UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

MARCOS RANIERI DA SILVA

VARIEDADES QUASI-EINSTEIN COMPLETAS E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

FORTALEZA
2016

MARCOS RANIERI DA SILVA

VARIEDADES QUASI-EINSTEIN COMPLETAS E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S581v Silva, Marcos Ranieri da.
Variedades quasi-Einstein completas e Métricas Críticas do Funcional Volume em variedadades compactas com bordo / Marcos Ranieri da Silva. – 2016.
69 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Produtos warped Einstein. 2. Métricas críticas. 3. Métricas quasi-Einstein. I. Título.
CDD 510

MARCOS RANIERI DA SILVA

VARIEDADES QUASI-EINSTEIN COMPLETAS E MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em: 27 de Outubro de 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Ernani Ribeiro Jr., pelas sugestões de problemas e parceria no trabalho. Além do constante encorajamento e paciência durante todo o período do meu doutorado.

Ao professor Feliciano Vitório, pela participação na banca com valiosas sugestões e por ter me inspirado a estudar geometria.

Aos professores Rafael Diógenes e Rondinelle Batista pela amizade e parceria na pesquisa. Ao último também agradeço a participação na banca e a leitura crítica do trabalho.

Aos professores Abdênago Barros e Tiarlos Cruz pela amizade e pelas valiosas sugestões no trabalho, além das sugestões para pesquisas futuras.

Aos amigos Elzimar, Hallyson, Valdir e Alex por assistirem minhas apresentações preliminares, contribuindo de forma decisiva para a apresentação final.

À minha familia, pelo incentivo ao estudo e um agradecimento especial as minhas irmãs Marta e Mirã pelo carinho e apoio durante esse período longe de casa.

À Livia, pelo suporte e amor ininterruptos nos últimos anos.

A todos os professores do departarmento de matemática da UFC, em especial, ao grupo de geometria. Agradeço também aos professores Abdênago Barros, Daniel Cibotaru, Luciano Mari e Jorge Herbert cujos seminários e disciplinas foram fundamentais na minha formação acadêmica.

Aos amigos Fabrício, Grangeiro, Renivaldo, Edvalter, Adam, Janyelle, Alexandre, Israel, Tadeu, Davi Ribeiro, Davi Lustosa, Tiago, Diego Eloi, Diego Sousa, Elaine, Loester, Eddygledson, Emanuel, Emanoel, Amilca e a todos os outros colegas de departamento com quem tive o prazer de tomar um café no Diniz no meio da tarde.

À Andrea e a Jessyca pela eficiência de sempre.

À Capes pelo suporte financeiro com a manutenção da bolsa.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre
aquilo que todo mundo vê.”

(Arthur Schopenhauer)

RESUMO

O objetivo do trabalho é estudar as variedades quasi-Einstein e métricas críticas de Miao-Tam. Na primeira parte, estudamos a estrutura no infinito de uma variedade quasi-Einstein completa e não-compacta. Em particular, mostramos que se M é a base de um produto warped Ricci-flat, então M é conexa no infinito. Quando M é uma variedade quasi-Einstein com $\lambda < 0$ existem exemplos que mostram que tal resultado não é verdadeiro. Neste caso, mostramos que M é f-não-parabólica e sobre uma determinada hipótese sobre a curvatura escalar, que M tem apenas um fim f-não-parabólico. Além disso, obtemos duas estimativas para o volume das bolas geodésicas de M. Em seguida, mostramos que variedades quasi-Einstein Bach-flat não-compactas com $\lambda = 0$ e curvatura de Ricci positiva são isométricas a uma métrica produto warped $g = dt^2 + \psi^2(t)g_L$, onde g_L é uma métrica Einstein. Na segunda parte do trabalho, estudamos as métricas críticas do funcional volume restrito ao conjunto das métricas com curvatura escalar constante e métrica de bordo prescrita em uma variedade compacta. Obtemos uma estimativa superior *sharp* para a área do bordo de uma métrica crítica de Miao-Tam (M^3, g) com curvatura escalar não-negativa. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, (M^3, g) for isométrica a uma bola geodésica em espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Por último, obtemos uma fórmula tipo-Bochner para uma métrica crítica de Miao-Tam tridimensional, a qual nos permite obter o mesmo resultado de rigidez desde que $|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{6}$.

Palavras-chave: Produtos warped Einstein. Métricas críticas. Métricas quasi-Einstein.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study quasi-Einstein manifolds and Miao-Tam critical metrics. In the first part, we will study the structure at infinity of a complete non-compact quasi-Einstein manifold. In particular, we show that if M is the basis of a warped product Ricci-flat then M is connected at infinity. When M is a quasi-Einstein manifold with $\lambda < 0$ there are examples showing that such a result is not true. In this case, we show that M is f-non-parabolic and, under a certain hypothesis on the scalar curvature, M has only one f-non-parabolic end. Furthermore, we obtain two estimates for the volume of the geodesic balls of M. Next, we show that a Bach-flat non-compact quasi-Einstein manifold with $\lambda = 0$ and positive Ricci curvature must be isometric to a warped product metric $g = dt^2 + \psi^2(t)g_L$, where g_L is an Einstein metric. In the second part, we will study the critical metrics of the functional volume restricted to the set of metrics with constant scalar curvature and boundary prescribed metric on a compact manifold. We obtain a sharp upper bound for the area of the boundary of a Miao-Tam critical metric (M^3, g) with non-negative scalar curvature. Moreover, we show that the equality holds if and only if (M^3, g) is isometric to a geodesic ball in simply connected space form $\mathbb{R}^3$ or $\mathbb{S}^3$. Finally, we get a type-Bochner formula for a 3-dimensional Miao-Tam critical metric, which allows us to get the same rigid result provided that $|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{6}$.

Keywords: Einstein warped product. Criticial metric. quasi-Einstein metric.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No conjunto das métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável M^n, as métricas com curvatura constante são definititivamente as melhores por uma série de aspectos. Mas qual noção de curvatura seria a mais adequada?

Do teorema de Cartan, as variedades Riemannianas de curvatura seccional constante são as mais ricas em isometrias locais, entretanto o teorema de Hopf-Killing mostra que tais métricas são de fato muito raras. Por exemplo, $S^2 \times S^2$ não admite métrica de curvatura seccional constante. Por outro lado, a solução do problema de Yamabe nos diz que dada uma variedade Riemanniana compacta (M, g), sempre existe uma métrica $\bar{g}$ conforme a g de curvatura escalar constante, logo, a condição métrica de curvatura escalar constante torna-se muito fraca para ser considerada uma métrica ótima em uma dada variedade diferenciável. Assim, a condição de a métrica ter o tensor de Ricci constante, ou seja, a métrica é Einstein, passa a ser considerada como uma condição razoável no sentido de ser a *melhor* métrica em uma variedade dada. Einstein e Hilbert provaram que métricas Einstein são precisamente os pontos críticos do funcional curvatura escalar total

$$g \to \int_M R_g dV_g \tag{1.1}$$

restritos ao conjunto das estruturas Riemannianas em M^n de volume unitário. Métricas Einstein são muito importantes em outros tópicos de Geometria Diferencial além do seu interesse na teoria da relatividade geral de Einstein. Para uma referência sobre o assunto, ver (BESSE, 2007). Diferentemente de métricas de curvatura escalar constante, nem sempre existe uma métrica Einstein em uma variedade diferenciável dada, mesmo no caso compacto, embora já se conheçam condições geométricas razoáveis para a existência de tais métricas. Por consequência, a construção de novos exemplos, bem como o estudo das propriedades das variedades Einstein torna-se de fundamental importância. Um modo promissor para esta proposta é considerar métricas produto *warped*. O tensor de Ricci de m-Bakry-Emery, o qual aparece anteriormente nos trabalhos de Bakry e Ledox (1996) e Qian (1997), é útil na tentativa de melhor entender produtos *warped* Einstein. Mais precisamente, o tensor de Ricci de m-Bakry-Emery é dado por

$$Ric_f^m := Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df. \tag{1.2}$$

Destacamos que ele é também usado como um análago ao tensor de Ricci para o estudo da variedade com peso $(M^n, g, d\mu = e^{-f} dx)$ onde dx denota a medida de Riemann-Lebesgue determinada pela métrica.

Definição 1.0.1 *Uma variedade Riemanniana completa* (M^n, g), $n \geq 2$, *será chamada m-quasi-Einstein, ou simplesmente quasi-Einstein, se existir uma função suave* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *e constantes* $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in (0, \infty]$, *satisfazendo a seguinte equação fundamental:*

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g. \tag{1.3}$$

Quando $m = \infty$, a equação (1.3) reduz-se à equação dos sólitons de Ricci gradiente. Sólitons de Ricci modelam a formação de singularidades no fluxo de Ricci e correspondem a soluções auto-similares, isto é, soluções que desenvolvem simetrias ao longo do fluxo de Ricci (CAO, 2009). Seguindo a nomenclatura dos sólitons de Ricci, dizemos que uma variedade m-quasi-Einstein é *shrinking, steady* ou *expanding* se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, respectivamente. Se f é constante dizemos que (M^n, g) é uma variedade quasi-Einstein *trivial*, neste caso temos que (M^n, g) é Einstein. Quando m é um inteiro positivo, métricas quasi-Einstein correspondem a bases de produtos *warped* Einstein. Mais precisamente,

Teorema 1.0.1 (Besse (2007)) (M^n, g, f) *é uma variedade m-quasi-Einstein, ou seja, satisfaz a Eq.* (1.3) *se, e somente se, a métrica produto warped* $M^n \times_{e^{-\frac{f}{m}}} F^m$ *for Einstein, onde* F^m *é uma variedade Einstein com constante de Einstein* μ *satisfazendo*

$$\Delta f - |\nabla f|^2 = m\lambda - m\mu e^{\frac{2}{m}f}. \tag{1.4}$$

Qian (1997) provou que uma variedade quasi-Einstein *shrinking* deve ser compacta. Além disso, Kim e Kim (2003) mostraram que variedades quasi-Einstein compactas com $\lambda \leq 0$ são triviais. Portanto, uma variedade quasi-Einstein não-trivial é compacta se, e somente se, $\lambda > 0$.

Neste trabalho, focamos no caso em que m é finito. Em particular, quando nos referirmos a uma variedade quasi-Einstein estamos sempre supondo que as equações (1.3) e (1.4) são satisfeitas. Estudamos variedades quasi-Einstein não-trivias completas e não-compactas na primeira parte do trabalho, ou seja, consideramos $\lambda \leq 0$. O objetivo inicial é entender a estrutura no infinito de uma variedade quasi-Einstein. A partir disso, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.2 *Seja* $(M^n, g, f, m > 1)$ *uma variedade quasi-Einstein steady, completa e não-trivial. Então* M^n *é conexa no infinito.*

Quando (M^n, g, f) é uma variedade quasi-Einstein completa e não-compacta com $\lambda < 0$, existem exemplos que provam que tal resultado não é verdadeiro (WANG, 2012a). Entretanto, conseguimos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1.0.3 *Seja* $\left(M^n, g, f\right)$ *uma variedade m-quasi-Einstein expanding, completa e não-compacta com* $m \in (1,\infty)$ *e* $\mu \geq 0$. *Então* M^n *é* f*-não-parabólica.*

No caso em que M é uma variedade quasi-Einstein *expanding* com $\mu < 0$, então temos que M é f-não-parabólica ou Einstein. Além disso, conseguimos mostrar no caso *expanding* que M tem apenas um fim f-não-parabólico desde que a curvatura escalar de M seja limitada por baixo por uma determinada constante. Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.4 *Seja* $\left(M^n, g, f\right)$ *uma variedade quasi-Einstein expanding completa não-compacta* $m \in (1,\infty)$. *Suponha que*

$$R \geq \lambda \left(n - \frac{2m}{m-1}\right) + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. *Então* M^n *tem apenas um fim* f*-não-parabólico.*

Vale ressaltar que uma variedade f-não-parabólica pode ter fins parabólicos. Em seguida, usando tais resultados sobre a parabolicidade da variedade, obtemos uma estimativa quadrática por baixo para o crescimento de volume com peso das bolas geodésicas. A saber:

Teorema 1.0.5 *Seja* $\left(M^n, g, f\right)$ *uma variedade completa, não-compacta, expanding m-quasi-Einstein com* $m > 1$ *e* $\mu \geq 0$. *Então existem constantes c e* $r_0 > 0$ *tais que para qualquer* $r > r_0$

$$Vol_f(B_p(r)) \geq cr^2. \tag{1.5}$$

Relembramos que Cao e Chen (2013) obtiveram uma forte classificação para sólitons *shrinking* gradiente que são Bach-flat. Em seguida, Cao *et al.* (2014) mostraram que qualquer sóliton de Ricci *steady* n-dimensional completo, Bach-flat com curvatura de Ricci positiva tal que a curvatura escalar R atinge seu máximo em algum ponto interior deve ser isométrico a um sóliton de Bryant (único sóliton *steady* rotacionalmente simétrico (CHOW *et al.*, 2010)). Quando $0 < m < \infty$, desde que variedades m-quasi-Einstein *shrinking* são compactas, Chen e He (2013) provaram que uma variedade quasi-Einstein compacta, Bach-flat é Einstein ou quociente finito de um produto *warped* com fibra $(n-1)$-dimensional. Para o caso de uma variedade quasi-Einstein não-compacta, inspirado nas técnicas desenvolvidas por Cao *et al.* (2014) para o estudo dos sólitons de Ricci *steady*, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.6 *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$, $n \geq 4$, uma variedade quasi-Einstein steady Bach-flat não-compacta com curvatura de Ricci positiva tal que f tem pelo menos um ponto crítico. Então M^n tem tensor de Weyl harmônico e $W_{ijkl}\nabla^l f = 0$.*

Este resultado junto com o Teorema 1.5 de He, Petersen e Wylie (2012), permite-nos obter o seguinte resultado de rigidez:

Corolário 1.0.1 *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$, $n \geq 4$, uma variedade quasi-Einstein steady, Bach-flat e não-compacta com curvatura de Ricci positiva tal que f tem pelo menos um ponto crítico. Então (M^n, g) é um produto warped com*

$$g = dt^2 + \psi^2(t) g_L \;\; e \;\; f = f(t),$$

onde g_L é Einstein com curvatura de Ricci não-negativa. Além disso, a fibra tem curvatura seccional constante se $n = 4$.

Vale ressaltar que, desde que a variedade é não-compacta, obtivemos uma estimativa linear para a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$, a qual tem papel fundamental na demonstração do Teorema 3.4.2.

A segunda parte do trabalho é baseada no artigo *Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary* escrito por mim em parceria com Batista, Diógenes e Ribeiro Jr. (2016a). Estudamos a geometria das métricas críticas do funcional volume restrito ao conjunto das métricas com curvatura escalar constante e métrica de bordo prescrita em uma variedade compacta. A princípio, Miao e Tam (2009) estudaram esse problema do ponto de vista variacional. Além disso, eles obtiveram a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional volume restrito a $\mathscr{M}_\gamma^R$ cuja solução foi denominada *métrica crítica*. Por simplicidade, seguindo a terminologia utilizada por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr (2015b), adotamos a seguinte definição:

Definição 1.0.2 *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla (M^n, g, f), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta com bordo suave ∂M e $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ satisfazendo a seguinte equação:*

$$\mathfrak{L}_g^*(f) := -(\Delta f)g + Hess f - f Ric = g. \tag{1.6}$$

Não é difícil mostrar que uma métrica satisfazendo à equação (1.6) tem curvatura escalar constante. Os resultados obtidos por Miao e Tam (2009, 2011) sugerem que tais métricas críticas devem ser bastante rígidas. Por exemplo, se uma métrica crítica de Miao-Tam é Einstein, então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. A mesma conclusão é verdadeira quando a métrica é localmente conformemente *flat* e o ∂M é isométrico a uma esfera canônica. Posteriormente, Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015b) conseguiram melhorar esse resultado mostrando que métricas críticas de Miao-Tam Bach-flat cujo bordo é isométrico a uma esfera canônica é uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo. Nesta direção, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.0.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa com bordo suave ∂M e função potencial não-negativa. Suponha que a curvatura escalar de $(\partial M, g_{|_{\partial M}})$ é constante. Então $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ é uma constante não-positiva ao longo de ∂M. Em particular, $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0$ se, e somente se, (M^n, g) for isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, ou $\mathbb{S}^n$.*

Ressaltamos que a adjunta formal da linearização da curvatura escalar $\mathfrak{L}_g^*$, tem um papel fundamental em problemas relacionados a prescrição da função curvatura escalar. Também relembramos que uma variedade Riemanniana completa M^n com bordo suave ∂M (possivelmente vazio) é dita ser *estática* se ela admite uma solução não-trivial $\lambda \in C^\infty(M)$ para a equação

$$\mathfrak{L}_g^*(\lambda) = 0. \tag{1.7}$$

É bem conhecido que a existência de uma função potencial impõe muitas restrições a geometria da variedade diferenciável (WALD, 2010).

Destacamos que Fischer e Marsden (1974) conjecturaram que uma esfera canônica é a única solução para a equação (1.7) em uma variedade compacta. Um contra-exemplo para a conjectura de Fischer-Marsden foi obtido quando g é conformemente *flat*. Para mais detalhes, ver (KOBAYASHI, 1982; LAFONTAINE, 1983). Entretanto, um resultado devido a Shen (1997) e Boucher, Gibbons e Horowitz (1984) afirma que o bordo ∂M de uma variedade estática compacta tridimensional com bordo conexo e curvatura escalar constante 6 deve ser uma 2-esfera topológica cuja área satisfaz a desigualdade

$$|\partial M| \leq 4\pi.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, M^3 é isométrico ao hemisfério $\mathbb{S}^3_+$. Um resultado similar foi obtido em (HIJAZI *et al.*, 2015).

