyset_{1,M} & \mathbf{1}_{1,M} & \cdots & \emptyset_{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{1,M} & \emptyset_{1,M} & \cdots & \mathbf{1}_{1,M} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{x} \leq P_{\text{tot}}^s \Rightarrow \mathbf{B} = [P_{1,1}^s, P_{1,2}^s, \dots, P_{N,M}^s], \quad (42)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{x} \leq P_{\text{tot}}^r \Rightarrow \mathbf{C} = \left[ \frac{P_{1,1}^s g_1^s}{g_1^r}, \frac{P_{1,2}^s g_1^s}{g_1^r}, \dots, \frac{P_{N,M}^s g_N^s}{g_N^r} \right], \quad (43)$$

respectivamente, em que  $\mathbf{1}_{u,v}$  e  $\emptyset_{u,v}$  representam uma matriz/vetor de 1’s e 0’s com dimensões  $u \times v$ , respectivamente. Por fim, existe um vetor  $\mathbf{o}$  com dimensões  $1 \times NM$  que nos permite expressar a função objetivo (35) tal como:

$$\mathbf{o} \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{o} = [r_1, r_2, \dots, r_M, \dots, r_1, r_2, \dots, r_M]. \quad (44)$$

Finalmente, a partir das equações (41)-(44), podemos reescrever o problema RIP de forma matricial compacta, conforme a seguir:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{o} \mathbf{x} \quad (45)$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N,1} \\ P_{\text{tot}}^s \\ P_{\text{tot}}^r \end{bmatrix} \quad (46)$$

O problema (45)–(46) é inteiro (binário) e linear, podendo ser resolvido de forma exata através de métodos clássicos da literatura tal como o algoritmo BB.

### 3.2.5 Solução Ótima para o Problema RTP

**Proposição 3.4.** *O algoritmo HH consiste na solução ótima para o problema RTP ex-*



presso pelas equações (35), (36) e (39).

*Demonstração.* O problema RTP expresso pelas equações (35), (36) e (39) consiste em um problema de AP idêntico ao problema (1)–(3) apresentado anteriormente, exceto pelo fator  $(1 + g_n^s/g_n^r)$  presente na equação (39). Entretanto, percebendo que o fator  $P_{n,m}^s (1 + g_n^s/g_n^r)$  consiste na potência necessária para o  $n$ -ésimo *link* atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS, podemos concluir que há uma equivalência entre estes dois problemas e portanto o problema de AP em (35) considerando RTP será resolvido de forma ótima pelo algoritmo HH.  $\square$

### 3.2.6 Solução Ótima, Limitantes Superior e Inferior para o Problema RIP

O problema RIP, após ser reformulado, pertence a classe dos problema ILP (do inglês, *Integer Linear Problem*) e pode ser resolvido de forma ótima através do algoritmo BB.

Para obtermos os limitantes superior e inferior vamos considerar dois subproblemas obtidos a partir (35) considerando RIP e então nomeá-los conforme a seguir:

- (35), (36) e (37): AP-1 (Alocação de Potência com RIP no Salto 1),
- (35), (36) e (38): AP-2 (Alocação de Potência com RIP no Salto 2).

Note que os problemas AP-1 e AP-2 consistem na maximização individual da taxa de dados nos saltos 1 e 2, respectivamente, e podem ser resolvidos de forma ótimo pelo algoritmo HH. Além disso, considere a definição das variáveis que compõem a solução ótima para os problemas RIP, AP-1 e AP-2:

- 1)  $x_{n,m}^*$  consiste na solução ótima do problema RIP.  $r_n^*$  consiste na taxa de dados ótima transmitida no  $n$ -ésimo *link* e  $R^*$  corresponde a taxa de dados total obtida a partir de  $x_{n,m}^*$ .
- 2)  $x_{n,m}^{s,hh}$  consiste na solução ótima do problema AP-1.  $r_n^{s,hh}$  é a taxa de dados na  $n$ -ésima subportadora do salto 1 e  $R^{s,hh}$  consiste na taxa de dados total obtida a partir de  $x_{n,m}^{s,hh}$ .
- 3)  $x_{n,m}^{r,hh}$  consiste na solução ótima para o problema AP-2.  $r_n^{r,hh}$  corresponde a taxa de dados atingida na  $n$ -ésima subportadora do salto 2 e  $R^{r,hh}$  consiste na taxa de dados total obtida a partir de  $x_{n,m}^{r,hh}$ .

Note que o sobrescrito “hh” nas variáveis anteriormente descritas indica que o algoritmo HH é a solução ótima para o problema a elas associado. Dadas estas definições, considere a seguinte proposição:

**Proposição 3.5.** *A máxima taxa de dados  $R^*$  do problema RIP apresentado em (35) possui limitantes superior e inferior dados por:*

$$\sum_{n=1}^N \min \{r_n^{s,hh}, r_n^{r,hh}\} \leq R^* \leq \min \{R^{s,hh}, R^{r,hh}\} = \min \left\{ \sum_{n=1}^N r_n^{s,hh}, \sum_{n=1}^N r_n^{r,hh} \right\}, \quad (47)$$

*Demonstração. Limitante Superior)* A taxa de dados total  $R^*$  para o problema RIP é dada por

$$R^* = \sum_{n=1}^N r_n^*, \quad (48)$$

em que a taxa de dados no  $n$ -ésimo *link* é dada por  $r_n^* = \sum_{m=1}^M x_{n,m}^* r_m$ . Além disso, a Proposição 3.2 determina que as subportadoras que compõem um mesmo *link* possuem mesma taxa de dados, isto é,  $r_n^* = (r_n^{s*} = r_n^{r*})$ , então podemos reescrever a equação (48) de duas maneiras alternativas:

$$R^* = \sum_{n=1}^N r_n^{s*}, \quad (49)$$

ou

$$R^* = \sum_{n=1}^N r_n^{r*}. \quad (50)$$

Note que a solução ótima  $x_{n,m}^*$  para o problema RIP satisfaz as restrições (36), (37) e (38). Dessa maneira,  $x_{n,m}^*$  é uma solução viável para os problemas AP-1 e AP-2. Entretanto, a solução ótima para os problemas AP-1 e AP-2 é dada por  $x_{n,n}^{s,hh}$  e  $x_{n,n}^{r,hh}$ , respectivamente, e a taxa de dados total por eles atingida é dada por:

$$R^{s,hh} = \sum_{n=1}^N r_n^{s,hh}, \quad (51)$$

e

$$R^{r,hh} = \sum_{n=1}^N r_n^{r,hh}. \quad (52)$$

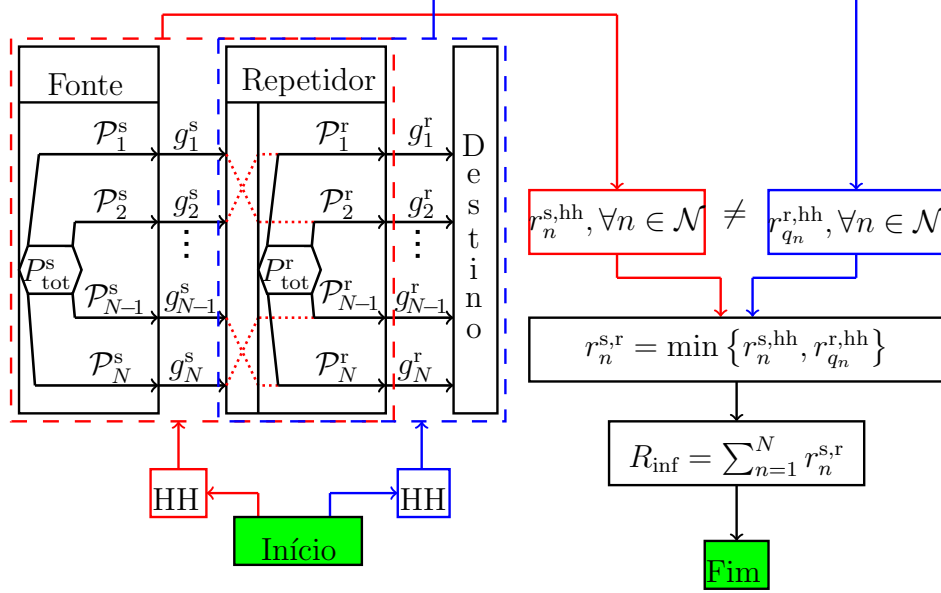
Assim, sendo  $x_{n,m}^*$  uma solução viável para o problema AP-1 e  $x_{n,n}^{s,hh}$  a solução ótima para esse problema, então temos que  $R^* \leq R^{s,hh}$ . Além disso,  $x_{n,m}^*$  também é uma solução viável para o problema AP-2 e  $x_{n,n}^{r,hh}$  consiste na solução ótima para esse problema, então temos que  $R^* \leq R^{r,hh}$ . Por fim, concluímos que:

$$R^* \leq R^{s,hh} \text{ e } R^* \leq R^{r,hh} \Rightarrow R^* \leq \min \{ R^{s,hh}, R^{r,hh} \}. \quad (53)$$

**Limite Inferior)** Note que as soluções  $\{x_{n,m}^{s,hh}\}$  e  $\{x_{n,m}^{r,hh}\}$  individualmente consistem em esquemas de alocação de potência ótimos que maximizam a taxa da dados dos problemas AP-1 e AP-2. Note que um limitante inferior para o problema RIP em (35)–(38) também será um limitante inferior para o problema RIP inicialmente formulado em (14). Dessa maneira, quando consideramos que o AS e ES foram realizados de forma ótima através das proposições antes apresentadas, e que a alocação de potência no salto 1 é definida pela solução  $\{x_{n,m}^{s,hh}\}$  e a alocação de potência no salto 2 é definida pela solução  $\{x_{n,m}^{r,hh}\}$ , temos uma solução combinada  $\{x_{n,m}^{s,hh}, x_{n,m}^{r,hh}\}$  que embora não seja ótima para o problema (14), consiste em uma solução factível ou viável. Portanto, a solução

combinada  $\{x_{n,m}^{s,hh}, x_{n,m}^{r,hh}\}$  será um limitante inferior para solução ótima do problema RIP reformulado.

Figura 9 – Método para o cálculo do limitante inferior do problema RIP.



Fonte: Próprio Autor.

Vale ressaltar que essa solução deve considerar previamente algum AS (como por exemplo, a Proposição 3.1) e emprega ES ordenado conforme mostrado na Figura 9. Note que o procedimento para o cálculo do limitante inferior consiste em aplicar HH nos saltos 1 e 2 e então obter a taxa de dados  $r_n^{s,hh}$  e  $r_n^{r,hh}$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$ , em cada uma das subportadoras de ambos os saltos. Em seguida calculamos a taxa de dados em cada *link* e finalmente a taxa de dados total obtida  $R_{\text{inf}}$ . Dessa maneira, sendo  $R_{\text{inf}}$  a taxa de dados obtida a partir  $\{x_{n,m}^{s,hh}, x_{n,m}^{r,hh}\}$ , então podemos escrever:

$$R_{\text{inf}} = \sum_{n=1}^N \min \{r_n^{s,hh}, r_n^{r,hh}\}. \quad (54)$$

Assim, sendo  $\{x_{n,m}^{s,hh}, x_{n,m}^{r,hh}\}$  uma solução viável para o problema RIP apresentado em (14) que possui a mesma taxa de dados  $R^*$  do problema RIP reformulado apresentado em (35)–(38) cuja solução ótima é  $x_{n,m}^*$ , então concluímos que  $R_{\text{inf}} \leq R^*$ .  $\square$

### 3.3 Solução Heurística para o Problema RIP

Apesar dos esforços para simplificar o problema RIP original em (14) para (35), a solução ótima para o problema RIP reformulado obtida através do algoritmo BB ainda apresenta complexidade computacional exponencial para o pior caso. Levando em consideração a inviabilidade do uso do algoritmo BB para resolver o problema RIP em

cenários realistas, apresentamos nesta seção uma heurística de baixa complexidade computacional baseada no Limitante Inferior demonstrado na Proposição 3.5. A complexidade computacional para a nossa solução proposta é mostrada no Apêndice 5 e é dada por  $\mathcal{O}(MN^2)$ .

### 3.3.1 Algoritmo MMPR-LI

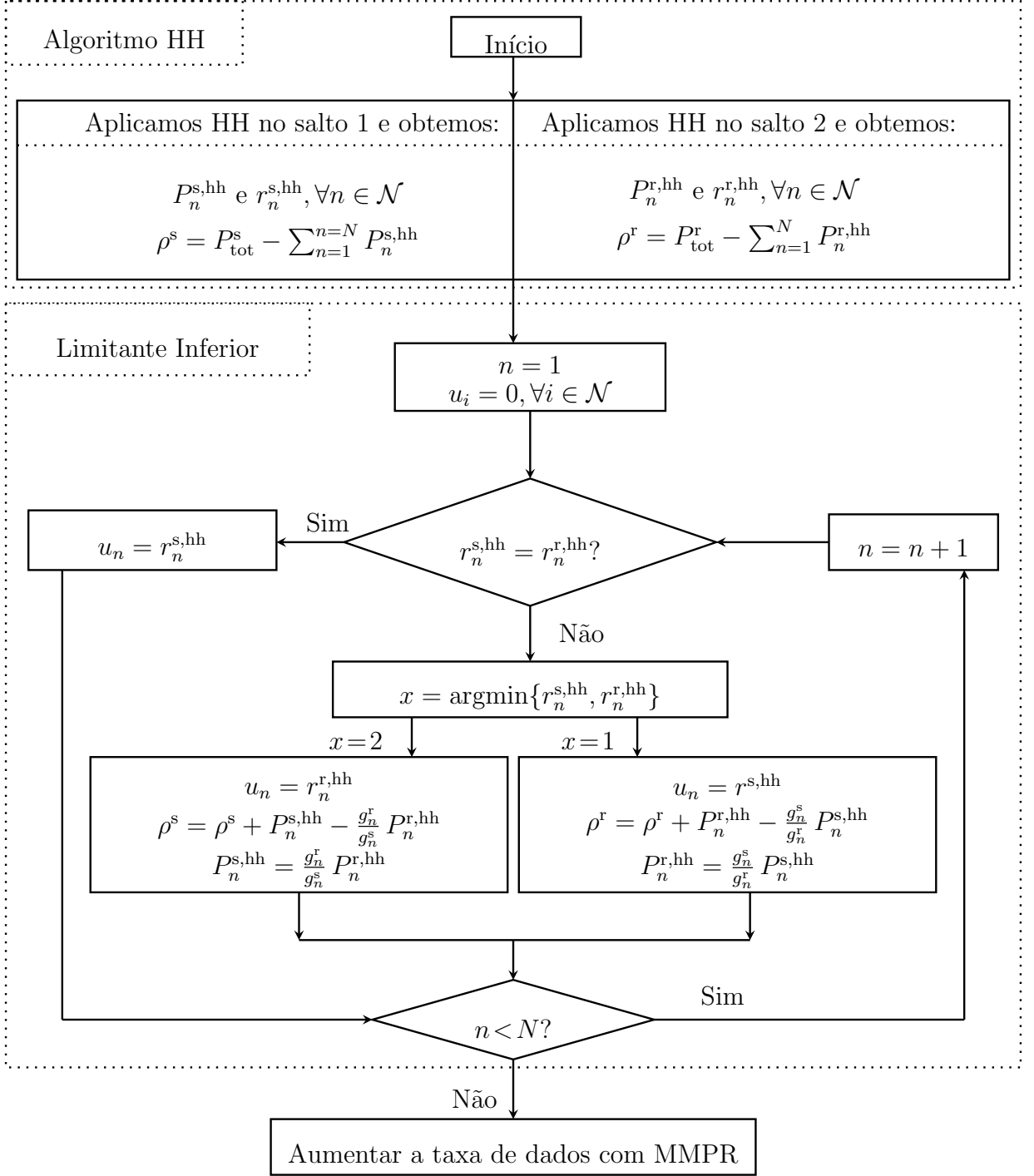
O algoritmo MMPR-LI (Maximização da Mínima Potência Residual com Limitante Inferior) é mostrado na Figura 10 e pode ser dividido em três etapas: Algoritmo HH, Limitante Inferior e MMPR (Maximização da Mínima Potência Residual).

A primeira etapa, denominada “Algoritmo HH” consiste em aplicar o algoritmo HH no salto 1 e então determinar a potência residual  $\rho^s$  na fonte, a potência  $P_n^{s,hh}$  consumida pela  $n$ -ésima subportadora e a taxa de dados  $r_n^{s,hh}$  atingida na  $n$ -ésima subportadora. Analogamente, aplicamos o algoritmo HH no salto 2 e determinamos a potência residual  $\rho^r$  no repetidor, a potência  $P_n^{r,hh}$  consumida pela  $n$ -ésima subportadora e a taxa de dados  $r_n^{r,hh}$  atingida na  $n$ -ésima subportadora.

Na segunda etapa, denominada “Limitante Inferior” calculamos o limitante inferior para o problema RIP dado pela equação (54). Nessa etapa, nós basicamente comparamos a taxa de dados atingida em cada par de subportadoras que compõem um mesmo *link* (estão emparelhadas) e então reduzimos a potência atribuída para a subportadora que possui maior taxa de modo que ambas tenham a mesma taxa  $r_n^{s,hh} = r_n^{r,hh}, \forall n \in \mathcal{N}$ . Assim, quando temos  $r_n^{s,hh} > r_n^{r,hh} \Rightarrow P_n^{s,hh} g_n^s > P_n^{r,hh} g_n^r$ , nós devemos subtrair de  $P_n^{s,hh}$  uma quantidade  $\Delta P_n^{s,hh}$  de modo que  $(P_n^{s,hh} - \Delta P_n^{s,hh}) g_n^s = P_n^{r,hh} g_n^r$  e então obtemos  $\Delta P_n^{s,hh} = P_n^{s,hh} - \frac{g_n^r}{g_n^s} P_n^{r,hh}$ . Por fim, nós “devolvemos” o excedente de potência  $\Delta P_n^{s,hh}$  para a fonte:  $\rho^s = \rho^s + \Delta P_n^{s,hh}$ . Analogamente, quando temos  $r_n^{r,hh} > r_n^{s,hh} \Rightarrow P_n^{r,hh} g_n^r \geq P_n^{s,hh} g_n^s$ , nós devemos subtrair  $P_n^{r,hh}$  por uma quantidade  $\Delta P_n^{r,hh}$  de modo que  $(P_n^{r,hh} - \Delta P_n^{r,hh}) g_n^r = P_n^{s,hh} g_n^s$  e então obtemos  $\Delta P_n^{r,hh} = P_n^{r,hh} - \frac{g_n^s}{g_n^r} P_n^{s,hh}$ . Finalmente, nós “devolvemos” o excesso de potência  $\Delta P_n^{r,hh}$  para o repetidor:  $\rho^r = \rho^r + \Delta P_n^{r,hh}$ . Note que o algoritmo permanece nesta etapa até percorrer todos os  $N$  *links* garantindo que  $r_n^{s,hh} = r_n^{r,hh}$ . Note também que na primeira etapa do algoritmo proposto, o algoritmo HH utiliza de forma quase integral a potência disponível na fonte  $P_{\text{tot}}^s$  e no repetidor  $P_{\text{tot}}^r$  para maximizar a taxa em cada salto. Portanto, a potência residual em cada salto é aproximadamente zero, ou seja,  $\rho^s \approx 0$  e  $\rho^r \approx 0$ . Dessa maneira, a segunda etapa do algoritmo proposto tem por objetivo garantir a igualdade  $r_n^{s,hh} = r_n^{r,hh}, \forall n \in \mathcal{N}$ , e então aumentar a potência residual em cada salto mantendo a mesma taxa total.

A terceira etapa do algoritmo proposto consiste em utilizar a solução apresentada no Algoritmo 1 (MMPR) para aumentar a taxa de dados a partir do limitante inferior determinado na etapa 2. A seguir, nós descrevemos as variáveis e o funcionamento do algoritmo MMPR. O algoritmo requer como entrada: a mínima SNR ( $\{SNR_m\}$ ) necessária para atingir cada nível de MCS, os ganhos de canal ( $\{g_n^s\}$ ) e ( $\{g_n^r\}$ ) dos saltos 1

Figura 10 – Fluxograma do algoritmo MMRP-LI para o problema RIP.



Fonte: Próprio Autor.

e 2, respectivamente, emparelhados de forma ordenada de acordo com a Proposição 3.3, a potência residual na fonte ( $\rho^s$ ) e no repetidor ( $\rho^r$ ) e a taxa de dados ( $\{u_n\}$ ) atingida no  $n$ -ésimo *link* obtida a partir do limitante inferior obtido na segunda etapa (“Lower Bound”).

Na 1ª linha do Algoritmo 1 nós calculamos as variáveis  $P_{m,n}^s$  e  $P_{m,n}^r$  que consistem na potência mínima necessária para cada subportadora dos saltos 1 e 2 atingir o

---

**Algoritmo 1** MMPR (Maximização da Mínima Potência Residual)
 

---

**Entrada**  $\rho^s, \rho^r, \{SNR_m\}, \{g_n^s\}, \{g_n^r\}, \{u_n\}, \forall m \in \mathcal{M} \text{ e } \forall n \in \mathcal{N}$   
**Potência necessária para atingir cada nível de MCS**  
 1:  $P_{m,n}^s = SNR_m / g_n^s \quad P_{m,n}^r = SNR_m / g_n^r, \forall m \in \mathcal{M} \text{ e } \forall n \in \mathcal{N}$   
**Potência necessária para saltar entre dois níveis de MCS consecutivos**  
 2:  $\Delta P_{1,n}^s = P_{1,n}^s \quad \Delta P_{1,n}^r = P_{1,n}^r, \forall n \in \mathcal{N}$   
 3:  $\Delta P_{m,n}^s = P_{m,n}^s - P_{m-1,n}^s, \forall m \in \{M, \dots, 2\} \text{ e } \forall n \in \mathcal{N}$   
 4:  $\Delta P_{m,n}^r = P_{m,n}^r - P_{m-1,n}^r, \forall m \in \{M, \dots, 2\} \text{ e } \forall n \in \mathcal{N}$   
 5:  $\Delta P_{M+1,n}^s = \rho^s \quad \Delta P_{M+1,n}^r = \rho^r, \forall n \in \mathcal{N}$   
**Inicialização das variáveis utilizadas no Laço Principal**  
 6:  $\epsilon_n^s = \rho^s - \Delta P_{u_n+1,n}^s, \forall n \in \mathcal{N} \text{ e } \epsilon_n^r = \rho^r - \Delta P_{u_n+1,n}^r, \forall n \in \mathcal{N}$   
 7: **Para**  $n \leftarrow 1$  **até**  $N$  **Faça**  
 8:     **Se**  $\epsilon_n^s \geq 0$  **and**  $\epsilon_n^r \geq 0$  **Então**  $\beta_n = 1$   
 9:     **Senão**  $\beta_n = 0$   
 10:     **Fim Se**  
 11: **Fim Para**  
**Laço Principal: realiza alocação de potência**  
 12: **Enquanto**  $\sum_{j=1}^N \beta_j > 0$  **Faça**  
 13:      $f_n = \beta_n \cdot \min\{\epsilon_n^s, \epsilon_n^r\}, \forall n \in \mathcal{N}$   
 14:      $i = \operatorname{argmax}\{f_1, \dots, f_N\}$   
 15:      $u_i = u_i + 1 \quad \rho^s = \epsilon_i^s \quad \rho^r = \epsilon_i^r$   
 16:      $\epsilon_n^s = \rho^s - \Delta P_{u_n+1,n}^s, \forall n \in \mathcal{N}$   
 17:      $\epsilon_n^r = \rho^r - \Delta P_{u_n+1,n}^r, \forall n \in \mathcal{N}$   
 18:     **Para**  $n \leftarrow 1$  **até**  $N$  **Faça**  
 19:         **Se**  $\epsilon_n^s \geq 0$  **e**  $\epsilon_n^r \geq 0$  **Então**  $\beta_n = 1$   
 20:         **Senão**  $\beta_n = 0$   
 21:         **Fim Se**  
 22:     **Fim Para**  
 23: **Fim Enquanto**  
 24: **Retorne**  $\frac{1}{2N} \cdot \sum_{n=1}^N u_n$

---

$m$ -ésimo nível de MCS, respectivamente. Entre as linhas 2 e 5 nós calculamos as variáveis  $\Delta P_{m,n}^s$  e  $\Delta P_{m,n}^r$  que consistem na quantidade de potência necessária para a  $n$ -ésima subportadora dos saltos 1 e 2 saltar do nível de MCS  $m - 1$  para o nível  $m$ , respectivamente. Entre as linhas 6 e 11 nós inicializamos as variáveis  $\epsilon_n^s$ ,  $\epsilon_n^r$  e  $\beta_n, \forall n \in \mathcal{N}$  que serão atualizadas iterativamente no Laço Principal (linhas 12 até 23). As variáveis  $\epsilon_n^s$  e  $\epsilon_n^r$  contêm a potência restante na fonte e no repetidor, respectivamente, caso seja incrementado por uma unidade o nível de MCS as subportadoras do  $n$ -ésimo *link*. Eventualmente, as subportadoras do  $n$ -ésimo *link* podem requisitar mais potência do que há disponível em cada salto para ganhar um nível de MCS e isso possibilitaria a existência de valores negativos para  $\epsilon_n^s$  e  $\epsilon_n^r$ . Para evitar este problema temos a variável  $\beta_n$  que recebe valor 1 se existe potência suficiente em ambos os saltos para aumentar em um nível de MCS a taxa de dados do  $n$ -ésimo *link*, caso contrário assume valor 0. Basicamente,  $\beta_n, \forall n \in \mathcal{N}$ , garante que as restrições de potência de ambos os saltos sempre sejam satisfeitas.

