UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLEITON LIRA CUNHA

PROPRIEDADES DE AUTOVALORES PARA UMA CLASSE DE OPERADORES ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM

FORTALEZA

2016

CLEITON LIRA CUNHA

PROPRIEDADES DE AUTOVALORES PARA UMA CLASSE DE OPERADORES ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Coorientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C977p Cunha, Cleiton Lira.
Propriedades de autovalores para uma classe de operadores elípticos de segunda ordem / Cleiton Lira Cunha. – 2016.
55 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.
Coorientação: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes.

1. Fórmula variacional tipo Hadamard. 2. Fluxo de Ricci. 3. Condições de bordo de Dirichlet. 4. Condições de bordo de Neumann. I. Título.

CDD 510

CLEITON LIRA CUNHA

PROPRIEDADES DE AUTOVALORES PARA UMA CLASSE
DE OPERADORES ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovoda em: __ / __ / 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof Dr. Levi Lopes de Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Coorientador)
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelo dom da vida, por sempre me ajudar nas horas em que precisei Dele e que permitiu eu chegar onde estou.

Aos meus pais por me proporcionar esse momento, por acreditarem em mim e por seus apoios.

À minha amada esposa, que sempre me ajudou e me apoiou nos momentos mais difíceis, sempre esteve do meu lado quando precisava e foi compreensiva nos vários momentos em que tive que estar distante e nos momentos em que eu não podia lhe dar atenção.

Ao meu orientador, pelo tempo precioso que dedicou durante toda a orientação, mesmo durante o seu período de afastamento para pós-doutorado, que sempre procurou dedicar um tempo pra atender às minhas dúvidas. Agradeço também por seus diversos conselhos, apoio, amizade, encorajamento, por ter sido sempre paciente comigo e que não desistiu e acreditou em mim mesmo falhando várias vezes.

Ao Naza, meu coorientador, pela amizade, conselhos diversos, apoio, confiança em minha pessoa, perseverança para comigo, encorajamento. Agradeço também por me indicar a UFC para estudar, por conseguir alojamento pra mim quando cheguei em Fortaleza, por me guiar quando fui à São Paulo prosseguir com os estudos do doutorado, por conseguir espaço para estudar na USP, por me acolher na UFAM, por sacrificar seus horários preciosos nos finais de semana e também nas noites para me atender.

Ao professor Marcus Marrocos, por fazer parte deste trabalho e por me ajudar diversas vezes sempre que precisei tirar dúvidas, por seus incentivos, pela amizade e pelas conversas sobre pesquisa, matemática e diversos temas.

Ao Disson, Rodrigo, Leandro, João Vitor, Tiarlos e Chaves por me acolherem eu seus respectivos alojamentos quando cheguei a fortaleza e também pelas discussões matemáticas e tirarem minhas dúvidas quando precisei.

Aos meus amigos Alex, Ciane, Israel, Maria, Valdir e Valtin por suas preciosas e inestimáveis amizades, por sempre me ajudarem sempre que precisei e por me acolherem sempre que foi necessário.

Aos meus amigos Davi, Disson, Fabrício e Valtin por seus diversos conselhos e discussões que, acredito eu, tornou-me uma pessoa melhor.

Aos professores Levi Lopes de Lima, José Fábio Bezerra Montenegro e João Rodrigues dos Santos Júnior por terem aceitado participar da banca.

Ao professor Antônio Pereira, o Toninho, por me acolher na USP e por suas proveitosas conversas e inspiração.

Ao meu amigo Marcos Aurélio, por conseguir um lugar para eu ficar em São Paulo, pelas discussões matemáticas e por sua amizade.

À FAPEAM pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Colegiado do Curso de Ciências: Matemática e Física juntamente com o Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente da UFAM por me afastarem de minhas atividades por 4 anos e 1 mês para me dedicar integralmente ao curso de doutorado.

Ao Departamento de Matemática da UFAM pela acolhida no período de dezembro de 2015 a julho de 2016.

A todos meus colegas da turma de doutorado, pelas discussões matemáticas, reflexões, críticas e sugestões.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos propriedades de autovalores de uma classe de operadores elípticos na forma divergente em uma variedade riemanniana compacta M, ao qual denotaremos por $\mathscr{L}$. Mostramos que, quando a métrica é variada analiticamente sobre M, conseguimos obter curvas analíticas de autovalores e autofunções de $\mathscr{L}$ satisfazendo condição de bordo de Dirichlet. Deduzimos fórmulas variacionais tipo Hadamard e como aplicação mostramos que o conjunto das métricas C^r que deixa o espectro de $\mathscr{L}$ simples é genérico. Provamos que o subconjunto dos difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$ sobre um domínio Ω tal que os autovalores de $\mathscr{L}$ são simples é residual. Posteriormente, fazemos uma análise do comportamento dos autovalores de $\mathscr{L}$ quando variamos a métrica por meio do fluxo de Ricci no caso em que M é fechada mostrando, por exemplo, que são crescentes sob certas hipóteses. Mostramos ainda que os resultados de genericidade ainda são válidos sob a condição de bordo de Neumann.
Palavras-chave: η–laplaciano. Fórmula variacional tipo Hadamard. Fluxo de Ricci. Condições de bordo de Dirichlet. Condições de bordo de Neumann. Autovalores.

ABSTRACT

We deal with properties of eigenvalues of a class of elliptic operators in the divergence form on a compact Riemannian manifold M, which we denote by $\mathscr{L}$. When the metric varies analytically on M, we obtain analytic curves of eigenvalues and eigenfunctions of $\mathscr{L}$ satisfy Dirichlet boundary condition. We compute Hadamard type variational formula and as application we show that the set of $\mathcal{C}^r$–metrics, such that $\mathscr{L}$ has simple spectrum, is a generic set. We prove that the set of $\mathcal{C}^r$–diffeomorphisms on a domain in M such that the eigenvalues of $\mathscr{L}$ are simples is a generic property too. We also analysis the behavior of eigenvalues when the metric varies through Ricci flow in closed Riemannian manifold, showing, for example, that it increase under suitable hypothesis. We still show that the results of genericity are valid under Neumann boundary condition.
Keywords: η–laplacian. Hadamard type variational formula. Ricci flow. Dirichlet boundary condition. Neumann boundary condition. Eigenvalues.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sejam M uma variedade riemanniana compacta orientada e $\mathcal{M}^r$ o conjunto das métricas riemannianas $\mathcal{C}^r$ sobre M. Acreditamos que os autovalores de certas classes de operadores elípticos de segunda ordem sobre M, sob condições adequadas sobre o bordo, sejam genericamente simples, isto é, manter seu espectro simples é uma propriedade genérica no sentido de que os elementos da métrica em que isso ocorre formam um conjunto residual. Por exemplo, seja $\Gamma \subset \mathcal{M}^r$ um subconjunto tal que para cada $g \in \Gamma$ o espectro do operador Laplace-Beltrami Δ_g é simples. Usando teoremas de transversalidade, Uhlenbeck (1976) provou que se M for fechada (isto é, compacta e sem bordo) então Γ é residual em $\mathcal{M}^r$ para qualquer $2 \leq r < \infty$. Quando M é compacta, e sob condições de bordo de Dirichlet, Gomes, Marrocos e Mesquita (2015) provaram que o operador η–laplaciano $L = \Delta - \nabla\eta$ também é genericamente simples. A fórmula de Bochner para esse operador dá origem a uma extensão do tensor curvatura de Ricci, o tensor de Bakry-Émery-Ricci dado por $\mathrm{Ric}_\eta = \mathrm{Ric} + \nabla^2\eta$, tensor esse que aparece naturalmente no estudo de fluxo de Ricci (Cao, 2012; Hamilton, 1982) e sólitons de Ricci (Perelman, 2002). Em nosso trabalho consideramos uma família de tensores simétricos T_g suave em $g \in \mathcal{M}^r$ e η uma função suave sobre M. E então definimos a seguinte família de operadores elípticos de segunda ordem

$$\mathscr{L}_g\phi := \mathrm{div}(T_g\nabla\phi) - \langle\nabla\eta, T_g\nabla\phi\rangle_g. \tag{1.1}$$

Considerando M compacta e condições de bordo de Dirichlet ou Neumann buscamos condições sob T_g para que $\mathscr{L}_g$ também seja genericamente simples. Estudamos também o comportamento de seus autovalores em variedades fechadas quando uma métrica varia ao longo do fluxo de Ricci. Esses operadores são extensões do η–laplaciano e foram estudados por Gomes e Miranda (2016), sob a perspectiva de estimativas de seus autovalores.

A técnica utilizado em nosso trabalho consiste em aplicar fórmulas variacionais tipo Hadamard, a qual é adotada por muitos autores. Por exemplo, Berger (1973) obteve estimativas para o primeiro autovalor do operador Laplace-Beltrami sob condições geométricas de uma variedade riemanniana fechada. Henry (2005) desenvolveu um cálculo diferencial em que a variável independente percorre um certo conjunto de domínios abertos do $\mathbb{R}^n$ e com esta ferramenta obteve fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores de operadores elípticos sob condições de bordo de Dirichlet, Neumann e Robin. Soufi e Ilias (2007) obtiveram uma caracterização de domínios críticos do traço do núcleo do calor sob condições de bordo de Dirichlet.

Gomes, Marrocos e Mesquita (2015) aprimoraram esta técnica através de um cálculo diferencial intrínseco livre de coordenadas para obter genericidade dos autovalores do η–laplaciano sob condições de bordo de Dirichlet. Estendemos o método desses autores para $\mathscr{L}_g$ e obtemos nossa primeira fórmula variacional tipo Hadamard para a derivada dos autovalores de $\mathscr{L}_g$, que pode ser descrita como segue.

Proposição 1. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana compacta, $g(t)$ e $T_t = T_{g(t)}$ variações suaves da métrica g e do tensor T_g, respectivamente. Ademais, sejam $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ uma família de funções e $\lambda_i(t)$, de números reais, suaves em t tais que $\lambda_i(0) = \lambda$ para cada $i = 1, \ldots, m$ e para todo t e*

$$\begin{cases} -\bar{\mathscr{L}}_t \phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M, \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

em que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(M, \mathrm{dm}_t)} = \delta_{ij}$ e $\bar{\mathscr{L}}_t$ é o operador $\mathscr{L}_{g(t)}$ na métrica $g(t)$ variando η em t. Então obtemos a seguinte fórmula variacional para os autovalores de $\bar{\mathscr{L}}_t$

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = & \int_M \Big\langle \frac{1}{2}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)g - 2(T_g\nabla\phi_i)^\flat \otimes d\phi_j, H \Big\rangle \mathrm{dm} \\ & - \int_M 2\langle d\phi_i \otimes (T_g\nabla\phi_j)^\flat - dT_g^* \mathrm{Sym}(d\phi_i \otimes d\phi_j), H \rangle \mathrm{dm} \\ & + \int_M T_g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}, \end{aligned}$$

onde dT_g^* indica adjunta de dT_g e Sym *o operador simetrizador.*

Para garantir a existência das famílias de autofunções e autovalores mencionados acima, utilizamos o Teorema de Kato-Rellich. Esse é o conteúdo do nosso próximo resultado, que é uma extensão dos resultados de Berger (1973) e Gomes, Marrocos e Mesquita (2015).

Lema 1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Considere em M uma família de estruturas Riemanniana $g(t)$, real analítica em t, com $g(0) = g$, e T_t uma variação analítica do tensor T_g. Se λ é um autovalor de multiplicidade $m > 1$ para o (η, T)-laplaciano $\mathscr{L}_g$, então existem $\varepsilon > 0$, escalares λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ e funções ϕ_i variando analiticamente em t, tais que, para todo $|t| < \varepsilon$ tem-se:*

1. *$\lambda_i(0) = \lambda$;*
2. *$\{\phi_i(t)\}$ é ortonormal em $L^2(M, \mathrm{dm}_t)$;*
3. $\begin{cases} \mathscr{L}_t \phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M, \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial M. \end{cases}$

Suponha que a família T_g seja tal que $G_g = (n-4)T_g + 2dT_g(g)$ seja positivo. Nesse caso dizemos que a família de operadores $\mathscr{L}_g\phi = \mathrm{div}_\eta T_g \nabla\phi$ satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$. Como primeira consequência dos resultados acima, temos o teorema abaixo que nos diz que dada qualquer métrica em $\mathcal{M}^r$, podemos deformá-la de modo que $\mathscr{L}$ tenha espectro simples.

Teorema 1. *Considere a família de operadores* $\mathscr{L}_g\phi = \mathrm{div}_\eta(T_g\nabla\phi)$ *que satisfaz a propriedade* $\mathcal{P}$. *Sejam* (M, g_0) *uma variedade compacta com bordo e* λ *um autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_{g_0}\phi &= \lambda\phi \quad \text{em} \quad M \\ \phi &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial M. \end{cases} \tag{1.2}$$

com multiplicidade $m > 1$. *Então dada qualquer vizinhança* $U \subset \mathcal{M}^r$ *de* g_0, *existe* $g_1 \in U$ *tal que os autovalores de* $\mathscr{L}_{g_1}$ *próximos a* λ *são todos simples.*

Como consequência, mostramos que $\mathscr{L}_g$ é genericamente simples. Mais precisamente: a família das métricas g que tornam simples o espectro de $\mathscr{L}_g$ formam um conjunto residual. Em termos formais, temos:

Corolário 1. *Considere a família de operadores* $\mathscr{L}_g\phi = \mathrm{div}_\eta(T_g\nabla\phi)$ *que satisfaz a propriedade* $\mathcal{P}$. *Se* M *é uma variedade compacta, então o conjunto das métricas* C^r *que tornam simples os autovalores do Problema 4.14 é residual.*

Agora fixamos uma métrica g e consideramos $\mathscr{L}_g$ sobre um domínio Ω em M. Nos perguntamos e se ao invés de variarmos a métrica, fizermos isso com o domínio de modo a obter espectro simples, é possível? Caso afirmativo, essa propriedade também é genérica? Na busca pela resposta, buscamos por outra fórmula variacional tipo Hadamard para $\mathscr{L}$, que generaliza as fórmulas de Henry (2005), Soufi e Ilias (2007) e Gomes, Marrocos e Mesquita (2015).

Proposição 2. *Sejam* (M, g) *uma variedade riemanniana,* $\Omega \subset M$ *um domínio limitado,* $f_t : \Omega \to (M, g)$ *uma família analítica de difeomorfismos* $(\Omega_t = f_t(\Omega))$ *com* $f_0 = Id_\Omega$ *e* λ *um autovalor de multiplicidade* $m > 1$. *Então existe uma família de* m *funções* $\{\phi_i(t)\} \in C^\infty(\Omega_t)$ *com* $\langle\phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(\Omega_t,\mathrm{dm})} = \delta_{ij}$ *e números reais* $\lambda_i(t)$, *suaves em* t, *com* $\lambda_i(0) = \lambda$ *tais que*

$$\begin{cases} -\mathscr{L}\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } \Omega_t, \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_t, \end{cases}$$

para todo $t, i = 1, \ldots, m$.

Além disso, temos a seguinte fórmula variacional

$$(\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = -2\int_{\partial\Omega} \langle V, \nu\rangle \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} T(\nu, \nu)\mathrm{d}\mu,$$

onde $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$.

