UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CÍCERA CARLA DO NASCIMENTO OLIVEIRA

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA: CONCEPÇÃO E DESCRIÇÃO DE “SITUAÇÕES OLÍMPICAS” COM O RECURSO DO SOFTWARE GEOGEBRA

FORTALEZA

2016

CÍCERA CARLA DO NASCIMENTO OLIVEIRA

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA: CONCEPÇÃO E DESCRIÇÃO DE "SITUAÇÕES OLÍMPICAS" COM O RECURSO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

O46o Oliveira, Cícera Carla do Nascimento
Olimpíadas de matemática: concepção e descrição de "Situações Olímpicas" com o recurso do Software Geogebra / Cícera Carla do Nascimento Oliveira. – 2016.
136 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Olimpíada de matemática. 2. Software Geogebra. 3. Teoria das situações didáticas. 4. Engenharia didática. I. Título.

CDD 5

CÍCERA CARLA DO NASCIMENTO OLIVEIRA

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA: CONCEPÇÃO E DESCRIÇÃO DE “SITUAÇÕES OLÍMPICAS” COM O RECURSO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aprovada em: 31/08/2016.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal do Ceará – IFCE

____

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

____

Prof. Dr. José Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico este trabalho a Deus, meu marido Evandro e minha filha Mariana.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus e Salvador por sua infinita bondade derramada sobre nós a cada dia.

À coordenação e professores que compõe o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA/UFC, por disponibilizarem o referido mestrado, nos dando a oportunidade de aperfeiçoamento nos fins de semana e enriquecimento de nossos conhecimentos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves pelos caminhos indicados para que este trabalho se concretizasse, pela paciência e compreensão diante das dificuldades por mim apresentadas.

Aos meus colegas, pelo companheirismo diante de nossa jornada de aulas e pesquisa, em particular, à Norma pelo acolhimento em sua residência nos fins de semana em que tínhamos aula.

Ao meu marido Evandro pela paciência diante dos meus estudos, pesquisa e escrita deste trabalho.

RESUMO

Neste presente trabalho propomos as Olimpíadas de Matemática, o contexto de ensino, sob uma visão metodológica através da Teoria das Situações Didáticas (TSD), buscando estruturar situações de ensino através das duas primeiras fases da Engenharia Didática (ED): a análise prévia e a análise a priori. Buscamos realizar a descrição da TSD apenas para problemas que possuísse a possibilidade de uso do software Geogebra, sendo que esta se trata de uma ferramenta propiciadora de incentivo ao raciocínio intuitivo, com isso nossa pesquisa visou realizar três coisas: identificar os problemas adequados para uso do programa, realizar os comandos no Geogebra para as atividades propostas e realizar a descrição da *Situação Olímpica*. Devido o aumento no número de participantes da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) a cada edição, entendemos que se faz necessário abordar tópicos olímpicos com frequência em sala de aula, resolvendo problemas desse contexto com vistas a desenvolver um mecanismo de incentivo e de aprendizado por parte de nossos alunos. Por isso consideramos que o material resultante desta pesquisa favoreça a utilização pelo professor. Entendemos que a resolução de cada problemática olímpica é um objeto a ser pesquisado e explorado pelo aprendiz, por isso cabe ao docente indicar meios que facilite esse percurso.

Palavras-chave: Olimpíada de Matemática. Geogebra. Teoria das Situações Didáticas. Engenharia Didática.

ABSTRACT

In this work we propose the Mathematics Olympics, the educational context, from a methodological view through the Theory of Didactic Situations (TSD), where the structure of classes follows the first two phases of Didactic Engineering (ED): the previous analysis and a priori analysis. We seek to carry out the description of just TSD problems that possess the ability to use the Geogebra software, where this is not a propitious tool to encourage the intuitive reasoning, thus our research aimed to accomplish three things: identify the right problems to use the program , perform the commands in GeoGebra for the proposed activities and the description of the Olympic situation. Due to the increase in the number of participants of the Mathematical Olympiad Public Schools (OBMEP) each edition, we understand that it is necessary to address Olympic topics often in class, solving problems that context in order to develop a mechanism of incentives and learning by our students, so we believe that the resulting material of this research promotes the use by the teacher. We believe that the resolution of each Olympic problematic is an object to be researched and exploited by the learner, so it is up to the teacher indicating means to facilitate this route.

Keywords: Mathematical Olympiad. Geogebra. Theory of Didactic Situations. Didactic Engineering.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática no Brasil está cada dia mais precário, Sadovsky (2007) considera que o baixo rendimento dos alunos se deve, na maioria das vezes, pela forma superficial e mecânica que as aulas ocorrem, sem permitir que o discente perceba o porquê de cada conteúdo ser estudado. Ela ainda acrescenta que “os aspectos mais interessantes da disciplina, como resolver problemas, discutir ideias, checar informações e ser desafiado, são pouco explorados na escola”. Assim, podemos perceber pela fala da referida autora que é necessário fazermos uso de instrumentos (materiais concretos, tecnológico ou apenas intelectual, fazendo uso da criatividade) para poder contribuir com a formação de nossos aprendizes, induzindo-os a serem pesquisadores, questionadores do que estão aprendendo.

No IFCE – Quixadá, estabelecimento de ensino onde trabalho, a realidade não é diferente, percebemos que apenas o mecanicismo ainda é uma forma muito usada no ensino pelos profissionais de Matemática que lá trabalham, o que faz com que nossos alunos não despertem para um olhar mais crítico diante do que estão aprendendo.

No contexto de problemas olímpicos isso não foge à regra, então é preciso usar meios que contribua com tal ensino e aprendizado. Tendo em vista que mesmo estando em jogo as premiações das Olimpíadas de Matemática, tanto medalhas como menções quando na participação nesse tipo de competição, um dos focos é o favorecimento da qualidade no aprendizado na Matemática (BARBOSA, 2005).

Durante o período de dois anos desenvolvemos no referido campus aulas preparatórias de Olimpíada de Matemática, sendo este um projeto financiado pelo CNPQ – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e tendo a participação de dois professores, inclusive esta que é autora deste trabalho.

No início dos encontros realizados, para cada turma (pois tínhamos duas turmas em horários distintos) havia um encontro por semana com duração de quatro horas, com um número de aproximadamente 13 alunos por turma, onde um dos materiais de apoio usado era disponibilizado no site do POTI – Polo Olímpico de Treinamento Intensivo. Porém percebemos a grande dificuldade apresentada por nossos aprendizes, tendo em vista que a linguagem, a natureza como as atividades eram propostas fugiam da sua realidade de ensino que até então estavam acostumados em sala de aula, pois além de exigir conhecimentos novos, necessitavam ainda de um raciocínio mais apurado.

Todavia, materiais que propiciem uma evolução no aprendizado de forma a facilitar a aula olímpica não foram encontrados, por isso acreditamos que realizar o uso de uma metodologia de ensino para uso em contexto olímpico, possa ser em aulas específicas de preparação ou aulas convencionais, servirá de incentivo a outros trabalhos no mesmo ramo.

Nos último onze anos (2005 a 2016) houve um grande avanço no número de participantes das Olimpíadas de Matemática no Brasil, isso graças a criação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que visa estimular o ensino da Matemática e revelar talentos nessa disciplina (OBMEP, 2015; BARBOSA, 2015). No entanto, é preciso motivar a curiosidade dos alunos e prepará-los para que tenham condições de enfrentar tais dificuldades de raciocínio.

Segundo Bagatini (2010, p.11) é preciso trabalhar com os discentes de forma a enfatizar a resolução de problemas para facilitar e dar sentido à aprendizagem matemática, bem como é importante que "ele consiga resolver uma grande quantidade de problemas de forma correta", pois através da preparação eles podem "desenvolver a habilidade lógica e criativa, de forma a obter organização de pensamento e de trabalho". Dessa forma, é um dever do professor encaminhar o aluno a perceber-se como autor de sua própria aprendizagem.

Os organizadores das Olimpíadas estão cada vez mais preocupados em fazer com que os participantes de tais modalidades possam se preparar, por isso disponibilizam materiais de apoio à preparação da olimpíada que podem ser usadas em sala de aula convencional ou em aulas específicas na própria escola ou ainda através de ambientes, tais como o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e OBMEP na Escola. Todavia, os mesmos não sinalizam o uso da tecnologia para que esse trabalho seja facilitado e nem há a preocupação com uma metodologia de ensino que propicie uma melhor compreensão por parte do discente.

Assim, propomos na referida pesquisa dez situações didáticas do Brousseau (1986) usando as fases: ação, formulação, validação e institucionalização, que contemplem preparação para Olimpíadas de Matemática, auxiliados e potencializados pelo uso do software Geogebra; onde apresentamos duas nesta dissertação, sendo oito colocados no apêndice.

Utilizando a Teoria das Situações Didáticas (TSD) que diz ser preciso controlar "as relações de um aluno com o meio" (Brousseu, 2008, p.27), onde deve ser percebida a troca de informações não codificadas (ações e decisões), as mensagens codificadas e a troca de opiniões, visamos descrever quais serão as atitudes do professor e do aluno com vistas ao entendimento do que esteja sendo explicado. Segundo Brousseau (1986, p. 8):

> Uma situação didáctica é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio,

> compreendendo eventualmente instrumentos e objectos, e, um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em via de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efectiva de conhecimentos pertinentes.

É muito importante que o aluno seja levado a realizar suas próprias descobertas, pois na busca pela solução o mesmo pode explorar os seus conhecimentos prévios. O resultado final de uma atividade proposta pode ser o fim, mas toda a construção que se faz até chegar neste é que permite a fixação de conhecimento efetivo, por isso é relevante que uma aula seja estruturada antecipadamente usando meios que possam induzir o raciocínio do discente. Com essa prerrogativa, desenvolveremos situação de ensino para resolução de problemas olímpicos segundo as fases dialéticas do Brousseau (1986) que chamaremos de *Situação Didática Olímpica* ou, resumidamente, *Situação Olímpica.*

Temos como objetivo geral mostrar que podemos, através do Geogebra, propiciar ao docente um material de apoio à preparação de Olimpíadas de Matemática fazendo uso de uma metodologia de ensino. Especificamente, objetivamos ainda:

- Identificar problemas olímpicos que detenha potencial para usar o software Geogebra, como facilitador de conjecturação de possíveis soluções;
- Descrever o Geogebra como ferramenta auxiliar na resolução de uso de *situações olímpicas*;
- Estruturar *Situações Didáticas* relativas a problemas olímpicos.
- Desenvolver resolução de atividade olímpica como sendo um objeto a ser pesquisado e explorado pelos aprendizes.

A Olimpíada de Matemática requer do participante um conhecimento mais maduro da matemática ou pelo menos um bom desempenho de seu raciocínio, pois conforme Bagatini (2010, p.12) “na maioria das provas das diversas competições existentes, os problemas que as compõem não requerem do aluno altos conhecimentos matemáticos, mas sim capacidade de interpretar, criar e improvisar o mais rápido possível”. A resolução de questões olímpicas faz com que o discente possa adquirir um conhecimento mais apurado da matemática, permitindo que vislumbrem uma perspectiva promissora de uma possível solução correta através de formulações. Porém, esses exercícios devem ser trabalhados a encaminhar que o aprendiz consiga entender todas as etapas da solução.

Segundo Alves (2010, p. 13) “o estudo sobre a Olimpíada de Matemática (...) almeja a melhoria na qualidade de Ensino da Matemática e serve como um instrumento de estímulo à busca de novos conhecimentos", de fato, a competitividade visando premiação pode despertar o interesse maior por parte do aluno em estudar ou pesquisar e se aprofundar em conteúdos vistos em sala ou extra sala. Independentemente, somente devido o professor usar os problemas olímpicos como instrumento em sala de aula propiciará um conhecimento, ao menos mínimo de uma Matemática mais sólida.

Contudo, sabemos que intrinsecamente a Matemática possui em si dificuldades inerentes a cada conteúdo. Muitos alunos a vêem como uma disciplina muito complicada por não entenderem, muitas vezes, os processos de solução. Mas, ponderamos que uma das barreiras sofridas se refere a forma como os discentes a recebem por seus professores, frequentemente, de forma mecânica sem que seja percebida a construção em que esse conhecimento se origina, propiciando o mecanicismo sem o uso adequado do raciocínio que precede a formulação matemática. Dessa forma, na realização de provas externas às escolas o discente pode se sentir inseguro quando vai resolver alguns problemas, pois não consegue modelar matematicamente, apresentando dificuldades na montagem de sua expressão ou ainda apresentando graves erros na operacionalização dos cálculos.

Estudar Matemática pode não ser a mais fácil entre as disciplinas, contudo é necessário que a escola garanta ao aluno a possibilidade de aprendê-la, permitindo que se aproprie da construção do raciocínio, afirma Brousseau (1999). Se o discente conhece e utiliza a forma de raciocinar possivelmente terá argumentos na solução de problemáticas no qual possa se deparar. Brousseau (1999) defende que o professor:

> [...] pode e deve garantir as condições didáticas necessárias para que os estudantes aprendam. Defendo que o fundamental é entrar na cultura matemática, ou seja, a linguagem e o jeito de fazer a disciplina. Isso deve ser feito à moda dos matemáticos, que utilizam essa ciência para expressar uma forma de pensar - e não apenas uma recitação, como ocorre na escola, por meio da repetição de conteúdos que os alunos não entendem.

Assim, podemos perceber que é necessário que o professor tenha a preocupação de criar elementos, situações, faça uso de materiais concretos que norteiem as atitudes do aprendiz em matemática. Usar o desenvolvimento realizado semelhante a um pesquisador pode ser uma das alternativas de enriquecer e aumentar o conhecimento, dessa forma, como um dos objetivos das Olimpíadas de Matemática é de contribuir na qualidade do ensino (BARBOSA, 2005; OBMEP, 2015) devemos pensar que revelar talentos (OBM; OBMEP) não é o seu fim, por isso, muitas escolas ao fazerem parte desse tipo de competição, se preparando para as olimpíadas, além de estimulá-los para conseguirem medalhas e menções, desejam ver uma evolução de conhecimento nesta disciplina por parte dos seus alunos (BARBOSA, 2005).

Entendemos que organizar um momento de estudo esquematizado, seguindo uma sequência de aprendizado e de desenvolvimento, possa auxiliar no despertar para ação do aprendiz, tanto usando conhecimentos já oriundos de outras situações vivenciadas, como agregando informações ao já conhecido, visando com isso um maior aproveitamento nos momentos de preparação, uma maior interação e participação de todos. Dessa forma, resolver problemas olímpicos apenas através da repetição, sem o aluno fazer uso de todo aparato que seu cognitivo já retém pode não contribuir significativamente para um aprendizado eficaz, contudo se o mesmo participa ativamente da resolução do problema proposto, fazendo e entendendo, possivelmente ao participar de uma competição olímpica poderá ter mais chance de conseguir alguma premiação.

Por isso propomos nesta pesquisa que esse momento possa ser pensado e trabalhado a tornar o aprendiz autor de seus passos, pois através de cada situação desenvolvida o mesmo seja capaz de dar pequeno ou grande passo sozinho. Pelo fato de muitas questões olímpicas serem diferenciadas da realidade que o aluno costuma ver e estudar é preciso despertar a curiosidade contribuindo mais ainda para sua ação.

Analisando o contexto de ensino de preparação de Olimpíada de Matemática vemos que o procedimento de repasse e tratamento com os alunos não segue uma preocupação didática, todavia o que mais se prioriza é a técnica que possa permitir o número de questões resolvidas. Em cada preparação é necessário que cada aluno seja induzido a usar inicialmente algum tipo de linguagem para depois formalmente obter um resultado, mesmo se isto permear por erros (BROUSSEAU, 1999), mas se conduzido de forma coerente, provavelmente, deverá levar ao efetivo aprendizado. Muitas dessas preparações ocorrem por diversas escolas fazendo uso dos materiais disponibilizados pelos sites organizadores tais como: OBMEP e OBM realizando a resolução de problemas (Bagatini, 2010).

Os principais motivos que está por trás de cada olimpíada é descobrir jovens talentos para matemática e desenvolvê-lo, incentivando a melhoria nessa educação (OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA; COMPETIÇÃO DE MATEMÁTICA). Os alunos que participam de uma preparação, recebendo incentivo e motivação podem obter melhoria na sua aprendizagem, afirma Victor (2013, p.15), porém é necessário a intensa participação do professor no estímulo aos discentes, buscando acrescentar em suas aulas ou em atividades extraclasse, problemas inerentes a olimpíadas, que possam despertar a curiosidade e o interesse do estudante, visando ainda uma melhoria no ensino.

Por conseguinte, é preciso o uso de estratégia que possa conduzir o aluno à resposta, sugerindo, quando preciso, alguns passos, permitindo satisfação pelo fortalecimento adquirido para solucionar problemas futuros. Pois,

> O passo inicial é que, de alguma forma, dentro do conteúdo que está sendo estudado no momento, devemos utilizar alguma estratégia de modo que o aluno se sinta motivado. Podemos desenvolver um problema com o aluno, conduzindo-o à resposta, encaminhando a resolução e sugerindo alguns passos. Esse procedimento será muito gratificante para o estudante, o qual se sentirá fortalecido para soluções futuras de outros problemas. (VICTOR, 2013, p. 2)

Existem caminhos na solução de alguns problemas que é difícil do aluno conseguir trilhar sozinho, mas com o auxílio do professor esse percurso pode tornar-se menos obscuro. Assim, o docente deve introduzir formas diversas de aprendizado que propicie o entendimento por parte dos discentes na solução de problemas, sendo um colaborador na descoberta deste procedimento. Dessa forma, fazer uso de métodos que auxiliem esse caminho pode ser uma alternativa, por isso descreveremos Situações Didáticas que permitam auxiliar esse processo de incentivo ao desenvolvimento do raciocínio.

Assim, pensando nessas preparações surgem os questionamentos:

Seria possível usar a TSD no uso de resolução de problemas do contexto das olimpíadas? A exploração de uma *Situação Olímpica* pode estimular uma abordagem alternativa para o professor em vista a exploração do software Geogebra?

Todavia é necessário que se consiga um mecanismo ou recurso que desperte a curiosidade dos estudantes (ALVES, 2010, p. 4) e que devido à informatização vivida pela sociedade atual buscaremos fazer, na prática de sala de aula, uso de recurso tecnológico como ferramenta potencial facilitadora da aprendizagem, o software Geogebra, como uma forma de melhor percepção dos elementos que podem auxiliar a resolução das atividades propostas no contexto das olimpíadas. Assim, nos apoiaremos nas hipóteses de que:

- O software Geogebra possibilita a exploração da visualização como elemento impulsionador das estratégias implementadas nas *situações olímpicas*;
- A TSD possibilita a perspectiva de considerar uma proposta de metodologia de ensino para as Olimpíadas de Matemática.

Assim, descreveremos *Situações Olímpicas*, estruturada apenas nas duas primeiras etapas da metodologia de pesquisa, Engenharia Didática (ED): Análise Prévia e na Análise a Priori. Pois, o ponto mais relevante até aqui trata-se do desenvolvimento das aulas, como procedimento diferenciado de ensino e de preparação para as Olimpíadas de Matemática, ampliando as possibilidades de conhecimento e estimulando o processo cognitivo.

Organizamos nosso trabalho em seis capítulos. No primeiro, buscamos embasar a pesquisa mostrando que, devido as Olimpíadas de Matemática possuir também um caráter de influência na qualidade do ensino, é preciso pensar em fazer uso de instrumentos que potencializem o aprendizado em sala de aula, assim entendemos que usar uma metodologia poderá facilitar o entendimento e participação dos alunos no processo de aprendizado.

O segundo capítulo trata da história das Olimpíadas de Matemática, que tem como objetivo tornar claro ao leitor a real necessidade desta competição, sendo que atualmente esse foco de identificar talentos não é mais único, mas contribuir para que haja melhoria no ensino desta disciplina.

O terceiro capítulo aborda as metodologias usadas: ED e TSD; e a ferramenta potencial facilitadora de intuição e aprendizado. A ED, como metodologia de pesquisa através das duas primeiras fases, foi importante para indicar como os diversos autores de livros que possuem natureza olímpica a abordam, sem haver preocupações com uso de tecnologia como ferramenta que pode potencializar o ensino. E através dessas análises constatamos que também que não há a preocupação na resolução dos problemas olímpicos. Quanto a TSD descrevemos como as fases seriam vista no contexto de problemas olímpicos. Realizamos ainda uma pequena descrição do software Geogebra.

No quarto capítulo descrevemos a análise preliminar através da identificação dos elementos epistemológicos que mais afetam a aprendizagem nos problemas indicados neste trabalho.

No quinto capítulo discutimos a análise a priori, descrevemos duas situações olímpicas identificando o problema, objeto de estudo, em seguida as fases de desenvolvimento conforme a situação didática.