Entre as linhas 12 e 23 temos o Laço Principal do algoritmo MMPR que consiste em realizar AP de forma iterativa. Basicamente, na linha 13 nós aplicamos a função de custo  $\min\{\cdot, \cdot\}$  que avalia o consumo de potência da pior subportadora do  $n$ -ésimo *link* em que a multiplicação por  $\beta_n$  garante que  $f \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}$ . Na linha 14, selecionamos o melhor *link* de acordo com a função custo, isto é:  $i = \operatorname{argmax}\{f_1, \dots, f_N\}$ . Na linha 15, as subportadoras do *link* selecionado recebem um nível de MCS ( $u_i = u_i + 1$ ) bem como atualizamos as variáveis que armazenam a potência residual em cada salto.

Entre as linhas 16 e 21 nós repetimos os passos das linhas 6 a 11 que consiste em atualizar as variáveis  $\epsilon_n^s$ ,  $\epsilon_n^r$  e  $\beta_n$  para a próxima iteração. Por fim, o algoritmo MMPR termina na linha 24 com o cálculo da eficiência espectral do sistema em que o fator  $\frac{1}{2N}$  é decorrente do uso de  $N$  subportadoras por salto e 2 slots de tempo para transmitir os dados da fonte para o destino.

### 3.4 Avaliação de Desempenho

Nesta seção apresentaremos os valores que foram considerados para os parâmetros do sistema cooperativo descrito na seção 2.1 bem como os resultados que foram obtidos a partir de simulações computacionais.

#### 3.4.1 Parâmetros de Simulação

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos através do método de Monte Carlo. Seguindo o modelo de sistema proposto no Capítulo 2, nós consideramos um sistema OFDMA com  $N = 64$  subportadoras por salto, cada uma experimentando desvanecimento Rayleigh independente. Os ganhos de canal nas subportadoras dos saltos 1 e 2 podem ser modelados como variáveis aleatórias exponenciais cuja média será dada por  $\bar{g}^s = N \overline{SNR}^s / P_{\text{tot}}^s$  e  $\bar{g}^r = N \overline{SNR}^r / P_{\text{tot}}^r$ , respectivamente, em que  $\overline{SNR}^s$  e  $\overline{SNR}^r$  consistem na SNR média por cada subportadora dos saltos 1 e 2, respectivamente. Consideramos que a fonte e o repetidor possuem potência de transmissão unitária, isto é,  $P_{\text{tot}}^s = P_{\text{tot}}^r = 1$  Watts. Nós também consideramos que o mapeamento entre a taxa de dados e a SNR segue o modelo da curva de Shannon discretizada, isto é, temos  $M = 15$  possíveis níveis de MCS em que a quantidade de bits transmitidos em cada nível  $m \in \mathcal{M}$  é dada por  $r_m = \{1, 2, \dots, 15\}$  e a mínima SNR necessária para atingir o  $m$ -ésimo nível de MCS é dada por  $SNR_m = 2^{r_m} - 1$ . Cada ponto dos gráficos apresentados a seguir consiste na média de  $4 \times 10^3$  (para figuras tridimensionais) e  $1 \times 10^4$  (para figuras bidimensionais) repetições de Monte Carlo independentes.

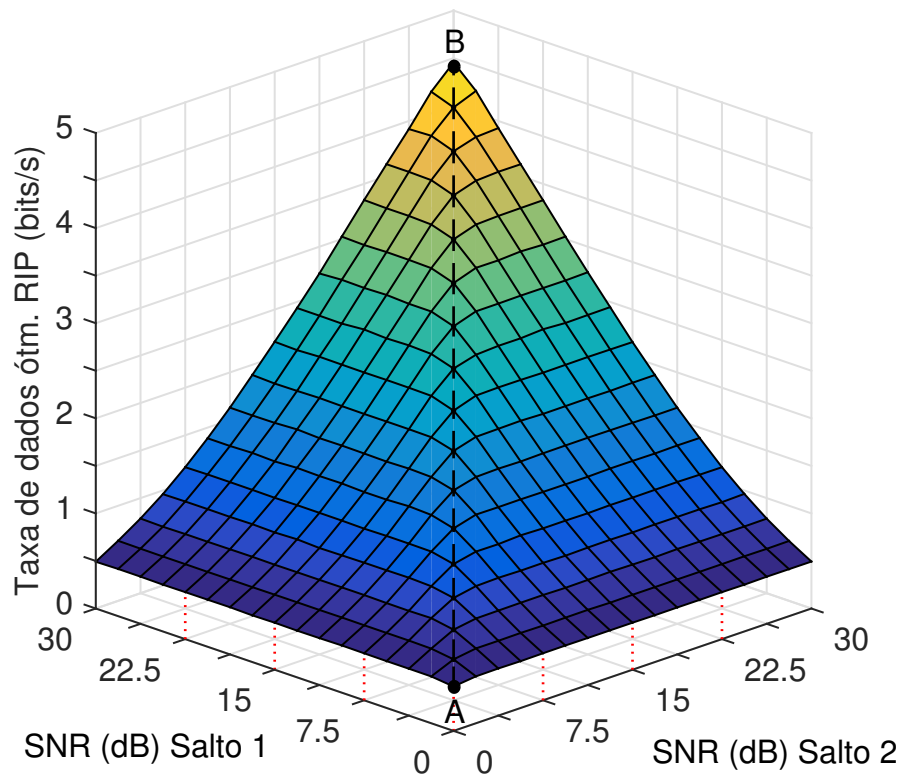
Por fim, a ordem de complexidade computacional das etapas “Algoritmo HH”, “Limitante Inferior” e “MMPR” é determinada no Apêndice 5, sendo dadas por  $\mathcal{O}(NM \log_2(N))$ ,  $\mathcal{O}(N)$  e  $\mathcal{O}(MN^2)$ , respectivamente. Por fim, a solução ótima para o problema RIP reformulado foi obtida através do algoritmo BB que foi implementado pelo conjunto de rotinas escritas em linguagem *matlab* e disponibilizadas em [43].

#### 3.4.2 Resultados

Na Figura 11 temos a taxa de dados da solução ótima do problema RIP em função da SNR média da cada salto com  $J = 1$  usuários no segundo salto. Inicialmente, se fixarmos a SNR do salto 1 (em 7.5 dB ou 22.5 dB, for exemplo) e variarmos a SNR

do salto 2 no intervalo de 0 dB a 30 dB, vemos que a taxa de dados do sistema aumenta enquanto  $\overline{SNR}^r \leq \overline{SNR}^s$  e permanece aproximadamente constante quando  $\overline{SNR}^r > \overline{SNR}^s$ . De forma equivalente, este comportamento se repete quando fixamos a SNR do salto 2 e variarmos a SNR do salto 1. Esta propriedade é decorrente da restrição individual de potência na fonte e no repetidor em conjunto com o operador  $\min\{\cdot, \cdot\}$  na função objetivo do problema original (14) que é uma consequência do emprego do protocolo DF no repetidor. Baseado nesse raciocínio, podemos concluir que a trajetória AB mostrada na Figura 11 consiste em um eixo que divide a superfície do gráfico em duas regiões simétricas. Devemos notar que ao longo do eixo de simetria AB as SNRs médias de ambos os saltos são iguais ( $\overline{SNR}^r = \overline{SNR}^s$ ) e isso implica que a potência da fonte  $P_{\text{tot}}^s$  e do repetidor  $P_{\text{tot}}^r$  são utilizadas quase integralmente para maximizar a taxa de dados do sistema. Além disso, sempre que há desbalanceamento entre as SNRs médias de ambos os saltos ( $\overline{SNR}^r \neq \overline{SNR}^s$ ) o uso da potência em um dos nós será feito de forma ineficiente, isto é, é possível manter a mesma taxa de dados no sistema ao reduzir a potencia total disponível no nó de maior SNR de modo que ( $\overline{SNR}^r = \overline{SNR}^s$ ). Desse raciocínio, podemos concluir que o eixo de simetria AB consiste na região ideal em que o sistema deve operar levando ao completo aproveitamento dos recursos (potência) em ambos os saltos. Conforme será mostrado nos próximos resultados, a posição do eixo de

Figura 11 – Taxa de dados ótima para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com  $J = 1$ .



simetria AB é determinada a partir do número de usuários existentes no salto 2. Baseado

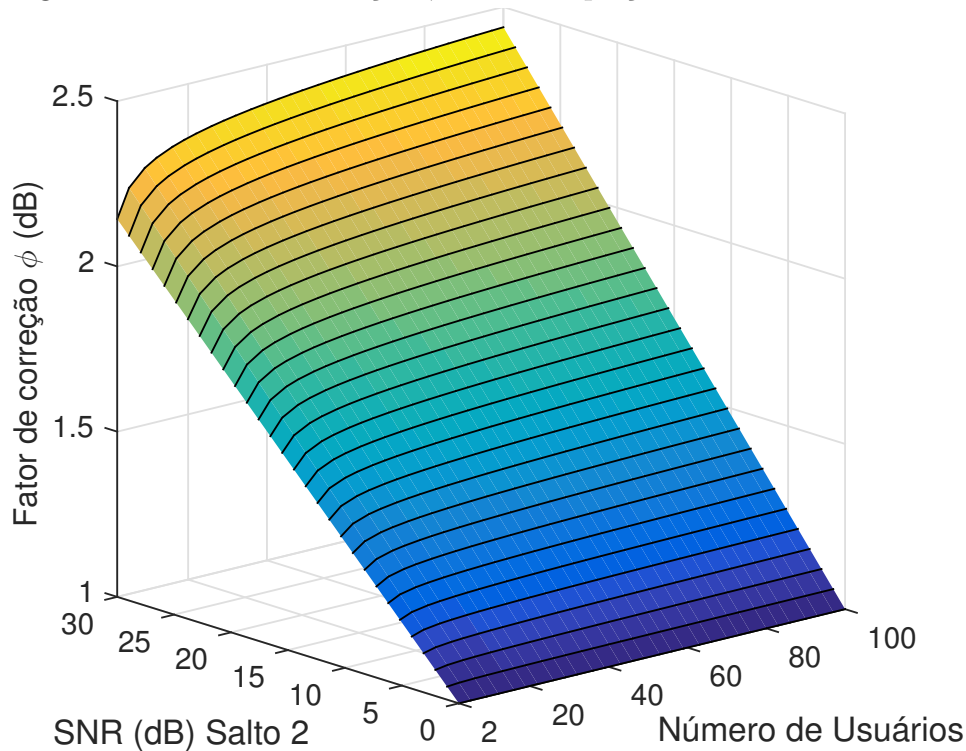


nisso, nós deduzimos no Apêndice 5 duas equações que relacionam a SNR média de ambos os saltos com o número de usuários  $J$  no salto 2 de modo a estimar a posição do eixo de simetria AB. A primeira equação, denominada ES-1 (Estimativa de Simetria N°1), é determinada de forma analítica mas apresenta um pequeno erro em sua estimativa para  $J \geq 1$ . Já a segunda equação, denominada ES-2 (Estimativa de Simetria N°2), é fruto de uma análise empírica e consiste em adicionar um fator de correção ( $\phi$ ) a ES-1 de modo a melhorar a estimativa para a posição do eixo de simetria AB. Ambas as equações são mostradas abaixo:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\text{dB}}^s &= \bar{\gamma}_{\text{dB}}^r + H(J)_{\text{dB}}, \text{ ES-1 ,} \\ \bar{\gamma}_{\text{dB}}^s &= \bar{\gamma}_{\text{dB}}^r + H(J)_{\text{dB}} + \phi, \text{ ES-2 ,}\end{aligned}$$

em que  $\bar{\gamma}_{\text{dB}}^s$  e  $\bar{\gamma}_{\text{dB}}^r$  consistem na SNR média estatística em decibéis dos saltos 1 e 2, respectivamente.  $H(J)_{\text{dB}}$  é a série harmônica em decibéis até o  $J$ -ésimo elemento sendo dada por  $H(J)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \sum_{j=1}^J j^{-1} \right)$  e  $\phi = \left[ \frac{\bar{\gamma}_{\text{dB}}^r}{28 - H(J)_{\text{dB}}} + 1 \right] \cdot u(J - 1)$  em que  $u(t) = 1$  se  $t > 0$ , caso contrário temos  $u(t) = 0$ . O fator de correção  $\phi$  é mostrado na Figura 12

Figura 12 – Fator de correção  $\phi$  sobre a equação ES-1.

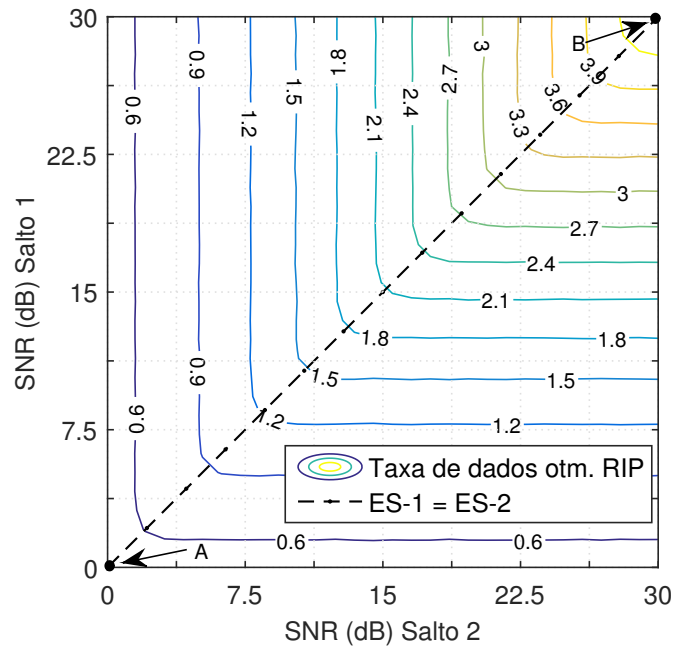


Fonte: Próprio Autor.

onde vemos sua variação em função da SNR média do salto 2 e do número de usuários no sistema. Note que o fator  $\phi$  proposto é mais suscetível às variações da SNR no salto 2 do que as variações do número de usuários no sistema. Além disso, mesmo para altas SNRs no segundo salto (30 dB) e um elevado número de usuários ( $J = 100$ ), o fator  $\phi$  é inferior a 2,5 dB. Devemos também notar que os ganhos de canal em cada salto são

variáveis aleatórias contínuas, entretanto, após realizarmos a alocação de potência a SNR em cada subportadora do sistema se torna uma variável aleatória discreta. Porém, por questão de simplicidade, a dedução da equação ES-1 feita no Apêndice 5 considera que a SNR média em cada salto é uma variável aleatória contínua, sendo essa consideração responsável pela existência do erro na estimativa feita pela equação ES-1.

Figura 13 – Linhas de contorno da Figura 11 destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2.

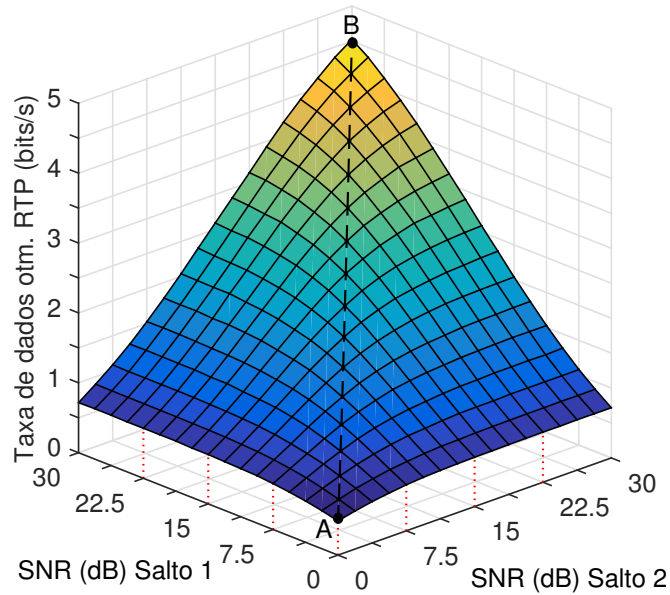


Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 13 temos as linhas de contorno da Figura 11 em que é possível observar as estimativas feitas pelas equações ES-1 e ES-2. Neste caso, as duas equações apresentam resultados idênticos pois o fator de correção da equação ES-2 é nulo sempre que  $J = 1$ . Além disso, podemos interpretar de forma mais precisa o significado do eixo de simetria AB: ele determina qual deve ser a mínima SNR (menor quantidade de recursos) necessária em cada salto do modo que cada linha de contorno (taxa de dados) seja atingida.

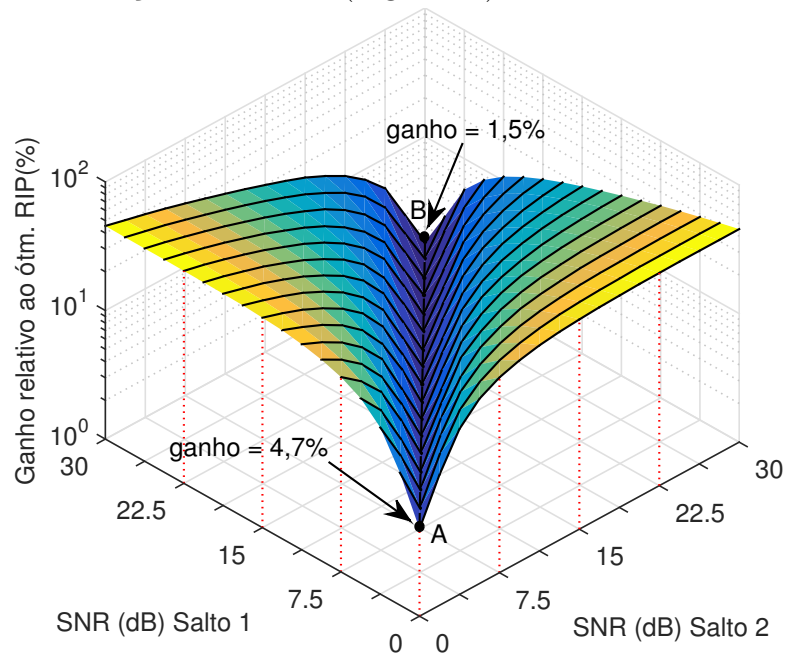
Na Figura 14 temos a taxa de dados ótima do problema RTP em função da SNR média de cada salto considerando  $J = 1$  usuário. Inicialmente, vemos que se fixarmos a SNR do salto 1 (em 7.5 dB ou 22.5 dB, por exemplo) e então variarmos a SNR do salto 2 no intervalo de 0 dB a 30 dB vemos que a taxa de dados do sistema sempre aumenta. Este resultado pode ser interpretado considerando o raciocínio mostrado a seguir. No problema RIP, quando as SNRs de ambos os saltos ficam desbalanceadas ( $\overline{SNR}^t \neq \overline{SNR}^s$ ), o salto de pior qualidade utiliza por completo toda a potência nele disponível e o salto de melhor qualidade fica com um excedente de potência inutilizada (isso será mostrado nos próximos resultados). Dessa forma, quando consideramos o problema RTP, uma parte da potência excedente no salto de melhor qualidade do problema RIP pode ser redistribuída para o

Figura 14 – Taxa de dados ótima para o problema RTP em função da SNR média de cada salto com  $J = 1$ .



Fonte: Próprio Autor.

Figura 15 – Ganho relativo percentual da solução ótima RTP (Figura 14) sobre a solução ótima RIP (Figura 11).



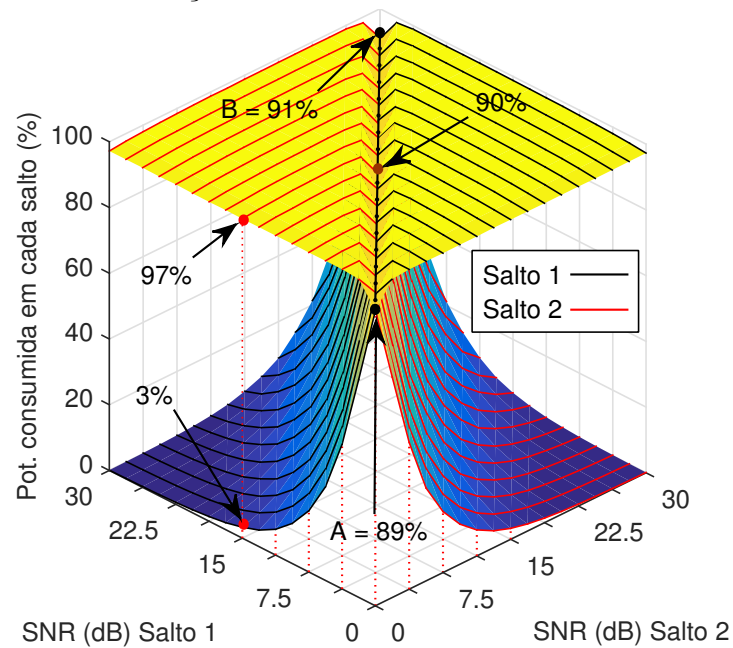
Fonte: Próprio Autor.

salto de pior qualidade de modo que haja aumento na taxa da dados do sistema.

Na figura 15 temos o ganho relativo percentual da solução ótima RTP (Figura 14) sobre a solução ótima RIP (Figura 11). Primeiramente, vemos que o ganho é mínimo ao longo do eixo de simetria AB e varia de 1,5% a 4,7%. Isso ocorre devido ao fato de que ao longo do eixo de simetria AB no problema RTP, as subportadoras de cada salto utilizam (aproximadamente) somente a potência disponível no seu respectivo salto

e portanto tendem a respeitar a restrição individual de potência do problema RIP. Note que, quando as SNRs de ambos os saltos ficam desbalanceadas o ganho do do problema RTP aumenta drasticamente sobre o problema RIP. Novamente, este comportamento é causado pela restrição total de potência em que o salto de melhor qualidade “empresta” sua potência excedente para o salto de pior qualidade de modo que a taxa do sistema seja aumentada, algo que não ocorre no problema RIP.

Figura 16 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RIP em função da SNR média em cada salto com  $J = 1$ .

