



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DE MESTRADO**  
**PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL (PROFMAT)**

**ISAAC NOBRE LIMA DA SILVA**

**A TROMBETA DE GABRIEL**

**FORTALEZA**

**2016**

ISAAC NOBRE LIMA DA SILVA

A TROMBETA DE GABRIEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho

FORTALEZA

2016

## A TROMBETA DE GABRIEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26/08/2016

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho(Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

G117t      Silva, Isaac Nobre Lima da  
            A Trombeta de Gabriel / Isaac Nobre Lima da Silva. – 2016.  
            81 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho.

1. Integral imprópria. 2. Trombeta de Gabriel. 3. Paradoxo do Pintor. I. Título.

---

CDD 510

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me ajudar desde o meu acesso ao mestrado até o seu término.

À minha mãe Neusa Maria Nobre Lima, com todo meu amor e gratidão, por tudo que fez por mim ao longo de minha vida e por ser merecedor do esforço dedicado a mim em todos os aspectos, especialmente à minha formação.

À minha esposa, Morgana Lima da Rocha, pelo seu apoio e pela sua compreensão dos momentos que estive ausente do seio familiar para estudos.

À minha filha, Maria Iorrana da Rocha Nobre, por me inspirar a lutar por um futuro cada vez melhor e me descontraír, através de nossas brincadeiras, tornando o caminhar desse curso mais prazeroso.

À minha filha, Maria Iana da Rocha Nobre que está por vir, por me encher de esperança em um mundo melhor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho, pela dedicação, eficiência e compromisso na orientação.

Aos professores Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho, Dr. Joserlan Perote da Silva, Dr. Romildo José da Silva, Dr. Marcos Ferreira de Melo e Me. José Afonso de Oliveira, pelas excelentes aulas ministradas.

A todos os meus colegas de mestrado da UFC pelas reflexões, críticas e companheirismo.

Aos meus amigos professores que sempre torciam por minha vitória.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva e Prof. Dr. Ângelo Papa Neto pelo tempo dedicado ao exame deste trabalho, pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

"Não sabendo que era impossível, foi lá e fez"

(Jean Cocteau/Mark Twain)

## RESUMO

O infinito é um conceito que por muitas vezes desafia nossa intuição e nos faz cometer erros, pois temos a ideia que o infinito está necessariamente ligado a algo ilimitado.

No Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, definimos integral definida  $\int_a^b f(x)dx$  considerando uma função  $f$  contínua num intervalo fechado e limitado  $[a,b]$ . Porém, em algumas aplicações nos deparamos com casos em que o intervalo é infinito ou a função  $f$  tem uma descontinuidade infinita no intervalo. Nesses dois casos, temos uma integral imprópria.

Indícios desse problema já foram observados, no século XVII, onde em 1641, o físico e matemático italiano Torricelli notou que uma área infinita, se submetida a uma rotação em torno de um eixo de seu plano, pode às vezes fornecer um sólido de revolução de volume finito.

Algo infinito pode gerar algo finito?! Isso desencadeia uma controvérsia sobre a natureza do infinito e gera um verdadeiro paradoxo. Um desses fascinantes sólidos de revolução é a Trombeta de Gabriel ou de Torricelli que é gerado a partir de uma hipérbole equilátera e podemos enunciar como o Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel :

*“Se uma área infinita, limitada pela hipérbole  $xy = 1$ , a reta  $x = 1$  e o eixo das abscissas é girada em torno do eixo, o volume do sólido gerado com essa rotação é finito. Dado que tal área é infinita, seria necessária uma quantidade infinita de tinta para poder pintá-la, porém, bastaria uma quantidade finita de tinta para poder preenchê-la, uma vez que o volume é finito.”*

De modo intuitivo, poderíamos enchê-la de tinta, mas nem toda tinta do mundo poderia pintar sua superfície. Sem dúvida um exemplo contraintuitivo que envolve o infinito.

De posse disso, o presente trabalho deseja apresentar através do Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel uma abordagem para o ensino de integrais impróprias tanto para alunos do Ensino Superior, quanto para alunos do Ensino Médio que desejam aprofundar os seus estudos de Cálculo.

Para isso, fazemos um resgate de conteúdos como comprimento de curva, área de superfície de revolução, volume de um sólido de revolução e hipérbole. Além disso, propomos uma discussão sobre a importância do Cálculo no Ensino Básico e o tal propalado “fracasso do ensino de Cálculo”.

**Palavras-chaves:** Integral imprópria. Trombeta de Gabriel. Paradoxo do Pintor. Sólido de revolução. Hipérbole Equilátera. Cálculo no Ensino Médio.

## ABSTRACT

Infinity is a concept which often defies our intuition and leads us to making mistakes, for we have the idea that infinite is necessarily related to something unlimited.

On Differential and Integral Calculus, for instance, we determine definite integral  $\int_a^b f(x)dx$  considering a continuous function  $f$  in a closed and limited interval  $[a, b]$ . However, in some applications we face cases where the interval is infinity or the function  $f$  has an infinite discontinuity in the interval. In both cases, we have an improper integral.

Evidence of this problem have been observed in the seventeenth century, where in 1641, the Italian physicist and mathematician Torricelli noted that an infinite area, if submitted to a rotation around an axis of its plan, can sometimes provide a solid of revolution with a finite volume.

Can something infinite generate something finite? This triggers a controversy about the nature of infinite and generates a real paradox. One of these fascinating solids of revolution is the Gabriel's Horn or Torricelli's Trumpet, generated out of an equilateral hyperbole, which can be enunciated as the Painter's Paradox and Gabriel's Horn:

"If an infinite area bordered by the hyperbola  $xy = 1$ , the line  $x = 1$  and the abscissa is rotated around the axis, the solid volume generated by this rotation is finite. Since this area is infinity, an infinite amount of paint would be necessary to paint it, however, a finite amount of ink would be enough to fill it, once the volume is finite."

Intuitively, we could fill it with ink, but not even all the paint in the world would be enough to paint its surface. Without a doubt this is a counterintuitive example involving infinity.

With that in mind, this paper aims to present through the Painter's Paradox and Gabriel's Trumpet an approach to teaching improper integrals for both, higher education and high school students who wish to deepen their studies on calculus.

For this end, a content recall is done on subjects like length of a curve, surface of revolution area, solid of revolution volume and hyperbola. Furthermore, it is proposed a discussion about the importance of Calculus on basic education and the widely known "failure at teaching Calculus."

**Keywords:** Improper Integral. Gabriel's Horn. Painter's Paradox. Solids of Revolution. Equilateral Hyperbole, Calculus on High School.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ , $1 < x < t$ .....	23
Figura 02 – Convergência de $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ e divergência de $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ .....	25
Figura 03 – Gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , $0 < x < 1$ .....	26
Figura 04 – Gráfico de $y = \ln x$ .....	28
Figura 05 – Convergência de $\int_1^0 x^{-\frac{1}{2}} dx$ , divergência de $\int_1^0 \frac{1}{x} dx$ e divergência de $\int_1^0 \frac{1}{x^2} dx$ . .....	30
Figura 06 – Análise de convergência e divergência da função $f(x) = \frac{1}{x^p}$ .....	31
Figura 07 – Teorema da Comparação.....	32
Figura 08 – Círculo através do limite dos comprimentos dos polígonos inscritos.....	34
Figura 09 – Aproximação da curva de $f(x)$ através de uma poligonal.....	35
Figura 10 – Gráfico da função $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ no intervalo $[0,2]$ .....	36
Figura 11 – Superfície de revolução. ....	38
Figura 12 – Cone e sua planificação.....	39
Figura 13 – Tronco de cone e sua planificação .....	40
Figura 14 – Superfície de revolução no intervalo $[a,b]$ .....	41
Figura 15 – Superfície de revolução de uma esfera.....	43
Figura 16 – Superfície de revolução do arco da parábola .....	44
Figura 17 – Cilindro reto .....	46
Figura 18 – Cilindro Circular .....	46
Figura 19 – Cilindro Retangular.....	46
Figura 20 – Sólido S e secção transversal .....	46
Figura 21 – “Fatiando” o sólido S. ....	47
Figura 22 – “Fatiando” o sólido R.....	48
Figura 23 – Volume de um sólido de revolução no intervalo $[a,b]$ . ....	49
Figura 24 – Volume de uma esfera de raio $r$ . ....	50
Figura 25 – Volume gerado pela rotação em torno de $y$ da região delimitada.....	51
Figura 26 – Volume gerado pela rotação em torno de $x$ da região delimitada.....	52
Figura 27 – Sólido obtido pela rotação de $y = f(x)$ em torno de $y = c$ .....	53
Figura 28 – Volume gerado pela rotação em torno de $y = 2$ da região delimitada.....	54
Figura 29 – Secção cônica – Hipérbole .....	55
Figura 30 – Definição de Hipérbole .....	56
Figura 31 – Elementos da Hipérbole .....	58
Figura 32 – Hipérbole com focos no eixo $x$ .....	58

Figura 33 – Assíntotas da Hipérbole .....	59
Figura 34 – Hipérbole com focos no eixo $y$ .....	60
Figura 35 – Hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .....	61
Figura 36 – Hipérbole de equação $\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$ .....	62
Figura 37 – Hipérbole equilátera com centro na origem e com focos sobre o eixo $x$ .....	63
Figura 38 – Rotação de eixos coordenados .....	65
Figura 39 – Rotação de $45^\circ$ do eixo $xOy$ em torno da origem da hipérbole $x^2 - y^2 = a^2$ .....	66
Figura 40 – Hipérbole equilátera $xy = k$ , com $k < 0$ .....	68
Figura 41 – Rotação de $45^\circ$ do eixo $xOy$ em torno da origem da hipérbole $y^2 - x^2 = a^2$ .....	69
Figura 42 – Hipérbole equilátera $xy = k$ , com $k > 0$ .....	70
Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ . .....	73
Figura 44 – Curva $y = \frac{1}{x}$ , para $x \in [1, +\infty [$ . .....	74
Figura 45 – Trombeta de Gabriel ou Torricelli .....	74
Figura 46 – Massinhas de modelar de formato cilíndrico .....	75
Figura 47 – Massa de modelar de raio $r$ e comprimento $l$ .....	75
Figura 48 – Massa de modelar de raio $r_2 = \frac{r}{2}$ e comprimento $l_2 = 4l$ .....	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathcal{R}^*$	Conjunto dos números reais não nulos
$\forall$	Para todo
$\rightarrow$	Implicação lógica
$\in$	Pertinência de um elemento em um conjunto

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
2	<b>IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO NO ENSINO MÈDIO</b> .....	17
3	<b>INTEGRAL IMPRÓPRIA</b> .....	22
3.1	<i>Tipo 1: Intervalos infinitos</i> .....	22
3.2	<i>Tipo 2: Integrandos descontínuos</i> .....	26
3.3	<i>Testes da comparação para integrais impróprias</i> .....	31
4	<b>COMPRIMENTO DE ARCO</b> .....	34
5	<b>ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO</b> .....	38
5.2	<i>Áreas lateral de um cone circular reto</i> .....	38
5.3	<i>Áreas lateral de um tronco de cone circular reto de bases paralelas</i> .....	40
5.4	<i>Áreas de uma superfície de revolução</i> .....	41
6	<b>VOLUME</b> .....	45
6.1	<i>Volume de um sólido</i> .....	45
6.2	<i>Volume de um sólido de revolução</i> .....	48
7	<b>HIPÉRBOLE EQUILÁTERA <math>XY = K</math></b> .....	55
7.1	<i>Hipérbole</i> .....	55
7.2	<i>Hipérbole Equilátera</i> .....	63
7.2.1	<i>Equação da hipérbole equilátera com centro na origem</i> .....	63
7.2.2	<i>Equação da hipérbole equilátera com centro <math>C(x_0, y_0)</math></i> .....	63
7.2.3	<i>Hipérbole Equilátera <math>xy = k</math></i> .....	64
7.2.3.1	<i>Rotação de eixos coordenados</i> .....	65
7.2.3.2	<i>Hipérbole equilátera <math>xy = k</math>, com <math>k &lt; 0</math></i> .....	66

7.2.3.3	<i>Hipérbole equilátera <math>xy = k</math>, com <math>k &gt; 0</math></i> .....	68
<b>8</b>	<b>PARADOXO DO PINTOR E A TROMBETA DE GABRIEL</b> .....	<b>71</b>
8.1	<i>O que são paradoxos</i> .....	71
8.2	<i>Paradoxo do pintor e a Trombeta de Gabriel</i> .....	72
8.2.1	<i>Área da Superfície da Trombeta de Gabriel</i> .....	77
8.2.2	<i>Volume da Trombeta de Gabriel</i> .....	79
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>82</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática durante milênios vem solucionando problemas considerados, na sua época, impossíveis de serem resolvidos ou até mesmo tornando compreensível algo, até então, inatingível. Porém, um grande desafio é o seu ensino, isso por conta de muitas vezes ela estar desprendida de aplicações práticas do cotidiano do aluno, fazendo com que o aprendizado seja vazio de significados. É o que ocorre, por exemplo, com os estudos de funções no Ensino Médio, aonde pelo fato do Cálculo Diferencial e Integral não estar presente na sua grade curricular, torna o ensino de funções carente de aplicações e sentido.

De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de Matemática vão de encontro à evolução história do conhecimento matemático, onde ele está presente para facilitar e resolver problemas, que sem ele, seriam muito difíceis.

Notamos que o Cálculo no ensino básico é “escondido” dos alunos de maneira forçada, pois o seu uso seria bem natural e necessário para que o aluno de fato compreendesse vários conceitos, preenchesse lacunas deixadas e tivesse posse de aplicações que incentivariam o seu desejo de descoberta e o prazer que o Cálculo oferece. Fato que comentamos já no nosso capítulo 2, intitulado Importância do Cálculo no Ensino Médio.

Por conta disso, no Ensino Superior, o ensino de Cálculo nos diversos cursos de Ciências Exatas e Tecnológicas é tão propalado como fracasso, pois o aluno que vem do Ensino Básico chega com várias lacunas de um ensino fragmentado e sem sentido.

Um dos assuntos de Cálculo em que tanto os alunos apresentam mais dificuldade quanto os professores em ensiná-lo é o tópico de Integrais Impróprias, que muitas vezes está desassociado a aplicações concretas. Com base nisso, o presente trabalho tem objetivo de através do Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel oferecer uma abordagem para o ensino de integrais impróprias tanto para alunos do Ensino Superior, quanto para alunos do Ensino Médio que desejam aprofundar os seus estudos de Cálculo.

Imagine uma superfície infinita obtida pela rotação de um gráfico de uma função, onde é possível preencher a parte interior com unidades finitas de tinta, porém nem toda tinta do mundo poderia pintar sua superfície. Sim. Isso é possível! Trata-se da Trombeta de Gabriel.

Sem dúvida um problema intrigante que motivaria o aluno, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior a avançar nos estudos de limite, derivada, integral e compreender mais o conceito de infinito.

Partimos do recorte em que o leitor já está familiarizado com limites, derivadas e integrais e deseja estudar integrais impróprias através da motivação inicial oferecida pelo Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel, porém por questão de importância, fazemos um resgate de conteúdos como de comprimento de curva, área de superfície de revolução, volume de um sólido de revolução e estudo de hipérbole, já que a curva que origina a Trombeta ser um dos ramos de uma hipérbole equilátera, que serão indispensáveis para entendermos o que ocorre na Trombeta de Gabriel.

Como motivação para o estudo de integrais impróprias, aconselhamos que o leitor seguisse o seguinte roteiro: começasse a leitura do capítulo 2 e em seguida, deslocasse para capítulo 8 – Paradoxo e Pintor e a Trombeta de Gabriel, para à medida que necessário, conforme o texto sugere, fosse perpassando pelos demais capítulos.

## 2 IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

O ensino e a aprendizagem de Matemática em todos os níveis de escolaridade, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior, tem sido foco de muitos estudos. Os alunos normalmente apresentam dificuldades em internalizar conceitos matemáticos e não vêem sentido e nem praticidade no que é estudado em sala de aula. Muito disso, credita-se a linguagem matemática carregada de simbolismo e formalismo, como destaca Ávila:

“[...]A linguagem não motiva ninguém, ideias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguçe a curiosidade” (AVILA, 1993, p. 3).

No Ensino Médio ocupa-se praticamente todo o primeiro ano com o formalismo e o simbolismo da teoria dos conjuntos, deixando de lado pontos bem mais interessantes e motivadores: a aplicação de cada função, a visualização do comportamento do gráfico, utilização da matemática como ferramenta de resolução de problemas cotidianos.

