UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDVALTER DA SILVA SENA FILHO

# FINITUDE PARA PARES DE GERMES DE APLICAÇÕES BI-$\mathcal{K}$-BI-LIPSCHITZ EQUIVALENTES

FORTALEZA

2016

EDVALTER DA SILVA SENA FILHO

# FINITUDE PARA PARES DE GERMES DE APLICAÇÕES BI-$\mathcal{K}$-BI-LIPSCHITZ EQUIVALENTES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Lev Birbrair

Coorientador:
Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S477f Sena Filho, Edvalter da Silva.
Finitude para pares de germes de aplicações Bi-K-bi-Lipschitz equivalentes / Edvalter da Silva Sena Filho. – 2016.
61 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Lev Birbrair.
Coorientação: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

1. C^0-K equivalência,. 2. K-bi-Lipschitz equivalência. 3. Finitude. I. Título.

CDD 510

EDVALTER DA SILVA SENA FILHO

FINITUDE PARA PARES DE GERMES DE APLICAÇÕES BI-$\mathcal{K}$-BI-LIPSCHITZ EQUIVALENTES.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: MATEMÁTICA.

Aprovada em: 27/05/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Lev Birbrair (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

---

Prof. Dra. Miriam da Silva Pereira
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

---

Prof. Dr. Jose Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização. Em especial, aos meus pais, por todo apoio e carinho.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, por ter me dado forças para continuar e chegar aonde cheguei.

Aos meus pais Edvalter Sena e Antonia Maria por todo apoio, carinho, compreensão e incentivo no decorre dessa caminhada. Também, por todo o cuidado que tiveram com a minha formação, por que mesmo com as dificuldades, sempre souberam priorizar meus estudos.

À minha namorada Raquel Alencar pelo amor, carinho e compreensão ao longo dessa jornada.

À minha família Carla Valéria, José Newton, Anderson Ricardo, Erineuda Sena, Cintia Luziane, Douglas Alisson, Jaqueline Patricia por sempre terem acreditado no meu sucesso. Agradeço todos os dias a Deus a família que tenho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Lev Birbrair pela paciência, disponibilidade e valiosos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Alexandre Fernandes, meu coorientador, pelo apoio, incentivo e o aprendizado que obtive em suas aulas.

Aos meus amigos Alex Sandro, Antonio Kelson, Antonio Grangeiro, Cleiton Cunha, Cristiane Cunha, Daniel da Costa, Davi Ribeiro, Franciane Vieira, Israel Evangelista, João Franscisco, Maria Vieira, Raimundo Nonato, Valdir Ferreira pela amizade, pelas várias conversas, brincadeiras e momentos de descontração que alegravam bastante o dia.

Aos meus amigos de Singularidade Edson Sampaio, Joserlan Perote, Maria Selene e Rodrigo Mendes pelas várias conversas sobre Matemática ao longo desses anos.

Aos meus amigos da Pós-graduação Cícero Tiarlos, Davi Lustosa, Elaine Sampaio, Fabricio Figueredo, Halyson Baltazar, Ivaldo Tributino, Janiele Gonçalves, José Tiago, Marcos Raniere, Rafael Diogenes, Renivaldo Sena, Wanderley Silva e a todos os outros que, direta ou indiretamente, estiveram presente ao longo desta caminhada.

Aos professores Jose Edson Sampaio, Miriam da Silva Pereira e Carlos Humberto Soares Junior por aceitarem o convite de participar da minha banca examinadora, bem como pelas correções e valiosas sugestões dadas neste trabalho. Também ao professor João Carlos Ferreira Costa, que mesmo com a distância, sempre foi bastante solicito.

Aos professores da Pós-graduação em Matemática da UFC pelo aprendizado proporcionado.

À Andrea e Jessyca, pela competência, educação e agilidade.

À Capes, pelo apoio financeiro.

**RESUMO**

Neste trabalho, iremos analisar o comportamento das classes de equivalência, fornecida pela relação Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. Mostramos que, quando estamos trabalhando com pares de germes de aplicações polinomiais $(f,g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$, onde o grau de $f_1, ...f_p, g_1, ..., g_q$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$, temos apenas uma quantidade finita de classes de equivalência. Também mostraremos neste trabalho que o conjuntos das classes de equivalência com respeito a relação fortemente bi-lipschitz é finito.

**Palavras-chave**: $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência. $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência. Finitude.

## ABSTRACT

In this paper, we analyze the behavior of equivalence classes provided by the relation Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. We show that when we are working with germs pairs of polynomial applications $(f,g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$, with degree of $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q$ less than or equal to $k \in \mathbb{N}$, we have only a finite number of equivalence classes. We will also show in this work that the sets of equivalence classes with respect to strongly bi-lipschitz relation is finite.



**Keywords**: $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalence. $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalence. Finiteness.

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A palavra Singularidade é uma noção quem tem a sua origem no vocábulo latino: Singularitate. Trata-se do estudo das características daquilo que é singular: pouco frequente, fora do comum, ou extraordinário. A singularidade, por conseguinte, é a qualidade que distingue algo de outras coisas do mesmo gênero. Ela pode ser descrita então como a qualidade que uma pessoa ou ser vivo pode possuir para diferenciar-se do restante de seus semelhantes. Por exemplo, podemos falar de singularidade de uma planta que apresenta um tipo de característica diferente do restante de seu tipo, ou de um animal que, por exemplo, em vez de ter uma cor, apresenta uma tonalidade diferente. No caso do ser humano, o conceito de singularidade é muito mais complexo, uma vez que pode ser atribuído às características físicas, bem como aos traços da personalidade e aí o limite é muito subjetivo e difícil de estabelecer.

Matemáticamente, há muitas singularidades. Uma singularidade é, por exemplo, o que acontece em situações como a divisão por zero. A singularidade marca um ponto de transição entre dois *domínios*, ou dois *mundos*, num ponto ou instante.

No estudo de aplicações $f : U \to \mathbb{R}^p$, onde $U$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$, este conceito aparece naturalmente. Dizemos que um ponto $x \in U$ é um ponto crítico de $f$ se a matriz das derivadas parciais calculadas nesse ponto $x$ não tem posto máximo. O objetivo inicial da Teoria de Singularidades foi justamente estudar esses pontos críticos e suas imagens por $f$, que são chamadas de singularidades de $f$. Este estudo teve como primeiro objetivo obter uma *classificação* dessas singularidades.

O que seria Classificação? A classificação é a acção e o efeito de classificar (ordenar ou *dispor por classes*). A classificação biológica, por exemplo, é a *Taxonomia*. No seu sentido mais lato, trata-se da ciência da classificação, que consiste em ordenar os organismos num sistema de classificação composto por hierarquia de grupos taxonômicos. O principal objetivo da taxonomia é organizar a árvore filogenética num sistema de classificação. A classificação periódica, por sua vez, é aquela que corresponde á tabela periódica dos elementos. Esta é uma organização que, atendendo a diversos critérios, distribui os distintos elementos químicos de acordo com certas características. A tabela costuma ser atribuída a Dimitri Mendeleiev, quem se lembrou de ordenar os elementos com base na variação computacional das propriedades químicas.

Visto um pouco da aplicabilidade da classificação, agora estamos interessado em analisar o comportamento das classes, fornecida por uma determinada relação.

Sejam $X, Y$ dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $X$ e $Y$ são bi-Lipschitz equivalentes quando existir um homeomorfismo bi-Lipschitz $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $h(X) = Y$. MOSTOWSKI (1985) prova que o conjunto das classes de equivalência, fornecida pela relação bi-Lipschitz, de conjuntos semialgébricos de complexidade limitada, é finito. Iremos definir uma nova relação: *A equivalência fortemente bi-Lipschitz*. Seja

$V_1, ..., V_p, W_1, ..., W_p$ subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$. A sequência de conjuntos algébricos $(V_1, ..., V_p)$ é dita fortemente bi-lipschitz equivalente a sequência $(W_1, ..., W_p)$ se existir um germe de homeomorfismo bi-lipschitz $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $h(V_1) = W_1, ..., h(V_p) = W_p$. Seja $F_t = (V_{t1}, ..., V_{tp})$ uma família de subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$, com complexidade limitada. Então, mostraremos neste trabalho que o conjunto de classes de equivalência com respeito a relação fortemente bi-lipschitz é finito. Este resultado pode ser visto como uma generalização, no sentido algébricos, do teorema de finitude Lipschitz, aprensentado por MOSTOWSKI (1985). Com isso, em particular, obtemos uma nova demonstração para a prova da finitude das classes de equivalência dos conjuntos algébricos, com complexidade limitada, bi-Lipschitz equivalentes.

Considere $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ dois germes de aplicações contínuas. Dizemos que $f$ e $g$ são bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalentes quando existir um germe de homemorfismo bi-Lipschitz $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, tal que $f = g \circ h$. HENRY and PARUSINSKI (2003) mostraram que a bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência de germes de funções analíticas reais tem moduli, isto é, existem infinitas classes de bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência para estes germes. Considere a família de 1-parâmetro $F_t : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ dada por $F_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^4 + y^6,\ t \in \mathbb{R}$. Então, para quaisquer $t \neq t', t, t' > 0$ temos que $F_t$ não é bi-Lipschitz $\mathcal{R}$ equivalente a $F_{t'}$, ou seja, não existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F_t = F_{t'} \circ H$.

Diremos que dois germe de aplicações $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalentes quando existem dois germes de homeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e $\phi : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, tais que $f = \phi \circ g \circ h$. Para o problema da classificação de germes de funções polinomiais $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalentes, um teorema de finitude foi apresentado por FUKUDA (1976). Seja $P^k(n, p)$ o conjunto de todos os germes de aplicações polinomiais $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ , onde o grau de $f_1, ..., f_p$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Fukuda prova que o número de classes de equivalência de $P^k(n, p)$, com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência é finito. Já THOM (1962) mostra que o número de classes de equivalência de $P^{12}(3, 3)$, com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência é infinito.

Nesta Tese, estudamos a equivalência de contato, definida para pares de germes de aplicações $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$, na versão topológica e na versão Lipschitz. Isto é, a Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência e a Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência. Dois pares de germes de aplicações $(f_1, g_1), (f_2, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes quando existem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ e $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, tais que: $H(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \{0\}^q) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \{0\}^q$, $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p \times \mathbb{R}^q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p \times \mathbb{R}^q$, $H(graf(f_1, g_1)) = graf(f_2, g_2)$ e a aplicação $H$ é escrita da seguinte maneira $H(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, y))$, onde $H_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ e $H_2 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$.

A técnica utulizada nesse trabalho consiste basicamente em reduzir o problema de finitude relacionado a germes de aplicações polinomiais, com grau limitado, para um outro problema de finitude; A finitude de germes de conjuntos algébricos, de complexidade limitada. Isto é, iremos reformular um problema algébrico para um problema geométrico.

Seja $P^k(n, p \times q)$ o conjunto de todos os pares de germes de aplicações polinomiais $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ , onde o grau de $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. No decorre deste trabalho, mostramos que o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n, p \times q)$, com respeito a Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência é finito. Como consequência direta deste resultado, mostramos que o conjunto das classes de $P^k(n, p)$ quocientado com a relação $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz também é finito. Esse segundo resultado, de finitude para as classes de equivalência fornecida pela relação $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz, já havia sido provado por RUAS and VALETTE (2011).

No Capítulo 1, daremos algumas definições básicas e necessárias, para que possamos dar continuidade neste trabalho. No final deste Capítulo, enunciaremos e demonstraremos uma generalização algébrica, do teorema de finitude Lipschitz, apresentado por MOSTOWSKI (1985).

No Capítulo 2, faremos um breve estudo sobre a $\mathcal{R}$ equivalência e a $\mathcal{A}$ equivalência, tanto no sentido topológico quanto no sentido Lipschitz.

No Capítulo 3, daremos a definição das relações: $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ e Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$. Faremos algumas comprações entre as relações: $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$, $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$. No final deste capítulo, daremos uma demonstração topológica, para o teorema de finitude das classes de equivalência, fornecida pela relação Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$.

No Capítulo 4, daremos a definição das relações: $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz e Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. Também iremos apresentar alguns invariantes, já conhecidos pela literatura, da relação $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. No final do Capítulo daremos a demonstração do principal resultado deste trabalho: A finitude do número de classes de equivalência, fornecida pela relação Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz.

# 2 PRELIMINARES

## 2.1 Conjuntos Algébricos, Semialgébricos

Um conjunto algébrico é o conjunto de zeros de uma família de polinômios, e constitui o objeto principal de estudo da geometria algébrica. Pelo conceito de conjunto algébrico é possível constituir uma relação entre a álgebra e a geometria, que permite se reformular problemas geométricos em termos algébricos, e vice-versa. Inicialmente, estavamos interessados em provar a finitude do número de classes de equivalência de germes de aplicações polinomiais $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. A primeira grande descoberta foi observar que esse problema de finitude estava diretamente relacionado a um outro problema: A finitude de uma família de conjuntos algébricos, no sentido *fortemente topológico*.

**Definição 2.1.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é algébrico se existem funções polinomiais $f_i$ : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., k$ tais que*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}.$$

**Observação 2.1.** *O conjunto $X$ é algébrico se existir uma função polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Basta considerar $f(x) = {f_1}^2(x) + ... + {f_k}^2(x)$.*

**Examplo 2.1.** *A cúspide $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$ é um conjunto algébrico, pois considere a função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - y^2$.*

**Proposição 2.1.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos algébricos. Então, $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são conjuntos algébricos.*

***Demonstração***. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções polinomiais, onde $X = f^{-1}(0)$ e $Y = g^{-1}(0)$. Considere agora as seguintes funções polinomiais $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $\phi(x) = f(x).g(x)$ e $\psi(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Note que: $X \cup Y = \phi^{-1}(0)$ e $X \cap Y = \psi^{-1}(0)$. □

**Definição 2.2.** *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito semialgébrico básico quando existem funções polinomiais $f, g_1, ..., g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que:*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\} \cap (\cap_{i=1}^{p}\{x \in \mathbb{R}^n; g_i(x) > 0\})$$

*Dizemos que $f, g_1, ..., g_p$ definem o conjunto $A$. Observe que se $f$ é a função polinomial identicamente nula, apenas $g_1, ..., g_p$ definem o conjunto $A$.*

**Definição 2.3.** *Um conjunto semialgébrico é a reunião finita de conjuntos semialgébricos básicos. Ou seja, $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico se existem funções polinomiais $f_i, g_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que:*

$$A = \cup_{j=1}^{p}(\{x \in \mathbb{R}^n; f_j(x) = 0\} \cap (\cap_{i=1}^{s_j}\{x \in \mathbb{R}^n; g_{ij} > 0\}))$$

**Observação 2.2.** *Todo conjunto algébrico é semialgébrico.*

**Examplo 2.2.** *Um conjunto de finitos pontos no $\mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgébrico. De fato, seja $A = \{z_1, ..., z_p\} \subset \mathbb{R}^n$. E para cada $z_i = (z_{i1}, ..., z_{in})$ defina $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f_i(x_1, ..., x_n) = (x_1 - z_{i1})^2 + ... + (x_n - z_{in})^2$. Então, $A = \cup_{i=1}^{p}\{x \in \mathbb{R}^n; f_i(x) = 0\}$ é, claramente, um conjunto semialgébrico.*

**Definição 2.4.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é semialgébrica se seu gráfico $\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto semialgébrico.*

**Teorema 2.1.** *(Tarski-Seidenberg) A imagem de um conjunto semialgébrico $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por uma projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ própria é um conjunto semialgébrico.*

**Corolário 2.1.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação polinomial. Então $F(X)$ é um conjunto semialgébrico.*

**Definição 2.5.** *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^p$. Uma aplicação $F : A \to B$ é semialgébrica se suas funções coordenadas são semialgébricas ou, equivalentemente, se seu gráfico $\Gamma(F) \subset \mathbb{R}^{n+p}$ é um conjunto semialgébrico.*

**Corolário 2.2.** *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $g : B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ aplicações semialgébricas, com $f(A) \subset B$. Então $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação semialgébrica.*

***Demonstração.*** Por hipótese, temos que os conjuntos $f(A) \subset B$, $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid x \in A\}$ e $\Gamma(g) = \{(y, g(y)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \mid y \in B\}$ são conjuntos semialgébricos. Logo,

$$L = \{(x, f(x), g(f(x))) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \mid x \in A\}$$

é também semialgébrico. Tomando a projeção $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, z)$, temos que $\Gamma(g \circ f) = \pi(L)$. Pelo Teorema 2.1, $\pi(L)$ é um conjunto semialgébrico. Logo $g \circ f$ é uma aplicação semialgébrica. $\square$

### Trivialização Semialgébrica

A aplicação contínua semialgébrica $p : A \to \mathbb{R}^k$ é dita semialgébrica trivial a um subconjunto semialgébrico $C \subset \mathbb{R}^k$ se existir um conjunto semialgébrico $F$ e um homeomorfismo $h : p^{-1}(C) \to C \times F$, tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \supset p^{-1}(C) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & C \times F \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathbb{R}^k \supset C &
\end{tikzcd}$$

O homeomorfismo $h$ é chamado de trivialização semialgébrica de $p$ em $C$. Diremos que a trivialização $h$ é compatível com o subconjunto semialgébrico $B \subset A$ se existir um subconjunto semialgébrico $G \subset F$ tal que $h(B \cap p^{-1}(C)) = C \times G$.