A ideia da demonstração consiste em mudar o problema proposto a uma situação em que o domínio se mantém fixo e métrica varia, e então aplicar a fórmula variacional obtida na Proposição 1

Como aplicação, temos os dois próximos resultados que responde às perguntas que havíamos feito.

Teorema 2. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo e Ω um domínio limitado. Se λ é um autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_g\phi &= \lambda\phi \quad \text{em} \quad \Omega \\ \phi &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

com multiplicidade $m > 1$ então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$, da identidade id_Ω tal que os autovalores $\lambda(f)$ próximo a λ são todos simples.

É sabido que o conjunto $\mathrm{Diff}^r(\Omega)$ dos difeomorfismos $\mathcal{C}^r$ de Ω é um variedade afim do espaço de Banach (Delfour e Zolesio, 2001). Então, como consequência do Teorema 2, obtemos:

Corolário 2. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo e Ω um domínio limitado. Então o conjunto dos difeomorfismos $\mathfrak{D} \subset \mathrm{Diff}^r(\Omega)$, que tornam simples os autovalores do problema 1.3, é residual.*

O teorema abaixo é outra aplicação da fórmula variacional tipo Hadamard obtida por deformações de domínio. Ele é uma generalização de um resultado provado por Soufi e Ilias (2007) para o caso do laplaciano. A técnica utilizada para a demonstração é a mesma desses autores com adequadas modificações.

Teorema 3. *Denotemos por μ_k o k–ésimo autovalor de $\mathscr{L}$. Seja k um natural inteiro tal que $\mu_k > \mu_{k-1}$ (resp. $\mu_k < \mu_{k+1}$) e Ω um minimizante local (resp. maximizante local) para μ_k, isto é, para qualquer deformação Ω_t de Ω que preserva volume, a função $t \mapsto \mu_k(t)$ admite um mínimo local (resp. máximo local) em $t = 0$. Então μ_k é simples e para alguma constante c temos*

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \sqrt{T(\nu, \nu)} \right| = c.$$

Os dois próximos resultados ainda são aplicações da fórmula variacional tipo Hadamard para variação da métrica que foram obtidas no estudo dos autovalores do fluxo de Ricci.

Proposição 3. *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor de $\mathscr{L}$ ao longo do fluxo de Ricci o em M, então*

$$\begin{aligned} \lambda' =& \lambda \int_M u^2 R \mathrm{dm} - \int_M RT(\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm} \\ &+ 4 \int_M \mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm} + \int_M T'(\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm}, \end{aligned}$$

onde u denota a autofunção associada ao autovalor λ e R é a curvatura escalar.

Teorema 4. *Suponhamos que $(M^3, g(t))$ seja uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade riemanniana fechada homogênea (M, g) com curvatura de Ricci não negativa inicialmente. Se $T' \geq -4\mathrm{Ric}T$ então o primeiro autovalor de $\mathscr{L}$ é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci.*

Na seção sobre fluxo de Ricci, exibimos um exemplo que mostra que a hipótese $T' \geq -4Ric(T, \cdot)$ não pode ser removida do Teorema 4. Também exibimos uma classe particular de tensores T_t que esteja dentro da hipótese considerada.

Quando a variedade não é homogênea, obtemos o seguinte resultado na mesma direção:

Teorema 5. *Sejam $(M, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade fechada M com curvatura de Ricci positiva inicialmente e $\mathscr{L}\phi = \operatorname{div}_\eta(\psi\nabla\phi)$, onde ψ é uma função suave positiva. Então existe $t_0 \in [0, \delta)$ tal que o autovalor $\lambda(t)$ de $\mathscr{L}$ é crescente em $t \in [t_0, \delta)$.*

E abaixo, exibimos um resultado obtido que mostra o comportamento do primeiro autovalor quando t está próximo de δ.

Teorema 6. *Sejam $(M, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade fechada M com curvatura de Ricci positiva inicialmente e $\lambda(t)$ a evolução do autovalor do operador $\operatorname{div}_\eta(\psi\nabla u)$. Suponha que $\psi \geq c$ para alguma constante $c > 0$ e que $\nabla^2\psi \leq 0$. Então*

$$\lim_{t \to \delta} \lambda(t) = \infty.$$

A última seção desta tese trata do problema com condições de bordo de Neumann, saber:

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_t\phi = -\lambda\phi & \text{em } M, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu_t} = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde ν_t é uma família a um parâmetro de vetores exteriores unitário ao bordo ∂M.

Cabe ressaltar que para este caso o teorema de existência das curvas de autovalores e autofunções segue uma técnica diferente da aplicada no Lema 1. A principal técnica utilizada foi o método de Liapunov-Schmidt usado por Henry (2005), continuado por Marrocos e Pereira (2015) e, posteriormente, por Gomes e Marrocos (2015). Enquanto que os outros resultados seguimos procedimentos análogos com as devidas adaptações.

2 PRELIMINARES

2.1 Teoria da pertubação de operadores lineares

Nosso objetivo nessa seção será introduzir a Teoria da Pertubação de Operadores Lineares em espaços de dimensão infinita a fim de esclarecer um teorema de separabilidade de autovalores que será utilizado para provar o Lema 4.1. O que será apresentado pode ser encontrado em Kato (1980), porém nos focamos no que será útil para a compreensão do Teorema de Kato-Rellich exibido no final desta seção. No que segue, X, Y, Z denotarão espaços de Banach.

2.1.1 Conceitos básicos de espaços de Banach

Um funcional sesquilinear é uma aplicação $f : X \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha} f(u) + \bar{\beta} f(v).$$

O espaço conjugado X^* é o espaço das formas sesquilineares.

Convém notarmos que quando tratamos de operadores lineares $T : X \to Y$ não necessariamente limitados, o domínio de T será um subespaço $\mathrm{D}(T) \subset X$. Quando $Y = X$ diremos que T é um operador em X.

Se T e S são dois operadores de X em Y, escreveremos $S \subset T$ para indicar que T é uma extensão de S, isto é, $\mathrm{D}(S) \subset \mathrm{D}(T)$ e

$$Su = Tu \quad \forall u \in D(S).$$

Quando T é injetivo, definimos o operador inverso $T^{-1} : Y \to X$ com domínio $\mathrm{D}(T^{-1}) = \mathrm{R}(T)$ e dado por $T^{-1}(Tu) = u$.

O espaço dos operadores limitados com domínio X e valores em Y será denotado por $\mathscr{B}(X, Y)$. Por simplicidade, escreveremos $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X, X)$.

Operadores fechados

Sejam $T : X \to Y$ um operador linear e $\{u_n\}$ uma sequência em X. Diremos que (u_n) T–converge para $u \in X$, e escrevemos $u_n \xrightarrow{T} u$, se tivermos que $u_n \to u$ e $Tu_n \to v$ para algum $v \in Y$. T é dito ser fechado se para toda sequência u_n que T–converge para u tivermos $u \in \mathrm{D}(T)$ e $Tu_n \to Tu$, isto é, se (u_n, Tu_n) é uma sequência convergente no gráfico $G(T)$ para (u, v) então necessariamente temos $(u, v) \in G(T)$. Em outras palavras, T é fechado se, e somente se, $G(T)$ é fechado. O conjunto de todos os operadores fechados será denotado por $\mathscr{C}(X,Y)$. Por simplicidade, escreveremos $\mathscr{C}(X,X) = \mathscr{C}(X)$. Convém observar que um operador $T : X \to Y$ é fechado se, e somente se, $D(T)$ é fechado. Em particular $\mathscr{C}(X,Y) \subset \mathscr{B}(X,Y)$.

Operador adjunto

Considere os operadores $T : X \to Y$ e $S : Y^* \to X^*$. T e S são adjuntos se satisfazem

$$\langle g, Tu\rangle = \langle Sg, u\rangle \quad \forall u \in \mathrm{D}(T),\ g \in \mathrm{D}(S).$$

Em geral existem muitos operadores adjuntos a T, mas quando T é densamente definido, isto é, $\overline{\mathrm{D}(T)} = X$, existe um único operador maximal T^* que é adjunto a T, isto é, se S é qualquer outro operador adjunto a T então tem-se $S \subset T^*$.

T^* é o operador adjunto de T.

Projeções e decomposição

Sejam $A \in \mathscr{B}(X)$ e $T : X \to X$ um operador em X. Diremos que T comuta com A se $AT \subset TA$.

Relembramos que dois subespaços M e N são complementares se $X = M \oplus N$, isto é, $X = M + N$ e $u_M + u_N = 0$ implica $u_M = u_N = 0$. Nesse caso, se $u \in X$ podemos escrever de maneira única

$$u = u_M + u_N, \quad u_M \in M \text{ e } u_N \in N,$$

e dizemos que u_M é a projeção de u sobre M ao longo de N. O operador linear $P : X \to M$ dado por $Pu = u_M$ é a projeção de X sobre M ao longo de N e segue do Teorema do Gráfico Fechado que $P \in \mathscr{B}(X)$. Além disso, P é idempotente, ou seja, $P^2 = P$, e reciprocamente todo operador limitado e idempotente P é uma projeção de $M = PX$ ao longo de $N = (I - P)X$. Essa noção pode ser estendida da seguinte maneira. Uma decomposição $X = \bigoplus M_j$ definirá uma família de projeções $P_j : X \to M_j$ dadas por

$$P_j u = P(u_1 + \cdots + u_n) = u_j.$$

Essa família satisfaz:

$$\sum P_j = I \text{ e } P_k P_j = \delta_{jk} P_k. \tag{2.1}$$

Reciprocamente, uma família de operadores limitados satisfazendo as condições (2.1) são projeções que definem uma decomposição do tipo $X = \bigoplus M_j$.

Suponha que $T \in \mathscr{B}(X)$ e seja M um subespaço invariante por T, isto é, $TM \subset M$. Então podemos definir o operador $T_M : M \to M$ dado por $T_M u = Tu$.

T_M assim definido é chamada uma parte de T em M. Se tivermos uma decomposição $X = \bigoplus M_j$ em que cada M_j é invariante por T, diremos que T é decomposto pelos subespaços M_j ou que é soma direta de suas partes T_{M_j} e escrevemos

$$T = \bigoplus T_{M_j}.$$

É fácil ver que T é decomposto por subespaços M_j se, e somente se, T comuta com as respectivas projeções.

Quando T não é limitado, diremos que T pode ser decomposto com respeito a $X = \bigoplus M_j$ se

$$P_j \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(T) \quad \text{e} \quad TM_j \subset M_j \tag{2.2}$$

onde P_j é a projeção de M_j. Essa definição ainda é equivalente a T comutar com os P_j's e as partes T_{M_j} ainda podem ser definidas como no caso de operadores limitados, porém com $\mathrm{D}(T_{M_j}) = \mathrm{D}(T) \cap M_j$. Note que se T é fechado então T_{M_j} também será fechado.

Resolvente e espectro

Seja T um operador fechado em X. Então $T - \xi I$ também será fechado. Seu conjunto resolvente $\rho(T)$ é formado pelos pontos $\xi \in \mathbb{C}$ tais que $T - \xi I$ é invertível e

$$R(\xi) = R(\xi, T) = (T - \xi I)^{-1} \in B(X).$$

Nesse caso, $R(\xi)$ é o operador resolvente de T. O complementar de $\rho(T)$ é o espectro de T, denotado por $\mathrm{spec}(T)$.

O resultado abaixo nos dará um critério para que T comute com um operador limitado.

Proposição 2.1. *Suponhamos que $\rho(T)$ seja não vazio. Então para que T comute com um operador $A \in \mathscr{B}(X)$ é necessário que*

$$R(\xi)A = AR(\xi)$$

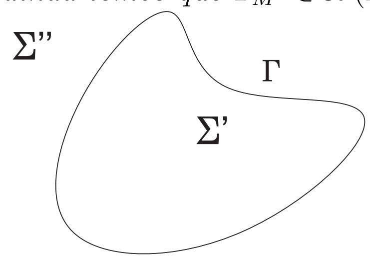
para cada $\xi \in \rho(T)$ e é suficiente que seja assegurado para todo $\xi \in \rho(T)$.

Proposição 2.2. *$\rho(T)$ é aberto e $R(\xi)$ é holomorfa em uma componente conexa de $\rho(T)$.*

Teorema 2.1. *Suponhamos que uma parte spec' do espectro de T seja delimitada por uma curva fechada, simples e retificável Γ e denote por spec'' o restante de $\mathrm{spec}(T)$. Então podemos decompor T com respeito a alguma decomposição $X = M' \oplus M''$ tal que*

$$\mathrm{spec}(T_{M'}) = \mathrm{spec}' \text{ e } \mathrm{spec}(T_{M''}) = \mathrm{spec}'',$$

isto é, os espectros de suas partes nessa decomposição coincidem com as partes separadas *do espectro de T. Além disso, ainda temos que $T_{M'} \in \mathscr{B}(X)$.*



Observação 2.1. *A projeção que nos fornece a decomposição no teorema 2.1 é dada por*

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\xi)d\xi \in \mathscr{B}(X). \tag{2.3}$$

Como $R(\xi)$ é holomorfa, P independe da curva fechada, simples e retificável tomada, se ela conter em seu interior apenas um ponto do espectro. Além disso, P comuta com $R(\xi, T)$, o que nos fornece a decomposição mencionada pela Proposição 2.1

O Teorema 2.1 pode ser estendido ao caso

$$\mathrm{spec}(T) = \mathrm{spec}_0 \cup \mathrm{spec}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{spec}_s$$

em que cada spec_j, $j \geq 1$, é uma parte delimitada por uma curva fechada, simples e retificável Γ_j que não intercepta com nenhuma outra e spec_0 é a parte exterior às curvas Γ_j's. Teremos então

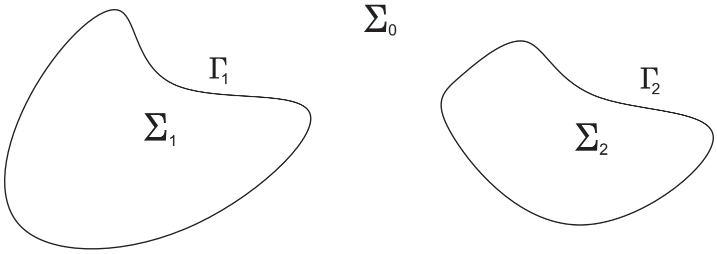
$$X = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$$

e

$$T = T_{M_0} \oplus T_{M_1} \oplus \cdots \oplus T_{M_s}.$$

Além disso,

$$\mathrm{spec}(T_{M_j}) = \mathrm{spec}_j, \quad j \geq 0.$$



Agora, suponhamos que λ seja um ponto isolado do espectro e consideremos uma curva Γ fechada, simples e retificável em torno de λ de modo que não contenha nenhum outro ponto de $\mathrm{spec}(T)$ em seu interior. Assim, temos a decomposição

$$\mathrm{spec}(T) = \mathrm{spec}' \cup \mathrm{spec}''$$

em que $\mathrm{spec}' = \{\lambda\}$ e, portanto, o espectro de $T_{M'}$ possui um único elemento. Se M' tem dimensão finita então λ será autovalor de $T_{M'}$ e, consequentemente, de T. Nesse caso,

$\dim M'$ é chamada multiplicidade (algébrica) e P de autoprojeção de λ. Uma coleção finita de autovalores isolados e com multiplicidade finita é dita ser um sistema finito de autovalores

Proposição 2.3. *Se $T \in \mathscr{C}(X)$ e $R(\xi)$ é um operador compacto para algum ξ então será compacto para todo $\xi \in \rho(T)$. Além disso, o espectro de T é constituído inteiramente de autovalores isolados e com multiplicidade finita. Nesse caso, dizemos que T é um operador com resolvente compacto.*

2.1.2 Família holomorfa tipo $\mathcal{A}$

Uma família $T_x : X \to Y$ é holomorfa-limitada quando cada $T_x \in \mathscr{B}(X;Y)$ e T_x é holomorfa na norma de $\mathscr{B}(X)$.