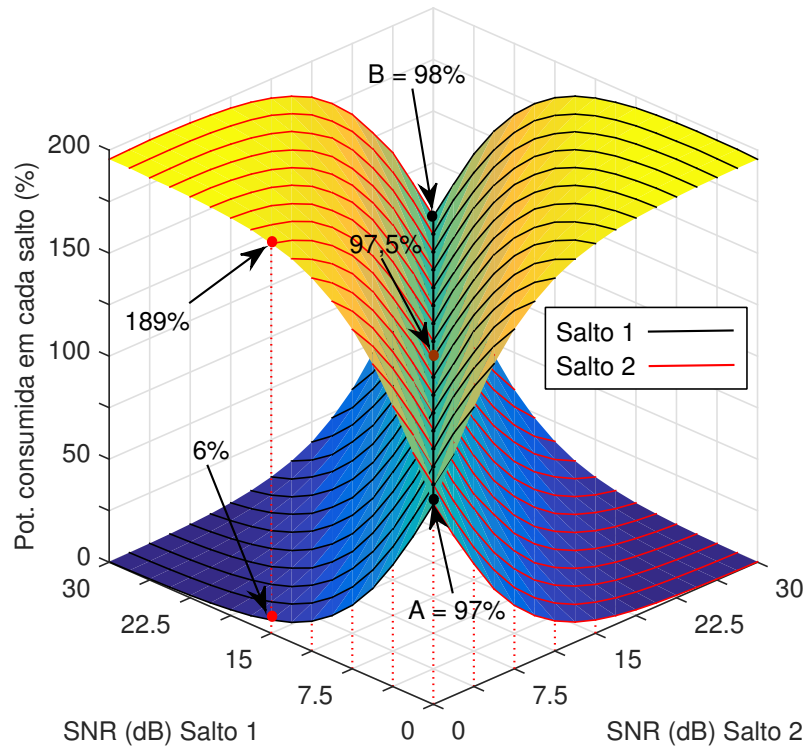


Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 16, temos a porcentagem da potência consumida em cada salto para a solução ótima do problema RIP em função da SNR média com  $J = 1$  usuário. Inicialmente, se fixarmos a SNR do salto 1 (em 15 dB, por exemplo) e então variamos a SNR do salto 2 no intervalo de 0 dB até 30 dB, vemos que o consumo de potência do salto 2 (linhas vermelhas) é de aproximadamente 97% e decai para 90% quando a SNR de ambos os saltos se tornam iguais. A partir desse momento, o consumo de potência no salto 2 decai rapidamente à medida que a SNR nesse salto tende para 30 dB. Nesta mesma situação, vemos que o consumo inicial de potência no salto 1 (linhas pretas) é de apenas de 3%, aumentando rapidamente para 90% quando a SNR de ambos os saltos se tornam iguais (eixo de simetria AB) e atinge 97% quando a SNR do salto 2 atinge 30 dB. Dessa maneira, reforçamos conclusões anteriores ao mostrar que se o sistema operar fora do eixo de simetria AB o salto de maior SNR terá um consumo mínimo de potência ( $\leq 3\%$ ) enquanto o salto de pior SNR usará a potência disponível de forma quase integral ( $\geq 97\%$ ). Note também que ao longo do eixo de simetria AB a potência consumida em cada salto varia no intervalo de 89% (ambos os saltos em baixas SNRs) a 91% (ambos os saltos em altas SNRs) fornecendo uma potência de guarda de aproximadamente de 10%

para ambos os saltos. Note que a Figura 16 reforça nossas conclusões anteriores sobre a Figura 11 em que explicamos a saturação na taxa de dados e no uso ineficiente da potência quando o sistema não opera sobre o eixo de simetria AB.

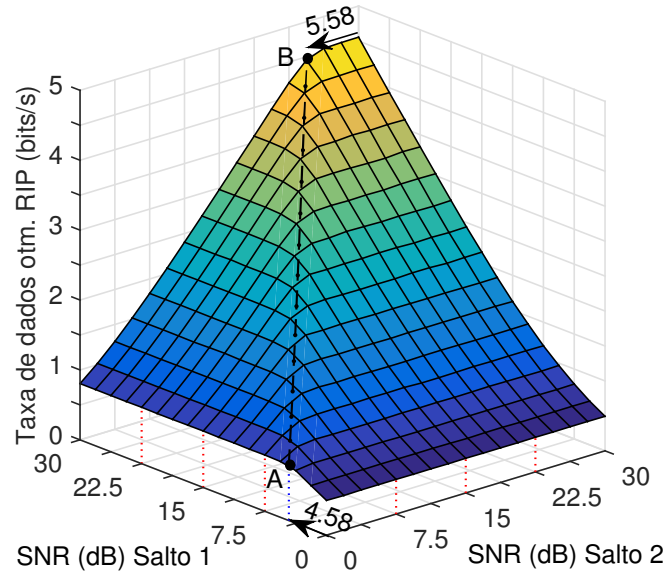
Figura 17 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RTP em função da SNR média em cada salto com  $J = 1$ .



Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 17, temos a porcentagem da potência consumida em cada salto para a solução ótima do problema RTP em função da SNR média com  $J = 1$  usuário. Note que a porcentagem nesse gráfico foi calculada com relação a 1 Watt que é a potência disponível em cada salto. Assim, se fixarmos a SNR do salto 1 (em 15 dB, por exemplo) e variarmos a SNR do salto 2 no intervalo de 0 dB até 30 dB, vemos que a potência inicialmente consumida no salto 2 (linhas vermelhas) é de 189%, decaindo para 97,5% quando a SNR nesse salto aumenta para 15 dB (eixo de simetria AB) e atinge valores mínimos ( $\approx 6\%$ ) quando a SNR do salto 2 atinge 30 dB. Nessa mesma situação, vemos que o consumo inicial da potência no salto 1 é de 6%, aumentando para 97% quando as SNRs de ambos os saltos se igualam e atinge um valor máximo ( $\approx 189\%$ ) quando a SNR do salto 2 atinge 30 dB. Note que, quando o sistema opera longe do eixo de simetria ( $\overline{SNR}^s = 15$  dB e  $\overline{SNR}^r = 0$  dB, por exemplo) o salto de melhor SNR tem um consumo mínimo de potência ( $\approx 6\%$ ) enquanto o salto de pior de SNR consome de forma quase integral toda a potência restante no sistema, isto é, consome aproximadamente 189% dos 196% disponíveis. Dessa forma, vemos que problema RTP consome quase integralmente toda a potência disponível no sistema mesmo que ele opere longe do eixo de simetria AB. Novamente, a Figura 17 reforça nossas conclusões anteriores sobre a Figura 14 em que explicamos o aumento na

Figura 18 – (a) Taxa de dados ótima para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com  $J = 5$ .

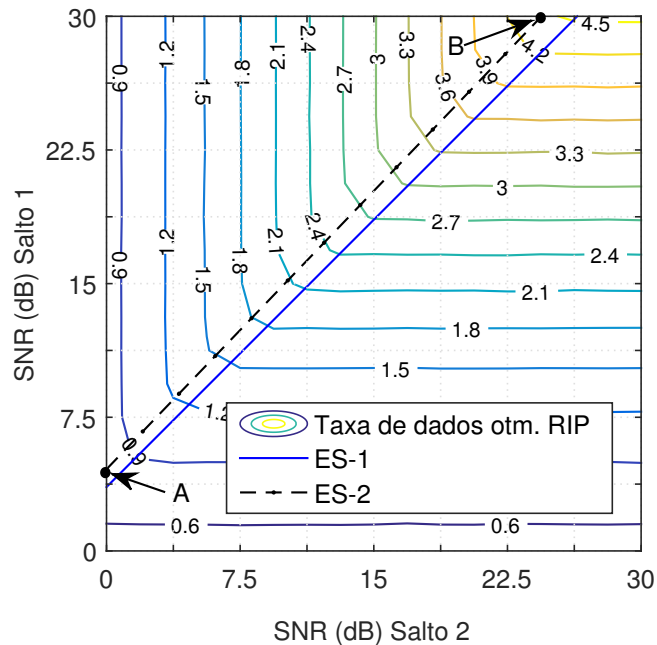


Fonte: Próprio Autor.

taxa de dados do problema RTP quando o sistema opera fora do eixo de simetria AB e sobre a Figura 15 em que explicamos o comportamento do ganho relativo percentual do problema RTP sobre o RIP.

Na Figura 18, temos a taxa de dados da solução ótima do problema RIP em função da SNR média de cada salto com  $J = 5$  usuários. Inicialmente, vemos que

Figura 19 – Linhas de contorno da Figura 18 destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2.

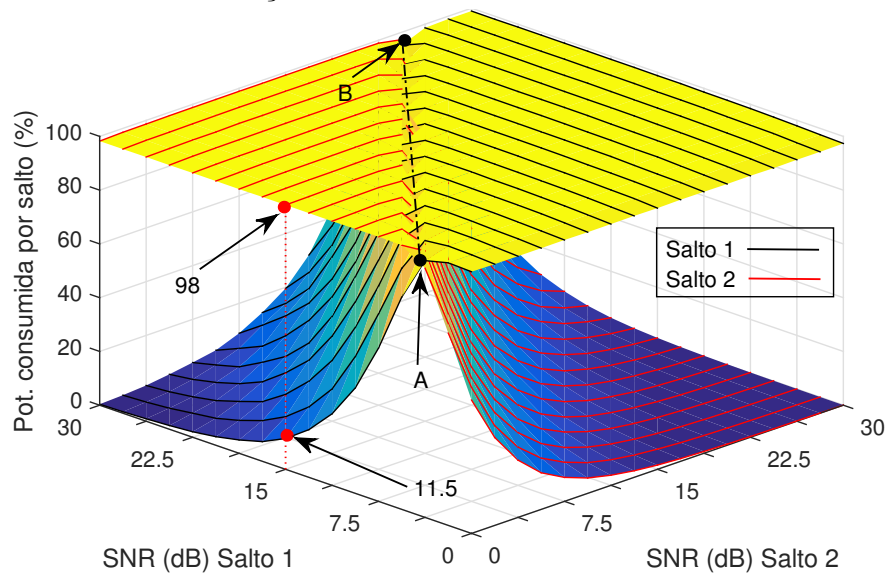


Fonte: Próprio Autor.

o comportamento do gráfico nessa figura é similar ao resultado apresentado na Figura

11 em que foi considerado  $J = 1$  usuários. A diferença fundamental entre esses dois resultados consiste no deslocamento do eixo de simetria AB no sentido do salto 1. Este comportamento pode ser entendido ao perceber que na Proposição 3.1 selecionamos os melhores ganhos de canal no salto 2 e isso causa um aumento da SNR média nesse salto, isto é, o aumento do número de usuários no salto 2 gera diversidade para o sistema. Note que na Figura 18, quando a SNR média do salto 2 é de 0 dB, a mínima SNR requisitada no salto 1 para atingir o eixo de simetria AB é de 4,58 dB. Além disso, quando a SNR do salto 1 varia no intervalo de 0 dB a 4.58 dB a taxa de dados do sistema sempre aumenta sendo indiferente as variações da SNR do salto 2 no intervalo de 0 dB a 30 dB. Esse resultado também mostra que o ganho de diversidade provido pelo aumento do número dos usuários no salto 2 torna o sistema mais suscetível as variações de SNR do salto 1, isto é, há uma maior dependência da taxa de dados total atingida com relação as variações na SNR média do salto 1 do que as variações na SNR média do salto 2. Na Figura 19 temos as linhas de contorno do gráfico da Figura 18 em que é possível observar as estimativas feitas pelas equações ES-1 e ES-2. Nessa figura, vemos que a equação ES-1 faz uma estimativa razoável para a posição do eixo de simetria AB, porém a existência do fator  $\phi$  na equação ES-2 torna a estimativa mais precisa.

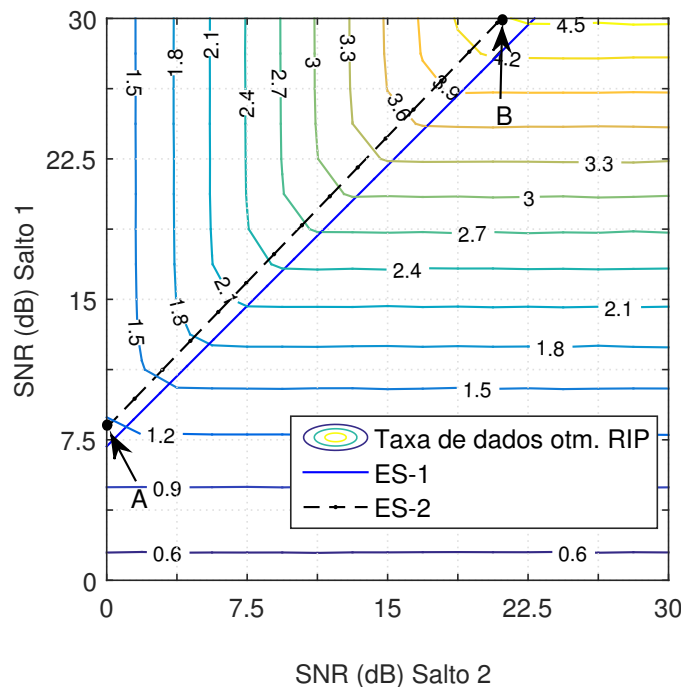
Figura 20 – Porcentagem da potência consumida em cada salto para o problema RIP em função da SNR média de cada salto com  $J = 5$ .



Na Figura 20 temos a porcentagem da potência consumida em cada salto para a solução ótima do problema RIP em função da SNR média por salto em que consideramos  $J = 5$  usuários. Inicialmente, vemos que o comportamento do gráfico nessa figura é similar ao resultado apresentado na Figura 16 onde consideramos  $J = 1$  usuários no salto 2. Portanto, o diferencial no resultado da Figura 20 consiste no deslocamento do eixo de simetria AB (estimado pela equação ES-2) no sentido do salto 1. Além disso, se fixarmos

a SNR do salto 1 (em 15 dB, por exemplo) e variamos a SNR do salto 2 no intervalo de 0 dB a 30 dB, vemos que o consumo de potência no salto 2 é de 98% (quando  $\overline{SNR}^r = 0$  dB) e rapidamente atinge o eixo de simetria de AB. A partir deste ponto, o consumo de potência nesse salto decai rapidamente para valores mínimos e medida que sua SNR aumenta para 30 dB. Nessa mesma situação, vemos que o consumo de potência inicial no salto 1 (linhas pretas) é de 11,5% (contra 3% na Figura 16) e aumenta rapidamente até atingir o eixo de simetria. A partir desse ponto o consumo de potência no salto 1 tende a ser máximo quando a SNR do salto 2 aumenta para 30 dB. Outro aspecto a ser destacado na Figura 20 é que no lado direito do eixo de simetria AB o consumo de potência no salto 1 é máximo. Mesmo no lado esquerdo do eixo de simetria o consumo de potência nesse salto aumenta rapidamente quando comparado com a Figura 16. Note que o comportamento do consumo da potência para o salto 2 é oposto, isto é, o consumo de potência nesse salto tende a ser baixo do lado direito do eixo de simetria AB e apenas numa pequena região do lado esquerdo do eixo de simetria AB o consumo de potência nesse salto é máximo. Este resultado confirma nossas conclusões anteriores sobre a Figura 18 quando apresentamos o ganho de diversidade causado pelo aumento do número de usuários no salto 2 bem como a menor dependência que a taxa de dados do sistema passa a ter com relação a variação da SNR no salto 2.

Figura 21 – Linhas de contorno para a taxa de dados da solução ótima RIP destacando a região de simetria e as estimativas ES-1 e ES-2 para  $J = 100$ .



Fonte: Próprio Autor.

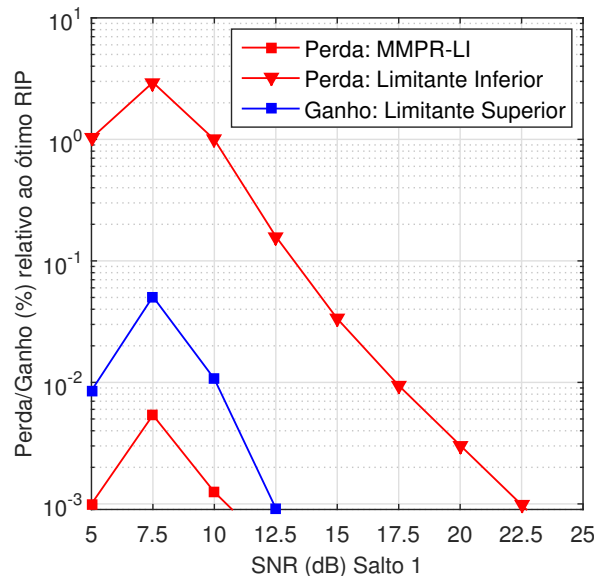
Na Figura 21 mostramos as linhas de contorno da taxa de dados em *bits/s* da solução ótima do problema RIP em função da SNR média de cada salto considerando



$J = 100$  usuários no sistema. Nessa figura também mostramos as equações ES-1 e ES-2 e suas respectivas estimativas para a posição do eixo de simetria AB. Novamente, vemos que a equação ES-1 tem um resultado satisfatório mesmo para um elevado valor de  $J$ , porém a estimativa feita pela equação ES-2 apresenta uma melhor resultado.

Todos os resultados até agora apresentados descreveram propriedades dos problemas RIP e RTP para diferentes quantidade de usuários no salto 2. Os resultados a seguir avaliam o ganho/perda relativo percentual da taxa de dados da solução ótima do problema RIP com os limitantes superior/inferior e também com o algoritmo MMPR-LI para diferentes quantidades de usuários no salto 2.

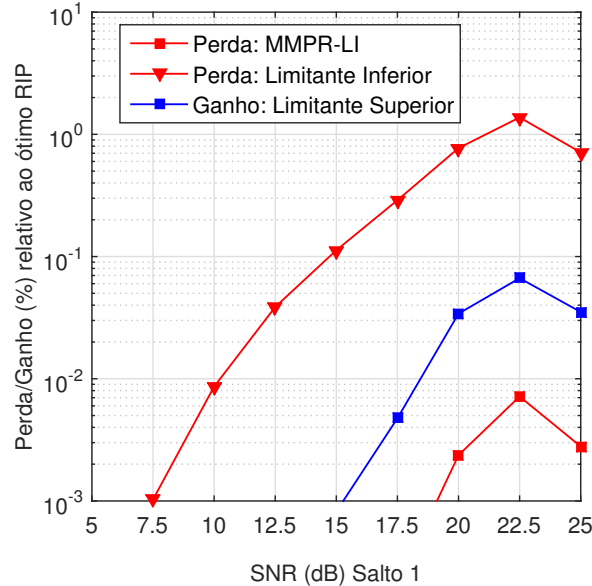
Figura 22 – Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP em função da SNR média do salto 1. Consideramos  $J = 1$  e SNR do salto 2 foi fixada em 7,5 dB



Fonte: Próprio Autor.

Nas Figuras 22 e 23 a SNR média do salto 2 foi fixada em 7,5 dB e 22,5 dB, respectivamente, e a SNR do salto 1 variou no intervalo de 5 dB até 25 dB em que consideramos  $J = 1$  usuários no salto 2. Nessas duas figuras podemos ver que o erro é máximo para o algoritmo MMPR-LI e para o limitante inferior quando a SNR de ambos os saltos são iguais e decai rapidamente quando as SNRs ficam desbalanceadas. Para entender este comportamento devemos analisar a Figura 11 quando fixamos  $\overline{SNR}^r$  em 7,5 dB (ou 22,5 dB) e então variamos  $\overline{SNR}^s$  no intervalo de 0 dB até 30 dB. Assim, vemos que a taxa de dados da solução ótima RIP aumenta enquanto  $\overline{SNR}^s < \overline{SNR}^r$  e torna-se aproximadamente constante quando  $\overline{SNR}^s \geq \overline{SNR}^r$ , isto é, enquanto  $\overline{SNR}^s < \overline{SNR}^r$  a solução ótima para o problema RIP obtém ganho substancial (erro crescente) em relação ao algoritmo MMPR-LI e ao limitante inferior e quando  $\overline{SNR}^s \geq \overline{SNR}^r$ , o algoritmo MMPR-LI e o limitante inferior se aproximam rapidamente (erro decrescente) da solução ótima RIP uma vez que a solução ótima para o problema RIP não consegue mais obter

Figura 23 – Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP em função da SNR média do salto 2. Consideramos  $J = 1$  e a SNR do salto 2 foi fixada em 22,5 dB.

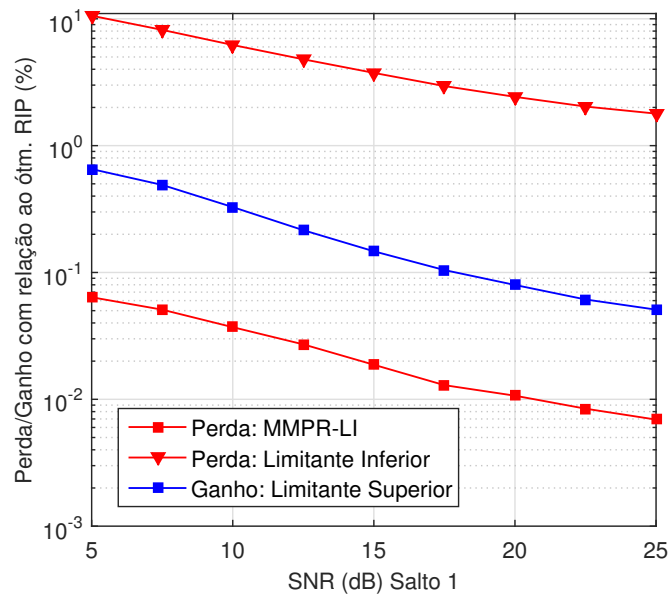


Fonte: Próprio Autor.

ganhos em taxa nessa situação. Esse raciocínio pode ser validado (mais uma vez) ao analisar o gráfico da Figura 16: veja que, quando o sistema opera fora do eixo de simetria AB o salto de pior qualidade consome quase toda potência nele disponível enquanto o salto de melhor qualidade quase não consome potência, isto é, quando o sistema opera fora do eixo de simetria AB, somente o salto de pior qualidade exige um gerenciamento preciso na alocação da potência para que a taxa do sistema seja maximizada. Portanto, quando o sistema opera ao longo do eixo de simetria AB será preciso realizar o perfeito gerenciamento da potência em ambos os saltos para que a taxa de dados seja maximizada e será nesse ponto em que soluções não ótimas (algoritmo MPPR-LI e limitantes inferior) tendem a apresentar maior erro. Além disso, veja que o ganho do limitante superior é máximo ao longo do eixo de simetria AB e decai rapidamente quando as SNRs de ambos os saltos ficam desbalanceadas. A partir disso, vemos que o limitante superior/inferior, a solução ótima para o problema RIP e o algoritmo MPPR-LI convergem para o mesmo resultado quando o sistema não opera sobre o eixo de simetria AB.

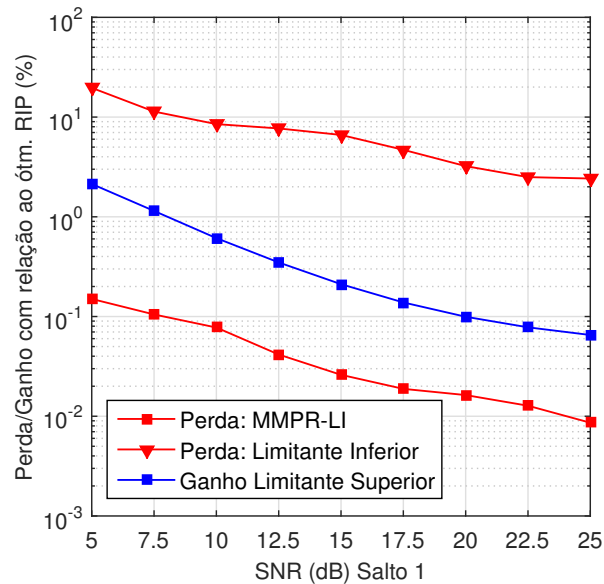
Nas Figuras 24 e 25 nós variamos conjuntamente as SNRs de ambos os saltos sobre o eixo de simetria AB de acordo com a equação ES-2 para  $J=5$  e  $J=100$  usuários no segundo salto, respectivamente. Com isso, teremos a ocorrência do máximo erro para o limitante inferior e também para o algoritmo MPPR-LI. Além disso, o ganho do limitante superior nessa situação também será máximo. Vemos que em ambas as figuras as curvas decaem a medida que a SNR aumenta. Isso ocorre devido a melhora na qualidade dos ganhos de canal nas subportadoras de ambos os saltos em que soluções menos inte-

Figura 24 – Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP considerando  $J = 5$ .