O que a Matemática Moderna fez com o ensino de funções redundou num desenvolvimento excessivamente formal, abstrato e longo desse tópico do programa, ocupando toda a primeira série do 2o grau, e afastado das aplicações que podem se constituir em boa motivação. Atualmente gasta-se muito tempo explicando as operações de união, intersecção e produto cartesiano de conjuntos, para se chegar à definição de função como um caso particular de relação. Isto nada tem de motivador para o aluno e é irrelevante nos exemplos de funções que são discutidos nesse estágio do aprendizado, todos eles dados por fórmulas simples (AVILA, 1993, p. 6).

O ensino de funções que não enfatiza a aplicação e a visualização pode refletir nas dificuldades que se apresentam atualmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no mais diversos cursos superiores nas áreas de ciências exatas e tecnologias. Estudos e pesquisas têm apontado que há um grande número de reprovações nas disciplinas iniciais de Cálculo dos cursos superiores no Brasil, que envolvem conceitos relacionados ao estudo de funções, como limites, derivadas e integrais. Segundo Rezende:



Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado “fracasso no ensino de Cálculo”. Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal “fracasso”, verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo (REZENDE, 2003, p.1)

Uma possível saída desse “fracasso no ensino de Cálculo” poderia ser solucionado ao introduzirmos conceitos como limites, derivadas e integrais no Ensino Médio, através de estratégias que contemplem a interdisciplinaridade e torne o aprendizado da matemática mais amplo, fazendo com que o aluno tome posse das diversas aplicações cotidianas que o Cálculo oferece, deixando, assim, o ensino da matemática mais atraente e efetivo na vida do aluno.

Ávila, em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, questiona a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio:

Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1)

No Brasil, uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo das escolas secundárias por duas vezes, segundo Carvalho (1996): a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961. Porém nas décadas de 60 e 70, o ensino de matemática no Brasil e em outros países foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna, e como consequência, houve a exclusão de alguns conteúdos dos antigos programas, dentre eles o Cálculo.

Atualmente, alguns livros didáticos do Ensino Médio apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, como limite, derivada e integral. Entretanto, esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restritos ao ensino superior. Dessa forma, o Cálculo faz parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio.

De fato, introduzir o Cálculo no Ensino Médio não é uma tarefa fácil, isso porque o entendimento de novas simbologias é complicado por boa parte dos alunos. Para termos êxito, deveríamos abrir mão de toda a linguagem formal, simbólica, bem como o rigor de seus teoremas, demonstrações e definições, pois esses conteúdos cheio de detalhes exigem conhecimentos específicos que ainda não foram apropriados pelos alunos nessa fase.

Assim, o ideal seria introduzirmos o Cálculo de acordo com problemas historicamente geradores:

- O problema da reta tangente
- O problema da velocidade instantânea
- O problema da Área

Esses três problemas estão intimamente ligados aos princípios fundamentais do Cálculo e a processos infinitos de aproximação que podem ser estudados de forma conjunta a funções.

O trabalho com essas ideias geradores possibilita o aluno a abrir sua mente para vários horizontes, torna problemas mais simples de serem entendidos e faz a Matemática ser prazerosa de ser estudada, pois o Cálculo permite com que o aluno se aventure nas diversas situações-problemas com aplicações na vida real.

De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do “esconderijo forçado” a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo. [...] (REZENDE, 2003, p. 402).

Além disso, o Cálculo possui a capacidade de atrair a atenção e o interesse dos alunos, já que aborda ideias diferentes das que normalmente são estudadas pelos alunos.

O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. (ÁVILA, 1991, p.3)

O problema da reta tangente pode ser abordado a partir do conceito de reta secante ao gráfico da função, fazendo com que a reta secante se aproxime cada vez mais de uma reta tangente, à medida que consideramos intervalos cada vez menores no domínio da função. Com isso, introduziríamos o conceito de derivada de uma função em determinado ponto, através do cálculo do coeficiente angular dessa reta tangente ao gráfico em um ponto desejado. Assim, facilitaríamos, por exemplo, o estudo de máximos e mínimos de funções, que no Ensino Médio fica limitado a fórmulas; a construção de gráficos das funções exponenciais e logarítmicas; também tornaríamos mais fácil o entendimento da disciplina de Física, pois o tópico de Cinemática e Mecânica Newtoniana seria bem mais compreendido, haja vista que eles nasceram juntos com Cálculo e fica incoerente sem ele.

É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (ÁVILA. 1991, p.4)

Sem o uso do Cálculo em Física, ficamos presos a situações distantes da realidade, como no caso da Cinemática do Ensino Médio em que consideramos que a aceleração de um objeto é nula ou constante, porém, na vida real, o movimento que descrevemos ao andarmos de carro, por exemplo, tem aceleração não constante. Contudo, através da ideia de integral, poderíamos obter uma expressão para posição através da velocidade e essa, por sua vez, a partir da aceleração.

O entendimento da velocidade instantânea de um móvel é também um grande desafio para os alunos sem conhecimento de Cálculo. Com isso os livros e professores se

restringem a falar apenas da velocidade média. Porém em uma situação real, se observarmos o velocímetro de um carro no tráfego urbano, vemos que o ponteiro não fica parado por muito tempo, e dessa forma, se faz necessário descobrir a velocidade instantânea em um dado momento. Com o auxílio do Cálculo poderíamos obter facilmente a velocidade instantânea como o valor limite das velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, permitindo com que o aluno compreenda mais conceitos de infinito.

O terceiro problema gerador é o problema da área, ao qual focamos mais o nosso trabalho. Um aluno do Ensino Médio é capaz de calcular área de figuras planas regulares como retângulo, quadrado, trapézio, triângulo, círculos, bem como, de figuras derivadas delas.

Porém, na vida real, a maioria dos terrenos, por exemplo, são regiões irregulares. Assim, algo desafiador seria propor aos alunos que calculassem a área de regiões irregulares, como por exemplo, regiões curvas delimitadas pelo gráfico da função em um determinado intervalo.

Se o aluno já teve contato com a ideia de aproximação ao trabalhar com limites, fica fácil do aluno perceber a ideia de aproximação da área da região que queremos através da soma de áreas menores, constituídas por figuras geométricas já conhecidas, introduzindo assim o conceito de integral.

Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos. (MACHADO, 2008, p.3)

A inclusão de conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio poderia proporcionar aos alunos uma melhor preparação e motivação para o ingresso no ensino superior, uma vez que ilustraria a interdisciplinaridade. Além disso, poderia tornar mais ampla e natural a aprendizagem de conteúdos do próprio Ensino Médio, visto que alguns conceitos poderiam ser apresentados de forma mais generalizada e contextualizada.

### 3 INTEGRAL IMPRÓPRIA

Na definição de integral definida  $\int_a^b f(x)dx$ , consideramos uma função  $f$  contínua num intervalo fechado e limitado  $[a,b]$ . Agora, como o auxílio da teoria de limites, estenderemos esse conceito para os casos em que o intervalo é infinito e para o caso em que a função  $f$  tem uma descontinuidade infinita no intervalo  $[a,b]$ . Nesses dois casos, denominamos a integral como integral imprópria.

#### 3.1 Tipo 1 : Intervalos infinitos

Antes de enunciar qualquer definição, analisemos a região infinita  $S$  determinada pelo gráfico da curva  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \geq 1$  e o eixo  $x$ .

De forma intuitiva e espontânea, poderíamos concluir, de maneira equivocada, que como  $S$  tem extensão infinita, sua área  $A(S)$  também é infinita, porém, se analisarmos com mais atenção, veremos que a área dessa região tende para um número real.

Calculando a área da região  $S$  em função do parâmetro  $t$  (figura 1), encontramos:

$$\begin{aligned} A(S_t) &= \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Desse modo, a área da região ilimitada  $S$  é dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{t \rightarrow \infty} A(S_t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) = 1 \end{aligned}$$

Observe que a área da região  $S$  se aproxima de 1 quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, concluímos que a área da região infinita  $S$  é igual a 1 e denotamos como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1$$

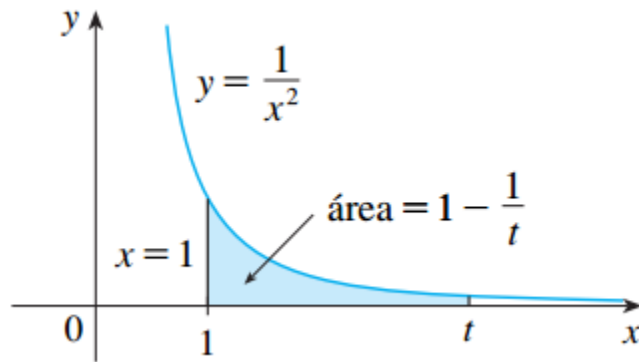


Figura 1 – Gráfico de  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $1 < x < t$

Essa integral é um exemplo de integral imprópria com limite de integração infinito.

Motivados por esse exemplo, a seguir definiremos integral imprópria de uma função  $f$ , não necessariamente positiva, com intervalos infinitos, como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

### 3.1.1. Definição de um Integral Imprópria do Tipo 1

(a) Se  $f$  é contínua em  $[a, \infty)$ , então

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

, desde que o limite exista.

(b) Se  $f$  é contínua em  $(-\infty, a]$ , então

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

, desde que o limite exista.

- As integrais impróprias  $\int_a^\infty f(x) dx$  e  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  são chamadas *convergentes* se os limites correspondentes dos itens (a) e (b) existem; e *divergentes* se os limites não existem.

(c) Se ambas  $\int_a^\infty f(x) dx$  e  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  são *convergentes*, então podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

- As integrais da definição acima podem ser interpretadas como uma área, desde que  $f$  seja uma função positiva, ou seja,  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  no domínio da função.

**Exemplo 3.1.1.** Verifique se a integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  é convergente ou divergente.

*Solução*

Utilizando a parte (a) da definição 3.1.1, temos que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln|x|]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t + 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty \end{aligned}$$

Observe que o limite não existe (como um número finito) e, desse modo, a integral imprópria  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  é *divergente*.

No início do capítulo, como forma motivacional para o estudo de integrais impróprias, determinamos a área da região  $S$ , definida pela curva  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \geq 1$  e o eixo  $x$ , onde encontramos que  $A(S) = 1$ , o que nos leva a concluir que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  é convergente, já que limite correspondente a essa integral existe e é igual a 1.

Para entendermos mais acerca do comportamento das duas funções  $y = \frac{1}{x^2}$  e  $y = \frac{1}{x}$  e o motivo da convergência e divergência das respectivas integrais impróprias, analisemos os gráficos da figura 2.

Apesar dos gráficos das duas funções serem muito semelhantes, a área da região correspondente sob  $y = \frac{1}{x^2}$  é finita, enquanto da região correspondente sob  $y = \frac{1}{x}$  é infinita. Isso se deve ao fato de que quando  $x \rightarrow \infty$  a função  $y = \frac{1}{x^2}$  se aproxima de 0 mais rapidamente que a função  $y = \frac{1}{x}$ , ou seja, os valores de  $\frac{1}{x}$  não diminuem suficientemente para que sua integral tenha um valor finito.

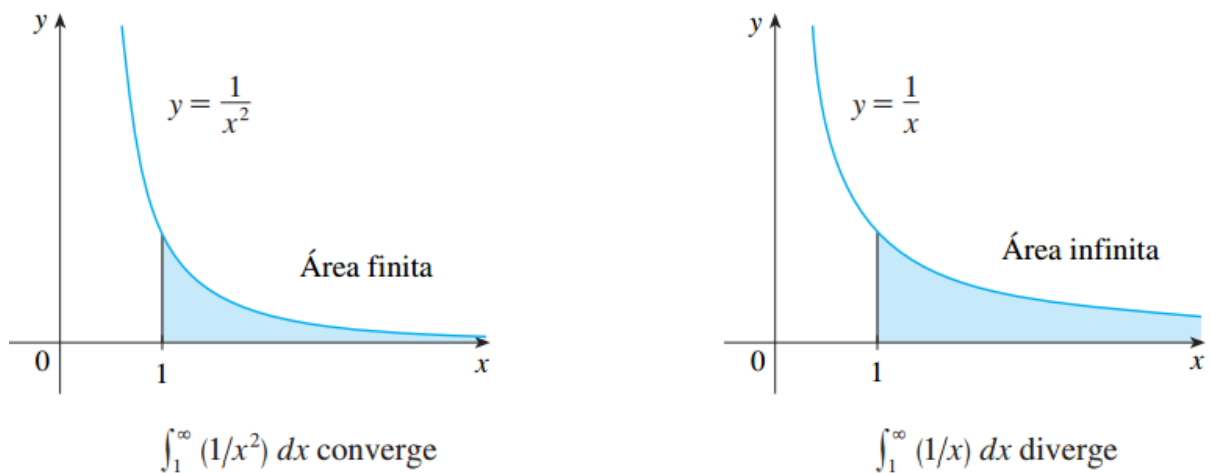


Figura 2 – Convergência de  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  e divergência de  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

**Teorema 3.1.1**  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p \leq 1$

*Demonstração*

Para  $p = 1$ , a integral é divergente, conforme vimos no exemplo 3.1.1.

Para  $p \neq 1$ , temos que  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[ \frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]$$

Se  $p > 1$ , então  $p - 1 > 0$ , assim, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $t^{p-1} \rightarrow \infty$  e  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0$ . Desse modo,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[ \frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right] = \frac{1}{1-p}(-1) = \frac{1}{p-1}$$



Assim, concluímos que a integral converge.

Se  $p < 1$ , então  $p - 1 < 0$ , assim, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $t^{p-1} \rightarrow 0$  e  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow \infty$ . Desse modo,

A integral diverge. ■

### 3.2 Tipo 2 : Integrandos descontínuos

Conforme fizemos no primeiro tipo de integral imprópria, antes de qualquer definição, considere a região S infinita delimitada sob o gráfico de  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , acima do eixo x no intervalo  $(0,1]$ .

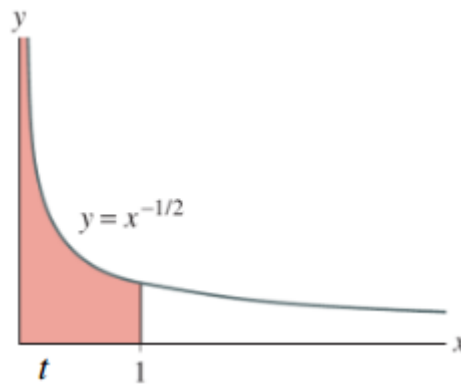


Figura 3 – Gráfico de  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $0 < x < 1$

Observe que essa função apresenta uma descontinuidade infinita em  $x = 0$ , ou seja, apresenta uma assíntota vertical em 0 (Para as integrais do *Tipo 1*, as regiões se estendem indefinidamente em uma direção horizontal. Já aqui é infinita em uma direção vertical). Admitindo um parâmetro  $t \neq 0$ , com  $t < 1$ , a área da região S compreendida no intervalo  $[t,1]$  é

$$\begin{aligned} A(S_t) &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= [2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t} \end{aligned}$$

Observe que à medida que  $t \rightarrow 0^+$ ,  $2\sqrt{t} \rightarrow 0$ ; e que

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} A(S_t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2 \end{aligned}$$

A área da região  $S_t$  (veja figura 3) se aproxima de 2 quando  $t \rightarrow 0^+$ , assim dizemos que a área da região infinita  $S$  é igual a 2 e escrevemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Essa integral é um exemplo de integral imprópria com uma descontinuidade infinita. Motivados por esse exemplo, a seguir definiremos integral imprópria de uma função  $f$  (não necessariamente uma função positiva) com uma descontinuidade infinita.

### 3.2.1 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 1: Integrandos Descontínuos

(a) Se  $f$  é contínua em  $[a, b)$  e descontínua em  $b$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

, se esse limite existir.

(b) Se  $f$  é contínua em  $(a, b]$  e descontínua em  $a$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

, se esse limite existir.

- A integral imprópria  $\int_a^b f(x) dx$  é chamada de *convergente* se o limite correspondente existir e *divergente* se o limite não existir.

(c) Se  $f$  tiver uma descontinuidade em  $c$ , onde  $a < c < b$ , e as integrais impróprias  $\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$  forem *convergentes*, então podemos definir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Exemplo 3.2.1** Determine, se possível, o valor  $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$

*Solução*

Observe que a função  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  apresenta uma descontinuidade em  $x = 1$ , dessa forma a reta  $x = 1$  é uma assíntota vertical do integrando. Como a descontinuidade ocorre entre o intervalo  $[0,3]$ , iremos utilizar o item (c) da definição 3.2.1.

