UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ DAVID ARÉVALO BUITRAGO

REGULARIDADE ÓTIMA PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DEGENERADAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA TANGENCIAL

FORTALEZA

2017

JOSÉ DAVID ARÉVALO BUITRAGO

REGULARIDADE ÓTIMA PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DEGENERADAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA TANGENCIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte .

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A731r Arévalo Buitrago, José David.
Regularidade ótima para equações de evolução degeneradas : uma abordagem geométrica tangencial / José David Arévalo Buitrago. – 2017.
34 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Equações Parabólicas Degeneradas. 2. Regularidade Ótima de Soluções. 3. "Scaling" Intrínseco. I. Título.
CDD 510

JOSÉ DAVID ARÉVALO BUITRAGO

REGULARIDADE ÓTIMA PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DEGENERADAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA TANGENCIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovoda em: __ / __ / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

A Deus, minha familía e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me permitido cumprir esta etapa. Aos meus pais, Aristobulo Arévalo e Ilba Buitrago, pela educação que me deram, por todo o apoio e sacrifício feito. Um agradecimento especial para os meus irmãos Johanna, Cristian e Maribel porque sempre estiveram atentos para me ajudar neste caminho e por todo o carinho brindado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte, pela orientação, compreensão, dedicação, pelos conselhos e confiança depositada em mim.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFC que participaram diretamente da minha formação.

Aos meus colegas de mestrado e o pessoal do dotorado que sempre estiveram dispostos a me ajudar e fazer agradável minha estância. Agradecimento especial ao Davi Ribeiro, Eddygledson Gama, Acácio Neves, Adam silva, Fagner Alves, Amilcar Montalban, Fabricio de Figueredo, Wanderley oliveira, pela sua colaboração e amizade. A Janniely e Edson pelas conversas durante o seminario.

Agradeço ao grupo " o cafezinho"gente boa e querida, com os quais se compartilharam momentos reconfortantes.

Agradeço também a Andréa Costa e Jessyca Soares pela eficiência e colaboração no que precise.

A CAPES pelo apoio financeiro.

“As lembranças verdadeiras pareciam fantastamas, em quanto as lembraças falsas eram tão convincentes que substituíam a realidade” (Gabriel García Márquez)

“A física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma” (Antonio Gomes Lacerda)

RESUMO

Neste trabalho estudamos o modulo de continuidade ótimo para soluções fracas da equação $p-$parabólica não-homogênea degenerada

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{em } \Omega_T,\ p \geq 2,$$

as quais são $C^{0,\alpha}$, para algum $\alpha \in (0,1)$, como é mostrado em (5).

O objetivo principal deste trabalho é apresentar o expoente Hölder α ótimo em termos de p, q, r e a dimensão n do espaço. Usando um método baseado na noção de equações geométricas tangenciais e o "scaling" intrínseco do operador $p-$parabólico, mostramos que o expoente α ótimo é

$$\alpha = \frac{(pq-n)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]}.$$

Palavras-chave: Equações parabólicas degeneradas. Regularidade ótima de soluções. "Scaling" intrínseco.

ABSTRACT

In this work we study the sharp continuity module for weak solutions of degenerate inhomogeneous p-parabolic equations

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{em } \Omega_T,\ p \geq 2,$$

which are $C^{0,\alpha}$, for some $\alpha \in (0,1)$, as shown in (5).

The main objective of this work is to present the sharp Hölder exponent α in terms of p, q, r and the space dimension n. Using a method based on the notion of geometric tangential equations and the intrinsic scaling of the $p-$parabolic operator show that the sharp exponent is

$$\alpha = \frac{(pq-n)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]}.$$

Keywords: Degenerate parabolic equations. Sharp regularity of solutions. Intinsic scaling.

NOTAÇÕES

- $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções C^∞ com soporte compacto em Ω.

- $L^{q,r}(\Omega_T) \equiv L^r(0,T;L^q(\Omega))$ consiste de todas as funções fortemente mensuráveis $u:(0,T]\to L^q(\Omega)$ com

$$\|u\|_{L^{q,r}(\Omega_T)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^q(\Omega)}^r\right)^{\frac{1}{r}} dt < \infty$$

para $1 \le r < \infty$ e

$$\|u\|_{L^{q,\infty}(\Omega_T)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

Alem $u \in L^{q,r}_{loc}(\Omega_T)$, se para cada subconjunto compacto K de Ω e cada subintervalo $[t_1,t_2]\subset(0,T]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|_{L^q(K)}^r\, dt < \infty.$$

Sempre que $q=r$ definimos $L^{q,r}(\Omega_T)\equiv L^q(\Omega_T)$, $L^{q,r}_{loc}(\Omega_T)\equiv L^q_{loc}(\Omega_T)$ e $\|u\|_{L^{q,r}(\Omega_T)}\equiv \|u\|_{L^q(\Omega_T)}$.

- $W^{1,p}(\Omega)$: $\{u \in L^p(\Omega); Du \in L^p(\Omega)\}$. Onde Du é o gradiente generalizado (no sentido de Sobolev) de u. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é fornecido com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)} & \text{se } 1\le p<\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}(|u|+|Du|) & \text{se } p=\infty \end{cases}$$

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$

- $\|v\|_{p,avg,G} := \left(⨍_G |v|^p\, dxdt\right)^{1/p} = \dfrac{1}{|G|^{1/p}}\|v\|_{L^p(G)}$, $v\in L^p(G)$, onde a integral média é definida por

$$⨍_G \psi = \frac{1}{|G|}\int_G \psi.$$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O protótipo de equação $p-$parabólica não-homogênea é

$$u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{em } \Omega_T \tag{1}$$

para $p > 1$. Nós podemos observar facilmente que nos pontos onde $|\nabla u| = 0$ o modulo de elipticidade $|\nabla u|^{p-2}$ se desvanece se $p > 2$ e a quantidade diverge se $1 < p < 2$. Devido a suas diferenças estás equações são classificadas como degeneradas se $p > 2$ e singular se $1 < p < 2$. Muitas vezes, os dois tipos de equações foram estudados separadamente já que mostram comportamentos bastante diferentes e as mesmas técnicas não sempre funcionam de forma simultânea nos dois tipos, algumas vezes basta fazer uma modificação adequada.

Um dos aspectos centrais no entendimento do comportamento local das soluções de equações parabólicas singulares e degeneradas é a Hölder continuidade das soluções fracas limitadas, que em última instância segue de desigualdades tipo Harnack (teoria de regularidade para soluções fracas de equações parabólicas pode ser vista em (5)). O problema com este tipo de aproximação é que só fornece estimativas qualitativas as quais é bem conhecido são importantes, porem ter conhecimento do expoente de Hölder ótimo fornece um maior entendimento das soluções.

