



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE**  
**COMPUTAÇÃO**

**LUÍS BRUNO PEREIRA DO NASCIMENTO**

**UMA VARIAÇÃO DO ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA APLICADA NA**  
**DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO DO REGULADOR**  
**LINEAR QUADRÁTICO**

**SOBRAL**

**2016**

LUÍS BRUNO PEREIRA DO NASCIMENTO

UMA VARIAÇÃO DO ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA APLICADA NA  
DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO DO REGULADOR LINEAR  
QUADRÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de concentração: Engenharia Elétrica e subárea: Sistemas Eletrônicos de Medida e de Controle.

Orientador: Prof. Dr. Vandilberto Pereira Pinto.  
Coorientador: Prof. Dr. Márcio André Baima Amora.

SOBRAL

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo autor

---

N196v Nascimento, Luís Bruno Pereira do.

Uma variação do Algoritmo de Busca Harmônica aplicada na determinação das matrizes de ponderação do Regulador Linear Quadrático / Luís Bruno Pereira do Nascimento. – 2016.  
78 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, 1, Sobral, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Vandilberto Pereira Pinto.

Coorientação: Prof. Dr. Márcio André Baima Amora.

1. Regulador Linear Quadrático. 2. Busca e Otimização. 3. Matrizes de Ponderação. 4. Algoritmo de Busca Harmônica. I. Título.

CDD

---

LUÍS BRUNO PEREIRA DO NASCIMENTO

UMA VARIAÇÃO DO ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA APLICADA NA  
DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO DO REGULADOR LINEAR  
QUADRÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica e de Computação. Área de concentração: Engenharia Elétrica e subárea: Sistemas Eletrônicos de Medida e de Controle.

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Vandilberto Pereira Pinto (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC - Sobral)

---

Prof. Dr. Márcio André Baima Amora (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC - Sobral)

---

Prof. Dr. João Paulo Pordeus Gomes  
Universidade Federal do Ceará (UFC - Fortaleza)

---

Prof. Dr. Otacílio da Mota Almeida  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais Antonia e Fernando, pelo amor, confiança e apoio depositados ao longo de toda minha vida em especial nesta jornada.

À minha namorada Martha pelo apoio e paciência, principalmente nos períodos mais difíceis durante este curso.

Aos professores Dr. Vandilberto Pereira Pinto e Dr. Márcio André Baima Amora pela orientação e por todo conhecimento compartilhado nas aulas.

Aos professores do programa, em especial ao professor Jarbas Joaci e Isaac Machado pelo conhecimento repassado durante as aulas.

Aos colegas da turma de mestrado, em especial ao Darielson, Rosângela, Leonardo Tabosa, André, Elvys e Delano, por ajudar na minha adaptação em Sobral e por tornarem os momentos de tensão e correria sempre mais descontraídos.

À FUNCAP pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“A ciência será sempre uma busca, jamais uma descoberta; ela é uma viagem, nunca uma chegada.” (Karl Popper)

## RESUMO

O Regulador Linear Quadrático (LQR) é uma importante técnica de controle moderno com excelentes propriedades de estabilidade robusta, podendo ser aplicado em sistemas de controle complexos, garantindo a estabilidade do sistema frente a pequenas perturbações. Entretanto, o projeto desse controlador possui uma dificuldade na definição das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , as quais são responsáveis pelo atendimento das especificações do projeto, mas possuem um grande espaço de busca. Assim, a aplicação de uma técnica de Inteligência Computacional pode ser usada para realizar, de maneira automática, a busca otimizada das matrizes supracitadas. Para essa finalidade, o Algoritmo de Busca Harmônica (HS) foi aplicado na definição das matrizes para o controlador LQR. O algoritmo HS é uma meta-heurística inspirada na improvisação de músicos na composição de novas harmonias e que tem sido bastante utilizada pela comunidade científica nos últimos anos, podendo ser inclusive aplicada nesse problema. Todavia, alguns parâmetros precisam ser definidos por meios empíricos para garantir uma boa convergência. Nesse contexto, é proposto neste trabalho um novo algoritmo de Busca Harmônica que garanta um ajuste automático dos seus parâmetros. Adotando-se as plantas de um Helicóptero CH-47 e de um Pêndulo Invertido, foram, portanto, realizadas séries de buscas e simulações com três vertentes do HS: o HS padrão e os métodos modificados conhecidos como *Improved Harmony Search* (IHS) e a Busca Harmônica com Dispersão Estatística (DHS). Esse último método pode ser destacado como a principal contribuição desse trabalho, que também apresenta a comparação entre os resultados obtidos para os algoritmos HS. Pode-se inferir que todos os métodos apresentam resultados satisfatórios quando se analisa a resposta do sistema, embora a técnica proposta nesse trabalho apresente desempenho superior em termos de convergência se comparada com as demais técnicas.

**Palavras-chave:** Regulador Linear Quadrático. Busca e Otimização. Matrizes de Ponderação. Algoritmo de Busca Harmônica.

## ABSTRACT

Linear Quadratic Regulator (LQR) is an important modern control technique with excellent properties associated to robust stability, as it can be applied to complex control systems in order to ensure stability against small perturbations. However, the controller design presents some difficulty regarding the definition of weighting matrices  $Q$  and  $R$ , which are responsible for ensuring the design specifications, although they require a large search space. Thus, the application of a computational intelligence technique is necessary to perform the optimized search for the aforementioned matrices automatically. For this purpose, the Harmony Search (HS) algorithm has been applied to define the matrices for the LQR controller. HS is a metaheuristic algorithm inspired by musical improvisation as a tool to create new harmonies, which has been widely used by scientific community in recent years and can be applied to this problem. However, some parameters must be defined by empirical means to ensure good convergence. Within this context, this work proposes a novel HS Algorithm that ensures the automatic adjustment of parameters. By adopting the CH-47 helicopter and an inverted pendulum system, several tests involving search and simulation have been performed with three HS algorithms i.e. standard HS and the modified methods known as Improved Harmony Search (IHS) and Statistical Dispersion Harmony Search (DHS). The latter one can be seen as the main contribution of this work, which also compares the results obtained from the HS algorithms. It can be stated that all approaches present satisfactory results when analyzing the system response, although the one introduced in this work presents superior performance in terms of convergence if compared with the consolidated techniques.

**Keywords:** Linear Quadratic Regulator. Search and Optimization. Weighing matrices. Harmony Search Algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de Controle ótimo .....	25
Figura 2 – Sistema de controle ótimo com ação integral .....	26
Figura 3 – Fluxograma de busca das matrizes para o controle ótimo .....	27
Figura 4 – Comparação entre os processos de improvisação e otimização computacional .....	30
Figura 5 – Fluxograma com passos do Algoritmo de Busca Harmônica .....	32
Figura 6 – Exemplo da resposta temporal de um sistema de controle fictício, quando aplicado um degrau como referência .....	39
Figura 7 – Variação de <i>PAR</i> e <i>BW</i> de acordo com a geração .....	36
Figura 8 – Fluxograma do Algoritmo de Busca Harmônica proposto.....	42
Figura 9 – Helicoptero Chinook CH-47B em voo.....	43
Figura 10 – Resposta do CH-47 ao degrau - Busca Harmônica.....	50
Figura 11 – Gráfico de Convergência do HS com CH-47.....	51
Figura 12 – Resposta do CH-47 ao degrau - <i>Improved Harmony Search</i> .....	52
Figura 13 – Gráfico de convergência do IHS com CH-47 .....	53
Figura 14 – Resposta do CH-47 ao degrau - DHS .....	54
Figura 15 – Gráfico de convergência do DHS com CH-47.....	55
Figura 16 – Resposta do Pêndulo ao degrau - Busca Harmônica.....	58
Figura 17 – Gráfico de convergência do HS com o Pêndulo Invertido.....	59
Figura 18 – Resposta do Pêndulo Invertido ao degrau - IHS .....	60
Figura 19 – Gráfico de convergência do IHS com Pêndulo Invertido .....	61
Figura 20 – Resposta do Pêndulo Invertido ao degrau - DHS.....	62
Figura 21 – Gráfico de convergência do DHS com o Pêndulo Invertido.....	63

## LISTA DE ALGORITMOS

<b>Algoritmo 1</b> – Pseudocódigo do Algoritmo de Busca Harmônica .....	32
---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Polos do sistema CH-47 em malha aberta .....	44
Tabela 2 – Especificação dos parâmetros de saída desejada .....	45
Tabela 3 – Especificação dos parâmetros dos algoritmos .....	45
Tabela 4 – Polos do sistema Pêndulo Invertido em malha aberta .....	46
Tabela 5 – Especificação dos parâmetros de saída desejada .....	47
Tabela 6 – Especificação dos parâmetros dos algoritmos .....	47
Tabela 7 – Valores da simulação: CH-47 com HS .....	51
Tabela 8 – Valores da simulação: CH-47 com IHS .....	53
Tabela 9 – Valores da simulação: CH-47 com DHS .....	55
Tabela 10 – Valor médio do erro de convergência dos algoritmos .....	56
Tabela 11 – Valor médio do tempo de convergência dos algoritmos .....	56
Tabela 12 – Valor médio do número de improvisações .....	57
Tabela 13 – Valor médio do tempo de convergência dos algoritmos .....	57
Tabela 14 – Valores da simulação: Pêndulo Invertido com HS .....	59
Tabela 15 – Valores da simulação: Pêndulo com IHS .....	61
Tabela 16 – Valores da simulação: CH-47 com DHS .....	63
Tabela 17 – Valor Médio do Erro de Convergência dos Algoritmos .....	64
Tabela 18 – Valor Médio do Tempo de Convergência dos Algoritmos .....	64
Tabela 19 – Valor Médio do Número de Improvisações .....	65
Tabela 20 – Valor Médio do Tempo de Convergência dos Algoritmos .....	65

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DHS	Busca Harmônica com Dispersão Estatística
ESS	Erro de Estado Estacionário
GA	Algoritmo Genético ( <i>Genetic Algorithm</i> )
HM	Memória Harmônica (Harmony Memory)
HS	Busca Harmônica ( <i>Harmony Search Algorithm</i> )
IC	Inteligência Computacional
IHS	<i>Improved Harmony Search</i>
LQR	Regulador Linear Quadrático ( <i>Linear Quadratic Regulator</i> )
MP	Máximo Pico ( <i>Maximum Peak</i> )
NI	Número Máximo de Improvisações ( <i>Number of Improvisations</i> )
PSO	Otimização por Enxame de Partículas ( <i>Particle Swarm Optimization</i> )
SA	Recozimento Simulado ( <i>Simulated Annealing</i> )
TR	Tempo de Subida ( <i>Rise Time</i> )
TS	Tempo de Estabilização ( <i>stabilization time</i> )

## LISTA DE SÍMBOLOS

$HMS$	Tamanho da Memória Harmônica ( <i>Harmony Memory Size</i> )
$HMCR$	Taxa de Consideração da Memória Harmônica ( <i>Harmony Memory Consideration Rate</i> )
$PAR$	Taxa de Ajuste dos Valores ( <i>Pitch adjusting Rate</i> )
$BW$	Ajuste de Largura de Banda ( <i>Band Width</i> )
$x$	Vetor de Estados
$u$	Vetor de Controle
$Q$	Matriz de ponderação associada ao vetor de estado
$R$	Matriz de ponderação associada ao vetor de controle
$P$	Solução da equação algébrica de Riccati
$K$	Matriz de ganho de realimentação de estado
$QR$	Vetor de harmonia do LQR
$f(QR)$	Função Objetivo associada ao vetor de harmonia do LQR
$\vec{x}$	Vetor de harmonia
$X$	Conjunto de possíveis valores para cada elemento de $\vec{x}$
$w$	Parâmetro que define quais termos de $f(QR)$ serão considerados
$N$	Número de variáveis de decisão
$\mu$	Média aritmética
$var / \sigma^2$	Medida de variância
$std / \sigma$	Medida de desvio padrão
$MH$	Melhor Harmonia de cada improvisação
$\theta$	Ângulo de atitude
$Vz$	Velocidade vertical
$\Theta$	Ângulo do pêndulo
$s$	Posição do carrinho do pêndulo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
1.1	Revisão bibliográfica sobre a determinação das matrizes do LQR .....	17
1.2	Motivação .....	20
1.3	Objetivos.....	20
1.4	Publicações originadas deste trabalho.....	21
1.5	Organização da dissertação .....	21
<b>2</b>	<b>O REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO</b> .....	23
2.1	O controlador LQR .....	23
2.2	O Regulador Linear Quadrático com Ação Integral.....	25
2.3	Determinação das matrizes $Q$ e $R$ .....	27
2.3.1	<i>Método de Bryson</i> .....	28
2.4	Conclusão .....	28
<b>3</b>	<b>O ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA</b> .....	30
3.1	O Algoritmo de Busca Harmônica .....	30
3.2	A variação <i>Improved Harmony Search</i> .....	35
3.3	Conclusão .....	36
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DO LQR POR BUSCA HARMÔNICA</b> .....	38
4.1	Codificação do vetor de harmonia .....	38
4.2	Determinação da função objetivo .....	38
4.3	Modelo proposto de ajuste automático de parâmetros .....	40
4.4	Metodologia para os testes.....	43
4.4.1	<i>Planta do Helicóptero CH-47</i> .....	43
4.4.1.1	<i>Configurações das simulações</i> .....	44
4.4.2	<i>Planta do Pêndulo Invertido</i> .....	45
4.4.2.1	<i>Configurações das simulações</i> .....	46

4.5	Metodologia de comparação dos resultados simulados .....	47
5	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO .....	49
5.1	Simulações com o sistema CH-47 .....	49
5.1.1	<i>Algoritmo de Busca Harmônica padrão – HS</i> .....	49
5.1.2	<i>Improved Harmony Search – IHS</i> .....	51
5.1.3	<i>Busca Harmônica com Dispersão Estatística – DHS</i> .....	53
5.2	Simulações com o sistema do Pêndulo Invertido .....	57
5.2.1	<i>Algoritmo de Busca Harmônica Padrão– HS</i> .....	58
5.2.2	<i>Improved Harmony Search– IHS</i> .....	60
5.2.3	<i>Busca Harmônica com Dispersão Estatística – DHS</i> .....	62
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS .....	66
6.1	Sugestões de Pesquisas Futuras.....	67
	REFERÊNCIAS .....	69
	APÊNDICE A - VALORES DA 1º SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O HELICÓPTERO CHINOOK CH-47 .....	73
	APÊNDICE B - VALORES DA 2º SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O HELICÓPTERO CHINOOK CH-47 .....	74
	APÊNDICE C - VALORES DA 1º SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O PÊNDULO INVERTIDO.....	75
	APÊNDICE D - VALORES DA 2º SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O PÊNDULO INVERTIDO.....	76

## 1 INTRODUÇÃO

É notório que equipamentos que realizam algum tipo de processo automático fazem parte do dia-a-dia de quase todas as pessoas, pois o mundo atual requer agilidade e comodidade na realização de atividades diárias, ainda mais com o ritmo acelerado do desenvolvimento tecnológico. Operações frequentes como o uso do micro-ondas, do ar-condicionado, a lavagem de roupas em lavadoras automáticas e a utilização do elevador ou de escadas rolantes, são exemplos de que processos automáticos estão envolvidos de maneira direta ou indireta na vida das pessoas.

Sistemas que vão desde um motor de corrente contínua até uma complexa aeronave, não necessariamente limitados a equipamentos tecnológicos, que possuem restrições operacionais ou que devem garantir algum comportamento característico mediante a um determinado estímulo, necessitam de mecanismos que tornem possíveis as operações automatizadas, e nesse contexto, a teoria do controle se faz presente. Os sistemas dinâmicos carecem de um controlador que manipule variáveis de entrada a fim de obter uma saída desejada ao longo do tempo, como no caso de um ar-condicionado, por exemplo, que mantém uma determinada temperatura de uma sala (saída do sistema) através de sensores que coletam (entrada do sistema) temperatura do local (AL-GHASEM; USSALEH, 2012).

A teoria de controle possibilitou a criação de uma diversidade de controladores, aplicados aos mais diversos problemas que podem ser classificados de acordo com duas vertentes, das quais se destacam: o Controle Clássico e o Controle Ótimo. No Controle Clássico são conhecidos alguns controladores como o Proporcional, controlador mais simples, o Proporcional-Derivativo, Proporcional-Integral, e o controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), que combina vantagens das técnicas anteriores e ainda é uma estrutura de sucesso.

As técnicas do Controle Ótimo surgiram para atender uma demanda de sistemas mais complexos que vieram com o avanço tecnológico. Um controlador que se destaca nessa vertente é o Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator - LQR*), uma importante técnica do controle ótimo que possui um papel primordial na teoria do controle moderno, popularizada nas referências (KALMAN, 1960a) e (KALMAN, 1960b). O LQR dispõe de ótimas propriedades de estabilidade e garante um sistema otimizado com o menor gasto possível de energia (MACIEJOWSKI, 1989).

São vastas e constantes as pesquisas envolvendo o controlador LQR, como mostram as seguintes referências, as quais apresentam aplicações no controle dos mais

diversos tipos de sistemas: (KAUFMAN; BERRY, 1973), (SWORDER, 1977), (KAPASOURIS, 1984), (PFEIL; DE LOS REYES; BOBULA, 1984), (FU, 1987), (GROOM; SCHAFFNER, 1990), (SHIEH; SUNKEL; WANG, 1990), (KOMANDURI; ARANTES JR; MARTINS-FILHO, 2010), (AHMAD; TOKHI, 2011), (GONG *et al.*, 2012), (WEI; YAO, 2015) e (MAZUMDAR *et al.*, 2015).

Embora o LQR seja bastante utilizado, seu desempenho depende de dois componentes fundamentais, suas matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , as quais permitem que o controlador atenda as especificações do projeto de controle. Entretanto, trata-se de valores com um grande espaço de busca, e definir essas matrizes pode se tornar um desafio tedioso e extremamente difícil (GBAUPE, 1972; STEIN, 1978; MEDANIC; THARP; PERKINS, 1988; LUO; LAN, 1995), podendo comprometer os prazos definidos no projeto por conta da paralisia gerada.

Visando minimizar os percalços causados por essa problemática presente na determinação as matrizes de ponderação do LQR, encontram-se disponíveis na literatura uma gama de trabalhos utilizando meta-heurísticas, técnicas de Inteligência Computacional (IC) focadas na solução de problemas através de busca e otimização. A seção 1.1 da presente dissertação apresenta uma revisão sobre diversas técnicas já aplicadas à determinação das matrizes  $Q$  e  $R$ .

Diversas técnicas de IC vêm sendo desenvolvidas atualmente e uma meta-heurística que vem ganhando bastante destaque nos últimos anos é o Algoritmo de Busca Harmônica, do inglês, *Harmony Search* (HS) *Algorithm*, proposto por Geem *et al.* (2001), baseado em conceitos de improvisação musical. O HS trabalha otimizando processos de busca o que o torna um possível potencial para a resolução do problema envolvendo as matrizes do LQR.

## **1.1 Revisão bibliográfica sobre a determinação das matrizes do LQR**

Esta seção tem o objetivo de evidenciar o estado da arte do tema em estudo, através de uma revisão bibliográfica direcionada às técnicas que vêm sendo utilizadas para a determinação das matrizes de ponderação do Regulador Linear Quadrático.