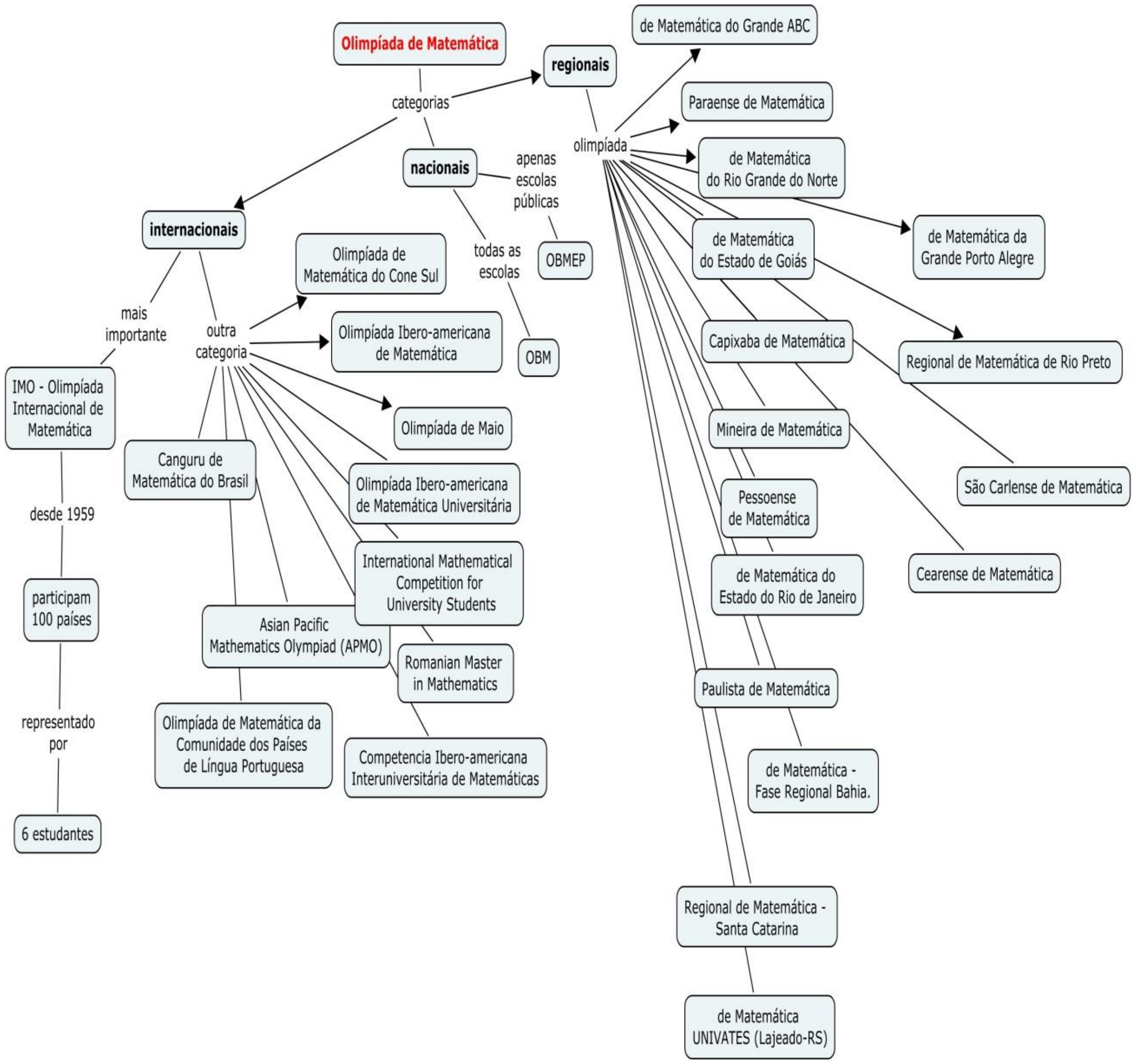
No sexto e último capítulo, apresentamos nossas considerações finais, onde destacamos que o contexto olímpico deveria ser um instrumento comum nas salas de aula, pelo fato deste tipo de competição surgir com um dos objetivos à melhoria ao de Matemática, por isso da importância de uma metodologia de ensino que facilite a interação e ação do aluno da atividade proposta. O uso de um material de apoio que facilite o trabalho do professor poderá também propiciar uma evolução no desenvolvimento do aprendizado do discente. Assim, entendemos que o produto educacional que conseguimos construir pode ser uma porta para que outros trabalhos no ramo de Olimpíadas de Matemática também a olhem sobre esta óptica.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA

O primeiro registro de competição envolvendo o conhecimento matemático foi realizado em Bucareste, Romênia, no ano de 1885, com participação de apenas 70 estudantes (SOUZA NETO e VILELA, 2011, p.3); todavia, a precursora das Olimpíadas de Matemática atual aconteceu na Hungria no ano de 1894 denominada por “Eötvös” (BAGATINI, 2010), em homenagem ao presidente da Sociedade de Matemática e Física, Loránd Eötvös, que no referido ano havia sido eleito ministro da educação (EUREKA, 1999); e a mesma ocorreu como forma de competição de Matemática organizada pela citada sociedade. Atualmente mais de 100 países organizam Olimpíadas dessa natureza, há várias modalidades: internacional, nacional e regional, municipal, escolar, universitários, etc.

Internacionalmente a 1ª Olimpíada (International Mathematical Olympiad) IMO foi organizada no ano de 1959 na Romênia, com a participação de países do leste europeu. Hoje, cerca de 100 países participam dessa competição, representados por equipes de até 6 estudantes que não tem ingressado à Universidade até a data da prova (OBM, 2015). Existem diversos tipos de olimpíadas internacionais em matemática que ocorrem anualmente, tais como: Olimpíada Cone Sul, Olimpíada Iberoamericana (desde 1985), Olimpíada Internacional de Matemática, Competição Internacional de Matemática (participam apenas universitários), Asian Pacific Mathematics Olympiad, Middle European Mathematics Olympiad, Mathématiques sans Frontières, Canguru Matemático entre outras. Vejamos abaixo através de um mapa conceitual as categorias e as respectivas Olimpíadas de Matemática.

Figura 1 – Mapa conceitual categorizando as Olimpíadas de Matemática



Fonte: Elaborada pelos autores

Podemos perceber pelo mapa conceitual acima (figura 1) que no Brasil existem diversas competições em Matemática. As de nível nacional como sendo a OBM e a OBMEP, que conseguindo medalhas de ouro em suas versões finais podem participar das Olimpíadas Internacionais de Matemática. Em vários estados há também a competição em busca de auxiliar na melhoria do ensino daquela região e proporcionar aos talentosos o reconhecimento devido. Percebemos ainda que há várias competições a nível internacional, que mesmo não sendo importantes como a IMO, vem contribuir com a aprendizagem em Matemática.

2.1 Histórico sobre as primeiras Olimpíadas de Matemática no Brasil

A primeira Olimpíada de Matemática que aconteceu no Brasil ocorreu no estado de São Paulo, em 1967, no período de acontecimento do Movimento da Matemática Moderna, afirma Burigo (1989, p. 160), organizada pelo GEEM (Grupo de Estudo do Ensino da Matemática), todavia houveram apenas duas edições em: 1967 e 1969. No ano de 1977, realizada pela Academia Paulista de Ciências, acontece a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM), dois anos mais tarde, 1979, ocorre a 1ª Olimpíada de Matemática (OBM) a nível nacional, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), onde desde a sua primeira edição já tem sofrido várias alterações até chegar aos moldes atuais. Descreveremos a seguir que alterações foram estas, de acordo com as informações disponibilizadas pelo site da OBM (2014).

- 1991 - divisão em dois níveis: Júnior (para alunos até 15 anos), Sênior (para alunos cursando o ensino médio);
- 1992 - ocorre duas fases (a primeira com 25 questões objetivas e a segunda, aplicado em dois dias, com 3 questões subjetivas em cada dia), nesse mesmo ano o nível Júnior passou a ser aplicável para alunos que estivessem no ensino fundamental;
- 1993 - nível Júnior volta a ser realizada em um dia, contendo 5 problemas;
- 1995 - o nível Júnior volta a ser aplicável a estudantes de até 15 anos;
- 1998 - OBM muda sistemática de provas, objetivando aperfeiçoamento dos professores, o que consequentemente implicaria na melhora do ensino, assim criou três níveis e três fases;
- 1999 - provas da fase final do nível II passam a ser realizadas em dois dias;
- 2001 - criado o nível universitário, com duas fases.

Atualmente ficando assim:

Quadro 1 – Categorização das fases e níveis da OBM

Níveis	**Modalidade de participantes**	**Número de fases**
1	Alunos matriculados no 6º e 7º	3
2	Alunos matriculados no 8º e 9º	3
3	Alunos de nível médio ou que tendo	3

	concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM	
Universitário	Estudante em nível de graduação sem finalização do curso	2

Fonte: Elaborado pelos autores

De acordo com as informações do regulamento da OBM (2015) a estruturação das provas seguem as descrições feitas a seguir:

Para os níveis 1, 2 e 3 as duas primeiras fases são iguais.

1ª Fase: prova de múltipla escolha com 20 a 25 questões e duração de 3 horas;

2ª Fase: prova mista (parte A e parte B) com duração de 4 horas e 30 minutos;

3ª Fase: Nível 1 – prova dissertativa com duração de 4 horas e 30 minutos;

Nível 2 e 3 - duas provas discursivas realizadas em dois dias consecutivos com 3 problemas em cada dia tendo duração de 4 horas e 30 minutos por dia;

Para o nível Universitário as provas, nas duas fases são discursivas, com 6 problemas cada, tendo duração de 4 horas e 30 minutos e que são aplicadas nos mesmos dias dos demais níveis (1,2 e 3).

A seguir faremos um relato sobre o surgimento de uma das maiores Olimpíadas de Matemática, que embora a competição seja de caráter nacional, possui destaque internacional quanto ao número de participações, trata-se da Olimpíada Brasileira em Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

2.2 Origens da OBMEP: Olimpíadas de Matemática no Ceará

Há mais de 25 anos o Ceará tem se destacado em Olimpíada de Matemática, tais como: Olimpíada Cearense de Matemática, Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), pelo Projeto Leituralizar e Numeratizar. Segundo Barbosa (2005), professor da Universidade Federal do Ceará (UFC), o projeto de Olimpíadas surgiu pela necessidade de melhoria da qualidade do ensino, devido aos índices inaceitáveis de educação do Brasil o que comprometia o futuro do desenvolvimento do país, em particular pelo baixo nível em que o ensino de Matemática até então era oferecido.

Em 2003 o Governo do Estado do Ceará iniciou o Projeto de Letras e dos Números – Leituralizar e Numeratizar, no segundo semestre do referido ano foi realizada sua primeira olimpíada. O sucesso influenciou a Prefeitura de Fortaleza a desenvolver um projeto semelhante, porém além de contemplar Português e Matemática, também era inserida a disciplina de Ciências. Ambos os projetos tinham a expectativa de desenvolver estratégias que possibilitassem melhorias na qualidade do Ensino de Matemática na Educação Básica (MACIEL e BASSO, 2009). Os participantes eram estudantes de diversas cidades do Ceará, onde os premiados tinham a oportunidade de participarem de treinamento de olimpíada, outro fator é que o estado, assim como o município de Fortaleza, poderia fazer uma análise qualitativa populacional das escolas pertencentes à rede, conforme descreve Barbosa (2005):

> Participaram da primeira fase do Numeratizar 110.995 alunos, provenientes de 646 escolas situadas em 190 municípios do Estado. Destes, foram para a segunda fase 5587 alunos dos quais foram selecionados 346 estudantes para premiação. Estes estudantes foram indicados para participar da fase de treinamento da olimpíada (...) A aplicação universal da Olimpíada trouxe várias vantagens adicionais. O fato de que se pode identificar a prova de cada aluno propiciou que a olimpíada, neste caso, funcionasse como um sistema de avaliação da qualidade do ensino escola a escola.

Pelas experiências do Numeratizar e das Olimpíadas de Fortaleza, o Governo Federal, em 2005, através do vice-presidente da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), João Lucas Barbosa, e do secretário de Ciência, Tecnologia e Ensino Superior do Estado, Hélio Barros, resolveu realizar “um dos maiores esforços governamentais visando melhor o ensino de Matemática no País”, afirma Barbosa (2005), criando assim a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), permitindo a identificação de talentos nessa rede e despertando nas escolas a qualidade no que concerne a Matemática.

Os moldes da OBMEP acontecem de acordo como acontecia nas Olimpíadas de Matemática no Ceará com “treinamento e premiação de um número grande de alunos e retornos financeiros para escolas na rede municipal de ensino”, conforme O Povo Online (2014), o que serve como incentivo à melhoria.

Na primeira edição da OBMEP muitas escolas se inscreveram, muitos alunos participaram, Cocco (2013) agrega isso, ao fato, porque ela trazia uma proposta de revelação de talentos, abrindo caminhos nas áreas científicas e tecnológicas, pelas premiações oferecidas aos alunos, professores, escolas, municípios e coordenadorias. Uma de suas características é:

> (...) conseguir captar a atenção e interesse não só dos alunos mais preparados, mas fundamentalmente estimular e embasar os que apresentam baixo desempenho, para ajudá-los a trilhar um caminho que eles mesmos tentassem construir, fazer inferências, levantar hipóteses e tirar suas conclusões de maneira independente, interagindo com outros colegas e professores... (COCCO, 2013, p.19)

Para obtenção de sucesso na referida olimpíada o Governo Federal tem investido bastante em campanhas de divulgação, sendo estas sempre criativas e divertidas buscando chamar a atenção dos estudantes, fazendo somar novos talentos para o Brasil, conforme é descrito no slogan da mesma. A cada ano o número de inscritos aumenta fazendo com que a OBMEP seja a maior competição de matemática no mundo, além do grande envolvimento de muitas pessoas tais como coordenadores de escola, coordenadores regionais, universidades e instituições de pesquisa e administração pública. Todas as despesas são custeadas pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura) e pelo MCTI (Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação) e realizada pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) (OBMEP, 2014). Vejamos a seguir (TABELA 1) os números associadas às participações na OBMEP em todas suas versões e a variação da quantidade de alunos inscritos para a primeira fase.

Tabela 1 - Números de escolas, alunos e municípios inscritos na OBMEP até 2015

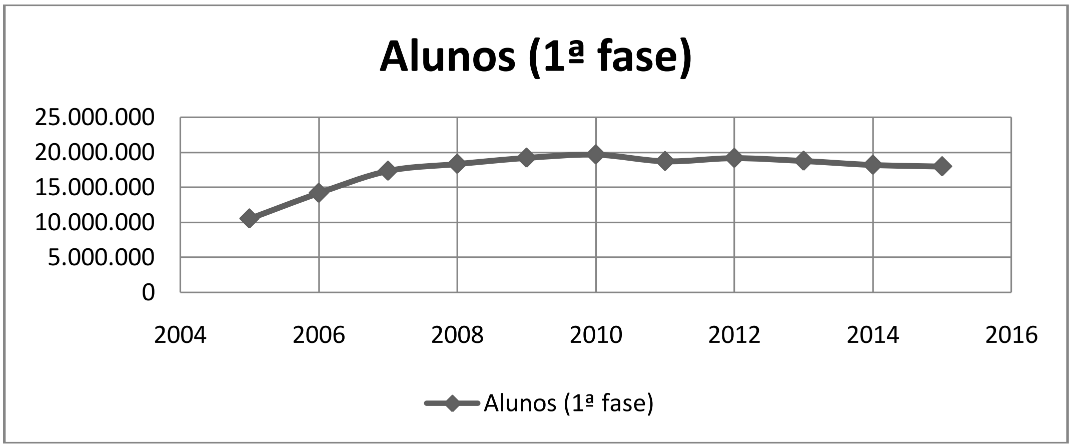
Ano	Escolas (1ª fase/2ª fase)	Alunos (1ª fase/2ª fase)	Município (1ª fase/2ª fase)
2005	31.031/ 29.074	10.520.831/ 457.725	93,5%/ 91,9%
2006	32.655/ 29.661	14.181.705/ 630.864	94,5%/ 92,4%
2007	38.450/ 35.483	17.341.732/ 780.333	98,1%/ 96,9%
2008	40.397/ 35.913	18.326.029/ 789.998	98,7%/96,9%
2009	43.854/ 39.387	19.198.710/ 841.139	99,1%/ 98,1%
2010	44.717/ 39.929	19.665.928/ 863.000	99,16%/ 98,3%
2011	44.691/ 39.935	18.720.068/ 818.566	98,9%/ 98,1%
2012	46.728/ 40.770	19.166.371/ 823.871	99.42%/ 98,5%
2013	47.144/ 42.480	18.762.859/ 954.926	99,35%/ 98,83%
2014	46.711/ 41.302	18.192.526/ 907.446	99,41%/ 99,41%
2015	47.581/ 42.316	17.971.085/ 889.018	99,48%/ 97,62%

Fonte: OBMEP (2015)

Podemos verificar que após o início da OBMEP o número de participantes vem aumentando a cada ano chegando a participação de mais de 99,4% dos municípios, o que implica mais de 47500 escolas inscritas. Consideramos que este fato ocorra devido a grande publicidade realizada pela televisão e pelas premiações disponibilizadas. Visualizando no gráfico a seguir (Gráfico 1) podemos identificar melhor esse crescimento e constatar que a quantidade de alunos participantes da primeira fase está em torno de 18 milhões.

Devido a OBMEP atingir muitos alunos, principalmente na primeira fase, a preparação, o incentivo de resolução de problemas olímpicos deveriam ser comum entre todos, por isso fazer uso de uma metodologia que propicie a interação de todos diante do que está sendo proposto e de uma ferramenta que potencializa a intuição do aluno pode ser uma alternativa na busca da qualidade de ensino da Matemática.

Gráfico 1 – Número de alunos inscritos para a primeira fase da OBMEP nas versões de 2005 a 2015



Fonte: OBMEP (2015)

Percebemos que durante essas onze edições o número de participantes tem crescido consideravelmente, iniciando em 2005 com mais de 10,5 milhões e atualmente tendo quase 18 milhões de alunos inscritos. Embora tenha acontecido uma redução no ano de 2011 em comparação com 2010, podemos destacar que o percentual de municípios e número de escolas inscritas também tem aumentado bastante, implicando que as instituições de ensino estão, também, preocupadas em mostrar os seus rendimentos e talentos em Matemática.

As Olimpíadas de Matemática também acontecem a nível regional visando incentivar o aprendizado nesta disciplina a cada vez mais, como veremos a seguir.

2.3 Olimpíadas Regionais de Matemática

Com o passar dos anos novas olimpíadas de matemática surgiram por diversas regiões do Brasil, destacando tais olimpíadas temos: Olimpíada Paraense de Matemática, Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte, Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, Olimpíada Capixaba de Matemática, Olimpíada Mineira de Matemática, Olimpíada Pessoense de Matemática, Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro, Olimpíada Paulista de Matemática, Olimpíada de Matemática - Fase Regional Bahia, Olimpíada Regional de

Matemática - Santa Catarina, Olimpíada de Matemática UNIVATES (Lajeado-RS), Olimpíada de Matemática do Grande ABC, Olimpíada de Matemática da Grande Porto Alegre, Olimpíada Regional de Matemática de Rio Preto, Olimpíada São Carlense de Matemática, Olimpíada Cearense de Matemática (OBM, 2014). Descreveremos a seguir como procedem tais olimpíadas.

- **A Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU)** é tida como uma atividade de extensão do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – IMECC que tem como objetivo estimular o estudo da Matemática entre os estudantes d*o* 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e entre os estudantes do Nível Médio de escolas públicas e privadas influenciando na melhoria do Ensino de Matemática.

- **Olimpíada do Rio Grande do Norte** é uma disputa entre os jovens por meio de suas habilidades intelectuais. Há três níveis de prova e cada nível consiste em duas ou mais provas, pelas quais o aluno demonstra a sua capacidade na resolução de problemas. Os três níveis são:
  - Nível I – Ensino Fundamental – 6ª e 7ª séries
  - Nível II – Ensino Fundamental – 8ª e 9ª séries
  - Nível III – Ensino Médio

- **Olimpíada Pessoense de Matemática - OPM** é uma atividade realizada pelo Departamento de Matemática. Com início no ano de 1990, era destinada apenas para os alunos do Ensino Médio, posteriormente, no ano de 1992, o projeto foi ampliado para a última série do Ensino Fundamental, sendo realizada todos os anos até 1996 quando teve uma interrupção retornando no ano de 2000 quando destinou-se ao nível de 7ª e 8ª séries da rede pública e privada do Ensino Fundamental de João Pessoa. No ano de 2002 passou a ter duas fases de caráter classificatório, contou com a participação de alunos de:

  Nível 1 - 5ª a 6ª Séries do Ensino Fundamental

  Nível 2- 7ª a 8ª Séries do Ensino Fundamental

  Nível 3- Ensino Médio

Há uma limitação quanto ao número de alunos inscrito por escola, sendo um total de no máximo 10 por nível.

- **Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (OMERJ)** é uma competição de matemática organizada para estudantes do ensino fundamental e médio do estado do Rio de Janeiro e tem por objetivo o desenvolvimento acadêmico desses apresentando uma visão mais abrangente e desafiadora da matemática. Já a OMERJ 2015 foi direcionada aos alunos regularmente matriculados e cursando o Ensino Fundamental (1º e 2º segmentos), médio ou ensino superior nos diversos estabelecimentos do Estado do Rio de Janeiro. Os participantes foram divididos em seis níveis descritos abaixo:

- Nível Junior: Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental
- Nível 1: Alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 2: Alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 3: Alunos de 1º e 2º anos do Ensino Médio;
- Nível 4 (pré-universitário): Alunos que estejam no 3º ano do Ensino Médio ou que ainda não adentraram num curso superior a menos de um ano de conclusão do Ensino Médio;
- Nível U: Nível Universitário.

- **Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina (ORS)** é realizada no Estado desde 1998 através de um Projeto de Extensão do Departamento de Matemática com o apoio da Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão (PRPE) da UFSC, através de seu Departamento de Apoio à Extensão (DAEx). O público alvo são estudantes desde o 6º ano do ensino fundamental até a 3ª série do ensino médio de escolas públicas ou particulares. A mesma é ofertada em três níveis:
Nível 1 - alunos do 6º e 7º anos do ensino fundamental;
Nível 2- alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental;
Nível 3 – alunos do ensino médio.

A UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) realiza durante o ano letivo 10 semanas de treinamento em quatro horários distintos, dois de manhã e dois à tarde. Todas as escolas recebem material de treinamento e as soluções são colocadas na página do programa ao fim de cada semana. O referido programa ainda disponibiliza vídeo contendo a resolução dos exercícios propostos.

- **Olimpíada Matemática da UNIVATES (OMU)** tem participação de alunos do 5º ao 9º ano do ensino fundamental e do Ensino Médio, desde que as escolas de origem estejam cadastradas na Olimpíada Brasileira de Matemática. Os alunos podem se inscrever de forma individual ou de dupla da mesma série. A competição é realizada em duas fases, sendo a primeira composta pela prova da primeira fase da OBM.

- **Olimpíada de Matemática do Grande ABC** realizada pela Universidade Metodista de São Paulo, por meio do Curso de Matemática da Faculdade de Exatas e Tecnologia realiza Olimpíada com participação de alunos do Ensino Fundamental (a partir do 6º ano) e Médio das escolas públicas e particulares das sete cidades compreendidas no Grande ABC (Santo André, São Caetano do Sul, São Bernardo do Campo, Diadema, Mauá, Ribeirão Pires e Rio Grande da Serra), bem como os que ainda não ingressaram em curso superior a menos de um ano ao ter finalizado o ensino médio. Os níveis são:

  Nível I- Ensino Fundamental - 6º ano e 7º ano
  Nível II- Ensino Fundamental - 8º ano e 9º ano
  Nível III- para alunos matriculados no 1º ou 2º ano do Ensino Médio
  Nível IV- para alunos matriculados no 3º ano do Ensino Médio ou que, tenham concluído Ensino Médio, há menos de um ano e não ingressaram em nenhum curso superior.
  Em cada nível, a competição consiste em duas provas, nas quais os alunos demonstram a sua capacidade na resolução de problemas.

- **Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre (ORM Grande PoA)** esta olimpíada tem como foco as escolas de ensino fundamental e médio da região da Grande Porto Alegre, os níveis são no mesmo molde da OBM. Há duas fases, a primeira corresponde a mesma primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática e a segunda fase é composta por uma prova discursiva contendo 8 questões.

- **Olimpíada de Matemática de Rio Preto (OMRP)** ocorre anualmente desde 2003 em três níveis (nível I: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, nível II: 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e nível III: 1º e 2º anos do Ensino Médio) com participação de alunos das escolas públicas e privadas de São José do Rio Preto. São realizadas três fases, as duas primeiras contendo questões objetivas e a última dissertativa. Inicialmente a etapa ocorre na própria escola, onde a quantidade de aprovados para a segunda etapa, semelhante a OBMEP, corresponde a 5% do total de alunos matriculados em cada nível. Enquanto que a segunda fase acontece no Instituto de Biociências, Letras e Ciências a Exatas/Universidade Estadual Paulista (IBILCE/UNESP), definindo assim os classificados para a última etapa. As avaliações contêm questões com conteúdos que são desenvolvidos na Jornada Olímpica, realizada todos os anos em julho.

- **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG)** é realizada pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) com apoio da OBM, desde 1992, a OMEG destina-se aos alunos de Goiás, que cursam Ensino Fundamental ou Médio no estado. A olimpíada consiste de três níveis (nível 1: alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental I; nível 2: alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II; nível 3: alunos do Ensino Médio), sendo a prova com seis questões subjetivas, com duração de quatro horas. Cada escola pode inscrever no máximo 10 alunos, por nível, mais os que tenham tido êxito na OMEG do ano anterior, conseguindo medalhas.

- **Olimpíada Cearense de Matemática (OCM)** ocorre com fase única para três níveis: I (sexto e sétimo ano), II (oitavo e nono ano) e III (ensino médio). No site da OCM ainda encontramos dicas de treinamento sendo sinalizada pelas aulas do POTI e da revista EUREKA.

- **Olimpíada Mineira de Matemática** adota como primeira fase a prova da OBM, a mesma é composta por três níveis I (6º e 7º anos), II (8º e 9º anos) e III (Ensino Médio) com participação dos alunos de Minas. A segunda fase é composta por questões subjetivas.

- **Olimpíada Paulista de Matemática (OPM)** é aplicada para alunos de Ensino Fundamental (nível alfa e beta) e Médio, apenas 1º e 2º anos (nível gamma) do Estado de São Paulo, porém discentes de outros estados ou países podem ser aceitos. Há duas fases nesta olimpíada, sendo a primeira na escola do participante e a segunda na cidade de São Paulo. No site é indicado o que cada deve ser estudado para cada nível e em cada fase.

- **Olimpíada de Matemática – Fase Regional da Bahia** – possui três níveis: I (alunos do 6º ou 7º anos), II (alunos 8º ou 9º anos), III (alunos do Ensino Médio); e três etapas, a primeira coincide com a prova da primeira fase da OBM. Os participantes devem ser alunos de escolas estaduais, federais, municipais e particulares de Salvador.

- **Olimpíada de Matemática Paraense (OPM)** ocorre a nível regional através de duas fases oferecidas a três níveis, onde a primeira etapa corresponde a primeira fase da OBM, assim a nota do aluno participante corresponde a nota obtida na mesma. Apenas os estudantes do Pará que esteja entre o 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio podem participar. Os organizadores indicam que seja estudado o programa da OBM.

A Olimpíada de Matemática São Carlense a nível regional/estadual não foi descrita pois não encontramos o site que sinalizasse informações sobre o seu desenvolvimento.

2.4 Uma pequena análise dos trabalhos acadêmicos que abordam a Olimpíada de Matemática

Nas pesquisas realizadas sobre a temática Olimpíadas de Matemática foram encontrados trabalhos científicos que abordam a olimpíada como uma forma de enriquecimento da matemática escolar, por isso Cocco (2013), Souza (2013) e Todeschini (2012) em suas dissertações relatam a importância da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) como uma maneira de avaliação nacional em larga escala, tendo em vista que serve de indicador às escolas públicas; Maciel e Basso (2009) em seu artigo investigam o objetivo da OBMEP na qualificação do ensino de matemática na educação básica; Sousa Neto (2012) ainda considera a olimpíada em matemática como uma "estratégia de valorização do campo da matemática"; Alves (2010) analisa o impacto da Olimpíada de Matemática para os alunos da Escola Pública que participam das mesmas; por conseguinte, outros ainda tiveram a preocupação de responder vários problemas olímpicos, no caso das dissertações do PROFMAT, mostrando estratégias de resolução, como Victor (2013), Américo (2013), Souza (2013), Carvalho Júnior (2013). Podemos perceber que as pesquisas citadas não buscam desenvolver o raciocínio do aluno através de meios ou ferramentas determinadas, apenas resolvem questões olímpicas, sem descrever antecipadamente quais são os conhecimentos prévios que o aluno deve obter para que consiga encontrar caminhos que induzam a uma solução.

Há ainda trabalhos acadêmicos que priorizaram acrescentar informações que não faz parte dos currículos das escolas, porém que é exigido em Olimpíadas de Matemática, tais como sequências e séries diferenciadas, na dissertação de Lacerda (2014) e Funções convexas com aplicações em problemas, em Carvalho (2013); Calazans (2014) aborda a importância e as etapas de criação de Centro de Estudo de Pesquisa e Preparação para Olimpíada em Matemática, todavia Bragança (2013) desenvolve em sua dissertação um roteiro para elaboração de uma olimpíada na escola ou no município, com a perspectiva de identificar os passos a serem trilhados para que obtenha êxito; Pena (2014), por sua vez, visa analisar, selecionar e compartilhar as práticas pedagógicas da disciplina de Matemática, em especial com a metodologia de resolução de problemas com foco na OBMEP; Dias (2014) ainda apresenta o estudo feito numa escola pública municipal sobre a OBMEP 2013, através de grupos de estudos com alunos que passaram para a segunda fase da referida olimpíada, fazendo uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa; Bonfim (2013) desenvolveu um material didático auxiliar (listas de problemas olímpicos da OBMEP e da OBM) que beneficiasse os estudantes iniciantes em olimpíadas, pois as mesmas, segundo o autor, estavam organizadas de forma a facilitar a construção do raciocínio de um problema a outro por parte o aluno. Carvalho (2013) acrescenta que o dinamismo através de diversos meios auxilia na compreensão do que se está assistindo, principalmente, na resolução de problemas referentes à geometria, assim desenvolveu um material multimídia com resoluções áudio visuais e com animações de algumas questões do nível 3 da OBMEP elaboradas no software *Power Point* e apresentadas através do software *Camtasia Studio*. Este trabalho aproxima-se do que iremos apresentar no quesito uso de software como ferramenta estimuladora de percepção, contudo nossa prerrogativa encontra-se intimamente associada ao fato de buscarmos descrever os passos que podem acontecer em cada fase do processo de resolução de uma atividade olímpica.

Alguns trabalhos abordam a descrição do surgimento da Olimpíada de Matemática e dentre eles Bragança (2013, p.9) afirma que os desafios "protagonizadas por matemáticos durante o Renascimento na Itália" fez com que no século XIX surgissem, com o objetivo de promover a matemática, as competições semelhantes à estrutura de olimpíadas que conhecemos na atualidade. Porém, muitas das aprovações nas primeiras fases, por serem de natureza múltipla escolha, pode ser ocasionada sem o conhecimento suficiente do participante para o acerto satisfatório, por isso cabe à preparação antecipada estimulando o esforço mental a fim de se conseguir bons rendimentos o que poderá implicar em resultados satisfatórios em etapas subsequentes. Segundo Victor (2013, p.16) a prática da resolução de problemas é um dos fatores de grande contribuição na aprendizagem matemática para obtenção de um bom desempenho, pois permite um amadurecimento do raciocínio. Há vários avanços tecnológicos das últimas décadas que tem proporcionado um desenvolvimento de inúmeros recursos computacionais que podem contribuir de forma significativa no ensino e na aprendizagem da matemática.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA, SITUAÇÃO DIDÁTICA E A FERRAMENTA GEOGEBRA

Apresentamos neste capítulo como procede nosso aporte metodológico e identificamos qual a ferramenta usada como instrumento mediador no ensino. A seguir, identificamos as duas fases da Engenharia Didática que serão usadas como ferramenta norteadora para o desenvolvimento. Em seguida, destacamos como procederá a TSD no contexto olímpico e qual o instrumento usado, o Geogebra.

3.1 Elementos de uma Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa usada neste trabalho trata-se apenas das duas fases iniciais da Engenharia Didática (ED): análise prévia, análise a priori; contudo iremos descrever todas as etapas. A sua precursora, Artigue (1988, *apud* LEIVAS, 2014), acredita que o ensino deve ser pensado baseado numa pesquisa, que deve acontecer no ambiente de ensino, sendo construído como um projeto de engenharia. Leivas (2014) afirma que é necessário que o ensino seja planejado antes de sua ação em sala de aula, ressalta ainda que a metodologia precisa ser comparada a um projeto de engenharia: a sequência de aulas ou atividades devem ser concebidas e organizadas coerentemente.

Dessa forma, entendemos que o planejamento de uma aula, especificamente, de preparação para Olimpíada de Matemática, não deve ser apenas elaboração e resolução de problemas olímpicos, muito menos pensar em soluções dadas somente pelo professor, mas um momento de fazer o aprendiz se perceber enquanto detector de conhecimentos, despertando o raciocínio; todavia é importante que seja antecipada, por parte do docente, algumas ou quais estratégias devem ser pensadas e usadas no momento das atividades de forma que possa sinalizar alguns passos, caso os mesmos não consigam evoluir sozinhos.

Almouloud (2007, p.171) acrescenta que a Engenharia Didática é vista como metodologia de pesquisa experimental, permitindo uma relação direta entre a teoria e a prática, que deve ser realizada com observações em sala de aula e se caracteriza por realizar comparações de análise a priori e a posteriori, essas pesquisas "estudam os processos de ensino e aprendizagem", o que nesse estudo não será usado na sua totalidade, tendo em vista que faremos apenas o momento de preparação. De fato, a construção do conhecimento deve ser estruturada e antecipada antes da aula iniciar, identificando quais os melhores meios, alternativas e ferramentas devem ser as mais indicadas para o público em questão; depois perceber como tem acontecido a recepção por parte dos receptores, tendo em vista, a possível modificação de postura no momento da aula ou na melhoria das aulas futuras, com a prerrogativa de fazer o aprendiz evoluir no desenvolvimento do raciocínio.

Artigue (1988, *apud* ALMOULOUD, 2007), considera a 'Engenharia Didática' semelhante ao trabalho de um engenheiro:

> [...] que se apoia em conhecimentos científicos de sua área submetendo a um controle de tipo científico, sendo obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.[...] Esta metodologia se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, permitindo uma validação interna a partir da confrontação das análises a priori e a posteriori. (ARTIGUE, 1988, *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 5)

O controle científico que Artigue (1988) relata, entendemos que sejam as variáveis que tem influência sobre o assunto a ser estudado, os anseios apresentados pelos aprendizes diante de uma problemática, sejam de dificuldades, medo em estar errado em suas respostas ou ainda da reação dos colegas, o que vão pensar ao expor suas ideias, que podem, aparentemente, ser "bobas", e que de alguma forma contribui para que não haja progresso e nem evolução na maturidade das informações retidas em seu pensamento. Assim, o professor deve estar ciente, de que precisa instigar o aprendiz a contribuir e que não se limite, mas que ouse em aprender a cada vez mais, todavia, cabe ainda ao mestre disponibilizar instrumentos que auxiliem nesse crescimento de ideias, no nosso caso usaremos o software Geogebra como facilitador. A seguir definiremos o que deve acontecer em cada fase da ED.

3.2 Fases da Engenharia Didática

A Engenharia Didática é constituída de quatro etapas: análise prévia (preliminar), análise a priori, experimentação (e análise a posteriori) e validação da experiência.

Análise prévia – É necessária que seja feito um levantamento sobre três dimensões associadas a um conteúdo que deve ser visto em sala de aula que são: a epistemologia (dificuldade em si do conteúdo), a didática (a forma como o conteúdo é repassado) e a cognição (associado às características de cada aluno). Um suporte para alcançar êxito em tais buscas, segundo Noro (2012), corresponde à análise dos livros didáticos e a aplicação de um teste diagnóstico visando determinar os conhecimentos que os alunos detêm e que servirão de base para o que será abordado e estudado posteriormente.

Inicialmente focamos em analisar os livros e materiais de apoio que detêm potencial olímpico que são disponibilizados pelas organizadoras de Olimpíadas de Matemática (bancos, provas anteriores e outros), percebendo como eles procuravam preparar os alunos que visam realizar Olimpíadas de Matemática, qual a metodologia usada, que ferramentas computacionais ou não eles propunham. Porém, como não realizaremos a experimentação, pois a análise do resultado não é foco de pesquisa nesse momento, não nos detemos em aplicar questionário para saber os conhecimentos prévios que os alunos possuem, seremos guiados apenas pelos PCN's do ensino médio e fundamental, que deve ser um saber já aprendido.

Concepção e Análise a priori – Referem-se nas decisões dos problemas e/ou instrumentos que devem ser expostos aos alunos para que eles sejam colocados em desequilíbrio cognitivo, a fim de que consigam chegar a uma acomodação quanto ao conhecimento, como afirma Piaget (*apud* La Taille, 1992). A Artigue (1996, *apud* Gomes, 2008) considera essa fase composta por duas partes: descritiva e preditiva; é preciso que se tenha em mente as escolhas no sentido global e no âmbito local, com a descrição da ação que será realizada. O intuito é criar uma situação controlável, prevendo quais anseios e dificuldade os discentes poderão apresentar, de forma a ter um aprendizado planejado. Podemos afirmar que nessa etapa fazemos, de forma propriamente dita, o planejamento da aula, como ela irá ocorrer, descrevendo todos os seus passos.

Fazendo uso da análise prévia descreveremos os problemas indicados para o uso da tecnologia, especificamente, para a utilização do Geogebra, bem como as devidas construções no software.

A seguir apresentamos as definições das demais fases da ED, embora não faremos uso na referida pesquisa. O que pode ser objeto de pesquisas futuras.

Experimentação – Nessa etapa da pesquisa, Noro (2012) considera uma divisão realizada em quatro itens: apresentação das condições da pesquisa, contrato didático, aplicação da aula sequenciada, anotação das observações durante a aula. Assim, deve ser realizada:

- Apresentação dos objetivos e condições de realização da pesquisa didática aos discentes;

- Estabelecimento de um contrato didático;
- Aplicação da sequência didática definida anteriormente;
- Registros das observações feitas durante a realização da sequência

Análise a posteriori – Segundo Gomes (2008) essa fase da pesquisa é marcada pela coleta e organização das informações obtidas na experimentação, na pesquisa observacional, tais como: “produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações” e a análise desse material permite que seja realizada a etapa de validação. Almouloud (2007, p. 177) afirma que,

> (...) a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas ou teóricas utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa (...) e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada.

É preciso que o professor identifique antecipadamente quais instrumentos podem proporcionar a facilidade de obtenção dessas informações, de forma que depois de arquivados esses dados podem ser facilmente consultados, tais como registro fotográfico ou escrito e utilização de gravadores.

- **Validação da experiência -** Essa é a fase de comparação entre a análise a Priori e a Posteriori, na validação podemos investigar o que foi considerado para a prática de aula, o que de fato se concretizou ou quais alterações ocorreram durante o *milieu*, processo de ensino. Segundo Almouloud (2007) é preciso que seja discutido pelo pesquisador os resultados e as questões levantadas pela pesquisa. Essa análise deve ser feita considerando as interações dos alunos com o *milieu* adidático e didático.

Discutiremos a seguir como procede uma determinada metodologia de ensino, fincando mais adiante no âmbito de problemas olímpicos.

3.3 Teoria das Situações Didáticas

A perspectiva ao fazermos uso da situação didática, que conforme Brousseau (1998), se trata das interações conjunta de professor e aluno através de um meio, onde é estabelecida relações entre conhecimentos ou de transformar conhecimentos em saberes, é permitir que o aprendiz possa refletir sobre sua forma de agir, perceber como seu pensamento funciona, aprimorando o seu desempenho cognitivo diante dos desafios propostos no contexto do ensino e da aprendizagem em Matemática. Brousseau (1975, *apud* Almouloud, 2007) entende que o ensino de matemática deve seguir um conjunto de situações identificáveis, prevendo inclusive o comportamento do aluno diante de um problema proposto, quais caminhos o discente deverá seguir. Segundo Pommer (2008) a aplicação de problemas permite que o aluno possa expressar diferentes formas de visualizar um caminho que induza ao resultado favorecendo diversas estratégias de encontrar respostas aos desafios propostos, possibilitando ainda que possa expor verbalmente ou de outra maneira o procedimento que fez chegar àquela resposta.

Brousseau (2008) afirma que é preciso considerar que o aluno adquire conhecimento por meio da experiência de vida, mas aprende adaptando-se a fatores de dificuldades e desequilíbrio, por isso um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos que se espera que obtenha. Desse pensamento, depreendemos que cabe ao professor fazer uma seleção "sensata" dos problemas que propõe com intuito de provocar no aluno as adaptações desejadas, tendo em vista que existe pelo menos uma situação que caracteriza e diferencia um conhecimento matemático.

O objeto central de estudo da Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Guy Brousseau em sua tese de doutorado intitulada *Théorisation des phénomènes d´enseignement des mathématiques*, não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, onde são identificados três elementos fundamentais recorrentes em sua teoria: professor, aluno e saber, e as interações professor e alunos são mediadas pelo saber das situações do ensino. Essas interações são mediadas pelo saber que determina como o aprendizado de fato deve acontecer, de acordo com a natureza epistemológica de cada conteúdo (POMMER, 2008).

Mas, tendo em vista o foco de nossa discussão, urge acentuar que Brousseau (2008, p. 19) define situação como "o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento" e as situações didáticas são os modelos de ensino estruturados pelas atividades do professor e do aluno. Assim, a TSD baseia-se na preocupação em identificar tudo que "colabora no componente matemático de sua formação" (BROUSSEAU, 2008 p. 53).

Segundo Almouloud (2007, p.32) a TSD se apoia em três hipóteses:

- **O aluno** que aprende adaptando-se a um fator de dificuldades, de desequilíbrio, chamado por Brousseau de *milieu*, que significa, meio, para então depois entrar num estado de equilibração;

- **O meio (*milieu*)** que deve ser suficiente para permitir o efetivo aprendizado dos alunos; cabe ao professor desenvolver situações que suscite o interesse e o aprendizado dos conhecimentos matemáticos;
- **O meio e as situações** devem estar entrelaçados com o intuito de fortalecer os saberes matemáticos que estão associados aos processos de ensino e de aprendizagem.

Brousseau (2008, p. 27) classifica as três grandes categorias que servem de relacionamento de um aluno com o meio: ação e decisão sobre o objeto, codificação em uma linguagem que descreva uma possível solução para o problema a qual foi sujeitado e a troca de opiniões.

Para Brousseau (1986, *apud* TEIXEIRA e PASSOS, 2013) o aprendizado deve partir de algo já conhecido do aluno, uma situação de interesse do discente que contemple uma evolução matemática, partindo do conhecido e permitindo que o mesmo consiga conjecturar e inferir novas situações matemáticas, fazendo com que seja criado o novo e o inusitado, que no caso seria o assunto a ser estudado ou a natureza de uma problemática nova a ser conhecida.