O objetivo principal deste trabalho está em mostrar de forma explicita o expoente de Hölder continuidade das soluções fracas de equações $p-$parabólicas degeneradas não-homogêneas. Derivações precisas e quantitativas do expoente de Hölder continuidade tinham escapado da comunidade matemática até agora, com a única exceção sendo o resultado para funções $p-$harmônicas no plano mostrado em (9). Esta informação quantitativa tem um caráter importante no análise de diferentes questões qualitativas para edps parabólicas, tais como análise de blow-up, resultados tipo Liouville (13), problemas de fronteira livre, entre outros.

No processo para encontrar o expoente de Hölder ótimo é de grande importância a ideia de que os resultados de regularidade devem ser interpretados em uma configuração geométrica intrínseca dada pela equação em estudo, isto para equações parabólicas lineares e quase-lineares de segunda ordem não é difícil de conseguir, porem equações parabólicas de tipo $p-$Laplaciano requer técnicas cuidadosas de geometria, como o chamado " intrinsic scaling", para resolver a não-homogeneidade. Estas técnicas são introduzidas no trabalho pioneiro feito por DiBenedetto (5) junto com trabalhos recentes dados em (6) e (14) os quais ajudam no objetivo de trazer à teoria de regularidade um novo nível de entendimento.

Para contribuir a esse objetivo, neste trabalho mostramos que soluções fracas da equação $p-$parabólica não-homogênea degenerada (1) são localmente de classe $C^{0,\alpha}$ no espaço, com

$$\alpha = \frac{(pq-n)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]}, \tag{2}$$

uma expressão precisa e ótima do expoente de Hölder em termos de p, a integrabilidade do termo fonte f e a dimensão do espaço n. Também mostramos que são de classe $C^{0,\alpha/\theta}$ no tempo, onde θ o $\alpha-$interpolador entre 2 e p. Da expressão (2) podemos observar que a integrabilidade no tempo (respectivamente no espaço) do termo fonte afeta a regularidade no espaço (respectivamente no tempo) da solução.

Para destacar a nitidez do resultado apresentado aqui, o projetamos para o estado da arte da teoria. Para o caso linear $p = 2$, obtemos

$$\alpha = 1 - \left(\frac{2}{r} + \frac{n}{q} - 1\right),$$

o qual é o expoente ótimo para a equação do calor não-homogênea. Quando $p \to \infty$, temos $\alpha \to 1^-$, que dá uma indicação da esperada Lipschitz regularidade localmente para o caso do $\infty-$Laplaciano parabólico. Quando o termo fonte f é independente do tempo, se não limitado no tempo, isto é $r = \infty$, nós obtemos

$$\alpha = \frac{pq-n}{q(p-1)} = \frac{p}{p-1}\frac{q-\frac{n}{p}}{q},$$

o qual é exatamente o expoente ótimo de Hölder obtido para o caso elíptico em (12).

Neste trabalho se desenvolve um método basado na noção de equação geométrica tangencial, o qual explora o "scaling"intrínseco do operador $p-$parabólico e a integrabilidade do termo fonte. Por meio de argumentos iterativos em uma escala apropriada, mostramos que em cada equação não-homogênea existe um espaço tangencial universal formado por funções $C^{0,1}$ no espaço e $C^{0,1/2}$ no tempo. O método importa essa regularidade de volta às equações originais, devidamente corrigidas através da escala usada para acessar ao espaço tangencial.

No Capítulo 2, nós apresentamos os espaços de Holder junto com outras definições básicas e alguns resultados de compacidade, introduzimos a definição de solução fraca da nossa equação modelo e o resultado principal deste trabalho. No capítulo 3 começamos mostrando uma estimativa de energia local e um lema de compacidade que nós permite aproximar soluções fracas de 1 com $p \geq 2$ por funções $p-$calóricas. Ainda no capítulo 3 usando a regularidade das funções $p-$calóricas e iterações geométricas dadas no Lema 3.3 e Teorema 3.4, mostramos de forma explicita o Hölder expoente de continuidade α ótimo.

A prova do resultado principal é dada no capítulo 4 e no último capítulo, são comentadas as modificações requeridas para usar a mesma ideia em equações parabólicas degeneradas mais gerais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os espaços de Hölder, daremos alguns resultados de compacidade e definições básicas necessárias para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Na última seção deste capítulo enunciamos o resultado principal Teorema2.13.

2.1 Espaços de Hölder

Nesta seção do capítulo faremos uma breve introdução dos espaços de Hölder. Começaremos por definir funções Hölder contínuas com expoente α.

Definição 2.1 *Seja $0 < \alpha < 1$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser Hölder contínua com expoente α em um punto x_0 se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \qquad \textit{para todo}\, x \in \Omega, x \neq x_0$$

Se esta propriedade é satisfeita para todo ponto $x_0 \in \Omega$ dizemos que u é Hölder contínua com expoente α em todo Ω e escrevemos $u \in C^\alpha(\Omega)$.

Definição 2.2 *Os espaços $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são subespaços de $C^k(\Omega)$ consistindo de funções cujas derivadas parciais até a ordem k são Hölder contínuas com expoente α em todo Ω, ou seja,*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\beta u \in C^\alpha(\Omega) \textit{ para todo } |\beta| \leq k\}.$$

Definimos também $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ como o espaço dado por todas as funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$ para as quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\beta| = k} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

é finita, onde

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}.$$

O espaço $C^{0;\alpha,\alpha/\theta}$ denota o espaço das funções que são Hölder contínuas com expoente $\alpha \in (0, 1)$ e

$$[u]_{C^{0;\alpha,\alpha/\theta}(\Omega_T)} = \sup_{(x,t) \neq (y,s) \in \Omega_T} \frac{|u(x,t) - u(y,s)|}{d((x,t),(y,s))^\alpha},$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ é a $\theta-$distância parabólica intrínseca dada por $d((x,t),(y,s)) = |x-y| + |t-s|^{\frac{1}{\theta}}$.

2.2 Média Steklov

Seja v uma função em $L^1(\Omega_T)$, para cada $0 < h < T$ consideramos a média Steklov $v_h(\cdot, t)$ definida para todo $0 < t < T$ por

$$v_h := \begin{cases} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x,\tau)\, d\tau & \text{se } t \in (0, T-h] \\ 0 & \text{se } t > T-h \end{cases}$$

Lema 2.3 *Seja $v \in L^{q,r}(\Omega_T)$. Então, quando $h \to 0$, v_h converge a v em $L^{q,r}(\Omega_{T-\varepsilon})$ para cada $\varepsilon \in (0,T)$. Se $v \in C(0,T; L^q(\Omega))$, então quando $h \to 0$, $v_h(\cdot, t)$ converge a $v(\cdot, t)$ em $L^q(\Omega)$ para cada $t \in (0, T-\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in (0,T)$.*

A prova do Lema segue-se da teoria geral dos espaços L^p junto com a desigualdade de Jensen.