Baseado no resultado acima e levando em conta que métricas críticas de Miao-Tam têm curvatura escalar constante, estimamos a área do bordo de uma variedade tridimensional satisfazendo (1.6). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.7 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam orientada e compacta com bordo conexo ∂M e curvatura escalar não-negativa. Então ∂M é uma esfera e*

$$|\partial M| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{1.8}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ é constante. Além disso, vale a igualdade em (1.8) se, e somente se, (M^3, g) for isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

Lembramos que Ambrozio (2015) obteve alguns resultados de classificação para métricas estáticas tridimensionais com curvatura escalar positiva. Para isso, ele obteve uma fórmula tipo-Böchner em variedades estáticas tridimensionais envolvendo o tensor de Ricci sem traço e o tensor de Cotton. Inspirados por esse resultado, obtemos um resultado análago para métricas críticas de Miao-Tam. Vale ressaltar que os argumentos usados na prova da fórmula (1.9) diferem significativamente da prova obtida em Ambrozio (2015). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.8 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, conexa, orientada e com bordo suave ∂M. Então*

$$\frac{1}{2}div\Big(f\nabla|\mathring{Ric}|^2\Big) = \Big(|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \frac{|C|^2}{2}\Big)f + \Big(R|\mathring{Ric}|^2 + 6tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f + \frac{3}{2}|\mathring{Ric}|^2, \tag{1.9}$$

onde C denota o tensor de Cotton e $\mathring{Ric}$ é o tensor de Ricci sem traço.

Finalmente, como aplicação do Teorema 1.0.8, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1.0.2 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, conexa, orientada, com bordo suave ∂M, curvatura escalar positiva e função potencial f não-negativa. Se*

$$|\mathring{Ric}|^2 \leq \frac{R^2}{6}, \tag{1.10}$$

então M^3 é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo fixamos a notação utilizada e apresentamos as definições e resultados básicos para a compreensão do restante do trabalho. A menos de menção contrária, (M^n, g) denota uma variedade Riemanniana n-dimensional e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Além disso, denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos de vetores suaves de M.

2.1 Notações e tensores importantes

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, o $(1,3)$-**tensor curvatura de Riemann Rm** é definido por

$$\mathrm{Rm}(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.1}$$

para todo X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $\{x^i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas local de um ponto de M, as componentes do $(1,3)$-tensor Rm são definidas por

$$\mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} := R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}. \tag{2.2}$$

Em todo o trabalho, usamos a convenção de somatório de Einstein de soma sobre índices repetidos.

Usando a métrica, as componentes de Rm como um $(0,4)$-tensor são definidas como

$$R_{ijkl} = \mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) := \left\langle \mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle. \tag{2.3}$$

O tensor de Ricci é o traço do tensor Rm, ou seja, $R_{ik} := g^{jl} R_{ijkl}$ e a curvatura escalar R é o traço do tensor de Ricci.

Relembramos que o tensor de Weyl W_{ijkl} é definido, $n \geq 3$, pela seguinte fórmula de decomposição:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{il} g_{jk} - R_{jk} g_{il}\right) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jl} g_{ik} - g_{il} g_{jk}\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

enquanto o tensor de Cotton C_{ijk} é dado por

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}\right). \tag{2.5}$$

Vale notar que o tensor de Cotton é anti-simétrico nos dois primeiros índices e tem traço-livre em quaisquer dois índices:

$$C_{ijk} = -C_{jik} \text{ e } g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \tag{2.6}$$

É um cálculo direto mostrar a seguinte relação entre os tensores C_{ijk} e W_{ijkl}:

$$-\frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ijk} = \nabla^l W_{ijkl}. \tag{2.7}$$

Logo, para $n \geq 4$, se o tensor de Weyl de (M^n, g) é nulo, então o tensor de Cotton é nulo. Além disso, para $n = 3$ o tensor de Weyl é sempre nulo enquanto o tensor de Cotton não se anula em geral.

Observação 2.1.1 *Os tensores de Cotton e Weyl estão intimamente relacionados a geometria de (M^n, g), por exemplo, é bem conhecido que (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se,*

1. *para $n \geq 4$ o tensor de Weyl é nulo;*
2. *para $n = 3$ o tensor de Cotton é nulo.*

O tensor de Bach (1921) foi introduzido para o estudo de relatividade conforme, ele é definido em termos das componentes do tensor de Weyl W_{ikjl} como a seguir

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_i{}^k{}_j{}^l, \quad \text{para } n \geq 4. \tag{2.8}$$

Quando $n = 3$, devido a (2.7), ele será definido por

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij}. \tag{2.9}$$

Dizemos que (M^n, g) é Bach-*flat* quando $B_{ij} \equiv 0$. É fácil mostrar que métricas localmente conformemente *flat*, bem como métricas Einstein são Bach-*flat*. Além disso, para a dimensão $n = 4$, é bem conhecido que half-conformalmente *flat* ou localmente conforme a uma métrica Einstein implica Bach-*flat*. Porém, Leistner e Nurowski (2010) obtiveram uma grande classe de exemplos de métricas Bach-flat que não são localmente conformemente Einstein. Para mais detalhes sobre o tensor de Bach, ver (BESSE, 2007).

2.2 Estrutura no infinito e parabolicidade

Nesta seção relembramos algumas definições e resultados importantes sobre a estrutura no infinito e parabolicidade de variedades Riemannianas completas. Para uma referência no assunto recomendamos o *survey* de Li (2000). Nesta seção, (M^n, g) sempre denota uma variedade Riemanniana completa não-compacta sem bordo. Primeiramente, começamos com o seguinte conceito.

Definição 2.2.1 *Seja $D \subset M$ um subconjunto compacto. Um **fim** E de M com respeito a D é uma componente conexa ilimitada de $M \backslash D$.*

Note que o número de fins com respeito a D é necessariamente finito. É claro que se $D_1 \subset D_2$, então o número de fins com respeito a D_1 é no máximo o número de fins com respeito a D_2. Se tal número se estabiliza para um certo $k \in \mathbb{N}$ quando $D \nearrow \Omega$ dizemos que M tem k fins. Caso contrário, M tem infinitos fins. Uma variedade com apenas 1 fim é dita **conexa no infinito**.

Definição 2.2.2 *Uma **função de Green** $G(x,y)$ é uma função definida em $(M \times M) \backslash \{(x,x)\}$ satisfazendo*

- $G(x,y) = G(y,x)$;
- $\Delta_y G(x,y) = -\delta_x(y)$.

Foi provado por Malgrange (1956) que toda variedade completa admite uma função de Green. Além disso, Li e Tam (1987) obtiveram um argumento construtivo para a existência de $G(x,y)$. Algumas variedades admitem funções de Green positivas enquanto outras não. Essa propriedade permite-nos classificar as variedades completas em duas categorias.

Definição 2.2.3 *Uma variedade completa é dita ser **não-parabólica** se ela admite uma função de Green positiva. Caso contrário, M é dita ser **parabólica**.*

Tal definição pode ser facilmente estendida aos fins de uma variedade completa.

Definição 2.2.4 *Um fim E é dito ser não-parabólico se ele admite uma função de Green positiva com condição de bordo de Neumann em ∂E. Caso contrário, ele é dito ser parabólico.*

Da construção de Li e Tam (1987), verifica-se que M é não-parabólica se, e somente se, ela tem um fim não-parabólico. Além disso, é possível que uma variedade não-parabólica tenha fins parabólicos.

Embora a definição de parabolicidade seja puramente analítica, do ponto de vista geométrico, a parabolicidade de uma variedade completa está intimamente relacionado a taxa de crescimento de volume de bolas geodésicas. Temos um exemplo disso no seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 (Varopoulos (1983)) *Se (M^n, g) é não-parabólica, então*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{A_p(t)} < \infty, \tag{2.10}$$

onde $A_p(t)$ denota a área do bordo de uma bola geodésica centrada em p.

Logo, a partir do teorema acima, o plano $\mathbb{R}^2$ é parabólico. Para métricas Riemannianas rotacionamente simétricas, a condição de volume acima é também suficiente para a variedade ser não-parabólica. Como consequência, temos que $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, é não-parabólico.

Definição 2.2.5 (Li e Wang (2006)) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Dizemos que M satisfaz uma desigualdade de Poincaré com peso, com função peso não-negativa $\rho(x)$, se a desigualdade*

$$\int_M \rho(x)\phi^2(x)dx \leq \int_M |\nabla\phi|^2 dx \tag{2.11}$$

é verdadeira para toda $\phi \in C_0^\infty(M)$.

Proposição 2.2.1 (Li e Wang (2006)) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Suponha que existe $h \in C^\infty(M)$ não-negativa e não-identicamente nula tal que*

$$\Delta h(x) \leq -\rho(x)h(x). \tag{2.12}$$

Então M satisfaz à desigualdade de Poincaré com peso (2.11).

Relembramos que se (M^n, g) é uma variedade parabólica e considerando uma sequência de funções harmônicas $\{f_i\}$ definidas em $B(R_i)\backslash B(R_0)$ satisfazendo

$$\Delta f_i = 0 \text{ em } B(R_i)\backslash B(R_0) \tag{2.13}$$

com condições de bordo,

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{em } \partial B(R_0) \\ 0 & \text{em } \partial B(R_i), \end{cases} \tag{2.14}$$

então f_i converge para a função constante $f = 1$ definida em $M \backslash B(R_0)$ quando $R_i \to \infty$, para qualquer R_0 fixado. Ver (LI, 2000).

Corolário 2.2.1 (Li e Wang (2006)) *Se* (M^n, g) *satisfaz à desigualdade de Poincaré com peso* (2.11)*, para alguma função* $\rho \geq 0$ *não-identicamente nula, então M é não-parabólica.*

Demonstração: Assuma que M é parabólica, então considere a sequência de funções de suportes compactos ϕ_i definidas por

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & \text{em } B(R_0) \\ f_i & \text{em } B(R_i) \backslash B(R_0) \\ 0 & \text{em } M \backslash B(R_i) \end{cases} \tag{2.15}$$

onde f_i é a sequência de funções harmônicas definida por (2.13) e (2.14). Usando $\phi = \phi_i$ na desigualdade de Poincaré com peso, temos:

$$\begin{aligned} \int_M \rho \phi_i^2 &\leq \int_M |\nabla \phi_i|^2 \\ &= \int_{B(R_i)\backslash B(R_0)} |\nabla f_i|^2 \\ &= \int_{\partial B(R_i)} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} - \int_{\partial B(R_0)} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} \\ &= -\int_{\partial B(R_0)} \frac{\partial f_i}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $f_i \to 1$ em $M \backslash B(R_0)$, concluímos que

$$\int_M \rho \leq 0, \tag{2.16}$$

e como $\rho \geq 0$ por hipótese, temos que $\rho \equiv 0$. Um absurdo, pois ρ é não-identicamente nula. Portanto, M é não-parabólica. $\square$

Observação 2.2.1 *Desde que o operador* f*-Laplaciano* $\Delta_f := \Delta - \nabla f$ *é* L^2*-auto-adjunto em M com respeito à medida* $e^{-f}dx$*, todas as definições e resultados nesta seção podem ser estendidos a este caso. Assim, diremos que M é* f*-parabólica quando M não admite uma função de Green positiva com respeito ao operador* Δ_f*. Da mesma forma, usamos uma nomenclatura análoga para as definições anteriores.*

2.3 Métricas críticas do funcional volume

Nas últimas décadas, muita atenção tem sido dedicada à caracterização dos pontos críticos de funcionais Riemannianos como, por exemplo, o funcional curvatura escalar total e o funcional volume. Einstein e Hilbert provaram que os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto das estruturas Riemannianas suaves em M^n de volume unitário são métricas Einstein (cf. Teorema 4.21 em Besse (2007)). Isso permite provar a existência, em uma dada variedade compacta, de métricas de curvatura escalar constante, o que tem estimulado muitos trabalhos interessantes. Miao e Tam (2009, 2011), por exemplo, motivados também por um resultado obtido por Fan, Shi e Tam (2009), estudaram propriedades variacionais do funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante com bordo. Os resultados obtidos por Miao e Tam (2009) sugerem que métricas críticas com uma métrica de bordo prescrita parecem ser bastante rígidas.

Por simplicidade, seguindo a terminologia usada por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015b), adotaremos a seguinte definição para as métricas críticas do funcional volume em uma variedade compacta com bordo:

Definição 2.3.1 *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla* (M^n, g, f), $n \geq 3$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade compacta com bordo suave* ∂M *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *satisfazendo a seguinte equação:*

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = g, \tag{2.17}$$

onde $\mathfrak{L}_g^*$ *é a* L^2*-adjunta formal do operador linearização da curvatura escalar* $\mathfrak{L}_g$*. Uma tal função* f *será chamada de função potencial.*

Vale ressaltar que

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hess f - fRic,$$

onde Ric, Δ e $Hess$ denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador Laplaciano e a Hessiana em M^n; ver por exemplo (BESSE, 2007). Portanto, (2.17) pode ser reescrita como

$$-(\Delta f)g + Hess f - fRic = g. \tag{2.18}$$

Miao e Tam (2009) mostraram que tais métricas são pontos críticos do funcional volume em M^n quando restritos a classe das métricas g com curvatura escalar constante prescrita tal que $g_{|_{T\partial M}} = h$ para uma métrica Riemanniana prescrita h no bordo ∂M. Em seguida, Corvino, Eichmar e Miao (2013) estudaram o problema modificado de encontrar pontos estacionários para o funcional volume no espaço das métricas cuja curvatura escalar é igual a uma constante dada. Do Teorema 7 de Miao e Tam (2009), temos que métricas críticas de Miao-Tam têm curvatura escalar constante R.

Listamos abaixo exemplos explícitos de métricas críticas de Miao-Tam em bolas geodésicas nos espaços modelos simplesmente conexos de curvatura seccional constante $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$, ver (MIAO; TAM, 2009).

Exemplo 2.3.1 (Miao e Tam (2009)) *Seja Ω uma bola Euclidiana em $\mathbb{R}^n$ de raio r. Suponha que*

$$f = -\frac{1}{2(n-1)}|x|^2 + \frac{1}{2(n-1)}r^2,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$. Sobre estas condições, não é difícil checar que (Ω, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Analogamente, apresentamos o seguinte exemplo na esfera $(\mathbb{S}^n, g_0)$, onde g_0 é sua métrica canônica.

Exemplo 2.3.2 (Miao e Tam (2009)) *Seja Ω uma bola geodésica em $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com raio $r_0 < \frac{\pi}{2}$. Suponha que*

$$f = \frac{1}{n-1}\Big(\frac{\cos r}{\cos r_0} - 1\Big),$$

onde r é a distância geodésica do ponto $(0,...,0,1)$. Portanto, $f = 0$ no bordo $\partial\Omega$ e f satisfaz (2.18). Além disso, se Ω está contigo em um hemisfério, então (Ω, g_0, f) é também uma métrica crítica de Miao-Tam.

Pensando como no caso esférico não é difícil construir um exemplo no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Exemplo 2.3.3 (Miao e Tam (2009)) *Considerando o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n,1}$, o espaço de Minkowski, com a métrica canônica $dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$ tal que*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1,...,x_n,t)\,|\,x_1^2 + ... + x_n^2 - t^2 = -1, t > 0\}.$$

Nós assumimos que Ω é uma bola geodésica em $\mathbb{H}^n$ com centro em $(0,...,0,1)$ e raio geodésico r_0. Suponha que

$$f = \frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{\cosh r}{\cosh r_0}\Big),$$

onde r é a distância geodésica do ponto $(0,...,0,1)$. Similarmente, nós temos que $f = 0$ no bordo de Ω e f satisfaz (2.18).

É natural perguntar sobre que condições esses são os únicos exemplos de métricas críticas de Miao-Tam. Neste sentido, tomando como base as ideias de Kobayashi e Obata (1981) e Kobayashi (1982), Miao e Tam (2011) responderam parcialmente a esta questão. De fato, eles provaram que se (M^n, g, f) é uma métrica critíca de Miao-Tam compacta, simplesmente conexa e localmente conformemente *flat* com bordo isométrico a uma esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$ então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ or $\mathbb{S}^n$. Posteriormente, Barros, Diógenes e Ribeiro Jr (2015b), baseados em técnicas desenvolvidas por Cao e Chen (2013), melhoraram este resultado mostrando que uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, Bach-flat e simplesmente conexa de dimensão 4 com bordo isométrico a uma esfera canônica $\mathbb{S}^3$ deve ser isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. Além disso, eles mostraram que em dimensão 3 o resultado ainda é verdadeiro trocando a condição Bach-flat pela hipótese mais fraca que (M^3, g) tem tensor de Bach harmônico.

Assumindo a condição Einstein, Miao e Tam (2011) removeram a condição do bordo ser isométrico a uma esfera canônica. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1 (Miao e Tam (2011)) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Maio-Tam compacta, Einstein e conexa com bordo suave ∂M. Então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Recentemente, Baltazar e Ribeiro Jr (2016) melhoraram o Teorema 2.3.1 trocando a hipótese de métrica Einstein pela condição de tensor de Ricci paralelo, a qual é obviamente mais fraca que a anterior. Recomendamos o trabalho de Corvino, Eichmar e Miao (2013) para mais resultados relacionados.