Para que haja transmissão de conhecimento específico e controle do que está sendo transmitido é preciso o uso de um dispositivo, que denota um *milieu* material, podendo ser: uma prova, um problema, peças de um jogo, uma ficha e regras de interações do discente com um dispositivo pedagógico conhecido. Por outro lado Brousseau (2008, p.28) afirma que um *milieu* se refere a "um dispositivo criado por alguém que queira ensinar um conhecimento ou controlar sua aquisição", podendo ser uma situação-problema, um jogo ou qualquer outra atividade com prerrogativa de aprendizado. Porém se não for explícito esse tipo de situação é chamado por Brousseau de situação adidática (ALMOULDOUD, 2007; POMMER, 2008). O nosso objetivo é fazer uso de *situação didática*.

A sistemática proposta por Brousseau permitiu, nos estudos da década dos anos 80 e 90, a proposição de uma metodologia de ensino. Todavia, as situações didáticas que tiveram o momento de nascedouro com origem na perspectiva da TSD, se mostraram passíveis de serem replicadas em outros momentos didáticos. Tais elementos foram apropriados e discutidos por Artigue (1984), quando discute a noção de replicação e modelização de situações de ensino.

Por conseguinte, a TSD é composta por quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização. Temos que:

- **A ação** – "deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre [...] exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu*. Nela as interações estão centralizadas na tomada de decisões"

(ALMOULOUD 2007, p. 37 e 38). Nessa fase acreditamos que seja o momento em o aluno deva identificar que conteúdos e conhecimentos o mesmo detém para ser usado na questão proposta a fim poder agir sobre a mesma.

- **A fase de formulação** – "consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos" (ALMOULOUD 2007, p.38), oral ou escrita, que possa estar redigida em língua natural ou matemática, criando um modelo que pode ser formulado com sinais ou regras comuns. Na presente etapa, o grupo de alunos deve averiguar um sistema de representação ou sistemas de representações que tornem homogêneo a comunicação de mensagens entre seus interlocutores. Para tanto, nessa fase o professor poderá usar instrumento(s) que contribua na formulação de elementos matemáticos, apresentando construções realizadas no Geogebra que irá permitir tal desempenho dos aprendizes.

- **Na etapa de validação** – "o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor", afirma Almouloud (2007, p. 39), visando um debate sobre a certeza das asserções. Oliveira (1993, p. 69) entende também que nessa fase os alunos devem ser "capazes de descobrir e elaborar argumentos para validação da aprendizagem". Deseja-se que haja discussões entre os aprendizes quanto à modelagem matemática apresentada, pois nesse momento esta deve ser objeto de atenção entre os estudantes e as devidas correções devem ser feitas.

- **Na situação de institucionalização** – "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber", afirma Almouloud (2007, p. 40), onde o novo conhecimento deve ser incorporado aos esquemas mentais do aprendiz. Assim, a figura do professor se mostra imprescindível, no sentido de fazer aderir uma dimensão global e cultural para determinado conhecimento matemático, pois nessa fase há a formalização das soluções de problemáticas propostas.

Assim fazendo uso da TSD, buscamos descrever situações de ensino, específicas para desenvolver no aprendiz, participante de Olimpíada de Matemática, o despertar para o raciocínio, bem como a postura do professor diante de uma problemática, como deve abordála de forma que incentive a leitura, observação das informações contidas no exercício e ao fazer uso visual do software Geogebra consiga perceber estratégias que auxiliem na solução da atividade. Identificamos quais os comportamentos e os conhecimentos que os aprendizes devem possuir para cada problema e quais os saberes devem ser explorados antecipadamente e de que maneira.

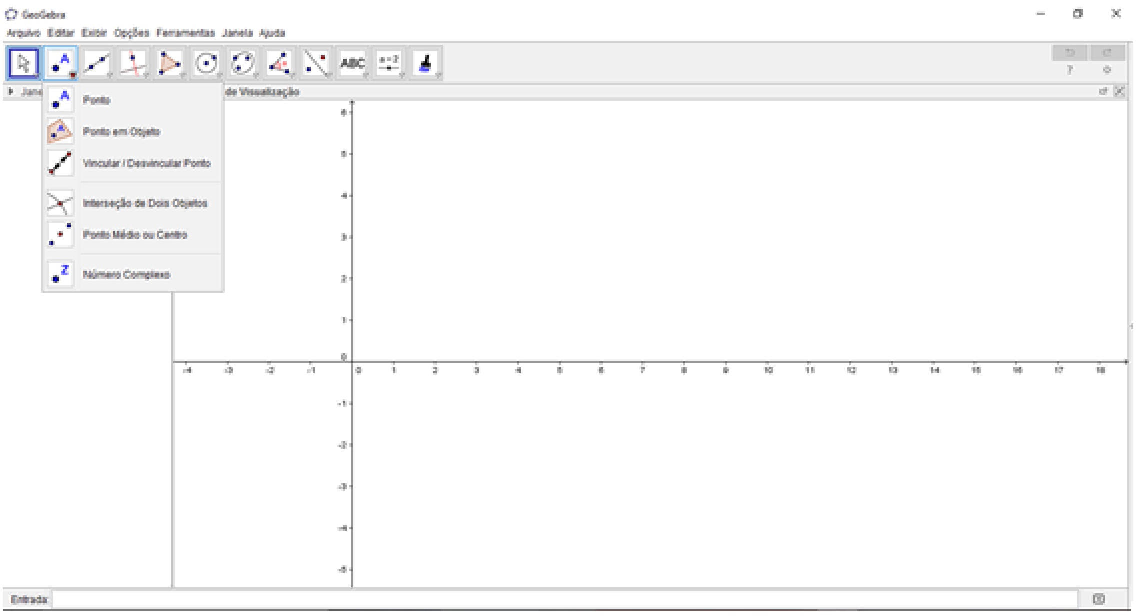
Todos os elementos coligidos e cunhados por Brousseau (1978) nos permitem adquirir um entendimento da complexidade do que chamamos de situação didática. Reparemos, todavia, que ao falar de TSD algumas “arestas” devem ser aparadas, no sentido de adotar maior precisão, exigida pelo progresso científico.

Ao pensarmos em usar um instrumento que propicie auxiliar no desenvolvimento de nossas atividades futuras precisamos entender como o mesmo procede, para isso faremos uso do tópico a seguir.

3.4 O Geogebra

O software que usaremos para auxiliar nossas resoluções de problemas olímpicos é o Geogebra, criado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria. O programa é gratuito e compatível com os seguintes sistemas operacionais: Windows, Linux e Mac OS X, possui dinamismo vinculado a Geometria e Álgebra, realiza diversos tipos de cálculos e possui várias janelas que facilitam aplicação dos comandos e ferramentas, um dos que será de grande utilização na nossa pesquisa refere-se ao “controle deslizante” além das construções que deverão ser realizadas. O manual de utilização do software pode ser encontrado em Hohenwarter e Preiner (2007).

Figura 2 - Imagem do software Geogebra



Fonte: Print do Geogebra.

O referido programa é utilizado em alguns trabalhos que possui um caráter descritivo no contexto de situação ou sequência didática, por isso abordaremos o mesmo como um instrumento que possa ser usado, tais como em Santos (2011) e Scano (2009). Uma das dificuldades encontradas na pesquisa foi realizar construções que pudessem auxiliar na visualização, abstração, conjecturação (Bento, 2010) de problemas olímpicos que facilitasse a interpretação do aluno para que o mesmo pudesse agir sobre a situação proposta, por isso buscaremos apresentar as situações didáticas e descreveremos os comandos usados em cada construção. A abordagem deste software neste trabalho é feito de forma sucinta neste capítulo, pois o foco não é mostrar os comandos gerais ou ainda identificar as várias pesquisas que o utilizam como ferramenta de interação. Mas, fazer o leitor ter consciência da existência deste programa como uma ferramenta que auxilia as situações olímpicas através da descrição do algoritmo que propicia a visualização dos elementos.

4 ANÁLISE PRELIMINAR

Na busca de caracterizar os componentes que influenciam no aprendizado de problemas olímpicos, visando construir um material de apoio ao professor propiciando um aprendizado ao aluno, realizamos um levantamento bibliográfico nos materiais olímpicos: livros nacionais e internacionais, bancos de questões da OBMEP e materiais de apoio do POTI. Buscamos perceber como acontecia a abordagem do referido contexto, bem como identificar quais os tipos/natureza de questões do nível 3 seriam mais propícias usar o software Geogebra como ferramenta auxiliar na ação do aprendiz e que pudéssemos pensar nesse desenvolvimento através da TSD.

4.1 Sobre a abordagem dos livros e algumas dissertações do PROFMAT

Realizamos a análise de alguns livros e materiais de apoio específicos para a preparação das olimpíadas de matemática, fazendo uso da "análise de conteúdo" de Bardin (2009, p.121) que alega ser um "conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens", onde está dividida em torno de três polos: pré-análise, exploração do material e o tratamento dos resultados. Também tivemos o cuidado de realizar uma amostragem representativa do universo olímpico.

PRÉ-ANÁLISE: Vejamos abaixo a amostragem dos livros analisados que contemplam o universo nacional e internacional das Olimpíadas de Matemática.

- Livros Nacionais/escrito em língua portuguesa/ materiais de apoio: Técnicas em Olimpíadas de Matemática – Combinatória (Marcelo Rufino Oliveira); Problemas de Matemática Elementar (V. Lidski et al.), Teoria dos Números (Renato Carneiro de Souza), Olimpíadas Paraenses de Matemática: 2000 – 2009 (Marcelo Rufino Oliveira), Círculos Matemáticos – A experiência Russa (Dimitri Fomim, Sergey Genkin e Ilia Itenberg), Banco OBMEP (várias versões) e materiais de apoio do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI).
- Livros Internacionais: II Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (Jorge Tipe Villanueva), IV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (Jorge Tipe Villanueva et

al.), Mathematical Olympiad Challenges (Titu Andreescu e Răzvan Gelca), 103 trigonometry problems – from the training of the USA IMO team (Titu Andreescu e Zuming Feng).

Tivemos como hipótese o fato de que os materiais (livros e afins) olímpicos apresentam diversos problemas como uma forma de treinamento, fazendo aparecer várias questões com mesma natureza de solução, bem como as mesmas sendo tratadas em ordem de dificuldade de raciocínio. Todavia, cremos que não era pensada a forma como o aluno poderia enxergar tal andamento da solução, onde o mesmo não seria levado a levantar questionamentos sobre: "qual conteúdo já conheço que talvez me auxilie na resolução? Devo conhecer novos conteúdos ou apenas ideias que sirvam de modelo aos problemas futuros? Como posso pensar em fazer uma construção que ajude na formação inicial das ideias preliminares de solução?"

EXPLORAÇÃO DO MATERIAL: Apresentaremos a seguir comentários que relatam o que foi observado destacando alguns trechos escritos pelos autores sobre o comportamento de seus livros e da abordagem olímpica, descrevendo o que observamos e quais os procedimentos metodológicos dispostos em cada um deles na visão dos autores. O foco principal esteve na análise de materiais que contemplasse o nível 3 (nível médio) das provas de Olimpíadas de Matemática.

Andreescu e Feng (1956) consideram que os participantes de olimpíadas de matemática ao apreciar as soluções dos livros e materiais de apoio do contexto olímpico se deparam com apresentações "elegantes" para as soluções, bem como as estratégias que podem ser diferenciadas das pensadas e resolvidas em situações semelhantes anteriormente. Tais autores ainda argumentam que mesmo os problemas olímpicos sendo desafiadores com alto nível de dificuldade, principalmente para os novatos em participações dessa natureza, a maioria pode ser resolvida com técnicas matemáticas do ensino básico.

> Olympiad-style exams consist of several challenging essay problems. Correct solutions often require deep analysis and careful argument. Olympiad questions can seem impenetrable to the novice, yet most can be solved with elementary hight school mathematics techniques, cleverly applied. (ANDREESCU e FENG, 1956)

Assim, destacamos que muitos alunos não conseguem bons resultados devido existirem temáticas que pouco é trabalhado em sala de aula, o que acarreta prejuízo intelectual aos discentes bem como o raciocínio que, muitas vezes, ainda é frágil. Todavia, este não é objeto de nossa pesquisa entrar nessa análise. Mas, enfatizamos de que sendo trabalhadas bem a teoria e as "mathematics techniques", levando o aprendiz a desenvolver o raciocino e as estratégias de soluções podemos obter êxito em seleções de Olimpíada de Matemática.

Ainda em Andreescu e Feng (1956), podemos observar que é apresentada inicialmente definições e exemplos, onde alguns são mostrados com mais de uma forma de solução, todavia, para realizar algumas visualizações não é indicado nenhum recurso computacional que auxilie um professor a fazê-lo em sala de aula, embora no livro apareçam figuras e gráficos. Outro fator em falta refere-se às construções/conjecturações que devem anteceder certos passos na resolução que não são mostradas ao aprendiz. Contudo, vimos que são usadas ideias chaves para resolver o problema, mas não são destacadas e enfatizadas, para que o aluno tenha ciência de que aquele ponto da resposta é o "x" da questão que permite o desenrolar da solução.

Fomim, Genkin e Itenberg (1996) em Círculos Matemáticos – uma experiência Russa - buscaram apresentar vários tópicos básicos que auxiliassem, de forma prática, à escolha dos problemas que pudessem ser usados em encontros de preparação para olimpíadas de matemática. Muitos problemas não possuem solução, embora alguns a possuam ou há apenas dicas. Os citados autores (Fomim, Genkin e Itenberg, 1996, p.167, tradução de Iório) ainda alegam que "a palavra 'olimpíada' por si mesma já implica um ambiente extracurricular, ampliando os limites do currículo tradicional" o que nos leva a acreditar que é preciso formar bem os discentes quanto à matemática básica para os mesmos poderem evoluir nesse âmbito. Observando atentamente o contexto de geometria, o mesmo não indica o uso de software que facilite as construções que possam ser usadas em salas de estudo para olimpíada. Ao final do livro são indicados jogos e competições que pode ser aplicado para grupos ou individuais, onde é enfatizado que os estudantes podem participar com muito entusiasmo.

Os materiais de apoio disponibilizados pelo Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) decorrem teorias, problemas e exercícios propostos, buscando estimular e despertar o estudo autodidata, porém acreditamos que as informações referentes à base teórica não auxiliam muito para o nível das questões apresentadas, pois em contrapartida alguns problemas resolvidos não possuem uma conexão direta com as soluções dos exercícios. Notamos ainda que os materiais sejam de alto nível o que, para muitos alunos, necessita ter um bom embasamento teórico que propicie o entendimento das soluções propostas. Também é notável a inutilidade da tecnologia como ferramenta auxiliar, principalmente, em problemas de geometria que muito necessita da percepção visual para melhor entendimento, embora existam algumas construções dispostas no material, tais como construções gráficas e geométricas que aparecem ao fim da solução, mas que não permite a liberdade do aprendiz imaginar uma estratégia ao se deparar com a mesma que contemple o informado no problema.

O site da OBMEP possui uma diversidade de materiais, banco de questões, que tem intuito de apoiar e auxiliar o trabalho de preparação para olimpíadas de matemática, todavia não possui teoria, apenas problemas que contemplam os níveis 1, 2 e 3, com suas respectivas soluções, onde algumas delas são feitas por meio de construção, permitindo ao aprendiz entender todo o procedimento até obter a resposta final. O uso da tecnologia como forma de auxiliar os professores nas construções geométricas e gráficas não é indicado.

Em Técnicas em Olimpíadas de Matemática – Combinatória, o autor Oliveira (2014) considera que:

> (...) olimpíadas com abrangência regional procuram exigir do aluno mais criatividade e menos conhecimento técnico, enquanto que em olimpíadas internacionais a quantidade de questões de raciocínio é reduzida, sendo o peso de geometria e álgebra bem maior.

Percebemos pelas palavras do referido autor que dependendo da categoria olímpica que se deseja participar o foco pode ser mudado, pois pode-se pensar em estudar mais geometria e álgebra ou os demais conteúdos, tais como combinatória, que exige muito mais da criatividade. A seguir vemos uma tabela sobre o estudo feito por Oliveira (2014) que descreve os percentuais da divisão de questões das fases finais de nível médio por assuntos em três competições com distintas abrangências, sendo esta contagem desde sua primeira aplicação, uma de cada natureza: regional (Olimpíada Paraense de Matemática), nacional (Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM) e internacional (Olimpíada Internacional de Matemática).

Tabela 2 – Percentual da divisão de questões das fases de nível médio por assuntos em três competições com distinta abrangência

	Combinatória	**Geometria**	**Teoria dos Números**	**Álgebra**
Olimpíada Paraense de Matemática, 2000 a 2012	30,8%	24,6%	24,6%	20,0%
Olimpíada Brasileira de Matemática, 1979 a 2012	27,5%	29,6%	24,4%	18,5%
Olimpíada Internacional de	17,5%	33,4%	21,2%	27,9%

Matemática, 1959 a 2013				

Fonte: Marcelo Rufino de Oliveira (2014)

O livro apresenta a aplicação e relevância do assunto dentro do universo das questões de olimpíadas de matemática, bem como resumo teórico que contempla as definições mais relevantes e os principais teoremas de cada tema, em seguida as soluções de alguns exercícios de olimpíada de matemática. Nas atividades de combinatória, alguns exercícios foram feitos através da construção geométrica (no caso dos tabuleiros) e conjecturação em poucos problemas. Algumas respostas parecem sair do bolso sem previamente haver induzido no aprendiz uma construção a fim de que haja entendimento na solução exposta.

Em cada tópico apresentado no livro Problemas de Matemática Elementar (V. Lidski et al.) há um resumo teórico, intitulado por "observações preliminares", que contempla muito pouco em relação ao que necessita para resolver os problemas propostos, todavia há a preocupação de mostrar de forma crescente, quanto ao nível de dificuldade dos exercícios, mostrando ao final as resoluções das atividades propostas.

Em Teoria dos Números (Renato Carneiro de Souza) o referido livro indica de "maneira fácil e interessante alguns tópicos da teoria dos números de forma que os alunos de nível fundamental e médio possam aprender de maneira simples", afirma o autor, assunto este muito apreciado nas provas da OBM. O fato de haver palavras destacadas no enunciado dos exemplos permite tornar claro o que se desejava para depois partir para uma solução, pois há casos em que o aluno busca resolver uma atividade sem ao menos perceber o que está sendo pedido.

Oliveira (2010) afirma em Olimpíadas Paraenses de Matemática: 2000 – 2009 que um dos objetivos das Olimpíadas de Matemática é o de expor o aluno a conteúdos que perpassam os definidos no currículo escolar. Analisando o referido livro pudemos perceber que o autor teve a preocupação de fazer inicialmente apresentação das provas da segunda fase e ao final realiza as devidas soluções, que acreditamos ser pelo intuito de que o aprendiz ao se deparar com os problemas busque primeiro, resolvê-los e após fazer tentativas confira com as respostas disponibilizadas.

TRATAMENTO DOS RESULTADOS: Um dos pontos nos materiais de apoio e livros pesquisados é que todos utilizam o termo "treinamento" como forma de aprendizado, todavia acreditamos que isso deve está aliado ao desenvolvimento de raciocínio, para assim despertar estratégias de resolução. Percebemos que muitos conteúdos olímpicos são pouco vistos em estudo convencional fazendo com que, do ponto de vista do aluno, seja de alta complexidade, também, devido a sua imaturidade intelectual em problemáticas dessa natureza. Contudo, não é apenas essa falta, podemos destacar que o aprendiz deve ser levado a desenvolver estratégias que permitam a apropriação das informações repassadas num encontro de estudo.

Pensamos ainda que a utilização de um recurso computacional pudesse auxiliar a percepção em algumas problemáticas, mobilizando alguma categoria de raciocínio podendo ser lógico-matemático formal ou não possuir características marcantes e determinantes de um raciocínio formal (ALVES, 2012). Alves (2012) ainda considera que a estrutura mental voltada à resolução de um problema pode ser encarada como um plano, no qual empregamos um conjunto de operações, e com estas podemos prever algum tipo de solução. Conforme Dominowski e Dallob (1996, p. 34 apud Alves, 2012) existem teóricos que acreditam que a resolução de problemas deve ser tratada a partir de uma lembrança recuperada pela memória, assim o aprendiz apenas consegue desenvolver modelos de resolução baseado em informações e formas já vistas e percebidas.

Alves (2012, p. 155) considera que a "quantidade e a diversidade de informações disponibilizadas ou percebidas no meio pelo aprendiz são determinantes pelo reforço, ou ao contrário, pelo esquecimento de dados retidos pela memória", dessa forma o aprendizado perpassa pelo processo de construção que deve ser feita pelo próprio autor. Assim, enquanto meros diretores de um contexto educacional, somos levados a direcionar o conhecimento sobre diversas alternativas, por isso entendemos que fazer uso de uma situação didática nos permite perceber a evolução feita pelo aprendiz na busca por caminhos que permitam encontrar a resposta para problemáticas ao qual tenha sido exposto. Ainda, conforme Alves (2012, p. 158):

> A História da Matemática registra vários casos em que os matemáticos evoluíram com suas conjecturas somente com o apelo da intuição [...] sem o apelo do aparato tecnológico, o matemático profissional se apoia somente em sua intuição (feeling) [...] O possível entrave é que no contexto de ensino e de investigação do estudante, tal tipo de ritual standard, registrado em pesquisa, pode ser nocivo e improdutivo. Com efeito, é esperado que a atividade de abstração do estudante atinja somente patamares de raciocínio mais elementares e incipientes. Outrossim, os argumentos intuitivos são essenciais neste contexto de aprendizado inicial, na medida em que o estudante compreende os próprios resultados alcançados e tal fato proporciona sua ulterior sistematização e reelaboração dos esquemas mentais adquiridos.