Dizemos que T_x em $\mathscr{C}(X;Y)$ é holomorfa se existe um terceiro espaço de Banach Z e famílias holomorfas-limitada $U_x \in \mathscr{B}(Z,X)$ e $V_x \in \mathscr{B}(Z,Y)$ tais que U_x é injetiva com $U_x(Z) \subset D(T_x)$ e $V_x = T_x U_x$.

$$\begin{tikzcd} D(T_x) \arrow[r, "T_x"] & Y \\ Z \arrow[u, "U_x"] \arrow[ur, "V_x = T_x U_x"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos $T_x \in \mathscr{C}(X)$ holomorfa em x próximo a $x = 0$. Seja $\mathrm{spec}(0) = \mathrm{spec}(T_0)$ e suponhamos que seja separado em duas partes $\mathrm{spec}'(0)$ e $\mathrm{spec}''(0)$ por uma curva Γ fechada, simples e retificável como descrito na seção anterior. Então temos $\Gamma \subset \rho(x)$ para x suficientemente pequeno (Kato, 1980) e $\mathrm{spec}(T_x)$ é da mesma maneira separado por Γ em duas partes spec'_x e $\mathrm{spec}''(x)$ com decomposição associada $X = M'(x) \oplus M''(x)$. A projeção sobre $M'(x)$ ao longo de $M''(x)$ será dada por

$$P_x = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\xi, x) d\xi$$

e será holomorfa-limitada.

Dessa maneira, o problema de autovalores para T_x se reduz às suas partes em $M'(x)$ e $M'(x)$, pois conseguimos encontrar seus autovalores e autofunções procurando em suas partes. Porém, não é muito vantajoso o fato desses subespaços mudarem de domínio. Por exemplo, se $M'(x)$ tiver dimensão finita, não podemos aplicar os resultados conhecidos de pertubação de operadores em dimensão finita pois o domínio do operador não será fixo quando o operador for perturbado. Entretanto, o método abaixo nos ajudará com esse problema.

Como P_x é holomorfa, existe uma família de transformações invertíveis U_x que, juntamente com sua inversa, são holomorfa-limitadas e ainda temos

$$P_x = U_x P_0 U_x^{-1}.$$

Como T_x comuta com P_x, segue que o operador

$$\check{T} = U_x^{-1} T_x U_x$$

comuta com $P(0)$. Assim, $M'(0)$ e $M''(0)$ decompõem $\check{T}_x$ para todo x. Mas o problema de autovalores de T_x em $M'(x)$ é equivalente ao de $\check{T}_x$ em $M'(0)$, que possui domínio fixo. Em particular, se spec$'(0)$ consiste de um sistema finito de autovalores, então $M'(0)$ terá dimensão finita e então poderemos aplicar os resultados conhecidos de pertubação de operadores em dimensão finita ao operador $\check{T}_{M'(x)}$. Em particular, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Se T_x é holomorfa em x próximo a $x = 0$, qualquer sistema finito $\lambda_h(x)$ consiste de ramos de funções analíticas que no máximo singularidades algébricas próximas a $x = 0$.*

Uma família de operadores fechados T_x é dita ser holomorfa tipo $\mathcal{A}$ se possui domínio fixo $\mathrm{D}(T_x) = \mathrm{D}$ e se para cada $u \in D$, $x \mapsto T_x u$ é holomorfa em x.

Proposição 2.5. *Se $T_x \in \mathscr{C}(X)$ é holomorfa tipo $\mathcal{A}$ e tem resolvente não vazio para algum x. Então seu resolvente é compacto para todo x ou para nenhum x.*

Família holomorfa auto-adjunta

Sejam H um espaço de Hilbert e D_0 um domínio do plano complexo, simétrico em relação ao eixo x. Uma família $T_x \in \mathscr{C}(H)$ holomorfa em D_0 é auto-adjunta se cada T_x está densamente definido e $T_x^* = T_{\bar{x}}$. Se T_x possui espectro separado em duas partes spec$'(x)$ e spec$''(x)$ com decomposição associada $H = M'(x) \oplus M''(x)$ para x suficientemente próximo de x_0, então as projeções P_x sobre $M'(x)$ também formarão uma família auto-adjunta. As transformações U_x descritas na seção anterior serão unitárias para cada real x. Assim, $\check{T}(x)$ poderá ser considerada como uma família holomorfa-limitada auto-adjunta em um espaço de Hilbert fixo $M'(x_0)$.

Suponhamos que λ seja um autovalor isolado de T_0. Então λ pode ser dividido em uma ou mais funções holomorfas $\lambda(x)$, que junto com sua projeção, podem ser continuado analiticamente ao longo do eixo real. O maior intervalo do eixo real de modo que $\lambda(x)$ ainda seja autovalor e P_x autoprojeção é chamado intervalo maximal. Em geral esse intervalo maximal difere um do outro. Entretanto, se adicionarmos que T_x é holomorfa tipo $\mathcal{A}$ então esse será justamente todo o intervalo real contido em D_0, isto é, cada autovalor λ de T_0 pode ser continuado holomorficamente para todo real x em D_0.

Teorema 2.2 (Kato-Rellich). *Seja T_x uma família de operadores tipo $\mathcal{A}$ definida em uma vizinhança de um intervalo I_0 do eixo real e com resolvente compacto. Então todos os autovalores de T_x podem ser representados por funções que são holomorfas em I_0. Mais precisamente, existem sequências de escalares $\mu_i(x)$ e de funções $\phi_i(x)$ holomorfas em I_0 tais que, para cada $x_0 \in I_0$, $\mu_i(x)$ representa todos os autovalores de T_x incluindo os repetidos e $\{\phi_i(x)\}$ um sistema ortonormal completo de autofunções associadas.*

Demonstração. Sendo T_x holomorfa auto-adjunta tipo $\mathcal{A}$, já sabemos pela Proposição 2.4 e pelo comentário acima que seus autovalores são representados por ramos de funções holomorfas em todo intervalo maximal e, portanto, em I_0. Resta, então, mostrar a existência do sistema ortonormal. Mas T_0 é um operador auto-adjunto, logo é normal e como possui resolvente compacto segue que a família de projeções P_h associadas a seus autovalores, que sabemos que são isolados e com multiplicidade finita, é completa. Fixemos um autovalor $\lambda = \lambda(0)$. Como $M(0)$ é de dimensão finita, existe uma base $\{\phi_j(0)\}$ de autofunções associadas e as funções de transformações U_x são unitárias. Assim sendo, $\phi_j(x) = \{U_x\phi_j(0)\}$ é uma família ortonormal de autofunções e holomorfa em x. Como a família P_h é completa, a união de todas essas ϕ_j será completa, o que conclui a prova. $\square$

2.2 Geometria riemanniana

2.2.1 Tensores em variedades riemannianas

O uso adequado de propriedades de tensores em variedades riemannianas fornece muitas técnicas na obtenção de resultados sobre as mesmas. De fato, destacamos aqui as fórmulas tipo Hadarmard, que apresentam um formato tensorial a fim de obter resultados de genericidade (Gomes, Marrocos e Mesquita, 2015; Gomes e Marrocos, 2015; Soufi e Ilias, 2007).

Definição 2.1. *Um $(1,k)$–tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$T : \mathfrak{X}(M)^{\times k} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Por convenção um campo X será considerado um $(1,0)$–tensor.

Um $(0,k)$-tensor é definido de modo análogo, porém o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente,

$$T(Y_1,\ldots,fX+hY,\ldots,Y_r) = fT(Y_1,\ldots,X,\ldots,Y_r) + hT(Y_1,\ldots,Y,\ldots,Y_r)$$

para todos $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f,h \in C^\infty(M)$. As funções suaves sobre M são $(0,0)$–tensor.

Destacaremos aqui uma identificação que usaremos ao longo do texto. Dado um $(0,2)$–tensor em uma variedade riemanniana $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, existe um único $(1,1)$–tensor, o qual ainda indicaremos por T, tal que

$$T(X,Y) = \langle TX, Y\rangle \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}.$$

Em coordenadas, um $(0,k)$–tensor pode ser escrito como

$$T = T(\partial_{i_1}, \cdots, \partial_{i_k}) dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k},$$

Aqui, estamos usando a convenção de Einstein, em que índices repetidos cruzados indicam que há uma soma implícita.

Utilizaremos ainda a seguinte convenção:

$$T_{i_1 \cdots i_k} := T(\partial_{i_1}, \cdots, \partial_{i_k}).$$

Em particular, se T é um $(0,2)$–tensor, para campos $X = X^i\partial_i$ e $Y^j\partial_j$ teremos

$$T(X,Y) = X^i Y^j T_{ij},$$

e seu traço é dado por

$$\mathrm{tr}(T) = g^{ij} T_{ij}$$

Se S e T são $(0,2)$–tensores, a relação

$$\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$$

define um produto interno sobre o espaço dos $(0,2)$–tensores conhecido como produto de Hilbert-Schmidt.

Em coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
\langle T, S\rangle =& g^{ij}\langle TS^*\partial_i, \partial_j\rangle \\
=& g^{ij} g^{kl} \langle T(\langle S^*\partial_i, \partial_k\rangle \partial_l), \partial_j\rangle \\
=& g^{ij} g^{kl} \langle T\partial_l, \partial_j\rangle \langle \partial_i, S\partial_k\rangle \\
=& g^{ij} g^{kl} T_{lj} S_{ki} \\
=& g^{ij} g^{kl} T_{ik} S_{jl},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida por uma reorganização dos índices usando a simetria de g.

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante ∇ de campos de vetores a tensores da seguinte maneira. Se T é um $(1,k)$–tensor então ∇T será um $(1,k+1)$–tensor dado por

$$\nabla T(X, Y_1, \dots, Y_k) := \nabla_X(T(Y_1, \dots, Y_k)) - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_k) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_k).$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

De modo análogo definimos a derivada covariante de um $(0,k)$–tensor.

Em uma variedade diferenciável com conexão riemanniana ∇, o tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor

$$\mathrm{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$\mathrm{R}(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

R também pode ser visto como um $(0,4)$–tensor dado por:

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W) = \langle \mathrm{R}(X,Y)Z), W \rangle.$$

O tensor de Ricci é o traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g^{ij} R(\partial_i, X, Y, \partial_j) = \mathrm{Ric}(Y,X).$$

Representamos as coordenadas do tensor de Ricci por R_{ij} e assim,

$$R_{jk} = g^{il} R_{ijkl}.$$

A curvatura escalar R de M é o traço do tensor de Ricci e, portanto, temos

$$R = g^{jk} R_{jk}.$$

2.2.2 Operadores diferenciais

A conexão riemanniana e a derivação de tensores nos permite estender certos operadores diferenciais em $\mathbb{R}^n$ às variedades riemannianas, como veremos nesta seção. Porém, este é o momento certo para introduzirmos dois isomorfismos bem conhecidos na geometria. Não entraremos em detalhes aqui para não fugirmos do escopo da tese, mas o fato é que para cada campo X existe uma única forma diferencial $\hat{g}(X) = X^\flat$ que satisfaz:

$$X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Se fizermos $X = X^i \partial_i$, teremos

$$X^\flat = g_{ij} X^i dx^j.$$

Porém, comumente escrevemos

$$X^\flat = X_j dx^j,$$

onde $X_j = g_{ij}X^i$. Por isso dizemos que $X^\flat$ é obtido de X baixando um índice e isso justifica a notação pois o símbolo $\flat$ indica na música uma nota mais baixa.

Cada forma diferencial ω também está associada um campo $\omega^\sharp$, chamado sustenido de ω, que é o inverso o isomorfismo que gera o bemol, isto é,

$$\omega(Y) = \langle \omega^\sharp, Y\rangle.$$

Escrevendo $\omega = \omega_j dx^j$, teremos

$$\omega^\sharp = \omega^i \partial_i = g^{ij}\omega_i \partial_j.$$

Por isso dizemos que $\omega^\sharp$ é obtido de ω subindo um índice, o que também justifica a notação pois o símbolo $\sharp$ é utilizado para indicar uma nota musical mais alta.

Agora, podemos definir alguns operadores diferenciais.

Definição 2.2. *O gradiente de uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ é o campo vetorial diferenciável ∇f dado por*

$$\nabla f = (df)^\sharp$$

isto é, satisfaz

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = Xf = \nabla_X f$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Como $df = f_j dx^j$, onde $f_j = \partial_j f$, pelo que vimos acima teremos

$$\nabla f = f^i \partial_i = g^{ij} f_i \partial_j.$$

Definição 2.3. *A divergência de um campo X é uma função suave dada por*

$$\mathrm{div} X := \mathrm{tr}(v \mapsto \nabla_v X) = g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j\rangle$$

A definição de divergência também é estendida a tensores.

Definição 2.4. *A divergência de um $(1,k)$–tensor é um $(0,k)$–tensor dado por*

$$(\mathrm{div} T)(X_1, \cdots, X_k) = \mathrm{tr}(v \mapsto (\nabla_v T)(X_1, \cdots, X_k)).$$

Definição 2.5. *O laplaciano de uma função suave f é dado por*

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f = g^{ij}\nabla_i f_j.$$

Definição 2.6. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$\nabla^2 f(X) = (\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.4}$$

Ou como $(0,2)$-tensor, dado por

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = \nabla^2_{X,Y}(f). \tag{2.5}$$

O hessiano visto como $(0,2)$–tensor é simétrico como é facilmente visto e ainda temos

$$\mathrm{tr}(\nabla^2 f) = g^{ij} \nabla^2 f(\partial_i, \partial_j) = g^{ij} \langle \nabla_i \nabla f, \partial_j \rangle = \mathrm{div} \nabla f = \Delta f.$$

Convém observarmos ainda que $\nabla^2 f = \nabla df$.

3 O OPERADOR $\mathscr{L}$ E VARIAÇÃO DE TENSORES

Nesta seção, daremos algumas definições e mostraremos algumas propriedades que serão de importância ao longo de todo o trabalho a respeito da classe de operadores adotada.