3 VARIEDADES QUASI-EINSTEIN

Este capítulo é baseado no artigo *Remarks on complete noncompact Einstein warped products* escrito em parceria com Batista e Ribeiro Jr. (2016b), bem como no artigo *Bach-flat noncompact steady quasi-Einstein manifolds* escrito em conjunto com Ribeiro Jr. (2016). Neste capítulo, (M^n, g) sempre denota uma variedade Riemanniana n-dimensional completa sem bordo.

O objetivo na primeira parte é entender a estrutura no infinito de uma variedade quasi-Einstein completa e não-compacta. Neste sentido, conseguimos mostrar que uma variedade quasi-Einstein *steady* não-trivial é conexa no infinito, ou seja, $M \backslash D$ tem apenas uma única componente conexa ilimitada, para qualquer compacto $D \subset M$. Para o caso de uma variedade quasi-Einstein *expanding*, completa e não-compacta existem exemplos que mostram que tal resultado não é verdadeiro. Entretanto, conseguimos mostrar que uma tal variedade é f-não-parabólica. Em particular, isto nos permite obter algumas estimativas para o crescimento de volume com peso das bolas geodésicas.

Na parte final, mostramos que variedades quasi-Einstein Bach-flat, steady, completas e não-compactas com a condição do tensor de Ricci ser positivo é um produto *warped* $\mathbb{R} \times_{\psi} L$, onde L é uma variedade Einstein. A mesma conclusão foi obtida por Chen e He (2013) para o caso compacto. No caso não-compacto, inspirados pelo trabalho de Cao *et al.* (2014) para os sólitons de Ricci *steady* gradiente, obtemos uma estimativa linear para a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$, a qual tem papel fundamental na demonstração do resultado.

3.1 Definições e resultados existentes

Em 1958, René Thom propôs a seguinte questão bem conhecida: *"Existe uma melhor estrutura Riemanniana em uma variedade suave?"* (BESSE, 2007). Uma tal estrutura Riemanniana em uma dada variedade é aquela de curvatura constante. Nesse sentido, uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci constante é chamada *Einstein.* Hilbert e Einstein mostraram que as métricas críticas do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto das estruturas Riemannianas suaves em uma variedade compacta de volume unitário são Einstein. Destacamos que variedades Einstein são muito importantes, além do seu estudo em si próprio como a outros tópicos em geometria Riemanniana. Para uma referência detalhada sobre variedades Einstein, ver (BESSE, 2007).

Um problema clássico em geometria Riemanniana é construir novos exemplos explícitos de métricas Einstein. Um caminho para esta proposta, como foi sugerido por Berger (2007), é considerar métricas produto *warped*. O tensor de Ricci de m-Bakry-Emery que aparece anteriormente em Backy e Ledoux (1996) e Qian (1997), é útil na tentativa de melhor entender produtos *warped* Einstein. O tensor de Ricci de m-Bakry-Emery é definido por

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df, \tag{3.1}$$

onde f é uma função suave em M^n e $\nabla^2 f$ denota a Hessiana de f. Destacamos também que ele faz um papel análogo ao do tensor de Ricci para o estudo da variedade com peso $(M^n, g, d\mu = e^{-f}dx)$, onde dx denota a medida de Riemann-Lebesgue determinada pela métrica.

Definição 3.1.1 *Uma variedade Riemanniana completa (M^n, g), $n \geq 2$, irá ser chamada m-quasi-Einstein, ou simplesmente quasi-Einstein, se existir uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ e constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in (0, \infty]$, satisfazendo a seguinte equação fundamental*

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \tag{3.2}$$

Quando $m = \infty$, a equação (3.2) reduz-se à equação dos sólitons de Ricci gradiente. Sólitons de Ricci modelam a formação de singularidades no fluxo de Ricci e correspondem a soluções auto-similares, isto é, soluções que desenvolvem simetrias ao longo do fluxo de Ricci, ver (CAO, 2009). Além disso, quando m é um inteiro positivo, métricas quasi-Einstein têm uma relação direta com produtos *warped* Einstein.

Definição 3.1.2 *Sejam (M^n, g_M) e (F^m, g_F) duas variedades Riemannianas e u uma função suave positiva em M. A métrica produto warped em $M \times F$ é definida por*

$$g = g_M + u^2 g_F. \tag{3.3}$$

Denotaremos $(M \times F, g)$ por $M \times_u F$.

Quando $0 < m < \infty$, considere $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Temos imediatamente que

$$\nabla u = -\frac{1}{m} u \nabla f \tag{3.4}$$

e

$$\frac{m}{u} \nabla^2 u = -\nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df. \tag{3.5}$$

Portanto, podemos reescrever a equação (3.2) como

$$Ric - \frac{m}{u} \nabla^2 u = \lambda g. \tag{3.6}$$

Logo, quando m é finito, podemos usar a equação (3.6) para estudar a equação (3.2) e reciprocamente. Tomando o traço da equação (3.6), obtemos

$$\Delta u = \frac{u}{m}(R - \lambda n). \tag{3.7}$$

Kim e Kim (2003) mostraram que a tripla (M^n, g, u) satisfaz à equação (3.6) se, e somente se, a métrica produto *warped* $M^n \times_u F^m$ é Einstein, onde F é uma variedade m-dimensional Einstein com constante de Einstein μ satisfazendo

$$\mu = u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2. \tag{3.8}$$

Portanto, a partir de um cálculo direto usando as equações (3.8), (3.7) e (3.53) obtemos a ótima caracterização de métricas quasi-Einstein como a base de métricas produto warped Einstein.

Teorema 3.1.1 (Besse (2007)) *(M^n, g, f) é uma variedade m-quasi-Einstein, ou seja, satisfaz a Eq.* (3.2) *se, e somente se, a métrica produto warped $M^n \times_{e^{-\frac{f}{m}}} F^m$ for Einstein, onde F^m é uma variedade Einstein com constante de Einstein μ satisfazendo*

$$\Delta f - |\nabla f|^2 = m\lambda - m\mu e^{\frac{2}{m}f}. \tag{3.9}$$

Logo, quando m é inteiro, variedades quasi-Einstein podem ser caracterizadas como a base de um produto *warped* Einstein. Seguindo a terminologia dos sólitons de Ricci, uma métrica m-quasi-Einstein g em uma variedade M^n é chamada *expanding*, *steady* or *shrinking*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Além disso, uma variedade m-quasi-Einstein é dita ser *trivial* se a função potencial f é constante, caso contrário ela é chamada de *não-trivial*. Note que a trivialidade implica que M^n é uma variedade Einstein.

Quando m é finito, Qian (1997) provou que uma variedade quasi-Einstein *shrinking* deve ser compacta. Além disso, de Kim e Kim (2003), variedades quasi-Einstein compactas com $\lambda \leq 0$ são triviais. Portanto, podemos resumir esses dois resultados na seguinte proposição:

Proposição 3.1.1 (Kim e Kim (2003); Qian (1997)) *Seja (M^n, g, f) uma variedade m-quasi-Einstein não-trivial, com $0 < m < \infty$. Então M é compacta se, e somente se, $\lambda > 0$ (shrinking).*

A seguir, apresentamos alguns exemplos de variedades quasi-Einstein.

Exemplo 3.1.1 *O Teorema* 9.119 *de Besse (2007) dá uma classificação completa de produtos warped Einstein de bases de dimensão um e dois. Logo, usando o Teorema 3.1.1, obtemos uma classificação completa de variedades quasi-Einstein quando* $n = 1,2$ *e* $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. *Tal resultado nos fornece exemplos com* $\lambda < 0$ *e* μ *de sinal arbitrário e* $\lambda = 0$ *e* $\mu \geq 0$. *Além disso, todos os exemplos não-triviais tem* $\mu > 0$. *Por outro lado, Case (2010) mostrou que não existem variedades quasi-Einstein não-triviais com* $\lambda = 0$ *e* $\mu \leq 0$.

Exemplo 3.1.2 *Um exemplo de variedades quasi-Einstein não-trivial com* $\lambda > 0$, $m > 1$ *e* $\mu > 0$ *foi obtido por Lü et al. (2004). Desde que uma métrica quasi-Einstein com* $\lambda > 0$ *é compacta, aplicando o príncipio do máximo a equação* (3.9) *temos que* $\mu > 0$. *Outros exemplos de variedades quasi-Einstein podem ser encontrados nos trabalhos Barros et al. (2014), Wang (2012a). Recomendamos também a tese de Rimoldi (2011) para outros resultados relacionados.*

Para os próximos resultados, é útil ter em mente a seguinte tabela, que relaciona os sinais de λ e μ e a existência de variedades quasi-Einstein não-triviais.

Tabela 1 – Exemplos de variedades quasi-Einstein

	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$
$\mu < 0$	Exemplo 3.1.1	Trivial	Trivial
$\mu = 0$	Exemplo 3.1.1	Trivial	Trivial
$\mu > 0$	Exemplo 3.1.1	Exemplo 3.1.1	Exemplo 3.1.2

Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

Observação 3.1.1 *Quando* $m = 1$, *desde que variedades Riemannianas de dimensão* 1 *são Ricci-flat, temos do Teorema* 3.1.1 *que* $\mu = 0$. *Usando o traço da equação* (3.2) *junto com* (3.9), *temos que uma variedade* 1*-quasi-Einstein de dimensão n tem curvatura escalar constante* $R = \lambda(n-1)$. *Substituindo este dado na Eq.* (3.7) *obtemos* $\Delta u = -\lambda u$ *e daí a equação* (3.6) *torna-se*

$$-(\Delta u)g + \nabla^2 u - uRic = 0. \tag{3.10}$$

Uma métrica Riemanniana satisfazendo (3.10) *é chamada de* ***métrica estática***. *Discutiremos um pouco mais sobre tais métricas no Capítulo* 4. *Focaremos no caso* $m > 1$, *desde que as propriedades das métricas estáticas, bem como as técnicas usadas para o seu estudo, diferem significativamente das empregadas neste trabalho.*

3.2 Estrutura no infinito

Nesta seção, inspirados pelo desenvolvimento histórico no estudo de produtos *warped* Einstein, investigamos a geometria de variedades quasi-Einstein não-triviais, completas e não-compactas, isto é, variedades completas não-compactas satisfazendo (1.3) e (3.9). Logo, devido a Proposição 3.1.1, estudamos os casos steady e expanding.

Yau (1975) provou que toda função harmônica positiva definida em uma variedade completa com curvatura de Ricci positiva deve ser constante. Isto estimulou muitos trabalhos relevantes. De fato, a existência de determinadas classes de funções harmônicas não-constantes em variedades completas estão relacionados ao número de fins de uma variedade completa e não-compacta. Por exemplo, quando a variedade M^n é não-parabólica, seu número de fins é limitado superiormente pela dimensão do espaço das funções harmônicas positivas em M^n, ver (LI; TAM, 1992). Para propósito de aplicação, é importante lembrar que X.-D. Li (2005) provou que toda função f-harmônica positiva definida em uma variedade completa tal que $Ric_f^m \geq 0$ deve ser constante. Esses resultados desempenham um papel fundamental neste trabalho. Note que da tabela 1, quando $\lambda = 0$ temos que $\mu > 0$. Caso contrário, f é constante.

É possível concluir que se M^n tem curvatura de Ricci não-negativa, então $M^n = N \times \mathbb{R}$, para alguma variedade compacta $(n-1)$-dimensional N com curvatura de Ricci não-negativa, ou M é conexa no infinito. Com efeito, assuma que M tem dois fins, então é bem conhecido que M possui um raio e portanto o resultado segue-se do teorema de *splitting* de Cheeger e Gromoll (1971). Analogamente, se uma variedade completa M^n satisfaz $Ric_f^m \geq 0$, então temos a mesma conclusão do resultado de Cheeger-Gromoll (cf. Teorema 1.3 de Fang, Li e Zhang (2009)). Aperfeiçoaremos esta conclusão mostrando que uma variedade quasi-Einstein *steady*, completa e não-compacta tem apenas um fim. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Seja* $\left(M^n, g, f, m > 1\right)$ *uma variedade quasi-Einstein não-trivial, steady, completa e não-compacta. Então* M^n *é conexa no infinito.*

Demonstração: Primeiramente, notamos que quando $m = \infty$ temos um sóliton de Ricci *steady* e nesse caso o resultado segue-se de Munteanu e Sesum (2013). Quando m é finito, definindo a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$, um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned}\Delta_f u^{-a} &= \Delta u^{-a} - \langle \nabla u^{-a}, \nabla f\rangle \\ &= -au^{-a-1}\Delta u + a(a+1)|\nabla u|^2 u^{-a-2} + au^{-a-1}\langle \nabla u, \nabla f\rangle,\end{aligned}$$

onde $a > 0$ (a ser escolhido posteriormente). Agora, usando a equação (3.7) com $\lambda = 0$, obtemos

$$\Delta_f u^{-a} = -\frac{a}{m}u^{-a-1}uR + a(a+1)|\nabla u|^2 u^{-a-2} - mau^{-a-2}|\nabla u|^2, \tag{3.11}$$

que pode ser reescrita como

$$\Delta_f u^{-a} = -\frac{a}{m}u^{-a}R - a\Big(m - (a+1)\Big)|\nabla u|^2 u^{-a-2}. \tag{3.12}$$

Ressaltamos que por um resultado obtido por Wang (2012a), temos que $R \geq 0$. Tomando $a = m-1$, deduzimos de (3.12) que

$$\Delta_f u^{-a} \leq 0.$$

Prosseguindo, relembramos que Wang (2014) mostrou que a função potencial de uma variedade quasi-Einstein *steady* não-compacta com $m > 1$ satisfaz

$$\frac{m-1}{n+m-1}\ln r - C_1 \leq \sup_{x\in\partial B_p(r)} (-f)(x) \leq m\ln r + C_2, \tag{3.13}$$

para $r > 1$, onde C_1 e C_2 são constantes. Do qual, obtemos

$$c_0 r^{\frac{m-1}{m(m+n-1)}} \leq \sup_{x\in\partial B_p(r)} u(x) \leq C_0 r, \tag{3.14}$$

onde c_0 e C_0 são constantes positivas.

Portanto, u^{-a} é uma função positiva em M^n tal que $\Delta_f u^{-a} \leq 0$, e por (3.14) temos também que

$$\liminf_{x\to\infty} u^{-a}(x) = 0.$$

Logo, é suficiente aplicar o teorema de Li e Tam (1992) para concluir que M^n é f-não-parabólica. Isto significa que M^n tem um fim f-não-parabólico (LI, 2000).

Por outro lado, o Teorema 1.3 de X.-D. Li (2005) assegura que toda variedade completa M^n satisfazendo

$$Ric_f^m \geq 0$$

tem a *propriedade forte de Liouville*, isto é, toda função f-harmônica positiva em M^n deve ser constante. Além disso, relembramos que Li e Tam (1992) provaram que quando a variedade é não-parabólica M^n o número de fins é limitado por cima pelo espaço das funções harmônicas positivas em M^n. Segue-se disso e do resultado de X.-D. Li (2005) que M^n tem apenas um fim, ou seja, M^n é conexa no infinito. Logo, a prova está finalizada. $\square$

Ao mesmo tempo, à luz do resultado anterior, é natural perguntar o que acontece no caso *expanding*. O Exemplo 2.1 obtido por Wang (2012a) indica que em geral, métricas quasi-Einstein *expanding* não-compactas não são necessariamente conexas no infinito. Observamos que Wang (2012b) provou um teorema de *splitting* para variedades completas cujo tensor de m-Bakry-Emery é limitado por baixo por um múltiplo do primeiro autovalor com peso da variedade. Mais precisamente, ele mostrou que dada uma variedade completa não-compacta M^n satisfazendo

$$Ric - Hess\, h - \frac{1}{m-n}\nabla h \otimes \nabla h \geq -\frac{m-1}{m-2}\lambda_1(\Delta_f),$$

onde h é uma função em M^n, $m > n$ e $\lambda_1(\Delta_f)$ denota o primeiro autovalor do operador Δ_f em M^n, então M^n tem no máximo um fim com volume infinito, ou $M = \mathbb{R} \times N$ com a métrica produto

$$g_M = dt^2 + \cosh^2 \sqrt{\frac{\lambda_1(\Delta_f)}{m-2}} t g_N^2,$$

onde N é uma variedade compacta $(n-1)$-dimensional.