A literatura apresenta vários trabalhos que envolvem a determinação das matrizes  $Q$  e  $R$  de ponderação do Regulador Linear Quadrático, como a metodologia clássica do quadrado do inverso, o Método de Bryson (BRYSON; HO, 1975; JOHNSON; GRIMBLE, 1987). Devido à complexidade dos sistemas e ao tempo gasto para implementação de tal

método, algumas meta-heurísticas passaram a ser aplicadas na otimização da busca das matrizes de ponderação do controlador LQR.

O Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm* - GA) é uma técnica clássica de busca e otimização proposta por Holland (1975) e popularizada por seu aluno Goldberg (1989) baseada na teoria da evolução das espécies. Na dissertação de mestrado de Hull (1993) foi apresentada a utilização dessa meta-heurística na otimização do processo de controle automático do ângulo de arfagem de um míssil através do controlador LQR. Neste trabalho, o GA foi aplicado na maximização do índice de desempenho do Regulador Linear Quadrático para otimização de tal processo de controle, entretanto, as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  foram pré-definidas e mantidas estáticas no algoritmo inteligente.

No estudo realizado por Davies e Clarke (1994), o Algoritmo Genético foi utilizado na determinação das matrizes de ponderação do Regulador Linear Quadrático. Neste trabalho, foi utilizada a técnica de alocação de autoestruturas via LQR, aplicada no problema de controle de voo de uma aeronave. Foi utilizado o método *Nelder–Mead* (NELDER; MEAD, 1965) e o GA como comparativo para minimização de uma determinada função de custo. O método *Nelder–Mead* apresentou uma solução em 6 horas e o GA convergiu em pouco mais de 3 horas, ambos apresentado resultados próximos. No mesmo trabalho, foi apresentado um modelo de paralelização do GA a fim minimizar o tempo de convergência, e como resultado, os modelos apresentam convergência entre 20 e 50 minutos.

Ha e Kim (1997) apresentaram em seu estudo a aplicação do LQR no controle da Atitude de um Pêndulo Invertido. Citado como um problema não trivial, a determinação das matrizes de ponderação do LQR através do método por Tentativa e Erro foi substituído pela utilização do Algoritmo Genético. Nesse trabalho foi apresentado o modelo do cromossomo como um vetor composto pelas diagonais principais das matrizes  $Q$  e  $R$  e a função objetivo foi o índice de desempenho do controlador.

Uma comparação de performance entre o método de Tentativa e Erro, o método de de Bryson e o GA para busca das matrizes  $Q$  e  $R$  é apresentada por Robandi *et al.* (2001), onde pretendeu-se controlar a tensão e a frequência obtida por um gerador numa planta de sistema elétrico de potência multimáquinas. Foi utilizado no GA o índice de desempenho do LQR como função objetivo a ser minimizada. O GA obteve melhores resultados em comparação aos outros dois métodos, sendo que o GA reduziu em 30% o tempo de cálculo em relação ao método de Bryson.

Garcia e Lopez (2003) afirmaram em seu trabalho que até então, os controladores eram projetados com uma visão apenas para especificações de robustez, e não para

especificações resposta temporal. Eles propuseram a utilização de parâmetros de resposta transitória e o erro em regime estacionário na função objetivo do GA e o aplicaram na otimização das matrizes de ponderação do LQG.

O Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* – SA) é um algoritmo estocástico de otimização baseado no recozimento de sólidos (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983). O SA foi aplicado por Luo e Tang (2005) no projeto de controle ótimo Linear Quadrático (LQ) de uma nave espacial, onde considerou-se a minimização de duas funções de custo que envolviam as matrizes  $Q$  e  $R$ .

Foi proposto por Priyadi *et al.* (2007), a aplicação da meta-heurística Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO), técnica de otimização estocástica inspirada no comportamento coletivo como voo de pássaros e abelhas (KENNEDY; EBERHART, 1995), na busca das matrizes de ponderação do LQR. No trabalho em questão, foi realizada uma comparação de PSO e uma variante do mesmo chamada EPSO, a qual apresentou resultados mais significativos.

Solihin, Wahyudi e Akmeliawati (2009) aplicaram o PSO na otimização do LQR, no controle de um manipulador experimental com elo flexível. Os autores deduziram uma função objetivo baseada em valores angulares da planta em estudo.

Considerando a localização dos polos em malha fechada, velocidade da resposta e nível de esforço no controle, Ghoreishi, Nekoui e Basiri (2011) propuseram em seu trabalho um modelo para otimização do LQR considerando esses fatores. Foram utilizados os métodos GA, PSO, Evolução Diferencial e o Algoritmo de Competição de Impérios (*Imperialist Competitive Algorithm* - ICA) através da minimização de uma função objetivo formulada com base nos critérios já citados. Segundo os autores, o ICA obteve melhor performance, em comparação com as demais técnicas aplicadas.

O Algoritmo de Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1997) foi melhorado e aplicado por Liouane *et al.* (2012), na determinação das matrizes  $Q$  e  $R$ , através da minimização da Integral do Erro Absoluto.

Selamat e Bilong (2013) aplicaram o PSO para o mesmo propósito, entretanto, utilizaram como função objetivo a Integral do Erro Quadrático. Uma variação do PSO convencional proposta por Sun *et al.* (2004), denominada *Quantum Particle Swarm Optimization*, foi aplicada nesse problema por Hassani e Lee (2014), com uma estrutura de otimização que envolve o índice de desempenho quadrático entre outros parâmetros, tais como *overshoot*, tempo de estabilização e erro em regime estacionário.

## 1.2 Motivação

O desenvolvimento deste trabalho foi fortemente estimulado pela dificuldade de se buscar as matrizes  $Q$  e  $R$  do projeto do controlador LQR por meios tradicionais, que atendam aos critérios do projeto, tais como de estabilidade e de respostas em regime transitório e estacionário.

Com base na relevante ascensão que o Algoritmo de Busca Harmônica vem ganhando nos últimos anos e pela forma como essa meta-heurística vem se sobressaindo entre outras técnicas de otimização em relação a tempo de busca e convergência, motiva-se a aplicação do HS na busca automática e inteligente das matrizes de ponderação, visando uma alternativa eficaz aos métodos de tentativa e erro.

Devido ao fato de que os parâmetros do algoritmo são valores fixos, sua capacidade de uma convergência plena pode ser comprometida. Visando um maior poder de otimização, mostra-se relevante um estudo buscando propor melhorias para o HS.

## 1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor um método baseado no Algoritmo de Busca Harmônica que defina de forma otimizada as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  necessárias no projeto do Regulador Linear Quadrático, onde o controlador garanta as questões necessárias de estabilidade e resposta temporal à determinadas entradas.

A fim de alcançar o propósito definido, alguns objetivos específicos são necessários, tais como:

- 1) Definir uma função que avalie a resposta obtida através das matrizes  $Q$  e  $R$  aplicadas ao LQR;
- 2) Implementar o Algoritmo de Busca Harmônica, com base na busca das matrizes  $Q$  e  $R$ ;
- 3) Modelar uma variação da Busca Harmônica que apresente uma mecânica de autoajuste para parâmetros com valores estáticos.
- 4) Selecionar plantas de sistemas dinâmicos para utilizar como instrumento de testes.
- 5) Aplicar e comparar o método de Busca Harmônica e sua variação proposta na busca das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ .
- 6) Disseminar o conhecimento desenvolvido através de artigos científicos, apresentando todos os resultados.

#### 1.4 Publicações originadas deste trabalho

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Busca Harmônica com ajuste adaptativo de parâmetro por meio de Algoritmo Genético aplicada na otimização do projeto LQR.** Anais... In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INTELIGENCIA COMPUTACIONAL – CBIC. Curitiba - PR: ABRICOM, 13 out. 2015<sup>a</sup>

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Aplicação do algoritmo de busca harmônica no projeto de um regulador linear quadrático com ação integral.** Anais... In: XII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. Natal-RN: 25 out. 2015b

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Um modelo híbrido de busca harmônica e otimização por enxame de partículas aplicado no projeto do controlador LQR.** Anais... In: XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Vitória – ES: 3 out. 2016

#### 1.5 Organização da dissertação

Nesta dissertação, o Capítulo 2 expõe uma pequena introdução sobre o Regulador Linear Quadrático, apresentando algumas características básicas do controlador. Em seguida, é apresentada a estrutura do projeto com esse controlador e a definição do índice de desempenho quadrático, sob o ponto de vista do controle ótimo. Neste capítulo também é mostrada a metodologia LQR com ação integral, e finalmente é comentado sobre a definição das matrizes por métodos empíricos.

No Capítulo 3 é realizada uma introdução às meta-heurísticas mostrando algumas características importantes. Na sequência, é apresentada o Algoritmo de Busca Harmônica, explicando a diferença entre o processo de improvisação de uma harmonia e o processo de otimização. É mostrado um detalhamento de cada passo do algoritmo em sua versão padrão, destacando cada parâmetro e apresentando sua função.

No Capítulo 4 é descrita toda a metodologia utilizada neste trabalho. Primeiramente é apresentado como foi definido o modelo para o vetor de harmonia e a função objetivo utilizada pelos algoritmos. Em seguida são apresentadas as metodologias para ajuste dos parâmetros, uma delas a técnica proposta neste trabalho. Neste capítulo também é apresentada as duas plantas utilizadas como teste para os algoritmos, assim como as especificações de controle e configuração dos algoritmos. Finalmente, é mostrada a

metodologia para comparação dos resultados.

O desempenho dos algoritmos de Busca Harmônica e o comportamento simulado dos sistemas CH-47 e Pêndulo Invertido perante o controle otimizado é discutido no Capítulo 5. São apresentados neste capítulo os resultados dos algoritmos submetidos a sucessivas execuções a fim de medir questões de performance e convergência.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões tiradas a partir dos resultados obtidos com as simulações e são discutidos alguns pontos referentes a pesquisas futuras.

## 2 O REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Neste capítulo será apresentado o controlador LQR abordando suas principais características, assim como alguns detalhes referentes ao projeto. Também neste capítulo será mostrado o LQR com a adição de um fator integral, e finalmente, será apresentado alguns métodos empíricos para a definição das matrizes de ponderação.

### 2.1 O controlador LQR

O LQR é uma técnica de controle ótimo no domínio do tempo que possui excelentes características de desempenho robusto, é relativamente fácil de implementar e garante a estabilidade do sistema frente a pequenas perturbações. Uma importante propriedade é a sua capacidade de manter um compromisso entre a velocidade de resposta do sistema e amplitude do sinal de controle, por meio da determinação dos índices de desempenho relativos a essas variáveis. Ele garante robustez a uma margem de fase ao  $\infty$  e margem de ganho à  $60^\circ$  (MACIEJOWSKI, 1989; ANDERSON; MOORE, 1990).

Considere abaixo o sistema linear invariante no tempo, completamente controlável e com as condições iniciais igual a zero:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

sendo:

$x(t)$  = vetor de estado  $n$ -dimensional  
 $u(t)$  = vetor de controle  $m$ -dimensional  
 $y(t)$  = vetor de saída  $l$ -dimensional  
 $A$  = matriz de estado ( $n \times n$ )  
 $B$  = matriz de entrada ( $n \times m$ )  
 $C$  = matriz de saída ( $l \times n$ ).

A solução ótima desse controlador é obtida através vetor de controle ótimo  $u(t)$  que minimiza a função de custo (2), representada pelo índice de desempenho quadrático  $J$ , que equilibra a eficácia e rapidez da regulação com um melhor uso do vetor de controle:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt\tag{2}$$

sendo  $Q$  uma matriz semidefinida positiva,  $Q \geq 0$  e  $R$ , uma matriz definida positiva,  $R > 0$ . Com os limites de integração definidos em (2), a lei de controle ótimo  $u(t)$  representa explicitamente uma função do vetor de estados  $x(t)$ , permitindo a implementação do controle ótimo de um controlador de malha fechada por realimentação de estados (PINTO, 2007).

Considerando as especificações de controlabilidade já mencionadas, o LQR permite determinar uma matriz  $K$  de ganho de realimentação através da lei de controle:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

sendo  $K$  uma matriz  $m \times n$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n-1} & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,n-1} & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,2} & \cdots & k_{m-1,n-1} & k_{m-1,n} \\ k_{m,1} & k_{m,2} & \cdots & k_{m,n-1} & k_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dessa maneira, o projeto do controle ótimo se reduz a determinação dos elementos da matriz ótima de realimentação de estado  $K$ , para qualquer estado inicial. A matriz  $K$  pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (5)$$

tal que  $P$  é uma matriz simétrica e definida positiva que pode ser determinada a partir da resolução da Equação Algébrica de Riccati (EAR):

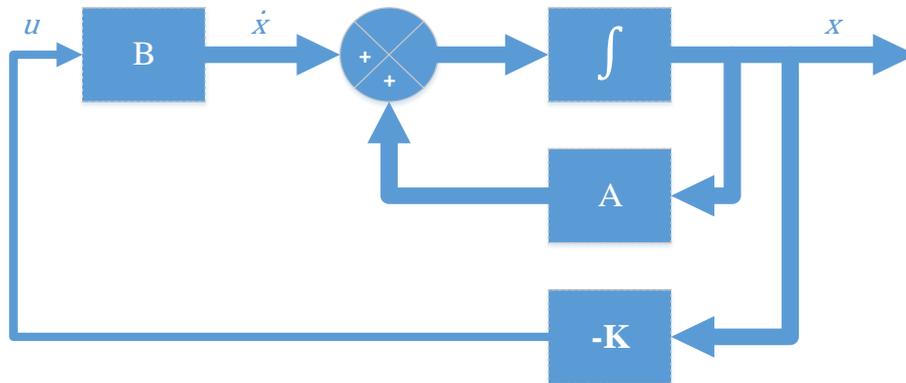
$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6)$$

Em vista disso, a solução do LQR, ou seja, o cálculo da matriz de ganhos do controlador pode ser encontrado através de (5).

A Figura 1 apresenta o diagrama de blocos com a configuração ótima de malha fechada com realimentação de estado.

Substituindo-se (3) em (1), é possível observar o efeito da lei de controle no sistema:

Figura 1 – Sistema de Controle ótimo



Fonte: Imagem do Autor.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BKx(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (7)$$

então:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (8)$$

A lei de controle ótimo deve tornar o sistema de malha fechada estável, isto é, a parte real dos autovalores passará a ser negativa, indicando que esses autovalores pertencerão ao semiplano esquerdo, do plano complexo.

## 2.2 O Regulador Linear Quadrático com Ação Integral

Para obtenção de um rastreamento assintótico com erro em regime estacionário nulo, é inserido um integrador na malha de controle. Considerando o sistema linear invariante no tempo em (1), uma nova variável de estado  $\xi(t)$  será adicionada ao sistema e definida como ação integral de erro de saída, dada por:

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t), \quad (9)$$

tal que  $r(t)$  é a referência à qual o sistema é solicitado.

Considerando que o  $r(t)$  seja o degrau unitário, é possível determinar a resposta do sistema projetado para a uma solicitação dessa referência através da seguinte equação de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y(t) &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

em que:

$$u = -Kx + k_i \xi \quad (11)$$

tal que  $K$  é o ganho de realimentação e  $k_i$  é a constante integral definida como:

$$K_r = [K \quad \vdots \quad -k_i] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad -k_i] \quad (12)$$

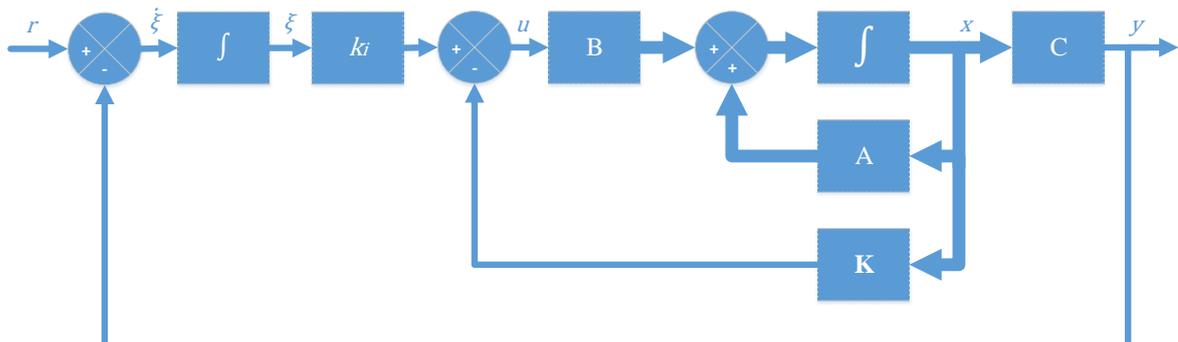
sendo  $K_r$ , o ganho obtido com as matrizes aumentadas.

Assim, (10) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y(t) &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

A Figura 2 ilustra o diagrama de blocos referente à configuração ótima de malha fechada com ação integral.

Figura 2 – Sistema de controle ótimo com ação integral

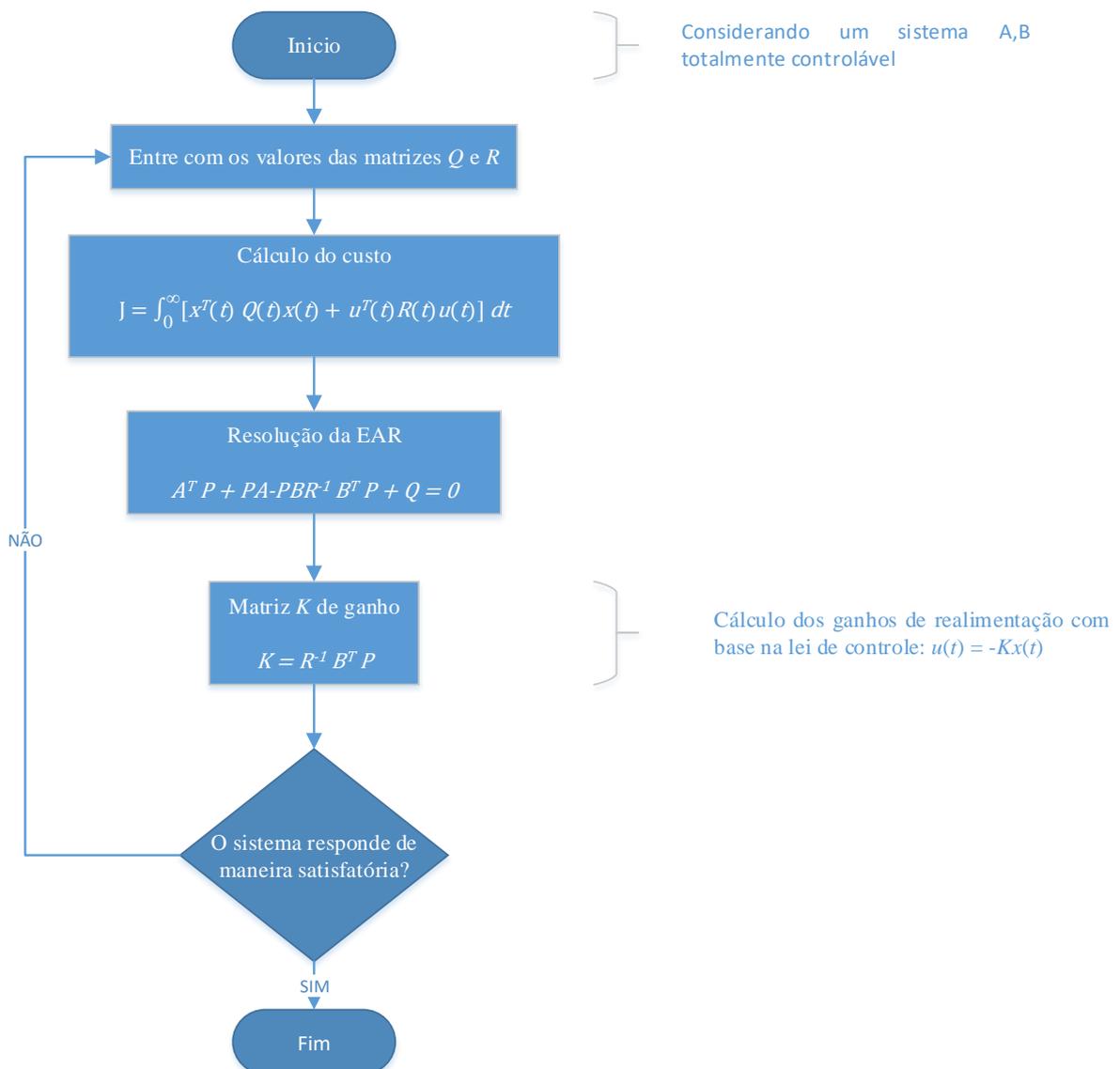


Fonte: Imagem do Autor.