2.3 Alguns Resultados de Compacidade

Os resultados apresentados nesta seção são parte fundamental na prova do Lema 3.2 no Capítulo 3. Começaremos dando uma breve introdução aos espaços $L^p(0,T;B)$, onde B é um espaço de Banach, os quais incluem os espaços $L^{q,r}(\Omega_T)$. Para quem tiver interesse nestes espaços recomendamos fazer uma leitura das seções §3 e §6 no Capítulo IV do livro (4) e o artigo em (11).

Seja $[0,T]$ um intervalo limitado de $\mathbb{R}$. Denotamos $C(0,T;B)$ o espaço definido por $C(0,T;B) = \{u : [0,T] \to B : u \text{ função contínua}, \|u\|_{C(0,T;B)} < \infty\}$, onde

$$\|u\|_{C(0,T;B)} := \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_B.$$

Por definição o espaço $L^p(0,T;B), p < \infty$, é o espaço completo separado de $C(0,T;B)$ para a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(0,T;B)$ é o subconjunto de $L^1(0,T;B)$ em que a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_B$$

é finita.

Definição 2.4 *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Diz-se que X é imerso compactamente em Y, escrito $X \subset\subset Y$, sempre que*

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ $(u \in X)$ *para alguma constante C e*
(ii) *Cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y.*

A condição (ii) significa que se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X com $\sup\limits_n \|u_n\|_X < \infty$, então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge em Y para algum limite u.

Proposição 2.5 *Sejam X, B e Y espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$ com $X \subset\subset B$. Dado um conjunto F de funções limitadas em $L^p(0,T;X)$ onde $1 \leq p < \infty$, e $\partial F/\partial t = \{\partial u/\partial t : u \in F\}$ é limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.*
Seja F um conjunto de funções limitadas em $L^\infty(0,T;X)$ e $\partial F/\partial t$ sendo limitada em $L^r(0,T;Y)$ onde $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Prova: Veja Corolario 4 em (11). ■

O segundo resultado de compacidade que será de utilidade é uma consequência dos seguintes teoremas, cujas demostrações podem ser vistas em (7).

Teorema 2.6 (Arzelà-Ascoli) *Suponha $\{f_n : K \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções definidas sobre um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in K$ e que seja uniformemente equicontínua, isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, para $x, y \in K$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e uma função contínua f, tal que $f_{n_j} \to f$ uniformemente em K.*

Teorema 2.7 (Desigualdade de Morrey) *Assuma $n < p \leq \infty$. Então existe uma constante C, dependendo unicamente de n e p, tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\gamma := 1 - n/p$.

Teorema 2.8 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ é C^1. Suponha que $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^*$, com $p^* = \frac{pn}{n-p}$.

Observação 2.9 *Note que, como* $p^* > p$ *e* $p^* \to \infty$ *quando* $p \to n$*, temos em particular que*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$*, observando que o caso em que* $n < p \leq \infty$ *segue do Teorema 2.7 e do criterio de compacidade dado no Teorema 2.6.*

2.4 Solução Fraca

Nesta seção definimos o conceito de solução fraca para a equação $p-$Laplaciano parabólica não-homogênea degenerada

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{em } \Omega_T,\ p \geq 2, \tag{3}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $T > 0$ e $f \in L^{q,r}(\Omega_T) = L^r(0,T; L^q(\Omega))$ satisfazendo

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 \tag{4}$$

que é a condição de integrabilidade minima padrão que garante a existência de soluções fracas limitadas. E

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{q} > 1 \tag{5}$$

a qual define o ambiente limite para estimativas tipo Hölder ótima como será mostrado mais adiante.

A seguinte definição vale também para o caso singular $1 < p < 2$.

Definição 2.10 *Uma função*

$$u \in C_{loc}(0,T; L^2_{loc}(\Omega)) \cap L^p_{loc}(0,T; W^{1,p}_{loc}(\Omega))$$

é uma solução fraca para (3) *se, para cada compacto* $K \subset \Omega$ *e cada subintervalo* $[t_1, t_2] \subset (0, T]$*, tem-se*

$$\int_K u\phi\, dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \{-u\phi_t + |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi\}\, dxdt = \int_{t_1}^{t_2} \int_K f\phi\, dxdt, \tag{6}$$

para toda $\phi \in H^1_{loc}(0,T; L^2(K)) \cap L^p_{loc}(0,T; W^{1,p}_0(\Omega))$.

A seguinte noção alternativa de solução fraca local envolve a derivada no tempo discreta de u e evita as dificuldades relacionadas à baixa regularidade no tempo.

Fixe $t \in (0,T)$ e seja h um numero positivo pequeno tal que $0 < t < t+h < T$. Em (6) tome $t_1 = t$, $t_2 = t+h$ e escolha uma função test independente da variável $\tau \in (t, t+h)$. Divida por h e levando em conta a definição da média Steklov obtemos

$$\int_{K\times\{t\}} \{(u_h)_t\phi + (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)_h \cdot \nabla\phi\}\, dx = \int_{K\times\{t\}} f_h\phi\, dx, \tag{7}$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(K)$.

2.5 O Resultado Principal

Começamos esta seção introduzindo o tipo de dominio sobre os quais vamos trabalhar junto com a caracterização integral dos espaços $C^{0,\alpha}$ dada por Campanato-Da Prato pela qual a prova do resultado principal se reduz a provar uma desigualdade integral.

Para o tipo parabólico de equações envolvidas com a derivada em termos de tempo variável, precisamos ter cuidado avaliando a distância entre dois pontos distintos no domínio. Por exemplo, o ajuste geométrico apropriado para a equação de calor $u_t = u_{xx}$ é um cilindro da forma $G_r = B_r \times [0, r^2]$ aproximadamente, já que uma derivada no tempo é equivalente a duas derivadas espaciais, isto implica uma distância intrínseca definida por

$$d((x,t),(y,s)) = |x-y| + |t-s|^{1/2}.$$

Para equações $p-$parabólicas degeneradas, dado $0 < \alpha < 1$, definiremos o $(2,p)-$ interpolador

$$\theta_\alpha := p - (p-2)\alpha = 2\alpha + (1-\alpha)p. \tag{8}$$

o qual claramente satisfaz $2 < \theta_\alpha < p$. Para simplificar, θ_α será denotado simplesmente por θ e para tal θ definimos o cilindro $\theta-$parabólico intrínseco centrado em (x_0, t_0) como

$$G_\tau(x_0,t_0) := (t_0 - \tau^\theta, t_0) \times B_\tau(x_0), \quad \tau > 0.$$

e a norma *intrínseca* de um ponto (x,t), para ser $\|(x,t)\|_\theta = |x| + |t|^{1/\theta}$.