Consideremos uma variedade riemanniana compacta orientada (M, g) com bordo ∂M envolvido com uma medida com peso da forma $\mathrm{dm} = e^{-\eta} dM$. Seja $\mathrm{d}\mu = e^{-\eta}\mathrm{d}\sigma$ a forma volume induzida sobre ∂M, onde $\eta : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Definimos o operador (η, T_g)–laplaciano por

$$\mathscr{L}_g(\cdot) := \mathrm{div}(T_g \nabla \cdot) - T_g(\nabla \eta, \nabla \cdot),$$

onde T_g é um $(0, 2)$-tensor simétrico definido positivo que depende suavemente da métrica g. Observemos que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ o operador $\mathrm{div}_\eta X = \mathrm{div} X - \langle \nabla \eta, X \rangle$ possui as seguintes propriedades:

$$\mathrm{div}_\eta(S(fX)) = f \mathrm{div}_\eta(SX) + \langle \nabla f, SX \rangle$$

e

$$\int_M \mathrm{div}_\eta(SX)\mathrm{dm} = \int_{\partial M} \langle SX, \nu \rangle \mathrm{d}\mu,$$

para cada tensor simétrico S e $f \in C^\infty(M)$. Então a fórmula de integração por partes é dada por

$$\int_M \ell \mathrm{div}_\eta(SX)\mathrm{dm} = -\int_M \langle SX, \nabla \ell \rangle \mathrm{dm} + \int_{\partial M} \ell \langle SX, \nu \rangle \mathrm{d}\mu,$$

para todo $\ell \in C^\infty(M)$.

Em particular,

$$\int_M \ell \mathscr{L}_g f \mathrm{dm} = -\int_M T_g(\nabla \ell, \nabla f)\mathrm{dm} + \int_{\partial M} \ell T_g(\nabla f, \nu)\mathrm{d}\mu.$$

Consequentemente, $\mathscr{L}_g$ é auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dm})$ com domínio $H^2(M, \mathrm{dm}) \cap H_0^1(M, \mathrm{dm})$. Além disso, $\mathscr{L}_g$ é operador fechado, o que nos direciona a usar a Teoria de Pertubação descrita na Seção 2.1.

Seja $t \mapsto g(t)$ uma variação da métrica g tal que $(M, g(t), \mathrm{dm_t})$ é uma variedade riemanniana compacta onde $\mathrm{dm_t}$ é o elemento volume com peso de $g(t)$ e consideramos $\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}$ como sendo elemento volume com peso de $g(t)$ restrito a ∂M. Denotando por H o $(0, 2)$-tensor dado por $H_{ij} = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_{ij}(t)$ e escrevendo $h = g^{ij} H_{ij}$, temos facilmente $\frac{d}{dt}\mathrm{dm}_t = \frac{1}{2} h \mathrm{dm}$. Similarmente, $\tilde{h}$ indicará o traço do tensor $\tilde{H}$ induzido pela derivada de $g(t)$ restrita a ∂M e $\frac{d}{dt}\mathrm{d}\mu_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\tilde{h}\mathrm{d}\mu$.

Antes proseguirmos, convém entendermos o significado para o produto entre dois $(0,2)$–tensors S e T:

$$ST(X,Y) = \langle STX, Y\rangle = S(TX,Y).$$

Dessa maneira, definimos o seguinte tensor simétrico

$$\mathscr{H}_T := -(TH + HT) + T'. \tag{3.1}$$

Escrevendo $X = g^{ij}x_i\partial_j$ e denotando $\dot{X} := g^{ij}x_i'\partial_j$, teremos

$$\frac{d}{dt}T(X,Y) = T(\dot{X},Y) + T(X,\dot{Y}) + \mathscr{H}_T(X,Y). \tag{3.2}$$

Para provarmos isso, primeiro observamos que

$$T(X,Y) = g^{ij}(t)g^{kl(t)}x_i(t)y_k(t)(T_t)_{jl} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}g^{ij}(t) = -g^{ir}(t)g^{js}(t)H_{rs}(t).$$

Daí

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(X,Y) &= g^{ij}g^{kl}x_i'(t)y_k(t)(T_t)_{jl} + g^{ij}g^{kl}x_i(t)y_k'(t)(T_t)_{jl}\\ &\quad - g^{ir}g^{js}g^{kl}H_{rs}x_iy_k(T_t)_{jl} - g^{ij}g^{kr}g^{ls}H_{rs}x_iy_k(T_t)_{jl}\\ &\quad + g^{ij}g^{kl}x_iy_k(T_t)_{jl}'\end{aligned}$$

o que conclui a prova da nossa afirmação.

Em particular, se $f, \ell \in C^\infty(M)$ então

$$\frac{d}{dt}T_t(\nabla f, \nabla \ell) = \mathscr{H}_T(\nabla f, \nabla \ell) \tag{3.3}$$

e

$$\frac{d}{dt}\langle \nabla f, \nabla \ell\rangle = -H(\nabla f, \nabla \ell).$$

Se $\nu_t = \frac{\nabla_t f}{|\nabla_t f|}$ então

$$\frac{d}{dt}T_t(\nu_t, \nabla_t \ell(t)) = \frac{1}{2}H(\nu,\nu)T(\nu,\nabla\ell) + T(\nu, \nabla \ell') + \mathscr{H}_T(\nu, \nabla\ell). \tag{3.4}$$

De fato é suficiente notar que $\nu_i = \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \partial_i\rangle$, o que implica em

$$\nu_i' = \frac{1}{2}\frac{1}{|\nabla f|}H(\nu,\nu)\partial_i f,$$

de modo que,

$$T(\dot{\nu}, \nabla \ell) = \frac{1}{2}H(\nu,\nu)T(\nu,\nabla\ell). \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.2) obtemos imediatamente a equação (3.4).

4 CONDIÇÃO DE BORDO DE DIRICHLET

4.1 Fórmulas variacionais tipo Hadamard

Nesta seção, assumiremos que todas as variedades serão orientadas e as que são compactas serão admitidas com bordo. Como de costume, M denotará uma variedade riemanniana com métrica g e $g(t)$ uma variação suave de g, de onde obtemos a correspondente variação $\mathscr{L}_{g(t)}$ do operador $\mathscr{L}_g$ em $L^2(M, \mathrm{dm})$. Como $\mathscr{L}_g$ é formalmente auto-adjunto, provido de todas as funções sobre $L^2(M, \mathrm{dm})$ que se anulam em ∂M, pelo Teorema (C) em Kriegl e Michor (2003) temos que os autovalores de $\mathscr{L}_{g(t)}$ podem ser parametrizado duas vezes em t.

Para simplificar a notação, escrevemos $\mathscr{L}_t = \mathscr{L}_{g(t)}$ e $T_t = T_{g(t)}$ para uma variação suave do $(0,2)$-tensor simétrico T.

O lema abaixo garante a existência de famílias suaves em t de autofunções ortonormais e autovalores de $\mathscr{L}$ satisfazendo a condição de bordo de Dirichlet. Este lema é uma extensão dos resultados de Berger (1973) e Gomes, Marrocos e Mesquita (2015).

Lema 4.1. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta. Considere em M uma família de estruturas riemanniana $g(t)$, real analítica em t, com $g(0) = g$, e T_t uma variação analítica do tensor T. Se λ é um autovalor de multiplicidade $m > 1$ para o (η, T)–laplaciano $\mathscr{L}_g$, então existem $\varepsilon > 0$, escalares $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ e funções $\phi_i(t)$ variando analiticamente em t, tais que para todo $|t| < \varepsilon$ tem-se que $\lambda_i(0) = \lambda$, $\{\phi_i(t)\}$ é ortonormal em $L^2(M, \mathrm{dm}_t)$ e*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_t \phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t) & \text{em } M \\ \phi_i(t) = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro, consideramos as respectivas extensões $g(z)$ e T_z de $g(t)$ e T_t a um domínio D_0 do plano complexo $\mathbb{C}$, simétrico em relação ao eixo x (por exemplo, faça $T_{a+ib} = T_a + iT_b$). Assim, consideremos o operador

$$\mathscr{L}_{g(z)} : \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C}),$$

dado por

$$\mathscr{L}_{a+ib} = \mathscr{L}_a + i\mathscr{L}_b.$$

Agora observamos que o domínio $D = H^2(M) \cap H_0^1(M)$ do operador $\mathscr{L}_z$ é independente de z e, como M é compacta, quaisquer duas métricas são equivalentes. Além disso, a aplicação $z \mapsto \mathscr{L}_z\phi$ é holomorfa em $z \in D_0$ e para cada $\phi \in D$. Assim, $\mathscr{L}_z$ é uma família holomorfa tipo (A). Gostaríamos de aplicar o Teorema de Kato-Rellich à família $\mathscr{L}_z$, porém estes operadores não são auto-adjuntos com respeito a um produto fixado. Para contornarmos esse problema, considerarmos a isometria $P : L^2(M, \mathrm{dm}) \to L^2(M, \mathrm{dm}_t)$ dada por

$$P(u) = \frac{\sqrt[4]{det(g_{ij})}}{\sqrt[4]{det(g_{ij}(t))}} u.$$

Então o operador $\tilde{\mathscr{L}_t} := P^{-1} \circ \mathscr{L}_t \circ P$ terá os mesmos autovalores que $\mathscr{L}_t$ e, além disso, é auto-adjunto pois

$$\begin{aligned}\int_M v\tilde{\mathscr{L}}_t u \mathrm{dm} &\overset{(isom.)}{=} \int_M P(v)\mathscr{L}_t P(u) \mathrm{dm}_t = \int_M P(u)\mathscr{L}_t P(v)\mathrm{dm}_t \\ &\overset{(isom.)}{=} \int_M P^{-1}P(u)P^{-1}\mathscr{L}_t P(v)\mathrm{dm} = \int_M u\tilde{\mathscr{L}}_t v \mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos aplicar o Teorema de Kato-Rellich e obter os autovalores e autofunções com as propriedades requeridas. □

Consideremos uma função suave $\eta : I \times M \to \mathbb{R}$. Para cada $\phi \in C^\infty(M)$, definamos

$$\bar{\mathscr{L}_t}\phi := \mathrm{div}(T_t \nabla \phi) - T_t(\nabla \eta(t), \nabla \phi). \tag{4.1}$$

Essa forma do operador $\mathscr{L}$ com η variando será útil para lidarmos como variação de domínio mais adiante. Por enquanto, necessitamos do seguinte lema.

Lema 4.2. *Para todo $f \in C_c^\infty(M)$,*

$$\bar{\mathscr{L}}' f = \frac{1}{2} T(\nabla h, \nabla f) + \mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}_T \nabla f) - T(\nabla \dot{\eta}, \nabla f) \tag{4.2}$$

onde $\bar{\mathscr{L}}' := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \bar{\mathscr{L}_t}$ e $\dot{\eta} = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t)$.

Demonstração. Primeiramente, suponha que η não dependa de t e observamos que nesse caso temos $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L}_t$. Tomando $\ell \in C_c^\infty(M)$, integrando por partes temos

$$\int_M \ell \mathscr{L}_t f \mathrm{dm}_t = -\int_M T_t(\nabla \ell, \nabla f)\mathrm{dm}_t.$$

Então, da equação (3.3), temos $t = 0$

$$\int_M \ell \mathscr{L}' f \mathrm{dm} = \int_M \Big(-\frac{1}{2}\ell h \mathscr{L} f - \mathscr{H}_T(\nabla f, \nabla \ell) - \frac{1}{2} h T(\nabla \ell, \nabla f)\Big)\mathrm{dm}. \tag{4.3}$$

Observemos que

$$\mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}_T(\ell \nabla f)) = \ell \mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}_T \nabla f) + \mathscr{H}_T(\nabla f, \nabla \ell) \tag{4.4}$$

e

$$\mathrm{div}_\eta(\ell h T \nabla f) = \ell h \mathscr{L} f + \ell T(\nabla h, \nabla f) + h T(\nabla \ell, \nabla f). \tag{4.5}$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.3), obtemos

$$\int_M \ell \mathscr{L}' f \mathrm{dm} = \int_M \ell \left(\frac{1}{2} T(\nabla h, \nabla f) + \mathrm{div}_\eta (\mathscr{H}_T \nabla f) \right) \mathrm{dm},$$

o que prova o que queríamos.

Para o caso geral, é suficiente notar que

$$\bar{\mathscr{L}}' f = \mathscr{L}' f - T(\nabla \dot{\eta}, \nabla f)$$

para concluir a prova do lema. $\square$

Por uma família suave T_g entendemos como sendo uma aplicação suave $T : \mathcal{M}^r \to \mathcal{S}^2(M)$ que associa a cada $g \in \mathcal{M}^r$ um tensor simétrico $T(g) = T_g$. Dessa forma faz sentido falar da diferencial dT_g da família T_g.

Agora podemos obter nossa primeira fórmula variacional tipo Hadamard, que generaliza a fórmula de Berger (1973) e Gomes, Marrocos e Mesquita (2015).

Proposição 4.1. *Sejam (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta, $g(t)$ uma variação suave de g_0 e T_g uma família suave de tensores simétricos definido positivo. Ademais, sejam $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ e $\lambda_i(t)$ famílias de funções de números reais, respectivamente, suaves em t e tais que $\lambda_i(0) = \lambda$ para cada $i = 1, \ldots, m$ e para todo t tem-se*

$$\begin{cases} -\bar{\mathscr{L}}_t \phi_i(t) & = & \lambda_i(t)\phi_i(t) & \textit{em } M, \\ \phi_i(t) & = & 0 & \textit{sobre } \partial M, \end{cases}$$

em que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(M, \mathrm{dm}_t)} = \delta_{ij}$. Então obtemos a seguinte fórmula variacional

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \lambda_j)' \Big|_{t=0} \delta_{ij} = & \int_M \langle \frac{1}{2} \mathscr{L}_{g_0}(\phi_i \phi_j) g_0 - 2(T_{g_0} \nabla \phi_i)^\flat \otimes d\phi_j - 2 d\phi_i \otimes (T_{g_0} \nabla \phi_j)^\flat, H \rangle \mathrm{dm} \\ & + \int_M [2 \langle dT^*_{g_0} \mathrm{Sym}(d\phi_i \otimes d\phi_j), H \rangle + T_{g_0}(\nabla \dot{\eta}, \nabla(\phi_i \phi_j))] \mathrm{dm}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $dT^*_{g_0}$ indica adjunta de dT_{g_0}, Sym *o operador simetrizador e $\phi_i = \phi_i(0)$.*

Demonstração. Derivando a identidade

$$-\bar{\mathscr{L}}_t \phi_i(t) = \lambda_i(t) \phi_i(t),$$

teremos

$$-\bar{\mathscr{L}}_t' \phi_i(t) - \bar{\mathscr{L}}_t \phi_i'(t) = \lambda_i'(t) \phi_i(t) + \lambda_i(t) \phi_i'(t).$$

Daí, em $t=0$, temos

$$-\phi_j\mathscr{L}'_{g_0}\phi_i - \phi_j\mathscr{L}_{g_0}\phi'_i = \lambda'_i\phi_j\phi_i - \phi'_i\mathscr{L}_{g_0}\phi_j - \phi_j T_{g_0}(\nabla\dot\eta, \nabla\phi_i).$$

Usando integração por partes e o fato que $\phi_i = 0$ em ∂M, obtemos

$$\lambda'_i\delta_{ij} = -\int_M \phi_j\mathscr{L}'_{g_0}\phi_i \mathrm{dm} + \int_M T_{g_0}(\nabla\dot\eta, \phi_j\nabla\phi_i)\mathrm{dm}.$$

Assim, deduzimos de (4.2) que

$$\begin{aligned}(\lambda_i+\lambda_j)'\delta_{ij} =& -\int_M \phi_j\mathscr{L}'_{g_0}\phi_i\mathrm{dm} - \int_M \phi_i\mathscr{L}'_{g_0}\phi_j\mathrm{dm} + \int_M T_{g_0}(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_j\phi_i))\mathrm{dm}\\ =& -\int_M \frac{1}{2}T_{g_0}(\nabla h, \nabla(\phi_i\phi_j)) + \phi_j\mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}_{T_{g_0}}\nabla\phi_i) + \phi_i\mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}_{T_{g_0}}\nabla\phi_j)\mathrm{dm}.\\ &+\int_M T_{g_0}(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_j\phi_i))\mathrm{dm}\end{aligned}$$