### 2.3 Determinação das matrizes $Q$ e $R$

Uma das maiores dificuldades no projeto do LQR é a escolha das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Ainda não existe um método sistemático para a definição dessas matrizes e a maneira mais comum é através de Tentativa e Erro. A Figura 3 mostra um fluxograma com os passos para projetar o controlador através desse método incerto.

Figura 3 – Fluxograma de busca das matrizes para o controle ótimo



Fonte: Imagem do Autor.

Como mostra a Figura 3, esse método consiste, normalmente na atribuição de valores às matrizes  $Q$  e  $R$ , observar a simulação com os valores definidos e posteriormente,

realizar ajustes nos valores até obter uma saída com o custo desejado. Embora seja uma maneira, muito simples, quanto maior o número de variáveis de estado o sistema apresentar, mais complexo será o ajuste por Tentativa e Erro, conseqüentemente, é um método que consome muito tempo e sem garantia de sucesso (ROBANDI *et al.*, 2001; POODEH *et al.*, 2007).

Uma outra metodologia empírica vastamente utilizada na definição das matrizes de ponderação é o Método de Bryson (BRYSON; HO, 1975).

### 2.3.1 Método de Bryson

O Método de Bryson, também conhecido como quadrado do inverso tem como ideia principal normalizar as saídas e o termo de controle dentro da função de desempenho quadrático. Nesse método, as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  são definidas como:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q_n \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_m \end{bmatrix}, \quad (14)$$

sendo  $n$  o número de estados e  $m$  o número de atuadores do sistema de controle.

O desempenho desejado do sistema é obtido através do ajuste dos elementos das matrizes de ponderação conforme:

$$Q_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \quad R_i = \frac{1}{(\Delta u_i)^2} \quad (15)$$

Os valores de  $\Delta u_i$  são baseados no máximo esforço de controle ou valor máximo de operação dos atuadores. Já os valores de  $\Delta x_i$  são baseados no intervalo de operação dos estados (PINTO, 2007).

## 2.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o controlador Regulador Linear Quadrático, assim como a metodologia para o projeto do mesmo. Foi listado os passos para calcular dos ganhos de realimentação de estado, solução do LQR. Posteriormente, foi comentado sobre as metodologias empíricas para a determinação das matrizes de ponderação, citado o método de

Bryson, como um dos ainda, bastante utilizados.

Uma vantagem que pode ser destacada é a simplicidade na implementação. Os passos são bem definidos, entretanto a ponderação das matrizes  $Q$  e  $R$  é de fato um problema. Os métodos apresentados não garantem uma solução ótima para as matrizes, sendo a busca uma tarefa difícil que pode demandar muito tempo e ainda não gerar resultados significativos. Uma possível alternativa é a utilização do Algoritmo de Busca Harmônica (capítulo 3) para a determinação dessas matrizes.

### 3 O ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA

As meta-heurísticas são métodos estocásticos de busca de alto nível que visam encontrar boas soluções para problemas de otimização através de buscas locais com randomização, ou seja, estratégias que mudam uma busca local para uma busca com escala global (YANG, 2010). Um desses métodos computacionais que tem ganhado grande destaque nos últimos anos é o Algoritmo de Busca Harmônica, o qual será apresentado e bem detalhado no presente capítulo.

#### 3.1 Busca Harmônica

A Busca Harmônica (*Harmony Search Algorithm* - HS) proposta inicialmente por Geem *et al.* (2001) é uma meta-heurística relativamente nova. É uma técnica de otimização baseada na busca de uma harmonia mais agradável, por um conjunto musical, através dos processos de improvisação e memorização. Uma analogia entre o processo de improvisação musical e um problema de otimização pode ser observada através da Figura 4.

Figura 4 – Comparação entre os processos de improvisação e otimização computacional



Fonte: Imagem do Autor.

O trio de Jazz ilustrado na Figura 4 é representado por um saxofonista, um

contrabaixista e um violonista, os quais correspondem às variáveis de decisão do problema ( $x_1, x_2, \dots$ ). As notas que podem ser tocadas nos instrumentos representam o intervalo de valores de cada variável de decisão pode apresentar. As combinações das notas, ou seja, a harmonia gerada em determinado momento representa uma possível solução para o problema, por exemplo: o saxofonista pode tocar as notas {Dó, Ré, Mi}, o contrabaixista pode tocar as notas {Mi, Fá, Sol} e o violonista pode tocar {Sol, Lá, Si} e uma combinação entre os instrumentos poderia gerar uma harmonia {Dó, Mi, Sol}, por exemplo.

O ato do público de apreciar cada harmonia gerada (esteticamente agradável aos ouvidos ou não) representa a função objetivo. A qualidade da harmonia aumenta a cada ensaio até uma harmonia perfeita, o que corresponderia aos ciclos de busca até atingir o critério de parada.

Partindo da inicialização dos parâmetros, como pode ser observado na Figura 5, o algoritmo HS visa gerar harmonias dentro de um determinado espaço de busca. Conforme Geem *et al.* (2001) e Mahdavi *et al.* (2007), o algoritmo HS pode ser detalhado através do pseudocódigo apresentado no Algoritmo 1.

Uma harmonia (16) na Busca Harmônica corresponde a um vetor numérico que representa a uma possível solução do problema. As harmonias são armazenadas numa Memória Harmônica e avaliadas através de uma função de avaliação (*fitness*) que dá uma nota para cada possível solução. É com base na função de avaliação (ou função objetivo) que o algoritmo atuará num processo de minimização ou maximização.

$$\begin{aligned} \vec{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_N] \\ \vec{x} &\in X_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{16}$$

sendo  $N$  é o número de variáveis de decisão (instrumentos musicais),  $X_j$  é o conjunto dos possíveis valores para cada elemento do vetor harmonia  $\vec{x}$ .

O algoritmo trabalha através de uma busca estocástica aleatória, baseada em dois parâmetros, que equilibram a busca global e a busca local no espaço de busca. Por meio dessas buscas, a cada iteração do algoritmo é gerada uma nova harmonia, que compete uma posição dentro da Memória Harmônica.

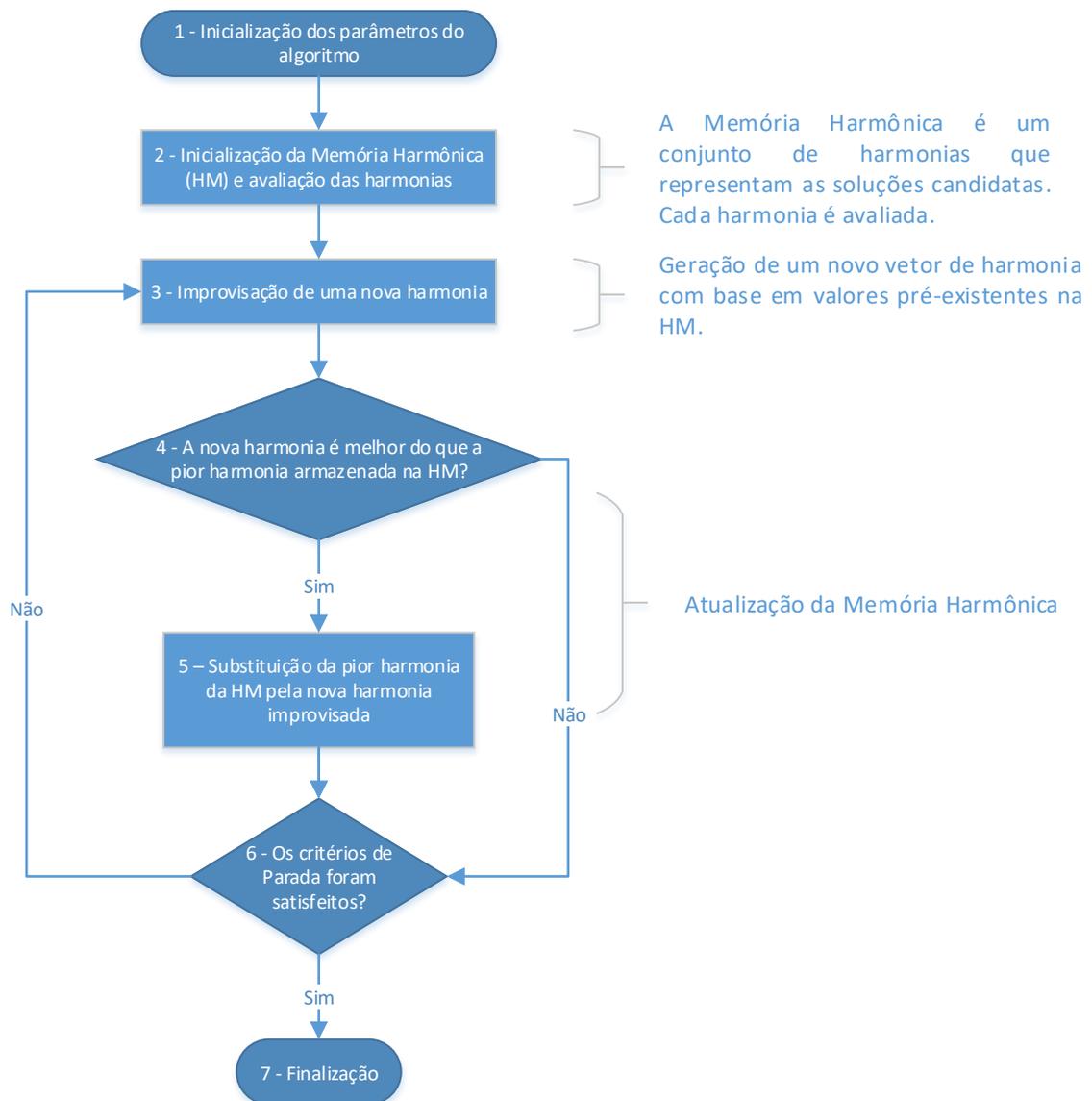
Ao iniciar o HS, para cada problema, uma função objetivo deve ser definida a fim de ser otimizada (17). Em sua essência, o HS foi desenvolvido com o intuito de resolver problemas de minimização (GEEM; KIM; LOGANATHAN, 2001), ou seja, quanto menor o

valor da função objetivo, melhor será a qualidade da possível solução. A função objetivo é definida por:

$$\min | \max(f(\vec{x})) \quad (17)$$

em que  $f(\vec{x})$  é a função objetivo do problema e  $\vec{x}$  é um vetor harmonia.

Figura 5 – Fluxograma com passos do Algoritmo de Busca Harmônica



Fonte: Imagem do Autor

O Algoritmo HS possui alguns parâmetros importantes que definem a maneira como as harmonias são otimizadas. Como primeiro passo no algoritmo, deve-se inicializar esses parâmetros que são o tamanho da memória harmônica (*Harmony Memory Size – HMS*) que

corresponde ao número de vetores de harmonias permitido; taxa de consideração da memória harmônica (*Harmony Memory Consideration Rate – HMCR*) que é a probabilidade de escolher valores de uma harmonia existente, no ato da improvisação; taxa de ajuste dos valores (*Pitch Adjustment Rate – PAR*) que representa uma probabilidade da harmonia sofrer uma pequena alteração no ato da improvisação; largura de banda (*BandWidth – BW*) correspondente ao valor que provê a alteração na harmonia e por fim, o número máximo de improvisações (*Number of Improvisations – NI*).

---

**Algoritmo 1:** Pseudocódigo do Algoritmo de Busca Harmônica

---

```

1: Inicialização dos Parâmetros: HMS, HMCR, PAR, NI, BW.
2: Início
3: Função Objetivo  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 
4: Inicialização da Memória Harmônica  $x^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, HMS$ 
5: Avalia cada Harmonia na HM:  $f(\vec{x})$ 
6: ciclo  $\leftarrow 1$ 
7: Enquanto ciclo < NI Faça
8:   Para j  $\leftarrow 1$  até N Faça
9:     Se  $\text{gera\_aleatório}() \leq HMCR$  Então {Taxa de Consideração da Memória}
10:       $x_j' \leftarrow x_j^i$ , com  $i \in [1, HMS]$  {escolhido aleatoriamente}
11:      Se  $\text{gera\_aleatório}() \leq PAR$  Então {Taxa de Ajuste dos Valores}
12:         $x_j' \leftarrow x_j' \pm u(-1,1) \times BW$ 
13:      Fim Se
14:      Senão {Seleção Aleatória}
15:        Gera  $x_j'$  aleatoriamente
16:      Fim Se
17:    Fim Para
18:    Avalia a nova Harmonia gerada:  $f(x')$ 
19:    Se  $f(x')$  é melhor que a pior Harmonia da HM Então
20:      Atualiza a HM
21:    Fim Se
22:    ciclo  $\leftarrow$  ciclo + 1
23:    Verifica Critério de Parada
24: Fim Enquanto
25: Exibição dos resultados
26: Fim

```

---

Fonte: Adaptado de Geem *et al.* (2001) e Mahdavi *et al.* (2007).

No segundo passo ocorre a inicialização da Memória Harmônica (HM). A HM (18) é uma matriz que contém um número HMS de vetores de harmonias. A HM é inicializada através de harmonias geradas randomicamente por uma distribuição uniforme. Após a inicialização da HM, cada vetor de harmonia é avaliado individualmente por meio da função objetivo do problema. Dependendo do problema, o algoritmo poderá correr no sentido

de minimizar ou maximizar o valor dessa função.

$$HM = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_{N-1}^1 & x_N^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{N-1}^2 & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{HMS-1} & x_2^{HMS-1} & \cdots & x_{N-1}^{HMS-1} & x_N^{HMS-1} \\ x_1^{HMS} & x_2^{HMS} & \cdots & x_{N-1}^{HMS} & x_N^{HMS} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow f(\vec{x}^1) \\ \Rightarrow f(\vec{x}^2) \\ \vdots \\ \Rightarrow f(\vec{x}^{HMS-1}) \\ \Rightarrow f(\vec{x}^{HMS}) \end{array} \quad (18)$$

No passo que segue, tem-se a improvisação de um novo vetor harmonia,  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , baseado nas possíveis soluções já existentes na HM. (linhas 8 a 17 do Algoritmo 1). No momento do improviso de uma possível solução, são considerados os parâmetros probabilísticos *HMCR* e *PAR* para a seleção de cada elemento da nova harmonia através de uma harmonia já existente na HM e para gerar uma pequena alteração em seu valor, respectivamente.

O algoritmo seleciona valores dentro da HM para compor a harmonia  $x'$ . Para cada posição do vetor, ele seleciona arbitrariamente um valor da HM na posição correspondente. De acordo com (19), verifica-se a probabilidade desse valor selecionado ser utilizado ou não. Caso positivo, o valor selecionado ocupa a posição correspondente, senão, um valor gerado aleatoriamente dentro da faixa de valores é atribuído a essa posição.

$$x'_j \in \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{HMS}\} \quad \text{com probabilidade } HMCR \quad (19)$$

Os valores selecionados estão sujeitos a sofrer pequenos ajustes de acordo com a taxa de ajuste de valores, representado pelo parâmetro *BW*, ou seja, cada valor selecionado possui uma probabilidade *PAR* de sofrer um ajuste. Nesse caso, o ajuste é dado por (20). Caso contrário, não ocorre ajuste no valor.

$$x'_j = x'_j \pm r \times BW \quad (20)$$

sendo que  $r$  é um valor obtido através de uma distribuição uniforme e  $BW$  é um valor arbitrário pré-definido na inicialização do algoritmo. O valor do parâmetro *BW* está relacionado à pequenas variações relacionadas aos instrumentos de corda que podem apresentar pequenas diferenças em relação a sonoridade. A combinação entre os parâmetros *HMCR* e *PAR* são responsáveis por manter dentro do ciclo de iterações, o balanceamento entre

busca global e a busca local.

Após improvisada, a nova harmonia é avaliada através da função objetivo. Se a nova harmonia for melhor do que a pior harmonia avaliada dentro da HM, a nova harmonia é adicionada à HM, e a pior harmonia é excluída.

No fim de cada iteração, é verificado o critério de parada. Se a melhor harmonia gerada satisfazer os preceitos do problema ou se o número de iterações chegar ao limite (definido através do parâmetro  $NI$ ), o algoritmo chega ao fim. Enquanto o critério de parada não for atendido, o HM retorna à fase de improvisação.

### 3.2 A variação *Improved Harmony Search*

Na implementação padrão do HS proposta por Geem, Kim e Loganathan (2001), para uma boa convergência com um tempo aceitável, os parâmetros  $HMCR$ ,  $PAR$  e  $BW$  foram determinados de maneira empírica e assumiram valores constantes durante todo ciclo de busca do algoritmo. Entretanto, Mahdavi, Fesanghary e Damangir (2007) propuseram em seu trabalho um modelo que garantiu que os parâmetros  $PAR$  e  $BW$  sofressem uma modificação dinamicamente, o *Improved Harmony Search* (IHS).

Esta variação realiza um ajuste nos parâmetros de acordo com o número de gerações do algoritmo, como podem ser observado em (21) e (22) e na Figura 6.

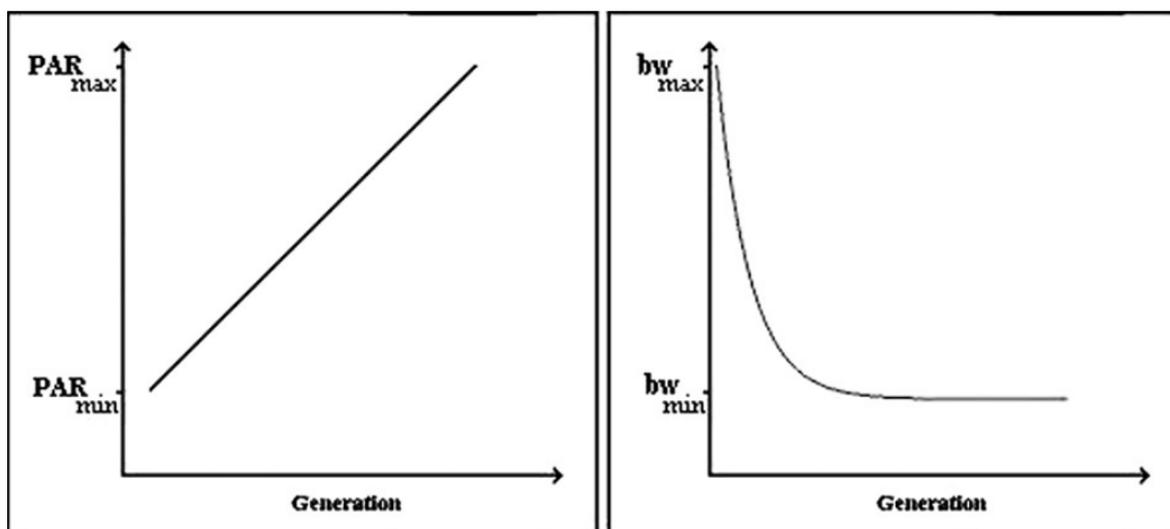
$$PAR(gn) = PAR_{min} + \frac{PAR_{max} - PAR_{min}}{NI} \times gn \quad (21)$$

e

$$BW(gn) = BW_{max} \exp(c \cdot gn), \quad c = \frac{\ln\left(\frac{BW_{min}}{BW_{max}}\right)}{NI} \quad (22)$$

tal que:

$PAR_{min}$	taxa mínima de ajuste;
$PAR_{max}$	taxa máxima de ajuste;
$BW_{min}$	largura de ajuste mínima;
$BW_{max}$	largura de ajuste máxima;
$gn$	número da geração atual.