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln|x-1|]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln|t-1| - \ln|-1|] \end{aligned}$$

Como  $t-1 < 0$ , quando  $t \rightarrow 1^-$ , teremos que  $|t-1| = 1-t$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) = -\infty \text{ (veja figura 4)}$$

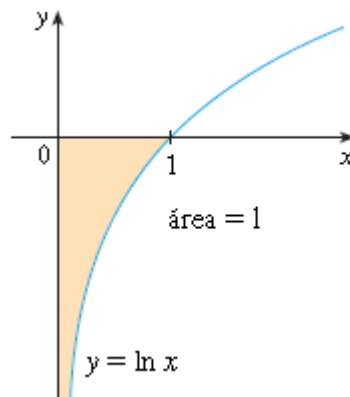


Figura 4 – Gráfico de  $y = \ln x$

Observe no gráfico  $y = \ln x$  que quando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\ln x \rightarrow -\infty$ . O mesmo ocorre em

$\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t)$ , quando  $t \rightarrow 1^-$ , temos que  $1-t \rightarrow 0^+$ , assim  $\ln(1-t) \rightarrow -\infty$

Assim, a integral  $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$  é divergente.

**Exemplo 3.2.2** Determine a convergência de  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

*Solução*

Observe que a integral é imprópria, pois o integrando apresenta uma descontinuidade infinita em  $x = 0$ . Assim, usaremos o item (b) da definição 3.2.1 onde

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln|x|]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln t) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = \infty \text{ (veja figura 4)} \end{aligned}$$

Assim a integral  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  é divergente.

**Exemplo 3.3.3** Determine a convergência de  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

*Solução*

Observe que a integral é imprópria, pois o integrando apresenta uma descontinuidade infinita em  $x = 0$ . Assim, usaremos o item (b) da definição 3.2.1 onde

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x} \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{t} - 1 \right) = \infty, \text{ pois quando } t \rightarrow 0^+, \frac{1}{t} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Em resumo, observe as seguintes integrais.

- (i)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$  *Convergente*
- (ii)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \infty$  *Divergente*
- (iii)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty$  *Divergente*

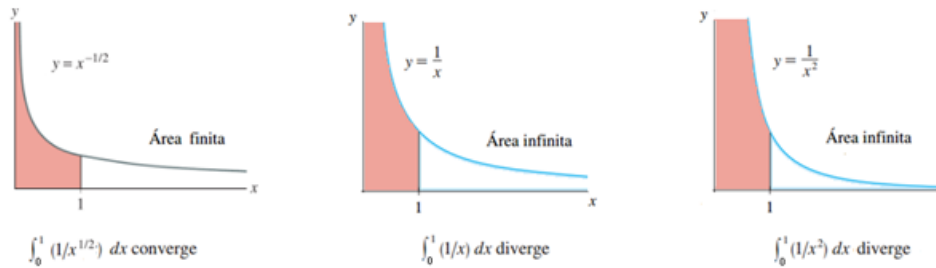


Figura 5 – Convergência de  $\int_1^0 \frac{1}{x^2} dx$ , divergência de  $\int_1^0 \frac{1}{x} dx$  e divergência de  $\int_1^0 \frac{1}{x^2} dx$

É fácil ver que a convergência ou divergência dessas integrais está relacionada com o expoente da variável  $x$ . Embora que as curvas sejam bem semelhantes para  $x > 0$ , a região referente à curva  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  tem área finita, enquanto das demais têm áreas infinitas. Isso se deve ao fato de à medida que  $x \rightarrow 0^+$ , a expressão  $x^{-\frac{1}{2}}$  se aproxima mais rápido de 0, em contrapartida, as demais não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenham um valor finito.

**Teorema 3.2.1**  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  é divergente se  $p \geq 1$  e convergente se  $p < 1$

*Demonstração*

Para  $p = 1$ , a integral é divergente, conforme vimos no exemplo 3.2.2

Para  $p \neq 1$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} \left[ 1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right] \end{aligned}$$

Se  $p > 1$ , então  $p - 1 > 0$ , assim, quando  $t \rightarrow 0^+$ ,  $t^{p-1} \rightarrow 0$  e  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow \infty$ . Desse modo,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} \left[ 1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right] = \infty$$

Assim, concluímos que a integral diverge.

Se  $p < 1$ , então  $p - 1 < 0$ , assim, quando  $t \rightarrow 0^+$ ,  $t^{p-1} \rightarrow \infty$  e  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0$ . Desse modo,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[ 1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right] = \frac{1}{1-p}$$

Assim, concluímos que a integral converge. ■

Em resumo, podemos analisar a convergência e a divergência, segundo a figura a seguir:

$p > 1$ :	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge	e	$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ diverge
$p < 1$ :	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ diverge	e	$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge
$p = 1$ :	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$	e	$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ambas divergem

Figura 6 – Análise de convergência e divergência da função  $f(x) = \frac{1}{x^p}$

### 3.3 Teste de Comparação para Integrais Impróprias

Algumas vezes é difícil encontrar o valor exato de uma integral imprópria, porém, ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. O teorema a seguir nos fornece uma ferramenta útil para ajudar nessa análise.

**Teorema 3.3.1** Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções contínuas com  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ , para  $x \geq a$ .

- (a) Se  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  é convergente.
- (b) Se  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  é divergente.

Não faremos a demonstração do Teorema da Comparação, por conta de necessitarmos de recursos do tópico de Séries, o que não é nosso objetivo. Porém uma análise geométrica desse teorema o torna bastante compreensível.

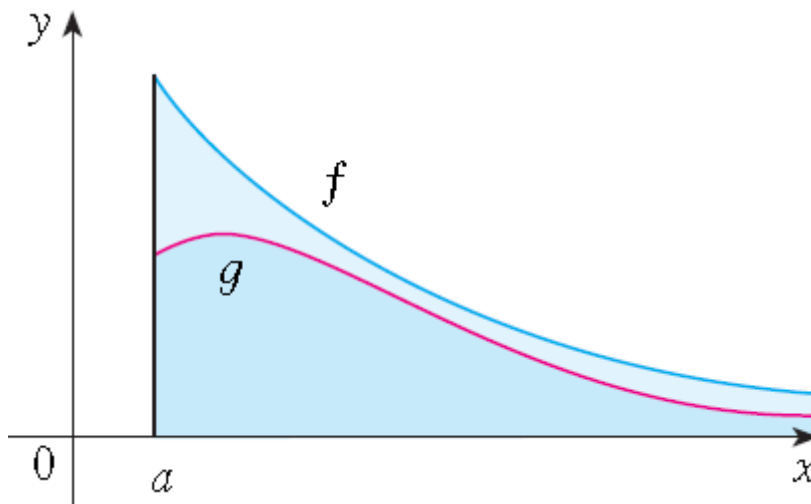


Figura 7 – Teorema da Comparação

É fácil ver que se a área sob a curva superior  $f$  for finita, então a área sob a curva inferior  $g$  também será, mostrando assim, de forma intuitiva, o item (a) do Teorema. Agora, se a área sob a curva inferior  $g$  for infinita, então a área sob a curva superior  $f$  também será, mostrando assim, de forma intuitiva, o item (b) do Teorema. Observe também que o item (a) e (b) têm o mesmo valor lógico ( $p \rightarrow q$ , então  $\sim q \rightarrow \sim p$ ), ou seja, o item (a) é a contrapositiva do item (b)

**Observação 3.3.1** A recíproca do Teorema 3.3.1 não é necessariamente verdadeira, ou seja, se  $\int_a^\infty g(x) dx$  for convergente, nada podemos afirmar sobre  $\int_a^\infty f(x) dx$ ; e se  $\int_a^\infty f(x) dx$  for divergente, nada podemos afirmar sobre  $\int_a^\infty g(x) dx$ , nos itens (a) e (b), respectivamente.

**Observação 3.3.2** O Teorema da Comparação, aqui enunciado, também é válido para Integrais Impróprias do Tipo 2 (integrandos descontínuos).

**Exemplo 3.3.1** Mostre que  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  é convergente.

*Solução*

Não podemos calcular a integral diretamente por conta que a primitiva de  $e^{-x^2}$  não pode ser expressa por uma função elementar e sua integral só pode ser expressa como uma série

infinita, por isso aplicaremos o Teorema da Comparação para mostrar que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  é convergente.

Para  $x \geq 1$ , temos que  $x^2 \geq x$ , então  $-x^2 \leq -x$ . Introduzindo uma base neperiana  $e$  em ambos os membros, teremos  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ . Assim temos que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx$  (i)

O que possibilitará a resolução do exemplo, pois  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  é fácil de calcular:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t = e^{-1}, \text{ logo } \int_0^{\infty} e^{-x} dx \text{ converge. (ii)}$$

De posse de (i) e (ii) e utilizando o item (a) do Teorema da Comparação, concluímos que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  é convergente.



#### 4 COMPRIMENTO DE ARCO

Em algumas aplicações, como a área da superfície de revolução, devemos determinar o comprimento do gráfico de uma função em certo intervalo. De modo intuitivo, poderíamos dividir o comprimento do gráfico em alguns segmentos e com o auxílio de uma régua graduada medi-los e determinar sua soma, porém, além desse método não ser nada eficiente, não teríamos a precisão desejada. Agora, se fizermos com que esses segmentos se tornem tão pequenos quanto quisermos e como consequência obtivermos o aumento consideravelmente o número de segmentos, teríamos uma aproximação bem mais eficiente. Processo similar pode ser visto no caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos (veja figura 8).

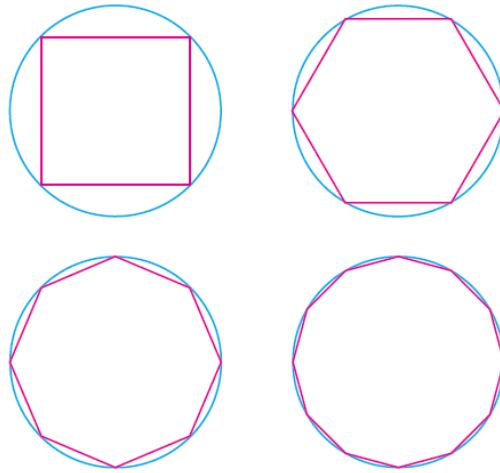


Figura 8 – Círculo através do limite dos comprimentos dos polígonos inscritos

O processo que utilizaremos para o gráfico de uma função é semelhante. Determinaremos o comprimento exato tomando um limite de somas de comprimentos de segmentos. Dessa maneira, encontraremos uma Soma de Riemann e obteremos uma integral definida. Para garantir a existência de tal integral deveremos garantir que a função  $f(x)$  seja *suave* no intervalo considerado, ou seja,  $f(x)$  tem uma derivada contínua em todo o intervalo, porque, assim, uma pequena mudança em  $x$  provocará uma pequena mudança na derivada  $f'(x)$  da função.

Agora, suponha uma curva  $C$  definida por uma função  $f$  suave e contínua no intervalo fechado  $[a,b]$ . Dividindo esse intervalo  $[a,b]$  em  $n$  subintervalos com extremidades

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$  de larguras iguais a  $\Delta x$ , obteremos uma poligonal que nos dá uma aproximação para o comprimento da curva  $C$ .

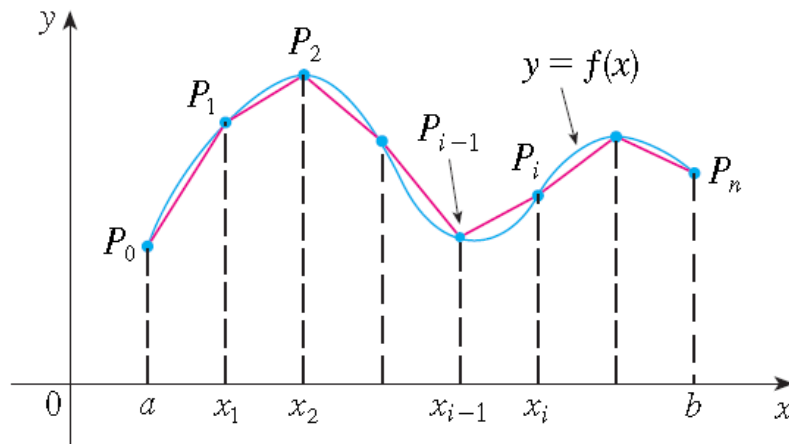


Figura 9 – Aproximação da curva de  $f(x)$  através de uma poligonal.

Considere a poligonal  $P$  com vértices  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ , conforme mostra a figura 9, observe que cada vértice  $P_i$  tem coordenadas  $(x_i, y_i)$ , onde  $y_i = f(x_i)$ . O comprimento  $L_p$  da poligonal  $P$  é dada por

$$L_p = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

O comprimento  $L$  da curva  $C$  se aproxima do comprimento da poligonal  $L_p$ , a medida que  $n$  aumenta, ou seja, a medida que tornamos  $\Delta x$  cada vez menor, portanto o comprimento  $L$  da curva  $C$  é o limite dos comprimentos dessas poligonais.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

Como  $|P_{i-1}P_i|$  representa a distância entre os pontos  $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$  e  $P_i(x_i, y_i)$ , então  $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$ , já que  $\Delta x$  é fixo.

Como  $f$  é uma função contínua e suave, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , descobrimos que existe um número  $x_i^*$  entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x \quad (i)$$

Substituindo (i) em  $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$ , encontramos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x. \text{ (ii)}$$

Voltando para o comprimento L da curva C e substituindo (ii), encontramos

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$ . O que representa uma soma de Riemann para função contínua  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}$ , dessa maneira podemos escrever essa expressão como uma integral definida.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Com isso, demonstramos o seguinte teorema:

**Teorema 4.1** Se f for suave no intervalo [a,b], então o comprimento L da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**Observação 4.1** Se uma curva de equação  $x = g(y)$  é suave em  $c \leq y \leq d$ , então o Teorema 4.1 poderá ser reescrito, fazendo uma mudança de papéis de x, como

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

**Exemplo 4.1** Determine o comprimento da curva  $y^2 = 4x^3$  entre os pontos (0, 0) e  $(2, 4\sqrt{2})$ .

*Solução*

Para porção superior da curva, temos que  $y = \sqrt{4x^3} = 2\sqrt{x^3} = 2x^{\frac{3}{2}}$ , conforme figura 10.

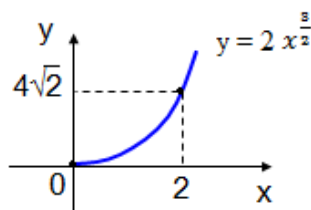


Figura 10 – Gráfico da função  $y = 2x^{\frac{3}{2}}$  no intervalo [0,2]

Como a função do exemplo é suave, podemos utilizar o teorema 4.1 para determinarmos o comprimento  $L$  da curva entre os pontos  $(0,0)$  e  $(2, 4\sqrt{2})$  :

Da função  $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ , obtemos que  $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$ , então

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + [3x^{\frac{1}{2}}]^2} \, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x} \, dx .$$

Para encontrarmos o valor da integral  $\int_0^2 \sqrt{1 + 9x} \, dx$ , faremos a substituição

$1 + 9x = u$ . Desse modo,  $du = 9dx$  e, assim,  $\int_0^2 \sqrt{1 + 9x} \, dx = \int_1^{19} \frac{\sqrt{u}}{9} \, du$ , já que quando  $x = 0$ , teremos que  $u = 1$ ; e quando  $x = 2$ , teremos  $u = 19$ . Assim,

$$\int_1^{19} \frac{\sqrt{u}}{9} \, du = \left[ \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^{19} = \frac{2}{27} \left[ 19^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

## 5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Uma *superfície de revolução* é uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo localizado no mesmo plano dessa curva. Por exemplo, a superfície lateral de um cilindro circular reto pode ser obtido rotacionando um segmento de reta em torno de um eixo paralelo a ele, e a superfície de uma calota esférica (“casca esférica”) pode ser obtida rotacionando uma semicircunferência em torno do seu diâmetro (figura 11).