**Teorema 2.2.** *(Trivialização Semialgébrica de Hardt's) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto semialgébrico e $p : A \to \mathbb{R}^k$, uma aplicação contínua semialgébrica. Então existe uma partição finita de semialgébricos $C_1, ..., C_m$ de $\mathbb{R}^k$ tal que $p$ é semialgébrico trivial em cada $C_i$. Além disso, seja $B_1, ..., B_q$ uma quantidade finita de subconjuntos semialgébricos de $A$, então cada trivialização $h_i : p^{-1}(C_i) \to C_i \times F_i$ é compatível com todo $B_j$.*

*Em particular, se $x_0$ e $y_0$ estão na mesma $C_i$, então $p^{-1}(x_0)$ e $p^{-1}(y_0)$ são semialgébricamentes homeomorfos , uma vez que ambos são semialgébricamentes homeomorfos a $F_i$.*

## 2.2 Germes de Conjuntos e Aplicações

Seja $X$ um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. No conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de $X$, iremos definir uma relação de equivalência:

$A \underset{X}{\sim} B$ se, e somente se, $A \cap U = B \cap U$ para alguma vizinhança $U$ de $x$.

**Definição 2.6.** *A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\sim}$ é chamada de germe de subconjunto de $X$ no ponto $x$.*

Normalmente iremos denotar a classe de equivalência do subconjunto $A \subset X$ como sendo $A$ e o ponto $x$ como sendo a origem.

Seja agora $Y$ um conjunto e considere todos os pares $M = \{(U, f)\}$, onde $U$ é uma vizinhança de $x$ e $f$ é qualquer função $f : U \to Y$. Iremos introduzir uma relação de equivalência em $M$. Dizemos que:

$(U_1, f_1) \underset{X}{\approx} (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f_1|_{U_0} = f_2|_{U_0}$ para alguma vizinhança $U_0$ de $x$, com $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

**Definição 2.7.** *A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\approx}$ é chamada germe de apliação de $X$ em $Y$ no ponto $x$.*

Normalmente iremos denotar a classe de equivalência de $(U, f)$ por $f$.

## 2.3 Tipos Topológicos

**Definição 2.8.** *Sejam $X, Y$ dois subconjuntos topológicos do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $X$ e $Y$ possuem o mesmo tipo topológico quando existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(X) = Y$.*

O estudo das classes de equivalência se torna bastante interessante, pois representantes de uma mesma classe preservam certas propriedades. Essas propriedades, chamaremos de Invariantes por determinada relação. Citaremos alguns Invariantes Topológicos.

**Proposição 2.2.** *Sejam $X, Y$ dois subconjuntos topológicos do $\mathbb{R}^n$. Suponha que $X$ e $Y$ tenham o mesmo tipo topológico.*

*i) Se $X$ é compacto, então $Y$ é compacto.*

*ii) Se $X$ é conexo, então $Y$ é conexo.*

*iii) Se $X$ tem exatamente $m$ componentes conexas, então $Y$ tem exatamente $m$ componentes conexas.*

**Finitude dos tipos Topológicos**

**Teorema 2.3.** *(HARDT (1980)) Para quaisquer inteiros positivos $d$ e $n$, existe um inteiro positivo $p = (n, d)$ e subconjuntos algébricos $V_1, ..., V_p \subset \mathbb{R}^n$, definido por equações polinomiais de grau $\leq d$, tais que, para qualquer subconjunto algébrico $W \subset \mathbb{R}^n$ definido por equações polinomiais de grau $\leq d$, existe $i \in \{1, ..., p\}$ e homeomorfismo semialgébrico $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(W) = V_i$.*

***Demonstração.*** Seja $V$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ definido pelas equações $P_1 = \ldots = P_q = 0$ de grau $\leq d$ pode sempre ser considerado definido por uma única equação de grau $\leq 2d$, isto é, ${P_1}^2 + \ldots + {P_q}^2 = 0$. O polinômio de grau $2d$ em $n$ variáveis tem $C(2d + n, n) = N(n, d)$ coeficientes. Iremos identificar esses coeficientes com $\mathbb{R}^N$ e denotaremos por $P_a \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ o polinômio de grau $\leq 2d$ correspondendo ao $a \in \mathbb{R}^N$. O conjunto

$$A = \{(a, x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \mid P_a(x) = 0\}$$

é um subconjunto semialgébrico do $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$. Seja $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ a projeção. Pelo Teorema de Hardt's 2.2, temos uma partição finita semialgébrica $\mathbb{R}^N = C_1 \cup ... \cup C_q$ tais que, para cada $i = 1, ..., q$ existe uma trivialização semialgébrica $h_i : C_i \times \mathbb{R}^n \to C_i \times \mathbb{R}^n$ de $p$ em $C_i$, compatível com $A$. Escolha um ponto $a_i$, tal que $P_{a_i}$, é a soma dos quadrados dos polinômios em cada $C_i$ contendo tais pontos, digamos $C_1, ..., C_p$. Para $i = 1, ..., p$, defina

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_{a_i}(x) = 0\}.$$

Qualquer conjunto algébrico $W$ pode ser escrito da forma:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_a(x) = 0\},$$

onde $a \in C_i$ para algum $i \in \{1, ..., p\}$. A trivialização semialgébrica $h_i$ induz um homeomorfismo semialgébrico $p^{-1}(a) \to p^{-1}(a_i)$ que manda $A \cap p^{-1}(a)$ em $A \cap p^{-1}(a_i)$, que por sua vez, gera um homeomorfismo semialgébrico $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(W) = V_i$. $\square$

**Definição 2.9.** *Seja $V_1, ..., V_p, W_1, ..., W_p$ subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$. A sequência de conjuntos algébricos $(V_1, ..., V_p)$ é dita fortemente topológicos equivalente a sequência $(W_1, ..., W_p)$ se existir um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $h(V_1) = W_1, ..., h(V_p) = W_p$.*

Dizemos que um subconjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^n$ tem complexidade limitada se o grau do polinômio $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ é limitado, onde $f^{-1}(0) = V$.

**Teorema 2.4.** *Seja $F_t = (V_{t1}, ..., V_{tp})$ uma família de subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$, com complexidade limitada. Então, o conjunto de classes de equivalência com respeito a relação fortemente topológica é finito.*

**Lema 2.1.** *Sejam $f = (f_1, ..., f_p), g = (g_1, ..., g_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações polinomiais. Seja $(X_1, ..., X_p)$, $(Y_1, ..., Y_p)$ duas sequências de conjuntos algébricos, tais que $X_i = f_i^{-1}(0), Y_i = g_i^{-1}(0)$ para todo $i = 1, ..., p$. Suponha que exista um germe de homeormofismo $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ tal que:*

*1) Os subconjuntos algébricos $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}, ...,$ $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ são invariantes por $H$.*

*2) $H(graf(f)) = graf(g)$*

*Então, $(X_1, ..., X_p)$ e $(Y_1, ..., Y_p)$ são fortemente topológicos equivalentes.*

***Demonstração.*** Seja $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ a projeção canônica usual. Seja $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ o germe de homeomorfismo definido por $h(x) = \pi_n(H(x, f(x)))$. Mostraremos que $h(X_i) = Y_i$ para todo $i = 1, ..., p$. De fato, tome $x \in X_i$. Então o ponto $(x, f(x)) \in graf(f) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$. Como a aplicação $H$ leva $graf(f)$ no $graf(g)$ e o espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$ é invariante por $H$, obtemos que $(g(x), g \circ h(x)) \in graf(g) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$. Isto é, $g_i \circ h(x) = 0$. Logo $h(x) \in Y_i$. O caso contrário é análogo, basta aplicar o germe de homeomorfismo $h^{-1}$. $\square$

**Observação 2.3.** *A equivalência de conjuntos definida no Lema 2.1 é chamada equivalência topologica dos gráficos, com respeito a família de conjuntos algébricos $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\}, ...,$ $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$.*

***Demonstração do Teorema 2.4.*** Suponha, por absurdo, que existam infinitas classes de equivalência. Então podemos tomar uma infinidade de representantes

$$(X_{11}, ..., X_{1p}), (X_{21}, ..., X_{2p}), ..., (X_{n1}, ..., X_{np}), ...$$

os quais não são, dois a dois, fortemente topológicos equivalentes. Seja $f_i = (f_{i1}, ..., f_{ip}) :$

$(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ uma sequência de aplicações polinomiais, tais que:

$$X_{ir} = f_{ir}^{-1}(0), \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 1 \leq r \leq p.$$

Defina uma aplicação $F_i : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$, como sendo:

$$F_i(x, y) = (f_{i1}(x) - y_1, ..., f_{ip}(x) - y_p),$$

observe que $F_i^{-1}(0) = graf(f_i)$. Um polinômio de grau menor ou igual a $k$, com $n + p$ variáveis tem $N(k, n, p)$ coeficientes. Iremos identificar esses coeficientes com $\mathbb{R}^N$ e denotaremos por $P_a \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_{n+p}]$ o polinômio de grau $\leq k$ correspondendo ao elemento $a \in \mathbb{R}^N$. O conjunto

$$A = \{(a, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n+p}; P_a(z) = 0\}$$

é um subconjunto semialgébrico do $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n+p}$. A sequência dada abaixo são de subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n+p}$.

$$B_0 = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^p,\ B_1 = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\},\ ...\ , B_p = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$$

Portanto, pelo Teorema de trivialização Semialgébrica de Hardt's 2.2, existe uma partição finita semialgébrica do $\mathbb{R}^N = C_1 \cup ... \cup C_q$ tais que, para cada $i = 1, ..., q$ existe uma trivialização semialgébrica $h_i : C_i \times \mathbb{R}^{n+p} \to C_i \times F_i$ de $p$ em $C_i$, compatível com $A, B_0, B_1, ..., B_p$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_{F_i}, a_{F_j} \in C_s$, para algum $i \neq j$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n+p} \supset p^{-1}(C_s) \arrow[rr, "h_s"] \arrow[dr, "p"'] & & C_s \times F_k \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathbb{R}^k \supset C_s &
\end{tikzcd}$$

A trivialização semialgébrica $h_s$ induz um homeomorfismo semialgébrico de $p^{-1}(a_{F_i})$ em $p^{-1}(a_{F_j})$. Além disso, esse homeomorfismo manda:

*1)* $A \cap p^{-1}(a_{F_i})$ em $A \cap p^{-1}(a_{F_j})$. Isto é, manda
$(a_{F_i}, X(a_{F_i}))$ em $(a_{F_j}, X(a_{F_j}))$, onde $X(a_{F_j}) = \{z \in \mathbb{R}^{n+p} \mid F_j(z) = 0\}$

*2)* $B_0 \cap p^{-1}(a_{F_i})$ em $B_0 \cap p^{-1}(a_{F_j})$. Isto é, manda
$\{a_{F_i}\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ em $\{a_{F_j}\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$

*3)* $B_1 \cap p^{-1}(a_{F_i})$ em $B_1 \cap p^{-1}(a_{F_j})$. Isto é, manda
$\{a_{F_i}\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$ em $\{a_{F_j}\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

*p+2)* $B_p \cap p^{-1}(a_{F_i})$ em $B_p \cap p^{-1}(a_{F_j})$. Isto é, manda
$\{a_{F_i}\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ em $\{a_{F_j}\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$

Isto gera um homeomorfismo semialgébrico $h : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ onde:

*1)* $h({F_i}^{-1}(0)) = {F_j}^{-1}(0) \;\Rightarrow\; h(graf(f_i)) = graf(f_j)$.

*2)* $h(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$.

*3)* $h(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

*p+2)* $h(\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$.

Pelo Lema 2.1, $(X_{i1}, ..., X_{ip})$ e $(X_{j1}, ..., X_{jp})$ são fortemente topológicos equivalentes. Absurdo! □

## 2.4 Tipos bi-Lipschitz

**Definição 2.10.** *Sejam $X, Y$ dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $X$ e $Y$ possuem o mesmo tipo bi-Lipschitz quando existir um homeomorfismo bi-Lipschitz $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(X) = Y$.*

A definição de homeomorfismo bi-Lipschitz acima é uma relação de equivalência entre os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, a qual dizemos que detecta o tipo bi-Lipschitz dos subconjuntos.

**Examplo 2.3.** *Seja $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 = r\}$. Então $S_{r_i}$ e $S_{r_j}$ tem o mesmo tipo bi-Lipschitz, para todo $r_i, r_j \in \mathbb{R}^*_+$. A saber, tome o homeomorfismo bi-Lipschitz $H_{ij} : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ como sendo $H_{ij}(x) = \frac{r_j}{r_i}(x_1, \ldots, x_n)$.*

**Proposição 2.3.** *Sejam $S_1, ..., S_r : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ e $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de homeomorfismos bi-Lipschitz. Suponha que $S_i(x, y_i) = (h(x), H_i(x, y_i))$, para todo $i = 1, ..., r$. Então, a aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+r}, 0)$, definida como sendo $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y_1), ..., H_r(x, y_r))$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz.*

***Demonstração.*** Primeiramente mostraremos que $H$ é um germe de homeomorfismo e logo em seguida que satisfaz a propriedade bi-Lipschitz.

*1) Continuidade:* $H$ é contínua, pois cada germe de função coordenada é.

*2) Injetividade:* Suponha que $H(x, y_1, ..., y_r) = H(z, w_1, ..., w_r)$. Então:

$h(x) = h(z) \;\Rightarrow\; x = z$

$H_1(x, y_1) = H_1(z, w_1)$, como $x = z$, temos $y_1 = w_1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$H_r(x, y_r) = H_r(z, w_r)$, como $x = z$, temos $y_r = w_r$

Portanto, $(x, y) = (z, w)$.

*3) Sobrejetividade:* Tome $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. Como $h$ é bijetiva, temos que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x) = z$. Para cada $(z, w_i)$, temos também que existe $(x, y_i)$ tal que $S_i(x, y_i) = (z, w_i)$, pois $S_i$ é bijetiva. Portanto, $H_i(x, y_i) = w_i$. Logo, $H(x, y_1, ..., y_r) = (z, w_1, ..., w_r)$.

*4) Inversa Contínua:* Defina a aplicação $T : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0)$ como sendo $S(z, w_1, ..., w_r) = (h^{-1}(z), M_1(z, w_1), ..., M_r(z, w_r))$, onde $M_i$ é dada pela aplicação $S_i^{-1}(z, w) = (h^{-1}(z), M_i(z, w))$.

Claramente $T$ é um germe de aplicação contínua e além disso,

$$\begin{aligned} H \circ T(z, w) &= H(h^{-1}(z), M_1(z, w_1), ..., M_r(z, w_r)) \\ &= (z, H_1(h^{-1}(z), M_1(z, w_1)), ..., H_p(h^{-1}(z), M_p(z, w_p))) \\ &= (z, w_1, ..., w_p). \end{aligned}$$

De um modo análogo, mostramos que $T \circ H(x, y) = (x, y)$.