2.5.1 *Caracterização Integral de* $C^{0,\alpha}$

Para apresentar a caracterização integral dos espaços de Hölder $C^{0,\alpha}$ precisamos antes introduzir os espaços de Campanato.

Definição 2.11 *Seja $1 \leq p < \infty$ e $\lambda \geq 0$. O espaço de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é definido como*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} < \infty\}$$

onde a Campanato seminorma é dada por

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0<r<diam\Omega}} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - (u)_{x_0,r}|^p \, dx \right)^{1/p}$$

com $\Omega_r(x_0) = \Omega \cap B_r(x_0)$ e

$$(u)_{x_0,r} := \fint_{\Omega_r(x_0)} u(x) \, dx.$$

Teorema 2.12 (Caracterização integral de $C^{0,\alpha}$) *Se Ω é um dominio em $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $x_0 \in \Omega$ e $0 < r < diam(\Omega)$ satisfaz $|\Omega_r(x_0)| \geq Ar^n$ para alguma constante $A > 0$. Então*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \mathcal{L}^{p,m+p\alpha}(\Omega).$$

A prova da inclusão $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,m+p\alpha}(\Omega)$ no Teorema 2.12 segue de forma quase inmediata, a inclusão contraria precisa de argumentos mais elaborados e do teorema de diferenciação de Lebesgue, a sua demostração pode ser vista na seção 2.3 do livro (8).

Finalmente apresentamos o resultado a ser estabelecido neste trabalho.

Teorema 2.13 *Uma solução fraca localmente limitada de (3), com $f \in L^{q,r}$, satisfazendo (4) e (5), é localmente Hölder contínua nas variáveis espaço, com expoente*

$$\alpha = \frac{(pq-n)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]}$$

e localmente Hölder contínua no tempo com expoente $\frac{\alpha}{\theta}$. Além existe uma constante C, que depende unicamente sobre $n, p, \|f\|_{L^{q,r}}$ e $\|u\|_{p,avg,G_1}$, tal que

$$\|u\|_{C^{0;\alpha,\alpha/\theta}(G_{1/2})} \leq C.$$

3 HÖLDER ESTIMATIVA ÓTIMA

Neste capitulo o nosso objetivo é mostrar o Hölder expoente ótimo de forma explicita e estabelecer ciertas desigualdades integrais em um dominio adequado para as funções u que são soluções fracas de 3, as quais permitiram mostar a Hölder continuidade de u.

3.1 Estimativa de Energia

Soluções fracas de (3) são localmente limitadas como é mostrado em (5). Embora os argumentos seguintes são de natureza local, para simplificar a notação assumimos que u é definida e limitada quase todo ponto em Ω_T e definimos

$$M := \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)}.$$

Uma das nossas principais ferramentas dentro da análise que vamos fazer é a seguinte estimativa de energia do tipo Caccioppoli dada para soluções fracas da equação (3)

Lema 3.1 *Seja u uma solução fraca de* (3). *Dado $K \times [t_1, t_2] \subset \Omega \times (0, T]$, existe uma constante γ dependendo unicamente de $p, K \times [t_1, t_2]$ tal que*

$$\begin{aligned} \sup_{t_1<t<t_2} \int_K u^2 \xi^p \, dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_K |\nabla u|^p \xi^p \, dxdt \leq \gamma \int_{t_1}^{t_2} \int_K |u|^p |\nabla \xi|^p \, dxdt \\ + p \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi^{p-1} \xi_t \, dxdt + \gamma \|f\|_{q,r}, \end{aligned} \tag{9}$$

para toda $\xi \in C_0^\infty(K \times (t_1, t_2))$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$.

Prova: Seja $\phi = u_h \xi^p$ em (7) e integre no tempo sobre (t_1, t) para $t \in (t_1, t_2)$. Do primeiro termo obtemos

$$\int_{t_1}^{t} \int_K (u_h)_t \phi \, dx \, ds = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t} \int_K (u_h^2)_t \xi^p \, dx \, ds,$$

fazendo integração por partes e passando ao limite quando $h \to 0$ (usando o Lema 2.3)

$$\to \frac{1}{2} \int_{K \times \{t\}} u^2 \xi^p \, dx - \frac{p}{2} \int_{t_1}^{t} \int_K u^2 \xi^{p-1} \xi_t \, dx \, ds.$$

Com respeito ao segundo termo, fazendo primeiro $h \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t}\int_K (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)_h \cdot \nabla\phi \, dx\, ds \to \int_{t_1}^{t}\int_K |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot [\nabla u \xi^p + pu\xi^{p-1}\nabla\xi]\, dx\, ds \\
&= \int_{t_1}^{t}\int_K \{|\nabla u|^p \xi^p + p|\nabla u|^{p-2}\, u\, \xi^{p-1}\nabla u \cdot \nabla \xi\}\, dx\, ds \\
&\geq \int_{t_1}^{t}\int_K |\nabla u|^p\xi^p \, dx\, ds - p\int_{t_1}^{t}\int_K |\nabla u|^{p-1}|u|\xi^{p-1}|\nabla\xi|\, dx\, ds \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t}\int_K |\nabla u|^p\xi^p\, dx\, ds - \gamma(p)\int_{t_1}^{t}\int_K |u|^p\, |\nabla\xi|^p\, dx\, ds,
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p}{p}a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}b^q \qquad \left(a, b, \varepsilon > 0, \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

com as seguintes escolhas

$$a = |u\nabla\xi|, \qquad b = |\nabla u|^{p-1}\xi^{p-1} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon = [2(p-1)]^{\frac{1}{q}}.$$

Finalmente do termo à direita depois de passar o limite quando $h \to 0$ y aplicar desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{t_1}^{t}\int_K |fu\xi^p|\, dx\, ds \leq M|K|^{\frac{q-1}{q}}|t_2 - t_1|^{\frac{r-1}{r}}\|f\|_{q,r}$$

Dado que $t \in (t_1, t_2)$ é arbitrário, podemos combinar as estimativas anteriores e obter (9).
■

3.2 Aproximação por Funções $p-$calóricas

Nesta seção estabelecemos um resultado de compacidade que nos garante poder aproximar soluções u de (3) por funções p-calóricas em um subdomínio interno sempre que o termo fonte f tenha uma norma pequena em $L^{q,r}$. Esta aproximação nos permitirá usar as boas propriedades das funções $p-$calóricas para obter a regularidade de u. Sem perda de generalidade, podemos assumir que nossa solução u é definida sobre G_1 portanto nós restringimos aos cilindros com vertice na origem $(0,0)$, para um cilindro generico centrado em (x_0, t_0) a mudança é dada por translação e transformação de escala.