Sabemos que nem todos os problemas são passíveis de conjecturações pela percepção, contudo esse procedimento pode permitir que surja estratégias e argumentos matemáticos que propicie respostas para problemas de Olimpíada de Matemática. O nosso intuito é que usando a aula segundo a TSD e fazendo uso do software Geogebra o aprendiz possa através de construções ou da interatividade entender o procedimento de resolução de maneira mais facilitada que propicie despertar estratégias para que ocorra a formalização matemática das repostas para cada problema. Ao pensar na forma de como incentivar isso nos deparamos com a resolução de problemas de George Polya (1887) cujo objetivo principal de ensinar matemática na educação básica é o de ensinar o aluno a pensar, buscando desenvolver "argumentos mais estruturais e gerais, em detrimento de interpretações pessoais, informais, tácitas e intuitivas", conforme argumenta Alves (2012).

Analisaremos a seguir 13 dissertações do PROFMAT defendidas até Agosto de 2015 que abordam Olimpíada de Matemática, onde destacaremos o que cada uma trata.

Em "Perfil de desempenho dos alunos de ensino médio da unidade integrada Henrique Rocha, Tutóia-MA, frente a primeira etapa da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas", o autor Araujo (2015) mostra o desempenho dos alunos de ensino médio que realizaram pela primeira vez a OBMEP com a prerrogativa de avaliar o interesse pelo desafio, sendo que obteve como resultado um grande desinteresse na participação das provas. Aborda ainda que há grande dificuldade para o professor tornar a matemática agradável, contudo:

> A aprendizagem da Matemática, baseia-se em criar estratégias que façam com que o aluno atribua sentido e construa significado para as ideias matemáticas. Desta forma, o aluno consegue superar o ensino baseado apenas em desenvolver habilidade como calcular ou decorar conceitos pela memorização. O que existe, de fato, é uma luta incessante para evitar a repetição mecânica de conceitos e uma busca para que o estudante agregue o raciocínio lógico, a análise das situações para a resolução das mais diferentes problematizações, que envolvem cálculos de qualquer gênero ou situação, aplicações de fórmulas ou conceitos matemáticos. (ARAUJO, p 29, 2015)

Logo, percebemos que a repetição mecânica não traz bons frutos, mas é preciso que o aluno seja levado a desenvolver o raciocínio conduzindo ao entendimento e a construção de estratégias de pensamento independente. Araujo (p.30, 2015) também acredita que é necessário que o aluno desenvolva "habilidades que questione, levante hipóteses, e coloque a prova a veracidade dos fatos, a fim de obter sucesso em uma Olimpíada de Matemática".

Martins (2015) em "Colinearidade e concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da geometria plana no Brasil" busca descrever um material de apoio com conteúdo extra ao estudado em sala de aula como forma de incorporar mais conhecimento matemático, pois alega que muitas olimpíadas nacionais e internacionais exigem apenas que o aluno saiba os conceitos básicos e tenha um raciocínio rápido e criativo nas áreas de Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números; e isso pode ser adquirido através de aulas específicas, aulas de preparação, visando a prática da resolução de problemas olímpicos.

Andrade (2015) em “As Olimpíadas de Matemática ampliando e fortalecendo o processo de ensino-aprendizagem” mostra a importância, tecendo comentários, destacando os resultados e avanços de uma determinada escola na cidade de Sousa, Paraíba, através de uma Olimpíada de Matemática.

Badaró (2015) em sua dissertação “Do zero às medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática” incentiva a importância de ser realizado um curso preparatório para Olimpíada de Matemática, onde faz sugestões de assuntos a serem abordados em sala de aula, sendo estes divididos e estruturados em 10 encontros para a primeira e 8 para a segunda/terceira fase, bem como indica listas de exercício retirada de provas anteriores, principalmente, da OBM, e faz indicações bibliográficas. No entanto, pelo que foi percebido não há preocupação da metodologia de ensino é frisado apenas que deve ser feito a resolução de exercícios.

Gonçalves (2014) em “Geometria do triângulo: teoremas, problemas e aplicações em Olimpíadas de Matemática” visa com a sua dissertação apresentar teoremas e resultados ligados a pontos notáveis do triângulo que possa ser utilizado por alunos participantes de Olimpíada de Matemática na solução de problemas.

Calazans (2014) descreve em “Proposta de implantação do Centro Preparatório para Olimpíada de Matemática” a importância e as etapas para a implantação do Centro de Estudo, Pesquisa e Preparação para Olimpíadas de Matemática em Porto Seguro na Bahia, buscando realizar parcerias para que a mesma seja concretizada, tendo em vista que se trata apenas de um projeto até então. Nos primeiros encontros visará verificar quanto ao conhecimento prévio dos alunos e depois suprirá as lacunas trabalhando situações em que desenvolva o pensamento lógico, combinatório e probabilístico usando as questões do banco da OBMEP como um dos materiais bibliográficos. Ainda cita que depois de analisar muitos trabalhos acadêmicos, bem como textos dispostos na mídia nacional, comprovadamente a OBMEP traz vários benefícios ao meio escolar, desde aos alunos participantes até a escola (CALAZANS, p.28, 2014).

Américo (2013) disserta em “Resolução de problemas sobre análise combinatória para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP” sobre a resolução de trinta questões abordando a temática análise combinatória, dando ênfase ao raciocínio lógico e prático dedutivo, buscando evitar o uso de fórmulas prontas. Temos que de forma semelhante

Souza (2013) disserta em “Resolução de problemas sobre Aritmética para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP” a resolução de questões que possa dar suporte aos estudantes que busquem se preparar para a OBMEP, neste caso sobre a temática aritmética, “dando ênfase ao raciocínio lógico e prático dedutivo e às vezes fazendo uso de estratégias de resolução de problemas”. A autora Silva (2013) também disserta sobre a resolução de problemas, neste caso, sobre geometria para a OBMEP ressaltando que a parte teórica é uma competência de grande importância e enfatizando que seu trabalho deverá proporcionar-lhe um material para treino na resolução de problema.

Carvalho (2013) apresenta em “Funções convexas com aplicações em problemas de Olimpíadas de Matemática” conceitos básicos sobre funções convexas, médias e p-norma, destacando as principais definições, proposições, desigualdades e algumas aplicações significativas. Percebemos ainda que este material está voltado para alunos concorrentes de olimpíadas internacionais ou OBM - nível universitário.

Bragança (2013) em “Olimpíada de Matemática para a matemática avançar” propõe uma atividade educacional que envolve competições matemáticas ou que possam simplesmente ser utilizada em sala de aula, visando também estimular à participação e envolvimento de toda comunidade escolar.

Bonfim (2013) disserta sobre “Produção e aplicação de material didático para estudantes iniciantes em Olimpíadas de Matemática” desenvolvendo um material didático auxiliar na preparação para Olimpíada de Matemática, onde o mesmo contém forma e sequência de conteúdos e exercícios descritos em ordem crescente de dificuldade de forma que facilite a compreensão por parte dos alunos.

Victor (2013) em sua dissertação descreve a resolução de alguns problemas olímpicos num curso de preparação para Olimpíada de Matemática desenvolvendo estratégias onde seja usada pouca teoria e destacando as possíveis dificuldades que os participantes ativos desse contexto (aluno e professor) possam se deparar. É percebido que apenas os bancos de questões, provas anteriores e atividades propostas pelos sites de olimpíadas, tais como OBMEP, OBM, POTI não é suficiente para o aprendizado, pois os autores do processo de ensino não são instigados a conjecturar a solução, pois muitas vezes não se consegue identificar os caminhos trilhados até chegar ao fim desejado.

4.2 Análise Epistemológica

É de fundamental importância que o professor tenha ciência do nível de dificuldade da atividade proposta aos alunos, "pois a identificação dos obstáculos facilita a distinção entre as dificuldades encontradas no ensino [...] daquelas que são realmente inevitáveis porque são constitutivas do desenvolvimento do conhecimento" (ALMOULOUD, 2007, p. 153). Através da análise epistemológica podemos estar atentos aos obstáculos que podem e devem ser evitados para então buscar superá-los (BROUSSEAU, 1986 *apud* ALMOULOUD, 2007, p.153).

Conforme Chiummo e Oliveira (2015) os fatores: erros, dificuldades e obstáculos são os elementos crucias que barram o desenvolvimento da aprendizagem do aluno, o que no contexto olímpico, não permite que o mesmo consiga ter êxito. Analisando trabalhos científicos que possuem temáticas sobre os conteúdos: teorema de Pitágoras, semelhança de triângulo, fórmula de Bháskara e função, com um olhar epistemológico identificamos as categorias e os tipos de erros descritos a seguir.

Quadro 2 - Categorias de erros dos alunos

Categoria	**Explicação**
C1	Afirmação correta, justificativa correta/raciocínio válido (resposta correta)
C2	Afirmação incorreta, resposta incorreta. Raciocínio inválido. (Resposta errada)
C3	Afirmação incorreta, raciocínio incorreto.
C4	Afirmação incorreta, raciocínio correto.
C5	Nenhuma tentativa feita.

Fonte: MAKHUBELE (2014, p. 133 *apud* Chiummo e Oliveira, 2015, p. 186)

A seguir vemos as categorias dos erros que se dividem em: lapsos, erros conceituais, erros procedimentais e erros de ordem das operações.

Quadro 3 - Categorias de erros		
Categoria	**Tipo de Erro**	**Explicação**
Err1	Sem erro	O aluno não cometeu erro. Evidência de habilidade de prova.
Err2	Lapso	Engano, erro menor cometido porque o aluno estava preocupado. Causado por falta de concentração. Respostas erradas que os alunos podem sozinhos corrigir prontamente. Devido à falta de cuidado, provavelmente será repetido. Pode ser entendido automaticamente após rever o trabalho de outro.
Err3	Erro conceitual	Falta de conhecimento do conceito. Cometido pela não familiaridade com a terminologia. Cometido por um domínio insuficiente de fatos básicos, conceitos e habilidades.
Err4	Erro procedimental	Apresenta conhecimento conceitual, mas aplica equivocadamente o conceito. Alunos memorizaram os conceitos e propriedades sem conhecer quando aplicá-los e porque eles os aplicam quando realizam a resolução. Alunos conhecem os conceitos e propriedades das figuras, mas não consegue aplicá-los no problema.
Err5	Erro de ordem da operação	Falta de ordem quando realizam a resolução que envolve dois ou mais passos. Aplicam cegamente os procedimentos sem conhecer de fato como prosseguir a resolução. Problema em termos de raciocínio dedutivo. Cometido por esquemas incompletos.

Fonte: MAKHUBELE (2014, p. 133 *apud* Chiummo e Oliveira, 2015, p. 186)

Esclarecido as categorias que identificam dificuldade apresentada pelos alunos, analisemos cada assunto.

No estudo de Chimmo e Oliveira (2015) foi constatado que o erro conceitual (Err3) é um dos grandes problemas dos alunos quando devem usar semelhança de triângulo, ou ainda, o erro procedimental (Err4), pois embora conheça o conceito e suas propriedades aplicam de forma indevida. Quanto à utilização da fórmula de Bháskara, Bona (2006) descreve em seu trabalho que os erros cometidos pelos alunos referem-se mais ao erro procedimental (Err4) e o erro de ordem da operação (Err5), pois nas atividades propostas os alunos apresentaram dificuldades nos cálculos básicos das operações aritméticas e no uso dos sinais de relatividade ao substituírem o número na fórmula.

No contexto de função, Sierpinska (1992) acredita que um dos maiores fatores que acarreta obstáculos na aprendizagem deste conteúdo está vinculado a desconexão do seu conceito com a realidade, devido a crença de que a Matemática, em particular, a função não está ligada aos problemas práticos; outra barreira consiste na relação, no entendimento, das variáveis dependentes (y) e independentes (x), que muitas vezes é feita a sua utilização de forma indevida, principalmente no que concerne a domínio e imagem, "uma vez que a ordem das variáveis é vista como irrelevante" (BARRETO e CASTRO FILHO, 2010, p. 3), pois é importante que os alunos saibam a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar, afirma Caraça (1975). Trindade (entre 1999 e 2009) ainda considera que realizar com os estudantes "atividades que permitam desenvolver e/ou adquirir as noções ligadas a este conceito, como de correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização, básicas para o aprendizado de funções e o domínio dos diferentes registros de representação de funções" pode contribuir significativamente para um aprendizado satisfatório, o que implicará em redução das dificuldades apresentadas pelos discentes.

Bastian (2000) ao realizar um levantamento histórico e epistemológico do Teorema de Pitágoras, constatou ao aplicar com alunos de 7ª e 8ª séries (atualmente 8º e 9º ano), que os erros cometidos pelos alunos estão vinculados, além do tipo de abordagem que influencia na forma como os mesmos concebem-no fazendo ter maior significação pelos procedimentos operatórios e outras variáveis de "difícil administração" (BASTIAN, 2000, p. 181), dificuldade em interpretação e conversão dos enunciados, falta ou escassez de conhecimentos disponíveis, falta de hábito em resolver questões encadeadas por vários itens e o despreparo no uso de expressões algébricas.

Com as análises concluídas podemos enfatizar que o entendimento ou aplicação dos conceitos e as operações elementares são os maiores obstáculos enfrentados pelos aprendizes, assim sabemos que diante das situações olímpicas que iremos apresentar, devemos estar atentos inicialmente como os alunos irão conceber cada problema proposto para sua ação e se poderão ter condições de agirem sozinhos sem auxílio do professor.

5 ANÁLISE A PRIORI

Nessa etapa da ED buscamos identificar quais são as atividades que iremos conceber para ser aplicado em sala de aula, especificamente no contexto olímpico assim, apontamos problemáticas que envolvam conhecimentos prévios dos discentes, até por que o nosso intuito não é fazer a descrição de conhecimentos novos como em Martins (2015), Gonçalves (2014) e Carvalho (2013). Todavia, visamos realizar primeiro a identificação das variáveis didáticas.

5.1 Identificação de variáveis didáticas

Na investigação de provas e bancos olímpicos resolvemos focar na análise de questões em que pudéssemos fazer uso do software Geogebra como facilitador na conjecturação de soluções das problemáticas propostas e que contemplasse aquisições cognitivas, conhecimentos prévios, que os alunos já possuíssem. Observamos que as questões que contemplam o assunto de função estão vinculadas à geometria interativa, especificamente no cálculo de área; enquanto que os que possuem como conteúdo a semelhança de triângulo estão atrelados ao uso de construções e percepções geométricas fixas; por sua vez, o teorema de Pitágoras e a fórmula de Bháskara aparecem como ferramentas auxiliares num contexto geométrico, no caso dos problemas analisados. Foi percebido, após se debruçar na pesquisa em tais problemáticas olímpicos, que estes aparecem com grande frequência tanto nas provas quanto nos bancos da OBMEP.

5.2 Descrição e concepção da *Situação Olímpica*

Descreveremos neste tópico duas situações olímpicas, identificando os conhecimentos prévios necessários para resolver cada problemática. Entendemos que esta fase, análise a priori, é muito importante, pois se trata de um momento de previsões, pois o professor pesquisador deve levar em conta que deverá "cumprir o objetivo que fora pensado", conforme afirma Sousa (2014, p. 69), pois buscamos fazer com que o aluno consiga obter êxito identificando, pelo menos, uma estratégia de solução.

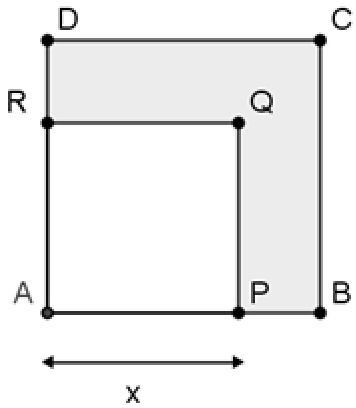
No nosso produto educacional mostramos ainda os procedimentos necessários para realizar as construções e interações das representações geométricas que aparecem nos problemas. Denotamos no apêndice outras oito situações olímpicas e tornamos a repetir as que serão expostas posteriormente, tendo em vista que se trata efetivamente do produto, onde descrevemos todas com as respectivas descrições de comandos no software.

5.2.1 SITUAÇÃO OLÍMPICA I

Conhecimentos prévios: área de quadrado, função definida em sentenças.

Problema – (Prova fase 1 - OBMEP 2015 – questão 13 modificada)

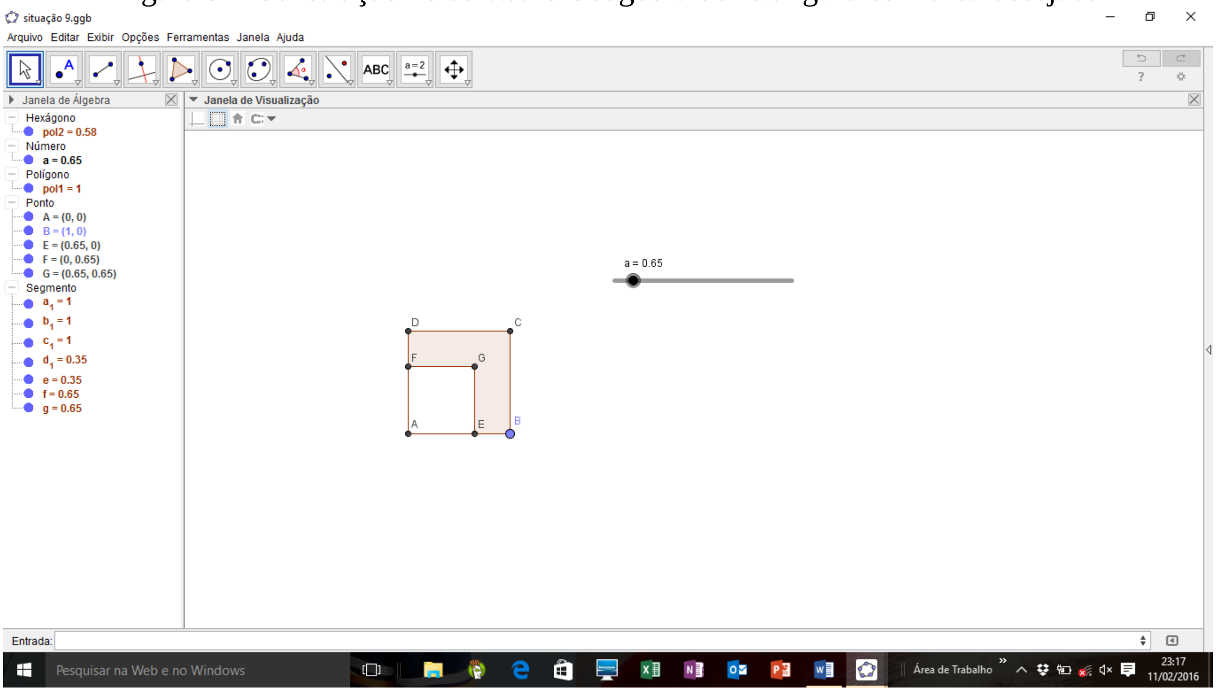
Um quadrado *ABCD* tem área 1. Um ponto *P* desloca-se ao longo da semirreta *AB*, partindo do ponto *A* para a direita, conforme mostra a figura. Se *S* é a área da região compreendida entre os quadrados *ABCD* e *APQR*, destacada em cinza, escreva a variação da área S em função de x e represente graficamente.



- **Ação** - Essa fase é marcada pela ação inicial que o aprendiz tenha ao se deparar apenas com o enunciado e as construções apresentadas no próprio enunciado. Acreditamos que haja dificuldades em perceber que a função que descreve a área seja descrita por duas sentenças com domínios distintos. Esperamos que os alunos notem que a área $S(x)$ desejada se trata da diferença entre as áreas do quadrado maior $(A_M(x))$ pela área do quadrado menor $(A_m(x))$, identificando de maneira geral, $S(x) = A_M(x) - A_m(x)$, e que teremos o quadrado ABCD como sendo o maior, e isso acontece quando x estiver entre 0 e 1, bem como APQR será o maior quando x for maior que 1, permitindo assim que a função seja definida em dois intervalos.

- **Formulação** – Nessa etapa, por ser marcada pela modelagem que o aluno, aos poucos deverá apresentar, o professor entra em cena mostrando a movimentação da figura construída no Geogebra para que fique clara a divisão dos intervalos que descrevam as áreas que não contemplem a interseção e isto se dará usando o comando controle deslizante do referido software. Por conseguinte, é esperado que os alunos pensem na área de interesse como sendo: $S(x) = A_M(x) - A_m(x)$, onde $A_M(x)$ e $A_m(x)$ é a área do quadrado maior e do quadrado menor, respectivamente. A imagem fica conforme mostrada na figura 3 a seguir.

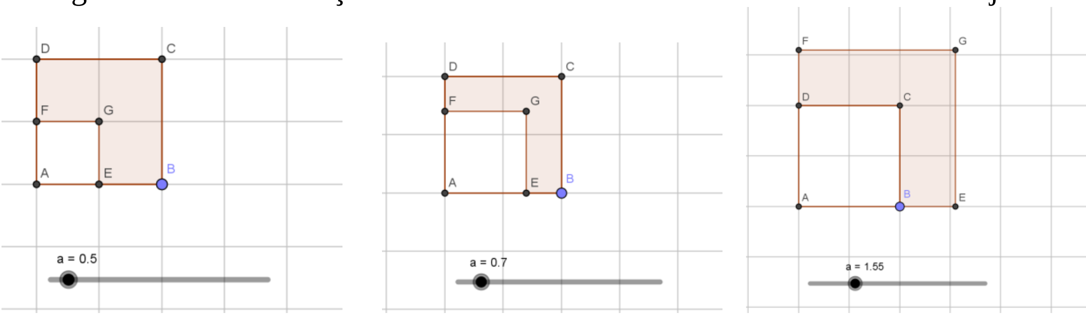
Figura 3 – Construção no software Geogebra do retângulo com área desejada



Fonte: Construção nossa.