Figura 6 – Variação de  $PAR$  e  $BW$  de acordo com a geração

Fonte: (MAHDAVI; FESANGHARY; DAMANGIR, 2007)

Assim como em (GEEM; KIM; LOGANATHAN, 2001), pôde ser observado que Mahdavi, Fesanghary e Damangir (2007) também utilizaram parâmetros que necessitam de uma definição prévia ( $PAR_{min}$ ,  $PAR_{max}$ ,  $BW_{min}$ ,  $BW_{max}$ ), ou seja, o IHS tornou dois parâmetros autoajustáveis, porém trouxe 4 novos parâmetros que necessitam de um ajuste a priori.

Com o passar dos anos, foram propostos em diversos trabalhos, novas variantes do Algoritmo de Busca Harmônica, buscando melhorias para a técnica, cada qual com suas particularidades, alavancando ainda mais a popularidade do HS (ALIA; MANDAVA, 2011).

### 3.3 Conclusão

Nesse capítulo foi apresentada a meta-heurística Busca Harmônica como uma técnica potencial para problemas de busca e otimização. Foi realizado um detalhamento sobre cada fase desse algoritmo, destacando pontos relacionados à utilização dos parâmetros assim como evidenciando detalhes de implementação. Neste mesmo capítulo foi apresentado o IHS, uma variação da Busca Harmônica Padrão, apresentando uma forma para ajuste dos parâmetros do HS padrão.

O HS pode ser aplicado nos mais diversos problemas que envolvam otimização, como mostra Manjarres *et al.* (2013), sendo fortemente aplicado na engenharia. Outro ponto importante é que, segundo Nascimento *et al.* (2015b), o HS é aplicável à problemas relacionados à busca das matrizes de ponderação do LQR.

É possível concluir que o HS é uma técnica de simples implementação e de fácil entendimento. Os parâmetros desse algoritmo possuem claramente papel fundamental no processo de busca e convergência, entretanto, necessitam de uma predefinição antes da execução, mesmo considerando o grande espaço de busca no conjunto numérico.

## 4 OTIMIZAÇÃO DO LQR POR BUSCA HARMÔNICA

O presente capítulo expõe alguns detalhes da implementação do Algoritmo de Busca Harmônica aplicado à determinação das matrizes  $Q$  e  $R$  do Regulador Linear Quadrático, como codificação do vetor de harmonia e função objetivo.

Neste capítulo também será apresentado duas metodologias para ajuste dos parâmetros do HS, incluindo a nova variação do HS proposta neste trabalho. Finalmente, é comentado com foram definidos os critérios para testar a eficácia dos algoritmos, assim como as especificações do projeto dos controladores e parâmetros dos algoritmos.

### 4.1 Codificação do vetor de harmonia

Como solução da otimização do controlador LQR, o algoritmo necessitava retornar os valores otimizados das matrizes de ponderação, dessa maneira, o vetor de harmonia foi composto com esses valores. Com base no tratamento das matrizes  $Q$  e  $R$  empregado por Bryson e Ho (1975), o qual consideram-se apenas os valores da diagonal principal das matrizes, como pode ser observado em (14), foi definido um modelo para compor as possíveis soluções do algoritmo. Os valores selecionados foram organizados da seguinte maneira:

$$QR = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_m] \quad (23)$$

Durante o ciclo de busca do HS, os elementos dos vetores  $QR$  são gerados através dos métodos de improvisação. No cálculo do LQR, o vetor é transformado nas matrizes diagonais  $Q$  e  $R$ , como em (14), para o processo avaliação. Após a avaliação da harmonia, as matrizes retornam à condição de vetor (23) para a realização das demais operações do HS.

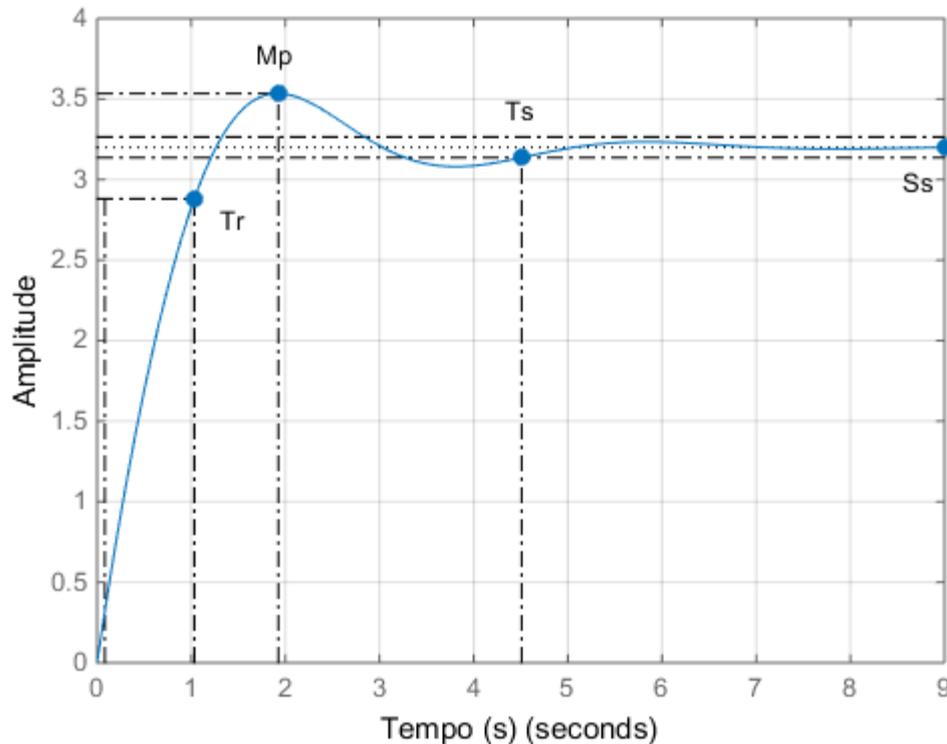
### 4.2 Determinação da função objetivo

O desempenho dos sistemas de controle pode ser avaliado, em geral, através da resposta temporal em regime transitório e em regime estacionário. Uma resposta temporal com referência ao degrau de um sistema fictício é apresentada na Figura 7.

As marcações na Figura 7 representam as constantes: Tempo de Subida (*Rise Time*

-  $T_s$ ), Máximo Pico ( $M_p$ ), Tempo de Acomodação (*Settling Time* -  $T_s$ ) e Estado Estacionário (*Steady State* -  $SS$ ), que estão relacionadas as características inerentes às respostas temporais dos sistemas de controle.

Figura 7 – Exemplo da resposta temporal de um sistema de controle fictício, quando aplicado um degrau como referência.



Fonte: Imagem do Autor

Com base nas funções utilizadas nas referências (GARCIA; LOPEZ, 2003), (DONHA; RISSO, 2004), (LOPEZ; GARCIA, 2006), (EL-GAMMAL; EL-SAMAHY, 2009), (SUJITJORN *et al.*, 2009), (SUJITJORN *et al.*, 2009), (RAJINIKANTH; LATHA, 2012), (GUPTA; TRIPATHI, 2014), (OHRI; KUMAR; CHINDA, 2014) e (KANDASAMY; VIJAYACHITRA; SARAVANAN, 2015), foi modelada uma função objetivo que atendesse de maneira geral qualquer planta. Todas essas referências têm em comum a utilização de alguns dos parâmetros  $M_p$ ,  $T_r$ ,  $T_s$  e o Erro de Estado Estacionário ( $Ess$ ), referente à diferença entre o valor da referência e o valor de  $SS$ .

Os trabalhos de Garcia e Lopez (2003), Lopez e Garcia (2006) e Nascimento *et al.* (2015a, 2015b, 2016) utilizaram nas funções objetivo, o erro gerado pela a diferença entre os valores dos parâmetros indicados na simulação e os valores esperados. A partir disso, foi formulada uma função para ser utilizada como função de avaliação para o Algoritmo de Busca

Harmônica aplicado na otimização do LQR.

$$f(QR') = w_1 |Mp' - Mp| + w_2 |Tr' - Tr| + w_3 |Ts' - Ts| + w_4 |Ess| \quad (24)$$

A Equação 24 apresenta a soma dos erros gerados entre os valores obtidos dos parâmetros de resposta temporal e os valores esperados, a cada iteração do algoritmo.

Foi atribuído ao parâmetro  $w_x$  ( $x = 1, 2, 3$  e  $4$ ) apenas os valores 0 ou 1, pois ele somente definiu quais termos foram, de fato, utilizados para a avaliação no algoritmo, ou seja, quando  $w = 0$ , ao multiplicar qualquer termo, o mesmo se anula. Em sistemas de múltiplas saídas, foram somadas as avaliações de cada saída, obtendo-se assim, um único valor que caracterizou a harmonia.

### 4.3 Modelo proposto de ajuste automático de parâmetros

Com base nas alternativas já desenvolvidas, buscou-se elaborar um novo modelo de adaptação dos parâmetros da Busca Harmônica, baseado nas medidas de dispersão estatísticas. O modelo proposto nomeado por Busca Harmônica com Dispersão Estatística (DHS) considerou um vetor harmonia próximo da resposta ideal obtida através da média  $\mu$ , (25), das melhores harmonias contidas na HM. A partir desse vetor e das harmonias improvisadas, foram obtidas as medidas de variância  $\sigma^2$  e desvio padrão  $\sigma$ , equações (26) e (27), o que modificaram os parâmetros  $PAR$  e  $BW$ , respectivamente.

O parâmetro  $HMCR$  foi definido como 0,9 devido aos diversos trabalhos que já mostraram a eficiência desse valor, como em (AL-BETAR *et al.*, 2012; YI *et al.*, 2015; DU; SWAMY, 2016).

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \quad (25)$$

$$var = \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (Z_k - \mu_Z)^2 \quad (26)$$

$$std = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (Z_k - \mu_Z)^2} \quad (27)$$

Sendo  $Z$ , um vetor com valores reais,  $n$  a quantidade de valores em  $Z$  e  $\mu_Z$  a média dos valores de  $Z$ .

Para a implementação da variação proposta, inicialmente foram obtidas as melhores harmonias contidas na HM através da avaliação. Após algumas análises, foi definido valor equivalente a 30% das harmonias armazenadas e por conseguinte, foi calculada a média desses esses vetores, gerando-se assim, um novo vetor que caracterizou a melhor harmonia ( $MH$ ) da Memória Harmônica. Essa parcela considerada (30%) não poderia ser pequena pois poderia gerar resultados tendenciosos e implicar na qualidade da convergência; e também não poderia ser tão grande, pois iria englobar muitas harmonias ruins, dificultando também a convergência.

A modificação proposta no HS foi diretamente ligada ao ato de improvisação. O parâmetro  $PAR$  foi modificado dinamicamente a cada iteração através da medida de desvio padrão, como pode ser observado em (28):

$$PAR = 0,3 + \sqrt{\frac{1}{2-1} \sum_{k=1}^2 (Z_k - \mu_Z)^2} \quad (28)$$

tal que:

$$Z = [QR_j \quad MH_j]$$

$QR_j$  é um valor do vetor de harmonia de determinada iteração e  $MH_j$  é um valor da melhor harmonia de determinada geração do algoritmo, sendo  $j = \{1, 2, \dots, N\}$ . Quando considerado apenas a medida de desvio padrão, foi notado nos testes que o valor de  $PAR$ , embora apresentando uma variabilidade, no geral eram valores pequenos. Desse modo, foi utilizado um valor como base para somar cálculo.

O valor base de 0,3 foi definido, considerando que em grande maioria dos trabalhos, o parâmetro  $PAR$  é definido por valores acima de 0,3, como pode ser observado nessas referências (MAHDAVI; FESANGHARY; DAMANGIR, 2007; GEEM, 2012; AL-BETAR *et al.*, 2012; LEE; MUN, 2014). Outro ponto considerado foi que faixa de valores possíveis para compor o  $PAR$  é de 0 a 1, porém, o maior valor de desvio padrão possível nesse contexto é de  $std([0 \ 1]) = 0,7071$ , faltando 0.3 para 100%. Dessa maneira, o parâmetro

$PAR$  é definido com um valor de no mínimo 0.3, podendo-se variar até 1,0 aproximadamente.

O parâmetro  $BW$  também sofreu uma adaptação dinâmica a cada geração baseada na variação entre cada elemento da harmonia improvisada e a melhor harmonia, como segue:

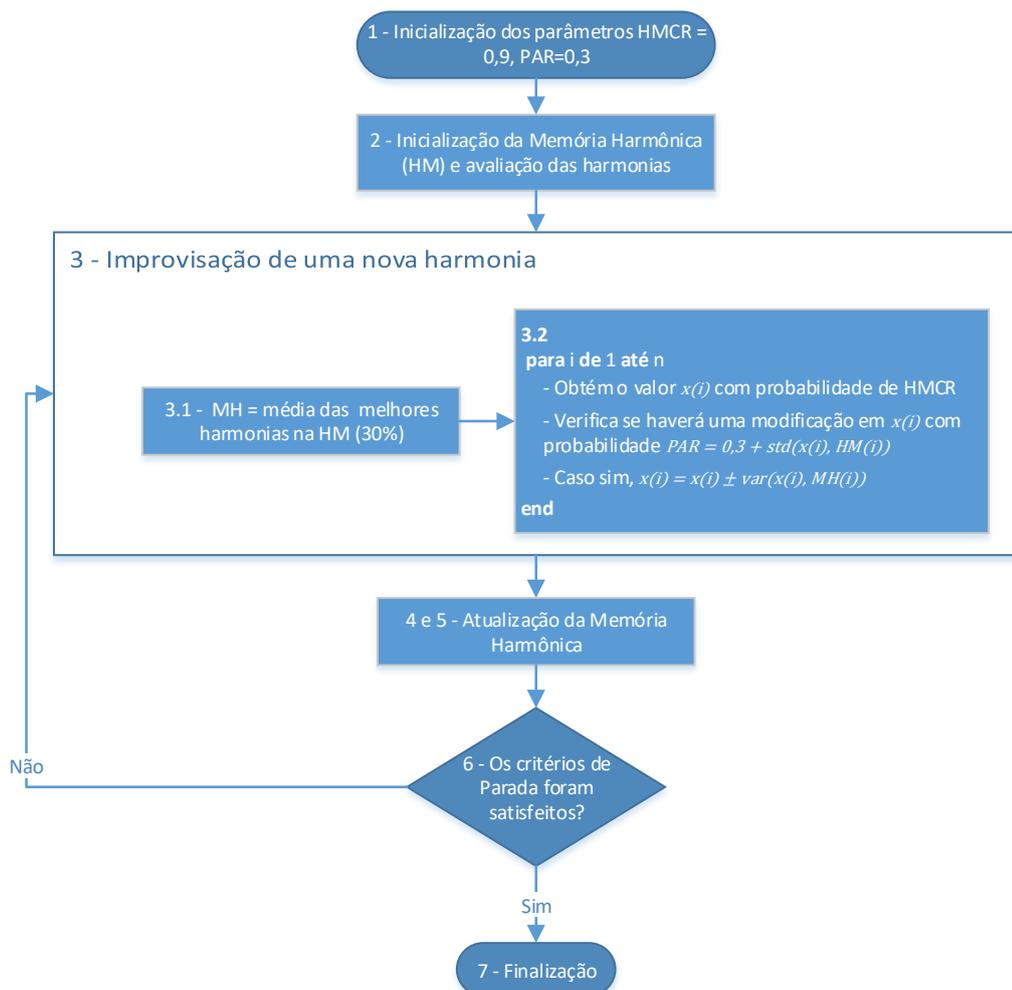
$$BW = \frac{1}{2-1} \sum_{k=1}^2 (Z_k - \mu_Z)^2 \quad (29)$$

sendo:

$$Z = [QR_j \quad MH_j]$$

Dessa maneira, a probabilidade de alteração e o nível da alteração da harmonia no processo de improvisação será proporcional à distância entre a harmonia em questão e um resultado próximo do ideal. A Figura 8 apresenta o algoritmo DHS.

Figura 8 – Fluxograma do Algoritmo de Busca Harmônica proposto



Fonte: Elaborada pelo Autor

Baseado no fluxograma da Figura 3, a Figura 8 apresenta os passos do DHS. A cada processo de improviso, é obtido o vetor  $MH$ , que representa a solução global que mais se aproxima da ideal.

#### 4.4 Metodologia para os testes

O algoritmo de Busca Harmônica padrão (HS), o Algoritmo de Busca Harmônica melhorado (IHS) e a nova variação do HS proposta neste trabalho, DHS, foram testados de maneira simulada, otimizando a busca das matrizes  $Q$  e  $R$  para o controlador LQR aplicadas à dois sistemas lineares de controle distintos: Helicóptero CH-47 e Pêndulo Invertido.

##### 4.4.1 Planta do Helicóptero CH-47

O primeiro sistema utilizado foi uma planta linear referente à dinâmica longitudinal do Helicóptero Chinook CH-47 (DOYLE; STEIN, 1981), Figura 9, que pode ser observada nas Equações 30 e 31.

Figura 9 – Helicóptero Chinook CH-47B em voo



Fonte: NASA, 1985.

$$A = \begin{bmatrix} -0,0200 & 0,0050 & 2,4000 & -32 \\ -0,1400 & 0,4400 & -1,3000 & -30 \\ 0 & 0,0180 & -1,6000 & 1,2000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,1400 & -0,1200 \\ 0,3600 & -8,6000 \\ 0,3500 & 0,0090 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0,3048 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,3000 \end{bmatrix} \quad (31)$$

sendo:

$$x = [V_x \quad V_z \quad q \quad \theta]^T; \quad u = [\delta S \quad \delta R]^T \quad (32)$$

Onde:

$$x = \begin{bmatrix} Vel_{horizontal} \\ Vel_{vertical} \\ pitchrate \\ pitch \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} Cíclico \\ Cíclico Diferencial \end{bmatrix} \quad (33)$$

Com o auxílio do software MATLAB, foram obtidos os polos do sistema em malha aberta, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Polos do sistema CH-47 em malha aberta

-2,2279
0,0652
0,4913 + 0,4151i
0,4913 - 0,4151i

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como pode ser observado na Tabela 1, o sistema em malha aberta possui alguns autovalores com a parte real positiva, o que implica que o sistema é instável.

#### 4.4.1.1 Configurações das simulações

Com base nos critérios adotados por Hartmann, Stein e Pratt (1979) no desenvolvimento de um sistema de controle de voo para uma planta modificada de um helicóptero CH-47, foram definidos as seguintes especificações presentes na Tabela 2.