Lema 3.2 *(Aproximação às funções $p-$calóricas). Para cada $\delta > 0$, existe um $0 < \varepsilon \ll 1$, tal que se $\|f\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \varepsilon$ e u é uma solução fraca local de* (3) *em G_1 com $\|u\|_{p,avg,G_1} \leq 1$,* *então existe uma função $p-$calórica ϕ em $G_{1/2}$ isto é*

$$\phi_t - \operatorname{div}(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) = 0 \quad em\ G_{1/2},$$

tal que

$$\|u - \phi\|_{p,avg,G_{1/2}} \leq \delta.$$

Prova: Assuma por contradição que para algum $\delta_0 > 0$, existe uma sequência

$$(u^j)_j \in C_{loc}(-1,0;L^2_{loc}(B_1)) \cap L^p_{loc}(-1,0;W^{1,p}_{loc}(B_1))$$

e uma sequência $(f^j)_j \in L^{q,r}(G_1)$, tal que

$$u^j_t - \operatorname{div}(|\nabla u^j|^{p-2}\nabla u^j) = f^j \quad \text{em} G_1 \tag{10}$$

$$\|u^j\|_{p,avg,G_1} \leq 1; \tag{11}$$

$$\|f^j\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \frac{1}{j} \tag{12}$$

mas, para qualquer j e qualquer função $p-$calórica ϕ em $G_{1/2}$,

$$\|u^j - \phi\|_{p,avg,G_{1/2}} > \delta_0. \tag{13}$$

Fixe uma função de corte $\xi \in C^\infty_0(G_1)$, tal que $\xi \in [0,1]$, $\xi \equiv 1$ em $G_{1/2}$ e $\xi \equiv 0$ perto de $\partial_p(G_1)$. Da estimativa de energia, usando a notação

$$V(I \times \Omega) = L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^p(I;W^{1,p}(\Omega)),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^j\|_{V(G_{1/2})} &\leq \sup_{-1<t<0} \int_{B_1} (u^j)^2 \xi^p \, dx + \int_{-1}^0 \int_{B_1} |\nabla u^j|^p \xi^p \, dxdt \\
&\leq \gamma \int_{-1}^0 \int_{B_1} |u^j|^p |\nabla \xi|^p \, dxdt + p \int_{-1}^0 \int_{B_1} |u^j|^2 \xi^{p-1} \xi_t \, dxdt + \gamma \|f^j\|_{L^{q,r}(G_1)} \\
&\leq c_1 \|u^j\|^p_{p,avg,G_1} + c_2 \|u^j\|^2_{2,avg,G_1} + \gamma/j \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

De outro lado temos que para $\phi \in C^\infty_0(\Omega_T)$ as funções u^j satisfazem

$$\int_0^T \int_\Omega u^j \phi_t \, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \{\nabla(|\nabla u^j|^{p-2}\nabla u^j) + f^j\}\phi \, dxdt,$$

logo, usando o fato que $\partial/\partial x_i(|\nabla u^j|^{p-2}\nabla u^j) \in L^{p/(p-1)}_{loc}(\Omega_T) \subset L^{p/(p-1),1}_{loc}(\Omega_T)$ que é mostrado em (10) e alem disso por hipótese $(f^j) \in L^{q,r}(G_1) \subset L^{q,1}(G_1)$, então podemos afirmar que a derivada no sentido de Sobolev das funções u^j com respeito ao tempo satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u^j_t\|_{L^{s,1}(G_{1/2})} \leq c, \tag{14}$$

com $s = \min\{q, \frac{p}{p-1}\} < p$. Das duas estimativas anteriores e pela proposição 2.5 com

$$W^{1,p} \subset\subset L^p \subset L^s,$$

podemos concluir que, existe uma função $\psi \in V(G_{1/2})$ tal que a menos de subsequência

$$u^j \to \psi \quad \text{em} \quad L^p(G_{1/2}) \qquad \text{e} \qquad u^j \rightharpoonup \psi \quad \text{em} \quad V(G_{1/2}). \tag{15}$$

Dada uma função test $\phi \in W^{1,p}_0(B_{1/2})$, de (12) e (15) temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/2}\times\{t\}} \{(\psi_h)_t\phi + (|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi)_h \cdot \nabla\phi\}\, dx &= \lim_{j\to\infty}\int_{B_{1/2}\times\{t\}} \{(u^j_h)_t\phi + (|\nabla u^j|^{p-2}\nabla u^j)_h \cdot \nabla\phi\}\, dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{B_{1/2}\times\{t\}} f^j_h\phi\, dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Desde que ϕ é arbitrario, concluimos que ψ é uma função $p-$calórica em $G_{1/2}$, o qual contradiz (13), para $j \gg 1$. Assim a prova do Lema 3.2 fica completada. ∎

3.3 Melhoria da Suavidade Universal

A ferramenta chave que nos permite encontrar o expoente de Hölder continuidade ótimo para soluções de (3) e assim poder mostrá-lo nesta seção, é a seguinte iteração geométrica, que usa fortemente a aproximação por funções $p-$calóricas no Lema 3.2 e o fato que funções $p-$calóricas são universalmente Lipschitz contínuas no espaço e $C^{0;1/2}$ no tempo. O primeiro passo nessa iteração é dado pelo seguinte lema.

Lema 3.3 *Seja $0 < \alpha < 1$ fixado. Existem $\varepsilon > 0$ e $0 < \lambda \ll 1/2$, dependendo unicamente de n, p e α, tal que se $\|f\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \varepsilon$ e u é uma solução fraca local de (3) em G_1,com $\|u\|_{p,avg,G_1} \leq 1$, então existe uma constante universalmente limitada c_0 tal que*

$$\|u - c_o\|_{p,avg,G_\lambda} \leq \lambda^\alpha. \tag{16}$$

Prova: Tome $0 < \delta < 1$, para ser escolhido mais tarde, e aplique o Lema 3.2 para obter $0 < \varepsilon \ll 1$ e uma função $p-$calórica ϕ em $G_{1/2}$, tal que

$$\|u - \phi\|_{p,avg,G_{1/2}} \leq \delta.$$

Note que

$$\|\phi\|_{p,avg,G_{1/2}} \leq \|u - \phi\|_{p,avg,G_{1/2}} + \|u\|_{p,avg,G_1} \leq \delta + 1 \leq 2. \tag{17}$$