*5) Propriedade Lipschitz:* Como $S_1, ..., S_r$ e $h$ são germes de homeomorfismos bi-Lipschitz, existem constantes positivas $a, b$ tais que;

$$a \parallel (x, y_1) - (u, v_1) \parallel \leq \parallel S_1(x, y_1) - S_1(u, v_1) \parallel \leq \ b \parallel (x, y_1) - (u, v_1) \parallel$$

$$\forall\ x, u \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ y_1, v_1 \in \mathbb{R}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a \parallel (x, y_r) - (u, v_r) \parallel \leq \parallel S_r(x, y_r) - S_r(u, v_r) \parallel \leq \ b \parallel (x, y_r) - (u, v_r) \parallel$$

$$\forall\ x, u \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ y_r, v_r \in \mathbb{R}$$

$a \parallel x - u \parallel \leq \parallel h(x) - h(u) \parallel \leq \ b \parallel x - u \parallel \quad \forall\ x, u \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \parallel H(x, y) - H(u, v) \parallel \ &= \ \parallel (h(x), H_1(x, y_1), ..., H_r(x, y_r)) \\ &\quad - (h(u), H_1(u, v_1), ..., H_r(u, v_r)) \parallel \\ &= \ \left[ \ \parallel h(x) - h(u) \parallel^2 + (H_1(x, y_1) - H_1(u, v_1))^2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ (H_r(x, y_r) - H_r(u, v_r))^2 \ \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ \left[ \ r \parallel h(x) - h(u) \parallel^2 + (H_1(x, y_1) - H_1(u, v_1))^2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ (H_r(x, y_r) - H_r(u, v_r))^2 \ \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ \left[ \ \parallel h(x) - h(u) \parallel^2 + (H_1(x, y_1) - H_1(u, v_1))^2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ \parallel h(x) - h(u) \parallel^2 + (H_r(x, y_r) - H_r(u, v_r))^2 \ \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ \left[ \ b^2(\parallel x - u \parallel^2 + (y_1 - v_1)^2) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ b^2(\parallel x - u \parallel^2 + (y_r - v_r)^2) \ \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ [\ rb^2\| \ x-u \ \|^2 + b^2(y_1-v_1)^2 + \cdots + b^2(y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ [\ rb^2\| \ x-u \ \|^2 + rb^2(y_1-v_1)^2 + \cdots + rb^2(y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ b\sqrt{r}\ \ [\ \| \ x-u \ \|^2 + (y_1-v_1)^2 + \cdots + (y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ b\sqrt{r}\ \| \ (x,y)-(u,v)\ \|
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\| \ H(x,y)-H(u,v)\ \| \ &= \ \| \ (h(x), H_1(x,y_1), ..., H_r(x,y_r)) \\
&- \ (h(u), H_1(u,v_1), ..., H_r(u,v_r))\ \| \\
&= \ [\ \| \ h(x)-h(u)\ \|^2 + (H_1(x,y_1)-H_1(u,v_1))^2 \\
&+ \cdots + \ (H_r(x,y_r)-H_r(u,v_r))^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ [\ \| \ h(x)-h(u)\ \|^2 + \tfrac{1}{r}(H_1(x,y_1)-H_1(u,v_1))^2 \\
&+ \cdots + \ \tfrac{1}{r}(H_r(x,y_r)-H_r(u,v_r))^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ [\ \tfrac{1}{r}\| \ h(x)-h(u)\ \|^2 + \tfrac{1}{r}(H_1(x,y_1)-H_1(u,v_1))^2 \\
&+ \cdots + \ \tfrac{1}{r}(h(x)-h(u))^2 + \tfrac{1}{r}(H_r(x,y_r)-H_r(u,v_r))^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ [\ \tfrac{1}{r}a^2(\| \ x-u \ \|^2 + (y_1-v_1)^2) \\
&+ \cdots + \ \tfrac{1}{r}a^2(\| \ x-u \ \|^2 + (y_r-v_r)^2)\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ [\ a^2\| \ x-u \ \|^2 + \tfrac{1}{r}a^2(y_1-v_1)^2 + \cdots + \tfrac{1}{r}a^2(y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ [\ \tfrac{1}{r}a^2\| \ x-u \ \|^2 + \tfrac{1}{r}a^2(y_1-v_1)^2 + \cdots + \tfrac{1}{r}a^2(y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ \tfrac{a}{\sqrt{r}}\ \ [\ \| \ x-u \ \|^2 + (y_1-v_1)^2 + \cdots + (y_r-v_r)^2\ ]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \ \tfrac{a}{\sqrt{r}}\ \| \ (x,y)-(u,v)\ \|
\end{aligned}
$$

Portanto, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-lipschitz. $\square$

**Finitude dos tipos bi-Lipschitz**

**Teorema 2.5.** *( MOSTOWSKI (1985)) Dado $c > 0$, considere o conjunto de todos os conjuntos semialgébricos com complexidade $\leq c$. Então, o conjunto do tipos bi-Lipschitz é finito.*

A propriedade de complexidade limitada dos conjuntos semialgébricos, no Teorema 2.5 é bastante importante. Retirando essa hipótese, facilmente encontramos um contra exemplo.

**Examplo 2.4.** *Seja* $a_j \in \mathbb{R}$ *uma sequência infinita de pontos distintos dois a dois. Defina um a função polinomial* $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *como sendo* $f_1(x,y) = y - a_1 x$ *e* $f_{j+1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f_{j+1}(x,y) = f_j(x,y)(y - a_{j+1}x) \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}.$$

*Assim, obtemos uma sequência infinita de funções polinomiais, tais que:*

$$\begin{aligned}
&{f_1}^{-1}(0) = \{y = a_1 x\},\\
&{f_2}^{-1}(0) = \{y = a_1 x\} \cup \{y = a_2 x\},\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&{f_k}^{-1}(0) = \{y = a_1 x\} \cup \{y = a_2 x\} \cup ... \cup \{y = a_k x\},\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

*Observe que:* ${f_k}^{-1}(0) \setminus \{(0,0)\}$ *tem exatamente* $2k$ *componentes conexas, para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Portanto,* ${f_i}^{-1}(0)$ *e* ${f_j}^{-1}(0)$ *tem tipos bi-Lipschitz diferentes, para todo* $i \neq j$.

**Definição 2.11.** *Sejam* $V_1, ..., V_p, W_1, ..., W_p$ *subconjuntos algébricos do* $\mathbb{R}^n$. *A sequência de conjuntos algébricos* $(V_1, ..., V_p)$ *é dita fortemente bi-lipschitz equivalente a sequência* $(W_1, ..., W_p)$, *se existir um germe de homeomorfismo bi-lipschitz* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *tal que* $h(V_1) = W_1, ..., h(V_p) = W_p$.

**Teorema 2.6.** *Seja* $F_t = (V_{t1}, ..., V_{tp})$ *uma família de subconjuntos algébricos do* $\mathbb{R}^n$, *com complexidade limitada. Então, o conjunto de classes de equivalência com respeito a fortemente bi-lipschitz equivalência é finito.*

**Lema 2.2.** *Sejam* $f = (f_1, ..., f_p), g = (g_1, ..., g_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *germes de aplicações polinomiais. Sejam* $(X_1, ..., X_p)$, $(Y_1, ..., Y_p)$ *duas sequências de conjuntos algébricos, tais que* $X_i = f_i^{-1}(0), Y_i = g_i^{-1}(0)$ *para todo* $i = 1, ..., p$. *Suponha que exista um germe de homeormofismo bi-lipschitz* $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ *tal que:*

*1) Os subconjuntos algébricos* $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}, ...,$ $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ *são invariantes por* $H$.

*2)* $H(graf(f)) = graf(g)$

*Então,* $(X_1, ..., X_p)$ *e* $(Y_1, ..., Y_p)$ *são fortemente bi-lipschitz equivalentes.*

***Demonstração.*** Seja $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ a projeção canônica usual. Defina $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ como sendo $h(x) = \pi_n(H(x, f(x)))$. Note que $h$ é um germe de homeomorfismo bi-lipschitz. De fato, como $g$ é um germe de aplicação Lipschitz, a projeção ${\pi_n}|_{graf(g)}$ é um germe de aplicação bi-Lipschitz. Pelo mesmo argumento, a aplicação $x \mapsto (x, f(x))$ é bi-Lipschiz. Já a aplicação $H$ é bi-Lipschitz por definição. Logo, a aplicação $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Mostraremos agora que $h(X_i) = Y_i$ para todo $i = 1, ..., p$. De fato, tome $x \in X_i$. Então o ponto $(x, f(x)) \in$

$graf(f) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$. Como a aplicação $H$ leva $graf(f)$ no $graf(g)$ e o espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$ é invariante por $H$, obtemos que $(g(x), g \circ h(x)) \in graf(g) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-i}$. Isto é, $g_i \circ h(x) = 0$. Logo $h(x) \in Y_i$. O caso inverso é análogo, basta aplicar a $h^{-1}$. $\square$

**Observação 2.4.** *A equivalência de conjuntos definida no Lema 2.2 é chamada equivalência bi-lipschitz dos gráficos, com respeito a família de conjuntos algébricos* $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\}, ..., \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. *Para* $p = 1$, *um demonstração para o caso de conjuntos semialgébricos foi fornecida por MOSTOWSKI (1985).*

***Demonstração do Teorema 2.6***. Pelo Teorema de Trivialidade Lipschitz de VALETTE (2005), o número de classes de equivalência com respeito a equivalência lipschitz dos gráficos, com respeito a família de conjuntos algébricos descrita na Observação 2.4 é finito. Pelo Lema 2.2, concluímos que o número de classes de equivalência, pela relação fortemente bi-lipschitz também é finito. $\square$

# 3 $\mathcal{R}$ EQUIVALÊNCIA E $\mathcal{A}$ EQUIVALÊNCIA

É natural pensarmos em uma relação de equivalência onde mudamos as coordenadas do domínio e contra domínio, por difeomorfismos locais de classe $\mathcal{C}^s$, onde $s = 1, 2, ..., \infty, w$, e $\mathcal{C}^w$ significa analiticidade real.

## 3.1 $\mathcal{R}$ equivalência

**Definição 3.1.** *Dois germes de aplicações contínuas $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são ditos $\mathcal{C}^s$-$\mathcal{R}$ equivalentes se existir um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^s$, $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n,0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{R}^p,0) \\ (\mathbb{R}^n,0) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

*Se $\phi$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, respectivamente germe de homeomorfismo, então dizemos que $f$ e $g$ são bi-Lipschitz $\mathcal{R}$ equivalentes, respectivamente $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalentes.*

**Observação 3.1.** *Pela própria definição, temos as seguintes implicações:*

$$\mathcal{C}^0\text{-eq.} \Leftarrow \text{bi-Lipschitz eq.} \Leftarrow \mathcal{C}^1\text{-eq.} \Leftarrow \mathcal{C}^2\text{-eq.} \Leftarrow \cdots \Leftarrow \mathcal{C}^\infty\text{-eq.} \Leftarrow \mathcal{C}^w\text{- eq.}$$

As implicações inversas da Observação 3.1 não são verdadeiras.

**Examplo 3.1.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ funções polinomiais definidas por*

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2, g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x^{s+4}$$

*para $s \in \mathbb{N}$. O trabalho de KUIPER (1968) e TAKENS (1971) mostram que $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^s$-$\mathcal{R}$ equivalentes, mas não são $\mathcal{C}^{s+1}$-$\mathcal{R}$ equivalentes.*

HENRY and PARUSINSKI (2003) mostraram que a bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência de germes de funções analíticas reais tem moduli, isto é, existem infinitas classes de bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência para estes germes.

**Examplo 3.2.** *Considere a família de 1-parâmetro $F_t : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ dada por $F_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^4 + y^6$, $t \in \mathbb{R}$. Então, para quaisquer $t \neq t', t, t' > 0$ temos que $F_t$ não é bi-Lipschitz $\mathcal{R}$ equivalente a $F_{t'}$, ou seja, não existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F_t = F_{t'} \circ H$.*

*Em particular, isto mostra que a bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência de germes de* *funções analíticas reais admite moduli contínuo.*

Por outro lado, ja vimos que os tipos bi-Lipschitz de germes de conjuntos semi-algébricos não tem moduli MOSTOWSKI (1985), PARUSINSKI (1988a), PARUSINSKI (1988b). Consequência direta do Teorema 2.5.

Considere um germe de função analítica $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$

$$f(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + ...,$$

onde $f_i$ é uma forma homogênea de grau $i$ e $f_m \not\equiv 0$. A multiplicidade de $f$, $m_f$ é definia por $m_f := m(f) := m$. O Teorema 3.1 mostra que a multiplicidade é um invariante da bi-Lipschitz $\mathcal{R}$ equivalência.

**Teorema 3.1.** *( FERNANDES and RUAS (2004)) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções analíticas. Se $f$ e $g$ são bi-Lipschitz $\mathcal{R}$-equivalentes, então $f$ e $g$ tem a mesma multiplicidade.*

**Proposição 3.1.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções analíticas, dadas por:*

$$f(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots, f_m \not\equiv 0,$$

$$g(x) = g_k(x) + g_{k+1}(x) + \cdots, g_k \not\equiv 0,$$

*Suponha que $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^1$-$\mathcal{R}$-equivalentes. Então $k = m$. Além disso, $f_m$ e $g_m$ são linearmentes equivalentes.*

*Em particular, se funções polinomiais homogêneas são $\mathcal{C}^1$-$\mathcal{R}$-equivalentes, então são linearmentes equivalentes.*

***Demonstração.*** Como a $\mathcal{C}^1$-$\mathcal{R}$ equivalência implica na bi-Lipschitz-$\mathcal{R}$ equivalência, temos pelo Teorema 3.1 que $k = m$. Seja $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ difeomorfismo local, de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $f = g \circ h$. Escreva:

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \theta_i(x)$$

onde $h(x) = (h_1(x), ..., h_n(x))$ e $j^1\theta_i(0) = 0$, para todo $i = 1, ..., n$. Defina,
$A(x) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j)$. Como $h$ é um difemorfismo local de classe $\mathcal{C}^1$, $A$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots = f(x) = g(h(x)) = g_m(A(x)) + G(x)$$

onde $f_{m+1}(x) + \cdots = o(|x|^m)$ e $G(x) = o(|x|^m)$. Então, temos que $f_m(x) = g_m(A(x))$. Neste caso, dizemos que $f_m$ e $g_m$ são linearmentes equivalentes. □

**Proposição 3.2.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções polinômiais. Se $f$ e $g$ são bi-Lipschitz $\mathcal{R}$ equivalentes, então $X = f^{-1}(0)$ e $Y = g^{-1}(0)$ tem o mesmo tipo* *bi-Lipschitz.*

A recíproca da Proposição 3.2 é falsa.

**Examplo 3.3.** *Sejam* $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *dadas por* $f(x, y) = x^{4k} + y^{2p}, g(x, y) = x^{4k} + y^{4p}$ *onde* $k, p \in \mathbb{N}$ *e* $k > p$. *Por um lado, temos* $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. *Por outro lado,* $m(f) = 2p$ *e* $m(g) = 4p$. *Logo, pelo Teorema 3.1,* $f$ *e* $g$ *não podem ser bi-Lipschitz* $\mathcal{R}$*-equivalentes.*

## 3.2 $\mathcal{A}$ equivalência

**Definição 3.2.** *Dois germes de aplicações contínuas* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *são ditos* $\mathcal{C}^s$*-*$\mathcal{A}$*-equivalentes se existem difeomorfismos de classe* $\mathcal{C}^s$

$$h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \quad e \quad \varphi : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$$

*tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (\mathbb{R}^p, 0) \arrow[d, "\varphi"] \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "g"'] & (\mathbb{R}^p, 0)
\end{tikzcd}$$

*Se* $h$ *e* $\varphi$ *são germes de homeomorfismos bi-Lipschitz, respectivamente germes de homeomorfismos, então dizemos que* $f$ *e* $g$ *são bi-Lipschitz* $\mathcal{A}$*-equivalentes, respectivamente* $\mathcal{C}^0$*-*$\mathcal{A}$*-equivalentes.*

Seja $P^k(n, p)$ o conjunto das aplicações polinomiais $f = (f_1, ..., f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ onde o grau das funções polinomiais $f_1, ..., f_p$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. O conjunto quociente de $P^k(n, p)$ quocientado pela $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência será denotado por $P^k(n, p)/\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$. THOM (1962) mostra que $P^{12}(3, 3)/\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ é um conjunto infinito. FUKUDA (1976) prova que $P^k(n, 1)/\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ é um conjunto finito para quaisquer inteiros positivos $n, k$. Nakai prova os sequintes resultados.

**Teorema 3.2.** *(NAKAI (1984))* $P^k(n, p)/\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$*, é um conjunto infinito se* $n, p, k \geq 3$ *ou* $n \geq 3, p \geq 2, k \geq 4$.

**Examplo 3.4.** *(NAKAI (1984)) Caso* $(n, p, k) = (3, 2, 4)$. *Seja* $f_a : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *dado por*

$$f_a(x, y, z) = ((a_1x - y)(a_2x - y)(a_3x - y), (a_4x - y)(a_5x - y)(a_6x - y)z)$$

*onde* $a_1, ..., a_6$ *são números reias distintos e* $a$ *denota a* 6*-upla* $(a_1, ..., a_6)$. *Por simpliciade,* *suponha $a_1 < a_2 < ... < a_6$. Esta família admite infinitas classes com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência.*

**Examplo 3.5.** *(NAKAI (1984)) Caso $(n, p, k) = (3, 3, 3)$. Seja $f_b : (\mathbb{K}^3, 0) \to (\mathbb{K}^3, 0)$ dado por*

$$f_b(x, y, z) = (b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2, (b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2)z, (b_7x^2 + b_8xy + b_9y^2)z)$$

*onde $b_1, ..., b_9$ são números positivos tais que; $4b_1b_3 - {b_2}^2,\ 4b_4b_6 - {b_5}^2,\ 4b_7b_9 - {b_8}^2 \ > 0$ e $b$ denota a 9-upla $(b_1, ..., b_9)$. Esta família admite infinitas classes com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência.*

BENEDETTI and SHIOTA (1991) prova o mesmo resultado que FUKUDA (1976), só que para funções semialgébricas. Em 2010, S. Alvarez, L. Birbrair, J. C. F. Costa, A. Fernandes deram modelos simples para a classe de equivalência com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$-equivalência de funções semialgébricas.

**Proposição 3.3.** *A $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência.*

A recíproca da Proposição 3.3 é falsa.