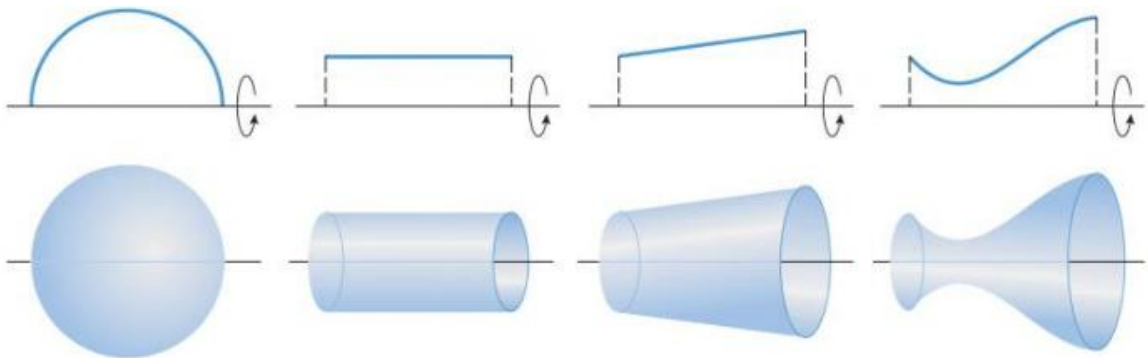


Figura 11 – Superfície de revolução

Consideraremos, aqui, uma curva  $C$  de uma função  $f$  suave e não negativa em um intervalo  $[a,b]$  e a partir de uma rotação de  $C$  em torno do eixo  $x$ , iremos obter uma superfície de revolução, ao qual estamos interessados em encontrar uma fórmula para a área de sua superfície  $S$ . Para isso, iremos decompor essa superfície  $S$  em pequenas seções cujas áreas possam ser aproximadas por fórmulas elementares (área de um tronco de pirâmide). Em seguida, ao somarmos as aproximações das áreas dessas seções, obteremos uma Soma de Riemann que se aproxima da área exata de  $S$ , e por fim, tomaremos o limite dessa Soma de Riemann, obtendo, assim, uma expressão na forma de integral para área da superfície  $S$ .

Antes de encontrarmos uma fórmula para área de uma superfície  $S$  genérica, precisamos encontrar uma fórmula para a área da superfície de um cone e de um tronco de cone.

### 5.1 Área lateral de um cone circular reto

Considere um cone circular reto de raio da base  $R$  e geratriz  $g$ , e sua planificação, conforme figura 12.

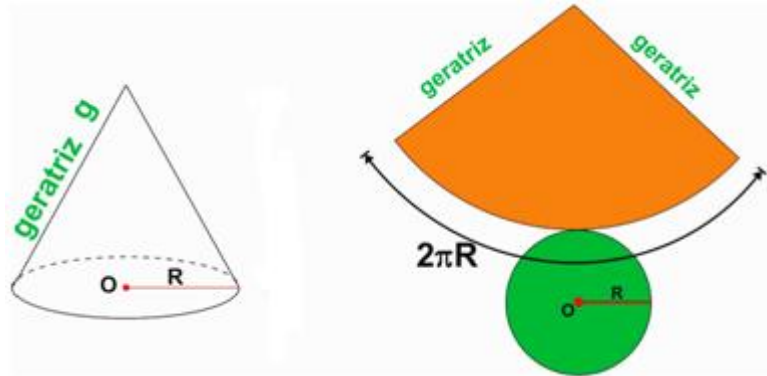


Figura 12 – Cone e sua planificação

Dessa forma, temos que a área lateral  $A_l$  da superfície desse cone será igual à área do setor circular de raio  $g$  e de arco de comprimento  $2\pi R$ , tomando uma proporção para relacionar área e comprimento de arco.

Área	Comprimento de arco
$\pi g^2$	$2\pi g$
$A_l$	$2\pi R$

A área do círculo de raio  $g$  está para o seu comprimento de arco correspondente  $2\pi g$ , assim como a área  $A_l$  está para o comprimento de arco  $2\pi R$ .

Assim,

$$A_l = \frac{2\pi R \cdot \pi g^2}{2\pi g}$$

$$A_l = \pi Rg$$

onde  $R$  corresponde ao raio da base do cone e  $g$  a geratriz do cone.

**Teorema 5.1** A área lateral de um cone circular reto de raio da base  $R$  e geratriz  $g$  é dada por

$$A_l = \pi Rg$$

## 5.2 Área lateral de um tronco de cone circular reto de bases paralelas

Considere um tronco de cone circular reto de vértice  $V$ , de raio maior  $R$ , raio menor  $r$  e geratriz  $g$ , e sua planificação, conforme figura abaixo.

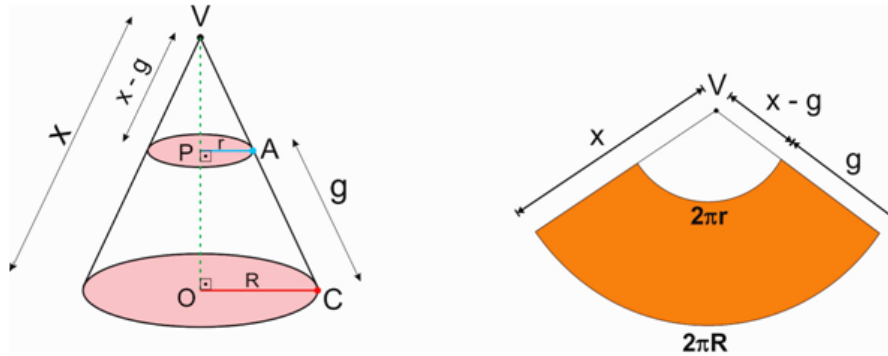


Figura 13 – Tronco de cone e sua planificação

Vamos calcular a área lateral do tronco  $T_l$  em função dos raios  $R$ ,  $r$  e da geratriz  $g$ . Notemos, inicialmente, os triângulos semelhantes  $\Delta VAP \sim \Delta VCO$ , de onde obtemos que

$$\frac{x-g}{r} = \frac{x}{R} \rightarrow x = \frac{gR}{R-r} \quad (\text{i})$$

Utilizando a definição 5.1, encontramos a área lateral  $B_l$  do cone de vértice  $V$  e raio  $R$  e a área lateral  $C_l$  do cone de vértice  $V$  e raio  $r$ :

$$B_l = \pi R x \qquad C_l = \pi r (x - g)$$

Observe que a área do tronco  $T_l$  é a subtração da área lateral  $C_l$  de  $B_l$ .

Assim,

$$T_l = B_l - C_l = \pi R x - \pi r (x - g) \quad (\text{ii})$$

Substituindo (i) em (ii), encontramos

$$T_l = \pi \frac{gR}{R-r} (R-r) + \pi r g$$

$$T_l = \pi g (R + r)$$

Fazendo uma substituição de variáveis, vamos fixar  $\bar{r}$  como sendo o raio médio do tronco, ou seja, a média aritmética entre R e r, isto é, faremos  $\bar{r} = \frac{R+r}{2}$ .

Desse modo, vamos reescrever a área lateral  $T_l$  do tronco de cone como

$$T_l = 2\pi\bar{r}g$$

**Teorema 5.2** A área lateral  $T_l$  de um cone circular reto de bases paralelas de raio maior R, raio menor r e geratriz g é dada por

$$T_l = 2\pi\bar{r}g, \text{ onde } \bar{r} = \frac{R+r}{2}$$

### 5.3 Área de um superfície de revolução

Seja f uma função suave não-negativa no intervalo [a,b]. Considere a superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x ( figura 14).

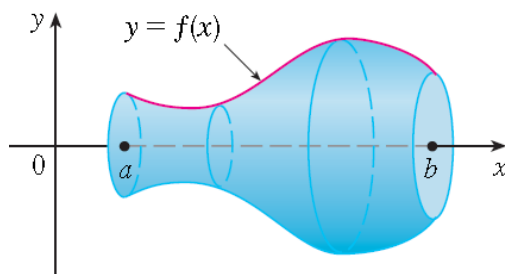


Figura 14 – Superfície de revolução no intervalo [a,b]

Para encontrarmos a área dessa superfície de revolução, apresentaremos uma estratégia semelhante à feita na seção de comprimento de arco, dividindo o intervalo [a,b] em n subintervalos com extremidades  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  e largura uniforme igual a  $\Delta x$ . Observe que o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está sobre a curva, já que  $y_i = f(x_i)$ . Considerando a poligonal de vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$  e a rotacionando em torno do eixo x, encontraremos uma aproximação para a superfície de revolução S. Analisando parte da superfície gerada por essas poligonais entre os pontos  $P_{i-1}$  e  $P_i$  no intervalo  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , vemos que se trata de um tronco



de cone de geratriz  $g = |P_{i-1} P_i|$  e raio médio  $r = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$ . Assim pela fórmula do teorema 5.2, a área de sua superfície é

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1} P_i|$$

Convidamos o leitor a fazer a leitura do capítulo 4 que trata de comprimento de arco, onde encontramos a expressão

$$|P_{i-1} P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x,$$

onde  $x_i^*$  é algum número em  $[x_{i-1}, x_i]$ . (por conta do teorema do valor médio). Quando tomamos um  $\Delta x$  pequeno, que é o caso, temos que  $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$  e  $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$ . Dessa forma, poderemos reescrever a expressão da área da superfície no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  como

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1} P_i| = 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Assim, a área da superfície completa formada pela poligonal  $S_p$  é

$$S_p = \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

que representa uma soma de Riemann para a função  $h(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ .

Portanto, a área da superfície de revolução  $S$  obtida pela rotação do gráfico de  $f$  é

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Reconhecemos essa expressão como sendo a integral definida

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**Teorema 5.3.1** Seja  $f$  uma função suave não-negativa no intervalo  $[a, b]$ , a área  $S$  da superfície gerada pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$  é dada por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**Observação 5.3.1** De maneira análoga, se uma curva de equação  $x = g(y)$  é suave em  $c \leq y \leq d$ , então o teorema 5.3.1 poderá ser reescrito, fazendo uma mudança de papéis de  $x$ , como

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

**Exemplo 5.3.1** Mostre que a superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ .

*Solução*

Sem perda de generalidade, admita uma circunferência centrada na origem de equação  $x^2 + y^2 = r^2$ . Tomando apenas a semicircunferência superior de equação  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  e rotacionando em torno do eixo  $x$ , conforme figura 15, obteremos a superfície da esfera que desejamos.

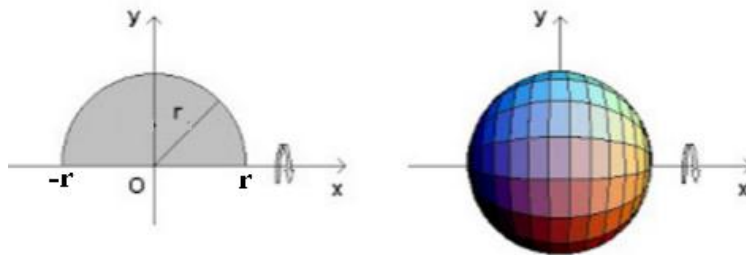


Figura 15 – Superfície de revolução de uma esfera

Utilizando a *regra da cadeia* para encontrar a derivada da função  $f$ , temos

$$f'(x) = \frac{(r^2 - x^2)^{-1/2}}{2} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dessa forma, aplicando o teorema 5.3.1 encontraremos que a área da superfície esférica  $S$  é

$$S = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left[ \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx,$$

como  $r^2 \geq x^2$ , teremos

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx,$$

como  $r > 0$ , teremos

$$S = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r(r + r)$$

$$S = 4\pi r^2 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 5.3.2** O arco da parábola  $y = x^2$  de  $(1,1)$  a  $(2,4)$  é rotacionado em torno do eixo  $y$ . Determine a área da superfície resultante.

*Solução*

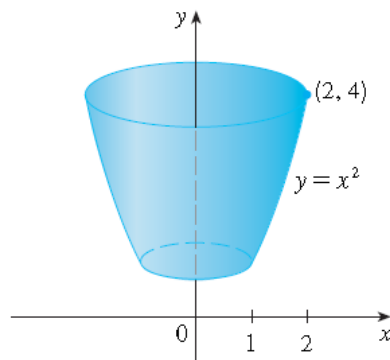


Figura 16 – Superfície de revolução do arco da parábola

Utilizando a função  $g(y) = x = \sqrt{y}$  correspondente ao “arco positivo”, temos que

$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ . Em seguida, aplicando a observação 5.3.1 temos que a área da superfície  $S$ , descrita na figura 16, é

$$S = \int_1^4 2\pi\sqrt{y} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{y}}\right]^2} dy = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$$

$$S = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1} dy$$

Fazendo a substituição  $u = 1 + 4y$  e após algumas manipulações, teremos

$$S = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{2u^{3/2}}{3} \right]_5^{17} = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

## 6 VOLUME

A partir da ideia intuitiva de volume, pretendemos, através do Cálculo, construir uma expressão que nos dê o volume de um sólido  $S$ . Para isso, utilizaremos a estratégia de “fatiar” o sólido  $S$ , onde cada “fatia” poderá ser aproximada a um sólido elementar bastante conhecido, trata-se do cilindro reto. Em seguida, ao somarmos as aproximações dos volumes dessa “fatias”, obteremos uma Soma de Riemann que se aproxima do volume exato de  $S$ , e por fim, tomaremos o limite dessa Soma de Riemann, obtendo, assim, uma fórmula, na forma de integral, para o volume do sólido  $S$ .

### 6.1 Volume de um sólido

Antes de encontrarmos uma fórmula para o volume de um sólido  $S$ , precisamos definir o *cilindro reto*. Isso se faz necessário, pois ao falar em cilindro reto já vem em mente de várias pessoas que suas bases obrigatoriamente são circulares, o que na realidade, esse representa apenas um caso específico de *cilindro reto*, o *cilindro circular reto*.

**Definição 6.1** Um sólido será chamado de *cilindro reto* se for limitado por duas regiões planas congruentes  $B_1$  e  $B_2$ , situadas em planos paralelos, que chamaremos de bases; e por uma superfície lateral gerada por todos os pontos dos segmentos de reta perpendiculares às bases, tendo esses segmentos extremos nos limites de  $B_1$  e  $B_2$ . A altura  $h$  de um cilindro é a distância entre os planos que contém  $B_1$  e  $B_2$ .

A figura 17 mostra um cilindro reto. Se as bases forem círculos, temos um cilindro circular reto, como mostra a figura 18. Já se as bases do cilindro reto forem retângulos, temos um cilindro retangular (também chamado de paralelepípedo retangular, que aparece na figura 19).

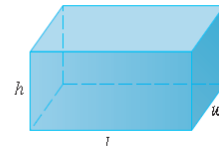
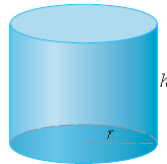
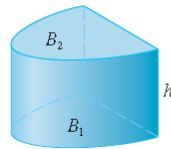


Figura 17 – Cilindro reto    Figura 18 – Cilindro circular    Figura 19 – Cilindro retangular

**Definição 6.2** Dos conhecimentos de Geometria espacial, sabemos que o volume  $V$  de um cilindro reto é definido como sendo o produto da área da base  $A$  pela altura  $h$  desse cilindro.

$$V = A \cdot h$$

Em particular, se a base  $A$  for um círculo de raio  $r$ , então o cilindro reto é um cilindro circular com volume  $V = \pi r^2 h$ ; se a base  $A$  for um retângulo de dimensões  $l$  e  $w$ , então o cilindro reto é um paralelepípedo retangular com volume  $V = lwh$ .

Admita o sólido  $S$ , que não é um cilindro, abaixo

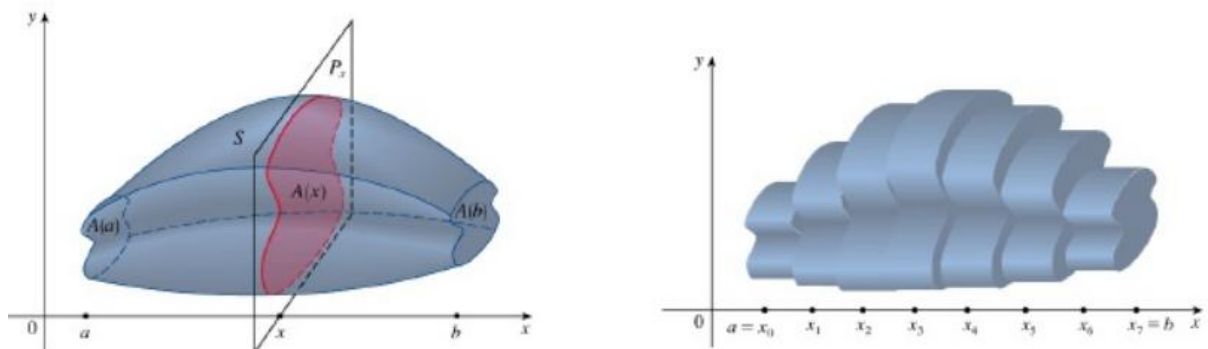


Figura 20 – Sólido  $S$  e seção transversal

Interceptando esse sólido por um plano genérico  $P_x$  perpendicular ao eixo  $x$ , passando por  $x$ , obtemos uma secção transversal de  $S$  no plano  $P_x$ . A medida da área da secção transversal  $A(x)$  varia conforme percorremos o intervalo  $[a,b]$  através de secções transversais de planos perpendiculares ao eixo  $x$ .