Novamente, integração por partes implica que

$$(\lambda_i+\lambda_j)'\delta_{ij} = \int_M \left(\frac{h}{2}\mathscr{L}_{g_0}(\phi_i\phi_j) + 2\mathscr{H}_{T_{g_0}}(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + T_{g_0}(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_j\phi_i))\right)\mathrm{dm}. \tag{4.7}$$

Finalmente, para concluir a prova, é suficiente notar que

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{T_g}(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) =& -H(T_g\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) - H(\nabla\phi_i, T_g\nabla\phi_j) + \langle T'_g, d\phi_i\otimes d\phi_j\rangle\\ =&\langle -(T_g\nabla\phi_i)^\flat\otimes\nabla\phi_j - \nabla\phi_i\otimes(T_g\nabla\phi_j)^\flat, H\rangle\\ &+\langle dT_g(H), \mathrm{Sym}(d\phi_i\otimes d\phi_j)\rangle\\ =&\langle -(T_g\nabla\phi_i)^\flat\otimes\nabla\phi_j - \nabla\phi_i\otimes(T_g\nabla\phi_j)^\flat + (dT_g)^*\mathrm{Sym}(d\phi_i\otimes d\phi_j), H\rangle\end{aligned}$$

□

Observação 4.1. *A expressão* (4.6) *além de calcular a derivada da curva* $t\mapsto\lambda_i(t)$ *em* $t=0$ *também será útil no desenvolver desse trabalho em uma situação independentemente desse fato. Além disso, cabe ressaltar que as equações* (4.6) *e* (4.7) *são equivalentes e possuem utilidades distintas, conforme veremos mais adiante.*

Observação 4.2. *Podemos obter uma expressão para a derivada da evolução de um autovalor* $\lambda(t)$*. Admitindo que* η *seja constante, que* $\phi_i(t)$ *e* $\phi_j(t)$ *sejam autofunções ortonormais associadas a* λt *e seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 4.1, teremos*

$$\lambda'\delta_{ij} = \int_M\left(\frac{h}{4}\mathscr{L}_g(\phi_i\phi_j) + \frac{1}{2}\mathscr{H}_{T_g}(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\right)\mathrm{dm}, \tag{4.8}$$

onde t *foi ocultado por simplicidade.*

Agora lidaremos com o caso de deformação de domínio. Para isto, seja $\Omega\subset M$

um domínio limitado com bordo suave, g uma métrica fixa em M e T um $(0,2)$-tensor simétrico. Consideremos a deformação Ω_t por uma família de difeomorfismos $f_t : \Omega \to \Omega_t$ e variação suaves de g e T dadas por

$$g(t) = f_t^* g \quad \text{e} \quad T_t = f_t^* T.$$

Escrevendo $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$, temos

$$H = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t^* g = \mathcal{L}_V g \quad \text{e} \quad T' = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t^* T = \mathcal{L}_V T.$$

Com essas convenções, temos:

Lema 4.3. *Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\mathscr{H}_T(X,Y) = -\langle \nabla_{TX} V, Y\rangle - \langle X, \nabla_{TY} V\rangle + \langle \nabla_V TX, Y\rangle - T(\nabla_V X, Y). \tag{4.9}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} T'(X,Y) &= (\mathcal{L}_V T)(X,Y) \\ &= V\langle TX, Y\rangle - T(\nabla_V X - \nabla_X V, Y) - T(X, \nabla_V Y - \nabla_Y V) \\ &= T(X, \nabla_Y V) + T(\nabla_X V, Y) + \langle \nabla_V (TX), Y\rangle - T(\nabla_V X, Y) \\ &= T(X, \nabla_Y V) + T(\nabla_X V, Y) + \langle (\nabla_V T)(X), Y\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, para $T = g$, temos

$$H(X,Y) = \langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle.$$

Segue que

$$HT(X,Y) = H(TX,Y) = \langle \nabla_{TX} V, Y\rangle + \langle TX, \nabla_Y V\rangle$$

e

$$TH(X,Y) = H(X,TY) = \langle \nabla_X V, TY\rangle + \langle X, \nabla_{TY} V\rangle.$$

Finalmente, basta usar (3.1) para obter a expressão (4.9). □

O próximo resultado nos dá uma formula variacional tipo Hadamard para os autovalores de $\mathscr{L}$ por de deformações de Ω.

Proposição 4.2. *Sejam (M,g) uma variedade riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio limitado, $f_t : \Omega \to (M,g)$ uma família analítica de difeomorfismos $(\Omega_t = f_t(\Omega))$ com $f_0 = Id_\Omega$ e λ um autovalor de multiplicidade $m > 1$. Então existe uma família de m funções $\{\phi_i(t)\} \in C^\infty(\Omega_t)$ com $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(\Omega_t,\mathrm{dm})} = \delta_{ij}$ e números reais $\lambda_i(t)$, suaves em t, com*

$\lambda_i(0) = \lambda$ tais que

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_g\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } \Omega_t, \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_t, \end{cases} \tag{4.10}$$

para todo $t, i = 1, \ldots, m$.

Além disso, temos a seguinte fórmula variacional

$$(\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = -2\int_{\partial\Omega} \langle V, \nu\rangle \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} T(\nu,\nu)\mathrm{d}\mu, \tag{4.11}$$

onde $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$.

Demonstração. Consideremos a família de métricas $g(t) = f_t^* g$ e $(0,2)$-tensores simétricos $T_t = f_t^* T$ em Ω. Não é difícil ver que o Lema 4.1 também pode ser aplicado ao operador $\bar{\mathscr{L}_t}$ com $\eta(t) = \eta \circ f_t$. Desse modo, existe uma família $\{\bar{\phi}_i(t)\} \subset C^\infty(\Omega)$ de funções analíticas em t satisfazendo $\langle \bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t)\rangle_{L^2(\Omega, \mathrm{dm}_t)} = \delta_{ij}$ e

$$\begin{cases} -\bar{\mathscr{L}_t}\bar{\phi}_i(t) &= \lambda_i(t)\bar{\phi}_i(t) \quad \Omega, \\ \bar{\phi}_i(t) &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.12}$$

Afirmamos que $\lambda_i(t)$ e $\phi_i(t) := \bar{\phi}_i(t) \circ f_t^{-1}$ satisfazem (4.10). De fato, é evidente que $\phi_i(t) = 0$ em $\partial\Omega_t$. Para provarmos que

$$-\mathscr{L}_g\phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t),$$

primeiro devemos notar que

$$g(df(T_tX), dfe_i) = g_t(T_tX, e_i) = T_t(X, e_i) = T(dfX, dfe_i) = g(TdfX, dfe_i),$$

para $X \in \mathfrak{X}(M)$, de onde obtemos $df(T_tX) = TdfX$ e como consequência, teremos

$$\begin{aligned} g(dfT_t\nabla_t\bar{\phi}, dfe_i) &= g_t(\nabla_t(\phi \circ f), T_te_i) \\ &= (T_te_i)(\phi \circ f) = df(T_te_i)\phi \\ &= g(\nabla\phi, dfT_te_i) \\ &= g(T\nabla\phi, dfe_i). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$dfT_t\nabla_t\bar{\phi} = T\nabla\phi,$$

o que implica em

$$\mathrm{div}_g T\nabla\phi = \mathrm{div}_g dfT_t\nabla_t\bar{\phi} = \mathrm{div}_{g_t} T_t\nabla_t\bar{\phi}.$$

E então para cada $q = f(p) \in \Omega_t$ teremos

$$\begin{aligned}\big(\mathscr{L}_g(\phi_i(t))\big)_q =& \big[\mathrm{div}_g\big(T\nabla\phi_i(t)\big) - T\big(\nabla\eta, \nabla\phi_i(t)\big)\big]_{f(p)}\\ =& \big[\mathrm{div}_{g_t}\big(T_t\nabla_t\bar{\phi}_i(t)\big) - T_t\big(\nabla_t\eta(t), \nabla_t\bar{\phi}_i(t)\big)\big]_p\\ =& \big[\bar{\mathscr{L}}_t\bar{\phi}_i(t)\big]_p = -\lambda_i(t)\big(\bar{\phi}_i(t)\big)_p = -\lambda_i(t)\big(\phi_i(t)\circ f\big)_p = -\lambda_i(t)(\phi_i(t))_q,\end{aligned}$$

o que conclui a prova da afirmação.

Nos resta mostrar que a identidade (4.11) é válida. Mas, como $\bar{\phi}_i(0) = \phi_i(0)$ e $\bar{\mathscr{L}}_0 = \mathscr{L}$, pela equação (4.7) temos que:

$$s_{ij}\delta_{ij} = \int_\Omega \left(\frac{h}{2}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm} + 2\mathscr{H}_T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + T(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\right)\mathrm{dm},$$

onde $s_{ij} = (\lambda_i + \lambda_j)'$.

Como $h = \langle H, g\rangle = 2\mathrm{div}V$ temos pelo Lema 4.3

$$\begin{aligned}s_{ij}\delta_{ij} =& \int_\Omega \big(\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)\mathrm{div}V - 2\langle\nabla_{T\nabla\phi_i}V, \nabla\phi_j\rangle - 2\langle\nabla_{T\nabla\phi_j}V, \nabla\phi_i\rangle\big)\,\mathrm{dm}\\ &+ 2\int_\Omega \langle(\nabla_V T)(\nabla\phi_i), \nabla\phi_j\rangle\mathrm{dm} + \int_\Omega T(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\langle\nabla_{T\nabla\phi_i}V, \nabla\phi_j\rangle = \mathrm{div}_\eta(\langle V, \nabla\phi_j\rangle T\nabla\phi_i) + \lambda\langle V, \nabla\phi_j\rangle\phi_i - \nabla^2\phi_j(V, \nabla T\phi_i)$$

e como $\lambda = \lambda_i(0) = \lambda_j(0)$, fazendo $\frac{s_{ij}}{2}\delta_{ij} = a_{ij}$, teremos

$$\begin{aligned}a_{ij} =& -\lambda\int_\Omega \Big(\phi_i\phi_j\mathrm{div}V + \langle V, \nabla(\phi_i\phi_j)\rangle\Big)\mathrm{dm} - \int_{\partial\Omega}\langle V, \nabla\phi_j\rangle T(\nabla\phi_i, \nu)\mathrm{d}\mu\\ &- \int_{\partial\Omega}\langle V, \nabla\phi_i\rangle T(\nabla\phi_j, \nu)\mathrm{d}\mu + \int_\Omega T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div}V\mathrm{dm}\\ &+ \int_\Omega \nabla^2\phi_j(V, T\nabla\phi_i)\mathrm{dm} + \int_\Omega \nabla^2\phi_i(V, T\nabla\phi_j)\mathrm{dm}\\ &+ \int_\Omega \langle(\nabla_V T)(\nabla\phi_i), \nabla\phi_j\rangle\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega T(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Como $\phi_i = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos $\nabla\phi_i = \langle\nabla\phi_i, \nu\rangle\nu = \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\nu$ em $\partial\Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_\eta(T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)V) + T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\langle\nabla\eta, V\rangle\\
&= \mathrm{div}(\langle\nabla T\phi_i, \nabla\phi_j\rangle V)\\
&= T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div}V + \langle\nabla(T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)), V\rangle\\
&= T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div}V + \nabla^2\phi_j(V, T\nabla\phi_i)\\
&= +\langle\nabla_V T\nabla\phi_i, \nabla\phi_j\rangle.
\end{aligned}$$

De

$$(\nabla_V T)(\nabla\phi_i) = \nabla_V(T\nabla\phi_i) - T(\nabla_V\nabla\phi_i)$$

vem que

$$\langle(\nabla_V T)(\nabla\phi_i), \nabla\phi_j\rangle = \langle\nabla_V(T\nabla\phi_i), \nabla\phi_j\rangle - \nabla^2\phi_i(V, T\nabla\phi_j).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
a_{ij} =& -\lambda\int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} - 2\int_{\partial\Omega}\langle V, \nu\rangle\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}T(\nu, \nu)\mathrm{d}\mu\\
&+ \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)V) + T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\langle\nabla\eta, V\rangle + \frac{1}{2}T(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
a_{ij} =& -\int_{\partial\Omega}\langle V, \nu\rangle\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}T(\nu, \nu)\mathrm{d}\mu - \lambda\int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm}\\
&+ \int_\Omega T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\langle\nabla\eta, V\rangle\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega T(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} = \int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} - \int_\Omega \phi_i\phi_j\langle\nabla\eta, V\rangle\mathrm{dm}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_{ij} =& -\int_{\partial\Omega}\langle V, \nu\rangle\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}T(\nu, \nu)\mathrm{d}\mu\\
&+ \int_\Omega \big(T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) - \lambda\phi_i\phi_j\big)\langle\nabla\eta, V\rangle\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega T(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como $\eta(t,p) = \eta\circ f(t,p)$, temos que

$$\dot\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\eta\circ f)(t,p) = d\eta\Big|_p(V) = \langle\nabla\eta, V\rangle.$$

Finalmente, para completar a prova do teorema, basta notar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega T(\nabla\dot{\eta},\nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \dot{\eta}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm}+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\dot{\eta}T(\nu,\nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{d}\mu\\ &= \int_\Omega\langle\nabla\eta,V\rangle\big(\lambda\phi_i\phi_j-T(\nabla\phi_i,\nabla\phi_j)\big)\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

□

4.2 Propriedades genéricas de autovalores

Direcionamos nossa atenção a aplicações das fórmulas tipo Hadarmard obtidas na seção anterior.

Seja $T_g,\ g\in\mathcal{M}^r$, uma família de $(0,2)$–tensores simétricos definido positivo. Dizemos que uma família de operadores $\mathscr{L}_g\phi = \mathrm{div}_\eta T_g\nabla\phi$ satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$ se, para todo $g\in\mathcal{M}^r$, T_g é suave e $G_g=(n-4)T_g+2dT_g(g)$ é positivo.

Por exemplo, se $n>2$ e ψ é uma função suave positiva então $T_g=\psi g$ satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$.

O teorema abaixo permite provar que, para uma classe de tensores T que satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$, os autovalores de $\mathscr{L}$ são genericamente simples.

Teorema 4.1. *Considere a família de operadores $\mathscr{L}_g\phi=\mathrm{div}_\eta(T_g\nabla\phi)$ que satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$. Sejam (M,g_0) uma variedade compacta com bordo e λ um autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_{g_0}\phi &= \lambda\phi \quad \textit{em} \quad M\\ \phi &= 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial M.\end{cases} \tag{4.14}$$

com multiplicidade $m>1$. Então dada qualquer vizinhança $U\subset\mathcal{M}^r$ de g_0, existe $g_1\in U$ tal que os autovalores de $\mathscr{L}_{g_1}$ próximos a λ são todos simples.