Dado que ϕ é $p-$calórica, segue-se de (2; 3) que ϕ é universalmente $C^{0,\frac{1}{2}}_{loc}$ no tempo e $C^{0,1}_{loc}$ no espaço. Dai segue-se que se $\lambda \ll 1$ a ser escolhido logo, para todo $(x,t) \in G_\lambda$,

$$\begin{aligned}
|\phi(x,t) - \phi(0,0)| &\leq |\phi(x,t) - \phi(0,t)| + |\phi(0,t) - \phi(0,0)| \\
&\leq C_1|x - 0| + C_2|t - 0| \\
&\leq C_1\lambda + C_2\lambda^{\frac{\theta}{2}} \leq C\lambda,
\end{aligned}$$

desde que $\theta > 2$. Assim existe uma constante universal $C > 1$ tal que

$$\sup_{(x,t)\in G_\lambda} |\phi(x,t) - \phi(0,0)| \leq C\lambda.$$

Portanto podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|u(x,t) - \phi(0,0)\|_{p,avg,G_\lambda} &\leq \|u(x,t) - \phi(x,t)\|_{p,avg,G_\lambda} + \|\phi(x,t) - \phi(0,0)\|_{p,avg,G_\lambda} \\
&\leq \delta + C\lambda.
\end{aligned} \tag{18}$$

sempre que seja escolhido $\lambda \ll 1/2$, já que

$$G_\lambda = (-\lambda^\theta, 0) \times B_\lambda \subset (-(1/2)^\theta, 0) \times B_{1/2} = G_{1/2}.$$

Agora tomando $c_0 := \phi(0,0)$, observando que devido ao fato de ϕ ser uma função $p-$calórica, c_0 é universalmente limitada. Então da nossa estimativa em (18) o lema segue-se escolhendo $\lambda \ll 1/2$ tão pequeno que

$$C\lambda \leq \frac{\lambda^\alpha}{2}$$

e definindo

$$\delta = \frac{\lambda^\alpha}{2}.$$

Observando que fixado δ podemos fixar $\varepsilon > 0$ via Lema 3.2. ■

A ideia agora é iterar o Lema 3.3 em uma escala geométrica apropriada, obtendo uma estimativa do tipo (16) sobre cada cilindro G_{λ^k} os quais formam uma sequência de dominios encaixados que vão se encolhendo para a origem.

Teorema 3.4 *Nas condições do lema anterior, existe uma sequência convergente de números reais* $\{c_k\}_{k\geq 1}$, *com*

$$|c_k - c_{k+1}| \leq c(n,p)(\lambda^\alpha)^k, \tag{19}$$

tal que

$$\|u - c_k\|_{p,avg,G_{\lambda^k}} \leq (\lambda^k)^\alpha. \tag{20}$$

Prova: A prova é feita por indução sobre k. Para $k = 1$, (20) segue-se do Lema 3.3, com $c_1 = c_0$. Suponha valido para k e vamos mostrar que a conclusão tem-se para $k+1$. Definimos a função $v : G_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(x,t) = \frac{u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t) - c_k}{\lambda^{\alpha k}}. \tag{21}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \lambda^{k\theta - \alpha k} u_t(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t) \\ &= \lambda^{pk-(p-1)\alpha k} u_t(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t) \end{aligned}$$

evocando (8), e

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(|\nabla v(x,t)|^{p-2}\nabla v(x,t)) = \\ &\qquad = \lambda^{pk-(p-1)\alpha k} \operatorname{div}(|\nabla u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)|^{p-2}\nabla u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)) \end{aligned}$$

para concluir que

$$v_t - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = \lambda^{pk-(p-1)\alpha k} f(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t) = \tilde{f}(x,t)$$

Agora calculamos

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|^r_{L^{q,r}(G_1)} &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|\tilde{f}(x,t)|^q\,dx\right)^{r/q}dt\\ &= \lambda^{[pk-(p-1)\alpha k]r}\int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|f(\lambda^k x,\lambda^{k\theta}t)|^q\,dx\right)^{r/q}dt\\ &= \lambda^{[pk-(p-1)\alpha k]r-kn\frac{r}{q}}\int_{-1}^{0}\left(\int_{B_{\lambda^k}}|f(x,\lambda^{k\theta}t)|^q\,dx\right)^{r/q}dt\\ &= \lambda^{[pk-(p-1)\alpha k]r-kn\frac{r}{q}-k\theta}\int_{-\lambda^{k\theta}}^{0}\left(\int_{B_{\lambda^k}}|f(x,t)|^q\,dx\right)^{r/q}dt,\end{aligned}$$

isto é

$$\|\tilde{f}\|_{L^{q,r}(G_1)} = \lambda^{\beta k}\|f\|_{L^{q,r}((-\lambda^{k\theta},0)\times B_{\lambda^k})} \leq \lambda^{\beta k}\|f\|_{L^{q,r}(G_1)} \tag{22}$$

onde $\beta = p-(p-1)\alpha - n/q - \theta/r = p-(p-1)\alpha - n/q - [2\alpha-(1-\alpha)p]/r$.

Então $\|\tilde{f}\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \varepsilon$ se $\lambda^{\beta k} \leq 1$, como $0<\lambda<1$ basta pedir que $\beta k \geq 0$ sendo ótimo quando $\beta k = 0$ ou seja, quando $\beta = 0$ já que $k \neq 0$, mas isto é

$$p-(p-1)\alpha - n/q - [2\alpha-(1-\alpha)p]/r = 0$$

despejando daí α obtemos

$$\alpha = \frac{(pq-n)r-pq}{q[(p-1)r-(p-2)]}$$

o qual é ótimo e pode ser reescrito como

$$\alpha = \frac{p\left(1-\frac{n}{pq}-\frac{1}{r}\right)}{p\left(1-\frac{n}{pq}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{2}{r}+\frac{n}{q}-1\right)}$$

daí podemos observar que $0<\alpha<1$ sempre que

$$\operatorname{sign}\left(1-\frac{n}{pq}-\frac{1}{r}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{2}{r}+\frac{n}{q}-1\right)$$

mas o termo entre colchetes à esquerda tem que ser positivo, pois, caso contrario não se pode garantir a existência de soluções fracas limitadas de (3), logo o termo à direita tem que ser positivo e portanto segue daí a justificativa para (5).