Dividindo  $S$  em  $n$  “fatias” de larguras fixas  $\Delta x$  através das secções que os planos  $P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, \dots, P_{x_{n-1}}$  (perpendiculares ao eixo  $x$ ) fazem em  $S$ , podemos aproximar cada fatia  $S_i$ , localizada entre os planos  $P_{x_{i-1}}$  e  $P_{x_i}$ , a um cilindro reto de altura  $\Delta x$  e área da base  $A(x_i^*)$ , onde  $x_i^*$  representa qualquer número entre o subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , essa escolha pode ser arbitrária pois iremos trabalhar com subintervalos de “largura” muito pequenos, isto é, com um  $\Delta x$  muito pequeno, onde  $x_i^* \approx x_{i-1} \approx x_i$ .

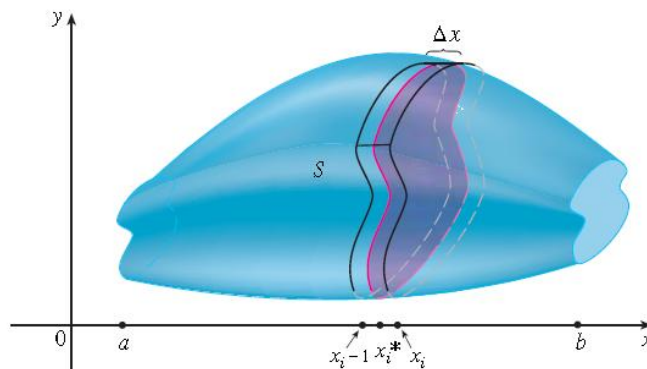


Figura 21 – ‘Fatiando’ o sólido  $S$

Dessa forma, o volume  $V(S_i)$  da fatia  $S_i$  pode ser aproximada pelo volume do cilindro reto de área  $A(x_i^*)$  e altura  $\Delta x$ , conforme figura 21.

$$V(S_i) \approx A(x_i^*) \Delta x$$

Façamos isso para cada uma das  $n$  “fatias”, isto é, teremos um sólido composto por  $n$  camadas de cilindros retos. Assim, o volume  $V$  do sólido  $S$  é uma aproximação das somas dos volumes desses cilindros retos

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x$$

À medida que aumentamos o número  $n$  de fatias, melhoramos nossa aproximação em relação ao volume exato  $V$ . Dessa forma, se fizermos  $n \rightarrow \infty$  nessa soma de Riemann para função  $A(x)$ , encontraremos uma integral definida que o seu resultado corresponde ao valor exato de  $V$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

**Teorema 6.1** Seja um sólido  $S$  definido no intervalo  $[a,b]$ . Se a área da secção transversal de  $S$  no plano  $P_x$  (plano perpendicular ao eixo  $x$  que passa por  $x$ ), é  $A(x)$ , onde  $A$  é uma função contínua, então o volume de  $S$  é

$$\int_a^b A(x) dx$$

**Observação 6.1** Do mesmo modo, se um sólido  $R$  (figura 22) tem secção transversal  $A(y)$  no plano  $P_y$ , plano perpendicular ao eixo  $y$  que passa por  $y$ ), onde  $A$  é uma função contínua, então o volume  $R$  no intervalo  $c \leq y \leq d$  é

$$\int_c^d A(y) dy$$

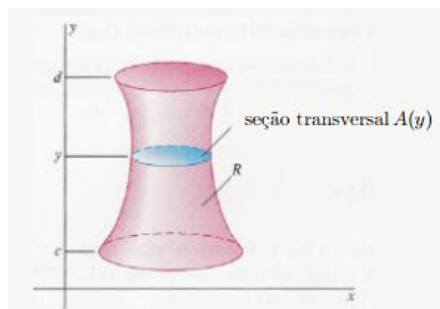


Figura 22 – ‘Fatiando’ o sólido R

## 6.2 Volume de um sólido de revolução

Mostraremos como o Teorema 6.1 pode ser usado para encontrarmos o volume  $S$  de um sólido de revolução. Nesse caso, a secção transversal será um círculo e as “fatias” se aproximarão a um *cilindro circular reto*.

Admita uma função  $f$  suave não-negativa no intervalo  $[a,b]$ , e considere o volume gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$  ( figura 23).

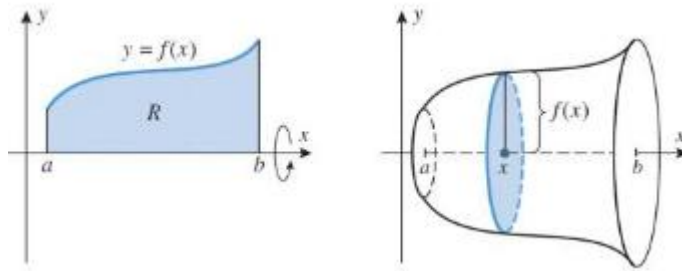


Figura 23 – Volume de um sólido de revolução no intervalo  $[a,b]$

Fazendo o mesmo processo para encontrar a fórmula de volume do teorema 6.1 e observando, nesse caso, que as secções transversais são círculos e as “fatias” são *cilindros circulares retos*, encontraremos que a área da secção transversal  $A(x)$  será

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

Com isso, a fórmula do volume do sólido relacionado será  $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

**Teorema 6.2** Seja uma função  $f$  suave não-negativa no intervalo  $[a,b]$ . Se  $S$  for o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , da região  $R$  limitada pela curva  $y = f(x)$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , então o volume  $V$  do sólido  $S$  é

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**Observação 6.2** De modo análogo, o volume  $V$  de um sólido de revolução obtido com a rotação, em torno do eixo  $y$ , da região limitada  $R$  pela curva  $x = g(y)$ , pelo eixo  $y$  e pelas retas  $y = c$  e  $y = d$  é

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

**Exemplo 6.2.1** Mostre que o volume de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .



### Solução

Sem perda de generalidade, admita uma circunferência de raio  $r$  centrada na origem de equação  $x^2 + y^2 = r^2$ . Tomando apenas a semicircunferência superior de equação  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  e rotacionando em torno do eixo  $x$ , obteremos a o volume da esfera que desejamos (figura 24).

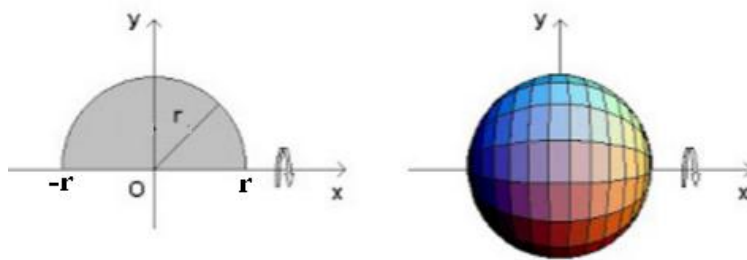


Figura 24 – Volume de uma esfera de raio  $r$

Utilizando o Teorema 6.2, temos que o volume da esfera  $V$  é

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 x - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[ r^2 r - \frac{r^3}{3} - r^2(-r) + \frac{(-r)^3}{3} \right]$$

$$V = \pi \left[ 2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 6.2.2** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por  $y = x^3$ ,  $y = 8$ , e  $x = 0$  em torno do eixo  $y$ .

### Solução

Como a região citada será rotacionada em torno do eixo  $y$ , as “fatias” do Sólido gerado são perpendiculares a eixo  $y$ , assim iremos integrar em relação a  $x$ , utilizando a observação 6.2.

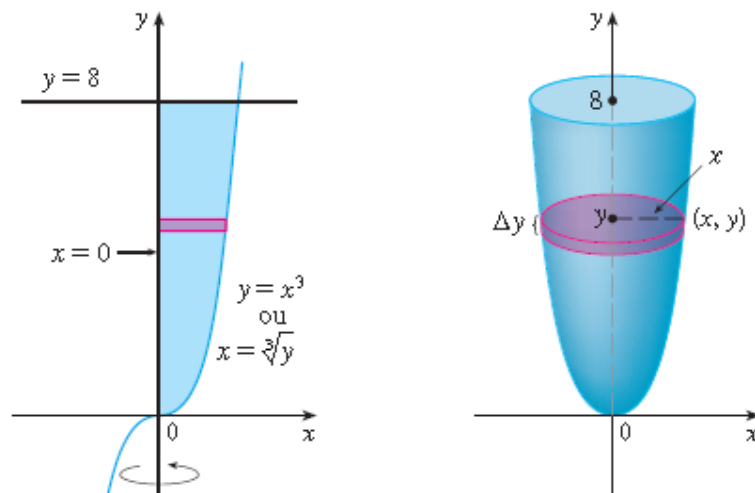


Figura 25 – Volume gerado pela rotação em torno de  $y$  da região delimitada por  $y = x^3$ ,  $y = 8$ , e  $x = 0$

Se fatiarmos o sólido gerado e a uma altura  $y$ , obtemos um cilindro circular reto de raio  $x$ , onde  $x = \sqrt[3]{y}$ , conforme figura 25. Utilizando a observação 6.2, teremos que o volume  $V$  do sólido gerado é

$$V = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 dy = \pi \left[ \frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

**Exemplo 6.2.3** A região  $R$ , delimitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$ , é girada ao redor do eixo  $x$ . Encontre o volume do sólido resultante.

*Solução*

Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Para determinar este intervalo, devemos encontrar os pontos de intersecção das curvas dadas. Igualando suas equações, obtemos

$$x^2 = x \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ e } x = 1$$

Se fatiarmos o sólido a uma largura  $x$  obtemos uma *arruela* (um anel) com raio interno  $x^2$  e raio externo  $x$ , cuja área da secção de corte, é a área da coroa circular  $A(x)$ , conforme figura 26.

$$A(x) = \pi x^2 - r(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

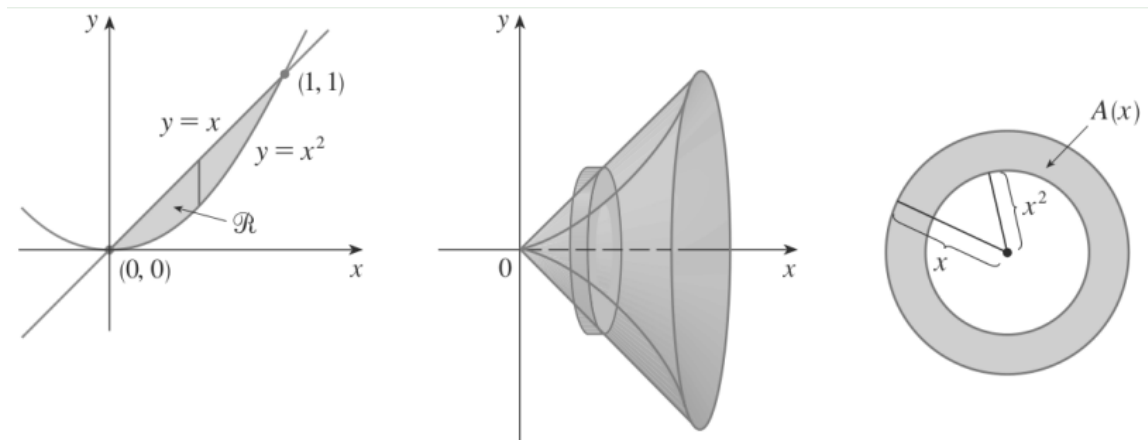


Figura 26 – Volume gerado pela rotação em torno de  $x$  da região delimitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$

Assim, utilizando o teorema 6.1, obtemos que o volume  $V$  do sólido é

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

**Observação 6.3** Poderíamos, também, ter utilizado o teorema 6.2, observando que

$A(x) = \pi[g(x)]^2 - \pi[h(x)]^2 = \pi[[g(x)]^2 - [h(x)]^2]$ , onde  $g(x) = x$  e  $h(x) = x^2$ , já que  $g(x) \geq h(x)$ .

Assim, o teorema 6.2 poderia ser reescrito como sendo

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [g(x)]^2 - [h(x)]^2 dx \quad (i)$$

**Exemplo 6.2.4** A região  $R$ , delimitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$ , é girada em torno da reta  $y = 2$ . Encontre o volume do sólido resultante.

### Solução

Até agora consideramos apenas sólidos gerados por rotações de curvas em torno de um dos eixos coordenados. No caso mais geral, podemos rotacionar uma curva  $y = f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , em torno da reta  $y = c$  (figura 27).

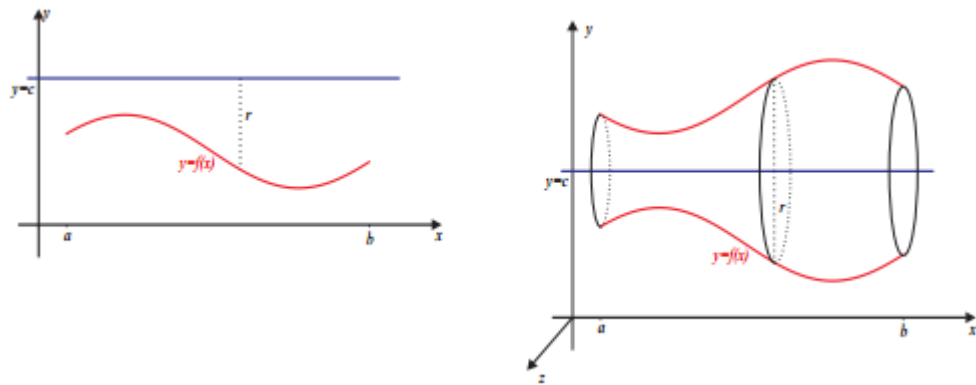


Figura 27 – Sólido obtido pela rotação de  $y = f(x)$  em torno de  $y = c$ .

Nesse caso, o raio do cilindro infinitesimal é igual à distância entre a curva e o eixo de revolução, ou seja,  $r = c - f(x)$ . Reescrevendo o teorema 6.2, teremos que o volume do sólido resultante é

$$V = \pi \int_a^b [c - f(x)]^2 dx \quad (ii)$$

Retornemos ao problema, onde o sólido e a secção transversal são mostrados na figura 28.

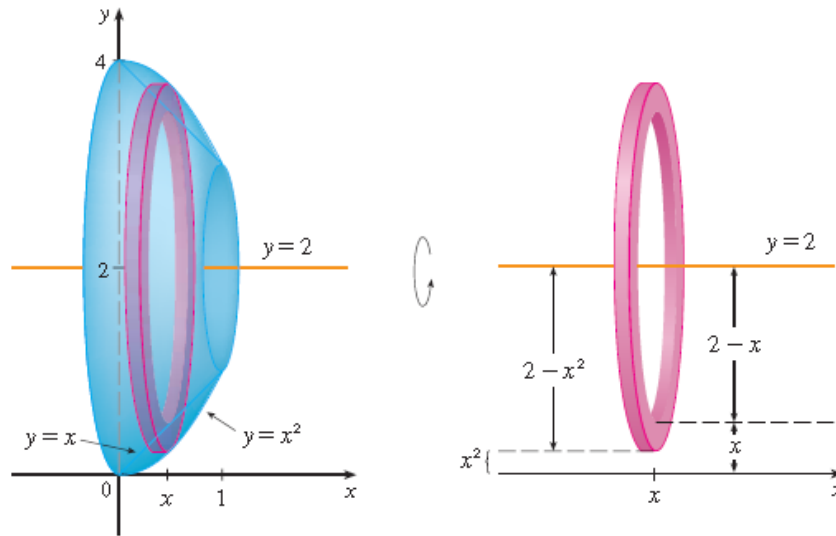


Figura 28 – Volume gerado pela rotação em torno de  $y = 2$  da região delimitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$ .

Se fatiarmos o sólido a uma largura  $x$ , obtemos uma *arruela* (um anel) com raio interno  $2 - x$  e raio externo  $2 - x^2$ . Assim, utilizando as expressões (i) e (ii)

$$(i) \quad V = \int_a^b [g(x)]^2 - [h(x)]^2 dx$$

$$(ii) \quad V = \pi \int_a^b [c - f(x)]^2 dx$$

Teremos que o volume do sólido gerado é igual a

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx \\ &= \int_0^1 [x^4 - 5x^2 + 4x] dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

## 7 HIPÉRBOLE EQUILÁTERA $XY = K$

Apresentaremos o gráfico e as propriedades da *hipérbole equilátera*  $xy = k$ , que será de relevância para nossas colocações futuras, mas antes precisamos definir a cônica *hipérbole*.