Tabela 2 – Especificação dos parâmetros de saída desejada

Saída	Tr (seg.)	Ts (seg.)	Mp	SS
$\theta$	2,0	4,0	0,0 (m/s)	0
Vz	1,5	4,0	1,05 (graus)	0

Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Tabela 2 apresenta os valores que foram utilizados como base para as simulações com a planta do CH-47. Esses valores foram aplicados na Equação 17 para obter a avaliação da harmonia, sendo que o parâmetro  $w_x$  apresentou valor = 1 em todos os termos da equação.

Para cada algoritmo testado com essa planta, algumas configurações específicas foram realizadas. Os valores utilizados nos parâmetros dos algoritmos de Busca Harmônica são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 – Especificação dos parâmetros dos algoritmos

Parâmetro	HS	IHS	DHS
<i>HMS</i>	100	100	100
<i>HMCR</i>	0,9	0,9	0,9
<i>PAR</i>	0,8	Min: 0,1 Max: 0,9	Base: 0,3
<i>BW</i>	0,6	Min: 0,1 Max: 0,9	-
<i>NI</i>	1000	1000	1000

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Devido ao fato de que o algoritmo DHS apresentou uma maneira de atualizar os parâmetros *PAR* e *BW*, os mesmos possuem um tratamento diferenciado. Como o parâmetro *BW* foi definido no código apenas através do cálculo do desvio padrão entre dois valores, ele não consta na Tabela 3.

#### 4.4.2 Planta do Pêndulo Invertido

O segundo modelo utilizado nos testes foi o pêndulo invertido, obtido na seguinte referência (OGATA, 1997). As equações à seguir apresentam sua planta linear.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,6010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

tais que:

$$x = [\theta \quad \dot{\theta} \quad s \quad \dot{s}]^T; \quad u = \theta \quad (36)$$

onde:

$$x = \begin{bmatrix} \text{Ângulo do pêndulo} \\ \text{Velocidade Angular} \\ \text{Posição do carrinho} \\ \text{Velocidade do Carrinho} \end{bmatrix} \quad u = \text{Ângulo do pêndulo} \quad (37)$$

Com o auxílio do software MATLAB, foram obtidos os polos do sistema em malha aberta, conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Polos do sistema Pêndulo Invertido em malha aberta

0
0
4,5388
-4,5388

Fonte: Elaborada pelo Autor.

O sistema em questão está instável, como mostra a Tabela 4, uma vez que possui um autovalor no semiplano direito, isto é, o autovalor  $4,5388 > 0$ .

#### 4.4.2.1 Configurações das simulações

Com base nas simulações presentes em (OGATA, 1997), foi possível definir as especificações de saída do Pêndulo Invertido, como pode ser observado na Tabela 5.

Tabela 5 – Especificação dos parâmetros de saída desejada

Saída	Tr (seg.)	Ts (seg.)	Mp	SS
$\Theta$	0	2,0	-	0
s	0	2,0	0,8	0

Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Tabela 5 apresenta os valores esperados na resposta temporal para as simulações com a planta do Pêndulo Invertido. Essas informações foram aplicadas à Equação 17 para a avaliação da harmonia. Os valores do parâmetro  $w_x$  da equação foram iguais a 1, exceto no termo referente ao Máximo Pico do ângulo  $\Theta$ . O  $w_x$  apresentou valor zero anulando esse termo da equação, pois o maior pico desse ângulo será o próprio estado inicial 0.8.

Os valores utilizados nos parâmetros dos algoritmos de Busca Harmônica são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 – Especificação dos parâmetros dos algoritmos

Parâmetro	HS	IHS	DHS
HMS	100	100	100
HMCR	0,9	0,9	0,9
PAR	0,6	Min: 0,1 Max: 0,9	Base: 0,3
BW	0,4	Min: 0,1 Max: 0,9	-
NI	1500	1500	1500

Fonte: Elaborada pelo Autor.

#### 4.5 Metodologia de comparação dos resultados simulados

A fim de comparar os algoritmos em questão e determinar quais obtiveram os melhores resultados, foram realizadas diversas simulações.

Inicialmente, para cada planta, foi realizada uma simulação com cada algoritmo, onde obteve-se uma resposta do sistema ao degrau e suas respectivas curvas de convergências a fim de se observar seu comportamento. As simulações de cada sistema foram comparadas, considerando-se os seguintes parâmetros: Tempo de Subida (Tr); Tempo de acomodação (Ts); Máximo Pico (Mp); Erro em Regime Estacionário (Ess) e Número Máximo de Improvisações (NI) do algoritmo. O critério de parada utilizado foi um valor específico para o parâmetro NI.

Considerando a natureza estocástica do HS, os algoritmos foram novamente

executados, considerando como critério de parada o parâmetro *NI*. Com a execução sequencial de 20 simulações para cada planta, foram registrados os valores de Tempo (T) de convergência, erro de convergência e seus valores de Média Aritmética (MD) e o Desvio Padrão (STD).

Posteriormente, foram realizadas 20 simulações em sequência para cada planta e foram registrados os valores de erro de convergência dos algoritmos (Menor Fitness), o número de improvisações, T, bem como MD e STD desses valores, para fins de comparação. Para essas simulações, o critério de parada definido foi um determinado valor de fitness, ou seja, os algoritmos pararam quando o valor da função de avaliação da melhor resposta se igualaram ou fossem menor que um valor definido.

## 5 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO

Este capítulo apresentará os resultados obtidos através das buscas realizadas com os Algoritmos de Busca Harmônica. Os algoritmos buscaram as melhores matrizes  $Q$  e  $R$  do controlador LQR aplicados às plantas dos sistemas: Helicóptero CH-47 e Pêndulo Invertido.

### 5.1 Simulações com o sistema CH-47

O sistema CH-47 deve responder segundo uma referência, dessa forma o sistema foi ajustado segundo a definição de matrizes aumentadas (8). Portanto, o sistema atual apresentou as seguintes matrizes de estado:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0200 & 0,0050 & 2,4000 & -32 & 0 & 0 \\ -0,1400 & 0,4400 & -1,3000 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0180 & -1,6000 & 1,2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3048 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -57,3000 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,1400 & -0,1200 \\ 0,3600 & -8,6000 \\ 0,3500 & 0,0090 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 5.1.1 Algoritmo de Busca Harmônica padrão – HS

Através do algoritmo de Busca Harmônica padrão, foram recuperadas as matrizes  $Q$  e  $R$  com as quais foi possível realizar a simulação. As matrizes encontradas foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,0009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0495 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0372 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0047 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6947 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0767 \end{bmatrix} \quad (39)$$

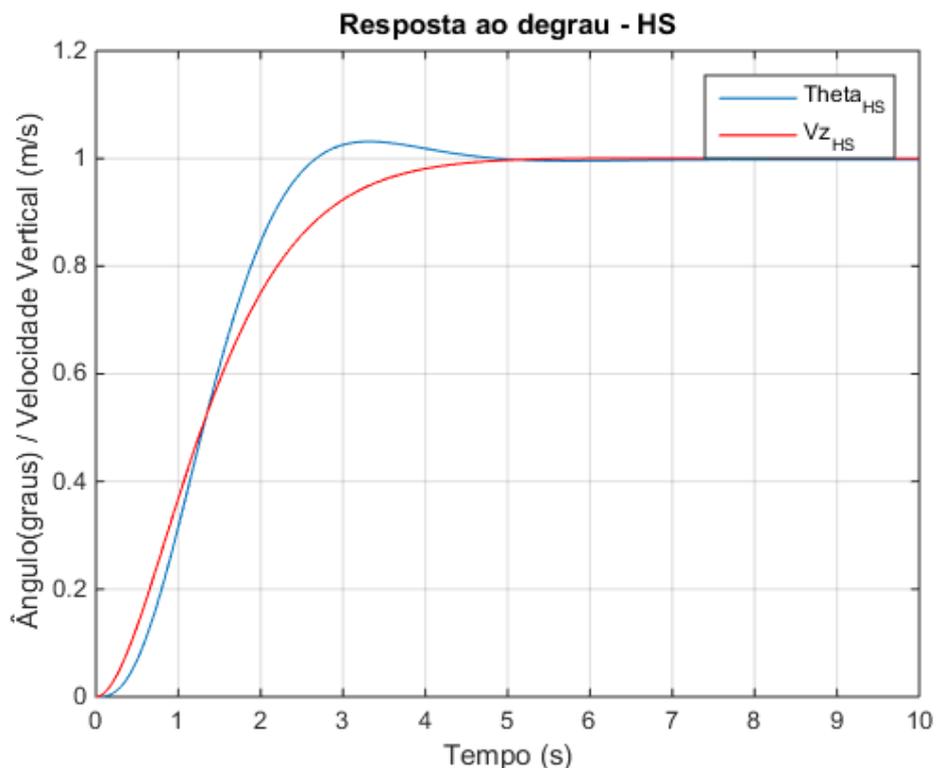
$$R = \begin{bmatrix} 0,9332 & 0 \\ 0 & 2,0232 \end{bmatrix} \quad (40)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  e matriz de ganho integral  $Ki$  para as matrizes de ponderação (38), são apresentadas a seguir:

$$K = \begin{bmatrix} -0.0017 & 0.0030 & 8.1512 & 24.5487 \\ 0.0165 & -0.3100 & 0.3757 & 2.2118 \end{bmatrix} \text{ e } Ki = \begin{bmatrix} 0.1022 & -0.2847 \\ 0.5818 & 0.0231 \end{bmatrix} \quad (41)$$

As simulações realizadas com os algoritmos de Busca Harmônica para o controle do ângulo de atitude e da velocidade vertical do helicóptero CH-47 serão apresentadas através de respostas ao degrau unitário. A Figura 10 apresenta uma simulação obtida através do HS.

Figura 10 – Resposta do CH-47 ao degrau - Busca Harmônica

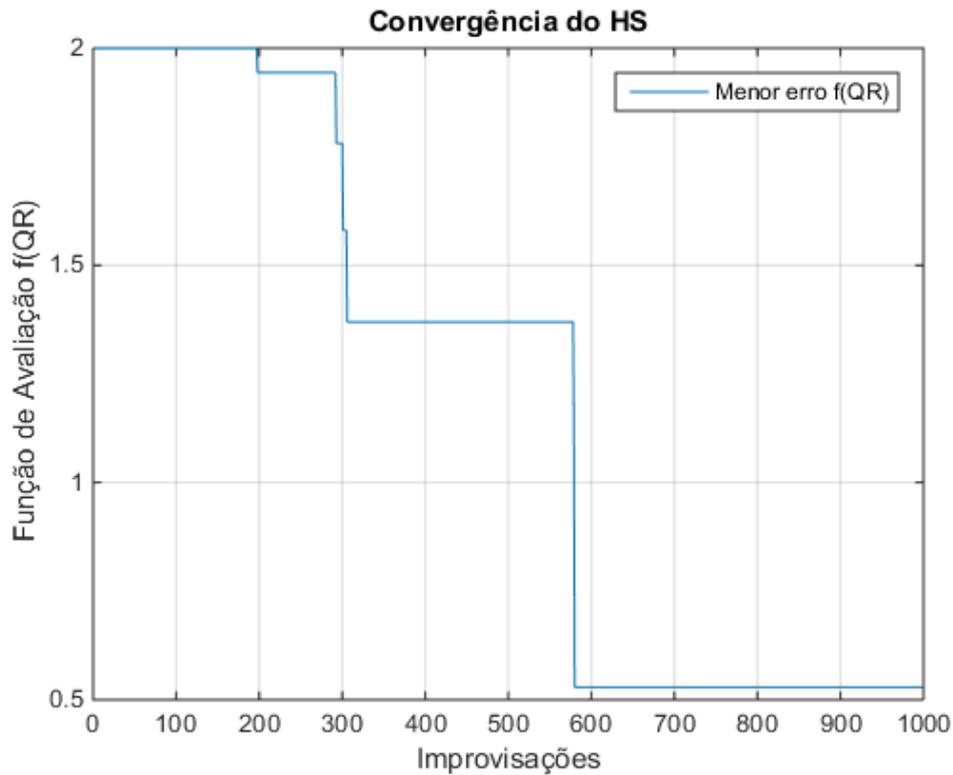


Fonte: Elaborada pelo Autor

A Figura 10 mostra o comportamento do ângulo de atitude, representado pelo ângulo  $\theta$ , e da velocidade vertical, representada pelo  $v_z$ , do decorrer de 10 segundos.

O gráfico da convergência do algoritmo HS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico de Convergência do HS para o CH-47



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico presente na Figura 11 mostra o decaimento da função de avaliação (24) do algoritmo onde é apresentado o menor erro de cada iteração, ou seja, a avaliação da melhor harmonia de cada iteração do algoritmo. O valor do erro estagnou em **0,5288** e o tempo necessário para obtenção desses resultados foi de **19,1244 segundos**.

A Tabela 7 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente da simulação.

Tabela 7 – Valores da simulação: CH-47 com HS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\theta$	1,5766	4,0333	1,0316	0,9977
Vz	2,3632	3,9647	1,0008	1,0000

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode-se observar que o algoritmo apresenta resultados significativos, uma vez que se aproxima dos resultados esperados.

### 5.1.2 Improved Harmony Search – IHS

As matrizes  $Q$  e  $R$  obtidas através das simulações com o IHS foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,0062 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0394 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3445 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4872 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1134 \end{bmatrix} \quad (45)$$

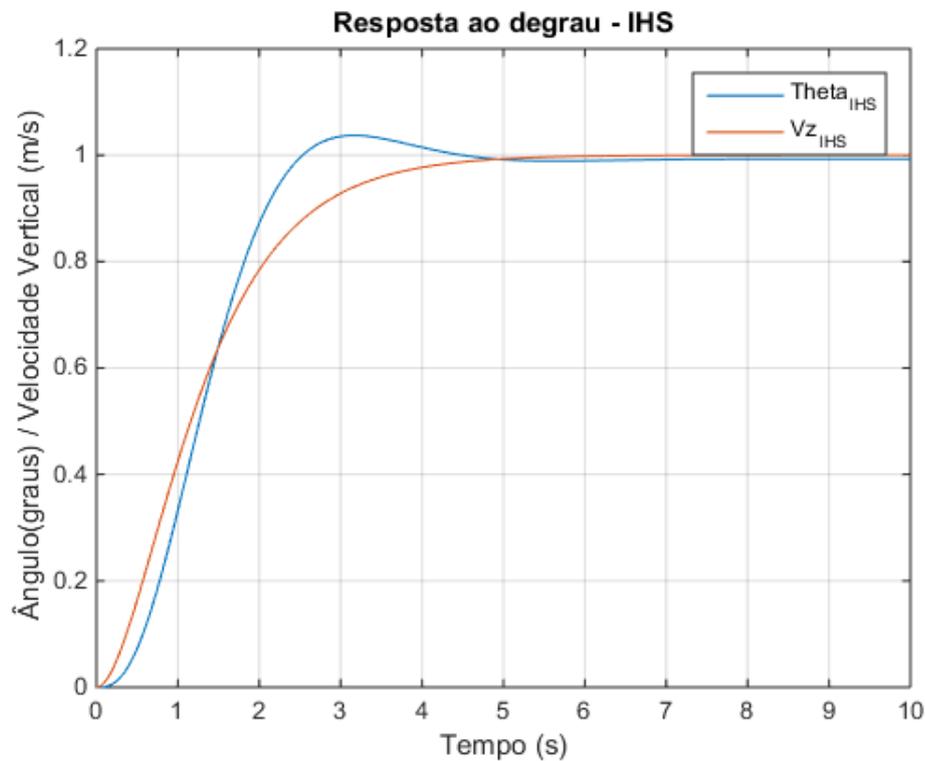
$$R = \begin{bmatrix} 1,2100 & 0 \\ 0 & 0,7562 \end{bmatrix} \quad (46)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  e matriz de ganho integral  $Ki$  são:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0050 & 0,0265 & 8,2370 & 24,9154 \\ 0,0171 & -0,3868 & -0,3095 & 0,4503 \end{bmatrix} \text{ e } Ki = \begin{bmatrix} 0,0683 & -0,3044 \\ 0,7980 & 0,0417 \end{bmatrix} \quad (47)$$

A simulação realizada com o sistema CH-47 através da otimização das matrizes de ponderação pelo algoritmo IHS pode ser observada através da Figura 12.

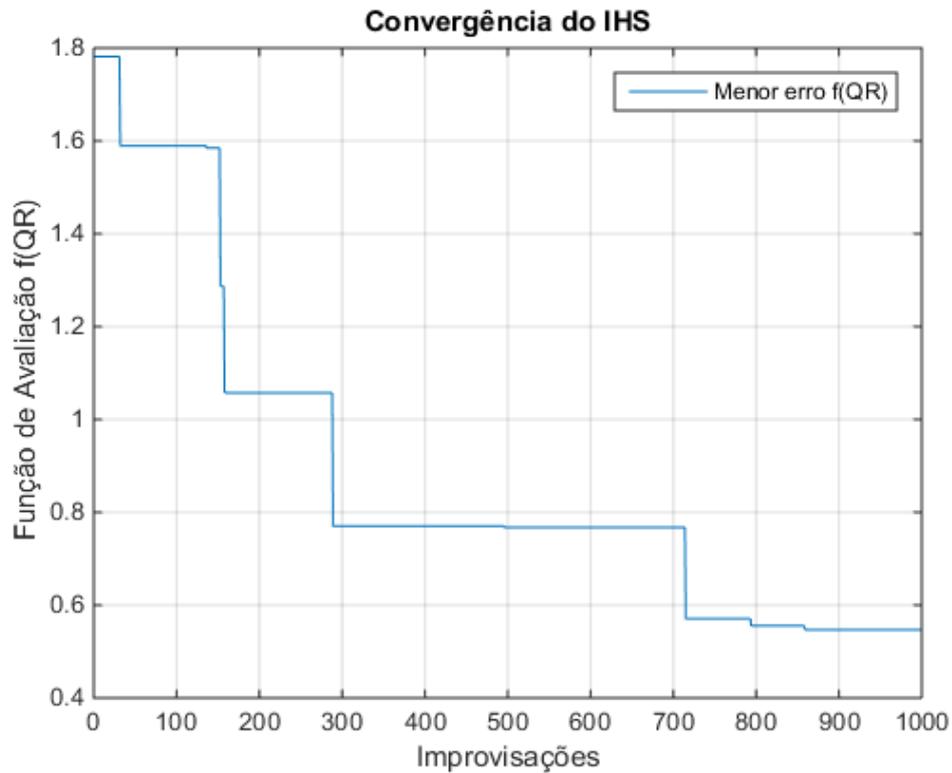
Figura 12 – Resposta do CH-47 ao degrau - *Improved Harmony Search*



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico da convergência do algoritmo IHS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 13.

Figura 13 – Gráfico de convergência do IHS para o CH-47



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode ser observado na Figura 13 que o valor do erro de convergência estagnou em **0,5268** e o tempo necessário para obtenção desses resultados foi de **18,4758 segundos**.

A Tabela 8 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente, obtidos na simulação.

Tabela 8 – Valores da simulação: CH-47 com IHS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\theta$	1,4936	4,0663	1,0371	0,9926
Vz	2,3361	4,1198	1,0000	1,0000

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como pode ser observado na Tabela 8, e na análise da convergência, o IHS apresentou uma pequena melhora em comparação ao HS, em relação ao erro. No tempo de convergência, o IHS convergiu aproximadamente **0.65** segundos mais rápido que o HS.