Fonte: Próprio Autor.

Figura 25 – Perda/Ganho para o algoritmo MMPR-LI e os limitantes (superior/inferior) com relação a solução ótima RIP considerando  $J = 100$ .



Fonte: Próprio Autor.

ligentes (tal como o limitante inferior) apresentam bons resultados. Note também que a solução MMPR-LI apresenta um erro significativamente menor que o limitante inferior principalmente quando o número de usuários no sistema é elevado (Figura 25). Dessa maneira, podemos concluir que o algoritmo MMPR é o maior responsável pelo excelente desempenho da solução MMPR-LI ao gerenciar de forma precisa os recursos de potência em ambos os saltos, apresentando erro máximo inferior a 0,2% (Figura 25).

## 4 PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE USUÁRIOS SATISFEITOS

Neste capítulo formularemos, apresentaremos a solução ótima e também uma solução subótima para o problema de maximização do número de usuários satisfeitos no sistema descrito na Figura 5 considerando RIP. Na seção 4.1 apresentaremos a formulação do problema. Na seção 4.2 apresentaremos a solução ótima bem como algumas propriedades do problema em estudo. Nas seções 4.3 e 4.4 apresentaremos a reformulação do problema de modo a reduzir a complexidade da solução ótima e uma solução heurística de baixa complexidade computacional, respectivamente.

### 4.1 Formulação do Problema

O problema de maximização do número de usuários satisfeitos consiste em maximizar a quantidade de usuários que têm seu QoS atingido, isto é, maximizar o número de usuários que atingem sua taxa requisitada. Entretanto, as variáveis  $y_{n,m}^s$  e  $y_{n,q,j,m}^r$  descritas no Capítulo 2 não são suficientes para modelar as condições de QoS de cada usuário no sistema pois elas não consideram o conceito de satisfação. Dessa forma, a modelagem do QoS requer a definição de uma nova variável  $x_j, \forall j \in \mathcal{J}$ , que é definida da seguinte forma:  $x_j$  assume valor 1 se o  $j$ -ésimo usuário estiver satisfeitos, caso contrário assume valor 0.

Considerando a definição da nova variável  $x_j, \forall j \in \mathcal{J}$ , em conjunto com as definições feitas na Tabela 1, podemos obter uma restrição que modela o QoS de cada usuário  $j$  conforme a seguir:

$$\sum_{n=1}^N \min \left\{ \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s r_m, \sum_{q=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r r_m \right\} \geq x_j t_j, \forall j \in \mathcal{J}, \quad (55)$$

em que o lado esquerdo da desigualdade na equação (55) representa a taxa de dados transmitida ao  $j$ -ésimo usuário, isto é, a taxa dados do  $j$ -ésimo usuário corresponde a soma das taxas dos *links* a ele atribuído. O lado direito da desigualdade determina se as condições de QoS foram garantidas para cada usuário  $j$ , isto é, se a taxa transmitida ao  $j$ -ésimo usuário for maior ou igual a  $t_j$  então teremos  $x_j = 1$  (usuário satisfeito), caso contrário  $x_j = 0$ . A partir disso, podemos formular o problema de otimização que objetiva maximizar o número de usuários satisfeitos envolvendo conjuntamente o ES, o AS e AP

com RIP conforme a seguir:

$$\min_{\{y_{n,m}^s, y_{n,q,j,m}^r, x_j\}} - \sum_{j=1}^J x_j \quad (56)$$

Sujeito a:

$$\sum_{m=1}^M y_{n,m}^s \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (57)$$

$$\sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (58)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r \leq 1, \quad \forall q \in \mathcal{N}, \quad (59)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s P_{n,m}^s \leq P_{\text{tot}}^s, \quad (60)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r P_{q,j,m}^r \leq P_{\text{tot}}^r, \quad (61)$$

$$- \sum_{n=1}^N \min \left\{ \sum_{m=1}^M y_{n,m}^s r_m, \sum_{q=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m}^r r_m \right\} \leq -x_j t_j, \quad \forall j. \quad (62)$$

Devemos observar que as restrições (57) até (61) são idênticas as restrições do problema de maximização da taxa de dados considerando RIP apresentado no Capítulo 3. As principais mudanças neste novo problema consistem na função objetivo (56) que determina o número de usuários satisfeitos e a restrição (62) que modela o QoS de cada usuário. Além disso, o problema é inteiro, combinatorial e não linear devido a restrição que modela o QoS.

## 4.2 Solução Ótima

Nesta seção iremos apresentar, além da solução ótima, duas proposições que nos ajudarão na obtenção da solução ótima do problema (56)–(62) bem como no desenvolvimento de heurísticas que serão mostradas na seção seguinte.

### 4.2.1 Emparelhamento de Subportadoras com Mesma Taxa de Dados em Cada Salto

Aqui, mostraremos que existe ao menos uma solução ótima para o problema (56)–(62) tal que as subportadoras que fazem parte de um mesmo *link* (estão emparelhadas) na restrição (62) possuem mesma taxa de dados. Este resultado será de bastante utilidade pois nos permitirá linearizar o problema em estudo bem como remover a variável  $y_{n,m}^s$ .

Dessa forma, considere a seguinte definição: seja  $B_j$  a taxa de dados transmitida ao  $j$ -ésimo usuário e  $r_{q_n,j}^r$  consiste na taxa de dados transmitida na  $q_n$ -ésima subportadora do salto 2 que foi atribuída ao  $j$ -ésimo usuário e emparelhada com a  $n$ -ésima subportadora do salto 1. Feito essas definições, considere a seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** *Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as soluções ótimas para o problema (56)–(62), então existe  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\} \in \mathcal{S}$  tal que  $r_n^{s*} = r_{q_n}^{r*}, \forall n \in \mathcal{N}$ .*

*Demonstração.* Para tal fim, usaremos um raciocínio análogo ao que foi na Proposição 3.2 para o problema de maximização da taxa de dados estudado no capítulo anterior. Primeiramente, devemos notar que o termo do lado esquerdo da restrição (62) representa a taxa de dados atingida no  $j$ -ésimo usuário que é dada pela soma das taxas de todos os *links* a ele atribuídos. Além disso, os elementos dentro do operador  $\min\{\cdot, \cdot\}$  representam a taxa de dados em cada subportadora que compõem o  $n$ -ésimo *link*. Assim, seja  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  uma solução ótima que não está de acordo com a proposição acima (isto é:  $\exists n \in \mathcal{N}$  tal que  $r_n^{s'} \neq r_{q_n}^{r'}$ ) e seja  $B_j'$  a taxa de dados ótima transmitida ao  $j$ -ésimo usuário e obtida a partir de  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ , então podemos escrever:

$$B_j' = \sum_{n=1}^N \min \left\{ \overbrace{\sum_{m=1}^M f(P_{n,m}^s g_n^s) y_{n,m}^{s'}}^{r_n^{s'}}, \overbrace{\sum_{q=1}^N \sum_{m=1}^M f(P_{q,j,m}^r g_{q,j}^r) y_{n,q,j,m}^{r'}}^{r_{q_n}^{r'}} \right\}. \quad (63)$$

Assim, vamos construir uma nova solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  que difere de  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  exclusivamente no *link* de menor índice  $n$  de modo que na nova solução proposta tenhamos  $r_n^{s*} = r_{q_n}^{r*}$ , isto é, a mudança proposta para a nova solução consiste em reduzir a potência alocada para a subportadora que possui maior taxa de modo que ambas tenham mesma taxa/SNR.

Note que a nova solução proposta não viola as restrições (57), (58) e (59), pois mantemos o mesmo AS e ES, mudando apenas a AP. Além disso, as restrições (60) e (61) também não serão violadas uma vez que apenas reduzimos a potência atribuída para a subportadora de maior taxa no  $n$ -ésimo *link*. Por fim, devemos notar que para todos os usuários do sistema a taxa de dados  $B_j^*$  da solução proposta é igual a taxa apresentada na equação (63) da solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ , o que nos permite concluir que  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  também é ótima.

Dessa maneira, mostramos que dada uma solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ , podemos construir outra solução ótima  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  a partir de  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  que garante a igualdade de taxa no *link* de menor índice  $n$  em que as taxas eram desiguais. Dessa forma, podemos aplicar o raciocínio apresentado nesta proposição sobre a nova solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  de forma indutiva até que obtenhamos uma solução tal que:  $r_n^{s*} = r_{q_n}^{r*}, \forall n \in \mathcal{N}$ .  $\square$

#### 4.2.2 Condicionamento para o Emparelhamento Ordenado

Nessa seção, mostraremos que existe uma condição que deve ser satisfeita para assegurar que o emparelhamento ordenado de subportadoras seja ótimo para o problema (56)–(62).

Para tal fim, primeiramente devemos notar que qualquer solução ótima para o problema (56)–(62) será uma solução viável para o problema de maximização da taxa total com RIP apresentado no Capítulo 3. Isso pode ser facilmente percebido ao observar que todas as restrições do problema de maximização da taxa de dados com RIP também são restrição do problema (56)–(62).

Na Proposição 3.3 apresentada no Capítulo 3, mostramos que dada uma solução ótima  $\{y_{n,m}^{sf}, y_{n,q,j,m}^{rf}\}$  para o problema RIP, podemos construir uma outra solução ótima  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}\}$  a partir de  $\{y_{n,m}^{sf}, y_{n,q,j,m}^{rf}\}$  com emparelhamento completamente ordenado, mesmo que não saibamos como o AS foi realizado. Para a demonstração usamos apenas a propriedade obtida da Proposição 3.2 que também é válida para o problema (56)–(62), conforme acabamos de demonstrar.

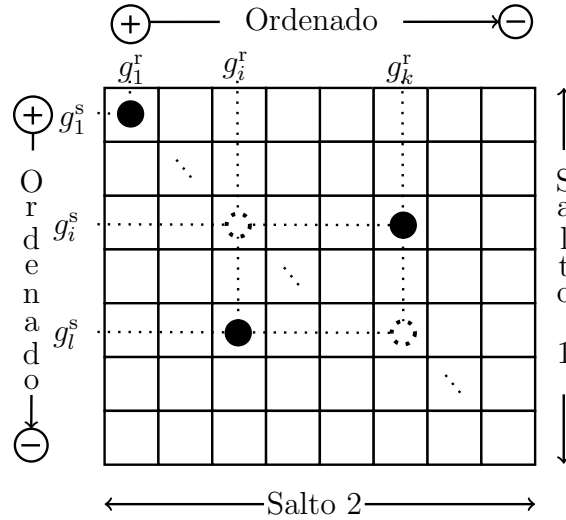
Outra conclusão importante que podemos tirar a partir da Proposição 3.3 é que ela se aplica para qualquer solução viável para o problema RIP, isto é, quando aplicamos esta proposição sobre uma solução viável para o problema RIP, iremos gerar outra solução (viável) com taxa de dados total maior ou superior à taxa da solução viável inicialmente considerada. Isso pode ser verificado ao observar no final das etapas **i** e **ii** da Proposição 3.3 onde mostramos que na solução com ES ordenado há um ganho em SNR da subportadora  $i$  do salto 2 sobre a subportadora  $i$  do salto 1 (na Etapa **i**) ou da subportadora  $i$  do salto 1 sobre a subportadora  $i$  do salto 2 (Etapa **ii**). Assim, à medida que vamos realizando o emparelhamento ordenado, mantemos a mesma taxa total da solução inicial porém poderemos “salvar” potência no repetidor (quando ocorrer a situação da Etapa **ii**) ou “salvar” potência na fonte (quando ocorrer a situação da Etapa **i**).

Dessa maneira, podemos aplicar a Proposição 3.3 sobre a solução ótima do problema (56)–(62) uma vez que ela é viável para o problema RIP e com isso teremos ganho em taxa total. Assim, a única maneira de haver perda de otimalidade da solução ótima do problema (56)–(62) ao aplicar a Proposição 3.3 consiste na violação da restrição (62), pois ela é ignorada na demonstração da Proposição 3.3. Além disso, a Proposição 3.3 somente irá violar a restrição (62) se ela reduzir a taxa de dados de algum usuário que estivesse inicialmente satisfeito pela solução ótima do problema (56)–(62).

Dessa forma, iremos fazer uma análise sobre a Proposição 3.3 de modo a entender como ela pode afetar o taxa de dados de um usuário presente na solução ótima do problema (56)–(62).

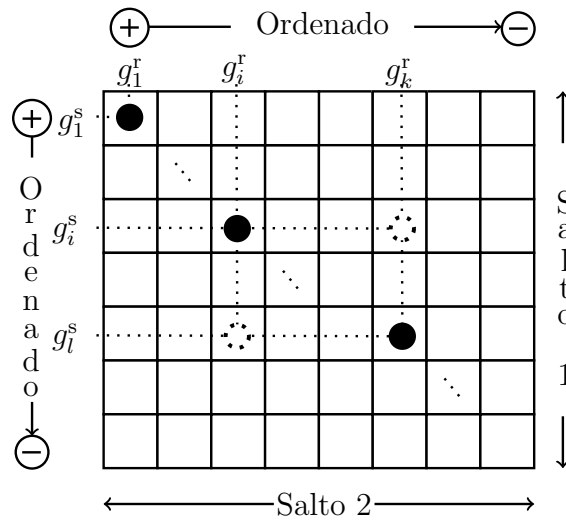
Assim, seja  $\{y_{n,m}^{sf}, y_{n,q,j,m}^{rf}, x_j'\}$  uma solução ótima para o problema (56)–(62) em

Figura 26 – Primeira ocorrência do ES não ordenado para a solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x'_j\}$ .



Fonte: Próprio Autor.

Figura 27 – Modelo de ES proposto pela solução viável  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$ .



Fonte: Próprio Autor.

que a primeira ocorrência do emparelhamento não ordenado para esta solução está mostrado na Figura 26 e seja  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  uma nova solução viável para este problema que difere de  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x'_j\}$  exclusivamente pelo emparelhamento das subportadoras  $g_i^s, g_j^s, g_i^r$  e  $g_k^r$  conforme mostra a Figura 27.

Nesse contexto, podemos seguir o raciocínio da Proposição 3.3 sobre as soluções  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x'_j\}$  e  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  culminando nas etapas **i** e **ii**. Note que na solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x'_j\}$  as taxas de dados nas subportadoras  $i$  e  $k$  do salto 2 são  $r_i^{r'}$  e  $r_k^{r'}$ , respectivamente. Além disso, para esta mesma solução as taxas de dados nas subportadoras  $i$  e  $l$  do salto 1 são  $r_i^{s'}$  e  $r_l^{s'}$ , respectivamente. Para as mesmas subportadoras anteriormente citadas ( $i$  e  $k$  no salto 2 e  $i$  e  $l$  no salto 1), a taxa de dados nelas transmitida a partir da



solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  são  $r_i^{r*}$  e  $r_k^{r*}$ ,  $r_i^{s*}$  e  $r_l^{s*}$ , respectivamente.

Tabela 2 – Conclusão a partir das Etapas **i** e **ii**

Solução	Etapa <b>i</b>	Etapa <b>ii</b>
$\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$	$(r_i^{s'} = r_k^{r'}) \geq (r_l^{s'} = r_i^{r'})$	$(r_i^{s'} = r_k^{r'}) < (r_l^{s'} = r_i^{r'})$
$\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$	$(r_i^{s'} \leq r_i^{r*}) \geq (r_l^{s'} = r_k^{r*})$	$(r_l^{s*} \leq r_k^{r'}) < (r_i^{s*} = r_i^{r'})$

Fonte: Próprio Autor.

Assim, resumimos na Tabela 2 o resultado das etapas **i** e **ii** quando aplicamos a Proposição 3.3 sobre a solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  obtendo a nova solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$ . Note que na Etapa **i** nos realizamos a mesma AP em ambas as soluções para as subportadoras do salto 1 e então mostramos que as taxas  $r_i^{r*}$  e  $r_k^{r*}$  obtidas nas subportadoras do salto 2 para a nova solução são tais que:  $(r_i^{s'} \leq r_i^{r*})$  e  $(r_l^{s'} = r_k^{r*})$ , respectivamente. Veja que houve uma comutação de taxa nas subportadoras do salto 2, isto é, a taxa de dados na subportadora  $k$  do salto 2 mudou de  $r_i^{s'}$  (solução inicial) para  $r_l^{s'}$  (nova solução) e a taxa de dados na subportadora  $i$  do salto 2 mudou de  $r_l^{s'}$  (solução inicial) para um valor maior ou igual a  $r_i^{s'}$  (na nova solução). Portanto, se estas subportadoras tiverem sido atribuídas a usuários diferentes quaisquer ( $j_1$  e  $j_2$ ) na solução inicial, então ao realizar a comutação das taxas na nova solução, um dos usuários ( $j_1$ ) terá um ganho de taxa e o outro terá uma perda ( $j_2$ ). Assim, se considerarmos que  $j_2$  estivesse sendo satisfeito na solução inicial  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ , isto é,  $B_{j_2}' \geq t_{j_2} \Rightarrow x_{j_2}' = 1$ , então essa perda em taxa poderá fazer com que o usuário  $j_2$  não seja mais satisfeito na nova solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  causando perda de otimalidade, isto é,  $B_{j_2}^* < t_{j_2} \Rightarrow x_{j_2}^* = 0$ . Entretanto, se as subportadoras  $i$  e  $k$  do salto 2 tiverem sido atribuídas ao mesmo usuário  $j_1$  (ou  $j_2$ ) então a solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  também será ótima para o problema (56)–(62) pois a taxa nesse usuário permanece a mesma da solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ .

Por fim, na Etapa **ii** mostrada na Tabela 2, nós fizemos com que a solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  tenha a mesma AP de potência para as subportadoras do salto 2 que a solução  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  e com isso observamos que a comutação das taxas ocorre entre as subportadoras  $i$  e  $l$  do salto 1. Nesse caso, não faz diferença se as subportadoras  $i$  e  $k$  do salto 2 foram atribuídas a um mesmo usuário ou usuários diferentes pois a taxa delas são as mesmas em ambas as soluções, isto é, nesse caso a solução  $\{y_{n,m}^{s*}, y_{n,q,j,m}^{r*}, x_j^*\}$  também será ótima para o problema  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$ .

Com isso, mostramos que existe a possibilidade da perda de otimalidade para a solução ótima  $\{y_{n,m}^{s'}, y_{n,q,j,m}^{r'}, x_j'\}$  do problema (56)–(62) quando realizamos o ES ordenado. Essa situação da perda de otimalidade pode ocorrer (exclusivamente) na Etapa **i** da proposição 3.3 quando as subportadoras a serem emparelhadas tiverem sido atribuídas a usuários distintos.

### 4.3 Reformulação do Problema

Nesta seção faremos uso da Proposição 4.1 para linearizar a restrição (62) e remover a variável  $y_{n,m}^s$  do problema (56)–(62). Com isso, poderemos reformular o problema de modo que possa ser resolvido de forma exata por métodos conhecidos na literatura.

A Proposição 4.1 mostra que subportadoras que compõem um mesmo *link*  $n$  na restrição (62) possuem mesma taxa de dados (mesmo nível de MCS  $m$ ). Note que a informação presente na variável  $y_{n,m}^s$  e que não está presente na variável  $y_{n,q,j,m}^r$  é o nível de MCS  $m$  de cada uma das subportadoras do salto 1. Entretanto, a Proposição 4.1 assegura que subportadoras emparelhadas possuem o mesmo nível de MCS. Dessa forma, vemos que a informação existente em  $y_{n,m}^s$  também está contida em  $y_{n,q,j,m}^r$ . Assim, todas as restrições que eram escritas em função de  $y_{n,m}^s$  podem ser escritas em função de  $y_{n,q,j,m}^r$ , porém a forma de interpretar a variável  $y_{n,q,j,m}^r$  mudará, exigindo uma nova definição. Além disso, vamos mudar a notação da variável  $y_{n,q,j,m}^r$  para  $y_{n,q,j,m}$  pois o sobrescrito “r” se tornará desnecessário.

Dessa maneira, a definição da variável  $y_{n,q,j,m}$  será:  $y_{n,q,j,m}$  recebe o valor 1 se a as subportadoras  $n \in \mathcal{N}$  (no salto 1) e  $q \in \mathcal{N}$  (no salto 2) atingirem o mesmo nível de MCS  $m$ , estiverem emparelhadas e a subportadora  $q$  for assinalada para o  $j$ -ésimo usuário, caso contrário  $y_{n,q,j,m} = 0$ . Com essa definição e considerando o resultado da Proposição 4.1 podemos reformular o problema (56)–(62), conforme a seguir:

$$\min_{\{y_{n,q,j,m}, x_j\}} - \sum_{j=1}^J x_j \quad (64)$$

Sujeito a:

$$\sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m} \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (65)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m} \leq 1, \quad \forall q \in \mathcal{N}, \quad (66)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m} P_{n,m}^s \leq P_{\text{tot}}^s, \quad (67)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m} P_{q,j,m}^r \leq P_{\text{tot}}^r, \quad (68)$$

$$- \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{m=1}^M y_{n,q,j,m} r_m \leq -x_j t_j, \quad \forall j. \quad (69)$$

Note que a restrição (57) desapareceu por se tornar redundante e a restrição

(62) foi reduzida para (69) pois a presença simultânea dos dois elementos na função  $\min\{\cdot, \cdot\}$  também gerava redundância visto que eles são iguais.

A seguir, iremos expressar o problema (64)–(69) na forma matricial compacta de maneira que ele possa ser resolvido através de *softwares* comerciais existentes no mercado.

Seja  $\mathbf{z}$  um vetor coluna com dimensões  $(N^2JM + J) \times 1$ , definido como:

$$\mathbf{z} = \overbrace{[x_1, x_2, \dots, x_J]}^{\mathbf{x}}, \overbrace{[y_{1,1,1,1}, \dots, y_{1,1,1,M}, \dots, y_{1,1,J,M}, \dots, y_{1,N,J,M}, \dots, y_{N,N,J,M}]}^{\mathbf{y}}]^t, \quad (70)$$

então existem matrizes de transformação  $\mathbf{T}^x$  e  $\mathbf{T}^y$  com dimensões  $J \times (N^2JM + J)$  e  $N^2JM \times (N^2JM + J)$ , respectivamente, definidas como  $\mathbf{T}^x = [I_J, \emptyset_{J,N^2JM}]$  e  $\mathbf{T}^y = [\emptyset_{N^2JM,J}, I_{N^2JM}]$ , tais que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^x \mathbf{z}, \quad (71)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}^y \mathbf{z}, \quad (72)$$

em que  $I_v$  representa uma matriz identidade de ordem  $v$  e  $\emptyset_{u,v}$  foi anteriormente definida e representa uma matriz de zeros com dimensões  $u \times v$ .

Usando como base as equações (71) e (72), podemos reescrever todas as restrições do problema (65)–(69) de forma matricial, conforme a seguir:

- Restrição (65): existe uma matriz  $\mathbf{A}$  com dimensões  $N \times N^2JM$  tal que:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{1}_{N,1}, \quad (73)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1,NJM} & \emptyset_{1,NJM} & \cdots & \emptyset_{1,NJM} \\ \emptyset_{1,NJM} & \mathbf{1}_{1,NJM} & \cdots & \emptyset_{1,NJM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{1,NJM} & \emptyset_{1,NJM} & \cdots & \mathbf{1}_{1,NJM} \end{bmatrix}.$$

- Restrição (66): existe uma matriz  $\mathbf{B}$  com dimensões  $N \times N^2JM$  tal que:

$$\mathbf{B} \mathbf{y} \leq \mathbf{1}_{N,1}, \quad (74)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}', \dots, \mathbf{B}'],$$

em que  $\mathbf{B}'$  (com dimensões  $N \times NJM$ ) é definida como:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1,JM} & \emptyset_{1,JM} & \cdots & \emptyset_{1,JM} \\ \emptyset_{1,JM} & \mathbf{1}_{1,JM} & \cdots & \emptyset_{1,JM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{1,JM} & \emptyset_{1,JM} & \cdots & \mathbf{1}_{1,JM} \end{bmatrix}.$$

- Restrição (67): existe uma matriz  $\mathbf{C}$  com dimensões  $1 \times N^2JM$ , tal que:

$$\mathbf{C} \mathbf{y} \leq P_{\text{tot}}^s, \quad (75)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{P}_1^s, \mathbf{P}_1^s, \dots, \mathbf{P}_1^s, \dots, \mathbf{P}_N^s, \mathbf{P}_N^s, \dots, \mathbf{P}_N^s],$$

em que  $\mathbf{P}_n^s = [P_{n,1}^s, P_{n,2}^s, \dots, P_{n,M}^s]$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$  e cada  $\mathbf{P}_n^s$ ,  $\forall n \in \mathcal{N}$ , se repete  $JN$  vezes em  $\mathbf{C}$ .