Seguindo nossa discussão anterior, tratamos agora do caso *expanding*. Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2 *Seja $\left(M^n, g, f\right)$ uma variedade m-quasi-Einstein expanding, completa não-compacta com $m \in (1, \infty)$ e $\mu \geq 0$. Então M^n é f-não-parabólica.*

Demonstração: Analogamente ao teorema anterior, para $u = e^{-\frac{f}{m}}$ e usando a equação (3.7), podemos deduzir

$$\Delta_f u^{-a} = -\frac{a}{m} u^{-a}(R - \lambda n) - a\big[m - (a+1)\big]|\nabla u|^2 u^{-a-2}. \tag{3.15}$$

De Wang (2012a) tem-se que se $\lambda \leq 0$, então $R \geq \lambda n$. Logo, tomando $a = m-1$ na Eq. (3.15) obtemos

$$\Delta_f u^{-a} \leq 0.$$

Portanto, resta provar que

$$\liminf_{x\to\infty} u^{-a}(x) = 0.$$

Relembramos que a função potencial de uma variedade quasi-Einstein, *expanding* com $m > 1$ e $\mu > 0$ satisfaz

$$\frac{2m}{\sqrt{n+5m-1}+\sqrt{n+m-1}}\sqrt{-\lambda}r - c \leq \sup_{x\in\partial B_p(r)}(-f)(x) \leq \frac{m}{\sqrt{m-1}}\sqrt{-\lambda}r + C, \tag{3.16}$$

para $r > 1$, onde c e C são constantes (cf. Teorema 3.1 em Wang (2014)). Além disso, se $\mu = 0$, temos, para $r > 1$, a seguinte estimativa:

$$\frac{m}{\sqrt{n+m-1}}\sqrt{-\lambda}r - c_0 \leq \sup_{x\in\partial B_p(r)}(-f)(x) \leq \frac{m}{\sqrt{m-1}}\sqrt{-\lambda}r + C_0, \tag{3.17}$$

onde c_0 e C_0 são constantes (cf. Teorema 4.4 em Wang (2014)). Depois de simplificações, em ambos os casos temos

$$C_1 e^{C_2 r} \leq \sup_{x\in\partial B_p(r)} u(x) \leq C_3 e^{C_4 r}, \tag{3.18}$$

onde $u = e^{-\frac{f}{m}}$ e $C_{i's}$ são constantes positivas. Segue-se disso que

$$\liminf_{x\to\infty} u^{-a}(x) = 0.$$

Agora, é suficiente aplicar novamente o Teorema de Li e Tam (1992) para concluir que M^n é f-não-parabólica, como queríamos demonstrar. $\square$

Antes de anunciar nossos próximos resultados, vale notar que uma variedade não-parabólica pode ter vários fins parabólicos. Além disso, deve ser enfatizado que para $\lambda < 0$ e $\mu \geq 0$, temos uma estimativa de *pinching* linear para $\sup_{\partial B_p(r)} e^{-\frac{f}{m}}$, a qual permite-nos deduzir que

$$\limsup_{x\to\infty} e^{-\frac{f}{m}} = +\infty.$$

Entretanto, se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, não é difícil mostrar que

$$f \leq \frac{m}{2}\ln\left(\frac{m\lambda}{\mu}\right)$$

em M^n, ver (WANG, 2012a). Então, nesse caso, não podemos garantir que $e^{-\frac{f}{m}}$ converge ao infinito quando $x \to \infty$. É importante relembrar que a curvatura escalar R de uma variedade quasi-Einstein com $\lambda \leq 0$ deve satisfazer $R \geq \lambda n$; ver (WANG, 2012a). Aqui, usamos essa propriedade para obter o seguinte resultado:

Teorema 3.2.3 *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$ uma variedade m-quasi-Einstein expanding, completa e não-compacta com $\mu < 0$. Então M^n é f-não-parabólica ou Einstein.*

Demonstração: Primeiramente, verifica-se que, para $a = \frac{m-1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\Delta_f u^{-a} &= -\frac{a}{m}u^{-a}(R - \lambda n) - a[m - (a+1)]|\nabla u|^2 u^{-a-2} \\
&= -\frac{m-1}{2m}(R - \lambda n)u^{-a} - \frac{(m-1)^2}{4}|\nabla u|^2 u^{-a-2} \\
&\leq -\frac{m-1}{2m}(R - \lambda n)u^{-a}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Logo, deduzimos da Proposição 2.2.1 que vale o seguinte:

$$\int_M \frac{m-1}{2m}(R - \lambda n)\phi^2 e^{-f} \leq \int_M |\nabla \phi|^2 e^{-f}, \tag{3.20}$$

ou seja, M satisfaz a desigualdade de Poincaré com peso, o que é equivalente a variedade ser f-não-parabólica, desde que $R - \lambda n$ é não-identicamente nulo (LI; WANG, 2006).

Por outro lado, é bem conhecido que variedades quasi-Einstein satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\langle \nabla f, \nabla R \rangle &= -\frac{m-1}{m}\Big|Ric - \frac{R}{n}g\Big|^2 \\
&\quad -\frac{n+m-1}{mn}(R - n\lambda)\Big(R - \frac{n(n-1)}{n+m-1}\lambda\Big)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

(WANG, 2012a; CASE *et al.*, 2011). Portanto, se $R - \lambda n \equiv 0$, concluímos a partir de (3.21) que M^n é Einstein, concluindo a prova do teorema. $\square$

Nosso próximo resultado é a respeito do número de fins de uma variedade quasi-Einstein *expanding* não-compacta.

Teorema 3.2.4 *Seja $\big(M^n, g, f\big)$ uma variedade quasi-Einstein expanding, completa e não-compacta com $m \in (1, \infty)$. Suponha ainda que*

$$R \geq \lambda\Big(n - \frac{2m}{m-1}\Big) + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Então M^n tem apenas um fim f-não-parabólico.

Demonstração: A primeira parte da prova é igual a do teorema anterior. Inicialmente, notemos que para $a = m - 1$, imediatamente temos

$$\Delta_f u^{-a} = -\frac{m-1}{m}(R-\lambda n)u^{-a}.$$

Por outro lado, da nossa hipótese sobre a curvatura escalar garante-se que $R > \lambda n$. Então, usamos a Prop. 2.2.1 para deduzir

$$\int_M \left[\frac{m-1}{m}(R-\lambda n)\right]\phi^2 e^{-f} \leq \int_M |\nabla\phi|^2 e^{-f}, \tag{3.22}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(M)$. Além disso, usando mais uma vez nossa hipótese sobre a curvatura escalar, obtemos

$$\frac{m-1}{m}(R-\lambda n) \geq -2\lambda + \frac{m-1}{m}\delta$$

e então usamos (3.22) junto com a caracterização variacional de $\lambda_1(\Delta_f)$ para deduzir

$$\lambda_1(\Delta_f) \geq -2\lambda + \frac{m-1}{m}\delta. \tag{3.23}$$

Por outro lado, sabemos do Teorema 3.2.2 que M tem pelo menos um fim f-não-parabólico. Argumentamos agora por contradição, assumindo que existem pelo menos dois fins f-não-parabólicos em M^n. Então existe uma função f-harmônica limitada e não-constante h em M^n tal que

$$\int_M |\nabla h|^2 e^{-f} < \infty.$$

Prosseguindo, note que

$$\big(a+b\big)^2 \geq \frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c-1},$$

para todo $c > 1$. Logo, escolhendo $c = \frac{m+n}{n}$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla^2 h|^2 &\geq \frac{1}{n}\big(\Delta h\big)^2 \\
&= \frac{1}{n}\big(\Delta_f h + \langle\nabla f, \nabla h\rangle\big)^2 \\
&\geq \frac{1}{n}\Big(\frac{n}{m+n}(\Delta_f h)^2 - \frac{n}{m}\langle\nabla f, \nabla h\rangle^2\Big) \\
&\geq \frac{1}{m+n}(\Delta_f h)^2 - \frac{1}{m}\langle\nabla f, \nabla h\rangle^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

A seguir, da fórmula de Böchner com peso, temos

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 = |\nabla^2 h|^2 + Ric_f(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla h, \nabla \Delta_f h\rangle, \tag{3.25}$$

onde $Ric_f = Ric + \nabla^2 f$. Substituindo (3.24) em (3.25), e usando que h é f-harmônica, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \geq Ric_f(\nabla h, \nabla h) - \frac{1}{m}\langle \nabla f, \nabla h\rangle^2, \tag{3.26}$$

usando a equação fundamental (3.2), obtemos

$$\Delta_f|\nabla h|^2 \geq 2\lambda|\nabla h|^2.$$

Portanto, é suficiente repetir os argumentos desenvolvidos em Li e Wang (2001) para deduzir

$$\lambda_1(\Delta_f) \leq -2\lambda,$$

o qual obviamente entra em contradição com (3.23). Tal argumento finaliza a prova do teorema.
□

Observação 3.2.1 *Destacamos que, da estimativa do Teorema 1.6 de Wang (2012a) para a curvatura escalar de variedades expanding quasi-Einstein, se assumirmos que* $\mu \leq 0$ *no Teorema* 3.2.4 *é necessário considerar* $m \in (3, \infty)$.

3.3 Estimativas de crescimento de volume

Calabi (1975) e Yau (1976) provaram que toda métrica com tensor de Ricci não-negativo em uma variedade não-compacta satisfaz

$$Vol(B_p(r)) \geq cr \tag{3.27}$$

para qualquer $r > r_0$ onde r_0 é uma constante positiva e $B_p(r)$ é uma bola geodésica de raio r centrada em $p \in M^n$ e c é uma constante que não depende de r. Nesse sentido, Munteanu e Sesum (2013) mostraram que sólitons de Ricci *steady* gradiente têm o mesmo tipo de crescimento. Recentemente, Barros, Batista e Ribeiro Jr (2015a) obtiveram o mesmo tipo de crescimento para uma variedade quasi-Einstein *steady*. Além disso, eles mostraram que uma variedade quasi-Einstein expanding com $\mu \leq 0$, tal que a função potencial é limitada por baixo, deve satisfazer tal crescimento. Com tais resultados em mente, como uma aplicação do Teorema 3.2.2, obtemos o seguinte resultado a respeito do crescimento do volume com peso das bolas geodésicas de uma variedade quasi-Einstein expanding não-compacta:

Teorema 3.3.1 *Seja $\left(M^n, g, f\right)$ uma variedade m-quasi-Einstein expanding, completa e não-compacta com $m > 1$ e $\mu \geq 0$. Então existem constantes c e $r_0 > 0$ tais que para qualquer $r > r_0$*

$$Vol_f(B_p(r)) \geq cr^2. \tag{3.28}$$

Demonstração: Inicialmente, invocamos o Teorema 3.2.2 para deduzir que M^n é f-não-parabólica. Logo, podemos aplicar o resultado de Varapoulos (1983) para obter

$$\int_1^{\infty} A_f^{-1}(r)dr < \infty \tag{3.29}$$

onde $A_f(r) = Area_f(\partial B_p(r))$. Portanto, para $\bar{r} > 1$, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned} \bar{r} - 1 &= \int_1^{\bar{r}} A_f^{-\frac{1}{2}}(r) A_f^{\frac{1}{2}}(r)dr \\ &\leq \left(\int_1^{\bar{r}} A_f^{-1}(r)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{\bar{r}} A_f(r)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(Vol_f(B_p(\bar{r})))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Portanto, para todo $\bar{r} \geq 2$, temos

$$Vol_f(B_p(\bar{r}))^{\frac{1}{2}} \geq c\bar{r}, \tag{3.31}$$

onde c é uma constante. Isto nos fornece o resultado desejado. $\square$

Na sequência, provamos que no caso $\mu = 0$, a hipótese na função potencial considerada no Teorema 3 por Barros, Batista e Ribeiro Jr. (2015a) pode ser removida. Mais precisamente, temos a seguinte estimativa para o crescimento de volume das bolas geodésicas em uma variedade quasi-Einstein expanding não-compacta.

Teorema 3.3.2 *Seja $\left(M^n, g, f\right)$ uma variedade quasi-Einstein expanding, completa não-compacta com $m \in (1, \infty)$ e $\mu = 0$. Então existem constantes positivas c e r_0 tal que para qualquer $r > r_0$*

$$Vol(B_p(r)) \geq ce^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{m-1}}r}. \tag{3.32}$$

Demonstração: Começamos combinando o traço da equação fundamental (1.3) com (3.9) para deduzir

$$R+\frac{m-1}{m}|\nabla f|^2+(m-n)\lambda=m\mu e^{\frac{2f}{m}}. \tag{3.33}$$

Relembrando que para $\lambda<0$ temos $R\geq\lambda n$, e como estamos no caso em que $\mu=0$, obtemos

$$|\nabla f|\leq\frac{m}{\sqrt{m-1}}\sqrt{-\lambda}. \tag{3.34}$$

Segue-se daqui que

$$-f(x)\leq\frac{m}{\sqrt{m-1}}\sqrt{-\lambda}r(x)+c_1. \tag{3.35}$$

Por outro lado, por meio de (1.3) é fácil mostrar que

$$\Delta e^{-f}=(-\Delta f+|\nabla f|^2)e^{-f}=-\lambda me^{-f} \tag{3.36}$$

Integrando (3.36) sobre $B_p(r)$ e em seguida, usando (3.34) obtemos

$$-\lambda m\int_{B_p(r)}e^{-f}d\sigma=\int_{B_p(r)}\Delta e^{-f}d\sigma=\int_{\partial B_p(r)}\frac{\partial}{\partial\eta}(e^{-f})ds\leq\frac{m\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{m-1}}\int_{\partial B_p(r)}e^{-f}ds. \tag{3.37}$$

Agora, definindo

$$\psi(r):=Vol_f(B_p(r))=\int_{B_p(r)}e^{-f}d\sigma. \tag{3.38}$$

Podemos usar (3.37) para obter

$$\psi'(r)\geq\sqrt{-\lambda(m-1)}\psi(r). \tag{3.39}$$

Então, integrando esta desigualdade de 1 a r, deduzimos

$$\psi(r)=\int_{B_p(r)}e^{-f}d\sigma\geq ce^{\sqrt{-\lambda(m-1)}r}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} Ce^{m\sqrt{\frac{-\lambda}{m-1}}r}Vol(B_p(r)) &\geq \sup_{B_p(r)} e^{-f}\int_{B_p(r)} d\sigma \\ &\geq \int_{B_p(r)} e^{-f}d\sigma \\ &\geq ce^{\sqrt{-\lambda(m-1)}r}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde usamos a Eq. (3.35). Isto nos diz que (3.40) pode ser escrito como

$$Vol(B_p(r)) \geq ce^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{m-1}}r}. \tag{3.41}$$

O que finaliza a prova do teorema. □

3.4 Variedades quasi-Einstein Bach-flat

O tensor de Bach em uma variedade Riemanniana (M^n,g), $n \geq 4$, foi introduzido para o estudo da relatividade conforme por Bach (1921), ele é definido em termos das componentes W_{ikjl} do tensor de Weyl como a seguir:

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_i{}^k{}_j{}^l, \tag{3.42}$$

enquanto para $n = 3$, ele é dado por

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij}, \tag{3.43}$$

onde C_{ijk} denota o tensor de Cotton. Dizemos que (M^n,g) é Bach-*flat* quando $B_{ij} = 0$. É um cálculo direto checar que métricas localmente conformemente *flat* bem como métricas Einstein são Bach-*flat*. Além disso, para dimensão $n = 4$, é bem conhecido que a hipótese *half*-conformemente *flat* ou localmente conformemente a uma variedade Einstein implica Bach-*flat*. Entretanto, Leistner and Nurowski (2010) obtiveram uma grande classe de exemplos de métricas Bach-*flat* que não são localmente conformemente Einstein. Para mais detalhes, ver (BESSE, 2007).

Recentemente, Cao e Chen (2013) obtiveram uma forte classificação para sólitons de Ricci *shrinking* gradiente sob a hipótese que a métrica é Bach-*flat*. Em seguida, Cao *et al.* (2014) mostraram que qualquer sóliton de Ricci *steady* n-dimensional $(n \geq 4)$ completo e Bach-*flat* com curvatura de Ricci positiva tal que a curvatura escalar R atinge seu máximo em algum ponto interior deve ser isométrica a um sóliton de Bryant. Para mais detalhes, recomendamos Cao e Chen (2012, 2013) e Cao *et al.* (2014).

À luz dos resultados anteriores, é natural perguntar o que ocorre em variedades quasi-Einstein. Como foi previamente mencionado uma variedade quasi-Einstein é compacta se, e somente se, $\lambda > 0$ (shrinking). Nesse caso, Chen e He (2013) provaram que uma variedade quasi-Einstein compacta e Bach-*flat* é Einstein ou um quociente finito de um produto *warped* com fibra Einstein $(n-1)$-dimensional. Nessa seção, principalmente inspirados nas ideias desenvolvidas por Cao e Chen (2012), Cao *et al.* (2014), focamos nossa atenção em variedades quasi-Einstein não-triviais, *steady* e Bach-*flat*. Em particular, a variedade deve ser não-compacta. Mais precisamente, obtemos um resultado de rigidez para variedades quasi-Einstein *steady* Bach-*flat* não-compactas com curvatura de Ricci positiva. Um ingrediente crucial que deve ser enfatizado é a estimativa de *pinching* linear obtida para a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$ no Lema 3.4.3. Antes de mostrarmos nossos principais resultados, apresentaremos alguns resultados preliminares.

3.4.1 Lemas chaves

Nesta seção, apresentamos alguns lemas que serão úteis na prova dos resultados principais. Começamos relembrando que o tensor curvatura de Weyl W_{ijkl} é definido pela seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\big(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\big) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}\big), \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde R_{ijkl} denota o tensor curvatura de Riemann. Além disso, o tensor de Cotton C_{ijk} é dado por

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\big(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}\big). \tag{3.45}$$

É fácil checar que C_{ijk} é anti-simétrico nos dois primeiros índices e traço-livre em qualquer dois índices. Também mencionamos que W_{ijkl} e C_{ijk} estão relacionados como a seguir:

$$-\frac{(n-3)}{(n-2)}C_{ijk} = \nabla^l W_{ijkl}. \tag{3.46}$$

Além disso, levando em conta (3.46), podemos estender a definição do tensor de Bach para $n \geq 3$ por

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(\nabla^k C_{kij} + R_{kl}W_{ikjl}\big). \tag{3.47}$$

Desde que $W \equiv 0$ em dimensão três, para $n = 3$ temos

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij}.$$

Seguindo a notação empregada por Chen e He (2013), no espírito de Cao e Chen (2013), relembramos que o 3-tensor covariante D é definido por

$$\begin{aligned} D_{ijk} &= \frac{1}{n-2}(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}(R_{il}\nabla^l f g_{jk} - R_{jl}\nabla^l f g_{ik}) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\nabla_i f - g_{ik}\nabla_j f). \end{aligned} \tag{3.48}$$

É fácil ver que o tensor D_{ijk} é anti-simétrico nos dois primeiros índices e traço-livre em quaisquer dois índices:

$$D_{ijk} = -D_{jik} \text{ and } g^{ij}D_{ijk} = g^{ik}D_{ijk} = 0. \tag{3.49}$$

Os próximos resultados, obtidos por Chen e He (2013), são verdadeiros em uma variedade quasi-Einstein sem a necessidade da hipótese de compacidade, e são úteis na prova dos resultados principais.