Voltando para (22) podemos observar que com a escolha dada para α tem-se $\|\tilde{f}\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq$

ε alem disso pela hipótese de indução temos que

$$\frac{1}{|G_{\lambda^k}|}\int_{G_{\lambda^k}} |u(y,s)-c_k|^p\, dyds \leq \lambda^{\alpha k p}$$

daí fazendo a seguinte mundaça de variaveis $y=\lambda^k x$ e $s=\lambda^{\theta k} t$ temos

$$\frac{1}{|G_1|}\int_{G_1} |u(\lambda^k x \lambda^{\theta k} t)-c_k|^p\, dxdt \leq \lambda^{\alpha k p}$$

ou seja

$$\|v\|_{p,avg,G_1} \leq 1$$

então estamos nas condições do Lema 3.3 e daí segue-se que existe uma constante $\tilde{c}_0$, com $|\tilde{c}_0| \leq c(n,p)$, tal que

$$\|v-\tilde{c}_0\|_{p,avg,G_\lambda} \leq \lambda^{\alpha},$$

isto é

$$\frac{1}{|G_\lambda|}\int_{G_\lambda} \left|\frac{u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)-c_k}{\lambda^{\alpha k}} - \tilde{c}_0\right|^p dxdt \leq \lambda^{\alpha p}$$

Donde segue que

$$\frac{1}{|G_\lambda|}\int_{G_\lambda} \left|\frac{u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)-c_k-\tilde{c}_0\lambda^{\alpha k}}{\lambda^{\alpha k}}\right|^p dxdt \leq \lambda^{\alpha p}$$

Ora se definirmos $c_{k+1} := c_k + \tilde{c}_0\lambda^{\alpha k}$ temos que

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha k p}|G_\lambda|}\int_{-\lambda^\theta}^{0}\int_{B_\lambda} |u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)-c_{k+1}|^p\, dxdt \leq \lambda^{\alpha p}$$

e fazendo a seguinte mudança de variaveis $y=\lambda^k x$ e $s=\lambda^{\theta k} t$ obtemos

$$\frac{1}{|G_\lambda|}\int_{-\lambda^{(k+1)\theta}}^{0}\int_{B_{\lambda^{k+1}}} |u(y,s)-c_{k+1}|^p\, \frac{dy}{\lambda^{kn}}\frac{ds}{\lambda^{k\theta}} \leq \lambda^{\alpha p}\lambda^{\alpha k p}$$

observando que $|G_\lambda|\lambda^{kn}\lambda^{k\theta} = |G_{\lambda^{k+1}}|$ então segue

$$\frac{1}{|G_{\lambda^{k+1}}|}\int_{G_{\lambda^{k+1}}} |u(x,t)-c_{k+1}|^p\, dxdt \leq \lambda^{\alpha(k+1)p}$$

isto é $\|u-c_{k+1}\|_{p,avg,G_{\lambda^{k+1}}} \leq (\lambda^{k+1})^{\alpha}$, assim a indução é completada. Podemos facilmente ver que $|c_k - c_{k+1}| \leq c(n,p)(\lambda^{\alpha})^k$, obtenendo-se desta forma (19). ■

Observação 3.5 *Pode-se observar que* (19) *implica que a sequência* $\{c_k\}_{k\geq 1}$ *é de Cauchy* *e portanto ela é convergente, mais ainda se $j \gg 1$ temos*

$$\begin{aligned}
|c_k - c_{k+j}| &\leq |c_k - c_{k+1}| + |c_{k+1} - c_{k+2}| + \cdots + |c_{k+j-1} - c_{k+j}| \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} |c_{k+i} - c_{k+i+1}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{j-1} C(\lambda^{k+i})^{\alpha} \\
&\leq C\lambda^{\alpha k} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^{\alpha})^{i} \\
&= C\lambda^{\alpha k} \frac{1}{1-\lambda^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ora se notarmos $\bar{c}$ como sendo o limite de $\{c_k\}$, então passando o limite quando $j \to \infty$ obtemos o seguinte controle de convergência

$$|c_k - \bar{c}| \leq \frac{C}{1-\lambda^{\alpha}} (\lambda^k)^{\alpha}. \tag{23}$$

4 O RESULTADO PRINCIPAL

Neste capítulo apresentamos a prova do resultado principal Teorema 2.13, que é basicamente uma consequência dos resultados obtidos na seção 3.3 e a caracterização integral dos espaços de Hölder.

4.1 Redução ao Regime de Pequenez

O objetivo desta seção é mostrar como as caracteristicas do "scaling" da equação nos permite reduzir a prova do Teorema 2.13 às hipoteses do Teorema 3.4.

Dada uma solução u de (3) e $\sigma > 0$ (que será escolhido posteriormente), defina $v : G_1 \to \mathbb{R}$ como

$$v(x,t) = \sigma u(\sigma^{\eta x}, \sigma^{(p-2)+\eta p} t)$$

a qual é solução de (3) com

$$\tilde{f}(x,t) = \sigma^{(p-1)+\eta p} f(\sigma^{\eta} x, \sigma^{(p-2)+\eta p} t).$$

Ora como

$$\|v\|^p_{p,avg,G_1} \leq \sigma^{2-\eta(p+n)} \|u\|^p_{p,avg,G_1}$$

e

$$\|\tilde{f}\|^r_{L^{q,r}(G_1)} = \sigma^{[(p-1)+\eta p]r-\eta(p+n)-(p-2)} \|f\|^r_{L^{q,r}(G_1)}$$

então basta tomar $\eta > 0$ tal que

$$2 - \eta(p+n) > 0 \quad \text{e} \quad [(p-1)+\eta p]r - \eta(p+n) - (p-2) > 0,$$

o qual é possível (note que a segunda condição se tem para $\eta = 0$, logo pela continuidade com respeito a η existe uma vizinhança de zero onde a segunda condição segue valendo), e escolher $0 < \sigma < 1$ tal que

$$\begin{cases} \sigma^{2-\eta(p+n)} \|u\|^p_{p,avg,G_1} \leq 1 \\ \sigma^{[(p-1)+\eta p]r-\eta(p+n)-(p-2)} \|f\|^r_{L^{q,r}(G_1)} \leq \varepsilon^r. \end{cases}$$

Com estas escolhas v está nas hipóteses do Teorema 3.4. Uma vez estabelecida a regularidade ótima para a função normalizada v, a correspondente regularidade de u segue-se facilmente.