**Examplo 3.6.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ germes de aplicações dadas por $f(x, y) = (x(x - y), -x^2 + xy + y), g(x, y) = (y^3, x(x - y^3))$. Então $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$-equivalentes. Com efeito, defina os homeomorfismos $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ como sendo $h(x, y) = (x, y^3), \varphi(x, y) = (x + y, x)$. Portanto,*

$$\begin{aligned}
\varphi \circ f \circ h(x, y) &= \varphi \circ f(x, y^3) \\
&= \varphi(x(x - y^3), -x^2 + xy^3 + y^3) \\
&= (x(x - y^3) - x^2 + xy^3 + y^3, x(x - y^3)) \\
&= (y^3, x(x - y^3)) \\
&= g(x, y)
\end{aligned}$$

*Entretanto, $f$ e $g$ não são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalentes. Suponha, por absurdo, que exista um germe de homemorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $f = g \circ h$. Portanto, $(f_1, f_2) = (g_1 \circ h, g_2 \circ h)$. Então, $f_1 = g_1 \circ h$. Absurdo! Pois, ${f_1}^{-1}(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$ tem 4 componentes conexas, enquanto ${g_1}^{-1}(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$ tem apenas 2 componentes conexas.*

# 4 $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ EQUIVALÊNCIA E BI-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ EQUIVALÊNCIA

## 4.1 $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência

A questão central na Teoria de Singularidade é a classificação local de aplicações por difeomorfismos. Contudo, é um problema bastante difícil, pois requer uma certa rigidez. Então é natural investigar a classificação de aplicações dadas por relações de equivalências que pedem aplicações mais fracas do que difemorfismos.

Neste capítulo, estudaremos a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência. Esta relação é uma versão topológica da clássica $\mathcal{K}$-equivalência introduzida por MATHER (1969). Note que tanto a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalência quanto a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência existem casos em que há infinitas classes de equivalências. Visto agora uma nova relação de equivalência, o que podemos dizer quanto a suas classes? Elas aparecem em uma quantidade infinita? Essa quantidade é enumerável? Ou será que ela se difere das relações de equivalência definidas no Capítulo 3 e aparecem em uma quantidade finita de classes?

**Definição 4.1.** *Dois germes de aplicações continuas $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes se existem dois germes de homeomorfismos*

$$H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \quad e \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

*tais que o diagrama seguinte comuta,*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_n, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle H}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow[(id_n, g)]{} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow[\pi_n]{} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

*onde $id_n$ é o germe da aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$ ; $\pi_n$ é a projeção usual em $\mathbb{R}^n$. Além disso, $H_1(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$.*

*Quando o germe de homeomorfismo $h = id_n$, dizemos que $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes.*

**Proposição 4.1.** *Dois germes de aplicação $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes, se e só se, existir um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f$ e $g \circ h$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes.*

BIRBRAIR, FERNANDES, and COSTA (2009), provam que o conjunto $P^k(n, 2)$ quocientado com $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência é um conjunto finito. Esse resultado mostra a finitude das classes da $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência para germes de aplicações do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^2$. Será que podemos obter o mesmo resultado de finitude, porém para germes de aplicações do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$? No final deste capítulo traremos uma resposta.

**Teorema 4.1.** *(BIRBRAIR, FERNANDES, and COSTA (2009)) Seja $P^k(n,2)$ o conjunto de todos os germes de aplicação polinômial $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, onde $f = (f_1, f_2)$ e os graus de $f_1$ e $f_2$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então, o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n,2)$, com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência é finito.*

**Lema 4.1.** *(NISHIMURA (1997)) Sejam $U$ uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$ e $f, g : U \to (\mathbb{R}^p, 0)$ duas aplicações contínuas. Suponha que exista uma familia de aplicações continuas $F_t : U \to \mathbb{R}^p \quad (t \in [0,1])$ que satisfaça as seguintes sentenças;*

*i)* $F_0 = f \quad e \quad F_1 = g$.

*ii)* $F_t^{-1}(0) = f^{-1}(0) \ \forall \ t \in [0,1]$.

*iii) Para todo* $t \in [0,1]$, *o vetor* $F_t(x)$ *não esta incluido no conjunto* $\{\alpha F_0(x) \mid \alpha \in \mathbb{R}_-\}$ *para qualquer* $x \in U \setminus f^{-1}(0)$, *onde* $\mathbb{R}_- = \{s \in \mathbb{R} \mid s < 0\}$.

*Então, dois germes $F_t$ e $F_{t'}$ na origem, são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes, para todo $t, t' \in [0,1]$. Em particular, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes.*

**Observação 4.1.** *O resultado apresentado por Nishimura no Lema 4.1 é ainda mais impactante, pois no decorre da demonstração observamos que $f$ e $g$ serão $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes.*

**Definição 4.2.** *Diremos que dois germes de aplicações contínuas $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são ditos $\mathcal{C}^s$-$\mathcal{V}$-equivalentes se existir um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^s$, $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$.*

*Se $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, respectivamente germe de homeomorfismo, então dizemos que $f$ e $g$ são bi-Lipschitz-$\mathcal{V}$ equivalentes, respectivamente $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalentes.*

**Examplo 4.1.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ funções polinomiais dadas por $f(x,y) = y(x - ay)(x - by), g(x,y) = y(x - cy)(x - dy)$, onde $a, b, c, d$ são constantes reais, dois a dois, distintos. Portanto, $f$ e $g$ são bi-Lipschitz-$\mathcal{V}$ equivalentes. De fato, defina um homeomorfismo bi-Lipschitz $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ como sendo $h(x,y) = (\frac{(ad-cb)}{(b-a)}y + x, \frac{(d-c)}{(b-a)}y)$. Então, $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$.*

**Proposição 4.2.** *A $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência.*

***Demonstração.*** Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ equivalentes. Então, existe um germe de homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f = g \circ h$. Defina a aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$, como sendo $H(x,y) = (h(x), y)$. Claramente, $H$ é um germe de homeomorfismo. Além disso,

*i)* $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$

*ii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$.

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. $\square$

A recíproca da Proposição 4.2 é falsa.

**Examplo 4.2.** *Sejam* $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *germes de aplicações polinomiais dadas por* $f(x, y) = (x(x-y), x(x-y)(y-2x))$ *e* $g(x, y) = (xy(x-y), x(x-y))$*. Mostraremos que* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalentes, porém não são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ *equivalentes. Com efeito, defina* $H : (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ *como sendo* $H(x, y, z, w) = (x, y, 2z + w, z)$*. Portanto,*

$$
\begin{aligned}
\text{i) } H(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) &= (x, y, 2f_1(x, y) + f_2(x, y), f_1(x, y)) \\
&= (x, y, 2x(x-y) + x(x-y)(y-2x), x(x-y)) \\
&= (x, y, xy(x-y), x(x-y)) \\
&= (x, y, g_1(x, y), g_2(x, y))
\end{aligned}
$$

$$\text{ii) } H(\mathbb{R}^2 \times \{0\}^2) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^2.$$

*Portanto,* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalentes. Suponha, por absurdo, que* $f$ *e* $g$ *sejam* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ *equivalentes. Então, existe um germe de homemorfismo* $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *tal que:*

$$f(x, y) = g \circ h(x, y) \;\Rightarrow\; f_1(x, y) = g_1 \circ h(x, y).$$

*Absurdo, pois* $f_1^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ *tem apenas 4 componentes conexas, enquanto* $g_1^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ *tem 6 componentes conexas.*

**Examplo 4.3.** *Seja* $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *um germe de função contínua, diferente da aplicação nula. Defina* $f(x) = \phi(x)^2$ *e* $g(x) = -\phi(x)^2$*. Claramente,* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalentes. Entretanto, não são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{R}$ *equivalentes. Do contrário, existiria um germe de homeomorfismo* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *tal que* $f = g \circ h$*. Isto implica que:* $\phi(x)^2 = -(\phi \circ h(x))^2$*. Absurdo! Pois, teríamos*

$$0 \leq \phi(x)^2 = -(\phi \circ h(x))^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; \phi \equiv 0.$$

**Proposição 4.3.** *A* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ *equivalência implica na* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalência.*

***Demonstração.*** Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações polinomiais $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalentes. Então existem dois germes de homeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ tais que $f = \varphi \circ g \circ h$. Defina a aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$, como sendo $H(x, y) = (h(x), \varphi^{-1}(y))$. Claramente, $H$ é um germe de homeomorfismo. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\text{i) } H(x, f(x)) &= (h(x), \varphi^{-1}(f(x)) \\
&= (h(x), \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ h(x)) \\
&= (h(x), g \circ h(x))
\end{aligned}
$$

$$\text{ii) } H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p.$$

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. $\square$

A recíproca da Proposição 4.3 é falsa. Isto é, a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência não implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência. Para qualquer $n \geq 7$, KING (1980) da exemplos de polinômios $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ com singularidade isolada que são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalentes, mas não são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalentes. Combinando com o resultado de NISHIMURA (1997) que mostra que a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalência de funções analíticas com singularidade isolada implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência, temos assim um contra exemplo. Entretanto, existem casos particulares em que vale a recíproca da Proposição 4.3.

**Teorema 4.2.** *( BIRBRAIR and NUÑO-BALLESTEROS (2012)) Seja $n = 2, 3$ e $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ duas funções polinomiais. Se $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes então serão $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalentes.*

**Proposição 4.4.** *A $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalência.*

A recíproca da Proposição 4.4 é falsa.

**Examplo 4.4.** *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função analítica, tal que $f$ assuma valores positivos e negativos, em qualquer vizinhança da origem. Defina $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ como sendo $g(x) = f(x)^2$. Então, $f$ e $g$ são topologicamente $\mathcal{V}$-equivalentes. Porém, não são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Suponha, por absurdo, que $f$ e $g$ sejam $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Então, existiriam dois germes de homeomorfismos*

$$H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \quad e \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

*tais que:*

*i)* $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$

*ii)* $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$

*iii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

*Defina* $V_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y > 0\}$ *e* $V_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

*Uma das seguintes opções abaixo acontece.*

*1)* $H(V_+) = V_+$ *e* $H(V_-) = V_-$ *ou*

*2)* $H(V_+) = V_-$ *e* $H(V_-) = V_+$.

*Do contrário, existiriam pontos $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde $a \in V_+$ e $b, c, d \in V_-$ com $H(a) = b$, $H(c) = d$. Considere o caminho $\lambda : [0, 1] \to V_-$ ligando os pontos $b$ e $d$. Assim, $H^{-1} \circ \lambda$ é um caminho em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ligando os pontos $a$ e $c$ que passa por $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Mas isto é um absurdo, pois $H(x, 0) = (h(x), 0)$. Agora, observe que;*

*Por um lado, temos $graf(g) \cap V_- = \emptyset$.*

*Por outro lado,* $graf(f) \cap V_+ \neq \emptyset$ *e* $graf(f) \cap V_- \neq \emptyset$.

*Pela definição da* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalência,* $H(graf(f)) = graf(g)$. *Portanto,* $H$ *estaria levando pontos de* $V_+$ *e* $V_-$ *em pontos de* $V_+$. *Absurdo!*

Daremos condições para que a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalência implique na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ $(n = 2, 3)$ funções analíticas reias com singularidade isolada. KING (1980) mostra que a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{A}$ equivalência. O caso $n = 2$ também segue pelo trabalho de **PRISHLYAK, Alexander O** (1999) e ALVAREZ, BIRBRAIR, COSTA, and FERNANDES (2010).

**Definição 4.3.** *Um germe de função analítica* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, *é dito finitamente* $r$*-*$\mathcal{C}^0$*-k-determinado se existir um número positivo* $r$ *tal que, para qualquer outro germe de função analítico* $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *com* $j^r f(0) = j^r g(0)$ *tem-se* $f$ $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente a* $g$.

*Se* $f$ *é* $r$*-*$\mathcal{C}^0$*-k-determinado para algum* $r$, *então* $f$ *é* $\mathcal{C}^0$*-k finitamente determinado ou* $\mathcal{C}^0$*-k finito e* $r$ *(o menor possível) é o grau de determinação de* $f$.

**Proposição 4.5.** *Seja* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ $(n \geq 2)$ *dois germes de funções finitamente* $\mathcal{C}^0$*-k-determinados. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

*1)* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente,*

*2)* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{V}$ *equivalentes.*

***Demonstração.*** NISHIMURA (1997).

**Teorema 4.3.** *(COSTA and NUÑO-BALLESTEROS (2013)) Sejam* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$ *germes de aplicações* $\mathcal{C}^0$*-k finitamentes determinados. Então* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$*-equivalentes se, e somente se, o conjunto dos zeros de* $f$ *e* $g$ *tem o mesmo número de semiramos (desde que esse número seja* $\neq 0$*).*

**Examplo 4.5.** *Sejam* $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *germes de aplicações polinomiais dadas por* $f(x, y) = x + y, g(x, y) = (x + y)^2$. *Essas aplicações tem o mesmo conjunto de zero, portanto, tem o mesmo número de semi-ramos. Entretanto, vimos no Exemplo 4.4 que* $f$ *e* $g$ *não são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$*-equivalentes. Esse exemplo não contrária o Teorema 4.3, pois* $g$ *não é* $\mathcal{C}^0$*-k finitamente determinado.*

Agora estamos diante de um dos resultados mais importantes desenvolvidos nesse trabalho. O Teorema 4.4 fornece condições para que germes de aplicações sejam $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Através dele, o problema de finitude do número de classes de equivalências de germes de aplicações polinomias, com o grau limitado, fornecidada pela relação $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência fica diretamente relacionado a um outro problema: A finitude do número de classes de equivalência de famílias de conjuntos algébricos, fornecida pela relação fortemente topológicos equivalentes.

**Teorema 4.4.** *Sejam* $f = (f_1, ..., f_p), g = (g_1, ..., g_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *germes de aplicações polinomiais. Considere os conjuntos algébricos* $X_i = {f_i}^{-1}(0)$, $Y_i = {g_i}^{-1}(0)$ *para todo* $i = 1, ..., p$. *Suponha que exista um germe de homeomorfismo* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

$$1)\ h(X_1) = Y_1, ...., h(X_p) = Y_p$$

$$\begin{array}{lll} 2)\ sinal(f_1(x)) = sinal(g_1 \circ h(x)) & \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus X_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\ \quad sinal(f_p(x)) = sinal(g_p \circ h(x)) & \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus X_p \end{array}$$

*Então,* $f$ *e* $g$ *são* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente. Além disso, qualquer combinação das funções coordenadas de* $f$ *será* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente aos seus respectivos correspondentes em* $g$. *Isto é,* $f_i$ *é* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente a* $g_i$, $(f_i\ , f_s)$ *é* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente a* $(g_i\ , g_s)$, $(f_i\ , f_s\ , ..., f_r)$ *é* $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ *equivalente a* $(g_i\ , g_s\ , ..., g_r)$ *para quaisquer* $1 \leq i, s, ..., r \leq p$.

***Demonstração.*** Defina uma homotopia $F_t : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $t \in [0, 1]$, como sendo,

$$F_t(x) = (1 - t)(f_i(x)) + t(g_i \circ h(x))$$

Note que:

*i)* $F_0 = f_i$ e $F_1 = g_i \circ h$

Segue pela própria construção.

*ii)* ${F_t}^{-1}(0) = {f_i}^{-1}(0)$ para todo $t \in [0, 1]$

Mostraremos que ${F_t}^{-1}(0) \subseteq f_i^{-1}(0)$. De fato, tome $x_0 \in {F_t}^{-1}(0)$. Portanto,

$$(1 - t)(f_i(x_0)) + t(g_i \circ h(x_0)) = 0.$$

Por outro lado,

$$sinal(f_i(x)) = sinal(g_i \circ h(x)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus {f_i}^{-1}(0)$$

Logo $f_i(x_0) = g_i \circ h(x_0) = 0$ e consequentemente, $x_0 \in {f_i}^{-1}(0)$. A outra inclusão segue de modo trivial. Portanto, ${F_t}^{-1}(0) = {f_i}^{-1}(0)$, para todo $t \in [0, 1]$

*iii)* Para todo $t \in [0, 1]$, o vetor $F_t(x)$ não esta incluido no conjunto $\{\alpha F_0(x) \mid \alpha \in \mathbb{R}_-\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus {f_i}^{-1}(0)$

Suponha, por absurdo, que o vetor $F_{t_0}(x_0) \in \{\alpha F_0(x) \mid \alpha \in \mathbb{R}_-\}$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f_i^{-1}(0)$ e para algum $t_0 \in [0, 1]$. Logo, existe um $\alpha \in \mathbb{R}_-$ tal que;

$$(1 - t_0)(f_i(x_0)) + t_0(g_i \circ h(x_0)) = \alpha f_i(x_0).$$

Assim, $(1 - t_0 - \alpha)(f_i(x_0)) + t_0(g_i \circ h(x_0)) = 0$. Como $(1 - t_0 - \alpha), t_0$ são maiores ou iguais a $0$ e $sinal(f_i(x)) = sinal(g_i \circ h(x))$, temos $x_0 \in {f_i}^{-1}(0)$. O que não é possível, por hipótese. Portanto, pelo Lema 4.1 , $f_i$ e $g_i \circ h$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes, para todo $i = 1, ..., p$.