O lema a seguir mostra a relação entre os tensores D, C e W em uma variedade m-quasi-Einstein.

Lema 3.4.1 (Chen e He (2013)) *Seja (M^n, g, f) uma variedade quasi-Einstein. Então*

$$C_{ijk} = \frac{m+n-2}{m}D_{ijk} - W_{ijkl}\nabla^l f. \tag{3.50}$$

Precisamos também do seguinte resultado a respeito da geometria das superfícies de nível em uma variedade quasi-Einstein:

Lema 3.4.2 (Chen e He (2013)) *Seja (M^n, g, f) uma variedade quasi-Einstein. Assuma que Σ é um conjunto de nível de f com $\nabla f(p) \neq 0$. Então:*

$$|D|^2 = \frac{2|\nabla f|^4}{(n-2)^2}\sum_{a,b=2}^{n}|h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{m^2}{2(n-1)(n-2)(m-1)^2}|\nabla^\Sigma R|^2, \tag{3.51}$$

onde h_{ab} denota a segunda forma fundamental de Σ e H sua curvatura média.

Do lema anterior, temos que se o tensor D é identicamente nulo, então a geometria das superfícies de nível da função potencial são bastante rígidas.

Proposição 3.4.1 (Chen e He (2013)) *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$ uma variedade quasi-Einstein com $D_{ijk} = 0$. Seja c um valor regular de f e $\Sigma = \{p \in M \mid f(p) = c\}$ uma hipersuperfície de nível de f. Consideremos $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e escolha um referencial ortonormal $\{e_2, ..., e_n\}$ tangente a Σ. Então:*

1. *a curvatura escalar* R *e* $|\nabla f|^2$ *de* (M^n, g, f) *são constantes em* Σ;
2. $R_{1a} = 0$ *para* ≥ 2 *e* e_1 *é um autovetor do Ric*;
3. *em* Σ, *o tensor de Ricci tem um único autovalor ou dois autovalores distintos com multiplicidade* 1 *e* $n-1$, *além disso, o autovalor com multiplicidade* 1 *é na direção de* ∇f;
4. *a segunda forma fundamenal* h_{ab} *de* Σ *é* $h_{ab} = \frac{H}{n-1} g_{ab}$;
5. *a curvatura média* H *é constante em* Σ;
6. $R_{1abc} = 0$, *para* $a, b, c \in \{2, ..., n\}$.

É importante lembrar algumas equações fundamentais para a teoria de variedades quasi-Einstein. Primeiramente, para a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$, levando em conta as Eq. (3.8) e (3.7), é fácil obter

$$\frac{u^2}{m}(R - \lambda n) + (m-1)|\nabla u|^2 = -\lambda u^2 + \mu \tag{3.52}$$

O seguinte resultado nos dá uma estimativa para a curvatura escalar em uma variedade quasi-Einstein não-compacta:

Teorema 3.4.1 (Wang (2012a)) *Seja* (M^n, g, f) *uma variedade quasi-Einstein com* $\lambda \leq 0$. *Então* $R \geq \lambda n$.

Em particular, para uma variedade quasi-Einstein *steady* temos que $R \geq 0$, substituindo isso na Eq. (3.52), obtemos

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{\mu}{m-1} \tag{3.53}$$

e também

$$u^2 R \leq m\mu. \tag{3.54}$$

Na sequência, investigamos o comportamento assintotíco da função $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Mais precisamente, provamos uma estimativa de *pinching* que desempenha um papel central neste trabalho.

Lema 3.4.3 *Seja* $(M^n, g, f, m > 1)$ *uma variedade quasi-Einstein steady, completa e não-compacta. Suponhamos que a curvatura de Ricci seja positiva e que* f *tem pelo menos um ponto crítico. Então, existem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tal que a função* $u = e^{-\frac{f}{m}}$ *satisfaz a seguinte estimativa:*

$$c_1 r(x) - c_2 \leq u(x) \leq \sqrt{\frac{\mu}{m-1}} r(x) + |u(p)|, \tag{3.55}$$

onde p é um ponto crítico de f e $r(x) = d(x,p)$ é a função distância a p.

Demonstração: A prova é inspirada na Proposição 2.3 de Cao e Chen (2012). Primeiramente, note que pela estimativa (3.53), a cota superior em (3.55), de fato ocorre em variedades quasi-Einstein *steady* em geral.

Agora, tratamos do limite inferior. Assumimos que p é um ponto crítico de f. Logo, levando em conta que M^n tem curvatura de Ricci positiva e $u > 0$, imediatamente deduzimos de (3.6) que u é uma função estritamente convexa. Consideremos agora uma geoésica minimizante normalizada $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq s_0$, para $s_0 > 0$ suficientemente grande, partindo do ponto $p = \gamma(0)$. Denote por $X(s) = \dot{\gamma}(s)$ o vetor tangente unitário ao longo de γ e $\dot{u} = \nabla_X u(\gamma(s))$. Com essas notações em mente, podemos usar, (3.6) para obter

$$\nabla_X \dot{u} = \nabla_X \nabla_X u = \frac{u}{m} Ric(X,X). \tag{3.56}$$

Lembrando que $\nabla u = -\frac{u}{m}\nabla f$, segue-se que um ponto crítico de f é também um ponto crítico de u. Portanto, integrando (3.56) ao longo de γ, para $s \geq 1$, obtemos

$$\dot{u}(\gamma(s)) = \int_0^s \frac{u}{m} Ric(X,X) ds \geq \int_0^1 \frac{u}{m} Ric(X,X) ds \geq c_1, \tag{3.57}$$

onde

$$c_1 = \frac{c}{m} \min_{B_p(1)} u(x)$$

e $c > 0$ é o ínfimo dos autovalores da curvatura de Ricci na bola geodésica unitária $B_p(1)$. Prosseguindo, integrando (3.57) de 1 a s_0 obtemos

$$\begin{aligned} u(\gamma(s_0)) &= \int_1^{s_0} \dot{u}(s) ds + u(\gamma(1)) \\ &\geq c_1 s_0 - c_1 + u(\gamma(1)) \\ &\geq c_1 s_0 - c_2, \end{aligned}$$

provando o que queríamos. $\square$

Como uma consequência imediata do Lema 3.4.3 temos o seguinte resultado:

Corolário 3.4.1 *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$ uma variedade quasi-Einstein completa, steady, não-compacta com curvatura de Ricci positiva. Suponha que existe um ponto $p \in M$ tal que $\nabla f(p) = 0$. Então M^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Da Eq. (3.55) temos imediatamente que u é uma função própria. Além disso, a Eq. (3.6) nos dá

$$\frac{u}{m}Ric = \nabla^2 u,$$

desde que $Ric > 0$ por hipótese, temos que u é uma função estritamente convexa e então é bem conhecido que a existência de uma tal função implica que M^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. $\square$

Agora, usamos o Lema 3.4.3 para provar o resultado principal desta seção. Ele desempenha um papel fundamental na prova do Teorema 3.4.2.

Lema 3.4.4 *Seja $(M^n, g, f, m > 1)$, $n \geq 4$, uma variedade quasi-Einstein steady, não-compacta e Bach-flat com curvatura de Ricci positiva tal que f tem pelo menos um ponto crítico. Então o tensor D é identicamente nulo.*

Demonstração: Primeiramente, combinamos (3.47) e (3.50) para obter

$$\begin{aligned}(n-2)B_{ij} &= \nabla^k C_{kij} + W_{ikjl}R_{kl} \\ &= \nabla^k\left(\frac{m+n-2}{m}D_{kij} - W_{kijl}\nabla^l f\right) + W_{ikjl}R_{kl} \\ &= \frac{m+n-2}{m}\nabla^k D_{kij} - (\nabla^k W_{kijl})\nabla^l f - W_{kijl}\nabla^k\nabla^l f + W_{ikjl}R^{kl}.\end{aligned}$$

Então, usando (1.3) e (3.46), obtemos

$$\begin{aligned}(n-2)B_{ij} &= \frac{m+n-2}{m}\nabla^k D_{kij} + \frac{n-3}{n-2}C_{lji}\nabla^l f \\ &\quad -\frac{1}{m}W_{kijl}\nabla^k f\nabla^l f.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Relembremos que $\nabla u = -\frac{1}{m}u\nabla f$, substituindo isto em (3.58), temos

$$(n-2)B_{ij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3 = \frac{m+n-2}{m}(\nabla^k D_{kij})\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3. \tag{3.59}$$

Por outro lado, um cálculo direto dá

$$\begin{aligned}\nabla^k(D_{kij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3) &= (\nabla^k D_{kij})\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3 + D_{kij}(\nabla^k\nabla^i u)\nabla^j u e^{-u}u^3 \\ &\quad + D_{kij}\nabla^i u(\nabla^k\nabla^j u)e^{-u}u^3 \\ &= (\nabla^k D_{kij})\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3 + D_{kij}\left(\frac{u}{m}R^{ki}\right)\nabla^j u e^{-u}u^3 \\ &\quad + D_{kij}\left(\frac{u}{m}R^{kj}\right)\nabla^i u e^{-u}u^3,\end{aligned}$$

onde nós temos usado a Eq. (3.6) na última etapa. Portanto, retornando a Eq. (3.59) temos

$$\begin{aligned}(n-2)B_{ij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3 &= \frac{m+n-2}{m}\nabla^k(D_{kij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3)\\ &-\frac{m+n-2}{m^2}D_{kij}e^{-u}u^4(R^{ki}\nabla^j u+R^{kj}\nabla^i u). \qquad (3.60)\end{aligned}$$

Note que $\nabla u = -\frac{u}{m}\nabla f$ substituido em (3.48) nos dá

$$\begin{aligned}-\frac{u}{m}D_{ijk} &= \frac{1}{n-2}(R_{jk}\nabla_i u - R_{ik}\nabla_j u)\\ &+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\Big[R_{il}\nabla^l u g_{jk} - R_{jl}\nabla^l u g_{ik}\\ &-R(g_{jk}\nabla_i u - g_{ik}\nabla_j u)\Big]. \qquad (3.61)\end{aligned}$$

Além disso, desde que o tensor D é anti-simétrico nos dois primeiros índices, é fácil ver que $D_{kij}R^{ki}\nabla^j u = 0$ e então, comparando com (3.61), inferimos

$$\begin{aligned}D_{kij}(R^{ki}\nabla^j u+R^{kj}\nabla^i u) &= \frac{1}{2}D_{kij}R^{kj}\nabla^i u - \frac{1}{2}D_{ikj}R^{kj}\nabla^i u\\ &= -\frac{1}{2}D_{kij}(R^{ij}\nabla^k u - R^{kj}\nabla^i u)\\ &= \frac{n-2}{2m}u|D|^2. \qquad (3.62)\end{aligned}$$

A seguir, integrando (3.60) sobre a bola $B_p(s)$, usamos (3.62) junto com o teorema da divergência para deduzir

$$\begin{aligned}\int_{B_p(s)} B(\nabla u,\nabla u)e^{-u}u^3 dV_g &= \frac{m+n-2}{m(n-2)}\Big[\int_{\partial B_p(s)} D_{kij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^3\nu_k d\sigma\\ &-\frac{n-2}{2m^2}\int_{B_p(s)} u^5|D|^2 e^{-u}dV_g\Big], \qquad (3.63)\end{aligned}$$

onde ν denota o campo unitário normal a $\partial B_p(s)$. Além disso, desde que g tem curvatura de Ricci positiva, então $|R_{ij}| \leq R$. Isso juntamente com (3.61) dá

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_p(s)} uD_{kij}\nabla^i u\nabla^j u e^{-u}u^2\nu_k d\sigma\right| &\leq C\int_{\partial B_p(s)}|\nabla u|^3(|R_{ij}|+R)u^2 e^{-u}d\sigma\\ &\leq 2C\left(\sqrt{\frac{\mu}{m-1}}\right)^3\int_{\partial B_p(s)} u^2 R e^{-u}d\sigma\\ &\leq 2C\left(\sqrt{\frac{\mu}{m-1}}\right)^3 m\mu\int_{\partial B_p(s)} e^{-u}d\sigma, \qquad (3.64)\end{aligned}$$

onde temos usado (3.53) e (3.54). Mas, sabemos de (3.55) que

$$-u(x) \leq -c_1 r(x) + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas e r é a função distância. Disso, por (3.64) temos

$$\left| \int_{\partial B_p(s)} u D_{kij} \nabla^i u \nabla^j u e^{-u} u^2 \nu_k d\sigma \right| \leq C_1 e^{-s} Area(\partial B_p(s)). \tag{3.65}$$

A hipótese de curvatura de Ricci positiva permite-nos usar o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov para deduzir

$$Area(\partial B_p(s)) \leq C_2 s^{n-1}.$$

Logo, segue-se de (3.65) que

$$\left| \int_{\partial B_p(s)} u D_{kij} \nabla^i u \nabla^j u e^{-u} u^2 \nu_k d\sigma \right| \leq C_3 e^{-s} s^{n-1}.$$

Portanto, fazendo $s \to +\infty$ na Eq. (3.63) obtemos

$$\int_M B(\nabla u, \nabla u) e^{-u} u^3 dV_g = -\frac{m+n-2}{2m^3} \int_M u^5 |D|^2 e^{-u} dV_g.$$

Finalmente, desde que M^n é Bach-*flat* e $u > 0$, então $D_{ijk} = 0$. O que finaliza a prova do lema. $\square$

3.4.2 Resultados principais

Depois desses resultados preliminares, temos as ferramentas para o provar o próximo resultado.

Teorema 3.4.2 *Seja* $(M^n, g, f, m > 1)$, $n \geq 4$, *uma variedade quasi-Einstein steady Bach-flat não-compacta com curvatura de Ricci positiva tal que* f *tem pelo menos um ponto crítico. Então* M^n *tem tensor de Weyl harmônico e* $W_{ijkl} \nabla^l f = 0$.

Demonstração: Primeiramente, desde que M^n é Bach-flat segue do Lema 3.4.4 que $D_{ijk} = 0$. Portanto, podemos usar (3.50) para obter

$$C_{ijk} = -W_{ijkl} \nabla^l f. \tag{3.66}$$

Ressaltamos que uma métrica quasi-Einstein é real analítica (cf. Proposição 2.4 de He, Petersen e Wylie (2012)). Portanto, levando em conta que (3.66) bem como (3.46), é suficiente mostrar que o tensor de Cotton C_{ijk} se anula nos pontos $p \in M^n$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$. Por esse motivo, consideremos um ponto regular $p \in M^n$, com conjunto de nível associado Σ. Além disso, escolha coordenadas locais $(\theta^2, \ldots, \theta^n)$ em Σ e decomponha a métrica em M^n nas coordenadas locais $(f, \theta^2, \ldots, \theta^n)$ como a seguir:

$$g = \frac{1}{|\nabla f|^2} df^2 + g_{ab}(f,\, \theta) d\theta^a d\theta^b.$$

Fazendo $\partial_f = \partial_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ imediatamente obtemos

$$\nabla_1 f = 1 \ and\ \nabla_a f = 0,\ for\ a \geq 2.$$

Da Eq. (3.66) e das simetrias do tensor de Weyl temos $C_{ij1} = 0$. A seguir, pela Proposição 3.4.1, conseguimos $R_{1a} = 0$ e $R_{1abc} = 0$ para quaisquer inteiros $2 \leq a, b, c \leq n$. Logo, é fácil checar que

$$W_{abc1} = R_{abc1} = 0$$

e usamos mais uma vez que (3.66) para deduzir

$$C_{abc} = -W_{abc1}|\nabla f|^2 = 0.$$

Afirmamos agora que $C_{1ab} = 0$ para todo $a, b \geq 2$. Para provar tal afirmação, observe que

$$\begin{aligned} C_{1ab} &= -W_{1abl}\nabla^l f = -W_{1abi}g^{il}\nabla_l f \\ &= -W_{1ab1}|\nabla f|^2 \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2} W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b). \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.44) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla f|^2} W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|^2} R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} g_{ab} \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)} \left(\frac{1}{|\nabla f|^2} Ric(\nabla f, \nabla f) g_{ab} + R_{ab} \right). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Analisamos agora a segunda forma fundamental nas coordenadas locais $(f, \theta^2, \ldots, \theta^n)$. Nesse sentido, verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} h_{ab} = \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \nabla_a \partial_b \rangle &= \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \Gamma^1_{ab}\partial_f \rangle \\ &= \frac{\Gamma^1_{ab}}{|\nabla f|}. \end{aligned}$$

Além disso, um cálculo direto garante

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{ab} &= \frac{1}{2}g^{1j}\big(\partial_a g_{bj} + \partial_b g_{ja} - \partial_j g_{ab}\big)\\ &= \frac{1}{2}g^{11}\big(\partial_a g_{b1} + \partial_b g_{1a} - \partial_f g_{ab}\big)\\ &= -\frac{1}{2}\nabla f(g_{ab}).\end{aligned}$$

Portanto, segue-se que

$$h_{ab} = -\frac{\nabla f}{2|\nabla f|}(g_{ab}). \tag{3.68}$$

Prosseguindo, invocamos a Proposição 3.4.1 para deduzir que $|\nabla f|$ é constante em Σ, o que imediatamente dá

$$[\partial_a, \nabla f] = 0, \tag{3.69}$$

e então $\left\langle \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \partial_a \right\rangle = 0$, o que implica $\nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = 0$. Nessa configuração, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \nabla_a \partial_b - \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f\rangle\\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_{\nabla f}\big(\nabla^\Sigma_a \partial_b + \nabla^\perp_a \partial_b\big), \nabla f\rangle - \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f\rangle\\ &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(h_{ab}) + h_{ac}h^c_b,\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{\nabla f}{(n-1)|\nabla f|}Hg_{ab} - \frac{H^2}{(n-1)^2}g_{ab}. \tag{3.70}$$

Em particular, traçando (3.70) com respeito aos índices a e b obtemos

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}H - \frac{H^2}{(n-1)}.$$

Substituindo isso em (3.70) obtemos

$$R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{(n-1)}g_{ab}. \tag{3.71}$$

Usando novamente o item (3) da Proposição 3.4.1, podemos considerar $\frac{1}{|\nabla f|^2}Ric(\nabla f, \nabla f) = \eta$ e $Ric(\partial_a, \partial_b) = \kappa g_{ab}$, para $a, b \geq 2$, onde η e κ são os autovalores do tensor de Ricci. Portanto, substituindo (3.71) em (3.67) deduzimos

$$\begin{aligned} C_{1ab} &= \frac{1}{|\nabla f|^2}W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\frac{Ric(\nabla f,\nabla f)}{(n-1)}g_{ab} - \frac{1}{|\nabla f|^2}\frac{Ric(\nabla f,\nabla f)}{(n-2)}g_{ab} \\ &\quad -\frac{R_{ab}}{(n-2)} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\ &= \frac{\eta}{(n-1)}g_{ab} - \frac{\eta}{(n-2)}g_{ab} - \frac{\kappa}{(n-2)}g_{ab} \\ &\quad + \frac{\eta+(n-1)\kappa}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação.