A movimentação apresentada segue com a variação do segmento AE em três posições, facilitando assim a percepção do aluno, de forma a propiciar a intuição, implicando numa possível modelagem matemática.

Figura 4 – Movimentação do controle deslizante identificando a área desejada



Fonte: Construção nossa

Podemos visualizar que quando 0<x<1, temos que o quadrado APQR é menor que o quadrado ABCD, contudo se x>1 vemos que APQR passa a ser maior que o quadrado ABCD, implicando que se deve calcular a área para o intervalo 0<x<1 e x>1. Contudo é notável que haja discussão entre os aprendizes para que determinem, de fato, se estão conseguindo algebrizar as áreas conforme estejam visualizando. É esperado que para 0<x<1, seja escrito $S(x) = 1 - x^2$ e para x>1 que $S(x) = x^2 - 1$, pois x é a medida do segmento AP. Formalizando essa função como expressaremos a seguir.

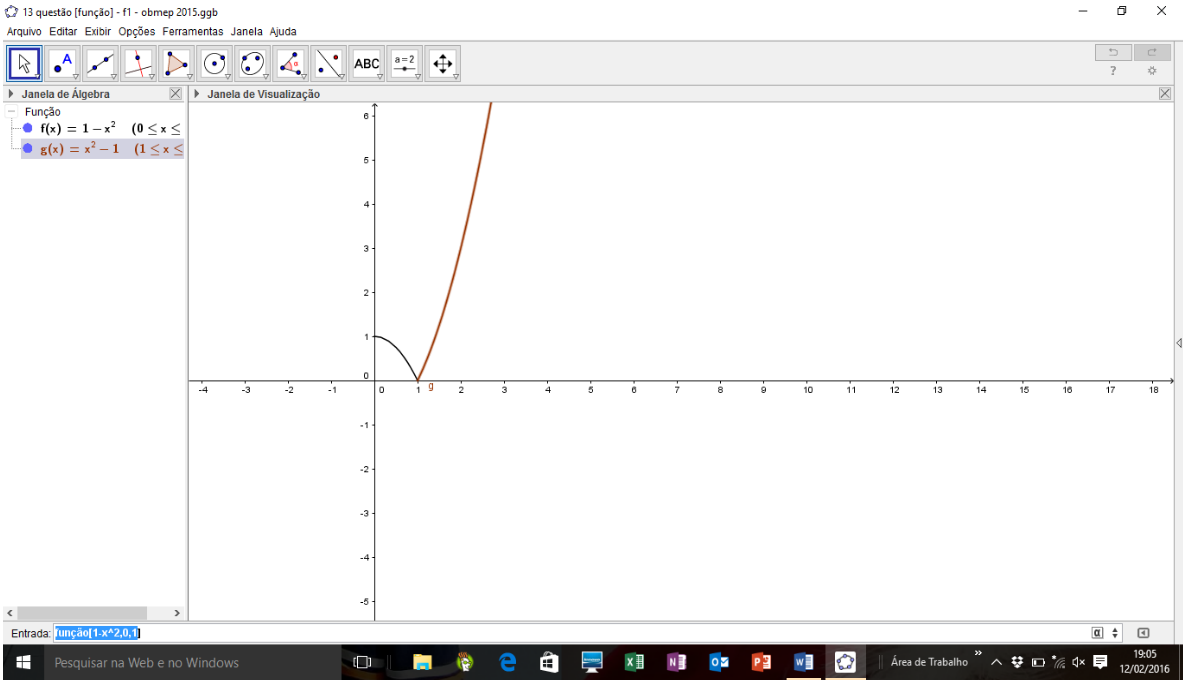
$$S(x) = \begin{cases} 1-x^2, se\ 0 < x < 1 \\ x^2 - 1, se\ x > 1 \\ 0, se\ x = 0 \\ 1, se\ = 1 \end{cases}$$

Podendo ainda ser reescrita assim:

$$S(x) = \begin{cases} 1-x^2, se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, se\ x > 1 \end{cases}$$

Na construção gráfica não deveria ocorrer erro, todavia, entendemos que os aprendizes podem não estar acostumados a representar graficamente função definida por sentenças. A visualização pode ser indicada pelo professor pesquisador, caso os alunos apresentem resistência em construí-lo ou simplesmente para conferência.

Figura 5 – Gráfico correspondente a S(x)



Fonte: Construção nossa

- **Validação -** O procedimento de validação indica que é um momento de averiguar o que foi construído, modelado através de procedimentos matemáticos. Nessa etapa os aprendizes deverão expor suas respostas e mostrar através da escrita ou de argumentos convincentes que sua resposta está correta, sendo que o mesmo pode ser ou não aceita entre os colegas. Nesse problema o aluno teve que fazer uso dos saberes: área de quadrado, função definida em sentenças, principalmente no que concerne a identificação do domínio e a construção de seu gráfico.

Modelo matemático que deve ser apresentado:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - x^2, se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, se\ x > 1 \end{cases}$$

onde o gráfico descreve duas parábolas, uma com concavidade voltada para cima ($x^2 - 1, se\ x > 1$) e outra com concavidade voltada para baixo ($1 - x^2, se\ 0 \leq x \leq 1$), conforme apresentado na figura anterior.

- **Institucionalização** – Com o intuito de formalizar todos os procedimentos pensados e criados pelos alunos buscamos nessa fase enfatizar os conhecimentos prévios que foram usados e como deve proceder a escrita. Na referida situação percebemos que o conceito de função se estende a variação de área de retângulo, a identificação de domínio é primordial para que seja posteriormente descrito o gráfico da função, que neste caso foi definida por duas sentenças quadráticas. Devido o uso da TSD no contexto de Olimpíadas de Matemática trabalhada nessa pesquisa se referir a fazer uso de conceitos e conteúdos já estudados e conhecidos pelos alunos, basta apenas frisarmos. Vejamos quais conceitos usados.

  Conforme Iezzi e Murakami (1977), temos as definições:

Função

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boldsymbol{f} \text{ é } \boldsymbol{aplica}\text{çã}\boldsymbol{o \ de \ A \ em \ B} \iff \forall \, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists \, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} | \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}$$

Função Quadrática

Uma aplicação f de R em R recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in R$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in R$, onde $a \neq 0$, isto é, $f: R \rightarrow R$

$x \mapsto ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Tendo de fato o conhecimento da definição de função, torna-se necessário que seja claro o **conceito de domínio**, que apresentamos novamente, de acordo com Iezzi e Murakami (1977).

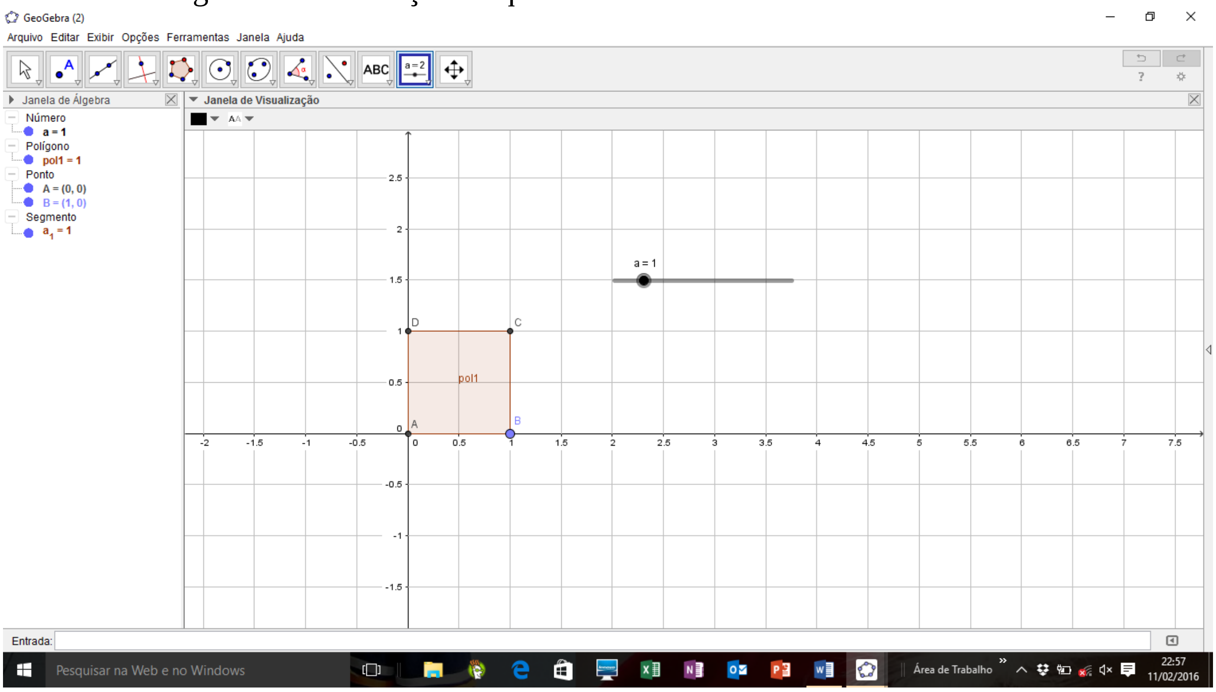
Considerando que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um domínio e uma imagem. Chamamos de **domínio** o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Assim, domínio é o conjunto de partida, isto é, $D = A$.

A clareza desses conceitos servirá de embasamento para a resolução do problema proposto.

DESCRIÇÃO DOS COMANDOS NO GEOGEBRA

Descreveremos a seguir os comandos que permitirão a construção e interatividade da Fig.3 (mostrada na descrição da situação olímpica I) distinguindo as áreas em diversos intervalos. Primeiro criamos um “Polígono regular” ABCD medindo um, e para isso podemos usar o plano cartesiano e exibir o fundo quadriculado para auxiliar. Em seguida construímos um “controle deslizante” *a* que deverá variar de 1 até o valor desejado, que neste caso considerarei 6.

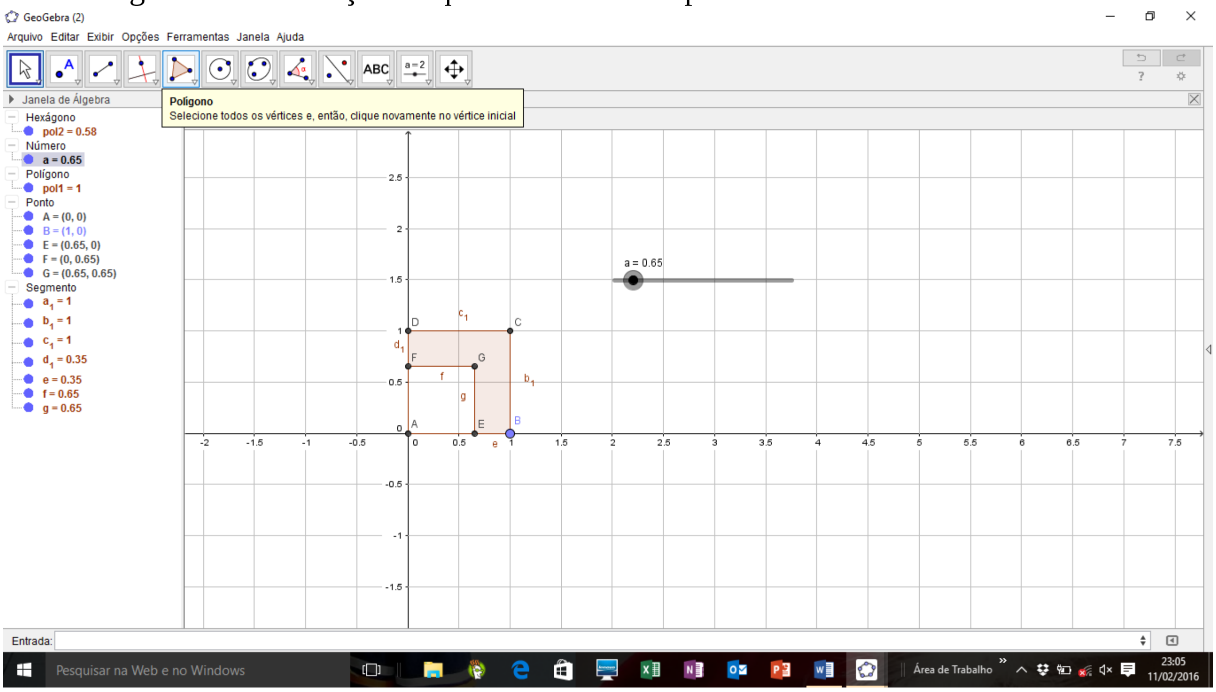
Figura 6 – Construção do quadrado ABCD e do controle deslizante *a*



Fonte: Construção nossa

Depois criamos três pontos na “Caixa de entrada” um no segmento AB, (a,0), outro em AD, (0,a), e um terceiro denotado por (a,a). Após descrição dos pontos EFG, usando o comando “Polígono” com vértices DCBEGF obtemos a área desejada.

Figura 7 – Construção do quadrado AEFG dependente do controle deslizante *a*



Fonte: Construção nossa

Para obtenção de uma aparência elegante devemos desabilitar a opção “Exibir rótulo”, eixo e malha, conforme temos em figura 3. E a movimentação pode ser constatada pela figura 4. Consideramos que a apresentação da interatividade propicia o professor conseguir ter maior atenção dos alunos e que pode facilitar na percepção de como modelar o problema.

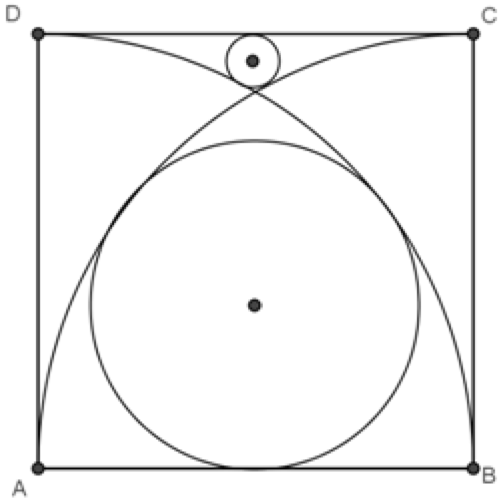
Através do uso de todos esses comandos é facilitado aos olhos do professor como desenvolver sua aula com as figuras mostradas, tendo em vista que toda a algoritmização, o que não é nada fácil de ser construída, foi realizada.

5.2.2 SITUAÇÃO OLÍMPICA II

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras, produto notável.

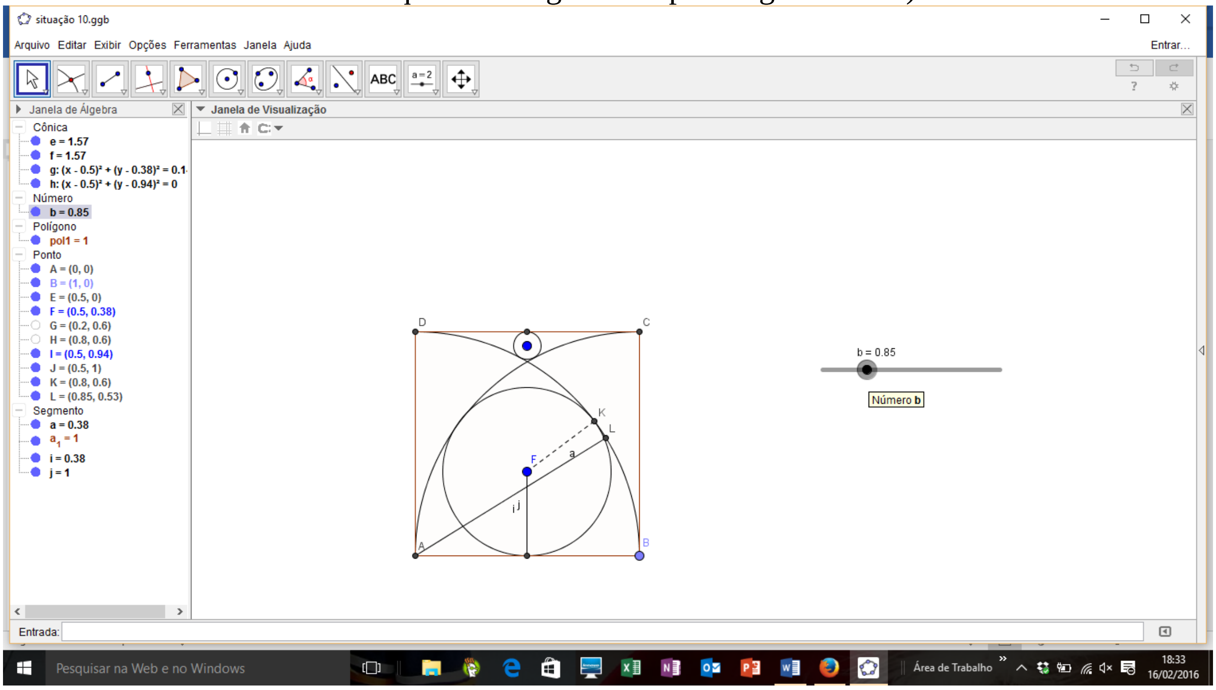
Problema - (Prova fase 1 – OBMEP 2012 – questão 10).

Na figura, *ABCD* é um quadrado de lado 1 e os arcos *BD* e *AC* têm centros *A* e *B*, respectivamente. Os círculos tangenciam esses arcos e um lado do quadrado, como indicado. Qual é a razão entre os raios do círculo maior e do círculo menor?



- **Ação –** Inicialmente o aprendiz poderá realizar traços que possam auxiliar em desenvolver alguma estratégia que desperte sua ação, acreditamos que os alunos buscarão trabalhar com os raios, tanto das circunferências totalmente visíveis quanto dos quartos das circunferências de raio 1 e também pensem em usar o teorema de Pitágoras. Conforme os aprendizes apresentem dificuldades cabe ao professor apresentar algumas construções que permitam visualizar e conjecturar ideias que sirvam de apoio à resolução. Este procedimento ocorrerá na fase seguinte, na formulação.
- **Formulação –** Essa etapa é marcada pelas discussões e modelagem matemática realizada pelos alunos. No momento de cada construção exposta pelo professor, o mesmo poderá induzir os aprendizes realizando questionamentos sobre suas percepções quanto ao que estiver sendo exibido.

Figura 8 – Movimentação do raio do círculo maior passando pelo segmento FK (raio do círculo que está tangenciado pelo segmento AB)



Fonte: Construção nossa

Desejamos que com a interatividade seja percebida alguns elementos, tal como a apresentação do triângulo retângulo AEF que contribuirá na identificação do raio do círculo maior. Por conseguinte, a dificuldade mostrada pelo aprendiz talvez seja identificar as medidas do referido triângulo, mas esperamos que com a construção, vista na figura 9, isso seja sanado. Concluindo então que:

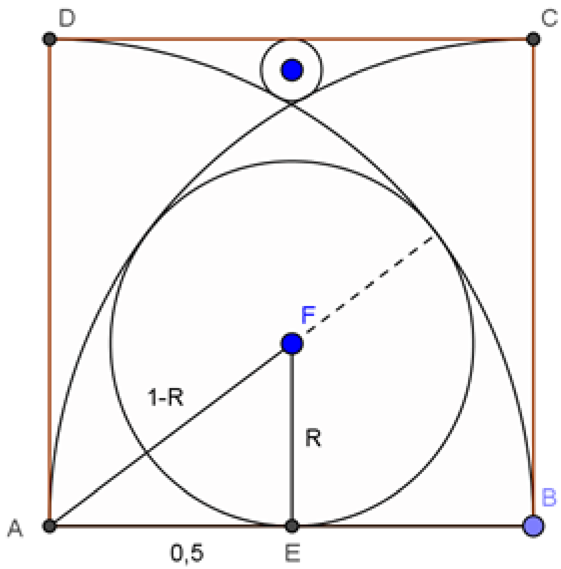
Hipotenusa: 1-R (R sendo o raio do círculo maior)

Cateto1: 0,5

Cateto2: R

Figura 9 – Identificação dos elementos do triângulo retângulo

AEF na imagem construída no Geogebra



Fonte: Construção nossa

Podendo assim aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo:

$$R^2 + 0{,}5^2 = (1 - R)^2$$

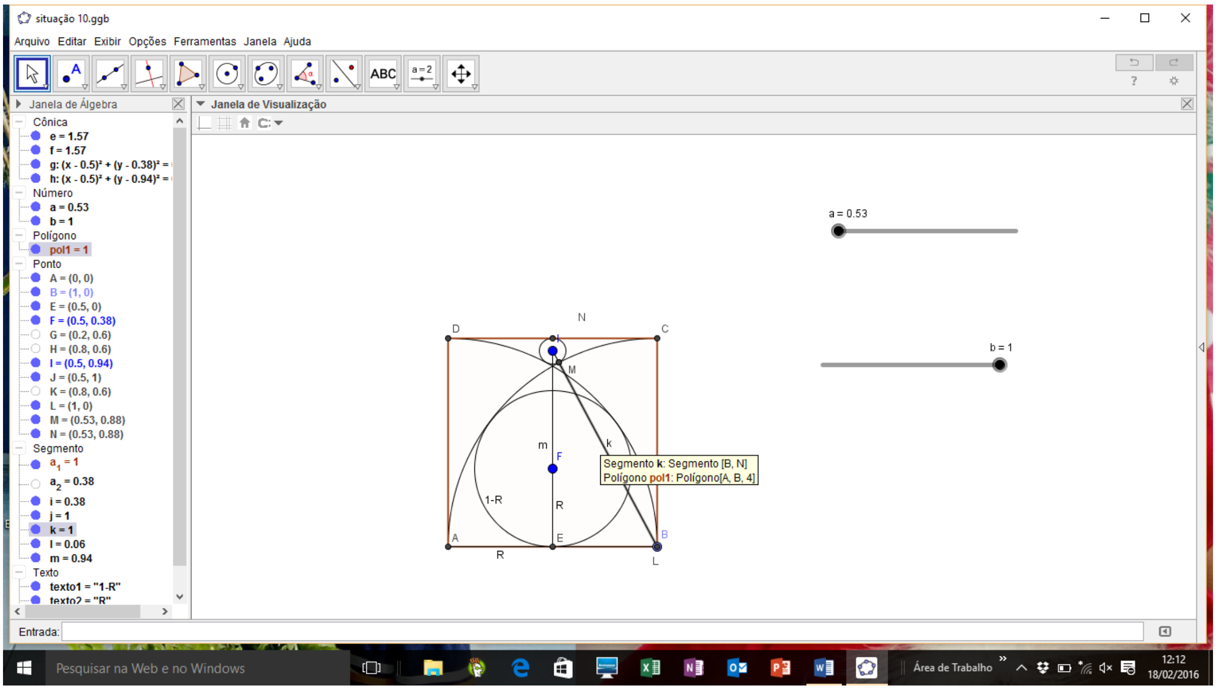
$$R^2 + 0{,}25 = 1 - 2R + R^2$$

$$2R = 1 - 0{,}25$$

$$R = 0{,}375 = \frac{3}{8}$$

De maneira semelhante, devemos observar a construção na figura 10 para encontrar o raio (r) do círculo menor.