Isto é, existem germes de homeomorfismos,

$$T_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \quad \text{e} \quad t_i : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0),$$

tais que o diagrama seguinte comuta,

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_n, f_i)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\
{\scriptstyle t_i}\downarrow & & {\scriptstyle T_i}\downarrow & & {\scriptstyle t_i}\downarrow \\
(\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow[(id_n, g_i \circ h)]{} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow[\pi_n]{} & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{array}$$

além disso, $H_i(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ onde $T_i(x, y) = (t_i(x), H_i(x, y))$.

Note que, o germe de homeomorfismo $t_i = id_n$, como já havia sido comentado na Observação 4.1. Isto é, $f_i$ e $g_i \circ h$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes, para todo $i = 1, ..., p$. Defina uma aplicação $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ como sendo:

$$H(x, y_1, ..., y_p) = (h(x), H_1(x, y_1), ..., H_p(x, y_p))$$

Pela Proposição 2.3, a aplicação $H(x, y_1, ..., y_p) = (h(x), H_1(x, y_1), ..., H_p(x, y_p))$ é um germe de homeomorfismo. Além disso, satisfaz as seguintes propriedades:

*i)* $H(x, f_1(x), ..., f_p(x)) = (h(x), g_1 \circ h(x), ..., g_p \circ h(x))$

*ii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes.

A Segunda parte deste Teorema segue de forma imediata. De fato, tome uma combinação qualquer das funções coordenadas de $f$. A saber $(f_s, f_t, ..., f_r)$. Defina uma aplicação $H(x, y_s, y_t, ..., y_r) = (h(x), H_s(x, y_s), H_t(x, y_t), ..., H_r(x, y_r))$. De um modo análogo ao anterior, mostramos que $H$ é um germe de homeomorfismo e além disso,

*i)* $H(x, f_s(x), f_t(x), ..., f_r(x)) = (h(x), g_s \circ h(x), g_t \circ h(x)..., g_r \circ h(x))$

*ii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\} \times ... \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times ... \times \{0\}$

Portanto, $(f_s, f_t, ..., f_r)$ e $(g_s, g_t, ..., g_r)$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. □

### 4.2 Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência

Em 1977, J. P. Durfour introduz a noção da bi-estabilidade para pares de germes $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ e estuda o problema de classificação dos pares de germes para alguns casos particulares. Note que, para pares de germes de aplicações $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ temos um diagrama divergente

$$(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{g} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0).$$

Alguns resultados de classificção, envolvendo diagrama divergentes podem ser encontrados em DUFOUR (1977), MANCINI, RUAS, and TEIXEIRA (2002), TEXEIRA (1982), entre outros. Recentemente, COSTA, PEDROSO, and SAIA (2016) introduziram a noção da Bi-$\mathcal{K}$ equivalência topológica (ou a Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência) e apresentam alguns problemas em aberto sobre esta relação de equivalência. No final desta seção, daremos uma resposta para um desses problemas lançados. A saber: O problema de finitude.

**Definição 4.4.** *Dois pares de germes de aplicações continuas $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ são ditos Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes se existirem dois germes de homeomorfismos*

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \quad e \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

*tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_n,(f_1,f_2))} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\
{\scriptstyle h}\big\downarrow & & {\scriptstyle H}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow \\
(\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow[(id_n,(g_1,g_2))]{} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow[\pi_n]{} & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{array}$$

*onde $id_n$ é o germe da aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$ ; $\pi_n$ é a projeção usual em $\mathbb{R}^n$. Além disso, $H(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, z))$, onde $H_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0), H_2 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ e $H_1(x, 0) = H_2(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Quando o germe de homeomorfismo $h = id_n$, dizemos que os pares $(f_1, f_2)$ e $(g_1, g_2)$ são Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes.*

**Proposição 4.6.** *Sejam $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ dois pares de germes de aplicações contínuas. Então,*

*1) Se $(f_1, f_2)$ e $(g_1, g_2)$ são Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes, então os germes de aplicações $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes.*

*2) Se $(f_1, f_2)$ e $(g_1, g_2)$ são Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes, então os germes de aplicações $f_1$ e $g_1$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes e também os germes de aplicações $f_2$ e $g_2$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes.*

***Demonstração.*** Considere $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ dois pares de germes de aplicações contínuas.

*1)* Segue da própria definição da Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência.

*2)* Suponha que os pares de germes de aplicações $(f_1, f_2)$ e $(g_1, g_2)$ sejam Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Portanto, existem dois germes de homeomorfismos,

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \text{ e } h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

tais que:

*i)* $H(x,y,z) = (h(x), H_1(x,y), H_2(x,z))$

*ii)* $H(x, f_1(x), f_2(x)) = (h(x), g_1 \circ h(x), g_2 \circ h(x))$

*iii)* $H_1(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ e $H_2(\mathbb{R}^n \times \{0\}^q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^q$

Defina duas aplicações $S : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, $T : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$, como sendo: $S(x,y) = (h(x), H_1(x,y))$ e $T(x,z) = (h(x), H_2(x,z))$. Logo, $S$ e $T$ são germes de homeomorfismos. Além disso, os pares de germes de homeomorfismo $(h,S)$ e $(h,T)$ satisfazem as condições da Definição 4.1. □

**Proposição 4.7.** *A Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência.*

A recíproca da Proposição 4.7 é falsa.

**Examplo 4.6.** *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função analítica, tal que $f$ assuma valores positivos e negativos em qualquer vizinhança da origem. Defina um par de germes de funções $F, G : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ como sendo $F(x) = (f(x), f(x) + f(x)^2)$ e $G(x) = (f(x)^2, f(x) + f(x)^2)$. Mostraremos que $F$ e $G$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes.*

*Primeiramente, defina $H : (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ como sendo $H(x,y,z,w) = (x, y, w - z, w)$. Então,*

*i)* $$\begin{aligned} H(x,y,F_1(x,y),F_2(x,y)) &= (x,y,f_2(x,y) - f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ &= (x,y,f(x) + f(x)^2 - f(x), f(x) + f(x)^2) \\ &= (x,y,f(x)^2, f(x) + f(x)^2) \\ &= (x,y,G_1(x,y),G_2(x,y)) \end{aligned}$$

*ii)* $H(\mathbb{R}^2 \times \{0\}^2) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^2$.

*Portanto, $F$ e $G$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Entretanto, $F$ e $G$ não são Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Do contrário, pelo item 2), da Proposição 4.6, $F_1$ seria $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalente a $G_1$. Isto é, o germe da função $f$ seria $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalente a $f^2$. Absurdo! Pois no exemplo 4.4 mostramos que isso não ocorre.*

### 4.2.1 Finitude da Equivalência Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$

**Teorema 4.5.** *(Teorema de Finitude) Seja $P^k(n, p \times q)$ o conjunto de todos os pares de germes de aplicações polinomiais $(f,g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0), f = (f_1, ..., f_p)$ e $g = (g_1, ..., g_q)$, onde o grau de $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n, p \times q)$, com respeito a Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência é finito.*

**Lema 4.2.** *Sejam $f_i, g_i : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções polinomiais onde o grau de*

*$f_i, g_i$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Considere $X_i, Y_i$ subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$, tais que $X_i = f_i^{-1}(0)$, $Y_i = g_i^{-1}(0)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Suponha que para todo $i, j \in \mathbb{N}$, $(X_i, Y_i)$ e $(X_j, Y_j)$ são fortemente topológicos equivalentes, via um germe de homeomorfismo $h_{ij} : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Então, existe $s \neq t$ em $\mathbb{N}$ tal que:*

$$\begin{cases} sinal(f_s(x)) = sinal(f_t \circ h_{st}(x)) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus f_s^{-1}(0) \\ sinal(g_s(x)) = sinal(g_t \circ h_{st}(x)) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus g_s^{-1}(0) \end{cases}$$

***Demonstração.*** Primeiramente observe que cada $X_i$ tem o mesmo tipo topológico de $X_j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{R}^n \setminus X_i$ tem a mesma quantidade de componente conexas de $\mathbb{R}^n \setminus X_j$. Isto é, $\mathbb{R}^n \setminus X_k = \bigcup_{j}^{n} C_{jk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, podemos associar cada componente conexa $C_{jk}$ a um sinal. A saber, se $f_k > 0$ em $C_{jk}$, associamos ao sinal $+$. Se $f_k < 0$ em $C_{jk}$, associamos ao sinal $-$, onde $f_k^{-1}(0) = X_k$. Portanto, podemos construir uma tabela que discrimina o sinal em cada componente conexa. Por exemplo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_{11} \to +$ | $C_{12} \to +$ | $C_{13} \to -$ | $\cdots$ | $C_{1k} \to -$ | $\cdots$ |
| $C_{21} \to +$ | $C_{22} \to +$ | $C_{23} \to -$ | $\cdots$ | $C_{2k} \to +$ | $\cdots$ |
| $C_{31} \to +$ | $C_{32} \to -$ | $C_{33} \to +$ | $\cdots$ | $C_{3k} \to -$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $C_{n1} \to +$ | $C_{n2} \to -$ | $C_{n3} \to -$ | $\cdots$ | $C_{nk} \to +$ | $\cdots$ |

Temos $n$ componentes conexas, logo existem apenas $2^n$ possibilidades distintas quanto aos possíveis sinais. Como temos uma quantidade infinita de conjuntos algébricos e temos uma quantidade finita de combinações dos sinais, temos que, pelo menos uma codificação dos sinais se repete infinita vezes. Tome essa combinação. Portanto, a menos de uma subsequência, podemos supor que o sinal é preservado em cada componente conexa.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_{11} \to +$ | $C_{12} \to +$ | $C_{13} \to +$ | $\cdots$ | $C_{1k} \to +$ | $\cdots$ |
| $C_{21} \to -$ | $C_{22} \to -$ | $C_{23} \to -$ | $\cdots$ | $C_{2k} \to -$ | $\cdots$ |
| $C_{31} \to +$ | $C_{32} \to +$ | $C_{33} \to +$ | $\cdots$ | $C_{3k} \to +$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $C_{n1} \to -$ | $C_{n2} \to -$ | $C_{n3} \to -$ | $\cdots$ | $C_{nk} \to -$ | $\cdots$ |

Portanto, $sinal(f_l(x)) = sinal(f_r \circ h_{lr}(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus f_l^{-1}(0)$ e $l, r \in \mathbb{N}$.

Em cima dessa minha nova sequência, faça esse mesmo processo para os subconuntos algébricos $Y_1, Y_2, ..., Y_k, ...$ . Assim, concluímos que existirá um $s \neq t$, tal que:

$$\begin{cases} sinal(f_s(x)) &= sinal(f_t \circ h_{st}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus f_s^{-1}(0) \\ sinal(g_s(x)) &= sinal(g_t \circ h_{st}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus g_s^{-1}(0) \end{cases}$$

$\square$

***Demonstração do Teorema 4.5.*** Suponha, por absurdo, que existam infinita classes de equivalência. Logo podemos tomar uma infinidade de representantes de pares de germes de aplicações

$$(f_1, g_1)\,,\, (f_2, g_2)\,,\, \ldots\,,\, (f_n, g_n)\,,\, \ldots$$

os quais não são, dois a dois, Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Observe que estamos trabalhando com aplicações,

$$f_i = (f_{i1}, \ldots, f_{ip}) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \;\text{ e }\; g_i = (g_{i1}, \ldots, g_{iq}) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0).$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere os subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^n$ :

$$X_{is} = {f_{is}}^{-1}(0), \quad Y_{lk} = {f_{lk}}^{-1}(0) \quad \text{onde} \quad 1 \leq s \leq p \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq q.$$

Assim, obtemos uma sequência infinita de conjuntos algébricos

$$(X_{11}, \ldots, X_{1p}, Y_{11}, \ldots, Y_{1q}), \ldots, (X_{n1}, \ldots, X_{np}, Y_{n1}, \ldots, Y_{nq}), \ldots$$

Pelo Teorema 2.4, sabemos que o conjunto das classes de equivalência, com respeito a relação fortemente topológica é finito. Portanto, a menos de uma subseqência, podemos supor que

$$(X_{11}, \ldots, X_{1p}, Y_{11}, \ldots, Y_{1q}), \ldots, (X_{n1}, \ldots, X_{np}, Y_{n1}, \ldots, Y_{nq}), \ldots$$

são, dois a dois, fortemente topológicos equivalentes. Ou seja, para cada par de sequência $(X_{i1}, \ldots, X_{ip}, Y_{i1}, \ldots, Y_{iq}), (X_{j1}, \ldots, X_{jp}, Y_{j1}, \ldots, Y_{jq})$ existe um germe de homeomorfismo $h_{ij} : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $h_{ij}(X_{i1}) = X_{j1}, \ldots, h_{ij}(X_{ip}) = X_{jp}, h_{ij}(Y_{i1}) = Y_{j1}, \ldots,\; h_{ij}(Y_{iq}) = Y_{jq}$. Pelo Lema 4.2, existe $i \neq j$ em $\mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{cases} sinal(f_{i1}(x)) &= sinal(f_{j1} \circ h_{ij}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus f_{i1}^{-1}(0) \\ \quad\vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ sinal(f_{ip}(x)) &= sinal(f_{jp} \circ h_{ij}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus f_{ip}^{-1}(0) \\ sinal(g_{i1}(x)) &= sinal(g_{j1} \circ h_{ij}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus g_{i1}^{-1}(0) \\ \quad\vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ sinal(g_{iq}(x)) &= sinal(g_{jq} \circ h_{ij}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus g_{iq}^{-1}(0) \end{cases}$$

Por simplicidade, iremos considerar $h_{ij} = h$. Note que:

$i)$ $h(X_{i1}) = X_{j1}, \ldots,\; h(X_{ip}) = X_{jp}$

$ii)$ $sinal(f_{i1}(x)) = sinal(f_{j1} \circ h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus f_{i1}^{-1}(0)$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$sinal(f_{ip}(x)) = sinal(f_{jp} \circ h(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus f_{ip}^{-1}(0)$$

Pelo Teorema 4.4, os germes de aplicações $f_i$ e $f_j \circ h$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes. Ou seja, existe um germe de homeomorfismo

$$T : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \text{ onde } T(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$$

e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "(id_n, f_i)"] \arrow[d, "id_n"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "T"'] & (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[d, "id_n"'] \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "(id_n, f_j \circ h)"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \arrow[r, "\pi_n"'] & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{tikzcd}$$

Além disso, $H_1(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ onde $T(x, y) = (x, H_1(x, y))$. De um modo análogo, temos que:

$i)$ $h(Y_{i1}) = Y_{j1}, ..., \; h(Y_{iq}) = Y_{jq}$

$ii)$ $sinal(g_{i1}(x)) = sinal(g_{j1} \circ h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus g_{i1}^{-1}(0)$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$sinal(g_{iq}(x)) = sinal(g_{jq} \circ h(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus g_{iq}^{-1}(0)$$

Portanto, os germes de aplicações $g_i$ e $g_j$ são $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{C}$ equivalentes. Logo existe um germe de homeomorfismo

$$S : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \text{ onde } S(\mathbb{R}^n \times \{0\}^q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^q$$

e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "(id_n, g_i)"] \arrow[d, "id_n"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "S"'] & (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[d, "id_n"'] \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "(id_n, g_j \circ h)"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"'] & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{tikzcd}$$

Além disso, $H_2(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $S(x, z) = (h(x), H_2(x, z))$. Defina a aplicação $M : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$, como sendo

$$M(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, z)).$$

De forma análoga a Proposição 2.3, temos que $M$ é um germe de homeomorfismo. Além disso, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "{(id_n,(f_i,g_i))}"] \arrow[d, "h"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "M"'] & (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[d, "h"'] \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "{(id_n,(f_j,g_j))}"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"'] & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{tikzcd}$$

onde $f_i = (f_{i1}, ..., f_{ip})$, $f_j = (f_{j1}, ..., f_{jp})$, $g_i = (g_{i1}, ..., g_{iq})$, $g_j = (g_{j1}, ..., g_{jq})$.
Portanto, $(f_i, g_i)$ e $(f_j, g_j)$ são bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalente. Absurdo! □

**Finitude da Equivalência $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$**

**Corolário 4.1.** *Seja $P^k(n, p)$ o conjunto de todos os germes de aplicações polinomiais $f = (f_1, ..., f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, onde o grau de $f_1, ..., f_p$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n, p)$, com respeito a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência é finito.*

***Demonstração.*** Suponha, por absurdo, que existam infinita classes de equivalência. Logo podemos tomar uma infinidade de representantes de germes de aplicações

$$f_1\ ,\ f_2\ , ...,\ f_n\ , ...$$

os quais não são, dois a dois, $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Assim, obtemos uma nova sequência, de infinitos pares de germes de aplicações

$$(f_1, f_1)\ ,\ (f_2, f_2)\ , ...,\ (f_n, f_n)\ , ...$$

Pelo Teorema 4.5, podemos supor, sem perda de generalidade, que $(f_i, f_i)$ é Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalente a $(f_j, f_j)$, para algum $i \neq j$. Porém, pelo item *2)*, da Proposição 4.6, teríamos que $f_i$ e $f_j$ seriam $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalentes. Absurdo! □

# 5 $\mathcal{K}$-BI-LIPSCHITZ EQUIVALÊNCIA E BI-$\mathcal{K}$-BI-LIPSCHITZ EQUIVALÊNCIA.

## 5.1 $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência

Iremos definir uma relação que exige praticamente as mesmas propriedades que a $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência. A diferença é que agora iremos trabalhar com germes de homeomorfismos bi-lipschitz ao invés de germe de homeomorfismos. Claramente, a $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência implica na $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$ equivalência.