Portanto, concluímos que $C_{ijk} = 0$ nos pontos onde $\nabla f(p) \neq 0$. Enquanto nos pontos onde $\nabla f(p) = 0$, o Lema 3.4.1 permite-nos obter a mesma conclusão. Logo, $C_{ijk} \equiv 0$ em M^n. Finalizando a prova do teorema. $\square$

No mesmo sentido, observamos que variedades de dimensão 4 têm um comportamento especial; ver Besse (2007) para informações detalhadas sobre esta dimensão específica. Em dimensão 4, temos o seguinte resultado, que é claramente mais forte:

Teorema 3.4.3 *Seja $(M^4, g, f, m > 1)$ uma variedade quasi-Einstein steady Bach-flat não-compacta de dimensão 4 com curvatura de Ricci positiva tal que f tem pelo menos um ponto crítico. Então M^4 é localmente conformemente flat.*

Demonstração: Primeiramente, invocamos o Teorema 3.4.2 para concluir que $C \equiv 0$ e $W_{ijkl}\nabla^l f = 0$. Além disso, consideremos um ponto $p \in M^4$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$. Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ com $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ no ponto p, temos

$$W_{ijk1} = 0 \tag{3.72}$$

para todo $1 \leq i, j, k \leq 4$. Afirmamos que $W_{ijkl} = 0$ sempre que $\nabla f(p) \neq 0$. Com efeito, usando a propriedade que o tensor de Weyl tem traço nulo, em qualquer par de índices, obtemos

$$W_{2121} + W_{2222} + W_{2323} + W_{2424} = 0.$$

Usando a propriedade de antisimetria do tensor de Weyl, bem como a Eq. (3.72), temos que $W_{2323} = -W_{2424}$. De maneira análoga, obtemos $W_{2424} = -W_{3434} = W_{2323}$. O que implica que $W_{2323} = 0$. Além disso,

$$W_{1314} + W_{2324} + W_{3334} + W_{4344} = 0.$$

Por conseguinte, $W_{2324} = 0$. Isso mostra que $W_{abcd} = 0$ a menos que os índices a, b, c e d sejam todos distintos. Como a variedade tem dimensão 4, segue-se a afirmação por (3.72). Então, desde que g é analítica, M^4 é localmente conformalmente flat. Isto é o que queríamos provar. □

A seguir, como uma aplicação dos Teoremas 3.4.2 e 3.4.3, juntamente com o Teorema 1.2 de He, Petersen e Wylie (2012), obtemos o seguinte resultado de classificação:

Corolário 3.4.2 *Seja* $(M^n, g, f, m > 1)$, $n \geq 4$, *uma variedade quasi-Einstein steady, Bach-flat e não-compacta com curvatura de Ricci positiva tal que* f *tem pelo menos um ponto crítico. Então* (M^n, g) *é um produto warped com*

$$g = dt^2 + \psi^2(t) g_{_L} \;\; e \;\; f = f(t),$$

onde $g_{_L}$ *é Einstein com curvatura de Ricci não-negativa. Além disso, a fibra tem curvatura seccional constante se* $n = 4$.

4 MÉTRICAS CRÍTICAS DE MIAO-TAM

Este capítulo é baseado no artigo *Critical Metrics of the Volume Functional on Compact Three-Manifolds with Smooth Boundary* (BATISTA *et al.*, 2016a), escrito pelo autor em parceria com R. Batista, R. Diógenes e E. Ribeiro Jr., o qual foi aceito para publicação no *The Journal of Geometric Analysis*. O objetivo principal é estimar a área do bordo de uma métrica crítica de Miao-Tam em variedades compactas de dimensão 3. Além disso, obtemos uma fórmula tipo-Böchner que nos permite mostrar que uma métrica crítica de Miao-Tam em uma variedade compacta tridimensional deve ser isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

4.1 Definições e resultados auxiliares

Nesta seção, apresentamos algumas preliminares que são úteis para a demonstração dos resultados principais. Primeiramente, relembramos que a equação fundamental de uma métrica crítica de Miao-Tam (2.17) torna-se

$$-(\Delta f)g + Hessf - fRic = g. \tag{4.1}$$

Por simplicidade, reescrevemos a equação (4.1) na linguagem tensorial como a seguir

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = g_{ij}. \tag{4.2}$$

Em particular, tomando o traço em (4.1), temos

$$(n-1)\Delta f + Rf = -n. \tag{4.3}$$

Disto, é fácil checar que

$$f\mathring{Ric} = Hess\, f + \frac{Rf+n}{n(n-1)}g, \tag{4.4}$$

onde $\mathring{T}$ denota o tensor sem traço de T. Temos também

$$f\mathring{Ric} = \mathring{Hess}f. \tag{4.5}$$

O seguinte lema também será usado adiante.

Lema 4.1.1 (Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015b)) *Seja $\left(M^n, g, f\right)$ uma métrica crítica de Miao-Tam. Então*

$$f\left(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}\right) = R_{ijks}\nabla^s f + \frac{R}{n-1}\left(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}\right) - \left(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}\right).$$

Relembramos agora o seguinte lema bem conhecido:

Lema 4.1.2 *Seja T um $(0,2)$-tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) então*

$$div(T(\phi Z)) = \phi(divT)(Z) + \phi\langle\nabla Z, T\rangle + T(\nabla\phi, Z),$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função suave ϕ em M.

Também relembramos que se $\Psi : \Sigma \to M$ é uma imersão isométrica e h denota sua segunda forma fundamental, temos a Equação de Gauss:

$$R^{\Sigma}_{ijkl} = R_{ijkl} - h_{il}h_{jk} + h_{ik}h_{jl}, \tag{4.6}$$

onde R^{Σ}_{ijkl} e R_{ijkl} denotam os tensores curvatura de Σ e M, respectivamente. Para mais detalhes, ver (CHOW *et al.*, 2010).

Na sequência, calculamos o comutador do Laplaciano e Hessiana agindo em funções. Como ele é essencial na demonstração do Teorema 4.3.2, incluímos sua prova aqui. Uma prova detalhada pode ser encontrada em Viaclovsky (2007).

Lema 4.1.3 *Seja $f \in C^4(M)$. Então*

$$\begin{aligned}(\Delta\nabla^2 f)_{ij} &= \nabla^2_{ij}\Delta f + (R_{jp}g_{ik} + R_{ip}g_{jk} - 2R_{ikjp})\nabla^k\nabla^p f \\ &\quad + (\nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi} - \nabla_p R_{ij})\nabla^p f,\end{aligned}$$

onde ∇^2 também denota o operador Hessiana.

Demonstração: De fato, usando a identidade de Ricci, não é difícil checar que

$$\begin{aligned}(\Delta\nabla^2 f)_{ij} &= g^{kl}\nabla_k\nabla_l\nabla_i\nabla_j f \\ &= g^{kl}\nabla_k[\nabla_i\nabla_l\nabla_j f + R_{lijp}\nabla^p f] \\ &= g^{kl}\nabla_k\nabla_i\nabla_j\nabla_l f + g^{kl}\nabla_k R_{lijp}\nabla^p f + g^{kl}R_{lijp}\nabla_k\nabla^p f \\ &= I + II,\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde

$$\begin{aligned}I &= g^{kl}\nabla_k\nabla_i\nabla_j\nabla_l f \\ &= g^{kl}[\nabla_i\nabla_k\nabla_j\nabla_l f + R_{kijp}\nabla^p\nabla_l f + R_{kilp}\nabla_j\nabla^p f] \\ &= g^{kl}[\nabla_i(\nabla_j\nabla_k\nabla_l f + R_{kjlp}\nabla^p f)] + R_{kijp}\nabla^p\nabla^k f + R_{ip}\nabla_j\nabla^p f \\ &= \nabla_i\nabla_j\Delta f + \nabla_i(R_{jp}\nabla^p f) - R_{ikjp}\nabla^k\nabla^p f + R_{ip}\nabla_j\nabla^p f,\end{aligned}$$

e o segundo termo é

$$\begin{aligned} II &= g^{kl}\nabla_k R_{lijp}\nabla^p f + g^{kl}R_{lijp}\nabla_k\nabla^p f \\ &= -g^{kl}\nabla_k R_{jpil}\nabla^p f + R_{lijp}\nabla^l\nabla^p f \\ &= -(\nabla_p R_{ji} - \nabla_j R_{pi})\nabla^p f - R_{iljp}\nabla^l\nabla^p f \\ &= -\nabla_p R_{ji}\nabla^p f + \nabla_j R_{pi}\nabla^p f - R_{ikjp}\nabla^k\nabla^p f. \end{aligned}$$

Aqui, usamos a identidade de Bianchi contraída uma vez. Reorganizando os termos, obtemos de (4.7) que

$$\begin{aligned} (\Delta\nabla^2 f)_{ij} &= \nabla_i\nabla_j\Delta f + \nabla_i R_{jp}\nabla^p f + R_{jp}\nabla_i\nabla^p f - R_{ikjp}\nabla^k\nabla^p f + R_{ip}\nabla_j\nabla^p f \\ &\quad -\nabla_p R_{ji}\nabla^p f + \nabla_j R_{pi}\nabla^p f - R_{ikjp}\nabla^k\nabla^p f \\ &= \nabla_i\nabla_j\Delta f + (R_{jp}g_{ik} + R_{ip}g_{jk} - 2R_{ikjp})\nabla^k\nabla^p f \\ &\quad +(\nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi} - \nabla_p R_{ij})\nabla^p f, \end{aligned}$$

que permite-nos completar a prova do lema. □

A seguir, deduzimos uma fórmula envolvendo o tensor de Cotton (2.5) de uma métrica crítica de Miao-Tam em variedades tridimensionais. Ela também tem um papel de destaque na prova do Teorema 4.3.2.

Lema 4.1.4 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam tridimensional. Então*

$$f^2|C|^2 = -4fC_{ijk}\nabla^i f \mathring{Ric}^{jk}. \tag{4.8}$$

Demonstração: Começamos invocando o Lema 4.1.1 e como (M^n, g) tem curvatura escalar constante, obtemos

$$fC_{ijk} = R_{ijkp}\nabla^p f + \frac{R}{2}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \tag{4.9}$$

Usando a decomposição de R_{ijkp}, temos

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= 2(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - R(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad +(g_{ik}R_{jp}\nabla^p f - g_{jk}R_{ip}\nabla^p f). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, substituindo o tensor de Ricci sem traço em (4.10) obtemos

$$fC_{ijk} = 2(\mathring{R}_{ik}\nabla_j f - \mathring{R}_{jk}\nabla_i f) + (\mathring{R}_{js}\nabla^s f g_{ik} - \mathring{R}_{is}\nabla^s f g_{jk}) \tag{4.11}$$

Levando em conta que C_{ijk} é anti-simétrico nos dois primeiros índices, temos

$$\begin{aligned}
-fC_{ijk}\mathring{R}^{jk}\nabla^i f &= -\frac{f}{2}(C_{ijk} - C_{jik})\mathring{R}^{jk}\nabla^i f \\
&= -\frac{f}{2}C_{ijk}\mathring{R}^{jk}\nabla^i f + \frac{f}{2}C_{ijk}\mathring{R}^{ik}\nabla^j f \\
&= fC_{ijk}\frac{1}{2}(\mathring{R}^{ik}\nabla^j f - \mathring{R}^{jk}\nabla^i f).
\end{aligned}$$

Finalmente, usando estes dados, junto com (4.11), e lembrando que C_{ijk} é traço livre em quaisquer dois indices, inferimos

$$\begin{aligned}
-fC_{ijk}\mathring{R}^{jk}\nabla^i f &= fC_{ijk}\left(\frac{1}{4}fC^{ijk} - \frac{1}{4}\left(\mathring{R}^{js}\nabla_s f g^{ik} - \mathring{R}^{is}\nabla_s f g^{jk}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}f^2|C|^2.
\end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração do lema. $\square$

4.2 Lemas chaves

No que se segue, assumimos que (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, conexa e com bordo conexo ∂M. Sob essas condições, desde que $f^{-1}(0) = \partial M$ deduzimos que f não muda de sinal em M. De agora em diante, assumiremos também que f é não-negativa. Em particular, $f > 0$ no interior de M. Além disso, nos pontos regulares de f, o campo vetorial $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é normal a ∂M e também $|\nabla f| \neq 0$ ao longo do ∂M. Portanto, a condição do bordo, junto com (4.1), implica

$$\begin{aligned}
X\left(|\nabla f|^2\right) &= 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f\rangle \\
&= 2\nabla^2 f(X, \nabla f) \\
&= -\frac{2}{n-1}\langle X, \nabla f\rangle = 0,
\end{aligned}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$. Logo, $|\nabla f|^2$ é constante ao longo de ∂M. Em particular, obtemos

$$\nabla_i \nabla_j f = -\frac{1}{n-1}g_{ij} \tag{4.12}$$

ao longo do ∂M.

Observação 4.2.1 *É interessante observar que, escolhendo coordenadas apropriadas (por exemplo, coordenadas harmônicas) concluimos que f e g são analíticas, ver por exemplo Teorema* 2.8 *de Corvino (2000) ou Proposição* 2.1 *de Corvino, Eichmair e Miao* (2013). *Logo, concluímos que f não pode se anular em conjunto aberto não-vazio. Como consequência, o conjunto dos pontos regulares é denso em M.*

Agora, seguindo a notação usada por Miao e Tam (2009), a segunda forma fundamental do ∂M é dada por

$$h_{ij} = \langle \nabla_{e_i} \nu, e_j \rangle, \tag{4.13}$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é um referencial ortonormal em ∂M. Logo,

$$h_{ij} = -\langle \nabla_{e_i} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, e_j \rangle = \frac{1}{(n-1)|\nabla f|} g_{ij}. \tag{4.14}$$

Portanto, a curvatura média é constante e então ∂M é totalmente umbílico.

Como uma consequência do Lemma 4.1.2, deduzimos a seguinte fórmula integral, a qual será útil na prova do Teorema 4.3.1.

Lema 4.2.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada e conexa com bordo suave ∂M e função potencial não-negativa f. Então*

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM_g = -\frac{1}{|\nabla f|} \int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dS. \tag{4.15}$$

Demonstração: Começamos escolhendo $T = \mathring{Ric}$, $Z = \nabla f$ and $\phi = 1$ no Lemma 4.1.2. Logo, como $(M^n,\, g)$ tem curvatura escalar constante, temos

$$\begin{aligned} div(\mathring{Ric}(\nabla f)) &= (div\mathring{Ric})(\nabla f) + \langle \mathring{Ric}, \nabla^2 f \rangle \\ &= f|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned}$$

Integrando sobre M e usando a fórmula de Stokes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM &= \int_M div(\mathring{Ric}(\nabla f)) dM \\ &= \int_{\partial M} \langle \mathring{Ric}(\nabla f), \nu \rangle dS. \end{aligned}$$

Agora, levando em conta que $f \geq 0$, temos $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Disso, segue-se que

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM = -\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dS,$$

onde usamos que $|\nabla f|$ é constante em ∂M. Isto finaliza a prova do lema. $\square$

Observação 4.2.2 *Note que se trocarmos a condição da função potencial ser não-negativa pela condição de função potencial ser não-positiva no Lemma* 4.2.1*, a Equação* (4.15) *torna-se*

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM = \frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dS.$$

A seguir, usamos a equação de Gauss (4.6) para obter o seguinte lema:

Lema 4.2.2 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada e conexa com bordo suave ∂M. Considere $e_n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, e tome qualquer referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ tangente a superfície de nível ∂M. Então, em ∂M, temos:*

$$R_{ij}^{\partial M} = R_{ij} - R_{injn} + \frac{n-2}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g_{ij},$$

onde $Ric^{\partial M}$ é o tensor de Ricci de $(\partial M, g_{|_{\partial M}})$.