O termo cônica vem do fato de que quando admitimos dois cones circulares retos iguais ligados pelo mesmo vértice  $V$ , de modo que suas bases sejam paralelas, se traçarmos um plano secante oblíquo ou perpendicular as bases dos cones, onde o ângulo do plano é maior que o ângulo que a geratriz forma com a base, conforme a figura 29, ele interceptará os dois cones formando uma secção cônica chamada *hipérbole*. Daremos a seguir uma definição mais precisa de *hipérbole*.

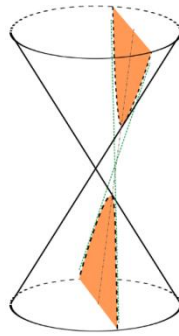


Figura 29 – Secção cônica - Hipérbole

### 7.1 Hipérbole

**Definição 7.1** Uma *hipérbole* é um lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano, tais que o módulo da diferença entre as distâncias de  $P$  a dois pontos fixos, que chamaremos de *focos*  $F_1$  e  $F_2$  é constante, isto é

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = constante$$

Para obtemos uma equação da hipérbole, começamos tomando, por comodidade, o eixo  $x$  como reta suporte para os focos  $F_1$  e  $F_2$ , de modo que os focos tenham coordenadas  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , respectivamente. Com isso,  $dist(F_1, F_2) = 2c$ , com  $c > 0$ .

Seja  $2a$ , com  $a > 0$ , a constante mencionada na definição 7.1 e admita um ponto  $P(x, y)$  um ponto qualquer da hipérbole, então, pela definição 7.1,

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a$$

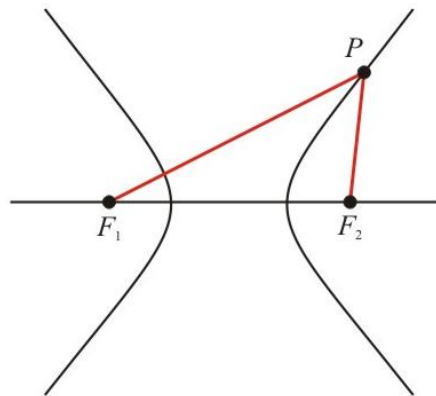


Figura 30 – Definição de Hipérbole

Para determinarmos uma relação entre  $a$  e  $c$ , usaremos o fato de que o comprimento do lado de um triângulo é sempre maior que a diferença entre os comprimentos dos outros dois lados (figura 30) e escrevemos

$$dist(F_1, F_2) > dist(P, F_1) - dist(P, F_2)$$

$$dist(F_1, F_2) > dist(P, F_2) - dist(P, F_1)$$

Usando valor absoluto, essas desigualdades podem ser escritas como a desigualdade

$$dist(F_1, F_2) > |dist(P, F_1) - dist(P, F_2)|$$

Como  $dist(F_1, F_2) = 2c$  e  $|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a$ , temos que

$$2c > 2a \rightarrow c > a$$

A equação da hipérbole nesse sistema de coordenadas é

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados dessa expressão ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ambos os lados dessa expressão, obtemos

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividido ambos os lados da expressão acima por  $a^2(c^2 - a^2)$ , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

Como  $c > a$ , podemos tomar  $b^2 = c^2 - a^2$ , obtemos a equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observe que se fizermos  $y = 0$ , encontramos  $x = \pm a$ ; já fazendo  $x = 0$ , não há solução para  $y$ . Portanto, a hipérbole com focos no eixo  $x$  não intercepta o eixo  $y$ . Os pontos  $A_1(-a,0)$  e  $A_2(a,0)$  serão chamados de vértices da hipérbole, o segmento  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  será chamado de eixo real e o segmento  $\overline{B_1B_2}$ , de comprimento  $2b$ , com  $B_1(0,b)$  e  $B_2(0,-b)$ , será chamado de eixo imaginário (figura 31)



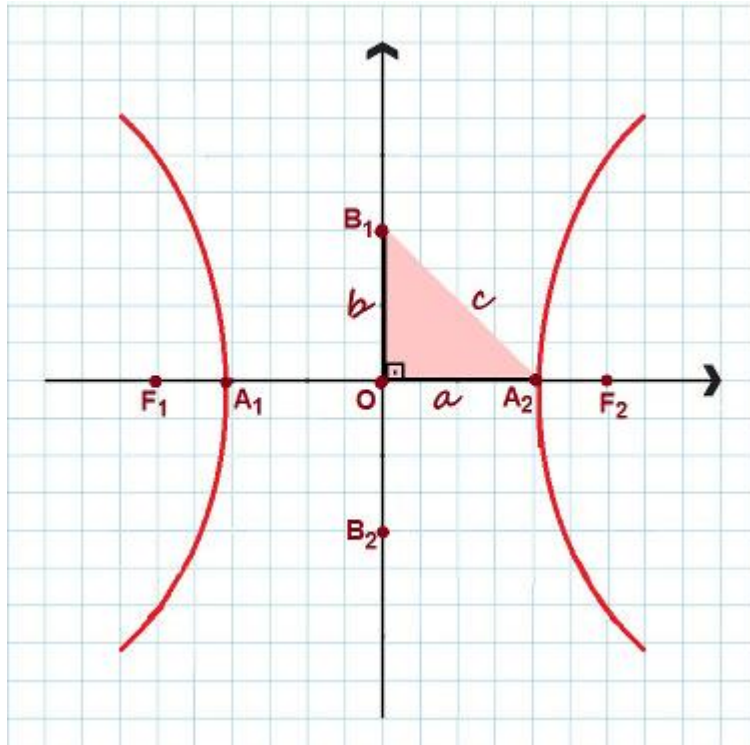


Figura 31 – Elementos da Hipérbole

**Teorema 7.1.** Seja  $2a$  a constante à qual se refere na definição 7.1 . Se a hipérbole tiver focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , com  $b^2 = c^2 - a^2$  , então a equação da hipérbole será

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

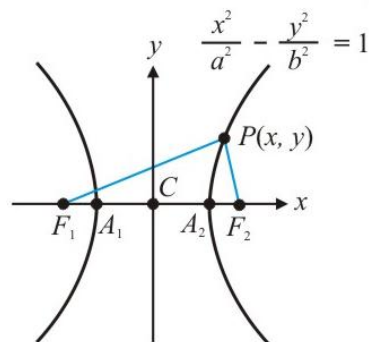


Figura 32 – Hipérbole com focos no eixo x

**Observação 7.1.** Existe apenas um par de retas no plano que não intercepta a hipérbole, em que existem pontos da hipérbole arbitrariamente próximos a pontos dessas retas. Esta aproximação é contínua e lenta, de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Essas retas são chamadas *assíntotas* da hipérbole.

Considerando uma circunferência de raio  $CF_1$  ou  $CF_2$ , cujo centro  $C$  é o mesmo do centro da hipérbole, ou seja, o ponto médio dos seus vértices  $A_1$  e  $A_2$ , traçamos por esses vértices cordas perpendiculares ao segmento  $\overline{F_1F_2}$  e marcamos as intersecções com a circunferência. Esses pontos são os vértices do *retângulo referência*  $MNPQ$  inscrito na circunferência (figura 33).

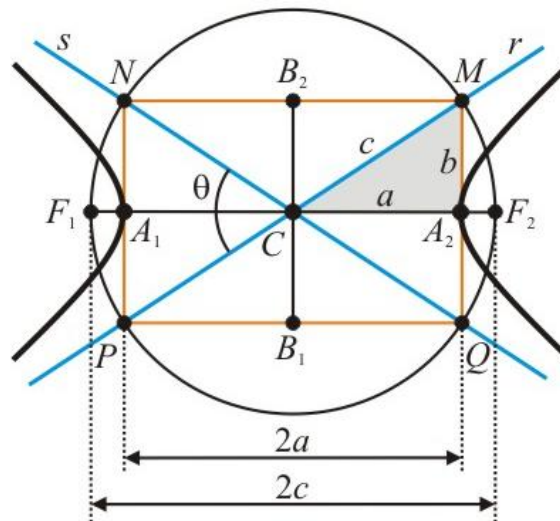


Figura 33 – Assíntotas da Hipérbole

Dos conhecimentos da Geometria Analítica, sabemos determinar a equação das retas assíntotas  $r$  e  $s$ , que passam pela origem e tem coeficiente angular  $\frac{b}{a}$  e  $-\frac{b}{a}$ , respectivamente

$$r: y = \frac{b}{a}x \quad s: y = -\frac{b}{a}x$$

**Definição 7.1.2.** Chamamos de excentricidade  $e$  da hipérbole ao número dado pela relação

$$e = \frac{c}{a}$$

Observe que  $e > 1$ , pois já vimos que  $c > a$ .

A excentricidade  $e$  está diretamente relacionada com a abertura de ângulo  $\theta$  da hipérbole. Mantendo fixo o valor de  $c$ , quanto menor for o valor de  $a$ , maior será a excentricidade, e conseqüentemente a hipérbole terá uma abertura maior, ou seja, os ramos da hipérbole estarão mais abertos.

**Observação 7.1.3** De modo análogo, se os focos da hipérbole estão localizados no eixo  $y$ , e fazendo as devidas substituições no teorema 7.1, encontramos a equação da hipérbole

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Com assíntotas de equação  $y = \pm \frac{a}{b}x$ .

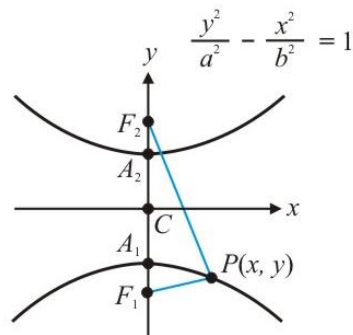


Figura 34 – Hipérbole com focos no eixo  $y$

**Observação 7.1.3** Até aqui, consideramos sempre a hipérbole com centro na origem  $(0,0)$ . Considere, agora, uma hipérbole com centro  $C(x_0, y_0)$  e com eixo principal paralelo ao eixo  $x$ , então se fizermos uma translação de eixos  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$ , o ponto  $(x_0, y_0)$  será a origem do novo sistema de eixos  $\bar{x}O\bar{y}$ . Assim a equação da hipérbole em relação esse novo sistema de eixos coordenados será

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

Fazendo a substituição  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$ , encontraremos a equação da hipérbole de centro  $C(x_0, y_0)$  e eixo principal paralelo a  $x$ , no sistema de eixos coordenados  $x_0y_0$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Com assíntotas de equação  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ .

De modo análogo, a equação da hipérbole de centro  $C(x_0, y_0)$  e eixo principal paralelo a  $y$ , no sistema de eixos coordenados  $x_0y_0$ , é dada por

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Com assíntotas de equação  $y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$ .

**Exemplo 7.1.1** Esboce a hipérbole de equação  $9x^2 - 4y^2 = 36$  e determine as equações de suas assíntotas.

*Solução*

Dividindo ambos os lados da equação dessa hipérbole por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

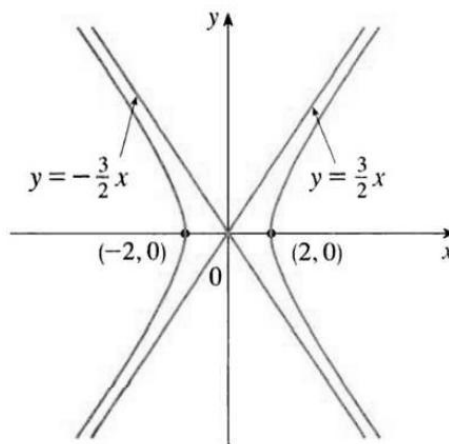


Figura 35 – Hipérbole de equação  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

Que representa a equação da hipérbole de centro na origem (0,0) e eixo principal sobre o eixo x. Observe que  $a = 2$  e  $b = 3$ , assim as equações das assíntotas são da forma

$$y = \pm \frac{3}{2}x$$

**Exemplo 7.1.2** Os vértices de um hipérbole estão em  $(-5,-3)$  e  $(-5,-1)$  e as extremidades do eixo imaginário estão em  $(-7,-2)$  e  $(-3,-2)$ . Determine a equação da hipérbole e as equações das assíntotas. Faça um esboço da hipérbole e das assíntotas.

*Solução*

A distância entre os dois vértices é  $2a$ , logo  $2a = 2$  e assim  $a = 1$ . O comprimento do eixo imaginário é  $2b$ , logo  $2b = 4$ , portanto  $b = 2$ . O centro  $C(x_0, y_0)$  da hipérbole é o ponto médio dos vértices, nesse caso, o centro da hipérbole é  $C(-5, -2)$ .

Dessa forma, como o eixo principal é paralelo ao eixo y, a equação da hipérbole, conforme figura 36, é

$$\frac{(y + 2)^2}{1} - \frac{(x + 5)^2}{4} = 1$$

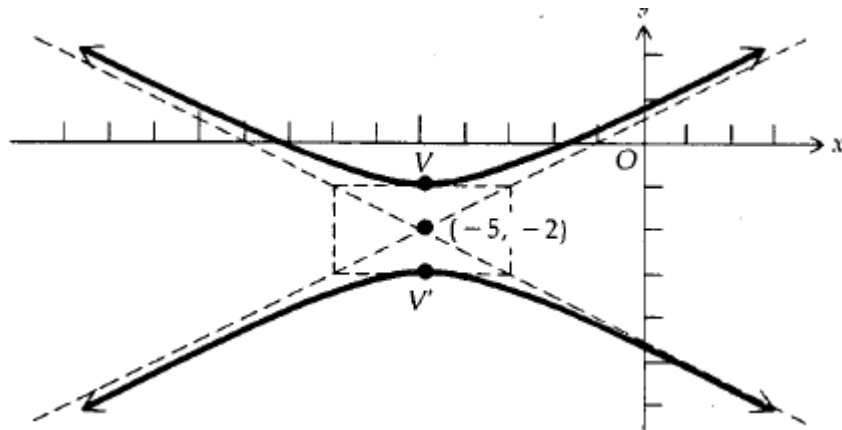


Figura 36 – Hipérbole de equação  $\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$

As equações das assíntotas são da forma

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$$

$$y + 2 = \pm \frac{1}{2}(x + 5)$$

## 7.2 Hipérbole Equilátera

Uma hipérbole é considerada equilátera quando as medidas dos eixos principal e imaginário são iguais, isto é,  $a = b$ .

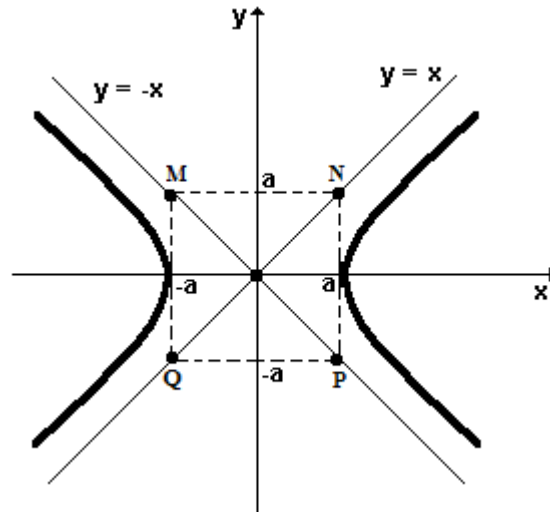


Figura 37 – Hipérbole equilátera com centro na origem e com focos sobre o eixo x

Na figura 37, observamos que o retângulo referência MNPQ se transforma em um quadrado quando a hipérbole é equilátera, tornando, assim, as assíntotas perpendiculares, pois sabemos que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

### 7.2.1 Equação da hipérbole equilátera com centro na origem

Fazendo  $a = b$  na equação do teorema 7.1, encontramos a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Sabemos que as equações das assíntotas de uma hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo x é

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Como na hipérbole equilátera  $a = b$ , teremos que as equações das assíntotas de uma hipérbole equilátera, de centro na origem e focos no eixo  $x$ , serão retas bissetrizes dos quadrantes (figura 37).

$$y = \pm x$$

Dos conhecimentos de Geometria analítica, comprovamos que essas retas assíntotas realmente são perpendiculares, já que o produto dos seus coeficientes angulares resulta em  $-1$ .

**Observação 7.2.1** De modo análogo, se os focos estiverem no eixo  $y$ , a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $y$  é

$$y^2 - x^2 = a^2$$

Tendo, também, como assíntotas as retas de equações

$$y = \pm x$$

### 7.2.2 Equação da hipérbole equilátera com centro $C(x_0, y_0)$

De forma geral, a equação de uma hipérbole equilátera com centro  $C(x_0, y_0)$  é

- $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = a^2$ , se o eixo focal for paralelo ao eixo  $x$
- $(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = a^2$ , se o eixo focal for paralelo ao eixo  $y$

Ambas com assíntotas de equações

$$y - y_0 = \pm(x - x_0)$$

### 7.2.3 Hipérbole equilátera $xy = k$

Pretendemos através de uma rotação de eixos coordenados expressar a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $x$ . ( $x^2 - y^2 = a^2$ ) e a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $y$  ( $y^2 - x^2 = a^2$ )

em uma equação da forma  $xy = k$ , com constante  $k$  real. Para isso, tornaremos as assíntotas  $y = x$  e  $y = -x$  os novos eixos coordenados, já que, como vimos, eles são perpendiculares.