Teoremas de finitude de diferentes tipos aparecem no desenvolvimento da Teoria da Singularidade moderna. Quando se considera um problema de classificação, é natural analisar o comportamento das suas classes de equivalências. Como por exemplo, analisar se essas classes aparecem em uma quantidade finita ou não.

**Definição 5.1.** *Dois germes de aplicações continuas $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes se existem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz*

$$H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \quad e \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

*tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_n, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow[(id_n, g)]{} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

*e além disso, $H_1(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$.*

*Quando $h = id_n$ dizemos que $f$ e $g$ são $C$-bi-Lipschitz equivalentes.*

**Examplo 5.1.** *Ao contrário do que acontece no Exemplo 3.2, existem infinidades valores do parâmetro $t$ para os quais $F_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^4 + y^6$ estão em uma mesma classe de eqivalência da relação $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. (Isto é consequência direta do Teorema 5.1, que provaremos mais na frente.)*

**Proposição 5.1.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções contínuas e considere os conjuntos $X = f^{-1}(0)$ e $Y = g^{-1}(0)$. Se $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes, então $X$ e $Y$ tem o mesmo tipo bi-Lipschitz.*

***Demonstração.*** Pela definição da equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz, existem germes de homeomorfismos bi-Lipschitz

$$H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \quad \text{e} \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

tais que:

$i)$ $H(x,y) = (h(x), H_1(x,y))$

$ii)$ $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$

$iii)$ $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Como $H$ é bi-Lipschitz, existem constantes reais positivas $a, b$ tais que:

$$a|f(x)| \leq |g \circ h(x)| \leq b|f(x)|$$

Donde tiramos que $X$ e $Y$ tem o mesmo tipo bi-Lipschitz. □

A recíproca da Proposição 5.1 é falsa.

**Examplo 5.2.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções polinomiais dadas por $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = x^{2p} + y^{2q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ e $p, q$ são maiores ou iguais a 2. Portanto, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{(0,0)\}$, logo possuem o mesmo tipo bi-Lipschitz. Porém, $f$ e $g$ não são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Suponha, por absurdo, que sejam $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então, existem germes de homeomorfismos bi-Lipschitz*

$$H : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0) \quad e \quad h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0) \quad tais\ que:$$

$i)$ $H(x,y,z) = (h(x,y), H_1(x,y,z))$

$ii)$ $H(x,y,g(x,y)) = (h(x,y), f \circ h(x,y))$

$iii)$ $H(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

*Portanto, existem constantes reais positivas $a, b$ tais que:*

$$a \parallel (x,y,z) - (u,v,w) \parallel \leq \parallel H(x,y,z) - H(u,v,w) \parallel \leq b \parallel (x,y,z) - (u,v,w) \parallel$$

*para todo $(x,y,z), (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$*

$$a \parallel (x,y) - (u,v) \parallel \leq \parallel h(x,y) - h(u,v) \parallel \leq b \parallel (x,y) - (u,v) \parallel$$

*para todo $(x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Por um lado, teríamos:*

$$a|g(x,y)| \leq |f \circ h(x,y)| \leq b|g(x,y)|$$

$$\Rightarrow \quad a(x^{2p} + y^{2q}) \leq h_1(x,y)^2 + h_2(x,y)^2 \leq b(x^{2p} + y^{2q})$$

*Por outro lado,*

$$a \parallel (x,y) \parallel \leq \parallel h(x,y) \parallel \leq b \parallel (x,y) \parallel$$

$$\Rightarrow \quad a^2(x^2 + y^2) \leq h_1(x,y)^2 + h_2(x,y)^2 \leq b^2(x^2 + y^2)$$

*Ou seja, $a^2(x^2 + y^2) \leq b(x^{2p} + y^{2q})$. Absurdo, visto que estamos em uma vizinhança suficientemente próxima da origem e $p, q$ são maiores ou iguais a 2.* □

Em 2007 Birbrair, Costa, Fernandes, and Ruas mostram que o número das classes de $P^k(n,1)$ quocientado com $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência é um conjunto finito.

**Teorema 5.1.** *(BIRBRAIR, COSTA, FERNANDES, and RUAS (2007)) Seja $P^k(n,1)$ o conjunto de todos os germes de funções polinomiais $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, onde o grau de $f$ é menor ou igual a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n,1)$, com respeito a $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência é finito.*

**Definição 5.2.** *Duas funções $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ tem o mesmo contato no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se existir uma vizinhança $U_{x_0}$ de $x_0$ em $\mathbb{R}^n$ e duas constantes reais positivas $a, b$ tais que, para todo $x \in U_{x_0}$ temos:*

$$a\ f(x) \leq g(x) \leq b\ f(x)$$

*Usaremos a notação: $f \approx g$.*

Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ duas funções. Se $f$ e $g$ tem o mesmo contato na origem, então $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$. Isto é, ter o mesmo contato na origem, implica que o conjunto dos zeros de cada função coincidem. A recíproca não é verdadeira.

**Examplo 5.3.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ duas funções polinomiais, onde $f(x,y) = x - y, g(x,y) = (x-y)^2$. Observe que $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = g^{-1}(0)$. Entretanto, suponha que $f$ e $g$ tenham o mesmo contato. Então existem constantes reais positivas $a, b$, tal que, em uma vizinhança suficientemente pequena $af(x) \leq g(x) \leq bf(x)$. Faça $x = 2y$, então temos que $ay \leq y^2 \leq by$. Absurdo!*

**Teorema 5.2.** *Seja $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ dois germes de funções Lipschitz. Então, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalente se, e somente se, umas das seguintes condições acontece:*

*i)* $f \approx g$

*ii)* $f \approx -g$

***Demonstração.*** Suponha que os germes de funções Lipschitz $f$ e $g$ sejam $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então, existe um germe de homeomorfismo bi-lipschitz $H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$, tal que:

*i)* $H(x,y) = (x, H_1(x,y))$

*ii)* $H(x, f(x)) = (x, g(x))$

*iii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Defina $V_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y > 0$ e $V_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

**Afirmação 5.2.1.** *Uma das seguintes opções abaixo acontece.*

*1)* $H(V_+) = V_+$ *e* $H(V_-) = V_-$ *ou*

*2)* $H(V_+) = V_-$ *e* $H(V_-) = V_+$.

***Prova***. Do contrário, existiriam pontos $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde $a \in V_+$ e $b, c, d \in V_-$ com $H(a) = b,\ H(c) = d$. Considere o caminho $\lambda : [0,1] \to V_-$ ligando os pontos $b$ e $d$. Assim, $H^{-1} \circ \lambda$ é um caminho em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ligando os pontos $a$ e $c$ que passa por $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Mas isto é um absurdo, pois $H(x, 0) = (x, 0)$. Iremos analisar os dois casos. □

Caso 1) $H(V_+) = V_+$ e $H(V_-) = V_-$

Neste caso, $f$ e $g$ tem os mesmo sinais em cada componente conexa do conjunto $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$. Como o germe de homeomorfismo $H$ é bi-lipschitz, existem constantes reais positivas $a, b, c, d$, tais que:

$$a|f(x)| \ \leq \| \ H(x, f(x)) - H(x, 0) \ \| \leq b|f(x)|$$

Note que:

$$\| \ H(x, f(x)) - H(x, 0) \ \| = \| \ (x, g(x) \ ) - (x, 0) \ \| \geq \ |g(x)|$$

Logo,

$$b|f(x)| \ \geq \ |g(x)|.$$

Por outro lado,

$$c|g(y)| \ \leq \| \ H^{-1}(y, g(y)) - H^{-1}(y, 0) \ \| \leq d|g(y)|$$

Note também que:

$$\| \ H^{-1}(y, g(y)) - H^{-1}(y, 0) \ \| = \| \ (y, f(y) \ ) - (y, 0) \ \| \geq \ |f(y)|$$

Logo,

$$d|g(y)| \ \geq \ |f(y)|.$$

Como $sinal(f(x)) = sinal(g(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$, concluímos que: $f \approx g$.

Caso 2) $H(V_+) = V_-$ e $H(V_-) = V_+$.

Neste caso, $f$ e $g$ tem os sinais contrários, em cada componente conexa do conjunto $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$. Defina a função $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ como sendo $\phi(x) = -g(x)$. Portanto, $f$ e $\phi$ tem os mesmo sinal em cada componente conexa do conjunto $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$. Além disso, existem constantes positivas $a, b$ tais que $a|f(x)| \leq |\phi(x)| \leq b|f(x)|$. Portanto, temos $f \approx \phi$. Ou seja, $f \approx -g$.

Reciprocamente, suponha que $f \approx g$ (caso $f \approx -g$ segue de modo análogo). Defina a aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ como sendo

$$H(x,y)=\begin{cases}(x,0), & se \;\; y=0\\ (x,\frac{g(x)y}{f(x)}), & se \;\; 0<|y|\leq|f(x)|\\ (x,y-f(x)+g(x)), & \\ \qquad se \;\; 0<|f(x)|\leq|y| \quad \text{e} \quad sinal(y)=sinal(f(x)) & \\ (x,y+f(x)-g(x)), & \\ \qquad se \;\; 0<|f(x)|\leq|y| \quad \text{e} \quad sinal(y)=-sinal(f(x)) & \\ (x,y), & se \;\; f(x)=0.\end{cases}$$

A aplicação $H(x,y)=(x,T(x,y))$ definida acima é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. De fato, $H$ é injetiva, pois para qualquer $x^*$ fixado, temos que $T(x^*,y)$ é uma função contínua e monótona. Claramente $H$ é Lipschitz se $0\leq|f(x)|\leq|y|$. Mostraremos que $H$ é Lipschitz se $0\leq|y|\leq|f(x)|$. Para isto, é suficiente mostrar que todas as derivadas parciais $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ são limitadas neste domínio, para todo $i=1,...,n$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x_i} &= (\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)f(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)).\frac{y}{(f(x))^2}\\ &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)f(x)\frac{y}{(f(x))^2}-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)\frac{y}{(f(x))^2}\\ &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\frac{y}{f(x)}-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{g(x)}{f(x)}\frac{y}{f(x)}\end{aligned}$$

Como $0\leq|y|\leq|f(x)|$, temos que $\frac{y}{f(x)}$ é limitado. A expressão $\frac{g(x)}{f(x)}$ é limitado. Além disso, $\frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ são limitadas para todo $i=1,...,n$, pois $f$ e $g$ são funções Lipschitz. Agora defina a aplicação $\widetilde{H}:(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^{n+1},0)$ como sendo

$$\widetilde{H}(u,v)=\begin{cases}(u,0), & se \;\; v=0\\ (u,\frac{f(u)v}{g(u)}), & se \;\; 0<|v|\leq|g(u)|\\ (u,v-g(u)+f(u)), & \\ \qquad se \;\; 0<|g(u)|\leq|v| \quad \text{e} \quad sinal(v)=sinal(g(u)) & \\ (u,v+g(u)-f(u)), & \\ \qquad se \;\; 0<|g(u)|\leq|v| \quad \text{e} \quad sinal(v)=-sinal(g(u)) & \\ (u,v), & se \;\; g(u)=0.\end{cases}$$

Seguindo os mesmos passos usados em anteriormente, mostramos que $\widetilde{H}$ é uma germe de homeomorfismo Lipschitz. Resta verificar que $\widetilde{H}$ é a inversa de $H$. Isto é, $H\circ\widetilde{H}(u,v)=(u,v)$ e $\widetilde{H}\circ H(x,y)=(x,y)$ para todo $(u,v),(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Dividiremos a prova em casos.

1) Caso em que: $v = 0$.

Temos $H \circ \widetilde{H}(u,0) = H(u,0) = (u,0)$.

2) Caso em que: $0 < |v| \leq |g(u)|$.

Como $0 < |v| \leq |g(u)|$, temos: $0 < \frac{|v|}{g(u)}| \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{|v|}{g(u)}|f(u)| \leq |f(u)|$.

Portanto, $H \circ \widetilde{H}(u,v) = H(u, \frac{f(u)v}{g(u)}) = (u, \frac{g(u)}{f(u)}\frac{f(u)v}{g(u)}) = (u,v)$.

3) Caso em que: $0 < |g(u)| \leq |v|$ e $sinal(v) = sinal(g(u))$.

Por hipótese, $f \approx g$. Logo $sinal(f(u)) = sinal(g(u))$. Consequentemente, $sinal(f(u)) = sinal(v)$.

Como $|g(u)| \leq |v|$, temos $0 < |f(u)| \leq |f(u) + (v - g(u))|$. Além disso, $sinal(f(u) + v - g(u)) = sinal(f(u))$. Portanto,

$H \circ \widetilde{H}(u,v) = H(u, v - g(u) + f(u)) = (u, (v - g(u) + f(u)) - f(u) + g(u)) = (u,v)$.

4) Caso em que: $0 < |g(u)| \leq |v|$ e $sinal(v) = -sinal(g(u))$.

Por hipótese, $f \approx g$. Logo $sinal(f(u)) = sinal(g(u))$. Consequentemente, $sinal(v) = -sinal(f(x))$.

Como $|g(u)| \leq |v|$, temos $0 < |f(u)| \leq |-f(u) + (v + g(u))|$. Além disso, $sinal(-f(u) + v + g(u)) = -sinal(f(u))$. Portanto,

$H \circ \widetilde{H}(u,v) = H(u, v + g(u) - f(u)) = (u, (v + g(u) - f(u)) + f(u) - g(u)) = (u,v)$.

5) Caso $g(u) = 0$. Por hipótese, $f \approx g$, portanto $f(u) = 0$.

Então, $H \circ \widetilde{H}(u,v) = (u,v)$.

A prova que $\widetilde{H} \circ H(x,y) = (x,y)$, segue de forma análogo. Portanto, o germe de homeomorfismo lipschitz $\widetilde{H}$ é a aplicação inversa de $H$. Por isso, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso, ele satisfaz as sequintes propriedades:

*i)* $H(x, f(x)) = (x, g(x))$

*ii)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalentes. □

**Teorema 5.3.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções Lipschitz. Então, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente se, e somente se, existir um germe de homeomorfismo bi-lipschitz $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que uma das seguintes condições abaixo acontece:*

*i)* $f \approx g \circ h$

*ii)* $f \approx -g \circ h$

***Demonstração.*** Suponha que $f$ e $g$ sejam $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então, existem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz

$$H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \quad \text{e} \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

tais que :

$i)$ $H(x, y) = (h(x), T(x, y))$

$ii)$ $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$

$iii)$ $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

De modo análogo a Afirmação 5.2.1, temos apenas duas possibilidades:

1) $H(V_+) = V_+$ e $H(V_-) = V_-$ ou 2) $H(V_+) = V_-$ e $H(V_-) = V_+$.

Caso 1) $H(V_+) = V_+$ e $H(V_-) = V_-$.

Então, $f$ e $g \circ h$ tem os mesmo sinais em cada componente conexa do conjunto $\mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(0)$. Como $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, existem duas constantes reais positivas $a, b$ tais que:

$$a|f(x)| \leq \| H(x, f(x)) - H(x, 0) \| \leq b|f(x)|$$

Note que:

$$\| H(x, f(x)) - H(x, 0) \| = \| (h(x), g \circ h(x)\ ) - (h(x), 0) \| \geq |g \circ h(x)|$$

Portanto,

$$b|f(x)\ | \geq |g \circ h(x)|.$$

Por outro lado,

$$c|g(y)\ | \leq \| H^{-1}(y, g(y)) - H^{-1}(y, 0) \| \leq d|g(y)|$$

Note também que:

$$\| H^{-1}(y, g(y)) - H^{-1}(y, 0) \| = \| (h^{-1}(y), f \circ h^{-1}(y)\ ) - (h(y), 0) \| \geq |f \circ h^{-1}(y)|$$

Logo,

$$d|g(y)| \geq |f \circ h^{-1}(y)|.$$

Assim, concluímos que $f \approx g \circ h$.

Caso 2) $H(V_+) = V_-$ e $H(V_-) = V_+$

Neste caso, $f$ e $g \circ h$ tem o sinais contrários em cada componente conexa do conjunto $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$. De um modo análogo ao anterior, mostramos que existem constantes reais positivas $a, b$ tais que:

$$a|f(x)| \leq |g \circ h(x)| \leq b|f(x)|$$

Portanto, $f \approx -g \circ h$.