### 5.1.3 Busca Harmônica com Dispersão Estatística – DHS

As matrizes  $Q$  e  $R$  encontradas por meio das buscas com o algoritmo DHS foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0523 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2576 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0219 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6269 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1068 \end{bmatrix} \quad (48)$$

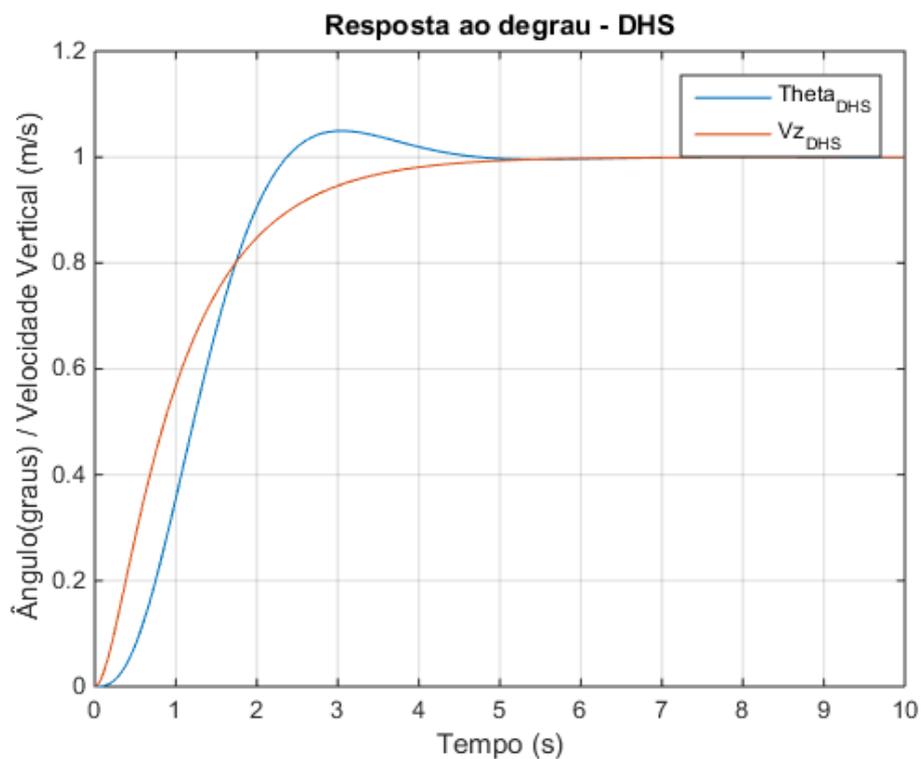
$$R = \begin{bmatrix} 0,9661 & 0 \\ 0 & 0,1324 \end{bmatrix} \quad (49)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  e matriz de ganho integral  $Ki$  para essas matrizes de ponderação, são:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0009 & 0,0234 & 8,3536 & 25,6543 \\ 0,0164 & -0,7995 & -1,8182 & -3,7773 \end{bmatrix} \text{ e } Ki = \begin{bmatrix} 0,0917 & -0,3303 \\ 2,1618 & 0,1022 \end{bmatrix} \quad (50)$$

A simulação realizada com o sistema CH-47 através da otimização das matrizes de ponderação pelo algoritmo DHS pode ser observada através da Figura 14.

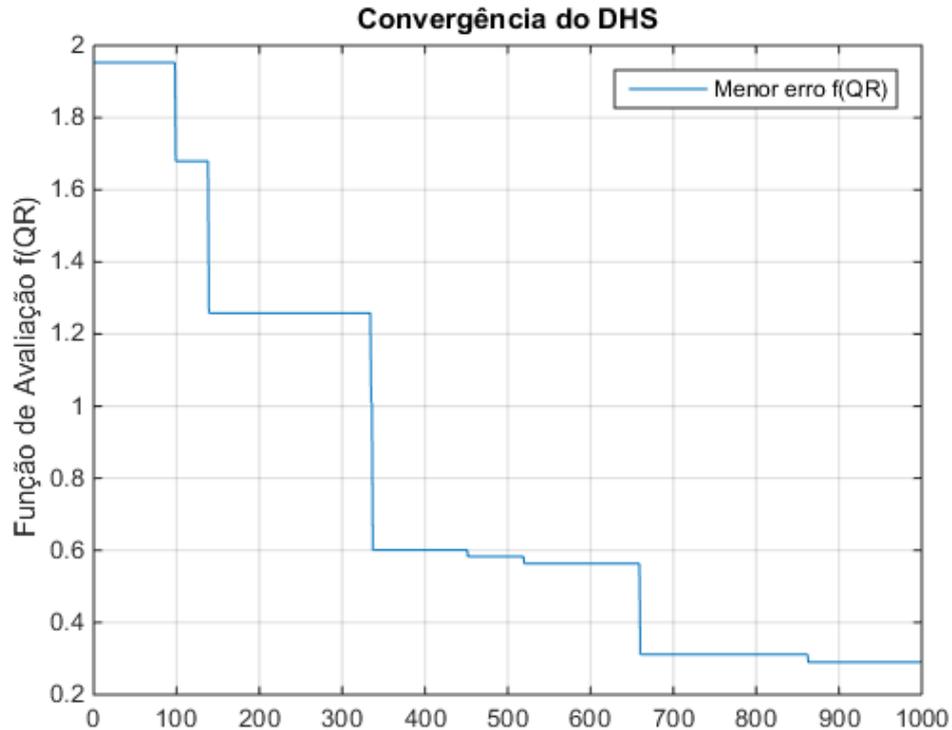
Figura 14 – Resposta do CH-47 ao degrau - DHS



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico da convergência do algoritmo DHS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 – Gráfico de convergência do DHS com CH-47



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Com base na simulação, o valor do erro de convergência parou em **0,2897** e o tempo necessário para obtenção desses resultados foi de **18.6518 segundos**.

A Tabela 9 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente da simulação.

Tabela 9 – Valores da simulação: CH-47 com DHS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\theta$	1,4314	3,9782	1.0476	0,9991
Vz	2,1753	3,9571	1,0000	1,0000

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para essa simulação, o DHS apresentou resultados bem significativos, considerando os valores de convergência. No tempo de convergência, embora o IHS tenha sido **0.1760 segundos** mais rápido que o DHS, o erro de convergência obteve uma melhora significativa de **0.2391** em relação ao HS e de **0.2571** em relação ao IHS.

Considerando a natureza estocástica das meta-heurísticas trabalhadas, foi realizada 20 execuções sucessivas de cada algoritmo considerando o critério de parada  $NI=1000$ , para obtenção de valores médios de convergência. A Tabela 10 apresenta a média e o desvio padrão do Menor Erro ( $f(QR)$ ) do algoritmo (menor valor de *fitness*) e a Tabela 11 apresenta a média e o desvio padrão do tempo gasto para minimizar esse erro.

Os valores referentes às simulações com os três algoritmos estão presentes no Apêndice A.

Tabela 10 – Valor médio do erro de convergência dos algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	0.6780	0.5423	<b>0.3920</b>
Desvio Padrão	0.2024	0.1602	<b>0.0791</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Tabela 11 – Valor médio do tempo de convergência dos algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	20.3439	<b>17.7280</b>	18.5469
Desvio Padrão	3.1190	1.3884	<b>0.8822</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Através das simulações realizadas com um número máximo de iterações, foi possível realizar uma análise do poder de convergência dos algoritmos, os quais buscaram minimizar índices de convergência. A Tabela 10 mostra que o algoritmo proposto apresentou um maior poder de convergência, considerando que o menor Erro médio foi obtido pelo DHS e com menor desvio padrão. O HS e o IHS apresentaram a diferenças de **0,2860** e **0,1503**, respectivamente, para o DHS.

Na Tabela 11 é possível notar que o menor tempo foi obtido pelo algoritmo IHS. Isso se deve ao fato de que o DHS realiza cálculos de Média, Desvio Padrão e Variância a cada passo do Algoritmo, por esse motivo, o IHS apresenta uma performance superior, entretanto, o DHS ainda apresentou menor desvio padrão. O HS e o DHS apresentaram a diferença de **2,6159** e **0,8189** segundos, respectivamente. O HS se mostrou inferior em ambos os parâmetros.

Esse primeiro aspecto de comparação de algoritmos pode não ser tão eficaz, pois, tornar o número de iterações (improvisações, no caso do algoritmo estudado) de um algoritmo como critério de parada não garante que o mesmo convirja para um ótimo global se a convergência for mais lenta por conta da aleatoriedade na inicialização da HM.

Dessa maneira, foi realizado mais uma sequência de 20 execuções dos algoritmos para analisar a performance dos algoritmos por um segundo aspecto: O critério de parada utilizado pelos algoritmos foi o valor de fitness = 0,35, ou seja, o algoritmo só para a execução da busca quando o erro de convergência for maior ou igual ao valor definido. As Tabelas 12, 13 apresentam os dados dessas execuções.

Os valores referentes às estas simulações com os três algoritmos estão presentes no Apêndice B.

Tabela 12 – Valor médio do número de improvisações

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	4208,7000	1879,2000	<b>1013,9500</b>
Desvio Padrão	2671,8549	437,0873	<b>261,5934</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Tabela 13 – Valor médio do tempo de convergência dos algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	75,5900	38,1432	<b>19,8676</b>
Desvio Padrão	47,6304	9,0645	<b>4,7368</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode-se observar nas Tabelas 12 e 13 a diferença clara entre a performance do algoritmo proposto em relação aos demais. Em média, o DHS foi capaz de convergir em menos iterações com uma diferença de **3194,7** e **865,2** para o HS e IHS, respectivamente. O tempo médio de convergência DHS também foi superior ao tempo médio dos demais algoritmos. O HS e o IHS convergiram a **55,7224** e **18,2756** segundos mais lento que o algoritmo proposto. A ótima performance e o poder de convergência apresentado, mostra a eficiência da variação do algoritmo de Busca Harmônica proposta neste trabalho.

## 5.2 Simulações com o sistema do Pêndulo Invertido

Assim como ocorreu com a sistema do CH-47, foi utilizado o sistema de um pêndulo invertido como teste para validar a busca das matrizes  $Q$  e  $R$  através das técnicas HS, IHS e DHS, a nova variação proposta do algoritmo de Busca Harmônica.

Para esta planta é projetado um sistema regulador, sendo que, dada qualquer condição inicial, o erro deve seguir para zero.

### 5.2.1 Algoritmo de Busca Harmônica Padrão– HS

O algoritmo HS foi aplicado na otimização do LQR, resultando nas seguintes matrizes de ponderação:

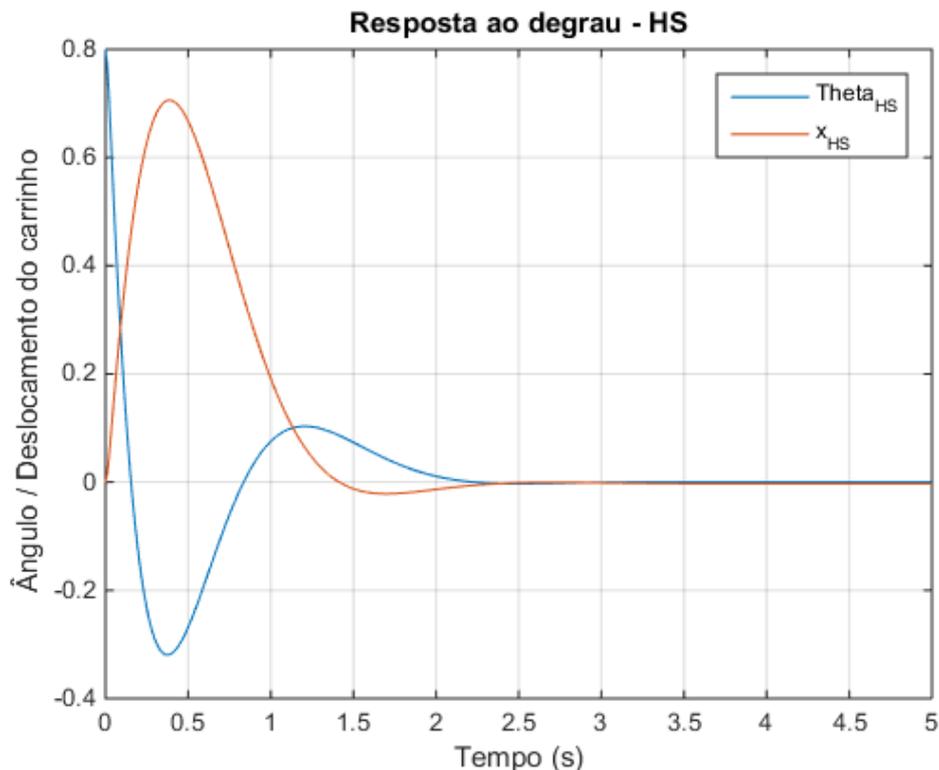
$$Q = \begin{bmatrix} 6,0 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1278 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1031 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0012 \end{bmatrix} \text{ e } R = [1,7043 \cdot 10^{-5}] \quad (51)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  para essas matrizes de ponderação é:

$$K = [-896.5942 \quad -219.9540 \quad -351.2828 \quad -250.6126] \quad (52)$$

As simulações realizadas com os algoritmos para o controle do ângulo do pêndulo e do deslocamento do carrinho, serão apresentadas através de respostas ao degrau unitário. A Figura 16 apresenta uma simulação obtida através do HS.

Figura 16 – Resposta do Pêndulo ao degrau - Busca Harmônica

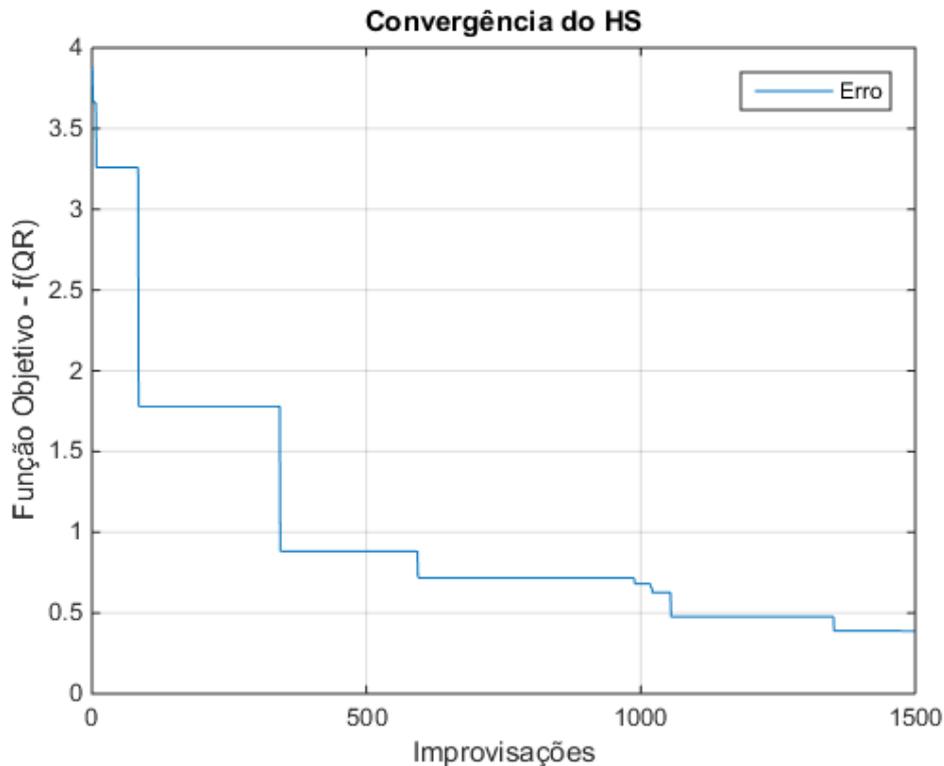


Fonte: Elaborada pelo Autor

O gráfico apresentado na Figura 16 mostra o comportamento do pêndulo no decorrer de 5 segundos. A simulação inicia-se com ângulo  $\Theta$  em 0.8 gerando-se assim uma pequena perturbação no sistema.

O gráfico da convergência do algoritmo HS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 – Gráfico de convergência do HS com o Pêndulo Invertido



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico presente na Figura 17 mostra o decaimento da função de avaliação do algoritmo (24) onde é apresentado o menor erro de cada iteração, ou seja, a avaliação da melhor harmonia de cada iteração do algoritmo. O valor do erro estagnou em **0,3870** e o tempo necessário para obtenção desses resultados foi de **15,9933 segundos**.

A Tabela 14 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente da simulação.

Tabela 14 – Valores da simulação: Pêndulo Invertido com HS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\Theta$	0,1138	1,9337	0,8 (estado inicial)	$\approx 0$
s	0,0129	1,9029	0,7060	-0,0029

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Considerando os valores desejados para essa simulação apresentados na Tabela 5, pode ser observado na Tabela 14 que o algoritmo apresentou resultados significativos, uma vez que os valores obtidos se aproximam.

### 5.2.2 Improved Harmony Search– IHS

As matrizes de ponderação encontradas pelo IHS foram:

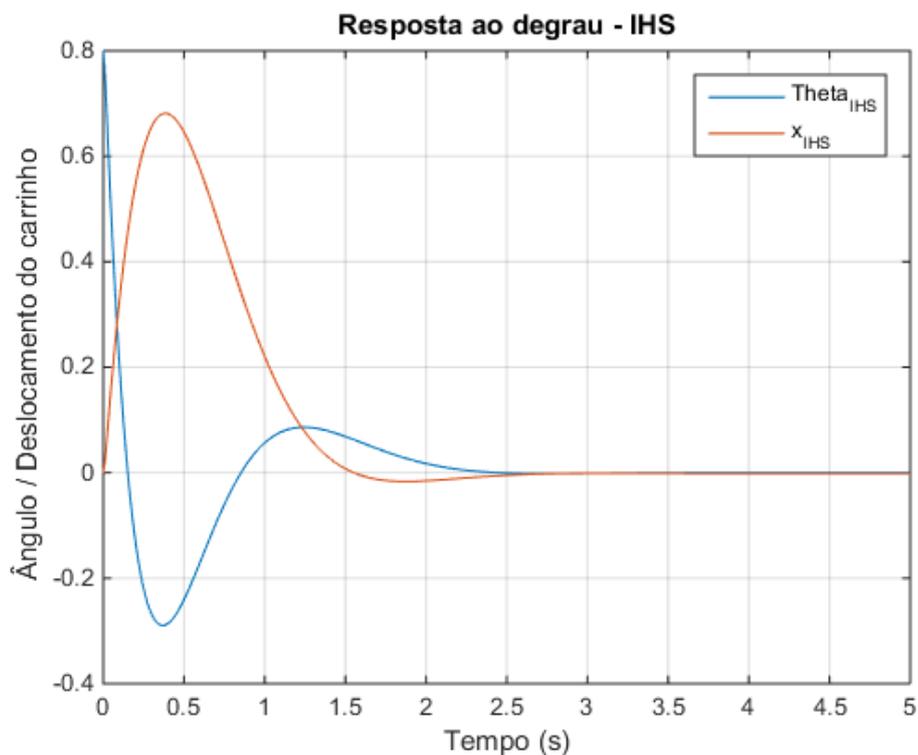
$$Q = \begin{bmatrix} 0,8002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5725 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,0 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} e R = [4,5455 \cdot 10^{-5}] \quad (53)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  para essas matrizes de ponderação é:

$$K = [-1583,7777 \quad -376,4378 \quad -588,1722 \quad -432,9998] \quad (54)$$

A simulação realizada com o pêndulo invertido através da otimização das matrizes de ponderação pelo algoritmo IHS pode ser observada através da Figura 18.