Figura 10 – Movimentação do segmento BN auxiliando a identificação da hipotenusa para encontrar o raio do círculo menor



Fonte: Construção nossa

Após constatação das medidas do triângulo retângulo, provavelmente o aluno calculará o valor de r (raio do círculo menor) usando o teorema de Pitágoras.

$$0{,}5^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$$

$$0{,}25 + 1 - 2r + r^2 = 1 + 2r + r^2$$

$$0{,}25 = 4r$$

$$r = \frac{1}{16}$$

Essa é a escrita que os alunos deverão expor, contudo pode acontecer de haver erros de cálculo aritmético, sendo este corrigido, talvez, no procedimento de validação.

- **Validação** – Essa etapa é marcada pelos argumentos de comprovação e apresentação das estratégias seguidas, a escrita apresentada pelos aprendizes tanto quanto a sua algebrização e resultados encontrados nos cálculos aritméticos. Podemos destacar que o elemento crucial nesta resolução se trata da identificação do triângulo retângulo e de suas medidas, é possível que os alunos se confundam ao apresentar os catetos ou ainda a hipotenusa. Todavia, nesta fase deve ser validada a resposta conforme os aprendizes devem ter percebido a interatividade apresentada pelo professor e conseguido algebrizar, aplicando assim o *Teorema de Pitágoras.*

Formalizando então as expressões:

$$R^2 + 0{,}5^2 = (1 - R)^2 \qquad \text{(I)}$$

$$0{,}5^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2 \qquad \text{(II)}$$

Obtemos (I) para identificação do raio do círculo maior e (II) para o raio do círculo menor.

- **Institucionalização** - Marcada pela formalização da resposta apresentada pelo professor, essa fase deverá servir de auxílio quanto a organização da escrita e constatação de como o Teorema de Pitágoras pode ser usado sem a percepção inicial de um triângulo reto.

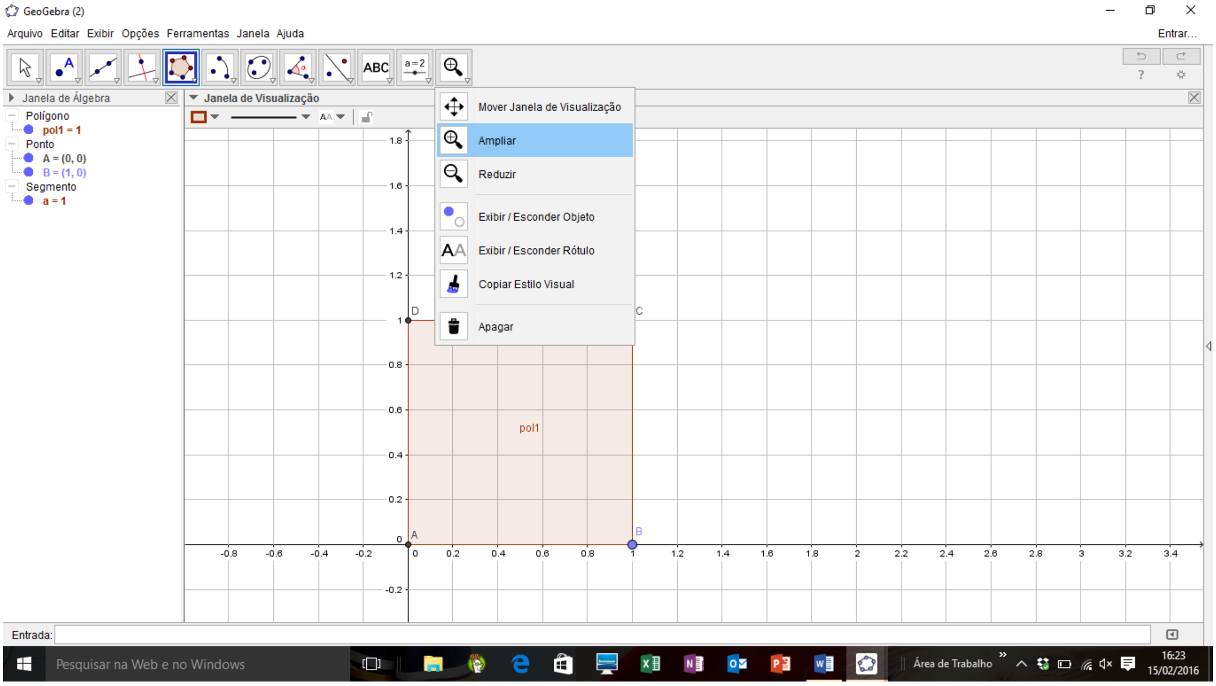
Conceito usado

Teorema de Pitágoras: *Dado um triângulo retângulo, a sua hipotenusa ao quadrado é a soma do quadrado dos catetos.*

DESCRIÇÃO DE COMANDOS NO GEOGEBRA

Adiante descreveremos os comandos que permitirão as construções geométricas que poderão auxiliar no desenvolvimento do raciocínio dos aprendizes, bem como algumas que serão interativas. Primeiro desenhamos um quadrado usando o comando “Polígono regular” de 4 lados, nesse caso de medida exatamente 1, onde ampliamos a tela através do comando “Ampliar”.

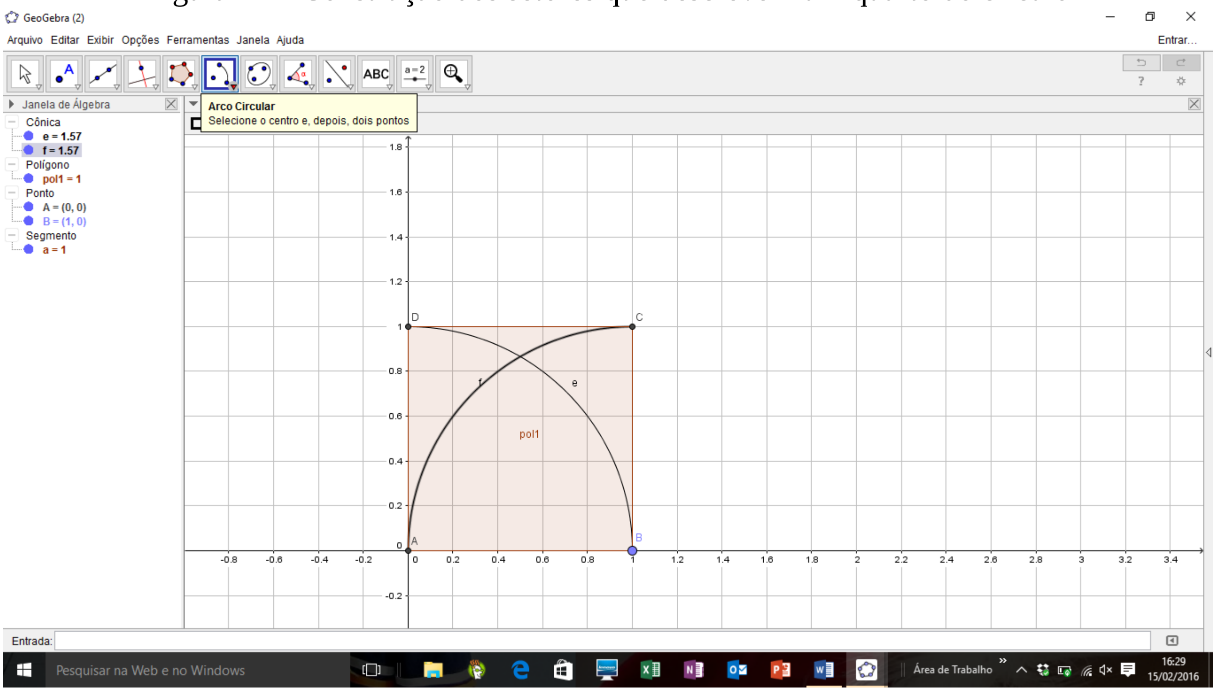
Figura 11 – Quadrado de lado 1 e ampliação da imagem



Fonte: Construção nossa

Depois do quadrado construído devemos criar os setores usando “Arco circular”, que ora, terá como centro o ponto A e extremidades de arco BD e, por conseguinte, centro B e arco AC.

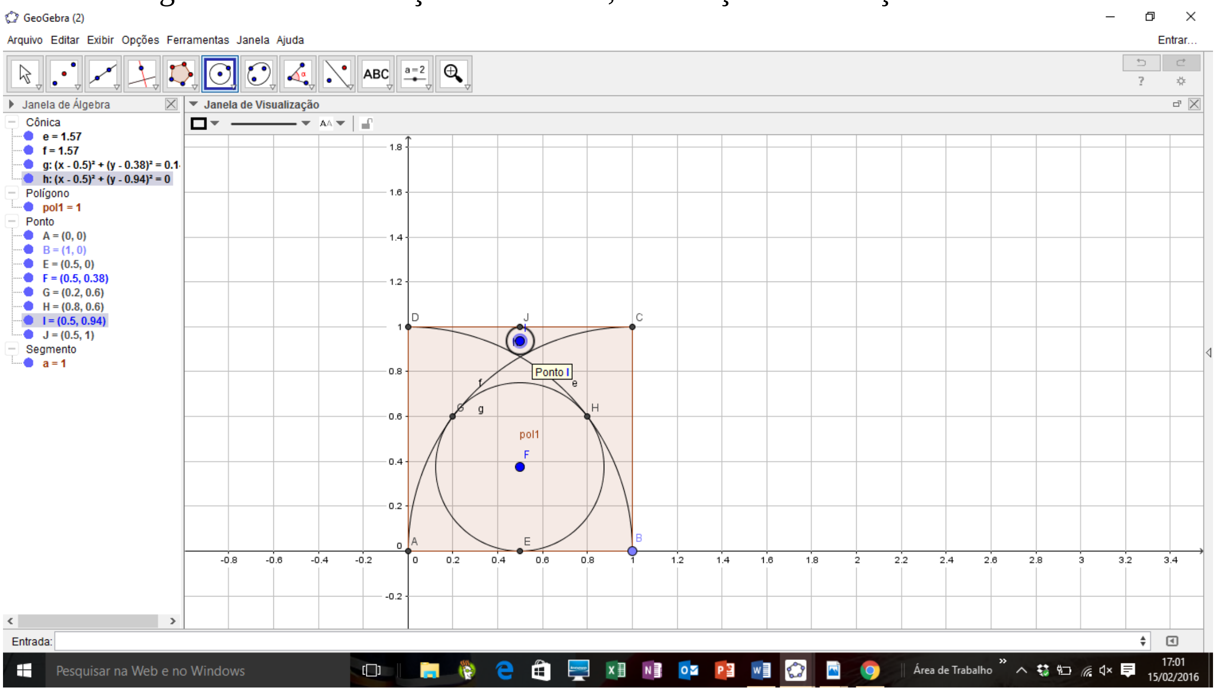
Figura 12 – Construção dos setores que descrevem um quarto do círculo



Fonte: Construção nossa

Para realizarmos a construção dos círculos necessitamos indicar o ponto médio do segmento AB e de CD usando “Ponto médio ou centro”, bem como indicar os centros e depois fazer uso do comando “Círculo dados centro e um de seus pontos”, que nesse caso deverá ser inserido na “Caixa de entrada” o ponto (0.5,3/8) (os valores deverão ser esses), e o outro ponto deverá ser (0.5, 15/16). Feito isso ao clicarmos no comando desejado indicamos o centro e o ponto médio, ficando como mostrado abaixo na figura 13. Marcamos também os pontos de interseção, usando o comando “Interseção de dois objetos” que poderão nos auxiliar a realizar algumas construções posteriores.

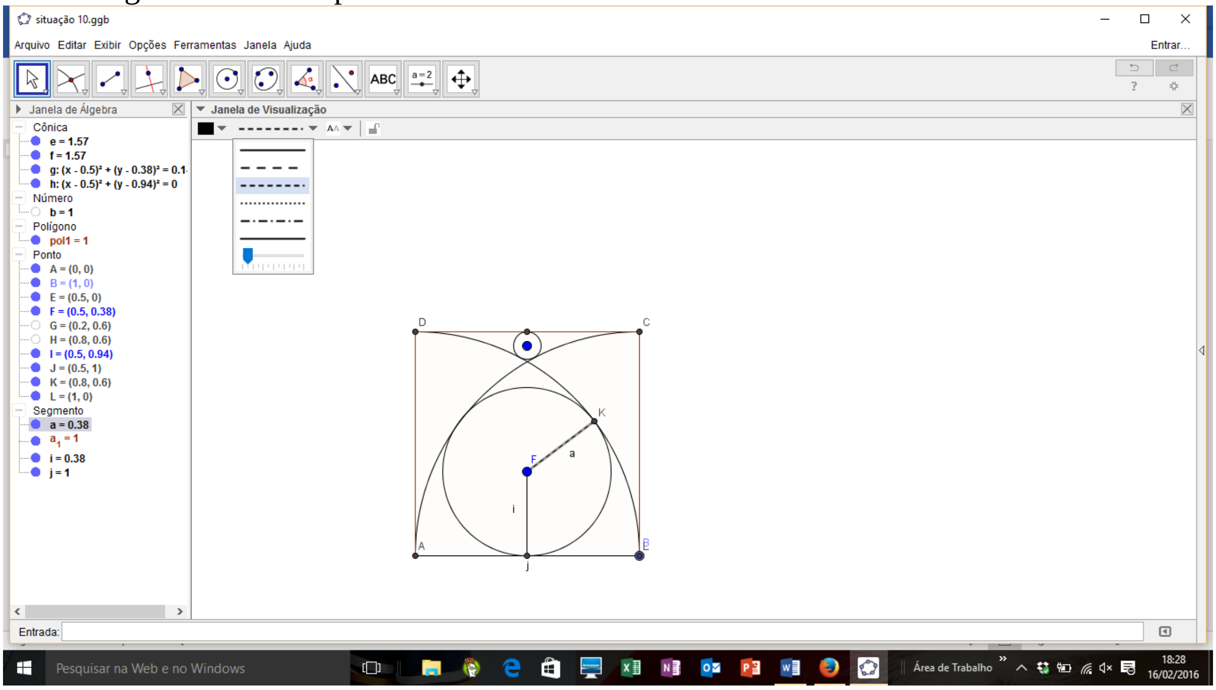
Figura 13 – Identificação dos centros, construção e interseção dos círculos



Fonte: Construção nossa.

Após realizarmos a representação geométrica semelhante ao apresentado no enunciado devemos esconder os rótulos e deixar transparente a coloração. Acrescentamos ainda os elementos que poderão assessorar no raciocínio dos alunos. Primeiro inserimos um segmento entre o centro do círculo central e a interseção do lado direito com o arco $\widehat{ABD}$, neste caso deixamos pontilhado, conforme figura 8.

Figura 14 – Segmentos que descrevem o raio do círculo maior que está no quadrado ABCD, onde o segmento FK está pontilhado



Fonte: Construção nossa

Realizamos a construção de dois segmentos, esperando que fique claro aos aprendizes que se trata do raio e depois criamos um segmento interativo usando os seguintes procedimentos:

- “Controle deslizante”, que chamaremos de b variando entre 0.8 e 1 (que correspondem a variação no eixo x do ponto desejado);

- na “Caixa de entrada” inserimos o ponto (b,sqrt(1-b^2)) que poderá ser chamado de L e depois “Segmento[A,L]”.

Descrevendo a sequência de comandos para figura 10, temos:

- criação de um controle deslizante *a* variando entre 0.53 a 1;

- inserção de um ponto descrito na “caixa de entrada” através do comando (a,sqrt(1-(a-1)^2));

- identificação da interseção do círculo menor com o arco $A\hat{B}C$;

- construção de um segmento com extremidades no centro do círculo menor (I) e a interseção com o arco $A\hat{B}C$ (M), no caso, em “caixa de entrada” inserir o comando “Segmento[I,M]”;

- Criação de um “Segmento [I,E]”, propiciando a construção de um triângulo retângulo.

Após as construções o aprendiz deve ser levado, através da interatividade, fazer a identificação das medidas dos catetos e da hipotenusa, devendo constatar as seguintes expressões: 0.5, 1-r,1+r, respectivamente.

Aqui finalizamos a nossa proposta de trabalho, onde as atividades do contexto de Olimpíada de Matemática foram pensadas de forma diferenciada sendo realizada a utilização do software Geogebra como ferramenta auxiliar para o aprendizado no desenvolvimento de aula sequenciada segundo a TSD. Constatamos que a *situação olímpica* é uma forma de contribuir na resolução de problemas olímpicos de forma que o aprendizado ocorra de forma diferenciada, tendo em vista que todo o desenvolvimento deve ser seguido pelos conhecimentos que os alunos já detém, pois mesmo sabendo que tais questões exijam um pouco mais de raciocínio do que os problemas convencionais, um dos objetivos é permitir que os alunos entendam e participem diretamente da solução da atividade implicando num aprendizado de qualidade. Assim, acreditamos que fazer uso de um *milieu*, através de uma metodologia de ensino, pode auxiliar o professor em suas atividades de olimpíada em sala de aula.

5.3 Descrição do Produto Educacional

Todo o trabalho desenvolvido nesta pesquisa teve como finalidade produzir um material didático a ser utilizado pelo professor no ensino médio como forma de auxiliar o aprendizado dos alunos no contexto de problemas olímpicos. Conforme Moreira e Nardi (2009, p.4) “o mestrando deve desenvolver alguma estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos [...] o trabalho de conclusão deve gerar um produto educacional que possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores”, esses autores acrescentam ainda que há muitos trabalhos acadêmicos produzidos em Ensino de Ciências e Matemática que não atingem as salas de aula brasileiras, por isso da importância da obtenção desses meios de ensino aos nossos alunos. Assim, descrevemos nosso produto educacional como sendo um elemento auxiliar para o professor que deseja incluir problemas olímpicos em aulas convencionais, sendo apoiado pela TSD e pela ferramenta computacional Geogebra. Sobre Mestrado Profissional em Ensino (MPE), Ostermann (2009, p. 2) acrescenta que neste tipo de mestrado o foco não é a pesquisa, mas a formulação de questões-foco que é usual em projetos de investigação. Afirma ainda que “uma questão-foco deve se relacionar a formas de se conceber, implementar e avaliar inovações didáticas (estando vinculadas a metodologias de ensino, conteúdos e avaliação)”, dessa forma, produzimos um caderno de apoio que contém problemas de contexto olímpico que possa ser utilizado em sala de aula, com vistas a preparar para Olimpíada de Matemática fazendo uso das Situações Olímpicas. Devido a ferramenta usada ser o Geogebra, percebemos que muitos dos problemas possuem natureza geométrica, sendo indicado para aulas de Geometria. As situações serão divulgadas no portal do professor disponibilizado pelo MEC.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando pesquisas que abordam a Olimpíada de Matemática, notamos que nenhum trabalho encontrado teve a preocupação de olhar para esta competição através da ótica da metodologia de ensino sendo um dos focos da mesma, além de buscar descobrir talentos nesta área de ensino, visa despertar qualidade no ensino de Matemática. Por isso, entendendo da necessidade de mostrar que poderíamos pensar através desses olhos, usamos a Situação Didática como uma forma de conceber esta olimpíada, fazendo uso de problemas olímpicos em sala de aula com a preocupação de auxiliar o professor em sua aplicação.