Demonstração. Seja $U\subset\mathcal{M}^r$ uma vizinhança de g_0 e suponha que a multiplicidade de λ seja preservada ao longo de qualquer curva em U partindo de g_0. A idéia é mostrar que isso é uma contradição e temos então provado o teorema pois a multiplicidade de λ é finita e então basta aplicar o argumento em no máximo m subconjuntos encaixados de U.

Consideremos $g(t)=g_0+tH$, onde H é $(0,2)$-tensor simétrico sobre $(M^n,g(t))$ e t é suficientemente pequeno de modo que $g(t)\in U$. Pelo Lema 4.1 existem uma curva de autovalores $\lambda(t)$ e funções ortonormais associadas $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^m$ analíticas em t tais que $\lambda(0)=\lambda$ e

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_t\phi_i(t) &= \lambda(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M\\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial M,\end{cases}$$

onde $\mathscr{L}_t = \mathscr{L}_{g(t)}$. Pela Proposição 4.1, temos

$$\begin{aligned}\lambda'\delta_{ij} =& \int_M \langle \frac{1}{4}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)g_0 - \mathrm{Sym}((T\nabla\phi_i)^\flat \otimes \nabla\phi_j), H\rangle \mathrm{dm} \\ &+ \int_M \langle -\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes (T\nabla\phi_j)^\flat) + d\mathcal{F}^*_{g_0}\mathrm{Sym}(d\phi_i \otimes d\phi_j), H\rangle \mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Se $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}0 =& \frac{1}{4}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)g_0 - \mathrm{Sym}((T\nabla\phi_i)^\flat \otimes \nabla\phi_j) - \mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes (T\nabla\phi_j)^\flat) \\ &+ d\mathcal{F}^*_{g_0}\mathrm{Sym}(d\phi_i \otimes d\phi_j).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Além disso, tomando o traço na equação (4.15), teremos

$$\begin{aligned}0 &= n\mathscr{L}(\phi_i\phi_j) - 8T(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + 4d\mathcal{F}_{g_0}(g_0)(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) \\ &= -\lambda n\phi_i\phi_j + ((n-4)T + 2d\mathcal{F}_{g_0}(g_0))(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j).\end{aligned} \tag{4.16}$$

e daí

$$\lambda n\phi_i\phi_j = G(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j).$$

Motivado por uma ideia similar de Uhlenbeck (1976), fixamos $p \in M$ e consideremos a curva integral α em M tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(s) = G\nabla\phi_i(\alpha(s))$. Definindo $\beta(s) := \phi_j(\alpha(s))$, calculamos

$$\begin{aligned}\beta'(s) =& \langle \nabla\phi_j(\alpha(s)), \alpha'(s)\rangle = G(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)(\alpha(s)) = \lambda n\phi_i(\alpha(s))\phi_j(\alpha(s)) \\ =& \lambda n\phi_i(\alpha(s))\beta(s).\end{aligned}$$

Isto nos dá $\beta(s) = ce^{n\lambda\int_0^s \phi_i(\alpha(t))dt}$, onde $c > 0$. Assim, como $\phi(\alpha(s))$ é crescente em s, pois G é positiva, temos $\beta(s) \nearrow \infty$, o que é uma contradição, pois M é compacta. $\square$

Observação 4.3. *Se $n = 2$ então $G = 0$ e consequentemente não podemos aplicar o Teorema 4.1 para este caso. Mas ele ainda continua sendo válido. Para vermos isso, iniciamos como na prova do Teorema 4.1. Da equação* (4.16) *segue que $\phi_i\phi_j = 0$ e então do Princípio da Continuação Única (Homander, 1969) temos que pelo menos uma das autofunções se anula, o que é uma contradição.*

Corolário 4.1. *Considere a família de operadores $\mathscr{L}_g\phi = \mathrm{div}_\eta(T_g\nabla\phi)$ que satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$. Se M é uma variedade compacta, então o conjunto das métricas C^r que tornam simples os autovalores do Problema 4.14 é residual.*

Demonstração. Seja Γ_m um conjunto de métricas em $\mathcal{M}^r$ tal que os primeiros m autovalores $\mathscr{L}$ são simples. É conhecido que esses autovalores dependem continuamente da métrica (veja Bando e Urakawa, 1983), e então para cada m o conjunto Γ_m é aberto em

$\mathcal{M}^r$. Por outro lado, segue do Teorema 4.1 que o conjunto Γ_m é denso em $\mathcal{M}^r$. Dessa forma, o conjunto $\Gamma = \cap_{m=1}^{\infty}\Gamma_m$ é residual, o que prova o corolário.

$\square$

Teorema 4.2. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo e Ω um domínio limitado. Se λ é um autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_g\phi &= \lambda\phi \quad \textit{em} \quad \Omega \\ \quad \phi &= 0 \quad \textit{sobre} \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.17}$$

com multiplicidade $m > 1$ então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança C^r, $1 \leq r < \infty$, da identidade id_Ω tal que os autovalores $\lambda(f)$ próximo a λ são todos simples.

Demonstração. Suponhamos que para toda pertubação por um difeomorfismo de Ω, a multiplicidade de λ não possa ser reduzida. Então, segue de (4.11) que $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em $\partial\Omega$. Desta forma, temos $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} = 0$ ou $\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em algum subconjunto aberto U de $\partial\Omega$. Se $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} = 0$ em U, como $\phi_i = 0$ em $\partial\Omega$, segue que do Princípio da Continuação Única (Homander, 1969) que $\phi_i = 0$ em Ω, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 4.2. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo e Ω um domínio limitado. Então o conjunto dos difeomorfismos $\mathfrak{D} \subset \mathrm{Diff}^r(\Omega)$, que tornam simples os autovalores do problema 4.17, é residual.*

4.3 Aplicações a domínios extremantes para o k–ésimo autovalor

Antes de procedermos com os resultados desta seção, faremos algumas observações. Primeiro, denote por $\mu_k(t)$ o k–ésimo autovalor de $\mathscr{L}_t$, isto é, temos

$$0 = \mu_0(t) < \mu_1(t) \leq \mu_2(t) \leq \cdots \leq \mu_k(t) \leq \cdots.$$

Assim como Soufi-Ilias, denotaremos por E_k os autoespaços associados ao k–ésimo autovalor de $\mathscr{L}$ e por $\mathcal{A}_0(\partial\Omega)$ o conjunto das funções regulares sobre $\partial\Omega$ tal que $\int_{\partial\Omega} v d\mu = 0$.

Se $\Omega_t = f_t(\Omega)$ é uma deformação analítica de Ω que preserva volume então não é difícil mostrar que $v := \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t, \nu \right\rangle \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$. Soufi e Ilias provaram que dado $v \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$, existem uma deformação analítica $\Omega_t = f_t(\Omega)$ que preserva volume tal que $v := \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t, \nu \right\rangle \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$ (ver Soufi e Ilias, 2007). Isto é fortemente usado na prova do teorema abaixo, cuja versão $\mathscr{L} = \Delta$ foi provada por eles.

Teorema 4.3. *Denotemos por μ_k o k–ésimo autovalor de $\mathscr{L}$. Seja k um natural inteiro tal que $\mu_k > \mu_{k-1}$ (resp. $\mu_k < \mu_{k+1}$) e Ω um minimizante local (resp. maximizante local) para μ_k. Então μ_k é simples e para alguma constante c temos*

$$\left| \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\sqrt{T(\nu, \nu)} \right| = c.$$

Demonstração. Suponhamos que $\mu_k > \mu_{k-1}$ e sejam $v \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$ e $\Omega_t = f_t(\Omega)$ um deformação analítica de Ω que preserva volume tal que $v = \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t, \nu \right\rangle$. Sejam ainda $\{\lambda_i(t)\}$ e $\{\phi_i(t)\}$ famílias analíticas de autovalores e autofunções associadas a $\lambda = \mu_k$ como no Lema 4.1. Como $\lambda_i(0) = \mu_k > \mu_{k-1}$, temos por continuidade

$$\lambda_i(t) > \mu_{k-1}(t)$$

para t suficientemente pequeno, a saber, $t \in I$.

Logo,

$$\lambda_i(t) \geq \mu_k(t) \quad \forall\, t \in I. \tag{4.18}$$

Por hipótese, a função $t \mapsto \mu_k(t)$ admite um mínimo local em $t = 0$. Assim, por (4.18) e como $\lambda_i(0) = \mu_k(0)$, segue que $\lambda_i(t)$ também é um mínimo local em $t = 0$ e portanto $\frac{d}{dt}\lambda_i(t)\big|_{t=0} = 0$.

Pela Proposição 4.2, concluímos

$$\int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 T(\nu,\nu)d\mu = 0 \quad \forall\phi \in E_k$$

e isto ainda é válido para qualquer $v \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$, o que implica que $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\sqrt{T(\nu,\nu)}$ é localmente constante em $\partial\Omega$ para qualquer $\phi \in E_k$. Agora, suponhamos que λ não é simples. Assim, se ϕ_1 e ϕ_2 são dois autofunções em E_k, podemos encontrar uma combinação linear $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 =: \phi$ tal que $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$ se anula em pelo menos uma componente conexa Ω. Para ver isso, é suficiente escolher α e β tal que

$$\alpha\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}\sqrt{T(\nu,\nu)} = -\beta\frac{\partial\phi_2}{\partial\nu}\sqrt{T(\nu,\nu)}.$$

Aplicamos agora o Teorema da Unicidade de Holmgren para deduzir que ϕ é identicamente nulo e λ será simples.

Para completar a prova, devemos mostrar que, para todo $\phi \in E_k$,

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 T(\nu,\nu)$$

assume o mesmo valor constante em toda componente de $\partial\Omega$. De fato, sejam Σ_1 e Σ_2 duas componentes conexas distintas de $\partial\Omega$ e seja $v \in \mathcal{A}_0(\partial\Omega)$ uma função dada por $v = vol(\Sigma_2)$ em Σ_1, $v = -vol(\Sigma_1)$ em Σ_2 e $v = 0$ em outras componentes. Então a condição $\int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 T(\nu,\nu)\mathrm{d}\mu = 0$ implica que

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 T(\nu,\nu)\Big|_{\Sigma_1} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 T(\nu,\nu)\Big|_{\Sigma_2},$$

o que completa nossa prova.

O argumento acima funciona no caso $\mu_k < \mu_{k+1}$. $\square$

4.4 Aplicações ao fluxo de Ricci

Seja M^n uma variedade fecahda. Hamilton Hamilton (1982) mostrou que o fluxo de Ricci

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

sobre M tem uma única solução $g(t)$ sobre um intervalo maximal $0 \leq t \leq \delta$. Notemos que pelo Teorema (C) em Krigl e Michor (2003) so autovalores de $\mathscr{L}_{g(t)}$ podem ser parametrizados duas vezes diferenciável em t. Nesta seção, estudaremos as propriedades desses autovalores ao longo do fluxo de Ricci. Primeiro, deduzimos uma fórmula de evolução geral para os autovalores de $\mathscr{L}$.

Proposição 4.3. *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor de $\mathscr{L}$ ao longo do fluxo de Ricci o em M, então*

$$\begin{aligned}\lambda' =&\lambda\int_M u^2R\mathrm{dm} - \int_M RT(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}\\&+ 4\int_M \mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} + \int_M T'(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm},\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde u denota a autofunção associada ao autovalor λ e R é a curvatura escalar.

Demonstração. Temos

$$TH(\nabla u, \nabla u) = HT(\nabla u, \nabla u) = -2\mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u),$$

de onde obtemos

$$\mathscr{H}_T(\nabla u, \nabla u) = 4\mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u) + T'(\nabla u, \nabla u).$$

Assim, por (4.8) e como $h = -2R$, temos

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= \int_M \frac{h}{4}\mathscr{L}u^2 + \mathscr{H}_T(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}\\&= \int_M (\lambda u^2 - T(\nabla u, \nabla u))R\mathrm{dm} + \int_M 4\mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u) + T'(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm},\end{aligned}$$

de onde segue (4.19). $\square$

Em variedades de dimensão 3, se $\mathrm{Ric} \geq 0$ em $t = 0$ então isso é válido para todo t ao longo do fluxo (Hamilton, 1982). Usaremos esse fato sem menção novamente.

Teorema 4.4. *Suponhamos que $(M^3, g(t))$ seja uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade riemanniana fechada homogênea (M, g) com curvatura de Ricci não negativa* *inicialmente. Se $T' \geq -4\mathrm{Ric}T$ então o primeiro autovalor de $\mathscr{L}$ é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci.*

Demonstração. Como a M é homogênea, por 4.19 teremos

$$\lambda' = 4\int_M \mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} + \int_M T'(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}.$$

E então a prova é imediata. □

Examplo 4.1. *Seja T_0 tensor simétrico definido positivo e consideremos $T_t = \psi g(t) + T_0$, onde $\psi > 0$ é a suave função. É fácil ver que nesse caso temos $T' \geq -4\mathrm{Ric}T$, logo λ é não decrescente sob as hipóteses do Teorema 4.4. Em particular, o primeiro autovalor do drifting laplaciano não é decrescente ao longo do fluxo, como conhecido em Gomes, Marrocos e Mesquita (2015).*

Examplo 4.2. *Se $X_t = g_t^{ik} X_i(t)\partial_k$ e $Y_t = g_t^{jl} Y_j(t)\partial_l$, temos*

$$g_t(X, Y) = g_t^{ij} X_i Y_j$$

Suponhamos que $g_t^{ij} \neq 0$ e defina o tensor simétrico definido positivo T_t por

$$T_t(X, Y) := \frac{1}{g_t^{ij}} X_i Y_j.$$

Então

$$\frac{d}{dt} T_t(\nabla u, \nabla u) = -\frac{\frac{d}{dt}(g_t^{ij})}{(g_t^{ij})^2} u_i u_j = \frac{g_t^{ip} g_t^{jq} H_{pq}}{(g_t^{ij})^2} u_i u_j = \frac{H(\nabla u, \nabla u)}{(g_t^{ij})^2}.$$

Considerando a curvatura de Ricci estritamente negativa no Teorema 4.4 e supondo $H \not\equiv 0$, temos que

$$\frac{d}{dt} T_t(\nabla u, \nabla u) < 0.$$

Logo o primeiro autovalor de $\mathscr{L}$ é decrescente ao longo do fluxo de Ricci.

Teorema 4.5. *Sejam $(M, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade fechada M com curvatura de Ricci positiva inicialmente e $\mathscr{L}\phi = \mathrm{div}_\eta(\psi\nabla\phi)$, onde ψ é uma função suave positiva. Então existe $t_0 \in [0, \delta)$ tal que o autovalor $\lambda(t)$ de $\mathscr{L}$ é crescente em $t \in [t_0, \delta)$.*

Demonstração. Como M é compacta, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Ric} \geq \varepsilon R g$ ao longo de todo o fluxo (Hamilton, 1982). Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &\overset{(4.19)}{\geq} \lambda\int_M u^2 R\mathrm{dm} - \int_M R\psi|\nabla u|^2\mathrm{dm} + 2\int_M \psi\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} \\
&\geq \lambda R_{\min}(t) - \int_M R\psi|\nabla u|^2\mathrm{dm} + 2\varepsilon\int_M R\psi|\nabla u|^2\mathrm{dm} \\
&\geq \lambda(R_{\min}(t) + (2\varepsilon - 1)R_{\max}(t)).
\end{aligned}$$

Hamilton provou que $\frac{(R_{\max})_t}{(R_{\min})_t} \to 1$ quando $t \to \delta$. Daí, como $2\varepsilon - 1 \leq 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$-(2\varepsilon - 1) < \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \leq 1 \qquad \forall t_0 \leq t < \delta,$$

de onde segue que $\lambda'(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, \delta)$, o que prova nosso resultado.