Figura 18 – Resposta do Pêndulo Invertido ao degrau - IHS

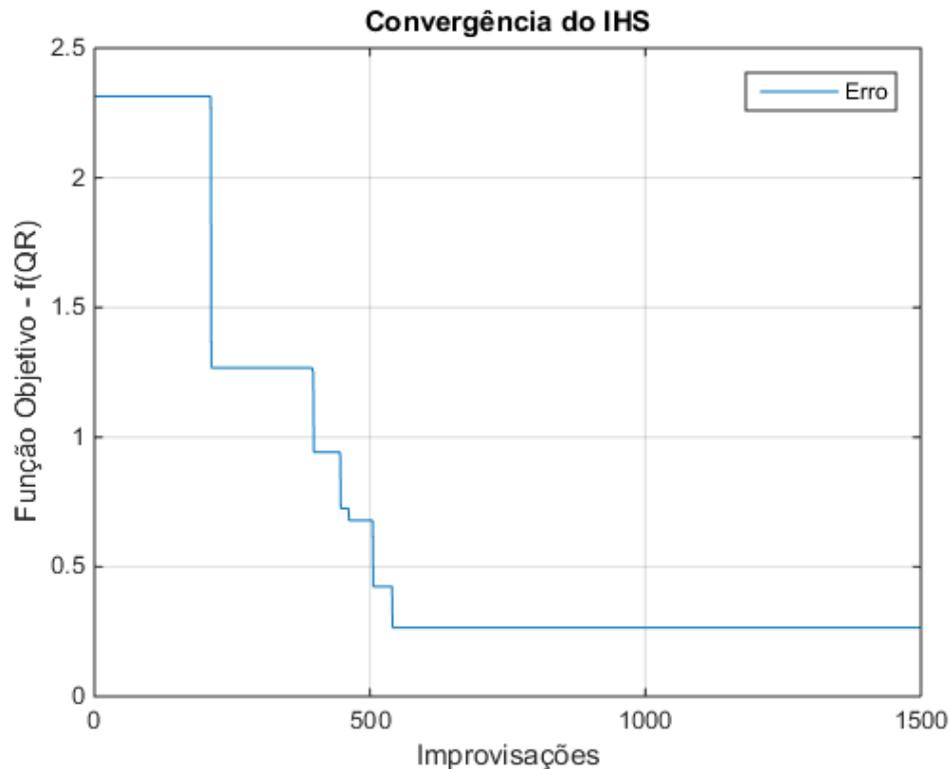


Fonte: Elaborada pelo Autor.

A simulação apresentada na Figura 18 descreve o comportamento temporal do pêndulo no decorrer de 5 segundos.

O gráfico de convergência do algoritmo IHS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 – Gráfico de convergência do IHS com Pêndulo Invertido



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico da Figura 19 apresenta a curva da função de avaliação do algoritmo IHS. O valor do erro de convergência estagnou em **0,2649** e o tempo foi de **13,9227 segundos**.

A Tabela 15 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente da simulação.

Tabela 15 – Valores da simulação: Pêndulo com IHS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\theta$	0,1133	2,0186	0,8 (estado inicial)	$\approx 0$
s	0,0111	2,0014	0,6815	-0,0017

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como pode ser observado na Tabela 15, e na análise da convergência, o IHS

apresentou uma melhora significativa em comparação ao HS, em relação ao erro. O IHS convergiu **2.0706** segundos mais rápido que o HS.

### 5.2.3 Busca Harmônica com Dispersão Estatística – DHS

As matrizes de ponderação encontradas pelo IHS foram:

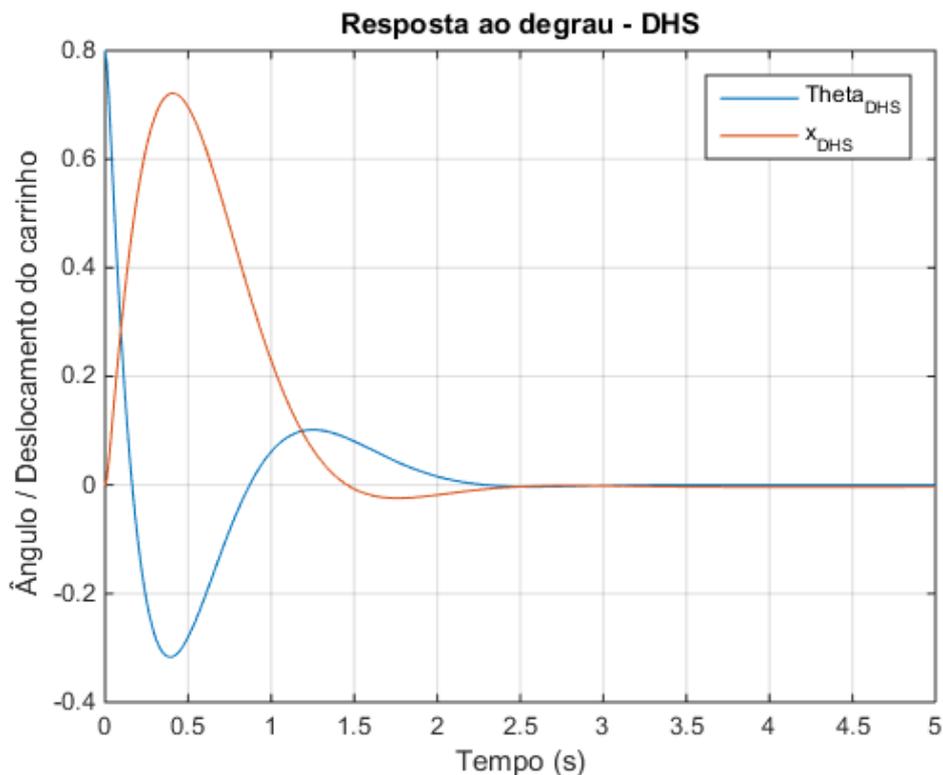
$$Q = \begin{bmatrix} 0,0887 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8638 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} e R = [3,6651 \cdot 10^{-5}] \quad (55)$$

A matriz de realimentação de estados  $K$  dessas matrizes de ponderação é:

$$K = [-753.5820 \quad -185.5355 \quad -279.5300 \quad -204.6014] \quad (56)$$

A simulação realizada com o sistema Pêndulo Invertido através da otimização das matrizes de ponderação pelo algoritmo DHS pode ser observada através da Figura 20.

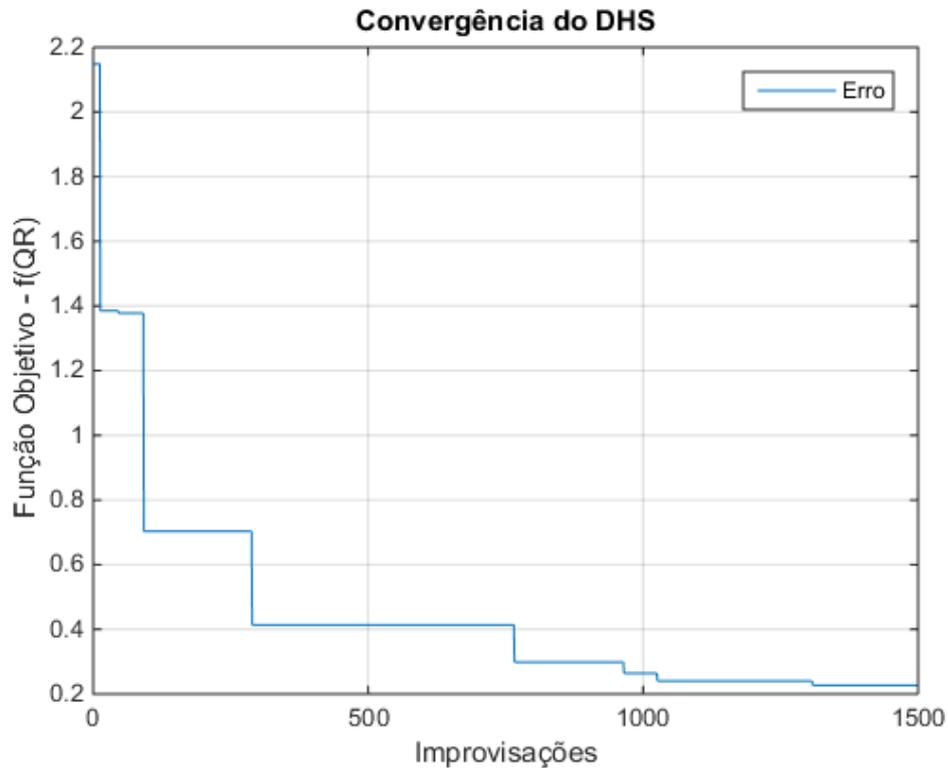
Figura 20 – Resposta do Pêndulo Invertido ao degrau - DHS



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O gráfico da convergência do algoritmo DHS na busca das matrizes  $Q$  e  $R$  pode ser observado na Figura 21.

Figura 21 – Gráfico de convergência do DHS com o Pêndulo Invertido



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode ser observado com a simulação que o valor do erro de convergência estagnou em **0,2271** e o tempo foi de **13.5183 segundos**.

A Tabela 16 apresenta os valores dos parâmetros de resposta transitória e o erro em regime permanente da simulação.

Tabela 16 – Valores da simulação: CH-47 com DHS

Saída	Tr	Ts	Mp	Ss
$\theta$	0,1192	1,9958	0,8 (estado inicial)	$\approx 0$
s	0,0155	2,0061	0,7214	$\approx 0$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para essa simulação, o DHS apresentou ótimos resultados considerando os valores de convergência e tempo de execução. No tempo de convergência, o DHS apresentou melhoras de **2,4750 segundos** e de **0,4044 segundos** em relação ao HS e IHS, respectivamente. No erro de convergência a diferença foi de **0,1599** e **0,0378** entre os

algoritmos HS e IHS, respectivamente.

Considerando a natureza estocástica das meta-heurísticas trabalhadas, elas foram submetidas a 20 sucessivas execuções com critério de parada  $NI=1500$ , para obtenção de valores médios de convergência. A Tabela 17 apresenta a média e o desvio padrão do Menor Erro ( $f(QR)$ ) do algoritmo (menor valor de *fitness*) e a Tabela 18 apresenta a média e o desvio padrão do tempo gasto para minimizar esse erro. O Apêndice C apresenta os valores das 20 execuções.

Tabela 17 – Valor Médio do Erro de Convergência dos Algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	0.2947	0.2562	<b>0.2354</b>
Desvio Padrão	0.0467	<b>0.0294</b>	0.0297

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Tabela 18 – Valor Médio do Tempo de Convergência dos Algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	16.4737	<b>12.6222</b>	12.8816
Desvio Padrão	1.2724	1.0940	<b>0.7523</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Através das simulações realizadas com um número máximo de iterações, foi possível realizar uma análise do poder de convergência dos algoritmos, os quais buscaram minimizar índices de convergência. A Tabela 17 mostra que o algoritmo proposto apresentou um maior poder de convergência, considerando que o menor erro médio foi obtido pelo DHS embora que, com menor desvio padrão, mas com uma diferença mínima. O HS e o IHS apresentaram a diferenças de **0,0593** e **0, 0208**, respectivamente, para o DHS.

Como esperado, é possível notar na Tabela 18 que, embora por uma diferença pequena, o menor tempo foi obtido pelo algoritmo IHS. Isso se deve ao fato de que o DHS realiza cálculos de Média, Desvio Padrão e Variância a cada passo do busca, como já havia sido comentado. Em termos de desvio padrão, o DHS apresentou o menor valor. O HS e o DHS apresentaram a diferença de **3.8515** e **0.2594** segundos, respectivamente. O HS novamente se mostrou com desempenho inferior em ambos os parâmetros.

Como já foi comentado, para uma melhor análise e comparação em termos de convergência, foi realizado mais uma sequência de 20 execuções dos algoritmos para analisar a performance dos algoritmos por um segundo aspecto: O critério de parada utilizado pelos algoritmos foi o valor de *fitness* = 0,2, ou seja, o algoritmo só finalizou a busca quando o erro

de convergência foi maior ou igual ao valor definido. As Tabelas 19, 20 apresentam os resultados médios dessas execuções.

O Apêndice D apresenta os valores dessas 20 execuções com os três algoritmos.

Tabela 19 – Valor Médio do Número de Improvisações

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	12954.8500	3133.8500	<b>2536.1000</b>
Desvio Padrão	2671,85	648.2755	<b>424.0094</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Tabela 20 – Valor Médio do Tempo de Convergência dos Algoritmos

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Média	101.4369	26.0024	<b>21.2986</b>
Desvio Padrão	49.6081	5.7926	<b>2.6911</b>

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Finalmente, como mostram as Tabelas 19 e 20, a diferença é clara entre a performance do algoritmo proposto em relação aos demais. Em média, o DHS foi capaz de convergir com menos iterações, com uma diferença entre **10418,7500** e **597,7500** para o HS e IHS, respectivamente. O tempo médio de convergência DHS também foi superior ao tempo médio dos demais algoritmos. O HS e o IHS convergiram a **80,1383 segundos** e **4,7038 segundos**, respectivamente, mais lento que o algoritmo proposto.

A ótima performance e o poder de convergência apresentado, mostra a eficiência da variação do algoritmo de Busca Harmônica proposta neste trabalho.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS

Neste trabalho foi discutida a maior problemática que envolve uma das principais técnicas do controle moderno: A definição das matrizes  $Q$  e  $R$  do Regulador Linear Quadrático (LQR). Este problema foi tratado por meio do Algoritmo de Busca Harmônica, que foi apresentado como uma alternativa às técnicas existentes para realizarem a busca dessas matrizes. Tendo em vista essa técnica, foi realizada uma análise entre três metodologias da Busca Harmônica para definir qual melhor se adequa na otimização do projeto LQR: A Busca Harmônica (HS) padrão; uma variação do HS, o *Improved Harmony Search* (IHS); e a Busca Harmônica com Dispersão Estatística (DHS), variação da Busca Harmônica que foi proposta neste trabalho.

Para tratar a busca das matrizes  $Q$  e  $R$  como um problema de otimização aplicável ao HS, foi definido inicialmente o vetor harmonia composto pelos elementos da diagonal principal das duas matrizes, o que tornou simples a transformação matrizes-vetor e vetor-matrizes. Posteriormente, foi definida a função objetivo do problema, que apresentou os parâmetros de resposta transitória Tempo de subida (Tr), Tempo de estabilização (Ts), Máximo pico (Mp) e o Erro em regime permanente (Ess), o que tornou possível modelar a resposta do sistema ao degrau de acordo com uma resposta desejada. O parâmetro  $w_x$ , mesmo com uma função simples, possibilitou que alguns termos que poderiam atrapalhar o processo de busca fossem retirados da função objetivo definida.

O HS, assim como o LQR, possui parâmetros que necessitam ser definidos através de métodos empíricos como “tentativa e erro”, o que não caracteriza a agilidade necessária para projetos de controle, como os parâmetros  $HCMR$ ,  $PAR$  e  $BW$ . A variação já consolidada IHS veio como uma alternativa ao HS padrão, porém, mesmo com características de autoajuste dos parâmetros  $PAR$  e  $BW$ , ainda caiu no contexto de não haver uma regra para definição dos parâmetros  $PAR_{min}$ ,  $PAR_{max}$ ,  $BW_{min}$  e  $BW_{max}$ , e de certa forma, aumentou o número de variáveis para ponderação. Por esse motivo se fez necessário uma nova variação que atendesse tanto a necessidade de buscar as matrizes para o controle de maneira ótima, e que o autoajuste ocorresse de uma forma que não fosse necessário se preocupar com a definição de tantos parâmetros.

O DHS, algoritmo proposto, utiliza-se das possíveis soluções contidas na memória Harmônica (HM) a através da Média Aritmética, define uma “melhor harmonia”, representada pela a média de 30% das melhores harmonias. Isso possibilitou calcular entre a “melhor harmonia” e uma harmonia improvisada o Desvio Padrão e a Variância, o que definiu de

maneira satisfatória os valores de  $PAR$  e  $BW$ , respectivamente. Esses parâmetros se modelaram a cada passo do algoritmo, mantendo um autoajuste do início ao fim da busca, sempre se baseando nas medidas de dispersão.

A validação dos algoritmos se deu através de simulações utilizando duas plantas. Os três algoritmos foram aplicados à busca das matrizes de ponderação do LQR para o controle do helicóptero CH-47 e de um Pêndulo Invertido, considerando uma solução desejada para cada uma das plantas. O primeiro aspecto analisado foi a resposta ao degrau de uma simulação obtida de cada algoritmo, assim foi possível observar o comportamento transitório dos sistemas, comparar com a resposta desejada. Os três algoritmos obtiveram resultados aceitáveis, mas o DHS obteve um menor erro de convergência em relação aos dois outros algoritmos.

O segundo aspecto analisado foi o tempo de execução, onde simulações foram realizadas considerando como critério de parada do algoritmo um número máximo de improvisações. O DHS apresentou em média os menores erros de convergência em todos os casos, e o IHS apresentou melhores tempos. Embora seja possível medir o tempo de execução de maneira fidedigna, esse modo de execução não garante uma convergência para um resultado aceitável, como foi observado nos resultados com o HS.

O terceiro aspecto visou analisar o poder de convergência dos algoritmos considerando o tempo gasto, através do erro de convergência (*fitness*) como critério de parada. Foi constatado com os resultados que, novamente, o DHS apresentou os melhores resultados, pois melhor minimizou os erros em um tempo menor em relação aos demais algoritmos. Essa metodologia se mostrou bem mais eficaz, pois garante a convergência dos algoritmos para um resultado aceitável.

O HS padrão, embora apresentasse resultados aceitáveis para o controle, foi considerado o pior em termos de performance, provavelmente por conta do valor estático que seus parâmetros relacionados às buscas apresentam. O IHS apresentou significativos resultados de convergência e se mostrou um algoritmo muito rápido quando aplicado na otimização do LQR.

Finalmente, o DHS, algoritmo proposto, pode ser considerado uma metaheurística em potencial, que possui um grande poder convergência em um instante de tempo pequeno, com grande estabilidade dos resultados.

## 6.1 Sugestões de Pesquisas Futuras

- Analisar o comportamento do DHS quando aplicado na busca das matrizes de sistemas mais complexos e de maior ordem.
- Aplicar o DHS na otimização do projeto do controlador LQG/LTR.
- Analisar o desempenho do DHS aplicado a outros problemas de otimização envolvendo minimização e maximização para concluir se ele pode ser aplicado com êxito.