- Restrição (68): existe uma matriz  $\mathbf{D}$  com dimensões  $1 \times N^2JM$ , tal que:

$$\mathbf{D} \mathbf{y} \leq P_{\text{tot}}^r, \quad (76)$$

$$\mathbf{D} = [P_{1,1,1}^r, P_{1,1,2}^r, \dots, P_{N,J,M}^r, \dots, P_{1,1,1}^r, P_{1,1,2}^r, \dots, P_{N,J,M}^r].$$

- Restrição (69): existem matrizes  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  com dimensões  $J \times J$  e  $J \times N^2JM$ , respectivamente, tais que:

$$\mathbf{E} \mathbf{x} \leq \mathbf{F} \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{E} \mathbf{x} - \mathbf{F} \mathbf{y} \leq \emptyset_{J,1}, \quad (77)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_J \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}],$$

em que  $\mathbf{R}$  é uma matriz com dimensões  $J \times JM$ , sendo dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 \dots r_M & \emptyset_{1,M} & \cdots & \emptyset_{1,M} \\ \emptyset_{1,M} & r_1 \dots r_M & \cdots & \emptyset_{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{1,M} & \emptyset_{1,M} & \cdots & r_1 \dots r_M \end{bmatrix}$$

e se repete  $N^2$  vezes em  $\mathbf{F}$ .

- Função objetivo (64): existe um vetor linha  $\mathbf{o}$  com dimensões  $1 \times (N^2JM + J)$  que nos permite escrever a função objetivo (64) tal como:

$$\mathbf{o} \mathbf{z}, \quad (78)$$

$$\mathbf{o} = [\mathbf{1}_{1,J}, 0, \dots, 0].$$

Finalmente, substituindo a equação (71) em (77) e a equação (72) em (73) – (77), podemos obter a forma matricial para o problema de maximização do número de

usuários satisfeitos expresso pelas equações (64)–(69), conforme a seguir:

$$\max_{\mathbf{z}} \mathbf{o} \mathbf{z} \quad (79)$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{T}^y \\ \mathbf{B} \mathbf{T}^y \\ \mathbf{C} \mathbf{T}^y \\ \mathbf{D} \mathbf{T}^y \\ \mathbf{E} \mathbf{T}^x - \mathbf{F} \mathbf{T}^y \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2N,1} \\ P_{\text{tot}}^s \\ P_{\text{tot}}^r \\ \emptyset_{J,1} \end{bmatrix} \quad (80)$$

Note que o problema (79)–(80) é linear, inteiro e binário e pode ser resolvido de forma exata através do algoritmo BB.

#### 4.4 Solução Heurística

Na seção anterior resolvemos o problema (64)–(69) de forma exata através do algoritmo BB com elevado custo computacional. Movidos pela inviabilidade do algoritmo BB em aplicações práticas devido a sua complexidade exponencial, apresentamos nesta seção uma heurística de baixa complexidade computacional para o problema (64)–(69).

A heurística apresentada é dividida em três etapas:

- Etapa 1: recebe como entrada um conjunto de usuários  $\mathcal{J}_a$  (denominado conjunto de usuários ativos) e estima a quantidade de subportadoras  $N_j$  que será preciso para cada  $j$ -ésimo usuário do conjunto  $\mathcal{J}_a$  ser satisfeito.
- Etapa 2: usa a estimativa feita pela Etapa 1 para resolver o AS, isto é, nesta etapa as subportadoras do salto 2 serão assinaladas para os usuários do conjunto  $\mathcal{J}_a$  de modo que o  $N_j$  subportadoras sejam assinaladas a cada  $j$ -ésimo usuário.
- Etapa 3: gerencia as etapas 1 e 2 realizando AP através do algoritmo MMPR considerando ES ordenado.

A seguir, faremos uma descrição mais detalhada de cada etapa mostrando seus respectivos fluxogramas.

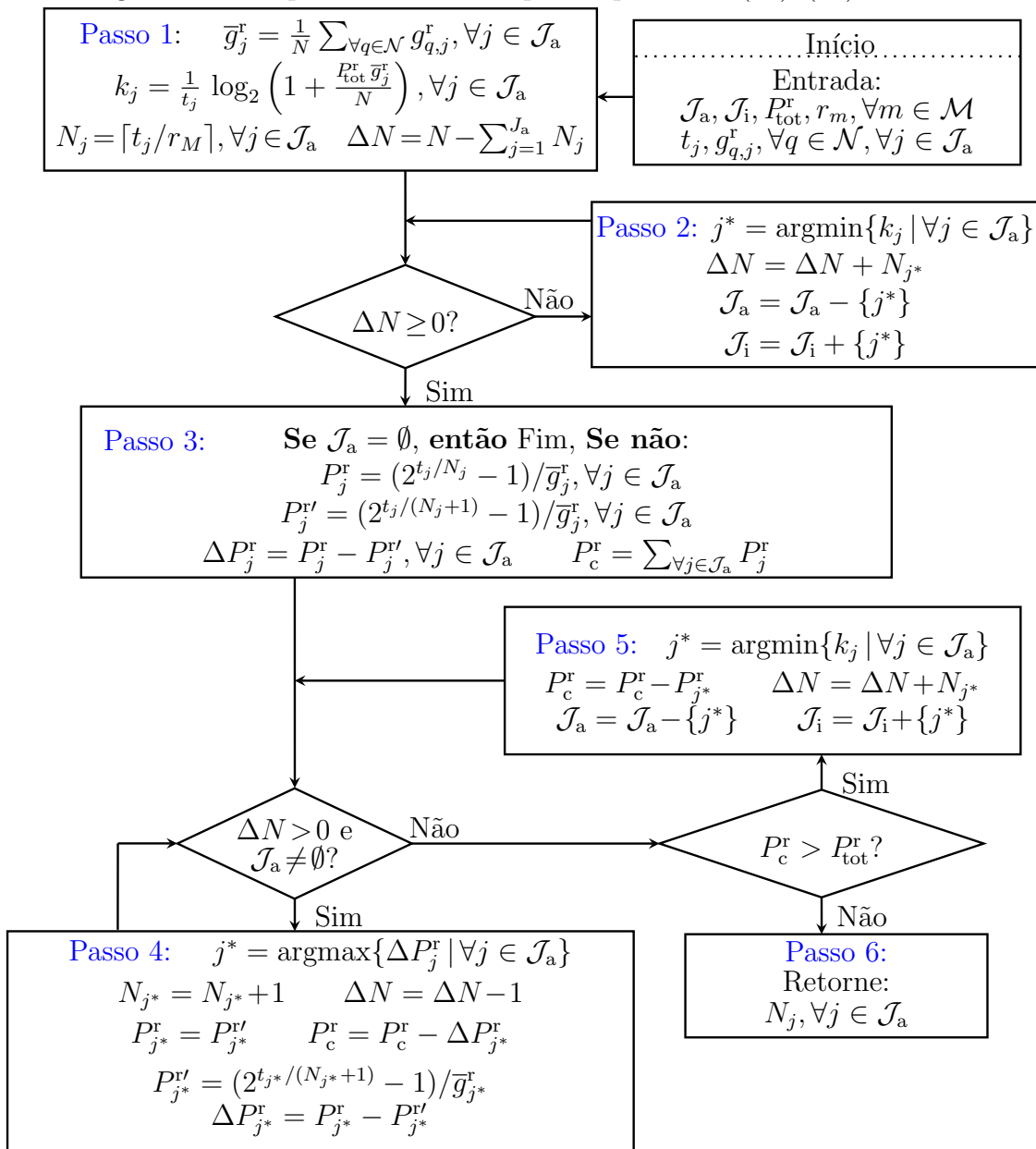
##### 4.4.1 Etapa 1

O fluxograma da Etapa 1 é mostrada na Figura 28. Dentre as variáveis de entrada, as únicas ainda não formalmente definidas são  $\mathcal{J}_a$  e  $\mathcal{J}_i$ .  $\mathcal{J}_a$  (conjunto dos usuários ativos) é um conjunto que contém todos os usuários para os quais a Etapa 1 irá determinar a quantidade de subportadoras que eles necessitam para atingir suas respectivas taxas e  $\mathcal{J}_i$  (conjunto dos usuários inativos) que correspondem aos usuários que a heurística não tentará satisfazer, logo  $\mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_a = \mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_a = \emptyset$ .

Dessa maneira, no Passo 1 da Etapa 1 temos o cálculo do ganho de canal

médio  $\bar{g}_j^r$ , do fator  $k_j$ , da mínima quantidade de subportadoras que cada usuário  $j \in \mathcal{J}_a$  inicialmente irá precisar para ser satisfeito  $N_j$  bem como a quantidade de subportadoras  $\Delta N$  remanescente no sistema. Note que o fator  $k_j$  representa a relação entre a taxa média dos usuários e a taxa por eles requisitada. Assim,  $k_j$  pode ser interpretado como o grau de facilidade de satisfazer cada usuário, isto é, se  $k_j$  for elevado então  $j$ -ésimo usuário precisará de poucos recursos (potência e subportadoras) para ser satisfeito. De modo equivalente, se  $k_j$  for pequeno então o  $j$ -ésimo usuário precisará de muitos recursos para ser satisfeito.

Figura 28 – Etapa 1 da heurística para o problema (64)–(69).



Fonte: Próprio Autor.

A execução do Passo 2 requer que  $\Delta N < 0$ , ou seja, nessa situação o somatório da mínima quantidade de subportadoras atribuídas a cada usuário é superior a quantidade

total de subportadoras existentes no sistema. Nesse caso, removemos os usuários mais difíceis de serem satisfeitos seguindo o critério do fator  $k_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , isto é, movemos o usuário  $j^*$  de menor  $k_j$  ( $j^* = \operatorname{argmin}\{k_j | \forall j \in \mathcal{J}_a\}$ ) do conjunto  $\mathcal{J}_a$  para  $\mathcal{J}_i$ .

No Passo 3, determinamos a quantidade de potência  $P_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , consumida por cada usuário  $j$  de modo que sua taxa  $t_j$  seja atingida. De modo similar, determinamos a potência consumida  $P'_j$  por cada usuário  $j$  considerando que cada um deles recebe uma subportadora a mais <sup>1</sup>. Nessa situação, calculamos a redução no consumo da potência ( $\Delta P_j = P_j - P'_j$ ) que cada usuário terá ao receber uma nova subportadora e também calculamos a potência total  $P_c$  consumida pelo repetidor para transmitir dados para todos os usuários.

No Passo 4 é feita a atribuição das  $\Delta N$  subportadoras remanescentes no sistema de modo que a potência total consumida pelos usuários do conjunto  $\mathcal{J}_a$  diminua rapidamente e a restrição de potência no repetidor seja atendida, isto é,  $P_c^r \leq P_{\text{tot}}^r$ . Assim, selecionamos o usuário  $j^* = \operatorname{argmax}\{\Delta P_j | \forall j \in \mathcal{J}_a\}$  que provoca a maior redução no consumo da potência (quando ganha uma subportadora) e então atribuímos a ele uma subportadora ( $N_{j^*} = N_{j^*} + 1$ ). Em seguida, atualizamos as variáveis envolvidas e continuamos o processo até que todas as  $\Delta N$  subportadoras sejam atribuídas.

O Passo 5 será executado somente quando todas as  $\Delta N$  subportadora remanescentes no sistema forem atribuídas no Passo 4 e mesmo assim a restrição de potência no repetidor não foi atendida, isto é, o teste lógico “ $P_c^r > P_{\text{tot}}^r$ ?” retorna “Sim”. Nesse caso, no Passo 5 efetuamos a remoção do pior usuários seguindo o critério estabelecido pelo fator  $k_j$ , isto é, selecionamos o usuário  $j^*$  de menor  $k_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , através da operação  $j^* = \operatorname{argmin}\{k_j | \forall j \in \mathcal{J}_a\}$  e o movemos de  $\mathcal{J}_a$  para  $\mathcal{J}_i$ . Em seguida, o número de subportadoras  $N_{j^*}$  do usuário  $j^*$  será armazenado na variável  $\Delta N$  e então seguimos para o Passo 4 de modo a atribuir as  $\Delta N$  subportadoras remanescentes para os demais usuários em  $\mathcal{J}_a$ . Este processo irá se repetir até que a restrição de potência do repetidor seja atendida, isto é  $P_c^r \leq P_{\text{tot}}^r$ . Nesse caso, temos a execução do Passo 6 que finaliza essa etapa retornando a variável  $N_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ .

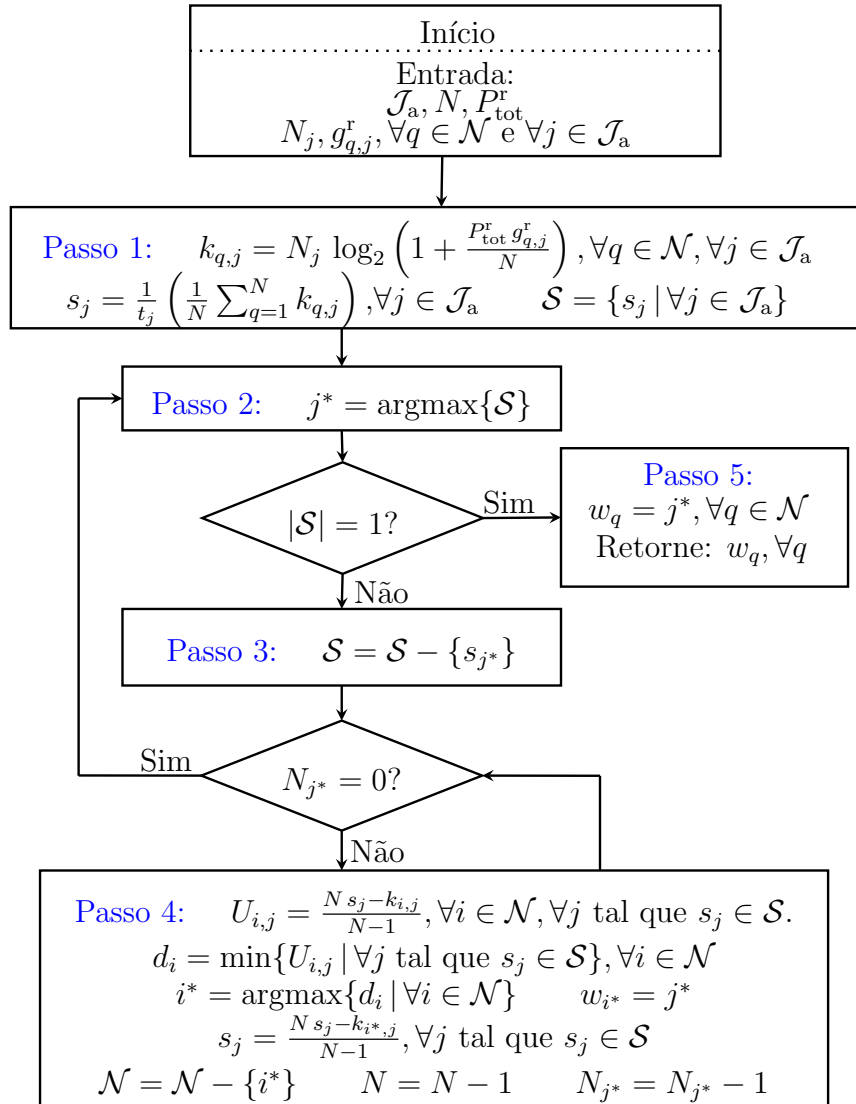
A ordem de complexidade computacional da Etapa 1 é dada por  $\mathcal{O}(NJ_a^2)$  e seu cálculo é efetuado no Apêndice 5.

#### 4.4.2 Etapa 2

A Etapa 2, cujo fluxograma está representado na Figura 29, tem por objetivo realizar o AS baseado na variável  $N_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , calculada a partir de Etapa 1. No Passo 1, temos a definição do fator  $k_{q,j}, \forall q \in \mathcal{N}$  e  $\forall j \in \mathcal{J}_a$ , que representa a multiplicação de  $N_j$  pela taxa de dados desse usuário em cada subportadora do sistema considerando  $P_{\text{tot}}^r/N$

<sup>1</sup>Embora tenhamos assumido o modelo logarítmico de Shannon nos Passos 3 e 4 (isto é,  $t_j = N_j \log_2(1 + P_j^r/g_j^r)$ ), qualquer outro modelo que mapeia SNR e taxa atingida poderia ser utilizado.

Figura 29 – Etapa 2 da heurística proposta para o problema (64)–(69).



Fonte: Próprio Autor.

Watts de potência alocados a cada uma delas. Além disso, também calculamos o fator  $s_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , que representa a relação entre a taxa média de cada usuário e sua respectiva taxa requisitada e será utilizado como métrica para determinar a facilidade/dificuldade em satisfazer cada usuário.  $\mathcal{S}$  representa o conjunto de todos os fatores  $s_j$  e  $|\mathcal{S}|$  representa a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{S}$ .

Nos passos 2 e 3 efetuamos a seleção do usuário  $j^*$  mais fácil de ser satisfeito segundo o critério definido a partir do fator  $s_j$  ( $j^* = \text{argmax}\{\mathcal{S}\}$ ) e a remoção de  $s_{j^*}$  a partir do conjunto  $\mathcal{S}$ , respectivamente. Assim, seguimos para o Passo 4 de modo a assinalar  $N_{j^*}$  subportadoras ao usuário  $j^*$ . No Passo 4 está presente a ideia fundamental da heurística proposta na Etapa 2: ao usuário  $j^*$  é atribuído a subportadora  $i^*$  que



maximiza o valor  $s_j$  do usuário que terá o menor  $s_j$  quando a subportadora  $i^*$  é suprimida de todos os usuários em  $\mathcal{J}_a$  (exceto de  $j^*$ , pois  $s_{j^*}$  foi removido de  $\mathcal{S}$ ).

Para entender melhor o Passo 4, primeiramente devemos perceber que  $s_j, \forall j \in \mathcal{J}$  consiste na média aritmética de  $k_{q,j}$  (ao longo do índice  $q$ ) normalizada por  $t_j$ . Dessa forma, quando removemos a subportadora  $i$  de um usuário  $j$  qualquer (exceto  $j^*$ ) devemos recalculamos o valor da nova média para o fator  $s_j$ . Esse cálculo é efetuado pela variável  $U_{i,j}$ , isto é,  $U_{i,j}$  representa o “novo” cálculo da variável  $s_j$  quando a subportadora  $i$  é removida do usuário  $j$ . Desse modo, podemos perceber o efeito que a remoção da subportadora  $i$  causa sobre o usuário  $j$ . Assim, armazenamos na variável  $d_i$  através da operação  $d_i = \min\{U_{i,j} \mid \forall j \text{ tal que } s_j \in \mathcal{S}\}$  o menor  $s_j$  que corresponde ao usuário que ficou em pior situação ao hipoteticamente perder a  $i$ -ésima subportadora. Dessa forma, para cada subportadora  $i$  removida, selecionamos em  $d_i$  o índice  $i^*$  ( $i^* = \text{argmax}\{d_i \mid \forall i \in \mathcal{N}\}$ ) da subportadora que leva ao maior valor  $s_j$  e então a atribuímos ao usuário  $j^*$  através da operação  $w_{i^*} = j^*$ . Por fim, recalculamos o valor  $s_j$  de todos os usuários, removemos a subportadora  $i^*$  do processo de AS e decrementamos o número de subportadoras restantes para serem assinaladas ao  $j^*$  usuário por 1 ( $N_{j^*} = N_{j^*} - 1$ ).

Note que o Passo 4 será executado até todas as  $N_{j^*}$  subportadoras do  $j^*$ -ésimo usuário sejam assinaladas. Assim, ao término do Passo 4 o algoritmo retorna para o Passo 2 de modo a selecionar um novo usuário para realizar o AS a este usuário. O processo irá se repetir até que tenha apenas um usuário em  $\mathcal{J}_a$  que ainda não teve seu AS efetivado. Nesse caso teremos  $|\mathcal{S}| = 1$ , situação que leva a execução do Passo 5. Nesse passo, todas as subportadoras remanescentes no sistema são assinaladas ao último usuário disponível, levando ao término do algoritmo com o retorno da variável  $w_q, \forall q \in \mathcal{N}$ , que tem a seguinte interpretação:  $w_q$  armazena o índice do  $j$ -ésimo usuário em  $\mathcal{J}_a$  para o qual a  $q$ -ésima subportadora foi assinalada.

Por fim, a ordem de complexidade computacional da Etapa 2 é dada por  $\mathcal{O}(N^2 J_a)$  e seu cálculo é efetuado no Apêndice 5.

#### 4.4.3 Etapa 3

A Etapa 3 é responsável por gerenciar as etapas 1 e 2 (realizando o AS), empregando ES ordenado e a AP é feita através do algoritmo MMRP-LI, isto é, a Etapa 3 em si constitui a heurística proposta para o problema de maximização do número de usuários satisfeitos.

Desse modo, o fluxograma dessa Etapa é mostrado na Figura 30. No Passo 1, temos o cálculo dos fatores  $k_{q,j}$  e  $s_j, \forall j \in \mathcal{J}$ , da solução inicial  $S$  (número de usuários satisfeitos) e dos conjuntos  $\mathcal{J}_a$  e  $\mathcal{J}_i$ .

No Passo 2, temos a inicialização de variáveis temporárias:  $S'$  (nova solução),  $P_{\text{tot}}^{s'}$  (potência disponível na fonte) e  $P_{\text{tot}}^{r'}$  (potência disponível no repetidor) seguidas da

execução das etapas 1 e 2 (realizando o AS) sobre o conjunto  $\mathcal{J}_a$  considerando ES ordenado. Assim, esse Passo tem por finalidade realizar o AS e o ES ordenado no conjunto de usuários  $\mathcal{J}_a$  de modo que nos passos seguintes seja efetuado a AP.

No Passo 3 realizamos AP para os usuários do conjunto  $\mathcal{J}_a$  até que a taxa de cada um deles seja atingida. Assim, no início desse Passo selecionamos o usuário com maior  $s_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ , determinamos quais subportadoras a ele foram atribuídas (i.e.,  $\forall q \in \mathcal{N}$  tal que  $w_q = j^*$ ) e então realizamos a AP através do algoritmo MMPR-LI até que a taxa  $t_{j^*}$  seja atingida <sup>2</sup>. Note também que, se a restrição de potência em cada um dos saltos não tiver sido violada (i.e.,  $P_{\text{tot}}^{s'} > 0$  e  $P_{\text{tot}}^{t'} > 0$ ), então incrementamos o número de usuários satisfeitos no passo 4. Os passos 3 e 4 permanecem sendo executados até que a potência de um dos saltos se esgote ou todos os usuários em  $\mathcal{J}_a$  sejam satisfeitos.

A execução do Passo 5 requer que a 1nova solução encontrada  $S'$  seja maior que a anterior  $S$ . Caso não seja, o algoritmo termina e a solução final obtida será  $S$ . Assim, no Passo 5 atualizamos a solução  $S$  e redefinimos o conjunto de usuários ativos:  $\mathcal{J}_a$  passa a ser composto por todos os usuários que foram satisfeitos bem como pelo usuário com maior  $s_j$ , dentre os usuários que não foram satisfeitos. Finalmente, redefinido o conjunto  $\mathcal{J}_a$  e retornamos para o Passo 2 de modo a obter uma nova solução  $S'$  que seja melhor que a atual solução  $S$  obtida. Note que a transição do Passo 5 para o Passo 2 requer que a nova solução  $S'$  seja maior que a solução anterior  $S$ . Assim, essa transição será efetuada  $J$  vezes na pior situação.