□

Seja $\mathrm{L}u = \mathrm{div}_\eta \nabla u$ o operador η–laplaciano e $\mathrm{Ric} + \nabla^2\eta$ o tensor de Bakry-Émery-Ricci. Então a bem conhecida fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle + |\nabla^2 u|^2,$$

implica imediatamente que

$$\frac{1}{2}L|\nabla u|^2 = \mathrm{Ric}_\eta(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla L u, \nabla u\rangle + |\nabla^2 u|^2. \tag{4.20}$$

Considere ψ uma função suave sobre M. Note que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\psi, \nabla|\nabla u|^2\rangle &= 2\nabla^2 u(\nabla\psi, \nabla u)\\
&= 2\langle \nabla_{\nabla u}\nabla u, \nabla\psi\rangle\\
&= 2(\nabla u)\langle \nabla\psi, \nabla u\rangle - 2\nabla^2\psi(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\psi \mathrm{L}|\nabla u|^2 &= \mathscr{L}|\nabla u|^2 - \langle \nabla\psi, \nabla|\nabla u|^2\rangle\\
&= \mathscr{L}|\nabla u|^2 - 2(\nabla u)\langle \nabla\psi, \nabla u\rangle + 2\nabla^2\psi(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(\nabla u)\langle \nabla\psi, \nabla u\rangle &= \langle \nabla u, \nabla\langle \nabla u, \nabla\psi\rangle\rangle\\
&= \langle \nabla u, \nabla(\mathscr{L}u)\rangle - \langle \nabla u, \nabla(\psi \mathrm{L}u)\rangle\\
&= \mathrm{div}_\eta(\mathscr{L}u\nabla u) - (\mathscr{L}u)\mathrm{L}u - \mathrm{div}_\eta[(\psi\mathrm{L}u)\nabla u] + \psi(\mathrm{L}u)^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

e

$$\psi\langle \nabla \mathrm{L}u, \nabla u\rangle = \mathrm{div}_\eta[(\psi\mathrm{L}u)\nabla u] - (\mathscr{L}u)\mathrm{L}u. \tag{4.23}$$

Assim, juntando (4.20), (4.21), (4.22) e (4.22), obtemos a seguinte fórmula tipo Bochner para o operador $\mathscr{L}u = \mathrm{div}_\eta\psi\nabla u$:

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}|\nabla u|^2 = \operatorname{div}_\eta(\mathscr{L}u\nabla u) + \psi \mathrm{Ric}_\eta(\nabla u, \nabla u) - 2(\mathscr{L}u)\mathrm{L}u + \psi(\mathrm{L}u)^2$$
$$+\psi|\nabla^2 u|^2 - \nabla^2\psi(\nabla u, \nabla u) \qquad (4.24)$$

Essa fórmula será útil na prova do nosso próximo resultado

Teorema 4.6. *Sejam $(M, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci em uma 3–variedade fechada M com curvatura de Ricci positiva inicalmente e $\lambda(t)$ a evolução do autovalor do operador* $\operatorname{div}_\eta(\psi\nabla u)$. *Suponha que $\psi \geq c$ para alguma constante $c > 0$ e que $\nabla^2\psi \leq 0$. Então*

$$\lim_{t\to\delta}\lambda(t) = \infty.$$

Demonstração. Como M é sem bordo, integrando a identidade (4.24) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \psi \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} =& 2\int_M (\mathscr{L}u)\mathrm{L}u\mathrm{dm} - \int_M \psi(\mathrm{L}u)^2\mathrm{dm} - \int_M \psi|\nabla^2 u|^2\mathrm{dm} \\
&+ \int_M \nabla^2\psi(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} \\
=& -2\lambda\int_M u(\mathrm{L}u)\mathrm{dm} - \int_M \psi\nabla^2\eta(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} \\
&\leq 2\lambda\int_M |\nabla u|^2\mathrm{dm} \\
&\leq 2\lambda c^{-1}\int_M \psi|\nabla u|^2\mathrm{dm} \\
&\leq 2\lambda^2 c^{-1}.
\end{aligned}$$

Para qualquer solução do fluxo de Ricci sobre uma 3–variedade fechada com curvatura de Ricci positiva, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{Ric} \geq \epsilon Rg$ é preservado ao longo do fluxo (Hamilton (1982)). Assim

$$2\lambda^2 c^{-1} \geq \int_M \psi\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} \geq \epsilon\int_M R\psi|\nabla u|^2\mathrm{dm} \geq \epsilon R_{\min}\lambda$$

e então

$$\lambda(t) \geq c\epsilon R_{\min}(t).$$

Como

$$\lim_{t\to\delta} R_{\min}(t) = \infty,$$

a prova está completa. $\square$

E agora consideramos um fluxo de Ricci normalizado sobre (M, g), isto é,

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{2r}{n}g(t) - 2Ric_{g(t)},$$

onde $g(0) = g$ e $r = r(t) = \frac{\int_M R(t)\mathrm{dm}_t}{\int_M \mathrm{dm}_t}$. É fácil ver que podemos tomar autofunções de $\mathscr{L}$ de modo que $\int_M u\mathrm{dm} = 0$ e $\int_M u^2\mathrm{dm} = 1$, as quais chamamos de autofunções normalizadas. No que segue todas as autofunções consideradas serão dessa maneira.

Proposição 4.4. *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor de $\mathscr{L}$ ao longo do fluxo de Ricci normalizado em M, então*

$$\begin{aligned}\lambda' = &- \frac{4}{n}r\lambda + \lambda\int_M u^2R\mathrm{dm} - \int_M RT(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}\\ &+ 4\int_M \mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} + \int_M T'(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm},\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde u denota a autofunção associada ao autovalor λ.

Demonstração. Análoga à Proposição 4.3 □

Corolário 4.3. *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor de $\mathscr{L}$ no fluxo de Ricci normalizado em uma variedade riemanniana fechada homogênea (M^n, g), então*

$$\lambda' = -\frac{4R}{n}\lambda + 4\int_M \mathrm{Ric}(T\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} + \int_M T'(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}.$$

5 CONDIÇÃO DE BORDO DE NEUMANN

Nosso objetivo nesta seção é provar propriedades genéricas para os autovalores do problema de Neumann para o operador $\mathscr{L}$. Mais especificamente, consideramos o problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_t\phi &= -\lambda\phi \quad \text{em } M, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu_t} &= 0 \quad \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde ν_t é uma família a um parâmetro de vetores exteriores unitário ao bordo ∂M. Nesse problema, suporemos que $T\partial_i$ ainda é tangente a ∂M e consequentemente $T(\partial_i,\nu) = 0$ em ∂M. Em particular, $T(\nabla\phi,\nu) = 0$ em ∂M pois $\nabla\phi$ tem apenas componente tangente com a condição de bordo $\frac{\partial\phi}{\partial\nu_t} = 0$.

5.1 Fórmulas variacionais tipo Hadamard

Aqui, procedemos análogo como na Seção 4.1.

Proposição 5.1. *Para quaisquer $f,\ell \in C^\infty(M)$ temos*

$$\int_M \ell\mathscr{L}'f\mathrm{dm} = \int_M \ell\Big(\frac{1}{2}T(\nabla h,\nabla f) + \mathrm{div}(\mathscr{H}\nabla f)\Big)\mathrm{dm},$$

onde $\mathscr{L}' := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\mathscr{L}_{g(t)}$.

Demonstração. Por integração por partes

$$\int_M \ell\mathscr{L}_t f\mathrm{dm_t} = -\int_M T(\nabla f,\nabla\ell)\mathrm{dm_t} + \int_{\partial M}\ell T(\nabla f,\nu_t)\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}.$$

Assim, por (3.4) em $t=0$,

$$\begin{aligned}\int_M \ell\mathscr{L}'f\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_M \ell h\mathscr{L}f\mathrm{dm} = &-\int_M \mathscr{H}(\nabla f,\nabla\ell)\mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_M hT(\nabla f,\nabla\ell)\mathrm{dm} \\ &+\int_{\partial M}\ell\Big(\mathscr{H}_T(\nu,\nabla f) + \frac{1}{2}H(\nu,\nu)T(\nabla f,\nu)\Big)\mathrm{d}\mu \\ &+\int_{\partial M}\ell\frac{\tilde{h}}{2}T(\nabla f,\nu)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima, teremos

$$
\begin{aligned}
\int_M \ell\mathscr{L}' f \mathrm{dm} = & -\int_M \mathscr{H}(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm} + \int_{\partial M} \ell\mathscr{H}(\nu, \nabla f)\mathrm{d}\mu \\
& - \frac{1}{2}\int_M \big(hT(\nabla f, \nabla \ell) + \ell h\mathscr{L} f\big)\mathrm{dm} \\
& + \frac{1}{2}\int_{\partial M} \ell\big(\tilde{h} + H(\nu,\nu)\big)T(\nabla f, \nu)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Finalmente substituindo (4.4) e (4.5) em (5.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M l\mathscr{L}' f \mathrm{dm} = & \int_M \ell\Big(\frac{1}{2}T(\nabla h, \nabla f) + \mathrm{div}(\mathscr{H}\nabla f)\Big)\mathrm{dm} \\
& + \frac{1}{2}\int_{\partial M} \ell\big(-h + H(\nu,\nu) + \tilde{h}\big)T(\nabla f, \nu)\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

para todo $\ell \in C^\infty(M)$, o que é suficiente para concluir a prova pois $\tilde{h} = \mathrm{tr}_g(\mathscr{H}|_{\partial M}) = h - H(\nu,\nu)$. $\square$

Abaixo, obteremos uma fórmula tipo Hadamard para autovalores de $\mathscr{L}$ sob condições de bordo de Neumann.

Proposição 5.2. *Sejam (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta, $g(t)$ uma variação suave de g_0 e T_g uma família suave de tensores simétricos definido positivo. Ademais, sejam $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ famílias de funções suaves e $\lambda(t)$ uma família de números reais, analíticas em t tal que para todo t tem-se*

$$
\begin{cases}
-\mathscr{L}_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda(t)\phi_i(t) & \text{em } M, \\
\frac{\partial}{\partial \nu_t}\phi_i(t) = 0 & \text{em } \partial M.
\end{cases}
$$

em que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm}_t)} = \delta_{ij}$. Então obtemos a seguinte fórmula variacional

$$
\begin{aligned}
\lambda'(0)\delta_{ij} = & \int_M \langle \frac{1}{4}\mathscr{L}_{g_0}(\phi_i\phi_j)g_0 - (T_{g_0}\nabla\phi_i)^\flat \otimes \nabla\phi_j - \nabla\phi_i \otimes (T_{g_0}\nabla\phi_j)^\flat, H\rangle\mathrm{dm} \\
& + \int_M \langle dT_{g_0}^*\mathrm{Sym}(d\phi_i \otimes d\phi_j), H\rangle\mathrm{dm}
\end{aligned}
$$

onde $dT_{g_0}^*$ indica adjunta de dT_{g_0}, Sym *o operador simetrizador e $\phi_i = \phi_i(0)$.*

Demonstração. Derivando em $t = 0$ em ambos lados da identidade

$$
-\mathscr{L}_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda(t)\phi_i(t),
$$

teremos

$$
-\mathscr{L}'\phi_i - \mathscr{L}\phi_i' = \lambda'\phi_i + \lambda\phi_i'.
$$

Assim

$$-\int_M (\phi_j \mathscr{L}'\phi_i + \phi_j \mathscr{L}\phi_i')\mathrm{dm} = \int_M (\lambda'\phi_j\phi_i - \phi_i'\mathscr{L}\phi_j)\mathrm{dm}.$$

Agora, como $T(\nu_t, \nabla_t\phi_i(t)) = 0$ em ∂M, deduzimos pela equação (3.4) que

$$T(\nu, \nabla\phi_i') = -\mathscr{H}(\nu, \nabla\phi_i) \quad \text{em } t = 0.$$

Além disso, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\lambda'\delta_i^j &= -\int_M \phi_j\mathscr{L}'\phi_i \mathrm{dm} - \int_{\partial M}\phi_j T(\nu, \nabla\phi_i')\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_M \phi_j\mathscr{L}'\phi_i \mathrm{dm} + \int_{\partial M}\phi_j \mathscr{H}(\nu, \nabla\phi_i)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned}-2\lambda'\delta_i^j &= \int_M \phi_j\mathscr{L}'\phi_i\mathrm{dm} + \int_M \phi_i\mathscr{L}'\phi_j\mathrm{dm} - \int_{\partial M}\phi_i\mathscr{H}(\nu,\nabla\phi_j)\mathrm{d}\mu \\ &\quad - \int_{\partial M}\phi_j\mathscr{H}(\nu,\nabla\phi_i)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_M \langle\frac{1}{2}T(\nabla h, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} + \int_M(\phi_i\mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}\nabla\phi_j) + \phi_j\mathrm{div}_\eta(\mathscr{H}\nabla\phi_i)\mathrm{dm} \\ &\quad - \int_{\partial M}\phi_i\mathscr{H}(\nu,\nabla\phi_j)\mathrm{d}\mu - \int_{\partial M}\phi_j(\nu,\nabla\phi_i)\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Usemos o Teorema da Divergência para deduzir que

$$-2\lambda'\delta_i^j = -\int_M \frac{h}{2}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm} - 2\int_M \mathscr{H}(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{dm}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\lambda'\delta_{ij} &= \int_M \langle\frac{1}{4}\mathscr{L}(\phi_i\phi_j)g - (T\nabla\phi_i)^\flat \otimes \nabla\phi_j - \nabla\phi_i \otimes (T\nabla\phi_j)^\flat, H\rangle\mathrm{dm} \\ &\quad + \int_M \langle d\mathcal{F}_g^*\mathrm{Sym}(d\phi_i\otimes d\phi_j), H\rangle\mathrm{dm} + \int_M \frac{1}{2}T(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}\end{aligned}$$

como na Proposição 4.1. $\square$

Agora, seguiremos na direção de provarmos a existência de curvas analíticas de autovalores de $\mathscr{L}$ de modo que satisfaçam as condições de bordo de Neumann. A principal técnica utilizada é o método de Liapunov-Schmidt usado por Henry (2005), continuado por Marrocos e Pereira (2015) e, posteriormente, por Gomes e Marrocos (2015). Dessa maneira, necessitamos de uns resultados preliminares.

Proposição 5.3. *Seja λ_0 um autovalor de $\mathscr{L}$ operador com multiplicidade $m > 1$. Então* *para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para cada* $|t| < \delta$*, existem exatamente* m *autovalores (incluindo suas multiplicidades) para o problema* (5.1) *no intervalo* $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$*.*

Demonstração. Sejam $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ uma base ortonormal associada a λ_0 e

$$Pu = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_M \phi_j u \mathrm{dm}_0$$

a projeção ortonormal no autoespaço correspondente. Como é bem conhecido, P induz uma decomposição $L^2(M, \mathrm{dm}_0) = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ de modo que, qualquer função u em $L^2(M, \mathrm{dm}_0)$ possa ser escrita como $u = \phi + \psi$, onde $\phi \in \mathcal{R}(P) = ker(\mathscr{L} + \lambda_0)$ e $\psi \in \mathcal{N}(P)$.