Demonstração: Pela Equação de Gauss (4.6), para $1 \leq i, j \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\partial M} &= g^{kl} R_{ikjl}^{\partial M} \\ &= g^{kl}\left(R_{ikjl} - h_{il}h_{kj} + h_{ij}h_{kl}\right). \end{aligned}$$

Logo, usamos (4.14) para inferir

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\partial M} &= R_{ij} - R_{injn} - \frac{1}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g^{kl} g_{il} g_{kj} + \frac{1}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g^{kl} g_{ij} g_{kl} \\ &= R_{ij} - R_{ninj} - \frac{1}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g_{ij} + \frac{1}{(n-1)|\nabla f|^2} g_{ij} \\ &= R_{ij} - R_{injn} + \frac{n-2}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g_{ij}, \end{aligned}$$

como queríamos provar. $\square$

Sabemos dos exemplos 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 que as bolas geodésicas em espaços formas simplesmente conexos são métricas críticas de Miao-Tam. Logo, é natural perguntar se elas são os únicos exemplos levando em conta a condição de bordo. Nesse sentido, Miao e Tam (2009) obtiveram uma classificação para métricas críticas do funcional volume com bordo conexo e curvatura seccional não-positiva. Na sequência, obtemos uma classificação geral para métricas críticas de Miao-Tam sem a necessidade da hipótese sobre a curvatura seccional, a qual pode ser comparada com o Corolário 3 de Miao e Tam (2009).

Proposição 4.2.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa com bordo suave ∂M e função potencial não-negativa. Suponha que a curvatura escalar de $(\partial M, g_{|_{\partial M}})$ é constante. Então $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ é uma constante não-positiva ao longo de ∂M. Em particular, $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0$ se, e somente se, (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, or $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Tomando o traço no Lema 4.2.2 obtemos

$$\begin{aligned} R^{\partial M} &= g^{ij} R^{\partial M}_{ij} \\ &= g^{ij}\left(R_{ij} - R_{injn} + \frac{n-2}{(n-1)^2|\nabla f|^2} g_{ij}\right) \\ &= R - R_{nn} - R_{nn} + \frac{n-2}{(n-1)|\nabla f|^2}, \end{aligned}$$

onde $R^{\partial M}$ denota a curvatura escalar de $(\partial M, g_{|_{\partial M}})$. Segue-se disso que

$$2R_{nn} + R^{\partial M} = R + \frac{n-2}{(n-1)|\nabla f|^2}.$$

Ver também a Eq. (45) em Miao e Tam (2009).

A seguir, como $R^{\partial M}$ e $|\nabla f|$ são constantes ao longo do ∂M, deduzimos que R_{nn} é constante ao longo do ∂M. Logo, obtemos que $Ric(\nabla f, \nabla f)$ é também constante ao longo de ∂M. Levando em conta que M tem curvatura escalar constante, concluímos que $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ é constante ao longo de ∂M.

Prosseguindo, usamos o Lema 4.2.1 para inferir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dS \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)|\partial M|. \end{aligned}$$

Logo, obtemos $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq 0$.

Por outro lado, supondo $\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0$, podemos aplicar o Lema 4.2.1 para obter

$$\int_M f|\mathring{Ric}| dM_g = 0.$$

Desde que $f \geq 0$ temos $\mathring{Ric} \equiv 0$ on $M \setminus \partial M$. Claramente, por continuidade, $\mathring{Ric} \equiv 0$ em M. Isso implica que (M^n, g) é Einstein. Agora, é suficiente aplicar o Teorema 2.3.1 (ver o Teorema 1.1 de Miao e Tam (2011)) para concluir que (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, ou $\mathbb{S}^n$.

A recíproca é direta. Portanto, finalizamos a prova da proposição. $\square$

Observação 4.2.3 *Segue da observação* 4.2.2*, se mudarmos a condição de função potencial não-negativa pela condição de função potencial não-positiva a conclusão da proposição* 4.2.1 *é exatamente a mesma.*

4.3 Resultados principais

Antes de continuar, ressaltamos que a adjunta formal da linearização da curvatura escalar tem um papel fundamental em problemas relacionados a prescrição da função curvatura escalar. Também relembramos que uma variedade Riemanniana completa M^n com bordo ∂M (possivelmente vazio) é dita ser estática se ela admite uma solução não-trivial $\lambda \in C^\infty(M)$ para a equação

$$\mathfrak{L}_g^*(\lambda) = 0. \tag{4.16}$$

É bem conhecido que a existência de uma função potencial impõe muitas restrições a geometria da variedade diferenciável. Para mais detalhes, recomendamos Wald (2010).

Destacamos que Fischer e Marsden (1974) conjecturaram que uma esfera canônica é a única solução para a equação (4.16) em uma variedade compacta. Um contra-exemplo para a conjectura de Fischer-Marsden foi obtido quando g é conformemente *flat*, para mais detalhes, recomendamos Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983). Entretanto, um resultado clássico afirma que um hemisfério canônico tem a maior área de bordo possível entre as variedades estáticas tridimensionais com curvatura escalar positiva e bordo conexo. Mais precisamente, um resultado devido a Shen (1997) e Boucher, Gibbons e Horowitz (1984) afirma que o bordo ∂M de uma variedade estática compacta tridimensional com bordo conexo e curvatura escalar constante 6 deve ser uma esfera cuja área satisfaz a desigualdade

$$|\partial M| \leq 4\pi.$$

Além disso, a igualdade é verdadeira se, e somente se, M^3 é isométrico ao hemisfério canônico. Um resultado similar foi obtido por Hijazi *et al.* (2015).

Baseado no resultado acima, estimamos a área do bordo de uma variedade tridimensional satisfazendo (2.17). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam orientada e compacta com bordo conexo ∂M e curvatura escalar não-negativa. Então ∂M é uma esfera e*

$$|\partial M| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{4.17}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ é constante. Além disso, vale a igualdade em (4.17) se, e somente se, (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

Demonstração: Primeiramente, sabemos que (M,g) tem curvatura escalar constante. Portanto, se M tem curvatura escalar nula, podemos usar o príncipio do máximo fraco (ver Gilbarg e Trudinger (2015)), juntamente com (4.3), para concluir que a condição de bordo $f^{-1}(0) = \partial M$ implica que f é positiva em M (ver também o Teorema 7 em Miao e Tam (2009)). Mas, se M tem curvatura escalar positiva, a condição de bordo implica que f não muda de sinal. Logo, começamos assumindo que f é não-negativa. Nesse caso, usamos o Lema 4.2.1 para obter

$$\begin{aligned} \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM &= -\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M}\left(Ric(\nabla f,\nabla f) - \frac{R}{3}|\nabla f|^2\right)dS \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} Ric(\nabla f,\nabla f)dS + \frac{R}{3}|\nabla f||\partial M|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora, pela equação de Gauss (4.6) bem como (4.14) deduzimos

$$\begin{aligned} K &= R_{1212} - h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22} \\ &= R_{1212} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde K é a curvatura seccional de ∂M. Segue-se disso que

$$R_{11} = R_{1212} + R_{1313} = R_{1313} + K - \frac{1}{4|\nabla f|^2},$$

$$R_{22} = R_{2323} + K - \frac{1}{4|\nabla f|^2}$$

e

$$R_{33} = R_{1313} + R_{2323}.$$

Portanto, obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} R &= R_{11} + R_{22} + R_{33} \\ &= 2R_{1313} + 2R_{2323} + 2K - \frac{2}{4|\nabla f|^2}, \end{aligned}$$

o qual podemos escrever sucintamente como

$$R_{1313} + R_{2323} = \frac{R}{2} - K + \frac{1}{4|\nabla f|^2}. \tag{4.20}$$

Não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} Ric(\nabla f, \nabla f) &= |\nabla f|^2 R_{33} \\ &= |\nabla f|^2 (R_{1313} + R_{2323}). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Isto combinado com (4.20) nos dá

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{R}{2}|\nabla f|^2 - K|\nabla f|^2 + \frac{1}{4}. \tag{4.22}$$

Integrando (4.22) obtemos

$$\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} Ric(\nabla f, \nabla f) dS = \frac{R}{2}|\nabla f||\partial M| - |\nabla f|\int_{\partial M} K dS + \frac{1}{4|\nabla f|}|\partial M|. \tag{4.23}$$

Então, substituindo (4.23) em (4.18) obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM &= -\frac{R}{2}|\nabla f||\partial M| + |\nabla f|\int_{\partial M} K dS \\ &\quad -\frac{1}{4|\nabla f|}|\partial M| + \frac{R}{3}|\nabla f||\partial M|. \end{aligned}$$

Disso, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} K dS &= \frac{1}{|\nabla f|}\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM + \left(\frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}\right)|\partial M| \\ &\geq \left(\frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}\right)|\partial M|. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por conseguinte, desde que a curvatura escalar de M é não negativa, imediatamente deduzimos

$$\int_{\partial M} KdS > 0.$$

Portanto, usando o Teorema de Gauss-Bonnet, concluimos que ∂M é uma esfera.

A seguir, observe que $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ é uma constante positiva em (4.24). Logo, desde que ∂M é uma esfera podemos usar novamente o teorema de Gauss-Bonnet, junto com (4.24), para inferir

$$|\partial M| \leq \frac{4\pi}{C(R)}.$$

Em particular, de (4.24) vale a igualdade se, e somente se,

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM = 0.$$

Isso força a (M^3, g) ser Einstein. Agora, podemos usar o Teorema 2.3.1 para concluir que (M^3, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Como queríamos demonstrar.

Resta analisar quando f é não-positiva. Nesse caso, da prova do Lema 4.2.1 (ver também a Observação 4.2.2), não é difícil verificar que

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM = \frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} Ric(\nabla f, \nabla f) dS - \frac{R}{3}|\nabla f||\partial M|.$$

A partir daqui, a prova é análoga ao caso anterior. Em particular, obtemos

$$\int_{\partial M} KdS = -\frac{1}{|\nabla f|}\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM + \left(\frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}\right)|\partial M|. \tag{4.25}$$

Levando em conta que f é não-positiva, temos

$$\int_{\partial M} KdS \geq \left(\frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}\right)|\partial M|.$$

Para concluir, é suficiente seguir os argumentos usados nas etapas finais do primeiro caso. Isso finaliza a prova do teorema. $\square$

Na sequência, motivados por um resultado de Ambrozio (2015), obtemos uma fórmula tipo-Böchner para métricas críticas de Miao-Tam, a qual é similar a fórmula de Ambrozio

(2015) para métricas estáticas. Para a demonstração, usamos a fórmula envolvendo o comutador do Laplaciano e a Hessiana agindo em funções. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa, compacta e orientada com bordo suave ∂M. Então, temos:*

$$\frac{1}{2}div\left(f\nabla|\mathring{Ric}|^2\right) = \left(|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \frac{|C|^2}{2}\right)f + \left(R|\mathring{Ric}|^2 + 6tr(\mathring{Ric}^3)\right)f + \frac{3}{2}|\mathring{Ric}|^2, \tag{4.26}$$

onde C denota o tensor de Cotton e $\mathring{Ric}$ é o tensor de Ricci sem traço.

Demonstração: Primeiramente, note que

$$\frac{1}{2}div(f\nabla|\mathring{Ric}|^2) = \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2\rangle + \frac{f}{2}\Delta|\mathring{Ric}|^2. \tag{4.27}$$

Não é difícil checar que

$$\langle\nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2\rangle = 2\langle\nabla_{\nabla f}\mathring{Ric}, \mathring{Ric}\rangle$$

e

$$\begin{aligned}\Delta|\mathring{Ric}|^2 &= g^{ik}\nabla_i\nabla_k\left(\langle\mathring{Ric}, \mathring{Ric}\rangle\right)\\ &= 2g^{ik}\left(\langle\nabla_i\nabla_k\mathring{Ric}, \mathring{Ric}\rangle + \langle\nabla_k\mathring{Ric}, \nabla_i\mathring{Ric}\rangle\right).\end{aligned}$$

Do qual deduzimos

$$\frac{1}{2}div(f\nabla|\mathring{Ric}|^2) = \langle\nabla_{\nabla f}\mathring{Ric}, \mathring{Ric}\rangle + f|\nabla\mathring{Ric}|^2 + f\langle\Delta\mathring{Ric}, \mathring{Ric}\rangle. \tag{4.28}$$

Por outro lado, calculando o Laplaciano de (4.5) obtemos

$$(\Delta H\mathring{e}ssf)_{ij} = (\Delta f)\mathring{R}_{ij} + f(\Delta\mathring{Ric})_{ij} + 2\langle\nabla\mathring{R}_{ij}, \nabla f\rangle. \tag{4.29}$$

Disto, segue-se que

$$f(\Delta\mathring{Ric})_{ij} = (\Delta H\mathring{e}ssf)_{ij} + \frac{R}{2}f\mathring{R}_{ij} + \frac{3}{2}\mathring{R}_{ij} - 2\langle\nabla\mathring{R}_{ij}, \nabla f\rangle. \tag{4.30}$$

Lembramos que em dimensão 3, o tensor $W \equiv 0$. Logo, o tensor curvatura de Riemann R_{ikjp} tem a seguinte decomposição:

$$R_{ikjp} = (R_{ij}g_{kp} + R_{kp}g_{ij} - R_{ip}g_{kj} - R_{kj}g_{ip}) - \frac{R}{2}(g_{ij}g_{kp} - g_{ip}g_{kj}). \tag{4.31}$$

Agora, calculamos o valor de $(\Delta \mathring{Hess} f)_{ij}$. Para isso, usamos o Lema 4.1.3 para obter

$$\begin{aligned}(\Delta\nabla^2 f)_{ij} &= \nabla^2_{ij}\Delta f + (R_{jp}g_{ik} + R_{ip}g_{jk} - 2R_{ikjp})\nabla^k\nabla^p f\\ &\quad +(\nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi} - \nabla_p R_{ij})\nabla^p f\\ &= -\frac{R}{2}\nabla_i\nabla_j f + (\nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi} - \nabla_p R_{ij})\nabla^p f + II, \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde

$$II = (R_{jp}g_{ik} + R_{ip}g_{jk} - 2R_{ikjp})\nabla^k\nabla^p f.$$

Iremos tratar II separadamente. De fato, segue-se de (4.31)

$$\begin{aligned} II &= (R_{jp}g_{ik} + R_{ip}g_{jk})\nabla^k\nabla^p f - 2(R_{ij}g_{kp} + R_{kp}g_{ij} - R_{ip}g_{kj} - R_{kj}g_{ip})\nabla^k\nabla^p f\\ &\quad +R(g_{ij}g_{kp} - g_{ip}g_{kj})\nabla^k\nabla^p f\\ &= R_{jp}\nabla_i\nabla^p f + R_{ip}\nabla_j\nabla^p f - 2(R_{ij}\Delta f + R_{kp}\nabla^k\nabla^p f g_{ij} - R_{ip}\nabla_j\nabla^p f - R_{kj}\nabla^k\nabla_i f)\\ &\quad +R(g_{ij}\Delta f - \nabla_i\nabla_j f). \end{aligned}$$

Combinando isso com (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} II &= 3R_{jp}\nabla_i\nabla^p f + 3R_{ip}\nabla_j\nabla^p f - 2R_{ij}\Big(-\frac{R}{2}f - \frac{3}{2}\Big) - 2R_{kp}\nabla^k\nabla^p f g_{ij}\\ &\quad +R\Big(-\frac{R}{2}f - \frac{3}{2}\Big)g_{ij} - R\nabla_j\nabla_i f. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Agora, substituindo o tensor de Ricci sem traço $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{3}g$ bem como o tensor Hessiana sem traço $\mathring{Hess} f = Hess\, f - \frac{\Delta f}{3}g$ em (4.33) temos

$$\begin{aligned} II &= 3\big(\mathring{R}_{jp} + \frac{R}{3}g_{jp}\big)\big((\mathring{Hess} f)_i^p + \frac{\Delta f}{3}g_i^p\big) + 3\big(\mathring{R}_{ip} + \frac{R}{3}g_{ip}\big)\big((\mathring{Hess} f)_j^p + \frac{\Delta f}{3}g_j^p\big)\\ &\quad +RfR_{ij} + 3R_{ij} - 2\big(\mathring{R}_{kp} + \frac{R}{3}g_{kp}\big)\big((\mathring{Hess} f)^{kp} + \frac{\Delta f}{3}g^{kp}\big)g_{ij}\\ &\quad -\frac{R^2}{2}fg_{ij} - \frac{3}{2}Rg_{ij} - R\big((\mathring{Hess} f)_{ij} + \frac{\Delta f}{3}g_{ij}\big). \end{aligned}$$