Recíprocamente, suponha $f \approx g \circ h$ ( quando $f \approx -g \circ h$ segue de modo análogo). Defina a aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ como sendo

$$H(x,y) = \begin{cases} (h(x), 0), \quad se \;\; y = o. \\ (h(x), \frac{g \circ h(x) y}{f(x)}), \quad se \;\; 0 < |y| \leq |f(x)| \\ (h(x), y - f(x) + g \circ h(x)), \\ \qquad se \;\; 0 < |f(x)| \leq |y| \quad \text{e} \quad sinal(y) = sinal(f(x)) \\ (h(x), y + f(x) - g \circ h(x)), \\ \qquad se \;\; 0 < |f(x)| \leq |y| \quad \text{e} \quad sinal(y) = -sinal(f(x)) \\ (h(x), y), \quad se \;\; f(x) = 0. \end{cases}$$

A aplicação $H(x,y) = (h(x), T(x,y))$ definida acima é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. De fato, $H$ é injetiva, pois para qualquer $x^*$ fixado, temos que $T(x^*, y)$ é uma função contínua e monótona. Claramente $H$ é Lipschitz se $0 \leq |f(x)| \leq |y|$. Mostraremos que $H$ é Lipschitz se $0 \leq |y| \leq |f(x)|$. Para isto, é suficiente mostrar que as derivadas parciais $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ existem e são limitadas em seus domínios (a menos de um conjunto de medida nula), para todo $i = 1, ..., n$. Como $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, as derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ existem e são limitadas em quase todo ponto. Agora iremos estudar as derivadas parciais $\frac{\partial T}{\partial x_i}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} &= (\textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(h(x)).\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) f(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g \circ h(x)) \frac{y}{(f(x))^2} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(h(x)).\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) f(x) \frac{y}{(f(x))^2} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g \circ h(x) \frac{y}{(f(x))^2} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(h(x)).\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) \frac{y}{f(x)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{g \circ h(x)}{f(x)} \frac{y}{f(x)} \end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{\partial h_j}{\partial x_i}$ existe e é limitado para todo $i, j = 1, ..., n$ (a menos de um conjunto de medida nula). Como $0 \leq |y| \leq |f(x)$ , temos que $\frac{y}{f(x)}$ é limitado. A expressão $\frac{g \circ h(x)}{f(x)}$ é limitada. Além disso, $\frac{\partial g}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_l}$ são limitados para todo $k, l = 1, ..., n$ porque $f$ e $g$ são funções Lipschitz. Portanto, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ existe e é limitado a menos de um conjunto de medida nula. Portanto, vale a desigualdade abaixo, a menos de um conjunto de medida nula.

$$\| H(x,y) - H(u,v) \| \leq k \| (x,y) - (u,v) \| \quad \text{para todo} \;\; (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus U,$$

onde $m(U) = 0$ (medida nula). Mostraremos que essa desigualdade é satisfeita para quaisquer $(x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. De fato, tome $(x_0, y_0), (u_0, v_0) \in U$. Como $m(U) = 0$, podemos tomar sequências $(x_n, y_n), (u_m, v_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus U$ tais que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ e $(u_m, v_m) \to (u_0, v_0)$. Portanto, $\| H(x_n, y_n) - H(u_m, v_m) \| \leq k \| (x_n, y_n) - (u_m, v_m) \|$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de $H$, fazendo $n \to \infty$ e em seguida $m \to \infty$ temos:

$$\| H(x_0, y_0) - H(u_0, v_0) \| \leq k \| (x_0, y_0) - (u_0, v_0) \|$$

Como $H^{-1}$ é construida da mesma forma que $H$, concluímos que $H^{-1}$ também é um germe de homeomorfismo Lipschitz. Portanto, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso,

$i)$ $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$

$ii)$ $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Ou seja, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. □

**Definição 5.3.** *Dois germes de funções contínuas* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *são chamados* $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$*-bi-Lipschitz equivalentes (ou contato equivalente no sentido Montaldi) se existir um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz* $M : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0)$ *tal que* $M(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ *e* $M(graf(f)) = graf(g)$*. A aplicação* $M$ *é chamada de aplicação Montaldi.*

**Teorema 5.4.** *Dois germes de funções Lipschitz* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *são* $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$*-bi-Lipschitz equivalentes se, e somente se, são* $\mathcal{K}$*-bi-Lipschitz equivalentes.*

***Demonstração.*** A $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência implica em $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$-bi-Lipschitz equivalência. Segue pela própria definição.

Agora suponha que $f$ e $g$ sejam $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $M : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0)$ tal que

$$M(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \quad \text{e} \quad M(graf(f)) = graf(g).$$

**Afirmação 5.4.1.** *Seja* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *definido por* $h(x) = \pi_n(M(x, f(x)))$*. Então* $h$ *é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz.*

***Prova.*** De fato, como $g$ é um germe de função Lipschitz, a projeção $\pi_n|_{graf(g)}$ é uma aplicação bi-Lipschitz. Pelo mesmo argumento, a aplicação $x \mapsto (x, f(x))$ é bi-Lipschiz. A aplicação $M$ é bi-Lipschitz por definição. Logo, a aplicação $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz.

**Afirmação 5.4.2.** *Temos* $f(x) \approx g \circ h(x)$ *ou* $f(x) \approx -g \circ h(x)$

***Prova.*** Como $M$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, existem duas constantes reais positivas $a, b$ tais que:

$$a|f(x)| \leq \| M(x, f(x)) - H(x, 0) \| \leq b|f(x)|$$

Note que:

$$\| M(x, f(x)) - M(x, 0) \| = \| (h(x), g \circ h(x) \ ) - (\widetilde{h}(x), 0) \| \geq |g \circ h(x)|,$$

onde $\widetilde{h}(x) = \pi_n(M(x,0))$. Logo, $b|f(x)\,| \geq \ |g \circ h(x)|$. Por outro lado,

$$c|g(y)| \ \leq \| \ M^{-1}(y, g(y)) - M^{-1}(y, 0) \ \| \leq d|g(y)|$$

Note também que:

$$\| \ M^{-1}(y, g(y)) - M^{-1}(y, 0) \ \| = \| \ (h^{-1}(y), f \circ h^{-1}(y) \ ) - (\widehat{h}(y), 0) \ \| \geq \ |f \circ h^{-1}(y)|$$

onde $\widehat{h}(y) = \pi_n(M^{-1}(y,0))$. Logo, $d|g(y)\,| \geq \ |f \circ h^{-1}(y)|$. Portanto, $|f(x)| \approx |g \circ h(x)|$.

Assim como na Afirmação 5.2.1, temos apenas duas possibilidades:

1) $M(V_+) = V_+$ e $M(V_-) = V_-$ ou 2) $M(V_+) = V_-$ e $M(V_-) = V_+$.

Suponha que: $M(V_+) = V_+$ e $M(V_-) = V_-$

Então, $f \approx g \circ h$.

Agora, suponha que: $M(V_+) = V_-$ e $M(V_-) = V_+$

Então, $f \approx -g \circ h$.

Portanto, pelo Teorema 5.3, concluímos que $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. □

**Proposição 5.2.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ dois germes de aplicações Lipschitz, tais que $f_i \approx g_i$ para todo $i = 1, ..., p$. Então $f$ e $g$ são $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalentes.*

***Demonstração.*** Como $f_i$ e $g_i$ tem o mesmo contato na origem, pelo Teorema 5.2, temos que $f_i$ e $g_i$ são $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalentes, para todo $i = 1, ..., p$. Portanto, existem germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $S_i : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ tais que:

1) $S_i(x, y_i) = (x, H_i(x, y_i))$

2) $S_i(x, f_i(x)) = (x, g_i(x))$

3) $S_i(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Agora, defina uma aplicação $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$ dada como

$$H(x, y_1, ..., y_p) = (x, H_1(x, y_1), ..., H_p(x, y_p))$$

Pela Proposição 2.3, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso,

1) $H(x, f(x)) = (x, g(x))$

2) $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{C}$-bi-Lipschitz equivalentes. □

Este próximo resultado é um dos principais, deste capítulo. Ele será de fundamental importância para a prova da finitude das classes de equivalência, no sentido $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. Existe uma certa semelhança entre as condições exigidas no Teorema 5.5 com a $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$-bi-lipschitz equivalência. A equivalência Montaldi, exige que o germe de homeomorfismo bi-lipschitz mande $graf(f)$ em $graf(g)$ e $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ em $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$. No nosso caso, além disso, pedimos também que preserve os seguintes conjuntos algébricos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}, ..., \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$.

**Teorema 5.5.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações Lipschitz. Suponha que exista um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$ tal que satisfaça as seguintes condições abaixo:*

*1)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$

*2)* $H(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$

*3)* $H(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

*p+1)* $H(\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$

*p+2)* $H(graf(f)) = graf(g)$

*Então, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Além disso, qualquer combinação das funções coordenadas de $f$ será $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente aos seus respectivos correspondentes em $g$. Isto é, $f_i$ é $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz a $g_i$, $(f_i\ , f_s)$ é k-bi-Lipschitz a $(g_i\ , g_s)$, $(f_i\ , f_s\ , ..., f_r)$ é $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz a $(g_i\ , g_s\ , ..., g_r)$ para quaisquer $1 \leq i, s, ..., r \leq p$.*

Precisamos provar algumas afirmações. Suponha que exista um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$ que satisfaça as condições do Teorema 5.5. Para cada $j = 1, ..., p$, defina os seguintes conjuntos

$$V_j^+ = \{(x, y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid y_j > 0\} \text{ e } V_j^- = \{(x, y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid y_j < 0\}$$

**Afirmação 5.5.1.** *Uma das seguintes condições acontece:*

*i)* $H(V_j^+) = V_j^+$ *e* $H(V_j^-) = V_j^-$

*ii)* $H(V_j^+) = V_j^-$ *e* $H(V_j^-) = V_j^+$

***Prova.*** Do contrário, existiriam pontos $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, onde $a \in V_j^+$, $b, c, d \in V_j^-$ e $H(a) = b, H(c) = d$. Considere o caminho $\lambda : [0, 1] \to V_j^-$ ligando os pontos $b$ e $d$. Assim, $H^{-1} \circ \lambda$ é um caminho em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ligando os pontos $a$ e $c$. Logo, passa por $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-j}$. Mas isto é um absurdo, pois $H(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-j}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-j}$. □

**Afirmação 5.5.2.** *Seja $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definido por $h(x) = \pi_n(H(x, f(x)))$. Então $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz.*

***Prova.*** De fato, como $g$ é um germe de aplicação Lipschitz, a projeção $\pi_{n|_{graf(g)}}$ é uma aplicação bi-Lipschitz. Pelo mesmo argumento, a aplicação $x \mapsto (x, f(x))$ é bi-Lipschiz.

Por hipótese, o germe de homeomorfismo $H$ é bi-Lipschitz. Logo, a aplicação $h$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. $\square$

**Afirmação 5.5.3.** *Temos* $f_i(x) \approx \pm\ g_i \circ h(x)$, *para todo* $i = 1, ..., p$.

***Prova.*** Como $H$ é um germe de aplicação bi-Lipschitz, existem constantes reais positivas $a, b$, tais que

$$a|f_1(x)| \leq \| H(x, f_1(x), ..., f_p(x)) - H(x, 0, f_2(x), ..., f_p(x)) \| \leq b|f_1(x)|$$

Note que:

$$\begin{aligned} &\| H(x, f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)) - H(x, 0, f_2(x), ..., f_p(x)) \| \\ &\qquad = \| (h(x), g_1 \circ h(x), ..., g_p \circ h(x)) \\ &\qquad - (T(x, 0, f_2(x), ..., f_p(x)),\ 0\ , ..., H_p(x, 0, f_2(x), ..., f_p(x))) \| \\ &\qquad \geq\ |g_1 \circ h(x)|, \end{aligned}$$

onde $H(x, y) = (T(x, y), H_1(x, y), ..., H_p(x, y))$, $T : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e $H_1, ..., H_p : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$. Portanto,

$$b|f_1(x)\ | \geq |g_1 \circ h(x)|.$$

Por outro lado,

$$c|g_1(x)| \leq \| H^{-1}(x, g_1(x), ..., g_p(x)) - H^{-1}(x, 0, g_2(x), ..., g_p(x)) \| \leq d|g_1(x)|$$

Usando o mesmo procedimento, obtemos

$$d\ |g_1 \circ h(x)|\ \geq\ |f_1(x)|.$$

Pela Afirmação 5.5.1 concluímos que:

$$\begin{aligned} &sinal(f_1(x)) = sinal(g_1 \circ h(x)) \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus f_1^{-1}(0) \quad \text{ou} \\ &sinal(f_1(x)) = -sinal(g_1 \circ h(x)) \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus f_1^{-1}(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_1(x) \approx\ g_1 \circ h(x) \ \text{ ou } \ f_1(x) \approx\ -g_1 \circ h(x).$$

De modo análogo, temos

$$f_i(x) \approx\ g_i \circ h(x) \ \text{ ou } \ f_i(x) \approx\ -g_i \circ h(x) \ \text{ para todo } i = 1, ..., p.$$ $\square$

***Demonstração do Teorema 5.5.*** Pela Afirmação 5.5.3, temos $f_i(x) \approx \pm\ g_i \circ h(x)$, para todo $i = 1, ..., p$, onde $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ é um germe de homeomorfismo bi-lipschitz. Logo, pela Proposição 5.3, temos que $f_i$ e $g_i$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente para todo $i = 1, ..., p$. Portanto, existem germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $S_j$ :

$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0)$, tais que:

$i)$ $S_j(x, y_j) = (h(x), M_j(x, y_j))$

$ii)$ $S_j(x, y_j) = (h(x), g_j \circ h(x))$

$iii)$ $S_j(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Defina uma aplicação $T : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$ como sendo

$$T(x, y_1, ..., y_p) = (h(x), M_1(x, y_1), ..., M_p(x, y_p)).$$

Pela Proposição 2.3, temos que $T$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso,

$i)$ $T(x, f_1(x), ..., f_p(x)) = (h(x), g_1 \circ h(x), ..., g_p \circ h(x))$

$ii)$ $T(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$

Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes.

A Segunda parte deste Teorema segue de forma imediata. De fato, tome uma combinação qualquer das funções coordenadas de $f$. A saber $(f_s, f_k, ..., f_r)$. Defina uma aplicação $H(x, y_s, y_k, ..., y_r) = (h(x), M_s(x, y_s), M_k(x, y_k), ..., M_r(x, y_r))$. Pela Proposição 2.3, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso,

$i)$ $H(x, f_s(x), f_k(x), ..., f_r(x)) = (h(x), g_s \circ h(x), g_k \circ h(x) ..., g_r \circ h(x))$

$ii)$ $H(\mathbb{R}^n \times \{0\} \times ... \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times ... \times \{0\}$

Portanto, $(f_s, f_k, ..., f_r)$ e $(g_s, g_k, ..., g_r)$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. □

### 5.1.1 Invariantes da Equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz

Iremos apresentar alguns invariantes pela relação de equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz. O intuito é apenas expandir o conhecimento literário do leitor, com respeito a essa relação. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico conexo. Podemos considerar $X$ um espaço métrico com respeito a duas diferentes métricas: a euclidiana $d(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \|$ e a intrínsica $d_{int}(x_1, x_2) = inf\ \{|\gamma| \mid \gamma$ é um caminho ligando $x_1$ a $x_2\}$.

**Proposição 5.3.** *(LOJASIEWICZ (1965)) Existe um número racional* $0 < \alpha \leq 1$ *e um número real* $k > 0$ *tal que para cada* $x_1, x_2 \in X$ *temos*

$$d_{int}(x_1, x_2) \ \leq \ k \parallel x_1 - x_2 \parallel^{\alpha}$$

**Definição 5.4.** *O número* $\alpha_0$ *definido como o máximo de tais números racionais* $\alpha$ *é chamado expoente de Lojasiewicz de* $X$*.*

**Proposição 5.4.** *(LOJASIEWICZ (1965)) O expoente de Lojasiewicz é um invariante* *da equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz.*

***Demonstração.*** Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então, pelo Teorema 5.4, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-$\mathcal{M}$-bi-Lipschitz equivalentes. Considere $X = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup graf(f)$ e $Y = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup graf(g)$. Logo existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $M : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ tal que $M(X) = Y$. Existe também uma constante real positiva $k_1 > 0$, tal que para cada $y_1, y_2 \in Y$,

$$d_{int}(y_1, y_2) \ \leq \ k_1 \ d_{int}(M^{-1}(y_1), M^{-1}(y_2))$$

Mas, pela Proposição 5.3

$$d_{int}(M^{-1}(y_1), M^{-1}(y_2)) \ \leq \ k \parallel M^{-1}(y_1) - M^{-1}(y_2) \parallel^{\alpha_0(X)}$$

Como $M$ é bi-Lipschitz, existe uma constante positiva $k_2 > 0$, tal que

$$\parallel M^{-1}(y_1) - M^{-1}(y_2) \parallel \leq \ k_2 \ \parallel y_1 - y_2 \parallel$$

Então,

$$d_{int}(y_1, y_2) \ \leq \ k_1 k {k_2}^{\alpha_0(X)} \parallel y_1 - y_2 \parallel^{\alpha_0(X)}$$

Logo, $\alpha_0(Y) \geq \alpha_0(X)$. Considerando agora o germe de homeomorfismo inverso $M^{-1}$, obtemos $\alpha_0(Y) \leq \alpha_0(X)$. Portanto, $\alpha_0(Y) = \alpha_0(X)$. $\square$

A multiplicidade também é um invariante entre os germes de funções analíticas $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes.