O cálculo da ordem de complexidade computacional da Etapa 3 (que considera as etapas 1 e 2) é efetuado no Apêndice 5 e é dada por  $\mathcal{O}(N^2 J^2 + NJ^3)$ .

## 4.5 Avaliação de Desempenho

Nesta seção apresentaremos os valores que foram considerados para os parâmetros do sistema cooperativo descrito no Capítulo 2 bem como uma discussão sobre os resultados que foram obtidos a partir de simulações computacionais.

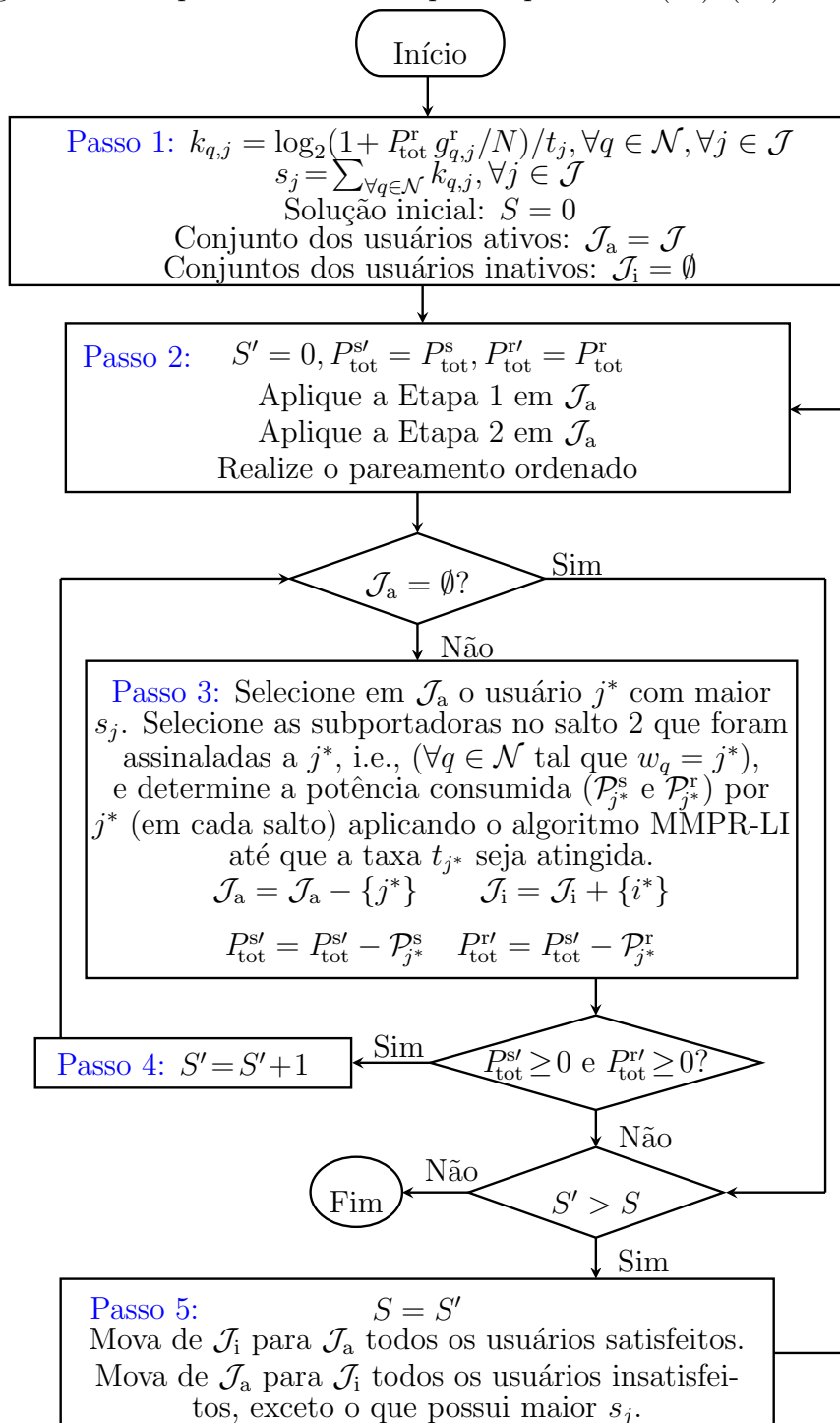
### 4.5.1 Parâmetros de Simulação

Os resultados apresentados neste cenário foram validados por médias de Monte Carlo. Seguindo o modelo de sistema proposto no Capítulo 2, nós consideramos um sistema OFDMA com  $N = 32$  subportadoras por salto, cada uma experimentando desvanecimento Rayleigh independente,  $J = 12$  usuários no sistema,  $M = 12$  níveis de MCSs de modo que a taxa de dados atingida em cada nível de MCS  $m$  é dada por  $r_m = m$ . Além

---

<sup>2</sup>Note que o algoritmo MMPR-LI, da forma que foi proposto, executa AP de modo a maximizar a taxa de dados total do sistema, entretanto, se adicionarmos uma condição de parada na Etapa 3 desse algoritmo (denominada MMPR) quando uma dada taxa de dados limiar  $t_j$  for atingida, então o algoritmo MMPR-LI buscará atingir a taxa de dados  $t_j$  minimizando o consumo de potência do salto que tem a menor quantidade de potência disponível

Figura 30 – Etapa 3 da heurística para o problema (64)–(69).



Fonte: Próprio Autor.

disso, consideramos que o mapeamento entre a taxa de dados  $r_m$  e a SNR corresponde a discretização da curva da capacidade de Shannon, isto é:  $r_m = \log_2(1 + SNR_m)$ . Desse modo, a mínima SNR necessária para se atingir cada nível de MCS pode ser determinada por  $SNR_m = 2^{r_m} - 1$ . Além disso, consideramos que o repetidor está situado a 150 m da fonte o que os usuários estão uniformemente distribuídos em torno do repetidor com uma distância mínima de 10 m e máxima de 60 m. Consideramos um modelo de perda

de percurso logarítmico em que o coeficiente de perda de percurso é  $n = 3,6$  e o desvio padrão do sombreamento em larga escala é de 8 dB. Consideramos que a fonte possui potência unitária  $P_{\text{tot}}^s = 1$  Watts e o repetidor possui metade da potência da fonte,  $P_{\text{tot}}^r = 0,5$  Watts. Cada ponto simulado nos resultados é composto de uma média de 3,000 repetições de Monte Carlo.

Os resultados visam comparar a heurística proposta, compostas pelas etapas 1 (Figura 28), 2 (Figura 29) e 3 (Figura 30) com a solução ótima<sup>3</sup> em termos de potência consumida em cada salto, quantidade de usuários satisfeitos, taxa de dados atingida e perda por escalabilidade. Dentre todos os resultados apresentados consideramos 12 usuários no sistema, exceto quando avaliamos a perda por escalabilidade, situação em que o número de usuários varia de 4 até 12. A heurística proposta trata-se de um algoritmo que maximiza a quantidade de usuários satisfeitos utilizando a mínima quantidade de potência. Contudo, também avaliamos o desempenho da solução composta pela heurística proposta (etapas 1, 2 e 3) seguida da utilização do algoritmo MMPR-LI para maximizar a taxa total do sistema, isto é, essa heurística inicialmente realiza a maximização do número de usuários satisfeitos e em seguida utiliza a potência disponível em cada salto para maximizar a taxa de dados total do sistema. Note que a ordem de complexidade dessa nova estratégia é a mesma da heurística inicialmente proposta.

Na legenda dos gráficos nos resultados a seguir, a solução ótima para o problema de maximização do número de usuários satisfeitos é abreviada como Otm-MaxJ. A solução ótima do problema RIP é abreviada como Otm-RIP e a heurística que maximiza o número de usuários satisfeitos minimizando a potência é abreviada como Heu-MP. Por fim, a heurística composta pela maximização do número de usuários satisfeitos seguida da maximização da taxa será abreviada como Heu-MT. Vale ressaltar que as soluções Heu-MP e Heu-MT sempre satisfazem a mesma quantidade de usuários e diferem-se apenas pelo consumo de potência em cada salto bem como pela taxa de dados total atingida.

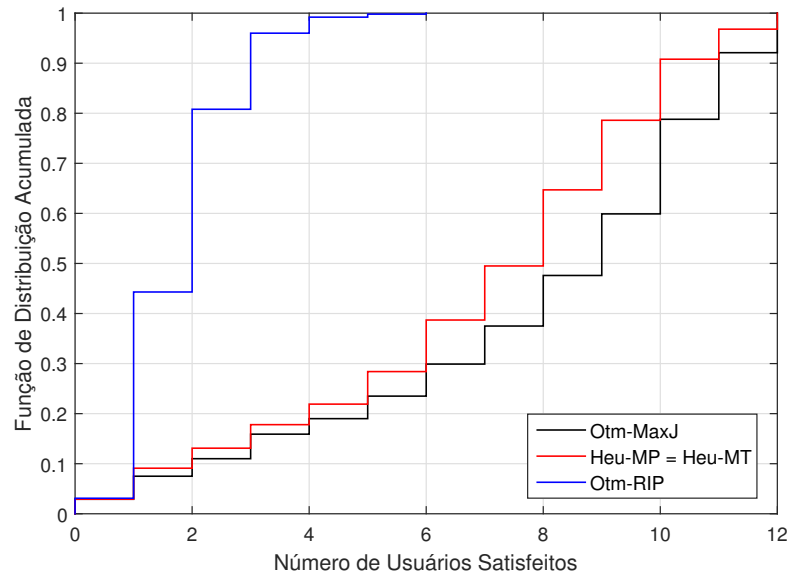
#### 4.5.2 Resultados

Na Figuras 31 e 32 temos a FDA das soluções Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando que a taxa de dados requisitada por cada usuário  $j \in \mathcal{J}$  no sistema é  $t_j = 13$  bits/s e  $t_j = 21$  bits/s, respectivamente. Inicialmente, vemos que em ambas as figuras a solução Otm-RIP satisfaz uma quantidade relativamente pequena de usuários. Isso ocorre porque o problema RIP ignora por completo os requisitos de QoS e atribui todos os recursos do sistema para os usuários que possuem melhores condições de ganho de canal. Em ambas as figuras, a solução Heu-MP apresenta o mesmo comportamento com relação a solução Otm-MaxJ, isto é, quando a FDA se encontra abaixo de 40% e

---

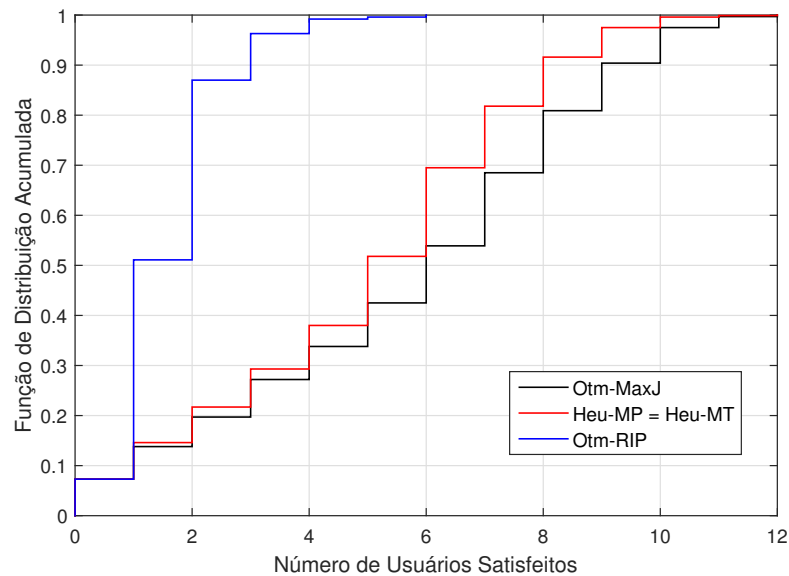
<sup>3</sup>Obtida através do algoritmo BB que foi implementado pelo conjunto de rotinas escritas em linguagem *matlab* e disponibilizadas em [43].

Figura 31 – FDA do número de usuários satisfeitos para as soluções Otm-MaxJ, Heu-MP e Otm-RIP considerando  $t_j = 13$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



Fonte: Próprio Autor.

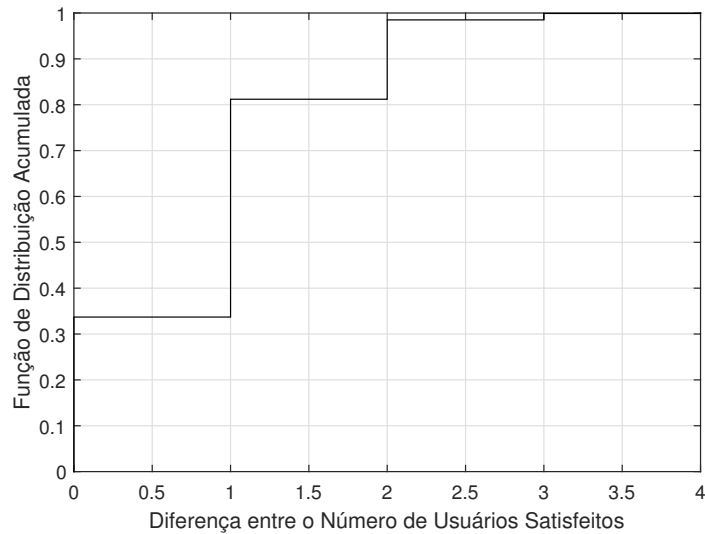
Figura 32 – FDA do número de usuários satisfeitos para as soluções Otm-MaxJ, Heu-MP e Otm-RIP considerando  $t_j = 21$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



Fonte: Próprio Autor.

acima de 80%, a diferença entre as soluções Otm-MaxJ e Heu-MP é menor e quando a FDA está entre 40% e 80% a diferença tende a ser maior. Quando a FDA está abaixo de 40%, as condições de canal em pelo menos um dos saltos são ruins e isso possibilita que as soluções (Otm-MaxJ e Heu-MP) satisfaçam apenas os usuários que possuem as melhores condições de canal. Quando a FDA se encontra acima de 80%, as condições de canal em ambos os saltos são boas para todos os usuários, algo que leva as soluções

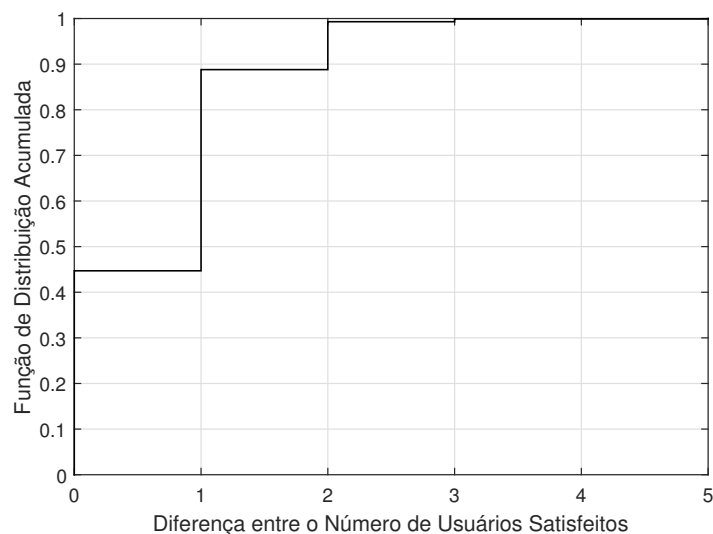
Figura 33 – FDA da diferença entre o número de usuários satisfeitos pelas soluções Otm-MaxJ e Heu-MP da Figura 31.



Fonte: Próprio Autor.

(Otm-MaxJ e Heu-MP) a satisfazerem a maioria dos usuários. Entretanto, quando a FDA se encontra entre 40% e 80%, as condições de canal proporcionam um maior número de graus de liberdade ao sistema, levando soluções mais inteligentes (tal como Otm-MaxJ) a apresentarem maiores ganhos de desempenho. Por fim, quando comparamos as Figuras 31 e 32, vemos que na Figura 32 todas as curvas convergem mais rapidamente para o valor 100% da FDA. Esse comportamento é decorrente do aumento da taxa requisitada pelo usuário (de  $t_j = 13$  bits/s para  $t_j = 21$  bits/s) levando a uma redução do número médio de usuários satisfeitos por cada solução.

Figura 34 – FDA da diferença entre o número de usuários satisfeitos pelas soluções Otm-MaxJ e Heu-MP da Figura 32.

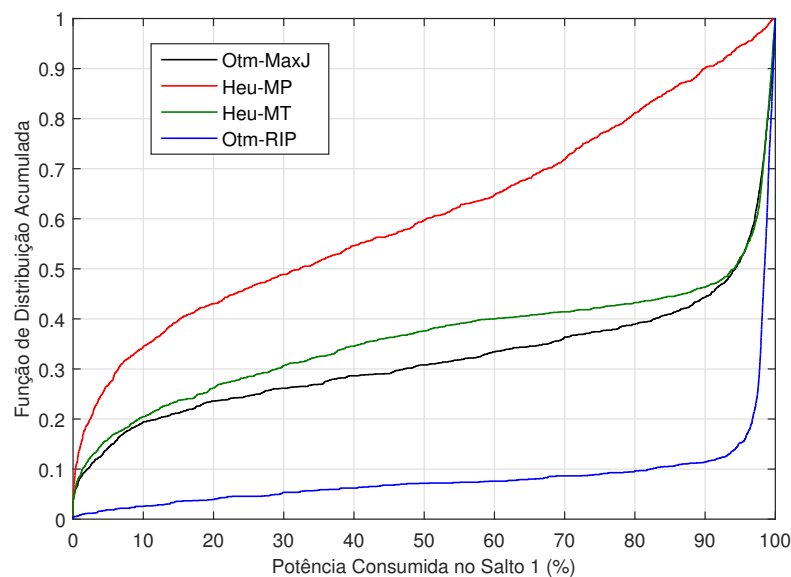


Fonte: Próprio Autor.

Nas Figuras 33 e 34 mostramos a FDA da diferença entre as soluções Otm-MaxJ

e Heu-MP das Figuras 31 e 32, respectivamente. Na Figura 33, vemos que a probabilidade da diferença entre o número de usuários satisfeitos pela solução Otm-MaxJ e Heu-MP (ou Heu-MT) ser menor ou igual a 1, 2 e 3 usuários é de 34%, 81% e 98%, respectivamente. De forma semelhante, na Figura 34 vemos que probabilidade da diferença entre o número de usuários satisfeitos pela soluções Otm-MaxJ e Heu-MP ser menor ou igual a 1, 2 e 3 usuários é de 45%, 89% e 98%, respectivamente. Esses resultados mostram uma melhora significativa no desempenho da solução Heu-MP (e Heu-MT) quando aumentamos a taxa de dados requisitada pelos usuários. Para entender esse comportamento, devemos

Figura 35 – FDA da potência consumida no salto 1 para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando  $t_j = 13$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



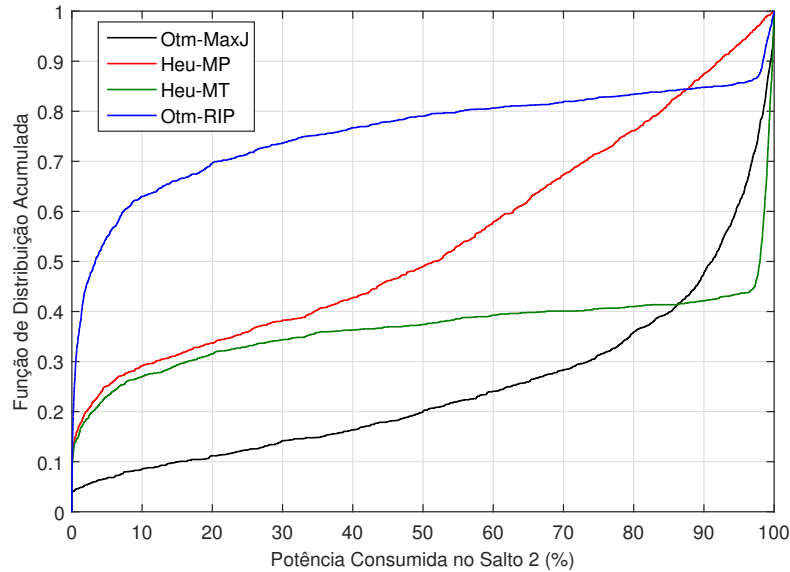
Fonte: Próprio Autor.

notar que o aumento da taxa de dados requisitada leva os usuários a atingirem níveis de MCS mais elevados, algo que aumenta significativamente o consumo da potência de cada usuário. Assim, para cada usuário satisfeito pela solução Otm-MaxJ, a potência total do sistema decai rapidamente, impedindo que a solução ótima tenha ganhos elevados com relação a solução Heu-MP.

Nas figuras 35 e 36 avaliamos a FDA da potência consumida nos saltos 1 e 2, respectivamente, considerando que a taxa de dados requisitada por cada usuário é de  $t_j = 13$  bits/s. Observando a Figura 35, vemos que no 50º percentil as soluções Otm-MaxJ, Heu-MT e Otm-RIP consomem aproximadamente 95% da potência total disponível na fonte. Nessa mesma situação, a solução Heu-MP consome apenas 33% da potência total da fonte, economizando 62% da potência do salto 1 em relação as demais soluções. Isso ocorre por que a heurística proposta realiza AP até que a taxa  $t_j$  de cada usuários seja atingida. Desse modo, a heurística proposta busca maximizar o número de usuários satisfeitos utilizando a mínima potência.

A solução Otm-RIP apresenta um consumo de potência elevado em relação a

Figura 36 – FDA da potência consumida no salto 2 para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando  $t_j = 13$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



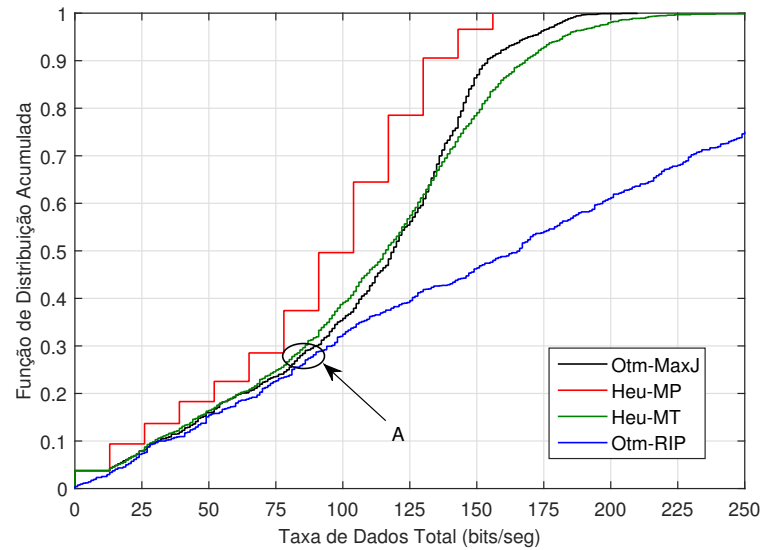
Fonte: Próprio Autor.

soluções Otm-MaxJ e Heu-MT abaixo do 40º percentil. Tal fato ocorre porque o AS é efetuado de forma diferente para a solução Otm-RIP e as demais soluções, isto é, o AS efetuado pela solução Otm-RIP gera ganho de diversidade devido a seleção dos melhores ganhos de canal no salto 2 causando um consumo de potência muito baixo nesse salto (a Figura 36 confirma esse raciocínio) de modo que a maximização da taxa efetuada por esta solução fica dependendo quase exclusivamente do salto 1. Note que, embora na etapa final da Heu-MT nós buscamos realizar a maximização da taxa de dados, essa solução realiza o AS que objetiva satisfazer os usuários do sistema, algo que leva a seleção de ganhos de canal de baixa qualidade. Desse modo, ganhos de canal de baixa qualidade demandam uma excessiva quantidade de potência para que as subportadoras atinjam elevados níveis de MCS, algo que impossibilita a solução Heu-MT de realizar um completo aproveitamento da potência no salto 1 para a maximização da taxa.