Reorganizando os termos e usando novamente a Eq. (4.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
II &= 3\mathring{R}_{jp}(H\mathring{e}ssf)_i^p + \mathring{R}_{ij}\Delta f + R(H\mathring{e}ssf)_{ij} + \frac{R}{3}\Delta f g_{ij} \\
&\quad +3\mathring{R}_{ip}(H\mathring{e}ssf)_j^p + \mathring{R}_{ij}\Delta f + R(H\mathring{e}ssf)_{ij} + \frac{R}{3}\Delta f g_{ij} \\
&\quad +Rf(\mathring{R}_{ij} + \frac{R}{3}g_{ij}) + 3(\mathring{R}_{ij} + \frac{R}{3}g_{ij}) - 2\mathring{R}_{kp}(H\mathring{e}ssf)^{kp}g_{ij} - \frac{2R}{3}\Delta f g_{ij} \\
&\quad -\frac{R^2}{2}fg_{ij} - \frac{3}{2}Rg_{ij} - R(H\mathring{e}ssf)_{ij} - \frac{R}{3}\Delta f g_{ij}.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo, lembramos que $fR\mathring{i}c = H\mathring{e}ssf$ (ver Eq. (4.5)) e agrupando os termos similares, para obter

$$
\begin{aligned}
II &= 3f\mathring{R}_{jp}\mathring{R}_i^p + 2\mathring{R}_{ij}\Delta f + 2Rf\mathring{R}_{ij} + 3f\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_j^p + \frac{R^2}{3}fg_{ij} \\
&\quad +3\mathring{R}_{ij} + Rg_{ij} - 2f|R\mathring{i}c|^2 g_{ij} - \frac{R^2}{2}fg_{ij} - \frac{3}{2}Rg_{ij} - \frac{R}{3}\Delta f g_{ij},
\end{aligned}
$$

Usando novamente a Eq. (4.3), temos

$$
\begin{aligned}
II &= 3f\mathring{R}_{jp}\mathring{R}_i^p + 3f\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_j^p + 2\mathring{R}_{ij}(-\frac{R}{2}f - \frac{3}{2}) + 2Rf\mathring{R}_{ij} + \frac{R^2}{3}fg_{ij} \\
&\quad +3\mathring{R}_{ij} + Rg_{ij} - 2f|R\mathring{i}c|^2 g_{ij} - \frac{R^2}{2}fg_{ij} - \frac{3}{2}Rg_{ij} - \frac{R}{3}(-\frac{R}{2}f - \frac{3}{2})g_{ij} \\
&= 3f\mathring{R}_{jp}\mathring{R}_i^p + 3f\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_j^p - Rf\mathring{R}_{ij} - 3\mathring{R}_{ij} + 2Rf\mathring{R}_{ij} + \frac{R^2}{3}fg_{ij} + 3\mathring{R}_{ij} + Rg_{ij} \\
&\quad -2f|R\mathring{i}c|^2 g_{ij} - \frac{R^2}{2}fg_{ij} - \frac{3}{2}Rg_{ij} + \frac{R^2}{6}fg_{ij} + \frac{R}{2}g_{ij},
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrita como

$$
II = 3f\mathring{R}_{jp}\mathring{R}_i^p + 3f\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_j^p + Rf\mathring{R}_{ij} - 2f|R\mathring{i}c|^2 g_{ij}.
$$

Logo, voltando a Eq. (4.32), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
(\Delta H\mathring{e}ssf)_{ij} &= (\Delta\nabla^2 f)_{ij} - \frac{1}{3}\Delta(\Delta f)g_{ij} \\
&= -\frac{R}{2}\nabla_i\nabla_j f + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}_i^p + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_j^p) + Rf\mathring{R}_{ij} \\
&\quad -2f|R\mathring{i}c|^2 g_{ij} + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - \nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f \\
&\quad -\frac{1}{3}\Delta(-\frac{R}{2}f - \frac{3}{2})g_{ij},
\end{aligned}
$$

e usando mais uma vez que $H\overset{\circ}{e}ssf = Hess\,f - \frac{\Delta f}{3}g$ imediatamente obtemos

$$
\begin{aligned}
(\Delta H\overset{\circ}{e}ssf)_{ij} &= -\frac{R}{2}((H\overset{\circ}{e}ssf)_{ij} + \frac{\Delta f}{3})g_{ij} + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}^{p}_{i} + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}^{p}_{j}) + Rf\mathring{R}_{ij} - 2f|R\overset{\circ}{i}c|^2 g_{ij} \\
&\quad + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - \nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f + \frac{R}{6}\Delta f g_{ij}.
\end{aligned}
$$

Em seguida, levando em conta que $fR\overset{\circ}{i}c = H\overset{\circ}{e}ssf$ temos

$$
\begin{aligned}
(\Delta H\overset{\circ}{e}ssf)_{ij} &= \frac{R}{2}f\mathring{R}_{ij} + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}^{p}_{i} + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}^{p}_{j}) - 2f|R\overset{\circ}{i}c|^2 g_{ij} \\
&\quad + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - \nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f.
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

Consequentemente, substituindo (4.34) em (4.30), encontramos

$$
\begin{aligned}
f(\Delta R\overset{\circ}{i}c)_{ij} &= (\Delta H\overset{\circ}{e}ssf)_{ij} + \frac{R}{2}f\mathring{R}_{ij} + \frac{3}{2}\mathring{R}_{ij} - 2\langle\nabla\mathring{R}_{ij}, \nabla f\rangle \\
&= Rf\mathring{R}_{ij} + \frac{3}{2}\mathring{R}_{ij} - 2f|R\overset{\circ}{i}c|^2 g_{ij} + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}^{p}_{i} + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}^{p}_{j}) \\
&\quad + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - \nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f - 2\nabla_p\mathring{R}_{ij}\nabla^p f.
\end{aligned}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
f(\Delta R\overset{\circ}{i}c)_{ij} &= Rf\mathring{R}_{ij} + \frac{3}{2}\mathring{R}_{ij} - 2f|R\overset{\circ}{i}c|^2 g_{ij} + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}^{p}_{i} + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}^{p}_{j}) \\
&\quad + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - 3\nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Retornando a Eq. (4.28), usamos (4.35) para obter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}div(f\nabla|R\overset{\circ}{i}c|^2) &= (\nabla_k\mathring{R}_{ij})\mathring{R}^{ij}\nabla^k f + f|\nabla R\overset{\circ}{i}c|^2 \\
&\quad + \Big[Rf\mathring{R}_{ij} + \frac{3}{2}\mathring{R}_{ij} - 2f|R\overset{\circ}{i}c|^2 g_{ij} + 3f(\mathring{R}_{jp}\mathring{R}^{p}_{i} + \mathring{R}_{ip}\mathring{R}^{p}_{j}) \\
&\quad + (\nabla_i\mathring{R}_{jp} + \nabla_j\mathring{R}_{pi} - 3\nabla_p\mathring{R}_{ij})\nabla^p f\Big]\mathring{R}^{ij} \\
&= -2(\nabla_p\mathring{R}_{ij})\mathring{R}^{ij}\nabla^p f + 2(\nabla_i\mathring{R}_{jp})\mathring{R}^{ij}\nabla^p f \\
&\quad + f|\nabla R\overset{\circ}{i}c|^2 + Rf|R\overset{\circ}{i}c|^2 + \frac{3}{2}|R\overset{\circ}{i}c|^2 + 6ftr(R\overset{\circ}{i}c^3) \\
&= 2(\nabla_i\mathring{R}_{pj} - \nabla_p\mathring{R}_{ij})\mathring{R}^{ij}\nabla^p f + f|\nabla R\overset{\circ}{i}c|^2 \\
&\quad + Rf|R\overset{\circ}{i}c|^2 + \frac{3}{2}|R\overset{\circ}{i}c|^2 + 6ftr(R\overset{\circ}{i}c^3).
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, como M tem curvatura escalar constante, segue-se de (2.5) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}div(f\nabla|\mathring{Ric}|^2) &= -2C_{pij}\mathring{R}^{ij}\nabla^p f + f|\nabla\mathring{Ric}|^2 + Rf|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}|\mathring{Ric}|^2 + 6ftr(\mathring{Ric}^3).\end{aligned}$$

Finalmente, é suficiente usar o Lema 4.1.4 para deduzir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}div(f\nabla|\mathring{Ric}|^2) &= f\frac{|C|^2}{2} + f|\nabla\mathring{Ric}|^2 + Rf|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}|\mathring{Ric}|^2 + 6f\big(tr(\mathring{Ric}^3)\big). \qquad (4.36)\end{aligned}$$

Isso finaliza a prova do teorema. □

Como aplicação do Teorema 4.3.2 e do Teorema 2.3.1, obtemos o seguinte resultado de rigidez:

Corolário 4.3.1 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada e conexa com bordo suave ∂M e curvatura escalar positiva, assuma também que a função potencial f é não-negativa. Se*

$$|\mathring{Ric}|^2 \leq \frac{R^2}{6}. \qquad (4.37)$$

Então M^3 é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

Demonstração: Começamos lembrando que pela clássica desigualdade de Okumura (1974), obtemos

$$tr(\mathring{Ric}^3) \geq -\frac{1}{\sqrt{6}}|\mathring{Ric}|^3. \qquad (4.38)$$

Portanto, usando o Teorema 4.3.2, podemos inferir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}div(f\nabla|\mathring{Ric}|^2) &\geq \big(|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \frac{|C|^2}{2}\big)f + \big(R - \sqrt{6}|\mathring{Ric}|\big)|\mathring{Ric}|^2 f \\ &\quad + \frac{3}{2}|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned}$$

Integrando a expressão acima sobre M e usando nossa hipótese, deduzimos que $\mathring{Ric} = 0$, ou seja, (M^3, g) é Einstein. Agora, aplicando o Teorema 2.3.1 concluímos que M^3 é isométrico a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$. Finalizando a prova do corolário. □

5 CONCLUSÃO

Devido a caracterização de variedades quasi-Einstein como base de produtos warped Einstein, entender a geometria desse tipo de variedade torna-se um problema relevante. Na primeira parte mostramos que variedades quasi-Einstein, *steady* e completas são conexas no infinito. Por outro lado, vimos que variedades quasi-Einstein *expanding* são f-não-parabólicas o que nos permitiu obter algumas estimativas para o volume com peso da variedade. É importante ressaltar que as estimativas de volume obtidas podem não ser ótimas e a busca de novos exemplos se faz necessária. Ainda sobre variedades quasi-Einstein, conseguimos caracterizar o caso *steady*, Bach-*flat* em que assumimos que a métrica tem curvatura de Ricci positiva mostrando que tal variedade é rotacionalmente simétrica.

Já na segunda parte do trabalho, estimamos a área do bordo de uma métrica crítica de Miao-Tam em variedades compactas de dimensão 3. Além disso, obtemos uma fórmula tipo-Böchner que nos permitiu mostrar que uma métrica crítica de Miao-Tam em uma variedade compacta tridimensional deve ser isométrico a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

REFERÊNCIAS

AMBROZIO, L. On static three-manifolds with positive scalar curvature. **arXiv preprint arXiv:1503.03803**, 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1503.03803v1.pdf>. Acesso em: 25 de out. 2016.

BACH, R. Zur weylschen relativitätstheorie und der weylschen erweiterung des krümmungstensorbegriffs. **Mathematische Zeitschrift**, v. 9, n. 1, p. 110–135, 1921.

BAKRY, D.; LEDOUX, M. Sobolev inequalities and myers's diameter theorem for an abstract markov generator. **Duke Mathematical Journal**, v. 85, n. 1, p. 253–270, 1996.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR, E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. **arXiv preprint arXiv:1603.02932**, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1603.02932v1.pdf>. Acesso em: 25 out. 2016.

BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO JR, E. Bounds on volume growth of geodesic balls for einstein warped products. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 143, n. 10, p. 4415–4422, 2015.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR, E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 25, n. 4, p. 2698–2715, 2015.

BARROS, A.; RIBEIRO JR, E.; SILVA FILHO, J. Uniqueness of quasi-einstein metrics on 3-dimensional homogeneous manifolds. **Differential Geometry and its Applications**, v. 35, p. 60–73, 2014.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO, E. Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, p. 1–18, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-016-9730-y>. Acesso em: 3. nov. 2016.

BATISTA, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO JR, E. Remarks on complete noncompact warped products. Em preparação. 2016.

BESSE, A. L. **Einstein manifolds**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

BOUCHER, W.; GIBBONS, G.; HOROWITZ, G. T. Uniqueness theorem for anti—de sitter spacetime. **Physical Review D**, v. 30, n. 12, p. 2447, 1984.

CALABI, E. Manifolds with nonnegative ricci curvature. 2. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 22, n. 1, p. A205–A205, 1975.

CAO, H.-D. Recent progress on ricci solitons. **arXiv preprint arXiv:0908.2006**, 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0908.2006v1.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2016.

CAO, H.-D.; CHEN, Q. On locally conformally flat gradient steady ricci solitons. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 364, n. 5, p. 2377–2391, 2012.

CAO, H.-D.; CHEN, Q. On bach-flat gradient shrinking ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

CAO, H.-D. *et al.* Bach-flat gradient steady ricci solitons. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 49, n. 1-2, p. 125–138, 2014.

CASE, J. The nonexistence of quasi-einstein metrics. **Pacific journal of mathematics**, v. 248, n. 2, p. 277–284, 2010.

CASE, J.; SHU, Y.-J.; WEI, G. Rigidity of quasi-einstein metrics. **Differential Geometry and its Applications**, v. 29, n. 1, p. 93–100, 2011.

CHEEGER, J.; GROMOLL, D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 6, n. 1, p. 119–128, 1971.

CHEN, Q.; HE, C. On bach flat warped product einstein manifolds. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 265, n. 2, p. 313–326, 2013.

CHOW, B. *et al.* **The Ricci flow: techniques and applications. Parte I. Geometric aspects**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010.

CORVINO, J. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the einstein constraint equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

CORVINO, J.; EICHMAIR, M.; MIAO, P. Deformation of scalar curvature and volume. **Mathematische Annalen**, v. 357, n. 2, p. 551–584, 2013.

FAN, X.-Q.; SHI, Y.; TAM, L.-F. Large-sphere and small-sphere limits of the brown-york mass. **Communications in analysis and geometry**, v. 17, n. 1, p. 37–72, 2009.

FANG, F.; LI, X.-D.; ZHANG, Z. Two generalizations of cheeger-gromoll splitting theorem via bakry-emery ricci curvature. **Ann. Inst. Fourier**, v. 59, n. 2, p. 563–573, 2009.

FISCHER, A. E.; MARSDEN, J. E. Manifolds of riemannian metrics with prescribed scalar curvature. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 80, n. 3, p. 479–484, 1974.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. [S.l.]: Springer, 2015.

HE, C.; PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of warped product einstein metrics. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 20, n. 2, 2012.

HIJAZI, O.; MONTIEL, S.; RAULOT, S. Uniqueness of the de sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 47, n. 2, p. 167–178, 2015.

KIM, D.-S.; KIM, Y. Compact einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 8, p. 2573–2576, 2003.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. In: **Manifolds and Lie groups**. [S.l.]: Springer, 1981. p. 197–206.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'obata. **Jour. Math. Pures Appl**, v. 62, n. 9, p. 63–72, 1983.

LEISTNER, T.; NUROWSKI, P. Ambient metrics for n-dimensional pp-waves. **Communications in Mathematical Physics**, v. 296, n. 3, p. 881–898, 2010.

LI, P. Curvature and function theory on riemannian manifolds. **Surveys in differential geometry**, v. 2, p. 375–432, 2000.

LI, P.; TAM, L.-F. Symmetric green's functions on complete manifolds. **American Journal of Mathematics**, v. 109, n. 6, p. 1129–1154, 1987.

LI, P.; TAM, L.-F. Harmonic functions and the structure of complete manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 35, n. 2, p. 359–383, 1992.

LI, P.; WANG, J. Complete manifolds with positive spectrum. **Journal of Differential Geometry**, v. 58, n. 3, p. 501–534, 2001.

LI, P.; WANG, J. Weighted poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. In: **Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure**. [S.l.: s.n.], 2006. v. 39, n. 6, p. 921–982.

LI, X.-D. Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete riemannian manifolds. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 84, n. 10, p. 1295–1361, 2005.

LÜ, H.; PAGE, D. N.; POPE, C. New inhomogeneous einstein metrics on sphere bundles over einstein–kähler manifolds. **Physics Letters B**, v. 593, n. 1, p. 218–226, 2004.

MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 1956. v. 6, p. 271–355.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

MUNTEANU, O.; SESUM, N. On gradient ricci solitons. **Journal of Geometric Analysis**, v. 23, n. 2, p. 539–561, 2013.

OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. **American Journal of Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 207–213, 1974.

QIAN, Z. Estimates for weighted volumes and applications. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 48, n. 2, p. 235–242, 1997.

RANIERI, M.; RIBEIRO JR, E. Bach-flat noncompact steady quasi-einstein manifolds. **arXiv preprint arXiv:1605.05592**, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1605.05592v1.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2016.

RIMOLDI, M. **Rigidity results for Lichnerowicz Bakry-Emery Ricci tensors**. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Milano, 2011.

SHEN, Y. A note on fischer-marsden's conjecture. **Proceedings of the american mathematical society**, v. 125, n. 3, p. 901–905, 1997.

VAROPOULOS, N. T. Potential theory and diffusion on riemannian manifolds. In: **Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund**. [S.l.: s.n.], 1983. v. 1, p. 821–837.

VIACLOVSKY, J. A. Math 865, topics in riemannian geometry. 2007. Disponível em: <http://www.math.wisc.edu/~jeffv/courses/865_Fall_2007.pdf>. Acesso em: 3. nov 2016.

WALD, R. M. **General relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 2010.

WANG, L. F. On noncompact τ-quasi-einstein metrics. **Pacific journal of mathematics**, v. 254, n. 2, p. 449–464, 2012.

WANG, L. F. A splitting theorem for the weighted measure. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 42, n. 1, p. 79–89, 2012.

WANG, L. F. Potential function estimates for quasi-einstein metrics. **Journal of Functional Analysis**, v. 267, n. 7, p. 1986–2004, 2014.

YAU, S.-T. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.

YAU, S. T. Some function-theoretic properties of complete riemannian manifolds and their applications to geometry. **Indiana Univ. Math. J**, v. 25, n. 7, p. 659–670, 1976.