Com essa nova expressão ( $xy = k$ ) poderemos definir uma função que será de grande relevância para o capítulo 8.

Dessa forma, precisamos, antes de qualquer coisa, desenvolver uma expressão que rotacione os eixos coordenados conforme desejamos.

### 7.2.3.1 Rotação de eixos coordenados

**Teorema 7.2.3.1.1** Sejam  $Ox$  e  $Oy$  os eixos primitivos do Sistema Cartesiano de Eixos Coordenados com origem  $O(0,0)$ . Sejam  $O\bar{x}$  e  $O\bar{y}$  os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado de um ângulo  $\theta$ , no sentido anti-horário, em torno da origem  $O(0,0)$ . Assim,  $\theta$  é o ângulo formado entre os eixos  $Ox$  e  $O\bar{x}$ . Seja  $P(x,y)$  um ponto qualquer do sistema primitivo  $xOy$ . Portanto o mesmo ponto  $P$  terá coordenadas  $P(\bar{x},\bar{y})$  em relação ao novo sistema de coordenadas  $\bar{x}O\bar{y}$  e as equações de transformação são dadas por:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta \\ y = \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta \end{cases}$$

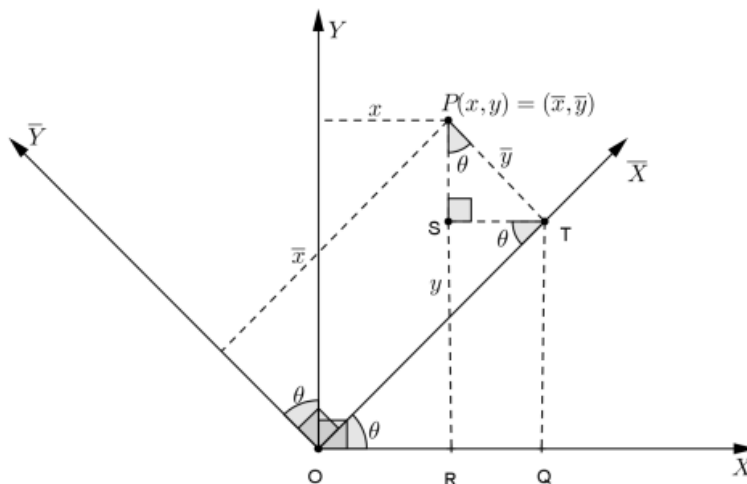


Figura 38 – Rotação de eixos coordenados

*Demonstração.*

Pela figura 38, temos que  $\overline{OR} = x$ ,  $\overline{OT} = \bar{x}$ ,  $\overline{PR} = y$  e  $\overline{PT} = \bar{y}$ . Considerando o triângulo  $\Delta OQT$ , obtemos que



$$\text{sen}\theta = \frac{\overline{QT}}{\overline{x}} \quad \text{e} \quad \text{cos}\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{x}}$$

Do triângulo  $\Delta PST$ , obtemos que

$$\text{sen}\theta = \frac{\overline{ST}}{\overline{y}} \quad \text{e} \quad \text{cos}\theta = \frac{\overline{SP}}{\overline{y}}$$

Dessa forma, como  $\overline{RQ} = \overline{ST}$  e  $\overline{RS} = \overline{QT}$ , temos

$$x = \overline{OR} = \overline{OQ} - \overline{RQ} = \overline{x}\text{cos}\theta - \overline{y}\text{sen}\theta$$

$$y = \overline{PR} = \overline{RS} + \overline{SP} = \overline{x}\text{sen}\theta + \overline{y}\text{cos}\theta \quad \blacksquare$$

### 7.2.3.2 Hipérbole equilátera $xy = k$ , com $k < 0$

Considere a hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $x$  de equação  $x^2 - y^2 = a^2$ , conforme figura 39.

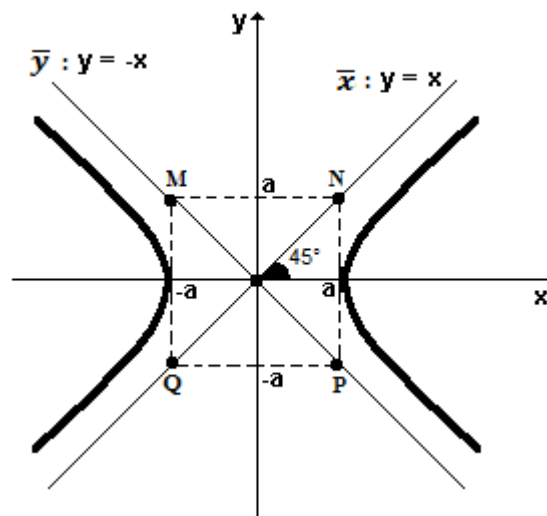


Figura 39 – Rotação de  $45^\circ$  do eixo  $xOy$  em torno da origem da hipérbole  $x^2 - y^2 = a^2$

Vimos que as assíntotas  $y = x$  e  $y = -x$ , são bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente. Dessa forma, podemos concluir que o ângulo que a reta  $y = x$  forma com o eixo  $x$  é  $45^\circ$ .

Com uma rotação de um ângulo  $\theta = 45^\circ$ , fazemos com que o eixo coordenado  $Ox$  torne-se o eixo rotacionado  $O\bar{x}$ , representado no eixo  $xOy$  pela assíntota  $y = x$  da hipérbole

de equação  $x^2 - y^2 = a^2$ ; e o eixo coordenado  $Oy$  torne-se o eixo rotacionado  $O\bar{y}$ , representado no eixo  $xOy$  pela assíntota  $y = -x$  da mesma hipérbole.

As equações de transformações são dadas por:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos 45^\circ - \bar{y}\sin 45^\circ \\ y = \bar{x}\sin 45^\circ + \bar{y}\cos 45^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases} \quad (*)$$

Através de uma simples fatoração, podemos escrever a equação da hipérbole

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$(x + y)(x - y) = a^2 \quad (**)$$

Substituindo (\*) em (\*\*), obtemos

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right] = a^2$$

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(2\bar{x}) \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(-2\bar{y}) \right] = a^2$$

$$-2\bar{x}\bar{y} = a^2$$

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{-a^2}{2}$$

Fazendo  $k = \frac{-a^2}{2}$ , teremos

$$\bar{x}\bar{y} = k,$$

com o número real  $k < 0$ ,

que representa sobre o sistema de eixos coordenados  $xOy$ , a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $x$ . Já no sistema eixos coordenados  $\bar{x}O\bar{y}$ , representa a equação de uma hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre a bissetriz dos quadrantes pares  $\bar{y} = -\bar{x}$ , que no sistema de eixos coordenados  $xOy$  era o eixo coordenado  $Oy$ .

A partir de agora, por questões de comodidade e irrelevância de eixos, iremos escrever a equação da hipérbole  $\bar{x}\bar{y} = k$ , apenas como

$$xy = k ,$$

com o número real  $k < 0$

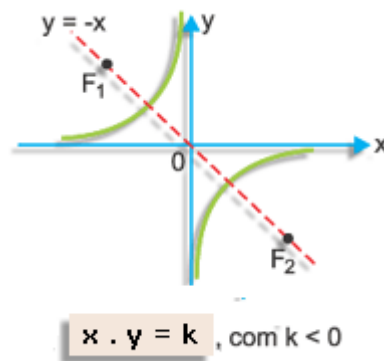


Figura 40 – Hipérbole  $xy = k$  , com  $k < 0$

Observe na figura 40, que as assíntotas da hipérbole  $xy = k$  , com  $k < 0$ , são os próprios eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  de equações  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente.

O que torna essa expressão tão importante é que, agora, poderemos olhar o lugar geométrico da hipérbole equilátera acima como o gráfico da função  $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$  , definida por

$$f(x) = \frac{k}{x} , \text{ com o número real } k < 0$$

- Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , de fato a reta de equação  $y = 0$  representa uma assíntota horizontal da função  $f$ .
- Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , de fato a reta de equação  $x = 0$  representa uma assíntota vertical da função  $f$ .

### 7.2.3.3 Hipérbole equilátera $xy = k$ , com $k > 0$

Considere a hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $y$  de equação  $y^2 - x^2 = a^2$ .

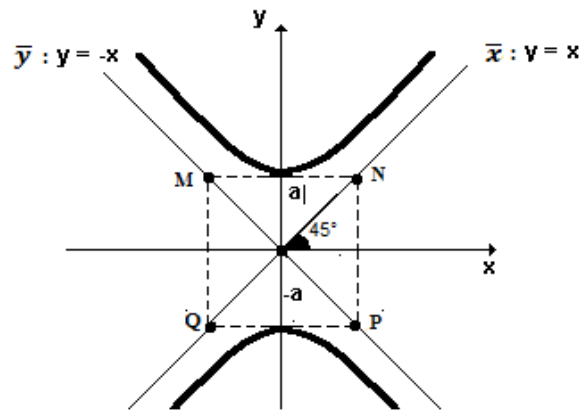


Figura 41 – Rotação de  $45^\circ$  do eixo  $xOy$  em torno da origem da hipérbole  $y^2 - x^2 = a^2$

De modo análogo, faremos uma rotação de um ângulo  $\theta = 45^\circ$  através das fórmulas de transformação:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases} \quad (\text{i})$$

Através de uma simples fatoração, podemos escrever a equação da hipérbole

$$y^2 - x^2 = a^2$$

$$(y + x)(y - x) = a^2 \quad (\text{ii})$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \right] = a^2$$

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(2\bar{x}) \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(2\bar{y}) \right] = a^2$$

$$2\bar{x}\bar{y} = a^2$$

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{a^2}{2}$$

Fazendo  $k = \frac{-a^2}{2}$ , teremos

$$\bar{x}\bar{y} = k ,$$

com o número real  $k > 0$ ,

que representa sobre o sistema de eixos coordenados  $xOy$ , a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre o eixo  $y$ . Já no sistema eixos coordenados  $\bar{x}O\bar{y}$ , representa a equação de uma hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares  $\bar{y} = \bar{x}$ , que no sistema de eixos coordenados  $xOy$  era o eixo coordenado  $Ox$ .

Também, por questões de comodidade e irrevelância de eixos, iremos escrever a equação da hipérbole  $\bar{x}\bar{y} = k$ , apenas como

$$xy = k ,$$

com o número real  $k > 0$

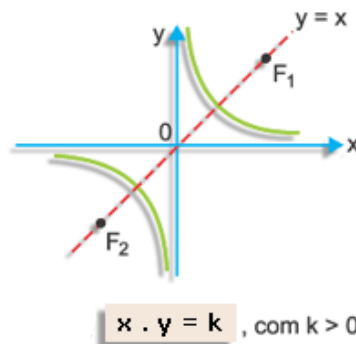


Figura 42 – Hipérbole  $xy = k$ , com  $k > 0$

Observe ,na figura 42, que as assíntotas da hipérbole  $xy = k$ , com  $k > 0$ , são os próprios eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  de equações  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente.

O que torna essa expressão tão importante é que, agora, poderemos olhar o lugar geométrico da hipérbole equilátera acima como o gráfico da função  $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$ , definida por

$$f(x) = \frac{k}{x} , \text{ com o número real } k > 0$$

- Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , de fato a reta de equação  $y = 0$  representa uma assíntota horizontal da função  $f$ .
- Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ , de fato a reta de equação  $x = 0$  representa uma assíntota vertical da função  $f$ .

## 8 PARADOXO DO PINTOR E A TROMBETA DE GABRIEL

O infinito é um conceito que por muitas vezes desafia nossa intuição e nos faz cometer erros, pois temos a ideia que o infinito está necessariamente ligado a algo ilimitado. Um exemplo contraintuitivo que envolve o infinito é a superfície de revolução chamada Trombeta de Gabriel, que apresenta área de superfície infinita, porém tem volume finito. De maneira bem intuitiva, *poderíamos enchê-la de tinta, mas nem toda tinta do mundo poderia pintar sua superfície.*

Como é possível uma superfície infinita envolver um volume limitado?! A ideia de que a partir de algo infinito seja possível obter uma grandeza finita torna nosso problema um verdadeiro *paradoxo*. Dessa forma, primeiramente, iremos definir o que é um *paradoxo*, para depois mergulharmos no interessante paradoxo do pintor e a trombeta de Gabriel.

### 8.1 O que são paradoxos

A origem etimológica da palavra *paradoxo*, que significa “contrária a opinião”, é grega (*παράδοξον/paradoxo*), sendo uma composição entre o prefixo *παρα* (para), que significa contra, juntamente com o sufixo *δόξον* (dóxa), que significa “opinião” (BALIEIRO FILHO, 2010). Dessa forma, paradoxo seria uma proposição contraditória ao senso comum, mas que possui certo sentido.

De acordo com Balieiro Filho (2010), um paradoxo “designa uma afirmação ou crença contrária às expectativas, opiniões ou senso comum e a intuição, que provoca de imediato uma reação de surpresa e perplexidade” (p.2).

Já no dicionário da língua portuguesa encontramos a seguinte definição de paradoxo:

PARADOXO (cs) s.m. 1. Conceito que é ou parece contrário ao senso comum. 2. Absurdo. 3. Filos. Afirmação que vai de encontro a sistemas ou pressupostos que se impuseram como incontestáveis ao pensamento. pa. ra. do. xal (cs) adj.2g (FERREIRA, 2001, p. 548).

Paradoxos, portanto, consistem em afirmações consistentes, que aparentemente parecem falsas ou desconexas, fazendo com que sejam rejeitadas, mas que dentro de um contexto nos convence que é verdadeira.

Tomemos como exemplo o Paradoxo do Mentiroso, em que uma pessoa considerada mentirosa “mente quando diz que mente”. Se essa pessoa responde que não mente, então está mentindo, pois um mentiroso que diz não falar mentiras mente. Se ele diz que mente, então está falando a verdade, portanto não é uma pessoa mentirosa, tornando-se assim paradoxal.

## 8.2 *Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel*

Somente no século XIX a integral passou a ser definida em termos de somas de infinitas parcelas infinitesimais, feito atribuído aos matemáticos Cauchy (1789 – 1857) e Riemann (1826 – 1866), porém a definição proposta por esses matemáticos está associada com o conjunto de funções limitadas. Uma das restrições a essa definição surge em problemas de funções que não são limitadas em um ponto do intervalo de integração ou quando investigamos num intervalo infinito. Por exemplo, indícios desse problema já foram observados, no século XVII, no cálculo do volume de um sólido de revolução.

Em 1641 Torricelli notou que uma área infinita, se submetida a uma rotação em torno de um eixo de seu plano, pode às vezes fornecer um sólido de revolução de volume finito. Por exemplo, a área limitada pela hipérbole  $xy = k^2$ , a ordenada  $x = b$  ( $b > 0$ ) e o eixo  $x$  é infinita, mas o volume do sólido de rotação obtido girando-se a área em torno do eixo  $x$  é finita. Não foi Torricelli, porém, o primeiro a notar essa aparente anomalia. (EVES, 2004, p. 397)

Na época, a propriedade dessa curva foi vista por muitos contemporâneos - inclusive pelo próprio Torricelli, que tentou várias demonstrações alternativas- como um incrível paradoxo, desencadeando uma controvérsia sobre a natureza do infinito

Uma das superfícies que apresenta as propriedades observadas é conhecida como Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli. Dessa forma, anunciaremos o Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel:

*“Se uma área infinita, limitada pela hipérbole  $xy = 1$ , a reta  $x = 1$  e o eixo das abscissas é girada em torno do eixo, o volume do sólido gerado com essa rotação é finito. Dado que tal área é infinita, seria necessária uma quantidade infinita de tinta para poder pintá-la, porém, bastaria uma quantidade finita de tinta para poder preenchê-la, uma vez que o volume é finito.”*

O Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel consistem no fato de, ao se analisar a área e o volume dessa trombeta de largura infinita, temos que a área de sua superfície é infinita, enquanto seu volume é finito.

O nome Trombeta de Gabriel é uma referência à bíblia, livro sagrado dos cristãos, onde o anjo Gabriel é considerado o mensageiro de Deus e supostamente um dos anjos a tocar uma das trombetas que anuncia eventos apocalípticos, ou seja, o dia do juízo final. Associando assim o divino, ou infinito, com o finito.