## REFERÊNCIAS

- AHMAD, S.; TOKHI, M. O. **Linear Quadratic Regulator (LQR) approach for lifting and stabilizing of two-wheeled wheelchair**. Mechatronics (ICOM), 2011 4th International Conference On. **Anais...** In: MECHATRONICS (ICOM), 2011 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON. maio 2011
- AL-BETAR, M. A. *et al.* Novel selection schemes for harmony search. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 10, p. 6095–6117, jan. 2012.
- AL-GHASEM, A.; USSALEH, N. **Air conditioner control using neural network and PID controller**. 2012 8th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA). **Anais...** In: 2012 8TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MECHATRONICS AND ITS APPLICATIONS (ISMA). abr. 2012
- ALIA, O. M.; MANDAVA, R. The variants of the harmony search algorithm: an overview. **Artificial Intelligence Review**, v. 36, n. 1, p. 49–68, jun. 2011.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal control: linear quadratic methods**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1990.
- BRYSON, A. E.; HO, Y.-C. **Applied optimal control: optimization, estimation, and control**. Rev. print ed. New York: Taylor & Francis, 1975.
- DAVIES, R.; CLARKE, T. **A parallel implementation of the genetic algorithm applied to the flight control problem**. IEE Colloquium on High Performance Computing for Advanced Control. **Anais...** In: IEE COLLOQUIUM ON HIGH PERFORMANCE COMPUTING FOR ADVANCED CONTROL. dez. 1994
- DONHA, D. C.; RISSO, G. **Wind turbine controller tuning by genetic algorithm**. ABCM Symposium Series in Mechatronics. **Anais...ABCM**, 2004
- DOYLE, J.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 26, n. 1, p. 4–16, fev. 1981.
- DU, K.-L.; SWAMY, M. N. S. Harmony Search. In: DU, K.-L.; SWAMY, M. N. S. (Eds.). **Search and Optimization by Metaheuristics**. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 227–235.
- EL-GAMMAL, A. A.; EL-SAMAHY, A. A. **A modified design of PID controller for DC motor drives using Particle Swarm Optimization PSO**. Power Engineering, Energy and Electrical Drives. **Anais...** In: POWERENG'09. INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER ENGINEERING, ENERGY AND ELECTRICAL DRIVES. IEEE, 2009
- FU, S. J. **Aircraft Guidance for Formation Flying based on Optimal Control Theory**. American Control Conference, 1987. **Anais...** In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1987. jun. 1987
- GARCIA, L.; LOPEZ, M. J. **GENETIC ALGORITHM FOR LQG/LTR DESIGN PARAMETERS.A FLIGHT CONTROL SYSTEM APPLICATION**. ResearchGate. **Anais...** In: 5TH IFAC INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT

COMPONENTS AND INSTRUMENTS FOR CONTROL APPLICATION , SICICA'2003. 1 nov. 2003GBAUPE, D. Derivation of weighting matrices towards satisfying eigenvalue requirements. **International Journal of Control**, v. 16, n. 5, p. 881–888, 1972.

GEEM, Z. W. Effects of initial memory and identical harmony in global optimization using harmony search algorithm. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 22, p. 11337–11343, jul. 2012.

GEEM, Z. W.; KIM, J. H.; LOGANATHAN, G. V. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. **SIMULATION**, v. 76, n. 2, p. 60–68, 1 fev. 2001.

GHOREISHI, S. A.; NEKOUI, M. A.; BASIRI, S. O. Optimal Design of LQR Weighting Matrices based on Intelligent Optimization Methods. **International Journal of Intelligent Information Processing**, v. 2, n. 1, p. 63–74, 31 mar. 2011.

GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. Reading, Mass: Addison-Wesley Pub. Co, 1989.

GONG, D. *et al.* **LQR control for a self-balancing unicycle robot**. 2012 10th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). **Anais...** In: 2012 10TH WORLD CONGRESS ON INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION (WCICA). jul. 2012

GROOM, N. J.; SCHAFFNER, P. R. **An LQR controller design approach for a Large Gap Magnetic Suspension System (LGMSS)**. NASA, Langley Research Center, Hampton, 1 jul. 1990.

GUPTA, S.; TRIPATHI, R. K. Optimal LQR controller in CSC based STATCOM using GA and PSO. **Archives of Electrical Engineering**, v. 63, n. 3, 1 jan. 2014.

HA, K.-J.; KIM, H.-M. **A genetic approach to the attitude control of an inverted pendulum system**. Ninth IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, 1997. Proceedings. **Anais...** In: NINTH IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON TOOLS WITH ARTIFICIAL INTELLIGENCE. nov. 1997

HARTMANN, G. L.; STEIN, G.; PRATT, S. G. **Digital adaptive controllers for VTOL vehicles. Volume 1: Concept evaluation**. United States: NASA, 1 nov. 1979. . Acesso em: 21 set. 2016.

HASSANI, K.; LEE, W.-S. Optimal Tuning of Linear Quadratic Regulators Using Quantum Particle Swarm Optimization. **Proceedings of the International Conference of Control, Dynamics and Robotics**, 2014.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence**. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

HULL, R. A. **Application of a genetic algorithm to the optimization of a missile autopilot controller for performance criteria with non-analytic solutions**. Mestrado—Florida: University of Central Florida, 1 jan. 1993.

JOHNSON, M. A.; GRIMBLE, M. J. Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design. **IEE Proceedings D - Control Theory and Applications**, v. 134, n. 1,

p. 53–71, jan. 1987.

KALMAN, R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control. 2. v. 5, n. Bol. Soc. Mat. Mexicana, p. 102–119, 1960a.

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35, 1960b.

KANDASAMY, M.; VIJAYACHITRA, S.; SARAVANAN, K. Heuristic Algorithm Based Controller Optimization for a Real Time pH Neutralization Process System. **International Journal of ChemTech Research**, v. 7, p. 2320–2332, 2015.

KAPASOURIS, P. **Gain-scheduled multivariable control for the GE-21 turbofan engine using the LQR and LQG/LTR methodologies**. Mestrado—Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1984.

KAUFMAN, H.; BERRY, P. **Digital adaptive flight controller development**. IEEE Conference on Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes. **Anais...** In: 1973 IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL INCLUDING THE 12TH SYMPOSIUM ON ADAPTIVE PROCESSES. dez. 1973

KENNEDY, J.; EBERHART, R. **Particle swarm optimization**. Proceedings IEEE International Conference on Neural Networks. **Anais...** In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS. IEEE, dez. 1995

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by Simulated Annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 13 maio 1983.

KOMANDURI, A.; ARANTES JR, G.; MARTINS-FILHO, L. **Controle de Atitude e Posição para um Simulador Experimental de Satélite Artificial**. Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. **Anais...** In: DINCON' 10. Serra Negra, SP: 2010

LEE, S.; MUN, S. Improving a model for the dynamic modulus of asphalt using the modified harmony search algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 41, n. 8, p. 3856–3860, jun. 2014.

LIOUANE, H. *et al.* **Probabilistic Differential Evolution for optimal design of LQR weighting matrices**. Proceedings of 2012 IEEE International Conference on Computational Intelligence for Measurement Systems and Applications (CIMSAs). **Anais...** In: 2012 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE FOR MEASUREMENT SYSTEMS AND APPLICATIONS (CIMSAs). IEEE, jul. 2012

LOPEZ, M. J.; GARCIA, L. **H $\infty$  Controller Design and Fault Detection Method Based on Genetic Algorithms for MIMO System**. In: 8TH WSEAS INTERNATIONAL CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, MODELING & SIMULATION : PROCEEDINGS OF THE 8TH WSEAS INTERNATIONAL CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, MODELING & SIMULATION,. Prague (Czech Republic): 2006

LUO, J.; LAN, C. E. Determination of weighting matrices of a linear quadratic regulator. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 18, n. 6, p. 1462–1463, 1995.

LUO, Y.; TANG, G. Spacecraft optimal rendezvous controller design using simulated annealing. **Aerospace Science and Technology**, v. 9, n. 8, p. 732–737, nov. 2005.

MACIEJOWSKI, J. M. **Multivariable Feedback Design**. [s.l.] Addison-Wesley, 1989. v. 1

MAHDAVI, M.; FESANGHARY, M.; DAMANGIR, E. An improved harmony search algorithm for solving optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 188, n. 2, p. 1567–1579, maio 2007.

MANJARRES, D. *et al.* A survey on applications of the harmony search algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 26, n. 8, p. 1818–1831, set. 2013.

MAZUMDAR, D. *et al.* **Design of LQR controller for solar tracking system**. 2015 IEEE International Conference on Electrical, Computer and Communication Technologies (ICECCT). **Anais...** In: 2015 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL, COMPUTER AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES (ICECCT). mar. 2015

MEDANIC, J.; THARP, H. S.; PERKINS, W. R. Pole placement by performance criterion modification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 33, n. 5, p. 469–472, maio 1988.

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Busca Harmônica com ajuste adaptativo de parâmetro por meio de Algoritmo Genético aplicada na otimização do projeto LQR**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INTELIGENCIA COMPUTACIONAL. Curitiba - PR: ABRICOM, 13 out. 2015a

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Aplicação do algoritmo de busca harmônica no projeto de um regulador linear quadrático com ação integral**. In: XII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. Natal-RN: 25 out. 2015b

NASCIMENTO, L. B. P. *et al.* **Um modelo híbrido de busca harmônica e otimização por enxame de partículas aplicado no projeto do controlador lqr**. In: XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Vitória-ES: 3 out. 2016

NELDER, J. A.; MEAD, R. A Simplex Method for Function Minimization. **The Computer Journal**, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1 jan. 1965.

OGATA, K. **Modern control engineering**. 3rd ed ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1997.

OHRI, J.; KUMAR, N.; CHINDA, M. **An improved genetic algorithm for PID parameter tuning**. Proceedings of the 2014 International Conference on Circuits, Systems, Signal Processing. **Anais...** In: 2014 INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIRCUITS, SYSTEMS, SIGNAL PROCESSING. 2014

PFEIL, W. H.; DE LOS REYES, G.; BOBULA, G. A. **The application of LQR synthesis techniques to the turboshaft engine control problem**. 1 jun. 1984.

PINTO, V. P. **Modelagem e Simulação de uma Planta Eólica controlada por um Regulador Linear Quadrático conectada ao Sistema de Distribuição de Energia Elétrica**. Dissertação de Mestrado—Fortaleza-CE: Universidade Federal do Ceará - UFC, 2007.

POODEH, M. B. *et al.* **Optimizing LQR and pole placement to control buck converter by**

**genetic algorithm.** International Conference on Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS '07. **Anais...** In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS, 2007. ICCAS '07. Outubro 2007

PRIYADI, A.; YORINO, N.; ZOKA, Y. **Design Optimal Feedback Control Using Evolutionary Particle Swarm Optimization in Multi-machine Power System.** ResearchGate. **Anais...** In: THE INSTITUTE OF ELECTRICAL INSTALLATION ENGINEERS OF JAPAN (IEIEJ). 5 set. 2007

RAJINIKANTH, V.; LATHA, K. Controller Parameter Optimization for Nonlinear Systems Using Enhanced Bacteria Foraging Algorithm. **Applied Computational Intelligence and Soft Computing**, v. 2012, p. 1–12, 2012.

ROBANDI, I. *et al.* Optimal feedback control design using genetic algorithm in multimachine power system. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 23, n. 4, p. 263–271, Maio 2001.

SELAMAT, H.; BILONG, S. D. A. **Optimal controller design for a railway vehicle suspension system using Particle Swarm Optimization.** IEEE, jun. 2013

SHIEH, L. S.; SUNKEL, J. W.; WANG, Y. J. **A linear quadratic regulator approach to the stabilization of uncertain linear systems.** AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. **Anais...** In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE. Portland, OR, United States: NASA, 1 jan. 1990

SOLIHIN, M. I.; WAHYUDI; AKMELIAWATI, R. **PSO-Based Optimization of State Feedback Tracking Controller for a Flexible Link Manipulator.** International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition, 2009. SOCPAR '09. **Anais...** In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF SOFT COMPUTING AND PATTERN RECOGNITION, 2009. SOCPAR '09. Dezembro 2009

STEIN, G. **Generalized quadratic weights for asymptotic regulator properties.** 1978 IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes. **Anais...**1978

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **J. of Global Optimization**, v. 11, n. 4, p. 341–359, Dezembro 1997.

SUJITJORN, S. *et al.* Adaptive tabu search and management agent. **The ECTI Transactions on Electrical Engineering, Electronics, and Communications**, v. 8, 2009.

SUN, J.; FENG, B.; XU, W. **Particle swarm optimization with particles having quantum behavior.** Congress on Evolutionary Computation, 2004. CEC2004. **Anais...** In: CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, 2004. CEC2004. jun. 2004

SWORDER, D. A feedback regulator for following a reference trajectory. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 22, n. 6, p. 957–959, dez. 1977.

WEI, L.; YAO, W. **Design and implement of LQR controller for a self-balancing unicycle robot.** 2015 IEEE International Conference on Information and Automation. **Anais...** In: 2015 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION AND AUTOMATION. ago.

2015

YANG, X.-S. **Nature-inspired metaheuristic algorithms**. 2. ed ed. Frome: Luniver Press, 2010.

YI, J. *et al.* **Optimal design of photovoltaic-wind hybrid renewable energy system using a discrete geometric selective harmony search**. Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD), 2015 IEEE 19th International Conference on. **Anais...** In: COMPUTER SUPPORTED COOPERATIVE WORK IN DESIGN (CSCWD), 2015 IEEE 19TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON. IEEE, maio 2015

## APÊNDICE A – VALORES DA 1ª SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O HELICÓPTERO CHINOOK CH-47

A tabela abaixo apresenta os valores obtidos por meio da primeira série de simulações com o Chinook CH-47.

Medida	HS	IHS	DHS
Erro de Convergência	0.5259	0.6503	0.3452
	0.3859	0.3253	0.3277
	0.5763	0.8260	0.3328
	0.9812	0.4652	0.2344
	0.9691	0.5529	0.3712
	0.4151	0.5708	0.4498
	0.6421	0.4422	0.4053
	0.6588	0.8115	0.3973
	0.6358	0.4894	0.5024
	0.6490	0.4521	0.5555
	0.6632	0.3610	0.3521
	0.3851	0.8386	0.3471
	0.7499	0.6655	0.3846
	1.0174	0.3035	0.4102
	0.8500	0.6633	0.3252
	0.6673	0.3776	0.5483
	0.5913	0.4433	0.3954
	0.9448	0.5389	0.4591
0.4143	0.5771	0.3381	
0.8374	0.4911	0.3581	
Tempo de Convergência	20.9938	18.5995	18.5241
	20.9943	17.8848	19.7930
	25.6872	20.2438	19.2414
	22.8859	17.2048	18.7930
	20.6507	16.8973	18.6475
	20.5596	19.8383	19.6447
	24.1670	17.0851	19.3168
	29.8037	16.8006	17.7100
	18.9304	17.0404	18.7147
	18.6746	16.8203	17.2128
	18.1678	16.9313	17.8402
	18.2893	16.9082	20.7430
	18.2731	16.9932	17.5748
	18.2956	17.0967	18.3326
	18.1374	16.8293	17.8527
	18.3145	21.9032	18.2758
	18.3394	16.8301	17.9051
	18.6459	17.6955	18.7246
18.3530	17.7111	18.5746	
18.7145	17.2463	17.5165	

**APÊNDICE B – VALORES DA 2ª SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O  
HELICÓPTERO CHINOOK CH-47**

A tabela apresenta os valores obtidos por meio das simulações com o Chinook CH-47.

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Número de Improvisações	1693	2465	761
	6387	2219	1021
	4323	2036	700
	879	1603	1052
	5401	1465	1215
	9732	2438	767
	1514	1602	1239
	2170	2183	1096
	2597	1593	1276
	4122	1443	1207
	6334	1448	1102
	852	1789	388
	6164	2181	1015
	2675	2663	1397
	3306	1002	1409
	2592	2059	721
	4892	1677	846
	5899	2072	847
	2456	2247	1044
	10186	1399	1176
Tempo de Convergência	32,6128	49.0367	14.1564
	115,7989	45.4628	20.7743
	76,9494	43.5467	13.4468
	16,2767	35.2218	22.9308
	96.5133	29.2203	22.6259
	172.7836	55.2505	14.9793
	28.1633	34.5555	23.1506
	39.4957	44.9649	20.5641
	46.4222	30.7740	23.7656
	73.6387	28.8195	22.7432
	112.8965	31.7038	20.4552
	15.8408	34.6196	7.8075
	109.6931	43.4660	20.2597
	47.8897	50.6766	27.4340
	60.0142	19.4868	27.3371
	46.4891	38.9643	17.8217
	86.8696	32.4887	18.9184
105.0225	40.5076	16.7176	
43.9624	45.7164	20.2109	
184.4677	28.3816	21.2522	

**APÊNDICE C - VALORES DA 1ª SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O PÊNDULO  
INVERTIDO**

Valores obtidos por meio da primeira série de simulações com o Pêndulo Invertido

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Erro de Convergência	0.3397	0.2825	0.2066
	0.2820	0.2607	0.1972
	0.2697	0.2506	0.2217
	0.2314	0.3003	0.2368
	0.3142	0.2086	0.2505
	0.3174	0.2498	0.2398
	0.3955	0.2436	0.2930
	0.2488	0.2337	0.2838
	0.3075	0.2481	0.2105
	0.2860	0.2229	0.2576
	0.3758	0.2313	0.2515
	0.2564	0.2585	0.2302
	0.2335	0.2526	0.2042
	0.2869	0.2282	0.2746
	0.2977	0.2699	0.2083
	0.3143	0.2746	0.2244
	0.3256	0.2445	0.2699
0.2922	0.2723	0.2441	
0.2068	0.2502	0.2050	
0.3134	0.3409	0.1979	
Tempo de Convergência	17.0261	11.7359	12.6518
	16.6460	15.2801	12.0525
	15.9366	14.3600	13.0400
	16.9796	12.8009	12.9999
	20.1104	11.8511	13.1853
	16.4867	11.8510	13.6794
	15.8090	12.6941	13.3127
	16.1739	11.8595	12.5051
	16.1547	12.4294	12.2150
	15.5559	12.1621	12.9051
	15.7749	12.4516	12.0847
	15.5632	12.5414	14.0539
	15.5248	11.7629	12.1282
	19.4432	11.4832	13.2209
	15.5058	11.3339	12.3558
	15.9626	11.2889	14.8974
	17.3208	13.7627	13.4152
15.4687	13.9083	12.3152	
15.3825	13.4315	12.6041	
16.6479	13.4551	12.0105	

**APÊNDICE D - VALORES DA 2ª SÉRIE DE SIMULAÇÕES COM O PÊNDULO  
INVERTIDO**

Valores obtidos por meio da segunda série de simulações com o Pêndulo Invertido

<b>Medida</b>	<b>HS</b>	<b>IHS</b>	<b>DHS</b>
Número de Improvisações	14600	2383	2128
	7173	2956	1929
	4927	3539	2762
	31546	2942	3357
	11325	2735	3109
	11632	4466	2143
	14928	4127	2242
	24557	3777	1751
	11852	3144	2825
	10558	2568	2675
	12784	2669	2684
	6740	3214	2832
	4001	3430	1937
	13944	3382	2674
	10303	2691	2868
	11445	3442	2733
	16606	3739	2239
	12511	1963	2392
	12690	3406	2885
	14975	2104	2557
Tempo de Convergência	116.2670	20.6457	19.4115
	56.0846	23.3383	17.6532
	38.7080	26.7053	23.9787
	250.9310	23.0108	25.3249
	89.2968	21.6934	25.4182
	88.4489	36.6559	20.1440
	113.3707	35.0236	19.6425
	188.7533	28.6037	14.4530
	90.6509	25.7778	22.3781
	80.9149	20.5501	23.0753
	98.0358	20.7835	21.8093
	51.9415	27.3934	22.9965
	31.3836	35.3829	17.8750
	106.6988	30.0583	21.0244
	78.2389	21.7680	22.7294
	87.7211	28.7931	23.0077
	130.1498	30.9601	22.5159
	99.6806	16.5457	21.3274
	105.2646	28.3269	21.7792
	126.1981	18.0307	19.4282