Com isto em mente, o problema de Neumann pode ser equivalentemente visto como o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (I-P)(\mathscr{L}_t + \lambda)(\phi + \psi) & = 0 \qquad \text{em } M \\ P(\mathscr{L}_t + \lambda)(\phi + \psi) & = 0 \qquad \text{em } M \\ \frac{\partial}{\partial \nu_t}(\phi + \psi) & = 0 \qquad \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{5.3}$$

Para resolvê-lo, precisamos observar que como ϕ_j e ψ são ortonormais, pelo Teorema da Divergência devemos ter

$$\begin{aligned} P(\mathscr{L} + \lambda)\psi &= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_M \phi_j (\mathscr{L} + \lambda)\psi \mathrm{dm}_0 \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \int_M \phi_j (\mathscr{L} + \lambda)\psi - \psi(\mathscr{L} + \lambda)\phi_j \mathrm{dm}_0 \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\psi, \nu) - \psi T(\nabla\phi, \nu) \mathrm{d}\mu_0 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\psi, \nu) \mathrm{d}\mu_0 \end{aligned}$$

o que implica

$$(\mathscr{L} + \lambda)\psi = (I - P)\big((\mathscr{L} + \lambda)\psi\big) + \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\psi, \nu) \mathrm{d}\mu_0.$$

Assim, obtemos

$$(\mathscr{L} + \lambda)\psi + (I - P)(\mathscr{L}_t - \mathscr{L})(\phi + \psi) - \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\psi, \nu) \mathrm{d}\mu_0 = 0.$$

Além disso, a parte com relação ao bordo em (5.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} + \left(\frac{\partial}{\partial\nu_t} - \frac{\partial}{\partial\nu}\right)(\phi+\psi) = 0.$$

Consequentemente, encontrar as soluções da primeira e terceira equações de (5.3), é equivalente a encontrar os zeros da aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathcal{R}(P)\times H^2(M)\cap\mathcal{N}(P) & \longrightarrow & \mathcal{N}(P)\times H^{\frac{3}{2}}(M) \\ (t,\lambda,\phi,\psi) & \mapsto & \big(F_1(t,\lambda,\phi,\psi), F_2(t,\lambda,\phi,\psi)\big), \end{array}$$

onde

$$\begin{cases} F_1 = (\mathscr{L}+\lambda)\psi + (I-P)(\mathscr{L}_t - \mathscr{L})(\phi+\psi) - \displaystyle\sum_{j=1}^m \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\psi,\nu)\mathrm{d}\mu_0 \\ F_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\nu} + \big(\frac{\partial}{\partial\nu_t} - \frac{\partial}{\partial\nu}\big)(\phi+\psi). \end{cases}$$

Notemos que F depende diferenciavelmente de λ, t, ψ e ϕ. Nossa intenção é usar o Teorema da Função Implícita para mostrar que $F(t,\lambda,\phi,\psi) = (0,0)$ admite uma solução ψ como função de λ, t e ϕ. Para isto, observamos que se $t = 0, \lambda = \lambda_0, \psi = 0$ então

$$\frac{\partial F}{\partial\psi}(0,\lambda_0,0,0) = \Big((\mathscr{L}+\lambda_0)\dot{\psi} - \sum_{j=1}^m \phi_j \int_{\partial M} \phi_j T(\nabla\dot{\psi},\nu)\mathrm{d}\mu_0\,, \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\nu}\Big). \tag{5.4}$$

Afirmamos agora que a aplicação dada em (5.4) é um isomorfismo de $H^2(M)\cap\mathcal{N}(P)$ em $\mathcal{N}(P)\times H^{\frac{3}{2}}(M)$. De fato, a prova deste fato pode ser encontrada em Lions e Magenes (1972).

Consequentemente, pelo Teorema da Função Implícita existem números positivos δ, ϵ e uma função $S(t,\lambda)\phi$ de classe C^1 nas variáveis (t,λ) tal que para cada $|t| < \delta$ e $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, $F(t,\lambda,\phi,S(t,\lambda)\phi) = (0,0)$. Ademais, $S(t,\lambda)\phi$ é analítica em λ e linear em ϕ. Isto resolve a equação (5.3) em relação a ψ.

Observemos que para cada $\phi \in \mathcal{R}(P)$ existe um número real $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tal que $\phi = \sum_{j=1}^m c_j\phi_j$. Assim, a segunda equação em (5.3) pode ser equivalentemente vista como um sistema de equações nas variáveis $c_1,\ldots,c_m$ como abaixo

$$\sum_{j=1}^m c_j \int_M \phi_k(\mathscr{L}_t+\lambda)(\phi_j + S(t,\lambda)\phi_j)\mathrm{dm}_0 = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Desta forma, λ é um autovalor de $\mathscr{L}_t$ se e somente se $\det A(t,\lambda) = 0$, onde $A(t,\lambda)$ é dada por

$$A_{kj}(t,\lambda) = \int_M \phi_k(\mathscr{L}_t+\lambda)(\phi_j + S(t,\lambda)\phi_j)\mathrm{dm}_0.$$

Além disso, as autofunções associadas são dadas por

$$u(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{m} c_j(\phi_j + S(t,\lambda)\phi_j).$$

Em outras palavras, $c = (c_1, \ldots, c_m)$ deve ser satisfazer $A(t,\lambda)c = 0$. Pelo Teorema de Rouché, temos que: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então existe exatamente m-raízes de $\det A(t,\lambda) = 0$ no intervalo $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. □

Lema 5.1. *Sejam (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta orientada e $\{g(t)\}$ uma família analítica de estruturas riemanniana em M com $g(0) = g_0$. Suponhamos que λ seja autovalor de multiplicidade m para o operador $\mathscr{L}_{g_0}$. Então existem $\varepsilon > 0$ e funções t-analíticas $\lambda_i(t)$ e $\phi_i(t)$, $(i = 1, \ldots, m)$ tal que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm_t})} = \delta_i^j$ e para $|t| < \varepsilon$ tem-se $\lambda_i(0) = \lambda$ e*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_t\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \frac{\partial}{\partial\nu_t}\phi_i(t) &= 0 \quad \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Demonstração. Assuma as mesmas condições da Proposição 5.3. Devemos mostrar que existe m curvas analíticas de autovalores $\lambda_j(t)$ para (5.1) associadas a m curvas analíticas de autofunções $\phi_j(t)$.

A estratégia da prova é reduzir o problema ao análogo ao caso de dimensão finita e aplicar o teorema da seleção de Kato (1980). Com isto em mente, faremos uma construção levemente diferente da proposição anterior.

Seja $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ uma família ortonormal de autofunções de $\mathscr{L}$ associada com λ_0. Para cada $j = 1, \ldots, m$ consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} (\mathscr{L} + \lambda_0)u &= 0 \quad \text{em } M \\ \frac{\partial}{\partial\nu_t}(\phi_j + u) &= 0 \quad \text{sobre } \partial M \\ Pu = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_M \phi_j u \mathrm{dm_0} &= 0 \quad \text{em} M. \end{cases} \tag{5.5}$$

Consideremos agora o complementar ortogonal $[\phi_j]^{\perp}$ do $ker(\mathscr{L}+\lambda_0)$ em $L^2(M, \mathrm{dm_0})$ e defina

$$F : (-\delta, \delta) \times H^2(M, \mathrm{dm_0}) \longrightarrow [\phi_j]^{\perp} \times \mathcal{R}(P) \times H^{\frac{3}{2}}(M, \mathrm{dm_0})$$

por

$$F(t,w) = \big((\mathscr{L} + \lambda_0)w,\ Pw,\ \frac{\partial}{\partial\nu_t}(\phi_j + w)\big).$$

Exatamente como antes, obtemos que $\frac{\partial F}{\partial w}(0,0)$ é um isomorfismo, assim pelo Teorema da Função Implícita existe $\delta > 0$ e uma função analítica função $w_j(t)$ definida para $|t - t_0| < \delta$ tal que $F(t, w_j(t)) = 0$. Além disso, obtemos para cada $|t - t_0| < \delta$ um conjunto de funções linearmente independente $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$, dadas por $\varphi_j(t) = \phi_j + w_j(t)$, que satisfaz a equação

(5.5). Pelo processo ortonormalização de Gram-Schmidt com respeito ao produto interno

$$(u,v) := \int_M uv \,\mathrm{dm_t},$$

podemos sem perca de generalidade assumir que $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$ é biortogonal. Notemos que as funções $\varphi_j(t)$ pertencem $D_t = \{u \in H^2(M, \mathrm{dm}_0), \frac{\partial u}{\partial \nu_t} = 0\}$. Além disso, como $\mathscr{L}_t$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno definido acima, segue que a matriz $\int_M \varphi_j \mathscr{L}_t \varphi_k \mathrm{dm_t}$ é simétrica.

Para um dado $\mathcal{T} \in \mathcal{S}^{2,k}$, definimos uma família de métrica riemannianas em M por $g(t) = g_0 + t\mathcal{T}$ e seja $P(t)$ dada por

$$P(t)u = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t) \int_M u\varphi_j(t)\mathrm{dm_t}.$$

Finalmente definimos para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} G_j : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \times H^2(M) &\longrightarrow L^2(M) \times H^{\frac{3}{2}}(M) \times L^2(M) \\ (t, \lambda, w) &\mapsto \big(G_{j1}(t,\lambda,w), G_{j2}(t,\lambda,w), G_{j3}(t,\lambda,w)\big) \end{aligned}$$

por

$$\begin{cases} G_{j1} = (I - P(t))((\mathscr{L}_t + \lambda))(w + \varphi_j(t)) \\ G_{j2} = \frac{\partial}{\partial \nu_t} w; \\ G_{j3} = P(t)w. \end{cases}$$

Novamente, nos dá um número $\delta > 0$ e funções $w_j(t,\lambda)$ tal que para qualquer $|t - t_0| < \delta$ e cada $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ temos $G_j(t, \lambda, w_j(t,\lambda)) = (0,0,0)$. Porém, sabemos que λ é autovalor para (5.1) se, e somente se, existem uma m-upla não nula número reais $c = (c_1, \dots, c_m)$ tal que $A(t,\lambda)c = 0$, onde

$$A_{ij}(t,\lambda) = \int_M \varphi_i(t)(\mathscr{L}_t + \lambda)(\varphi_j(t) + w_j(t,\lambda))\mathrm{dm_t}.$$

Isto é, λ é um autovalor de (5.1) se $\det A(t,\lambda) = 0$. Pelo Teorema de Rouché, existe, para cada t, m raízes próximas a λ_0, contando suas multiplicidades. Assim, pelo Teorema de Puiseux (Wall, 2004) existe m funções analíticas $t \to \lambda_i(t)$ que são soluções locais da equação $\det A(t,\lambda) = 0$. É fácil ver que A é simétrico e portanto, pelo Teorema da Seleção de Kato (1980), podemos encontrar uma curve analítica $c^i(t) \in \mathbb{R}^m$ tal que $A(t, \lambda_i(t))c^i(t) = 0$, para cada $i = 1, \dots, m$. Assim, $\psi_i(t) = \sum_{j=1}^m c_j^i(t)(\varphi_j + \omega_j(t, \lambda_i(t)))$ é uma curava analítica de autofunções para (5.1) associada a $\lambda_i(t)$. Procedendo exatamente como Kato (1980, p. 98) obtemos m curvas analíticas de autovalores $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^m$ tais que $\int_M \phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{dm_t} = \delta_i^j$. □

Finalizando este trabalho observando o Teorema 4.1 não usa condição de bordo, mas somente propriedades de $\mathscr{L}$ e a fórmula tipo Hadamard que é a mesma que se colocarmos a condição de bordo de Neumann. Desta forma, o Teorema 4.1 e Corolário 4.1 ainda continuam válidos se substituirmos condição de bordo de Dirichlet pela condição de Neumann.

6 CONCLUSÃO

Na investigação por genericidade simples de operadores elípticos, vimos que para a seguinte classe de operadores

$$\mathscr{L}\phi := \mathrm{div}(T\nabla\phi) - \langle\nabla\eta, T\nabla\phi\rangle.$$

com certas hipóteses sobre T, essa propriedade ainda é preservada tanto em condições de bordo de Dirichlet quanto Neumann. Vimos ainda que ao longo fluxo de Ricci, quando $T' \geq -4Ric(T,\cdot)$ sobre uma variedade fechada homogênea, os autovalores do operador estudado $\mathscr{L}$ são crescentes e que essa hipótese não pode ser removida. Para o caso não homogênea, a monotonicidade deve ocorrer a partir de um certo instante no caso $T = \psi g$, em que ψ é um função suave positiva sobre M.

REFERÊNCIAS

Bando, S.; Urakawa, H. **Generic properties of the eigenvalue of the Laplacian for compact Riemannian manifolds**. *Tohoku Math. J*, v. 35, p. 155–172, 1983.

Berger, M. **Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes**. *Compos. Math.*, v. 26, p. 129–149, 1973.

Cao, X.; Hou, S.; Ling, J. **Estimate and monotonicity of the first eigenvalue under the Ricci**. *Math. Ann.*, v. 354, p. 451–463, 2012.

Delfour, M. C.; Zolesio, J.-P. **Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization**. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2001.

Gomes, J. N. V.; Miranda, J. F. R. **Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form**. *arXiv:1607.00066 [math.DG]*, 2016.

Gomes, J.N.V.; Marrocos, M.A.M. **On Eigenvalue Generic Properties of the Laplace-Neumann Operator**. *arXiv:1510.07067v2 [math.DG]*, 2015.

Gomes, J.N.V.; Marrocos, M.A.M.; Mesquita, R.R. **Hadamard Type Variation Formulas for the Eigenvalues of the η–Laplacian and Applications**. *arXiv:1510.07076 [math.DG]*, 2015.

Hamilton, R.S. **Three-manifolds with positive Ricci curvature**. *J. Differ. Geom.*, v. 17, p. 255–306, 1982.

Henry, D.B. **Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial diferential equations**. *Cambridge University Press*, 2005.

Hormander, L. **Linear partial differential operators**. Springer, New York, 1969.

Kato, T. **Perturbation Theory for Linear Operators**. 1980.

Kriegl, A.; Michor, P.W. **Differentiable perturbation of unbounded operators**. *Math. Ann.*, v. 327, p. 191–201, 2003.

Lions, J. L.; Magenes, E. **Non-homogeneous boundary value problems and applications**, v. 1. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1972.

Marrocos, M.A.M.; Pereira, A.L. **Eigenvalues of the Neumann Laplacian in symmetric regions**. *J. Math. Phys.*, p. 56, 2015.

Perelman, G. **The entropy formula for the Ricci and its gemetric applications**. *arXiv:0211159 [math.DG]*, 2002.

Soulfi, A.; Ilias, S. **Domain deformations and eigenvalues of the dirichilet Laplacian in a Riemannian manifolds**. *Illinois J. Math.*, v. 51, p. 645–666, 2007.

Uhlenbeck, K. **Generic Properties of Eigenfunctions**. *Amer. J. Math.*, v. 98 (4), p. 1059–1078, 1976.

Wall, C.T.C. **Singular Points of Plane Curves (London Mathematical Society Student Texts)**. Cambridege University Press, 2004.