Nas Figuras 37 e 38 avaliamos a FDA da taxa de dados atingida considerando que a taxa de dados requisitada pelos usuários é de  $t_j = 13$  bits/s e  $t_j = 21$  bits/s, respectivamente. Note que em ambas as figuras a solução Heu-MP tem uma FDA em forma de “escada”. Isso acontece devido a propriedade que essa solução tem, que é minimizar o consumo de potência fazendo com que a taxa de dados transmitida a cada usuário seja exatamente  $t_j$ , ou seja, dado que existem apenas 12 usuários no sistema, então essa solução somente atinge 12 possíveis valores de taxa de dados. Note que as demais soluções permitem que a taxa de dados de cada usuário seja maior que  $t_j$  (no caso da solução Otm-RIP é possível que a taxa seja menor que  $t_j$  pois esta solução busca maximização de taxa) algo que justifica uma aparência “contínua” para o gráfico dessas soluções. Assim, vemos na Figura 37 que no 50º percentil, a solução Heu-MP apresenta

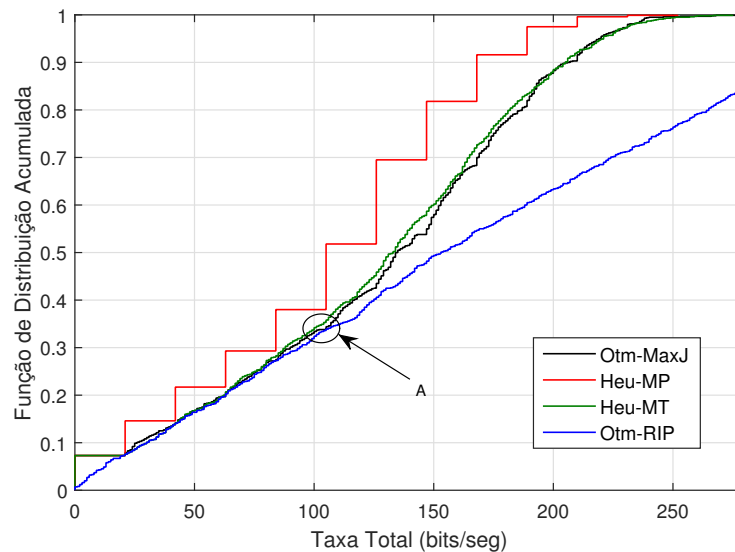


Figura 37 – FDA da taxa de dados atingida para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando  $t_j = 13$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 38 – FDA da taxa de dados atingida para a solução Otm-MaxJ, Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP considerando  $t_j = 21$  bits/s e  $J = 12$  usuários no sistema.



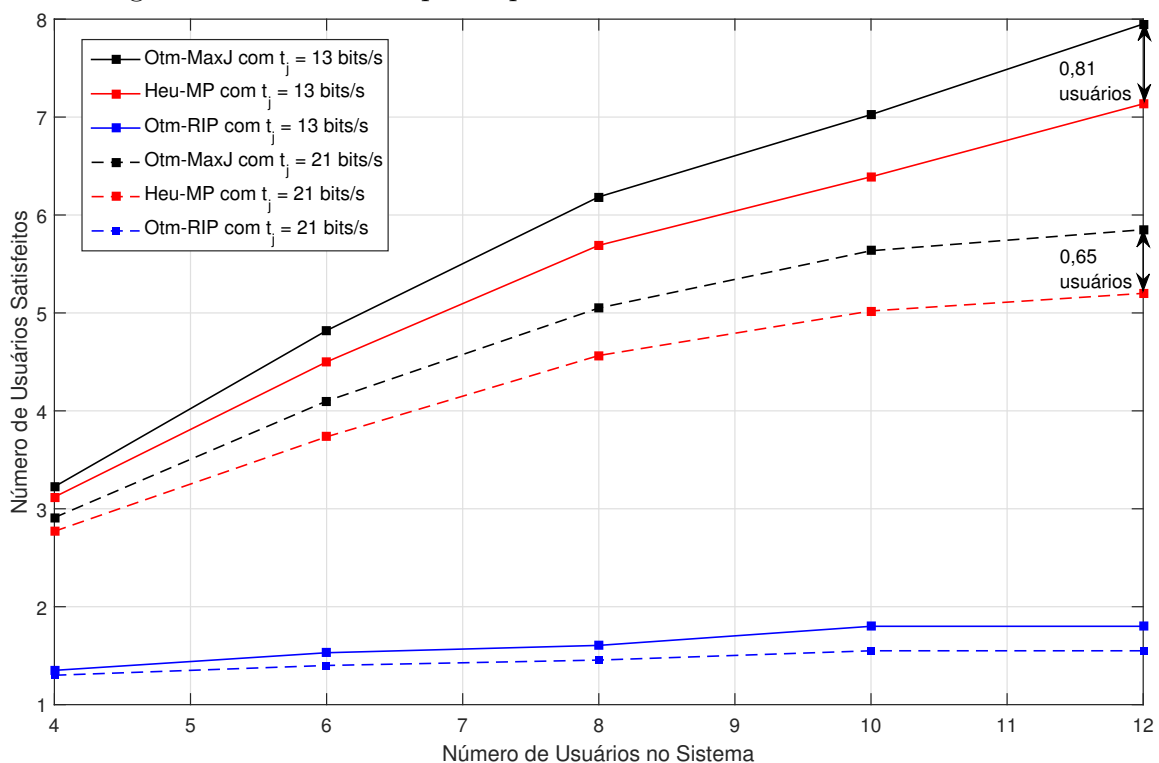
Fonte: Próprio Autor.

uma taxa de dados de 104 bits/seg contra 120 bits/seg das soluções Otm-MaxJ e Heu-MT. Note que o ganho em taxa que as soluções Otm-MaxJ e Heu-MT apresentam em relação a solução Heu-MP é de apenas 16 bits/seg que corresponde, aproximadamente, a satisfazer um usuário a mais. Além disso, a taxa de dados atingida pela solução Otm-RIP no 50º percentil da Figura 37 é de 162 bits/seg e corresponde a um aumento de taxa de 55% com relação a solução Heu-MP e 35% em relação as soluções Otm-MaxJ e Heu-MT. Entretanto, abaixo do 30º percentil (região A) da Figura 37, vemos que as soluções Otm-MaxJ e Heu-MT atingem quase a mesma taxa da solução Otm-RIP. Essa situação ocorre

quando as condições de canal do salto 1 ou 2 são ruins, forçando as soluções Otm-MaxJ e Heu-MT (e Heu-MP) a satisfazerem uma quantidade mínima de usuários, sendo eles os mesmo que possibilitam a maximização da taxa a partir da solução Otm-RIP.

Devemos notar que as soluções Heu-MP, Heu-MT e Otm-MaxJ na Figura 37 estão mais próximas da solução Otm-RIP quando comparadas com a Figura 38. Além disso, o ponto A na Figura 37 sofreu um deslocamento para direita com relação ao ponto A da Figura 37, isto é, na Figura 38 existe uma maior probabilidade ( $\approx 35\%$ ) das soluções Otm-MaxJ e Heu-MT atingirem a mesma taxa de dados da solução Otm-RIP. Isso acontece porque o aumento da taxa de dados requisitada pelos usuários (de 13 bits/seg Figura 37 para 21 bits/seg na Figura 37) leva as soluções Heu-MP, Heu-MT e Otm-MaxJ a excluírem os usuários que apresentam condições de canal desfavoráveis. Dessa forma, quando maior for a taxa de dados requisitada pelos usuários, menos usuários serão satisfeitos chegando ao limite crítico em que as soluções de maximização do número de usuários satisfeitos irão satisfazer apenas os usuários que correspondem a maximização da taxa de dados.

Figura 39 – Análise da perda por escalabilidade.



Fonte: Próprio Autor.

Por fim, na Figura 39 avaliamos a perda por escalabilidade das soluções Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP com relação a Otm-MaxJ, isto é, a perda por escalabilidade consiste em avaliar a perda de desempenho que as soluções Heu-MP, Heu-MT e Otm-RIP apresentam com relação a solução Otm-MaxJ quando aumentamos o número de usuários do sistema. Note que as curvas com linhas contínuas/cheias e pontilhadas correspondem

a situação em que os usuários possuem uma taxa requisitada de  $t_j = 13$  bits/s e  $t_j = 21$  bits/s, respectivamente. Assim, inicialmente vemos que para diferentes taxas requisitadas o número de usuários satisfeitos aumenta com o número de usuários existentes no sistema. Entretanto, como os recursos (subportadoras e potência) são limitados, sabemos que existirá um limiar para o número de usuários no sistema de modo que a quantidade de usuários satisfeitos ficará constante/saturada.

Assim, quando aumentamos a quantidade de usuários no sistema a partir de valores pequenos (longe do limiar de saturação), vemos que haverá mais graus de liberdades no sistema de modo que a solução Otm-MaxJ possa obter ganhos de desempenho com relação as demais soluções. Nesse sentido, quando a taxa de dados requisitada pelos usuários é de  $t_j = 13$  bits/s, vemos que a solução Otm-RIP satisfaz uma quantidade de usuários aproximadamente constante. Já a solução Heu-MP tem um comportamento similar a solução Otm-MaxJ, porém o aumento do número de usuários no sistema leva a um pequeno aumento da diferença entre as soluções Otm-MaxJ e Heu-MP, atingindo um valor máximo de 0,81 usuários satisfeitos.

Ao avaliarmos as curvas quando a taxa de dados requisitada pelos usuários é de  $t_j = 21$  bits/s, vemos que existe uma redução da quantidade de usuários satisfeitos com relação as mesmas curvas quando  $t_j = 13$  bits/s. Esse resultado é esperado, pois se temos os mesmos recursos para ambas as situações, seremos capazes de satisfazer mais usuários quando a taxa de dados requisitada pelos usuários for a menor. Novamente, vemos que a solução Otm-RIP satisfaz uma quantidade de usuários aproximadamente constante e a solução Heu-MP tem um comportamento similar a solução Otm-MaxJ. Além disso, o aumento da taxa de dados requisitada pelos usuários levou a solução Otm-MaxJ a ficar próxima do regime de saturação, situação em que podemos ver que a solução Heu-MP satisfaz apenas 0,65 usuários a menos que a solução ótima. Assim, podemos concluir que a heurística proposta é capaz de fornecer bons resultados com perdas controladas mesmo em cenários com elevados número de usuários e com requisitos de taxa elevados.

## 5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação foram estudados os problemas de maximização da taxa de dados e o problema de maximização do número de usuários satisfeitos com restrições de QoS (do inglês, *Quality of Service*) em um sistema cooperativo de dois saltos que emprega protocolo DF (do inglês, *Decode and Forward*) no repetidor. Consideramos um conjunto de  $N$  subportadoras OFDM (do inglês, *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) experimentando desvanecimento Rayleigh independente em cada salto e que o processo de transmissão fonte-repetidor-destino foi dividido em dois *slots* de tempo: no primeiro *slot* a transmissão de dados ocorre da fonte para o repetidor e no segundo *slot* do repetidor para o destino.

Diferentemente de outros trabalhos da literatura, consideramos um cenário mais realista em que o mapeamento entre taxa de dados e SNR (do inglês, *Signal-to-Noise Ratio*) é discreto. Além disso, também consideramos restrições de QoS para o problema de maximização do número de usuários satisfeitos. No momento da escrita dessa dissertação e até onde vai nosso conhecimento, esse é o primeiro trabalho a considerar este problema em sistemas cooperativos. Sob estas considerações, formulamos o problema de maximização da taxa de dados considerando RIP (Restrição Individual de Potência) e RTP (Restrição Total de Potência) e o problema de maximização do número de usuários satisfeitos. Ambos os problemas são combinatoriais, não-lineares e inteiros (binários), sendo caracterizados pela existência de três subproblemas: AS (Assinalamento de Subportadora), ES (Emparelhamento de Subportadora) e AP (Alocação de Potência).

Resolvemos o problema de maximização da taxa de dados considerando RTP de forma completamente analítica e também resolvemos de forma analítica os subproblemas AS e ES quando consideramos RIP, restando apenas o subproblema de AP. Para o subproblema de AP restante, propomos e demonstramos a existência de um limitante inferior e um superior bem como o resolvemos de forma ótima com elevado custo computacional pelo algoritmo BB (do inglês, *Branch and Bound*). Desenvolvemos uma heurística denominada MMPR-LI (Maximização da Mínima Potência Residual com Limitante inferior) baseada no limitante inferior cuja ordem de complexidade é dada por  $\mathcal{O}(N^2M)$  e que apresentou erro relativo máximo de 0.1% com relação a solução ótima.

Linearizamos o problema de maximização do número de usuários de satisfeitos, reduzindo a quantidade de variáveis envolvidas no problema e o resolvemos de forma exata com elevado custo computacional através do algoritmo BB. Desenvolvemos uma heurística que resolve separadamente os subproblemas AS, ES e AP e então os combinamos de modo a obter uma solução para o problema apresentado. A ordem de complexidade da heurística proposta é dada por  $\mathcal{O}(N^2J^2 + NJ^3)$ .

A partir da análise das simulações, observamos que a heurística proposta apresentou um bom desempenho em termos da quantidade de usuários satisfeitos quando

comparada a solução ótima. Também vimos que a perda por escalabilidade existe, porém atinge valores pouco significativos e tende a saturar quando a taxa de dados requisitada pelos usuários do sistema aumenta. Além disso, a heurística proposta apresentou uma economia de 63% no salto 1 e 40% no salto 2 com relação a solução ótima. Nesse sentido, a heurística proposta pode ser especialmente útil para cenários em que haja interesse na redução da interferência devido a sua característica em apresentar baixo consumo de potência em cada salto.

Desse modo, acreditamos que essa dissertação de mestrado serviu para contribuir sobre o entendimento do processo de alocação de recursos em sistemas cooperativos de dois saltos de modo que os dois problemas aqui abordados recebam mais atenção em trabalhos futuros. Também esperamos que as heurísticas aqui desenvolvidas sirvam como base de comparação para avaliar os ganhos de desempenhos de novos algoritmos que serão propostos para os dois problemas estudados.

Como perspectivas para trabalhos futuros, planejamos aumentar o valor das variáveis do problema de maximização do número de usuários satisfeitos (principalmente o número de usuários e de subportadoras), pois a geração das matrizes de transformação chegou a demandar 8 GB (GigaBytes) de memória apenas para criar as matrizes do problema de otimização. Veja que a matriz de transformação  $\mathbf{T}^y$  na equação (72) tem dimensões  $N^2JM \times (N^2JM + J)$ . Se considerarmos  $N = 32$  subportadoras,  $J = 10$  usuários e  $M = 10$  níveis de MCS (do inglês, *Modulation and Coding Scheme*), então a matriz de transformação  $\mathbf{T}^y$  terá dimensões  $102400 \times 102410$ . Além disso, também objetivamos trabalhar com sistemas cooperativos considerando gerenciamento da interferência e eficiência energética, pois estes são dois temas de destaque para a próxima geração das comunicações móveis [17].

## REFERÊNCIAS

- [1] RAPPAPORT, T. S. *Comunicações sem fio: Princípios e Práticas*. 2a Ed., São Paulo, Pearson Education, 2009.
- [2] FUTHT, B.; AHSON, S. A.: *Long Term Evolution: 3GPP LTE Radio and Cellular Technology*. Internet and Communications. CRC Press, 2009.
- [3] SESIA, S.; TOUFIK, I.; BAKER, M.: *LTE, The UMTS Long Term Evolution: From Theory to Practice*. Wiley Publishing, 2009.
- [4] ANDREWS, J. G.; GHOSH, A.; MUHAMED, R.: *Fundamentals of WiMAX: Understanding Broadband Wireless Networking (Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Technologies Series)*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 2007, ISBN 0132225522.
- [5] FITZEK, F. H.P.; KATZ, M. D.: *Cooperation in Wireless Networks: Principles and Applications*. New York: Springer, 2006.
- [6] BJORNSON, E.; LARSON, E. G.; MARZETTA, T. L.: *Massive MIMO: Ten Myths and One Critical Question*. IEEE Communications Magazine, Fevereiro de 2016.
- [7] GUPTA, A.; JHA, R. K.: *A Survey of 5G Network: Architecture and Emerging Technologies*. Vol. 3, pp. 1206-1232, 2015.
- [8] CERWAL, P. et. al.: *Ericsson Mobility Report: ON THE PULSE OF THE NETWORKED SOCIETY*. junho 2015.
- [9] TAO, X.; XU, X.; CUI, Q.: *An Overview of Cooperative Communications*. IEEE Communications Magazine. Vol. 50, no 6, pp. 65-71, ISSN 0163-6804, Junho, 2012.
- [10] LIU, H.; LI, G.: *OFDM-Based Broadband Wireless Network*. 2 Ed., Publishing House Wiley-Intercience, 2005.
- [11] PANWAR, J. P.; JAIN, D. Y. K.: *Challenges Faced by OFDM Technique for Broadband Wireless Mobile Communication*. International Journal of Research in Computer and Communication Technology. Vol. 1, no. 7, Dezembro, 2013. ISSN 2278-5841.
- [12] LIAO, HS.; CHEN, PY.: *An Efficient Downlink Radio Resource Allocation with Carrier Aggregation in LTE-Advanced Networks*. IEEE Transactions On Mobile Computing. Vol. 13, No. 10, 2014.
- [13] GROSS, J.; BOHGE, M. *Dynamic Mechanisms in OFDM Wireless Systems: A Survey on Mathematical and System Engineering Contributions*. Relatório Técnico, Berlin, março, 2006.

- [14] JANG, J.; LEE, B. K.; LEE, Y. *Transmit Power and Bit Allocations for OFDM Systems in a fading Channel*. Global Telecommunications Conference (GLOBECOM), IEEE, Vol. 2, pp. 858-862, Dezembro 2003, doi 10.1109/GLOCOM.2003.1258361.
- [15] ZHU, H. et al: *A survey of quality of service in IEEE 802.11 networks*. IEEE Wireless Communications. Vol. 11, no. 4, pp. 6-14, 2004.
- [16] PEREIRA, M. C. *Análise de Desempenho em Redes Wireless Ad-Hoc e Estabelecimento de um Acordo de Nível de Serviço Pró-Ativo*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Março-2004.
- [17] JEFFREY, G. et. al. *What Will 5G Be?*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications. Vol. 32, no. 6, pp. 1065-1082, 2014.
- [18] PAULRAJ, CA. J.; GORE D. A.; NABAR, R. U.; BOLCSKEI, H.: *An overview of MIMO communications: a key to gigabit wireless*. Proceedings of the IEEE. Vol. 92, no. 2, pp. 198-218, Fevereiro, 2004, doi 10.1109/JPROC.2003.821915.
- [19] ALVES, H.; SOUZA, R. D.; PELLENZ, M. E.: *Brief survey on full-duplex relaying and its applications on 5G*. IEEE 20th International Workshop on Computer Aided Modelling and Design of Communication Links and Networks (CAMAD), Guildford, 2015, pp. 17-21. doi: 10.1109/CAMAD.2015.7390473.
- [20] HASNA, M. O.; ALOUINI, M. S. *Optimal Power Allocation for Relayed Transmissions over Rayleigh Fading Channels*. The 57th IEEE Semiannual Vehicular Technology Conference. Vol. 4, pp. 2461-2465, Abril 2003. doi: 10.1109/VETECS.2003.1208833.
- [21] DING, Y. G. et al. *Power Allocation for Non-Regenerative OFDM Relaying Channels*. International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing. Vol. 1, pp. 185-188, Setembro 2005, doi 10.1109/WCNM.2005.1544013.
- [22] KUNT, H. W.: *The Hungarian Method for the Assignment Problem*. Em Jünger, Michael, Thomas M. Lieblich, Denis Naddef, George L. Nemhauser, William R. Pulleyblank, Gerhard Reinelt, Giovanni Rinaldi e Laurence A. Wolsey (editores): 50 Years of Integer Programming 1958-2008, pp. 29-47, Berlin, Heidelberg, 772010. Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-540-68274-5. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-68279-0\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-68279-0_2).
- [23] YIN, H.; LIU, H.: *An efficient multiuser loading algorithm for OFDM-based broadband wireless systems*. Global Telecommunications Conference, 2000. GLOBECOM '00. IEEE, San Francisco, CA, 2000, pp. 103-107 vol. 1. doi 10.1109/GLOBECOM.2000.891705
- [24] HERDIN, M.A *Chunk Based OFDM Amplify-and-Forward Relaying Scheme for 4G Mobile Radio Systems*. In Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Commun. (ICC), vol. 10, June 2006, pp. 4507-4512.

- [25] HOTTINEN, A.; HEIKKINEN, T. *Subchannel Assignment in OFDM Relay Nodes*. 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton, NJ, pp. 1314-1317, Março 2006, doi 10.1109/CISS.2006.286667
- [26] WANG, W.; YANG, S.; GAO, L.: *Comparison of Schemes for Joint Subcarrier Matching and Power Allocation in OFDM Decode-and-Forward Relay System*. IEEE International Conference on Communications, pp. 4983-4987, May 2008, ISSN 1550-3607, doi 10.1109/ICC.2008.934.
- [27] WANG, W.; WU, R.: *Capacity Maximization for OFDM Two-Hop Relay System with Separate Power Constraints*. IEEE Transactions on Vehicular Technology. Vol. 58, no. 9, pp. 4943-4954, Agosto 2009, ISSN 0018-9545.
- [28] DANG, W. *et al.* *Subcarrier-Pair Based Resource Allocation for Cooperative Multi-Relay OFDM Systems*. IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 9, no. 5, pp. 1640-1649, Maio 2010.
- [29] HAJIAGHAYI, M; DONG, M; LIANG B.: *Jointly Optimal Channel Pairing and Power Allocation for Multichannel Multihop Relaying*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 59, No. 10, Outubro de 2011.
- [30] SILVA Jr, J. M. B. *et. al.*: *Power Allocation Schemes for Multichannel Two-hop Relaying Systems*. 2012 International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS), p.356-360, Dezembro de 2012, ISSN 2154-0217, doi 10.1109/ISWCS.2012.6328389.
- [31] ASHRAFI, M.; KAZEMI, O. J.; NAVAIE, K.: *A low complexity power allocation algorithm in OFDM based decode and forward relay systems*. 24th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), Shiraz, 2016, pp. 7-12, doi 10.1109/Iranian-CEE.2016.7585380.
- [32] LIMA, F. R. M. *et al.* *Resource Assignment for Rate Maximization with QoS Guarantees in Multiservice Wireless Systems*. IEEE Transac. Veh. Technol. Vol 61, no 3, pp. 1318-1332, Março 2012.
- [33] BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D; SHETTY C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3 ed., Wiley Interscience, 2006.
- [34] SANTOS, R. B.; Lima, F. R. M.; FREITAS, W. C.; CAVALCANTI, F. R. P.: *QoS based Radio Resource Allocation and Scheduling with Different User Data Rate Requirements for OFDMA Systems*. Proc. of the IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, pp. 1-5, 2007.
- [35] LIMA, F. R. M.; ANSTEDT, S. W; CAVALCANTI, F. R. P.; FREITAS Jr, W. C.: *Scheduling for Improving System Capacity in Multiservice 3GPP LTE*. Journal of Electrical and Computer Engineering, ID do artigo: 819729, 16 páginas, 2010.