Convidamos o leitor a fazer a leitura do capítulo 7, aonde vimos que a curva  $xy = k$ , com o número real  $k > 0$ , representa a equação de uma hipérbole equilátera com centro na origem e focos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares  $y = x$ . Desse modo, a curva citada no paradoxo trata-se de uma hipérbole equilátera para  $k = 1$ .

Do capítulo indicado, vimos que poderemos olhar o lugar geométrico da hipérbole equilátera  $xy = 1$  como o gráfico da função  $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$ , definida por  $f(x) = \frac{1}{x}$  (figura 43)

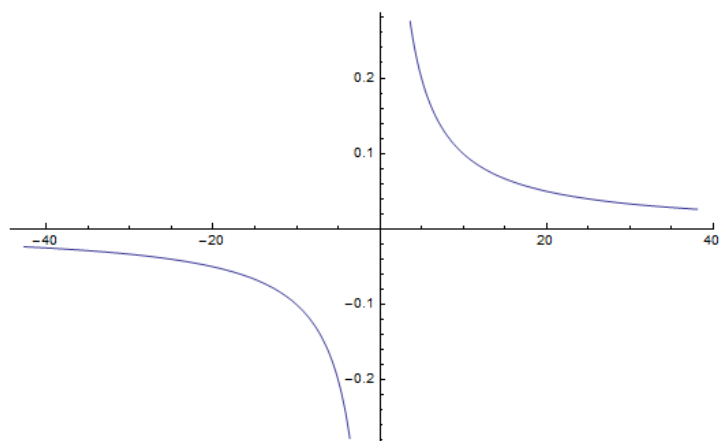


Figura 43 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$



- Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , o eixo  $x$  de equação  $y = 0$  representa uma assíntota horizontal da função  $f$ .
- Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ , o eixo  $y$  de equação  $x = 0$  representa uma assíntota vertical da função  $f$ .

**Definição 8.2.1** Chamamos de Trombeta de Gabriel (figura 45) a superfície de revolução obtida ao girar a curva  $y = \frac{1}{x}$  (figura 44), para  $x \in [1, +\infty [$ , em torno do eixo  $x$ .

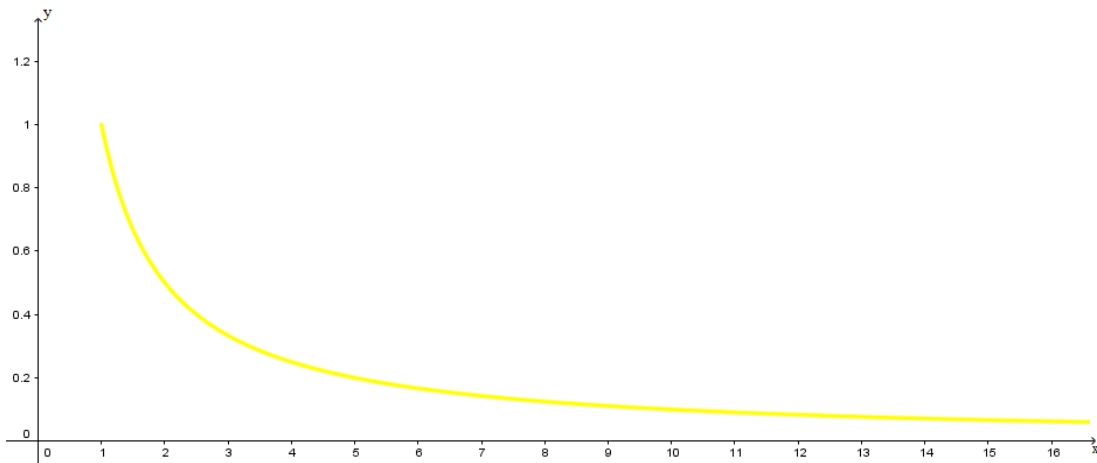


Figura 44 – Curva  $y = \frac{1}{x}$ , para  $x \in [1, +\infty [$

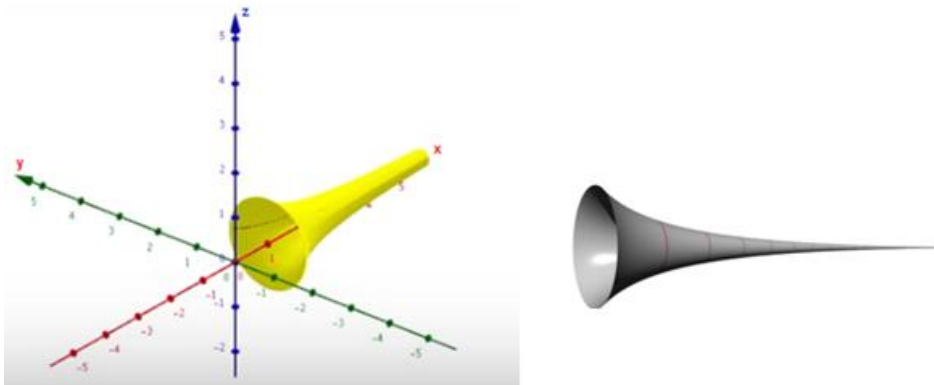


Figura 45 – Trombeta de Gabriel ou Torricelli

Para entendermos como uma superfície infinita, como é o caso da Trombeta de Gabriel, pode envolver uma região de volume finito, vamos lançar a seguinte analogia:

Imagine uma criança que está brincando com uma massinha de modelar de formato cilíndrico conforme a figura abaixo.



Figura 46 – Massinhas de modelar de formato cilíndrico

Considere inicialmente uma massa de modelar incompressível perfeitamente cilíndrica de raio  $r$  e comprimento  $l$ , por se tratar de um cilindro circular reto, seu volume  $V$  e sua área superficial lateral  $A$ , conforme figura 47, são dados por

$$V = \pi r^2 l \quad e \quad A = 2\pi r l$$

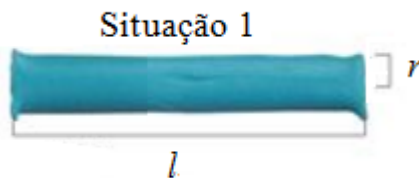


Figura 47 – Massa de modelar de raio  $r$  e comprimento  $l$

Agora, considere uma segunda situação. Se rolarmos a massa de modelar no chão fazendo com que seu raio se reduza a metade, ou seja,  $r_2 = \frac{r}{2}$ , conforme figura 48. Como não

houve perda de material, o volume se mantém inalterado, ou seja,  $V_2 = V$ . Assim, o novo comprimento da massa quadruplicará, isto é,  $l_2 = 4l$ , já que

$$V_2 = \pi r_2^2 l_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 (4l) = \pi r^2 l = V$$

Nessa segunda situação, a área da superfície lateral  $A_2$  é dada por

$$A_2 = 2\pi r_2 l_2 = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right) (4l) = 2A$$

Observe que a área dobrou, enquanto o volume se manteve constante.

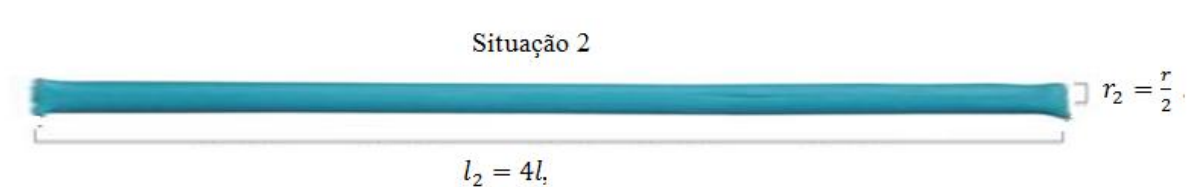


Figura 48 – Massa de modelar de raio  $r_2 = \frac{r}{2}$  e comprimento  $l_2 = 4l$

Se a criança continuar esse processo indefinitivamente verá que à medida que o raio da base da massa é reduzido o volume permanece constante, porém a área da superfície lateral aumenta cada vez mais, ou seja, tende ao infinito.

Se fizermos com que seu raio se reduza  $n$  vezes, ou seja,  $r_n = \frac{r}{n}$ , como o volume se mantém constante, o novo comprimento da massa de modelar será  $l_n = n^2 l$ , já que

$$V_n = \pi r_n^2 l_n = \pi \left(\frac{r}{n}\right)^2 (n^2 l) = \pi r^2 l = V$$

Assim a área da superfície lateral  $A_n$  da massa de modelar nessa situação será:

$$\begin{aligned} A_n &= 2\pi r_n l_n = 2\pi \left(\frac{r}{n}\right) (n^2 l) \\ &= n(2\pi r l) \\ &= nA \end{aligned}$$

Se fizermos com que o raio seja tão pequeno quanto quisermos, ou seja, tomarmos um  $n$  suficientemente grande, teremos que a área superficial lateral será consideravelmente grande, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$$

Apesar de contraintuitivo, esse exemplo chama atenção e pode servir de contraexemplo para a ideia de que o infinito esteja necessariamente ligado a algo limitado, já que o volume se mantém constante.

Teoricamente esse processo da massa de modelar se assemelha com o que acontece com a Trombeta de Gabriel.

### 8.2.1 Área da Superfície da Trombeta de Gabriel

Convidamos o leitor a fazer a leitura do capítulo 5, onde desenvolvemos uma fórmula, em forma de integral, para encontrar a área de uma superfície de revolução. Vejamos o teorema 5.3.1:

*Seja  $f$  uma função suave não-negativa no intervalo  $[a,b]$ , a área  $S$  da superfície gerada pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$  é dada por*

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Como a função  $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$ , definida por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é suave e não-negativa no intervalo  $[1, +\infty[$ , podemos utilizar o teorema 5.3.1 para encontrarmos a área da superfície  $S$  da Trombeta de Gabriel.

De  $f(x) = \frac{1}{x}$ , obtemos que  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , assim a área da superfície  $S$  é

$$S = \int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left[-\frac{1}{x^2}\right]^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

Defina a função  $g: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$  ;  $g(x) = \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ , e observe que  $g(x) \geq f(x) \geq 0$ , já que a expressão  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$ , pois  $\frac{1}{x^4} > 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}^*$ .

Não estamos acostumados com o fato de um dos limites da integração ser  $\infty$ , portanto o leitor é convidado ao estudo das integrais impróprias, no capítulo 3, para em seguida prosseguir nessa leitura.

Do capítulo 3, vimos que  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  é divergente, pois

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln|x|]_1^t \quad (\text{Definição 2.2.1}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t + 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos utilizar o teorema da comparação - item (b), descrito no capítulo 3:

*Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções contínuas com  $g(x) \geq f(x) \geq 0$  para  $x \geq a$ .*

*(a) Se  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  é convergente.*

*(b) Se  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  é divergente.*

Como  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , com  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é divergente e  $g(x) \geq f(x) \geq 0$ , então

$\int_1^{\infty} g(x) dx$ , com  $g(x) = \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ , pelo teorema da comparação, também será divergente.

Assim, conclui-se que

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = \infty$$

Em outras palavras, a quantidade de tinta necessária para pintar a superfície da Trombeta de Gabriel, é infinita. O que de certo modo parece intuitivamente bastante plausível, já que se trata de uma superfície infinita.

### 8.2.2 Volume da Trombeta de Gabriel

Agora convidamos o leitor ao estudo de volume de um sólido de revolução, onde apresentamos no capítulo 6 desse trabalho.

Conforme vimos no referido capítulo, desenvolvemos uma fórmula, em forma de integral, para encontrarmos o volume de um sólido de revolução. Relembremos o teorema 6.2 :

*Seja uma função  $f$  suave não-negativa no intervalo  $[a,b]$ . Se  $S$  for o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , da região  $R$  limitada pela curva  $y = f(x)$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , então o volume  $V$  do sólido  $S$  é  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$*

Como a função  $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$ , definida por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é suave e não-negativa no intervalo  $[1, +\infty[$ , podemos utilizar o teorema 6.2 para encontrarmos o volume  $V$  da Trombeta de Gabriel.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx \end{aligned}$$

Pela definição 3.1.1 de integral imprópria, obtemos

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

Assim,

$$V = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{t}\right]$$

$$= \pi \left( 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \right) = \pi(1 - 0) = \pi,$$

ou seja, o volume da Trombeta de Gabriel é igual a  $\pi$  unidades de volume.

Em outras palavras, seriam necessárias  $\pi$  unidades de volume de tinta para preencher a Trombeta de Gabriel.

Segundo Wijeratne e Zazkis (2015), o paradoxo do pintor baseia-se no fato de que a trombeta de Gabriel tem área de superfície infinita e volume finito e emerge da interpretação, num contexto finito, de área e volume que são atribuídas ao objeto intangível da Trombeta de Gabriel. Matematicamente, esse paradoxo é o resultado da generalização de área e volume, usando cálculo integral, que tem uma série convergente associada com o volume e uma série divergente associada com a área de superfície.

As discussões possibilitadas a partir do Paradoxo do Pintor e a Trombeta de Gabriel favorecem que definições de cálculo de área, volume de superfície e principalmente integrais impróprias sejam estudadas de um ponto de vista diferente, isto é, a partir da curiosidade em compreender o paradoxo.

Além disso, conforme já dito, este capítulo pode também ser usado de forma motivacional para o estudo de integrais impróprias no curso de Cálculo, pois o cálculo da área da superfície e volume da Trombeta de Gabriel possibilita de maneira mais concreta visualizar uma aplicação de integral imprópria, tornado, assim, a aprendizagem mais significativa de um conteúdo do Cálculo em que tantos alunos apresentam dificuldade.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Modificar algo ou propor uma mudança não se faz de maneira imediata, entretanto devemos levar em conta que vivemos em constantes modificações e adaptações. Com isso, a nossa proposta teve como finalidade apresentar uma abordagem para o estudo de integrais impróprias através do Paradoxo do Pintor e Trombeta de Gabriel, de forma a contribuir com uma aprendizagem significativa, prazerosa e contextualizada tanto dos alunos do Ensino Médio, que querem avançar os estudos de Cálculo, bem como dos alunos do Ensino Superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Também pretendemos oferecer ao professor um roteiro que o ajude a minimizar os problemas de aprendizagem no ensino de integrais impróprias.

Acreditamos ser possível introduzir novamente a disciplina de Cálculo no Ensino Médio, pois são diversas as suas contribuições para selar as lacunas deixadas com o seu “esconderijo forçado” no Ensino Básico; como também contribuir para que o aluno chegue ao Ensino Superior com um aprendizado mais sólido e, assim, sejam minimizadas as dificuldades hoje encontradas. Dessa forma, podemos motivar os alunos do Ensino Básico e Superior propondo-lhes uma Matemática contextualizada e com aplicações concretas através das maravilhas que o Cálculo oferece, e com isso, fazê-los sair da passividade e tornarem-se sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem, cabendo ao professor mediar todo esse processo.

Assim, espera-se que este trabalho de fato contribua para o ensino de integrais impróprias, bem como compreender mais a cerca do contraintuitivo infinito; despertando no aluno o desejo de descoberta e reconhecimento do que é estudado no seu cotidiano.



## REFERÊNCIAS

- [1] BALIEIRO FILHO, I. F. **Alguns Paradoxos da Matemática: Um Resgate Histórico e Possibilidades para o Ensino e Aprendizagem**. In: XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. V.3, 2010, São Paulo, p. 1752-1758
- [2] STEWART, James. **Cálculo, volume 1/James Stewart -7ª ed.** ;tradução EZ2 Translate. – São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [3] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3 ed. Editora HarbraLtda, 1994.
- [4] THOMAS, G. B. **Cálculo**. Tradução de Luciana do Amaral Teixeira e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11 ed. São Paulo: Pearson, 2009.
- [5] FIGUEIREDO, E.B.; VALLE, J.; SIPLE, I. Z. **Integral imprópria: a abordagem nos livros didáticos**. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v.4. p. 2578-2589.
- [6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.
- [7] WIJERATNE, C; ZAZKIS, R. **On Painter’s Paradox: Contextual and Mathematical Approaches to Infinity**. Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. Springer International Publishing Switzerland 2015.
- [8] ÁVILA, G. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.
- [9] ÁVILA, G. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.
- [10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol.1. 5ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [11] DUCLOS, Robert Costallat. **Cálculo do 2 o grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26 -30.

[12] MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário.** São Paulo: USP, 2008. Disponível em <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em 05 mar. 2016.

[13] REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica,** In: MACHADO, N. ; CUNHA, M. (org). Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios epistemologia e didática. Escrituras: São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/lca19.pdf> . Acesso em 10 mar. 2016.