4.2 Regularidade Local Ótima

Nesta seção daremos a prova do Teorema 2.13. Começaremos por lembrar que pela observação 3.5, a sequência $\{c_k\}$ é convergente com limite $\bar{c}$. Agora fixado um $0 < r < \lambda$, escolhemos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^{k+1} \leq r < \lambda^k$$

então estimamos

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{c}\|_{p,avg,G_r} &= \frac{1}{|G_r|^{1/p}} \left(\int_{G_r} |u - \bar{c}|^p \, dxdt \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{|G_{\lambda^k}|}{|G_r|} \right)^{1/p} \left(⨍_{G_{\lambda^k}} |u - \bar{c}|^p \, dxdt \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{(n+\theta)/p}} \|u - \bar{c}\|_{p,avg,G_{\lambda^k}} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{(n+\theta)/p}} \left(\|u - c_k\|_{p,avg,G_{\lambda^k}} + \|c_k - \bar{c}\|_{p,avg,G_{\lambda^k}} \right)
\end{aligned}$$

donde por (20) e (23) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{c}\|_{p,avg,G_r} &\leq \frac{1}{\lambda^{(n+\theta)/p}} \left[(\lambda^k)^\alpha + \left(\frac{C}{1-\lambda^\alpha} \right) (\lambda^k)^\alpha \right] \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{(n+\theta)/p}} \left[1 + \left(\frac{C}{1-\lambda^\alpha} \right) \right] (\lambda^k)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{\lambda^\alpha \lambda^{(n+\theta)/p}} \left[1 + \left(\frac{C}{1-\lambda^\alpha} \right) \right] r^\alpha.
\end{aligned}$$

Agora observando que para qualquer $u \in L^p$ e qualquer numero real κ vale a seguinte desigualdade

$$⨍_{B_r(x_0)} |u - (u)_{x_0,r}|^p \, dx \leq 2^p ⨍_{B_r(x_0)} |u - \kappa|^p \, dx,$$

onde

$$(u)_{x_0,r} := ⨍_{B_r(x_0)} |u(y)| \, dy.$$

Em efeito, pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_r(x_0)} |u-(u)_{x_0,r}|^p\,dx\right)^{1/p} &\leq \left(\fint_{B_r(x_0)} |u-\kappa|^p\,dx\right)^{1/p} + \left|\fint_{B_r(x_0)} u\,dy - \kappa\right| \\
&\leq \left(\fint_{B_r(x_0)} |u-\kappa|^p\,dx\right)^{1/p} + \fint_{B_r(x_0)} |u-\kappa|\,dx \\
&\leq 2\left(\fint_{B_r(x_0)} |u-\kappa|^p\,dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Daí concluimos que

$$\fint_{G_r} |u-(u)_{0,r}|^p\,dxdt \leq Cr^{p\alpha},$$

Onde C é uma constante dependendo unicamente de n, p, λ, θ e α. Ora por argumentos de cubrimiento estandares e a caracterização da Hölder continuidade de Campanato-Da Prato obtemos a continuidade local $C^{0;\alpha,\alpha/\theta}$ e assim o resultado principal fica provado.

5 GENERALIZAÇÕES

Devido a que o método empregado neste trabalho unicamente explora o “scaling”intrínseco do operador $p-$parabólico e o que faz é interpretar o problema homogêneo como a equação tangencial geométrica de sua contraparte não-homogênea, para pequenas perturbações $f \in L^{q,r}$, $\|f\|_{L^{q,r}} \ll 1$, então surge a questão se a mesma ideia pode ser aplicada a equações parabólicas degeneradas mais gerais

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,Du) = f \in L^{q,r} \tag{24}$$

satisfazendo as condições de estrutura

$$\begin{aligned} A(x,t,Du)\cdot Du &\geq C_0|Du|^p - \varphi_0(x,t),\\ |A(x,t,Du)| &\leq C_1|Du|^{p-1} + \varphi_1(x,t). \end{aligned}$$

para $p \geq 2$, constantes positivas C_0, C_1 e funções não-negativas φ_0, φ_1 em um apropriado espaço de funções.

A resposta é de se esperar seja positiva e em efeito ela é positiva. A continuação comentaremos as modificações requeridas.

O Lema 3.1 é baseado em considerações de energia, logo a mesma prova funciona no caso geral. O Lema 3.2 pode ser realizado universalmente na classe estrutural de operadores, pois limitações para a integrabilidade da derivada no tempo existem, ou seja, vale uma estimativa do tipo (14) a qual pode ser mostrada usando o resultado dado em (10) (ver também (1, seção 7)). Respeito ao Lema 3.3, a mesma prova funciona devido que soluções da equação geral homogênea são também Lipschitz no espaço e $C^{0;1/2}$ no tempo. A unica modificação acontece quando se itera o Lema 3.3. A função redimensionada v definida em (21) agora resolve a equação

$$u_t - \operatorname{div} A_k(x,t,Du) = \lambda^{pk-(p-1)\alpha k} f(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t),$$

onde

$$A_k(x,t,\xi) := (\lambda^{-\alpha k})^{1-p} A(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t, \lambda^{-\alpha k}\xi)$$

pertence à mesma classe estrutural de A. Em particular, v fica nas condições do Lema 3.3 e portanto a prova segue da mesma forma que no Lema 3.4. Obtendo uma estimativa do tipo (20) o resultado principal no caso geral segue como na prova do Teorema 2.13.

6 CONCLUSÃO

No desenvolvimento do trabalho pode-se observar a importância de considerar a geometria intrínseca da equação, a qual neste caso ajuda no objetivo de achar o expoente de Hölder ótimo de forma explicita, obtendo-se assim uma melhora na teoria de regularidade para soluções fracas de equações $p-$parabólicas.

REFERÊNCIAS

[1] E Acerbi, G Mingione, and GA Seregin. Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 21, pages 25–60, 2004.

[2] Verena Bögelein. Global gradient bounds for the parabolic p-Laplacian system. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 111(3):633–680, 2015.

[3] Verena Bögelein and Frank Duzaar. Hölder estimates for parabolic $p(x,t)-$Laplacian systems. *Mathematische Annalen*, 354(3):907–938, 2012.

[4] Nicolas Bourbaki. Integration. I. Chapters 1–6. Elements of Mathematics, 2004.

[5] Emmanuele DiBenedetto. *Degenerate Parabolic Equations.* Springer, New York, 2012.

[6] Emmanuele DiBenedetto, Vincenzo Vespri, and Ugo Gianazza. Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations. 2012.

[7] Lawrence C Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, Provindence, RI, 1998.

[8] Enrico Giusti. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 7. World Scientific, 2003.

[9] Tadeusz Iwaniec and J Manfredi. Regularity of p-harmonic functions on the plane. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 5(1-2):1–19, 1989.

[10] Peter Lindqvist. On the time derivative in a quasilinear equation. *arXiv preprint arXiv:1601.01563*, 2016.

[11] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1):65–96, 1986.

[12] Eduardo V Teixeira. Sharp regularity for general Poisson equations with borderline sources. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 99(2):150–164, 2013.

[13] Eduardo V Teixeira and José Miguel Urbano. An intrinsic Liouville theorem for degenerate parabolic equations. *Archiv der Mathematik*, 102(5):483–487, 2014.

[14] José Miguel Urbano. *The Method of Intrinsic Scaling: A Systematic Approach to Regularity for Degenerate and Singular PDEs*, volume 1930. Springer-Verlag, Berlin, 2008.