**Teorema 5.6.** *(RISLER and TROTMAN (1997)) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções analíticas $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Então $m(f) = m(g)$.*

O expoente de Lojasiewicz e a multiplicidade são invariantes dos germes de funções analíticas $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Agora daremos definições para germes de aplicações.

**Definição 5.5.** *Seja $f = (f_1, ..., f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica. Considere $\alpha_0(f) = (\alpha_0(X_1), ..., \alpha_0(X_p))$, onde $X_i = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup graf(f_i)$ e $\alpha_0(X_i)$ é o expoente de Lojasiewicz de $X_i$*

**Definição 5.6.** *Seja $f = (f_1, ..., f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica. Considere $M(f) = (m(f_1), ..., m(f_p))$, onde $m(f_i)$ é a multiplicidade do germe de função coordenada $f_i$.*

**Proposição 5.5.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações analíticas. Suponha que o $graf(f)$ seja Lipschitz equivalente ao $graf(g)$ respeitando a família de conjuntos* *algébricos* $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-2} \times \{0\}, ..., \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. *Então,* $\alpha_0(f) = \alpha_0(g)$ *e* $M(f) = M(g)$.

***Demonstração.*** Pelo Teorema 5.5, $f_i$ e $g_i$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes, para todo $i = 1, ..., p$. Por um lado, pelo Teorema 5.6, $m(f_i) = m(g_i)$, para todo $i = 1, ..., p$. Por outro lado, pela Proposição 5.4, temos que $\alpha_0(X_i) = \alpha_0(Y_i)$, para todo $i = 1, ..., p$. Onde $X_i = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup graf(f_i)$ e $Y_i = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup graf(g_i)$. □

## 5.2 Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência

**Definição 5.7.** *Dois pares de germes de aplicações continuas* $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ *são ditos bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes se existem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz*

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \quad e\ h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

*tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "{(id_n,(f_1,f_2))}"] \arrow[d, "h"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "H"] & (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[d, "h"'] \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "{(id_n,(g_1,g_2))}"'] & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \arrow[r, "\pi_n"] & (\mathbb{R}^n, 0)
\end{tikzcd}$$

*onde* $id_n$ *é o germe da aplicação identidade do* $\mathbb{R}^n$ *;* $\pi_n$ *é a projeção usual em* $\mathbb{R}^n$*. Além disso,* $H(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, z))$*, onde* $H_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0), H_2 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ *e* $H_1(x, 0) = H_2(x, 0) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

*Quando o germe de homeomorfismo* $h = id_n$*, dizemos que os pares* $(f_1, f_2)$ *e* $(g_1, g_2)$ *são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschotz equivalentes.*

**Proposição 5.6.** *Sejam* $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ *dois pares de germes de aplicações contínuas. Então,*

*1) Se* $(f_1, f_2)$ *e* $(g_1, g_2)$ *são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes, então os germes de aplicações* $f = (f_1, f_2)$ *e* $g = (g_1, g_2)$ *são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes.*

*2) Se* $(f_1, f_2)$ *e* $(g_1, g_2)$ *são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes, então os germes de aplicações* $f_1$ *e* $g_1$ *são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes e também os germes de aplicações* $f_2$ *e* $g_2$ *são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes.*

***Demonstração.*** Considere $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ dois pares de germes de aplicações contínuas.

*1)* Segue da própria definição da Bi-$\mathcal{K}$-bi-lipschitz equivalência.

*2)* Suponha que os pares de germes de aplicações $(f_1, f_2)$ e $(g_1, g_2)$ sejam Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Portanto, existem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \quad \text{e} \quad h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

tais que;

*i)* $H(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, z))$

*ii)* $H(x, f_1(x), f_2(x)) = (h(x), g_1 \circ h(x), g_2 \circ h(x))$

*iii)* $H_1(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p \quad \text{e} \quad H_2(\mathbb{R}^n \times \{0\}^q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^q$

Defina duas aplicações $S : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ e $T : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ como sendo $S(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$ e $T(x, z) = (h(x), H_2(x, z))$. É fácil ver que $S, T$ são germes de homeomorfismos bi-Lipschitz. Além disso, os pares de germes de homeomorfismo bi-Lipschitz $(h, S)$ e $(h, T)$ satisfazem as condições da Definição 5.1. □

**Proposição 5.7.** *A equivalência Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz implica na equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz.*

A recíproca da Proposição 5.7 é falsa.

**Examplo 5.4.** *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0)$ pares de germes de funções dadas por $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^4 + y^4 - x^2 - y^2)$ e $g(x, y) = (x^4 + y^4, x^4 + y^4 - x^2 - y^2)$. Mostraremos que $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. A saber, defina um homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ dado por $H(x, y, z, w) = (x, y, z + w, w)$. Note que:*

$$\begin{aligned} i)\ H(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) &= (x, y, x^4 + y^4, x^4 + y^4 - x^2 - y^2) \\ &= (x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) \end{aligned}$$

*ii)* $H(\mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \{0\}) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \{0\}$

*Portanto, $f$ e $g$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Entretanto, $f$ e $g$ não são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Caso fossem, pelo item 2), da Proposição 5.6, teríamos $f_1$ $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes a $g_1$, o que mostramos no Exemplo 5.2 não ser possível.* □

### 5.2.1 Finitude da Equivalência Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz

**Teorema 5.7.** *(Teorema de Finitude) Seja $P^k(n, p \times q)$ o conjunto de todos os pares de germes de aplicações polinomiais $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ onde $f = (f_1, ..., f_p), g = (g_1, ..., g_q)$ e o grau de $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n, p \times q)$, com respeito a Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lischitz equivalência é finito.*

***Demonstração.*** Suponha, por absurdo, que existam infinita classes de equivalência.

Logo podemos tomar uma infinidade de representantes de pares de germes de aplicações

$$(f_1, g_1)\,,\,(f_2, g_2)\,,\,...\,,\,(f_n, g_n)\,,\,...$$

os quais não são, dois a dois, Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Para cada par de germes de aplicações $(f_i, g_i)$, defina um conjunto $X_{(f_i,g_i)}$, onde

$X_{(f_i,g_i)} = \{\ (\mathbb{R}^n\times\{0\}^p\times\{0\}^q)\ ,\ (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{q-1}\times\{0\})\ ,\ ...\ ,\ (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\{0\}\times\mathbb{R}^{q-1})\ ,$ $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{p-1}\times\{0\}\times\mathbb{R}^q)\ ,\ ...\ ,\ (\mathbb{R}^n\times\{0\}\times\mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}^q)\ ,\ graf(f_i, g_i)\ \}$

é um conjunto formado por $p+q+2$ subconjuntos algébricos do $\mathbb{R}^{n+p+q}$. Assim, obtemos uma sequência infinita de famílias de conjuntos algébricos.

$$X_{(f_1,g_1)},\ X_{(f_2,g_2)},\ ...\ ,\ X_{(f_n,g_n)},\ ...$$

Pelo Teorema 2.6, o conjunto das classes de equivalência, com respeito a relação fortemente bi-Lipschitz é um conjunto finito. Portanto, sem perca da generalidade, podemos supor que $X_{(f_i,g_i)}$ é fortemente bi-Lipschitz equivalente a $X_{(f_j,g_j)}$ para algum $i \neq j$. Isto é, existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q, 0)$ que manda $graf(f_i, g_i)$ no $graf(f_j, g_j)$ e preserva os conjuntos algébricos definidos acima. Considere $f_i = (f_{i1}, ..., f_{ip}), g_i = (g_{i1}, ..., g_{iq}), f_j = (f_{j1}, ..., f_{jp}), g_j = (g_{j1}, ..., g_{jq})$. Pela Afirmação 5.5.3, temos;

$i)$ $f_{ir} \approx \pm f_{jr}\circ h$, para todo $1 \leq r \leq p$

$ii)$ $g_{is} \approx \pm g_{js}\circ h$, para todo $1 \leq s \leq q$,

onde $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ é o germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, definido como sendo $h(x) = \pi_n(H(x, f_i(x), g_i(x)))$. Pelo Teorema 5.3, temos;

$i)$ $f_{ir}$ e $f_{jr}$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente, para todo $1 \leq r \leq p$

$ii)$ $g_{is}$ e $g_{js}$ são $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente, para todo $1 \leq s \leq q$

preservando o mesmo germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $h$. Isto é, para cada $1 \leq r \leq p$ e $1 \leq s \leq q$, existem germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $M_r,\ N_s : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, 0)$, tais que:

$i)$ $M_r(x, y_r) = (h(x), S_r(x, y_r))$

$ii)$ $M_r(x, f_{ir}(x)) = (h(x), f_{jr}\circ h(x))$

$iii)$ $M_r(\mathbb{R}^n\times\{0\}) = \mathbb{R}^n\times\{0\}$.

$iv)$ $N_s(x, z_s) = (h(x), T_s(x, z_s))$

$v)$ $N_s(x, g_{is}(x)) = (h(x), g_{js}\circ h(x))$

$vi)$ $N_s(\mathbb{R}^n\times\{0\}) = \mathbb{R}^n\times\{0\}$.

Defina $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ como sendo:

$$H(x, y, z) = (h(x), S_1(x, y_1), ..., S_p(x, y_p), T_1(x, z_1), ..., T_q(x, z_q))$$

Portanto, pela Proposição 2.3, $H$ é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz, onde:

*i)* $H(x, y, z) = (h(x), S(x, y), T(x, z))$

*ii)* $H(x, f_i(x), g_i(x)) = (h(x), f_j \circ h(x), g_j \circ h(x))$

*ii)* $S(\mathbb{R}^n \times \{0\}^p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ e $T(\mathbb{R}^n \times \{0\}^q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^q$.

Então, $(f_i, g_i)$ e $(f_j, g_j)$ são Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente. Absurdo! □

**Finitude da Equivalência $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz**

**Corolário 5.1.** *Seja $P^k(n,p)$ o conjunto de todos os germes de aplicações polinomiais $f = (f_1, ..., f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, onde o grau de $f_1, ..., f_p$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n,p)$, com respeito a $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalência é finito.*

***Demonstração.*** Suponha, por absurdo, que existam infinita classes de equivalência. Logo podemos tomar uma infinidade de representantes de germes de aplicações

$$f_1 \ , \ f_2 \ , \ ... \ , \ f_n \ , ...$$

os quais não são, dois a dois, $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Assim, obtemos uma nova sequência, de infinitos pares de germes de aplicações

$$(f_1, f_1) \, , \, (f_2, f_2) \, , \, ... \, , \, (f_n, f_n) \, , \, ...$$

Pelo Teorema 5.7, podemos supor, sem perda de generalidade, que $(f_i, f_i)$ é Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalente a $(f_j, f_j)$, para algum $i \neq j$. Porém, pela Proposição 5.6, teríamos que $f_i$ e $f_j$ seriam $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalentes. Absurdo! □

# 6 CONCLUSÃO

Na investigação da finitude das classes de equivalência, fornecida pela relação Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lipschitz, encontramos resulatados bastantes interessantes.

No Capítulo 2, mostramos que quando estamos trabalhando com uma sequência de subconjuntos algébricos $(X_1, ..., X_p)$, do $\mathbb{R}^n$, todos com complexidade limitada, temos apenas um número finito de classes de equivalência, fornecida pela relação fortemente bi-Lipschitz. Esse resultado pode ser visto como uma generalização, no sentido algébrico, do teorema de finitude apresentado por MOSTOWSKI (1985).

No Capítulo 4, damos uma demonstração de finitude para o número de classes de equivalência, fornecida pela relação Bi-$\mathcal{C}^0$-$\mathcal{K}$. Vale ressaltar a importância da técnica utilizada neste Capítulo. Pois a mesma nos da a esperança de encontrar-mos um invariante completo para essa relação.

Por fim, no Capítulo 5, demonstramos o nosso Teorema Principal: Seja $P^k(n, p\times q)$ o conjunto de todos os pares de germes de aplicações polinomiais $(f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$, onde $f = (f_1, ..., f_p), g = (g_1, ..., g_q)$ e o grau de $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q$ são menores ou iguais a $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto das classes de equivalência de $P^k(n, p \times q)$, com respeito a Bi-$\mathcal{K}$-bi-Lischitz equivalência é finito.

# REFERÊNCIAS

ALVAREZ, Sérgio; BIRBRAIR, Lev; COSTA, João; FERNANDES, Alexandre. Topological $\mathcal{K}$ equivalence of analytic function-germs. **Open Mathematics**, v. 8, n. 2, p. 338–345, 2010.

BENEDETTI, Riccardo; SHIOTA, Masahiro. Finiteness of semialgebraic types of polynomial functions. **Mathematische Zeitschrift**, v. 208, n. 1, p. 589–596, 1991.

BIRBRAIR, L.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. Topological $\mathcal{K}$ and $\mathcal{A}$ equivalences of polynomial functions. **Journal of Singularities**, v. 6, p. 15–18, 2012.

BIRBRAIR, Lev; COSTA, João; FERNANDES, Alexandre; RUAS, Maria. $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalence of real function-germs. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 135, n. 4, p. 1089–1095, 2007.

BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, Alexandre; COSTA, João Carlos Ferreira. Finiteness theorem for topological contact equivalence of map germs. **Hokkaido Mathematical Journal**, v. 38, n. 3, p. 511–517, 2009.

COSTA, João Carlos Ferreira; NUÑO-BALLESTEROS, Juan J. Topological $\mathcal{K}$-classification of finitely determined map germs. **Geometriae Dedicata**, v. 166, n. 1, p. 147–162, 2013.

COSTA, João Carlos Ferreira; PEDROSO, Hermes Antonio; SAIA, Marcelo Jose. A note on equivalence relations of pair of germs. **RIMS KÃ´kyÃ»roku Bessatsu**, v. 55, p. 17–39, 2016.

DUFOUR, Jean-Paul. Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**. 1977, v. 10, p. 153–174.

FERNANDES, Alexandre Cesar Gurgel; RUAS, Maria Aparecida Soares. Bilipschitz determinacy of quasihomogeneous germs. **Glasgow Mathematical Journal**, v. 46, n. 01, p. 77–82, 2004.

FUKUDA, Takao. Types topologiques des polynômes. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 46, p. 87–106, 1976.

HARDT, Robert M. Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings. **American Journal of Mathematics**, v. 102, n. 2, p. 291–302, 1980.

HENRY, Jean-Pierre; PARUSINSKI, Adam. Existence of moduli for bi-Lipschitz equivalence of analytic functions. **Compositio Mathematica**, v. 136, n. 02, p. 217–235, 2003.

KING, Henry C. Topological type in families of germs. **Inventiones mathematicae**, v. 62, n. 1, p. 1–13, 1980.

KUIPER, Nicolaas H. $C^1$-equivalence of functions near isolated critical points. **Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1967). Annals of Mathematics Studies**. 1968, v. 69, p. 199–218.

LOJASIEWICZ, Stanislaw. *Sur les ensembles semi-analytiques.* **Université de Gracovie**, 1965.

MANCINI, S; RUAS, MAS; TEIXEIRA, MA. On divergent diagrams of finite codimension. **Portugaliae Mathematica**, v. 59, n. 2, p. 179–194, 2002.

MATHER, John N. Stability of $C^\infty$-mappings, IV. Classification of stable germs by $\mathbb{R}$-algebras. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 37, p. 223–248, 1969.

MOSTOWSKI, Tadeusz. Lipschitz equisingularity. 1985.

NAKAI, Isao. On topological types of polynomial mappings. **Topology**, v. 23, n. 1, p. 45–66, 1984.

NISHIMURA, Takashi. Topological $\mathcal{K}$-equivalence of smooth map-germs . p. 82–93, 1997.

PARUSINSKI, Adam. Lipschitz properties of semi-analytic sets. **Annales de l'institut Fourier**. 1988a, v. 38, p. 189–213.

PARUSINSKI, Adam. Lipschitz stratification of real analytic sets. **Banach Center Publications**, v. 20, n. 1, p. 323–333, 1988b.

**PRISHLYAK, Alexander O**. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surfaces. *arXiv preprint math/9912004*, 1999.

RISLER, Jean-Jacques; TROTMAN, David. Bilipschitz invariance of the multiplicity. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 29, n. 2, p. 200–204, 1997.

RUAS, Maria Aparecida Soares; VALETTE, Guillaume. $\mathcal{C}^0$ and $\mathcal{K}$-bi-Lipschitz equivalence of mappings. **Mathematische Zeitschrift**, v. 269, n. 1-2, p. 293–308, 2011.

TAKENS, Floris. A note on sufficiency of jets. **Inventiones mathematicae**, v. 13, n. 3, p. 225–231, 1971.

TEXEIRA, Marco Antonio. On topological stability of divergent diagrams of folds. **Mathematische Zeitschrift**, v. 180, n. 2, p. 361–371, 1982.

THOM, René. La stabilité topologique des applications polynomiales. **Enseignement Math.(2)**, v. 8, p. 24–33, 1962.

VALETTE, Guillaume. Hardt's theorem: a bi-Lipschitz version. **CR Acad. Sci. Paris, Ser. I**, v. 340, p. 895–900, 2005.