- [36] RODRIGUES, E. B. Rodrigues; LIMA, F. R. M.; MACIEL, T. F.; CAVALCANTI, F. R. P.: *Maximization of user satisfaction in OFDMA systems using utility-based resource allocation*. Wireless Communication Mobile Computing, pp. 376-392, 2014.
- [37] HUANG, X.; ANSARI, N.: *Joint Spectrum and Power Allocation for Multi-Node Cooperative Wireless Systems*. IEEE Transactions on Mobile Computing. Vol. 14, No. 10, pp. 2034-2044, Outubro 2015.
- [38] LIANG, G. et. al.: *Fairness-Aware and Energy Efficiency Resource Allocation in Multiuser OFDM Relaying System*. Mobile Information Systems, v. 2016, 2016.
- [39] ALAM, Md. S.; FELLOW, W. M.; SHEN. X.: *Relay Selection and Resource Allocation for Multi-User Cooperative OFDMA Networks*. IEEE Transactions on Wireless Communications. Vol. 12, no. 5, Maio 2013.
- [40] ZANG, D. J.; LETAIEF, K. B.: *Multiuser Adaptive Subcarrier-and-Bit Allocation with Adaptive Cell Selection for OFDM Systems*. IEEE Transactions on Wireless Communications. Vol. 3, no.5, pp. 1566-1575, Setembro 2004, ISSN 1536-1276.
- [41] GARCIAL, A. L. *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*. 3a Ed, Pearson Education, 2008.
- [42] HUGHES-HARTOGS, D.: *Ensemble Modem Structure for Imperfect Transmission Media*. Patente US 4833706, Maio, 1989.
- [43] IBM. *IBM ILOG CPLEX Optimizer*. Disponível em: <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>. Acessado em: 29/06/2016.

## APÊNDICE A – REGIÃO DE SIMETRIA DO PROBLEMA RIP

Neste apêndice apresentaremos duas equações que visam determinar a melhor relação entre as SNRs dos saltos 1 e 2 que determinam um eixo que divide a superfície da taxa de dados total em duas regiões aproximadamente simétricas para o problema considerado no Capítulo 3.

Definindo  $\bar{g}^s$  e  $\bar{g}^r$  como os ganhos de canal médio por cada subportadora dos saltos 1 e 2, respectivamente. Também definimos  $\bar{\gamma}^s$  e  $\bar{\gamma}^r$  como as SNRs médias dos saltos 1 e 2, respectivamente. Assim, considerando essas definições, podemos escrever:

$$\bar{\gamma}^s = \bar{g}^s \cdot P_{\text{tot}}^s / N, \quad (81)$$

$$\bar{\gamma}^r = \bar{g}^r \cdot P_{\text{tot}}^r / N. \quad (82)$$

Da Proposição 3.1, a solução ótima para o subproblema AS do problema RIP/RTP é dada por  $g_q^{r*} = \max\{g_{q,1}^r, \dots, g_{q,J}^r\}$ , em que  $g_{q,j}^r, \forall q \in \mathcal{N}$  e  $\forall j \in \mathcal{J}$ , são exponencialmente distribuídos com média  $\bar{g}^r$ . Além disso, note que  $g_q^{r*}, \forall q \in \mathcal{N}$ , representa um conjunto de variáveis aleatórias i.i.d. Seja  $\bar{G}^r$  o valor esperado de  $g_q^{r*}, \forall q \in \mathcal{N}$ , então podemos escrever [41]:

$$\bar{G}^r = \bar{g}^r \cdot H(J), \text{ em que } H(J) = \sum_{k=1}^J \frac{1}{k}. \quad (83)$$

Note que  $\bar{g}^r$  e  $\bar{\gamma}^r$  consistem no ganho de canal médio e na SNR média das subportadoras do salto 2 antes de realizarmos o AS de forma ótima de acordo com a Proposição 3.1. Seja  $\bar{\nu}^r$  a SNR média nas subportadoras do salto 2 após realizarmos o AS de forma ótima, então podemos escrever:

$$\bar{\nu}^r = \bar{G}^r P_{\text{tot}}^r / N \stackrel{(83)}{=} H(J) \bar{g}^r P_{\text{tot}}^r / N \stackrel{(82)}{=} H(J) \bar{\gamma}^r. \quad (84)$$

A Proposição 3.2 nos garante que subportadoras emparelhadas possuem mesma SNR. Disso segue as equações (84) e (81) devem ser iguais. Assim, podemos escrever

$$\bar{\gamma}^s = \bar{\nu}^r \stackrel{(84)}{\Rightarrow} \bar{\gamma}^s = \bar{\gamma}^r H(J), \quad (85)$$

ou em decibéis

$$\bar{\gamma}_{\text{dB}}^s = \bar{\gamma}_{\text{dB}}^r + H(J)_{\text{dB}}. \quad (86)$$

A partir da análise de simulações, vemos que a estimativa da equação (86) para a posição do eixo de simetria do problema RIP apresenta um pequeno erro para

$J \geq 1$ . Para contornar esse problema, quando  $J \geq 2$ , nós adicionamos um fator  $\phi$  obtido por análise empírica na equação (86) de modo que a estimativa para o eixo de simetria seja mais precisa. O fator  $\phi$  é mostrado a seguir:

$$\phi = \left[ \frac{\bar{\gamma}_{\text{dB}}^r}{28 - H(J)_{\text{dB}}} + 1 \right] \cdot u(J - 1), \quad (87)$$

em que  $u(t)$  denota a função degrau unitário, isto é,  $u(t) = 0$  se  $t \leq 0$  e  $u(t) = 1$ , caso contrário. Adicionando a equação (87) a (86), temos uma nova expressão que relaciona a SNR média de cada salto de modo a estimar a posição do eixo de simetria, conforme a seguir:

$$\bar{\gamma}_{\text{dB}}^s = \bar{\gamma}_{\text{dB}}^r + H(J)_{\text{dB}} + \left[ \frac{\bar{\gamma}_{\text{dB}}^r}{28 - H(J)_{\text{dB}}} + 1 \right] \cdot u(J - 1). \quad (88)$$

## APÊNDICE B – COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Neste apêndice faremos a análise da ordem de complexidade computacional para os algoritmos propostos ao longo da dissertação. Adicionalmente também mostraremos a ordem de complexidade do algoritmo BB como meio de justificar a necessidade do desenvolvimento de soluções alternativas para o problemas de otimização estudados.

O cálculo da complexidade computacional considera geralmente dois aspectos: o tempo gasto e/ou o consumo de memória requisitada pelo algoritmo. Como sabemos, a cada dia as tecnologias aumentam significativamente a capacidade de armazenamento dos computadores sendo que a capacidade de processamento ainda é um fator determinante na vasta maioria dos problemas conhecidos.

Dessa maneira, o cálculo da complexidade computacional temporal consiste em estimar a quantidade máxima (pior caso) de operações básicas que serão executadas por um algoritmo desde o início de sua execução até seu término. Um ponto importante na análise da complexidade consiste em definir quais instruções do algoritmo devem ser consideradas como operações básicas. Seguindo a abordagem empregada pela referência [40] nós consideramos soma/subtração, multiplicação/divisão e comparação como operações básicas, isto é, consideramos que estas operações são responsáveis pelo maior consumo de tempo na execução dos algoritmos a serem analisados. Além disso, também devemos considerar que as operações básicas apresentam o mesmo tempo de execução.

Dadas as considerações anteriores e considerando a modelagem apresentada em [40], a ordem de complexidade do algoritmo BB para resolver o problema de maximização da taxa de dados apresentado na Capítulo 3 é dada por:

$$\mathcal{O}\left(M^2 N^5 2^{MN^2}\right). \quad (89)$$

Vale ressaltar que a ordem de complexidade do algoritmo BB para resolver o problema de maximização do número de usuários satisfeitos apresentado no Capítulo 4 será superior ao resultado apresentado na equação (89), pois esse problema tem um maior número de variáveis de otimização e de restrições do que o problema de maximização da taxa de dados.

A seguir, calculamos a complexidade computacional do algoritmo MMPR-LI e das etapas 1 (Figura 28), 2 (Figura 29) e 3 (Figura 30) do algoritmo de gerenciamento de recursos para o problema de maximização do número de satisfeitos.

### Ordem de Complexidade do Algoritmo MMPR-LI

O algoritmo MMPR-LI é mostrado na Figura 10, sendo composto de três

etapas: “Algoritmo HH”, “Limitante Inferior” e “MMPR”. A ordem de complexidade da etapa “Algoritmo HH” é majorada pela execução do algoritmo HH (do inglês, *Hughes Hartogs*) em cada salto, sendo dada por  $\mathcal{O}(NM \log_2(N))$  [42]. Para a etapa “Limitante Inferior”, o pior caso ocorre quando  $r_n^{s,hh} \neq r_n^{r,hh}, \forall n \in \mathcal{N}$ . Nessa situação, a ordem de complexidade dessa etapa será dada por  $\mathcal{O}(N)$ .

A terceira etapa do algoritmo MMPR-LI é mostrada no pseudo código do Algoritmo 1. A ordem de complexidade dessa etapa é majorada pela alocação de potência realizada no “Laço Principal” e seu pior caso ocorre quando a potência do repetidor  $P_{\text{tot}}^r$  é suficiente para que todas as subportadoras no salto 2 atinjam o máximo nível de MCS  $M$ . Assim, a instrução “**Enquanto**” no Laço Principal executará  $NM$  vezes e cada execução demanda  $N$  operações com o cálculo de cada uma das seguintes variáveis:  $f_n, \epsilon_n^s, \epsilon_n^r, \beta_n, \forall n \in \mathcal{N}$ , e  $i$ . Desse modo, a ordem de complexidade computacional dessa etapa será dada por  $\mathcal{O}(MN^2)$ .

A Tabela 3 contém a ordem de complexidade de cada uma das etapas do algoritmo MMPR-LI. Assim, considerando apenas os termos mais significativos, podemos dizer que a ordem de complexidade do algoritmo MMPR-LI é majorada pela complexidade da etapa “MMPR”, sendo dada por  $\mathcal{O}(MN^2)$ .

Tabela 3 – Número de operações feitas pelo algoritmo MMPR-LI.

Etapa	Ordem de Complexidade
Algoritmo HH	$\mathcal{O}(NM \log_2(N))$
Limitante Inferior	$\mathcal{O}(N)$
MMPR	$\mathcal{O}(MN^2)$
Total	$\mathcal{O}(NM \log_2(N) + N + MN^2)$

Fonte: Próprio Autor.

### Ordem de Complexidade Computacional para o Algoritmo de Maximização do Número de Usuários Satisfeitos

Esse algoritmo é dividido nas etapas 1, 2 e 3 e são mostradas nas Figuras 28, 29 e 30, respectivamente. A seguir, determinamos a ordem de complexidade computacional para cada uma das três etapas do algoritmo.

#### *Ordem de Complexidade da Etapa 1*

A seguir mostramos a ordem de complexidade computacional para efetuar a execução de cada passo da Etapa 1 mostrada Figura 28:

- Passo 1 A ordem de complexidade desse passo é majorada pelo cálculo do ganho de canal médio  $\bar{g}_j^r, \forall j \in \mathcal{J}_a$ .
- Passo 2 A pior situação para esse passo ocorre quando a mínima quantidade de subportadoras requisitadas pelos usuários em  $\mathcal{J}_a$  for muito superior a  $N$ . Nessa situação, a

execução do Passo 2 levará a remoção de todos os usuários do sistema. Assim, no pior caso o Passo 2 executará  $J_a$  vezes e cada execução terá ordem de complexidade majorada pela operação  $j^* = \operatorname{argmin}\{k_j \mid \forall j \in \mathcal{J}_a\}$  que é  $\mathcal{O}(J_a)$ . Dessa forma, esse passo terá ordem de complexidade dada por  $\mathcal{O}(J_a^2)$ .

Etapa 3 O cálculo de todas as variáveis nesse passo tem ordem de complexidade  $\mathcal{O}(J_a)$ .

Passo 4 Primeiramente devemos notar que o Passo 4 executará  $\Delta N$  vezes para cada execução do Passo 5. Assim, vamos denotar  $\Delta N$  (no Laço do Passo 4) por  $\Delta N_i$  como referência a quantidade de subportadoras disponíveis no sistema na  $i$ -ésima execução do Passo 5. Desse modo, o Passo 4 será executado  $\Delta N_i$  vezes e cada execução tem ordem de complexidade  $\mathcal{O}(J_a)$  que é majorada pela operação  $j^* = \operatorname{argmax}\{\Delta P_j^r \mid \forall j \in \mathcal{J}_a\}$ . Com isso, na  $i$ -ésima iteração do Passo 5, o Passo 4 terá ordem de complexidade dada por  $\mathcal{O}(\Delta N_i J_a)$ .

Passo 5 Devemos perceber que a pior situação para o Passo 5 ocorre quando todas as  $\Delta N_i, 1 \leq i \leq J_a$ , subportadoras no Passo 4 são atribuídas aos usuários em  $\mathcal{J}_a$  e mesmo assim a restrição de potência no repetidor nunca é atendida (i.e.,  $P_c^r > P_{\text{tot}}^r$ ), algo que levará o Passo 5 a remover, um a um, todos os usuários do conjunto  $\mathcal{J}_a$ . Dessa forma, a ordem de complexidade do Passo 5 na  $i$ -ésima iteração é determinada pela execução em conjunto das  $\Delta N_i$  iterações do Passo 4 seguida da remoção do usuário  $j^*$  (que demanda ordem de complexidade  $\mathcal{O}(J_a)$ ) no Passo 5, isto é, a ordem de complexidade da  $i$ -ésima iteração/execução do Passo 5 é dada por  $\mathcal{O}(\Delta N_i J_a + J_a)$ . Assim, a ordem de complexidade do Passo 5 será dada por:

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{J_a} (\Delta N_i J_a + J_a)\right) = \mathcal{O}\left(J_a \sum_{i=1}^{J_a} (\Delta N_i) + J_a^2\right) \quad (90)$$

Note que o maior valor para o somatório  $\sum_{i=1}^{J_a} \Delta N_i$  na equação (90) ocorre quando na  $i$ -ésima iteração do Passo 5 todas as  $\Delta N_i$  subportadoras forem atribuídas para um mesmo usuário  $j^*$  no Passo 4 e este usuário  $j^*$  é removido no Passo 5. Assim, as subportadoras do usuário removido  $j^*$  serão novamente atribuídas a um único usuário no Passo 4 e este usuário será removido no Passo 5. Esse processo sempre manterá o valor de  $\Delta N_i$  máximo até que todos os usuários do sistema sejam removidos. Para  $i = 1$ , temos a primeira execução do Passo 4 de modo que  $\Delta N_1$  é previamente determinado no Passo 1, isto é,  $\Delta N_1 = N - \sum_{j=1}^{J_a} \lceil t_j / r_M \rceil$ . Nesse caso, o maior valor para  $\Delta N_1$  ocorre quando  $\lceil t_j / r_M \rceil = 1$  (cada usuário precisa de no mínimo uma subportadora para ser satisfeito), sendo dado por  $\Delta N_1 = N - J_a$ . A partir disso, podemos concluímos que  $\Delta N_i = (N - J_a + i - 1), \forall i \in \mathcal{J}_a$ . Substituindo  $\Delta N_i$  na equação (90), temos:

$$\mathcal{O}\left(J_a \sum_{i=1}^{J_a} (N - J_a - 1 + i) + J_a^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{J_a^2}{2} (2N - J_a + 1)\right) \quad (91)$$

Se considerarmos apenas os termos de maior ordem na equação (91) e levando em consideração que em sistemas práticos  $N \gg J_a$ , então a ordem de complexidade do Passo 5 será dada por  $\mathcal{O}(NJ_a^2)$ . Além disso, vemos que a ordem de complexidade do Passo 5 majora a ordem de complexidade dos passos anteriores. A partir disso, podemos concluir que a ordem de complexidade da Etapa 1 será dada por  $\mathcal{O}(NJ_a^2)$ .

### *Ordem de Complexidade da Etapa 2*

A Etapa 2 é mostrada na Figura 29. A ordem de complexidade computacional dessa etapa é majorada pela execução dos passos 2, 3 e 4 que em conjunto formam um laço. O laço se inicia no passo 2 e será executado  $J_a - 1$  vezes. Para cada execução do Passo 2 (ou 3), o Passo 4 será executado  $N_{j^*}$  vezes. Assim, iniciaremos a análise da ordem de complexidade dessa etapa a partir do Passo 4.

Denotaremos  $N_{j^*}$  (no laço do Passo 4) por  $N_{l,j^*}$  como referência a quantidade de subportadoras que devem ser assinaladas para o usuário  $j^*$  após a  $l$ -ésima iteração/execução do passo 2 (ou 3). Assim, a ordem de complexidade do Passo 4 na  $l$ -ésima iteração é determinada a partir do cálculo das variáveis  $U_i$  e  $d_i, \forall i \in \mathcal{N}$ , que demandam (teoricamente)  $N|\mathcal{S}|$  operações cada uma. Devemos observar que  $|\mathcal{S}|$  diminui à medida que efetuamos o AS para cada usuário de modo que as colunas e linhas da variável  $U_{i,j}$  deveriam ser removidas. Entretanto, quando implementamos a Etapa 2 em uma linguagem de programação não efetuamos a remoção de linhas/colunas da variável  $U_{i,j}$ . Na prática, adicionamos caracteres especiais como meio de indicar as posições que foram removidas. Assim, mesmo que não sejam executadas operações aritméticas com as posições que foram removidas, ainda haverá execução das operações lógicas com essas posições e portanto elas devem ser consideradas no cálculo da ordem de complexidade. Feito essa observação, o número de operações executadas para efetuar o cálculo das variáveis  $U_{i,j}$  e  $d_i$  deve ser considerado constante e dado por  $NJ_a$ .

Na  $l$ -ésima execução do Passo 2 (ou 3) temos a seleção do usuário  $j^*$  com a operação  $j^* = \operatorname{argmax}\{\mathcal{S}\}$  bem como  $N_{l,j^*}$  execuções do Passo 4. Sabendo que a ordem de complexidade para a seleção do usuário  $j^*$  e a execução do Passo 4 são dadas por  $\mathcal{O}(J_a)$  e  $\mathcal{O}(N_{l,j^*} NJ_a)$ , respectivamente, então a execução das  $J_a - 1$  iterações do laço composto pelos passos 2, 3 e 4 terá ordem de complexidade dada por:

$$\mathcal{O}\left(\sum_{l=1}^{J_a-1} (N_{l,j^*} NJ_a + J_a)\right) = \mathcal{O}\left(NJ_a \sum_{l=1}^{J_a-1} \overbrace{(N_{l,j^*})}^{N - N_{J_a, j^*}} + J_a(J_a - 1)\right) = \mathcal{O}(NJ_a(N - N_{J_a, j^*}) + J_a(J_a - 1)). \quad (92)$$

Note que na equação (92) a ordem de complexidade diminui com o aumento de  $N_{J_a, j^*}$ . Dessa forma, a situação que leva a Etapa 2 ao pior caso será quando  $N - N_{J_a, j^*} \approx N$ . Assim, considerando os temas mais relevantes e sabendo que em sistemas práticos  $N \gg J_a$ , a ordem de complexidade da Etapa 2 será dada por  $\mathcal{O}(N^2 J_a)$ .

### *Ordem de Complexidade da Etapa 3*

A Etapa 3 é mostrada na Figura 30 e sua ordem de complexidade é determinada a partir da execução dos passos 2–5. Note que os passos 2–5 podem ser divididos em dois laços: laço principal e secundário. O laço secundário consiste na execução dos passos 3 e 4, sendo responsável por realizar AP para os usuários do conjunto  $\mathcal{J}_a$  até que eles sejam satisfeitos. O laço principal consiste na execução do Passo 2, laço secundário e Passo 5, sendo responsável por definir o conjunto  $\mathcal{J}_a$ , aplicar os as etapas 1 e 2 considerando emparelhamento ordenado.

Dito isso, denotaremos como  $J_{a,i}$  e  $N_{i,j^*}$  a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{J}_a$  e o número de subportadoras assinaladas ao  $j^*$ -ésimo usuário, respectivamente, na  $i$ -ésima iteração ( $1 \leq i \leq J_a$ ) do laço principal. Assim, na  $i$ -ésima iteração do laço principal, o laço secundário executará  $J_{a,i}$  vezes. Cada iteração do laço secundário demanda uma ordem de  $J_{a,i}$  operações para selecionar o usuário  $j^*$  com maior  $s_j, \forall j \in \mathcal{J}_a$ ,  $N$  operações para determinar as subportadoras em  $w_q, \forall q \in \mathcal{N}$ , que foram assinaladas para  $j^*$  e  $MN_{i,j^*}^2$  operações para realizar alocação de potência usando o algoritmo MMPR-LI. Dessa forma, na  $i$ -ésima iteração do laço principal, o laço secundário terá ordem de complexidade dada por:

$$\mathcal{O} \left( \sum_{j=1}^{J_{a,i}} (J_{a,i} + N + MN_{i,j}^2) \right) = \mathcal{O} \left( J_{a,i}(J_{a,i} + N) + M \sum_{j=1}^{J_{a,i}} N_{i,j}^2 \right) \quad (93)$$

Na equação (93), o somatório  $\sum_{j=1}^{J_{a,i}} N_{i,j}^2$  possui a restrição de que  $\sum_{j=1}^{J_{a,i}} N_{i,j} = N$ . Assim, essa soma será máxima quando todos os fatores forem iguais, isto é,  $N_{i,1} = \dots = N_{i,J_{a,i}} = N/J_{a,i}$  [33]. Nesse caso, teremos  $\sum_{j=1}^{J_{a,i}} N_{i,j}^2 \leq N^2/J_{a,i}$ . Usando essa relação podemos reescrever a equação (93) conforme a seguir:

$$\mathcal{O} (J_{a,i}^2 + J_{a,i} N + MN^2/J_{a,i}) . \quad (94)$$

O laço principal executará na pior situação  $J$  vezes. Na primeira iteração teremos  $J_{a,1} = J$ , na segunda iteração  $J_{a,2} = 1$ , na terceira iteração  $J_{a,3} = 2$ . Seguindo este raciocínio, na  $J$ -ésima iteração teremos  $J_{a,J} = J - 1$ . Note que a  $i$ -ésima iteração do laço principal requer  $J_{a,i}$  iterações/execuções do laço secundário bem como a execução das etapas 1 ( $\mathcal{O}(NJ_{a,i}^2)$ ) e 2 ( $\mathcal{O}(N^2J_{a,i})$ ) com emparelhamento ordenado ( $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ ).

A fim de facilitar a análise, devemos perceber que o emparelhamento orde-



nado em conjunto com as etapas 1 e 2 são efetuados em sequência. Dessa forma, vamos considerar na análise seguinte apenas a ordem de complexidade das etapas 1 e 2, pois a etapa 2 majora a ordem de complexidade do emparelhamento ordenado. A rigor, a ordem de complexidade da etapa 2 também majora a ordem de complexidade da etapa 1 para sistemas realistas (i.e.,  $N \gg J_{a,i}$ ), porém desejamos determinar a dependência que a ordem de complexidade da Etapa 3 apresenta com relação ao número de usuários. Feito essas considerações, podemos expressar a ordem de complexidade da Etapa 3 conforme a seguir:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O} \left( \sum_{j=1}^J \left( \overbrace{N j^2 + N^2 j}^{\text{etapas 1 e 2}} + \overbrace{j^2 + jN + MN^2/j}^{\text{laço secundário}} \right) \right) = \quad (95) \\ & \mathcal{O} \left( (N+1) \sum_{j=1}^J j^2 + (N^2 + N) \sum_{j=1}^J j + MN^2 \sum_{j=1}^J 1/j \right) = \\ & \mathcal{O} \left( \frac{(N+1) J(J+1)(2J+1)}{6} + \frac{(N^2 + N)(J+1)J}{2} + MN^2 H(J) \right), \end{aligned}$$

em que  $H(J)$  consiste na série harmônica até o  $J$ -ésimo termo, isto é,  $H(J) = \sum_{j=1}^J 1/j$ . Se consideramos apenas os termos de maior ordem na equação (95), podemos expressar a ordem de complexidade da Etapa 3 conforme a seguir:

$$\mathcal{O} (N^2 J^2 + NJ^3). \quad (96)$$

A Tabela 4 sumariza o cálculo da ordem de complexidade para cada um das etapas do algoritmo de maximização do número de usuários satisfeitos.

Tabela 4 – Número de operações feitas pelas Etapas 1, 2 e 3.

Etapa	Ordem de Complexidade
1	$\mathcal{O}(NJ_a^2)$
2	$\mathcal{O}(N^2 J_a)$
3	$\mathcal{O}(N^2 J^2 + NJ^3)$

Fonte: Próprio Autor