Percebemos que usando o software Geogebra como facilitador das percepções e se apoiando na realização de perguntas feita aos alunos, como forma de auxiliar na interação diante do que estava sendo exposto, o professor pode obter uma aula em que permitirá que o discente siga todos os passos de uma resolução de problema olímpico. Desde a sua concepção para agir (no momento de ação), modelando através de conjecturas (na fase de formulação) e depois averiguando se está ou não correto, buscando confirmar sua solução (no momento da validação), havendo por fim a explanação do docente diante do conhecimento usado e da resolução propriamente dita como maneira de formalização na escrita (na fase da institucionalização). Cada etapa da solução será conhecida e construída pelo próprio aprendiz, implicando na evolução de seu aprendizado.

Constatamos que o software Geogebra possibilita a exploração da visualização como elemento impulsionador das estratégias implementadas nas *situações olímpicas*, pois para cada problema apresentado, conseguimos descrever elementos que impulsionasse a ação do aluno diante da atividade proposta. Verificamos pelas análises feitas que a Teoria das Situações Didáticas permite considerarmos o ensino para as Olimpíadas de Matemática através de uma metodologia de ensino. Como pudemos constatar ao longo dessa dissertação as Olimpíadas de Matemática, principalmente a OBMEP, veio exatamente para alavancar o ensino desta disciplina, por isso não podemos e nem devemos achar que olhar para este tipo de competição é apenas uma competição, onde tudo acontece no momento da prova, mas é preciso manter viva o entendimento de que é necessário que a mesma esteja presente nas salas de aula.

Buscamos induzir um olhar diferenciado a problemas desta natureza, pois sabemos que os mesmos requerem um raciocínio mais apurado, por isso desenvolvemos situações com vistas a despertar e fazer os alunos perceberem que são capazes de resolvê-las, mesmo que com ajuda, quando necessário. Constatamos que as construções realizadas no Geogebra exigem um tempo de dedicação, pois algumas não são tão fáceis de serem feitas, por isso que no produto educacional produzimo-las.

Assim, propomos a descrição do ensino para Olimpíada de Matemática através da Teoria das Situações Didáticas, com estrutura baseada nas duas primeiras fases da Engenharia Didática, onde fizemos o uso do software Geogebra como ferramenta auxiliar na resolução dos problemas olímpicos, mostrando que é possível pensar no contexto olímpico através de um olhar metodológico.

Inicialmente fizemos um levantamento quanto aos materiais que contemplavam o histórico sobre as olimpíadas no intuito de entender os principais motivos que fizeram o seu surgimento chegando até os dias atuais, constatando que nesse percurso algumas se retratam a permitir e incentivar uma melhoria na qualidade do ensino de Matemática, principalmente no caso das escolas públicas.

Averiguando também os livros e materiais didáticos de apoio às Olimpíadas de Matemática constatamos que não há preocupação quanto à forma metodológica que os alunos podem conceber os problemas de natureza olímpica, apenas há o desenvolvimento técnico, onde em muitas passagens de um passo a outro alguns elementos não são expostos de forma clara, o que pode acarretar o não entendimento da solução. Entendemos que essas aulas devem ser construídas visando um aprimoramento e aperfeiçoamento dos conhecimentos prévios dos discentes.

Seguindo a TSD e fazendo uso da ED notamos que esse momento pode ser mais bem estruturado, pois permite a antecipação diante do comportamento do aprendiz, incentivando a ação dos alunos e auxiliando quando os passos não puderem ser dados sozinhos. Um dos objetivos também é motivar a discussão entre os pares, sendo esta contemplada na fase de formulação, onde os discentes devem discutir as ideias que poderão levar-lhes a solução.

Entendemos que sua aplicabilidade se torna enriquecida quando usamos meios que facilitem isto, no caso apresentado a ferramenta computacional, um *milieu* material, propiciando a visualização ou de passos ou ainda de interatividade que induzisse a ação e discussão dos discentes. Mesmo sabendo que a olimpíada é uma competição, onde cada um deve pensar e responder sozinho os problemas, consideramos que se o raciocínio do indivíduo for forçado em momentos anteriores a chance de conseguir premiação pode aumentar.

É claro que essa afirmação somente pode ser verificada através de sua aplicabilidade que pretendemos fazer ou vê-la em trabalhos futuros, verificando ainda o comportamento do discente diante de tal metodologia diferenciada das tradicionais. Assim, devido à escassez de materiais de apoio que auxiliem professores e alunos quanto ao desenvolvimento de uma aula olímpica planejada, onde o foco é o entendimento claro do aprendiz diante das problemáticas propostas, se faz necessário uso de ferramentas ou meios que contribuam com essas apresentações.

REFERÊNCIAS

AMÉRICO, Gilmar Virgolino. **Resolução de problemas sobre Análise Combinatória para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade do Pará.

ANDRADE, Maria Lúcia Torelli Doria de. **Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Ed. UFPR, 2007.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo**. VIDYA, v. 32, n. 2, p.149-161, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012.

ALVES, Washington José Santos. **O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PROFMAT). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC.

ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming. **103 trigonometry problems – from the training of the USA IMO team**. 1956. Editora: Birkhauser.

ANDREESCU, Titu; GELCA, Răzvan. **Mathematical Olympiad Challenges**. 2009. 2ª Ed. Birkhauser.

ARANCIBIA, J. F. R. et al **Projeto de Treinamento para Olimpíadas Universitárias**. In.: Encontro de Extensão, II., 2009. Universidade Federal da Paraíba. Anais... Paraíba: 2009. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/XIenexXIIenid/enex/XIENEX004c.html> Acesso em: 09 de set. 2015

BAGATINI, Alessandro. **Olimpíadas de Matemáticas, Altas Habilidades e Resolução de Problemas.** 2010. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Olimpíadas de matemática: Uma experiência de sucesso em educação no Ceará.** 2005. Disponível em: http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/CONF_SIMP/textos/joaolucasbarbosa-simp.htm Acesso em: 20 de out. de 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BARRETO, Antonio Luiz de Oliveira. CASTRO FILHO, José Aires de. **Superando obstáculos epistemológicos ao conceito de função com a mediação do software educativo graphmatica.** Artigo. 2010. X Encontro Nacional de Educação Matemática.

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BENTO, Humberto Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o *software*: Geogebra.** 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

BONA, Adriana Conceição de. **As dificuldades dos alunos da primeira série do ensino médio com a fórmula de Bhaskara.** 2006. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade do Extremo Sul Catarinense – ENESC.

BONFIM, Adenilson Pereira. **Produção e Aplicação de Material Didáticopara Estudantes Iniciantes em Olimpíadas de Matemática.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Pará.

BRAGANÇA, Bruno. **Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Viçosa.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.** Mathematics. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de La Didactiquedes Mathématiques. In: BRUN, J. et ali. Didactiquedes Mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.

BROUSSEAU, Guy. (tradução:ALMOULOUD, Saddo Ag e COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva). **A etnomatemática e a teoria das situações didáticas**. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 2, pp. 267-281, 2006

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. Editora Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Guy Brousseau:"A cultura matemática é um instrumento para a cidadania"**. Revista Escola Abril, 1999. Entrevista cedida a Thais Gurgel. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/cultura-matematica-instrumento-para-cidadania-guy-brousseau-calculo-518776.shtml?page=0>. Acesso em: 05 de dez. de 2015.

BURIGO, Elizabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Estudo da Ação e do Pensamento de Educadores Matemáticos nos Anos 60**. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, Porto Alegre, 1989.

CALAZANS, Marcos Vinicius Fernandes. **Proposta de implantação do centro preparatório para olimpíadas de matemática.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Estadual de Santa Cruz..

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, Gráfica Brás Monteiro, 1975.

CARVALHO, Márcio Miranda de. **Resolução de problemas matemáticos olímpicos: uma abordagem aritmética modular.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CARVALHO, Valessa Zaigla Faustino Sousa. **Funções convexas com aplicações em problemas de olimpíadas de matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Piauí.

CARVALHO JÚNIOR, Augusto Lacerda Lopes de. **Material Multimídia: Resolução comentada de algumas questões do nível 3 da OBMEP sobre geometria**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Pará.

COCCO, Eliane Maria. **Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas e avaliação em larga escala: possíveis interlocuções**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões.

COMPETIÇÃO MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE. **O que é?** Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/?page_id=21> Acesso em: 17 de agosto de 2015.
DIAS, Edgar HeliodoroVendramelli. **O estudo em grupos para a 2ª fase da OBMEP 2013 e resoluções de questões em vídeo.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade de São Carlos.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9: Geometria Plana.** 7. Ed. São Paulo: Atual Editora, 1997.

EUREKA! N°4, 1999. SBM.

FOMIM, Dimitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG Ilia. **Círculos Matemáticos – A experiência Russa.** 2012.1ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA.

GOMES, Helena Carina Malaguez. **Reflexões sobre uma prática de ensino: Uma engenharia didática**. Porto alegre, 2008. [Monografia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/orientacoes/tcc.pdf/Microsoft%20Word%20-%20TCC_Helena_Carina_Malaguez_Gomes_144112.pdf> Acesso em: 06 de outubro de 2014

HOHENWARTER, Markus. PREINER,Judith. **Ajuda Geogebra 3.0.** Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro. 2007. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/recursos/outros/manual%20geogebra.pdf> Acesso em: 15 de dez. de 2015.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.1 Conjuntos e Função**. 3.ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

LACERDA, Carlos Wilson Pimentel de. S**equências e séries: conhecendo e construindo estratégias de abordagem.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal Rural de Pernambuco.

LEIVAS, José Carlos Pinto; GOBBI, Juliana Aparecida. 2014. **O software Geogebra e a Engenharia Didática no estudo de áreas e perímetros de figuras planas.** Disponível em:

<*periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/1521/1226*> Acesso em: 17 de outubro de 2014

LIDSKI, V.; OVSIANIKOV, L.V.; TULAIKOV, A.N.; SHABUNIN, M. I. **Problemas de Matemática Elementar**. 2014. 1ª Ed. Fortaleza: Vestseller.

MACIEL, Marcos Vinicius Milan; BASSO Marcus Vinicius de Azevedo. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica.** 2009. Artigo (X Encontro Gaúcho de Educação Matemática). Disponível em:<*http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_19.pdf* > Acesso em: 11 de setembro de 2014.

MONTENEGRO, Fábio. **2º indicador nacional de alfabetismo funcional: um diagnóstico para a inclusão social - Avaliação de Matemática**. Instituto Paulo Montenegro. São Paulo, Dezembro, 2002.

MOREIRA, Marco Antônio; NARDI, Roberto**. O mestrado profissional na área de ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos**. Artigo. R.B.E.C.T., vol 2, num 3, set/dez. 2009. Disponível em: http://www.furb.br/_upl/files/ppgcim/o_%20mestrado_profissional.pdf?20121009145229 Acesso em: 20 de Nov. 2015.

NORO, Ana Paula. **Contribuições da engenharia didática para o ensino e aprendizagem de poliedros**. UNIFRA, 2012. Disponível em: http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20AnaPaula.pdf Acesso em: 05 de outubro de 2014

OBM. **Como montar um projeto de Olimpíada de Matemática na sua escola**. Disponível em: <http://www.obm.org.br/opencms/docs/projeto_olimpiadas_na_escola.pdf> Acesso em: 20 de novembro de 2014.

OLIVEIRA, Emilio Celso de; CHIUMMO, Ana. **Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em Matemática.** VIDYA, v. 35, n. 2, p. 179-195, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Editora Vozes, 2013.

OLIMPÍADA CIENTÍFICAS. Olimpíadas Paranaense de Matemática. **Estaduais/ Regionais**. Disponível em: <http://www.olimpiadascientificas.com/estaduaisregionais/pa/opm/> Acesso em: 17 de agosto de 2015.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS. **História.** Disponível em: <http://omeg.mat.ufg.br/p/394-historia> Acesso em: 17 de agosto de 2015.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA: Eles - e ela - são craques com os números. **O POVO online**. Jornal de Hoje: Ciência e Saúde. Disponível em: <http://www.opovo.com.br/app/opovo/cienciaesaude/2014/08/30/noticiasjornalcienciaesaude,3305773/eles-e-ela-sao-craques-com-os-numeros.shtml> Acesso em: 20 de março de 2015.

OSTERMANN, Fernanda. **Os Mestrados Profissionais na área de Ensino de Ciências e Matemática na CAPES.** Instituto de Física – UFRGS. VII ENPEC. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/mesa_9.2.pdf> Acesso em: 22 de maio de 2016.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino. **Olimpíadas Paraenses de Matemática: 2000 – 2009**. Editora: Vestseller.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino. **Técnicas em Olimpíadas de Matemática – Combinatória.** 2014. 1ª. Ed. Fortaleza: Vestseller.

PENA, Maria Botelho Alves. **Experiências docente vivenciadas, dentro e fora da sala de aula, em tempos de OBMEP de 2005 a 2013.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

POLYA, George. Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematic.(Vol. I). Princeton: University, 1968.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a idéia de Situação Didática**. 2008. Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP. Disponível em: <*www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf*> Acesso em: 16 de outubro de 2014

SADOVSKY, Patricia. **Falta fundamentação didática no ensino da Matemática**.Revista Escola Abril, 2007. Entrevista cedida à Roberta Bencini. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/fundamentacao-didatica-ensino-matematica-428262.shtml>Acesso dia: 07 de jan. de 2016.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. **O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software Geogebra.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SCANO, Fabio Correa. **Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra.**2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SIERPINSKA, Anna. **Onunderstand the notion offunction. In: The concept offunction: aspects of epistemology and pedagogy**. Guersh on Hareland Ed Dubinsky (Eds.). Mathematical Association of America, vol. 25, 25-58, 1992.

SOUSA, Francisco Edisom Eugenio de**. A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da sequência FEDATHI.** 2015. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará.

SOUZA, Cláudio Silveira de. **Uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP – nível 3**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.

SOUZA NETO, João Alves de. **Olimpíadas de Matemática e aliança entre o campo científico e o campo político.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Carlos.

SOUZA NETO, João Alves de. VILELA, Denise Silva Vilela. **Mobilidade Social e Educação Matemática:o caso das olimpíadas.** III Seminário de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduaçãoem Educação da UFSCar. São Carlos. 2011. Disponível em: http://sistemas3.sead.ufscar.br/ppge/joao_alves_de_souza_neto.pdf Acesso em: 31 de julho de 2015.

SOUZA, Renato Carneiro. **Teoria dos Números.** Fortaleza: Vestseller.

SOUZA, Gilvan Lira. **Resolução de problemas sobre Aritmética para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Pará.

SOUZA, Helena Tavares. **Um estudo com professores do ensino médio sobre função modular por meio de resolução de problemas utilizando o software Geogebra como estratégia pedagógica.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Artigo. Zetetiké – FE/Unicamp – v. 21, n. 39. 2013.

TODESCHINI, Isabel Lovison. **Olimpíada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas.** 2012. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

TRINDADE, José Análio de Oliveira. **Obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de função.** [entre 1999 e 2009]Artigo (Pós-Graduação em Educação). Universidade Federal de Santa. Disponível em: <http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/1999/Educacao_E_Trabalho/Trabalho/09_08_23_OBSTACULOS_EPISTEMOLOGICOS_A_APRENDIZAGEM_DO_CONCEITO_DE_FUNCAO.pdf> Acesso em: 05 de jan. de 2016.

VICTOR, Carlos Alberto da Silva. **Olimpíada de matemática: que preciosidades envolvem os problemas desta competição e qual o seu impacto para o professor de matemática sem experiência em olimpíadas e a sua importância para o estudante?** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal Rural de Rio de Janeiro – UFRRJ.

VILLANUEVA, Jorge Tipe. **II Olimpiada Nacional Escolar de Matemática**. 2009. 1ª Lumbreras Editores.

VILLANUEVA, Jorge Tipe; BARRIOS, Jonh Cuya; CHOQQUPURA, Claudio espinoza; PATINÕ, Sergio Vera. **IV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática**. 2010. 1ª Ed.Lumbreras Editores.

APÊNDICE – PRODUTO EDUCACIONAL

DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES OLÍMPICAS COM O RECURSO DO GEOGEBRA

Cícera Carla do Nascimento Oliveira

Francisco Régis Vieira Alves

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi elaborado com vistas a apresentar que é possível conceber problemas de Olimpíadas de Matemática através de uma teoria de ensino, no caso usamos a TSD, apoiados por um recurso computacional que através de suas construções ou interações podem motivar o discente em suas conjecturas e modelagem matemática. Devido à dificuldade na realização de algumas construções no Geogebra, apresentamo-las neste material de apoio, que poderá servir de embasamento para resolução de problemas similares.

Neste sentido desejamos que estas situações fundamentadas na TSD, chamada de Situações Didáticas Olímpicas ou apenas *Situações Olímpicas* sirvam de apoio tornando as aulas olímpicas ou apenas de contexto olímpico, diferenciadas, contemplando uma melhor preparação para as Olimpíadas de Matemática, permitindo que propicie a qualidade na educação, já que a expectativa das olimpíadas além de revelar talentos refere-se à melhoria no ensino de Matemática.

Esperamos que este material, formado pela descrição de 10 Situações Olímpicas, possa ser usado, em sua maioria, em aulas que contemplem problemas de geometria, tendo em vista que as questões encontradas que propiciava o uso do Geogebra são dessa natureza, mas com foco nas Olimpíadas de Matemática.

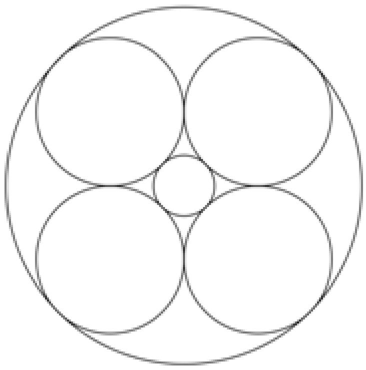
SUMÁRIO

SITUAÇÃO OLÍMPICA 1

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras e Fórmula de Bháskara.

Problema. (Banco de Questões OBMEP 2006 – lista 5 – questão 5)

A figura mostra a marca de uma empresa, formada por dois círculos concêntricos e outros quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo menor mede 1cm. Qual é, em centímetros, o raio do círculo maior?

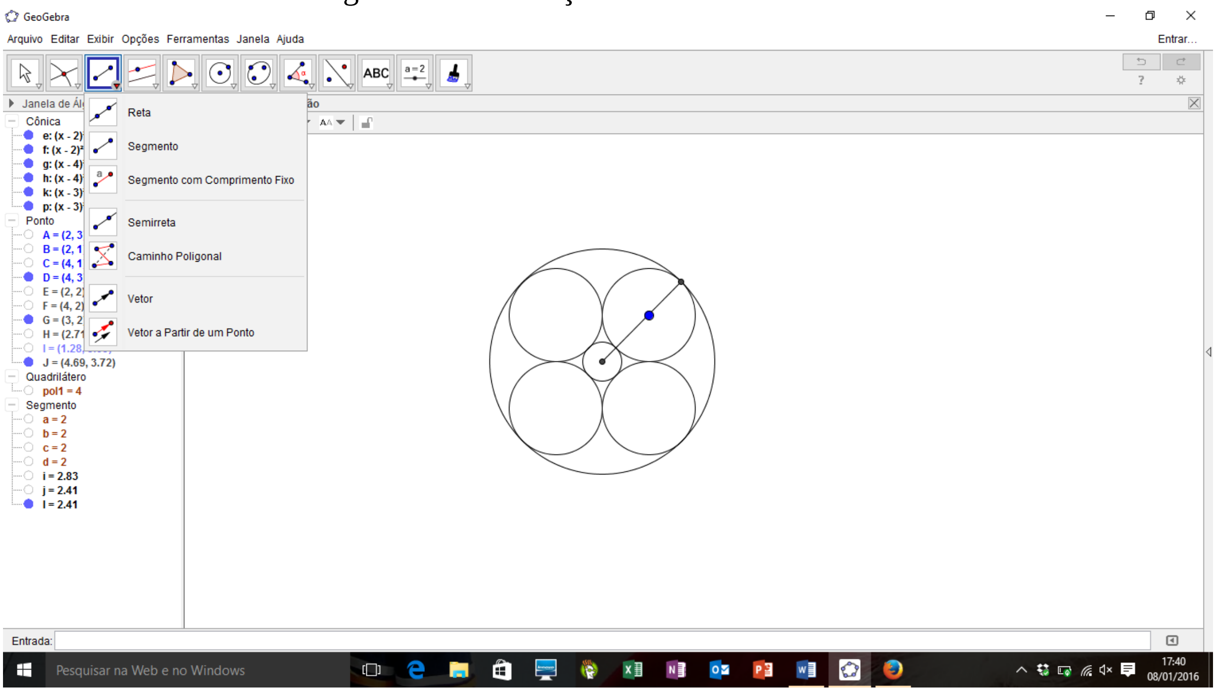


Ação – Nessa fase devemos verificar quais são as decisões tomadas pelos alunos ao se defrontar com a problemática em questão, por isso esperamos que possam perceber que o raio da circunferência maior é a soma do raio da circunferência menor com o diâmetro da circunferência média, visando, então, trabalhar com os raios. Esperamos que possam perceber ainda o triângulo retângulo envolvido na questão.

Formulação – Essa etapa é compreendida pela algebrização, pelos modelos matemáticos que devem começar a se apresentar. Para tanto, o professor deverá induzi-los fazendo uso de construções geométricas no Geogebra que facilitará perceber triângulos retângulos. Usando os centros do círculo menor e médio, traçamos um segmento para descrever que o raio do círculo maior (R) é a soma entre o raio do menor e o diâmetro do médio (1 e r, respectivamente, raio menor e raio médio). É esperado que seja escrito:

$$R = 1 + 2.r$$

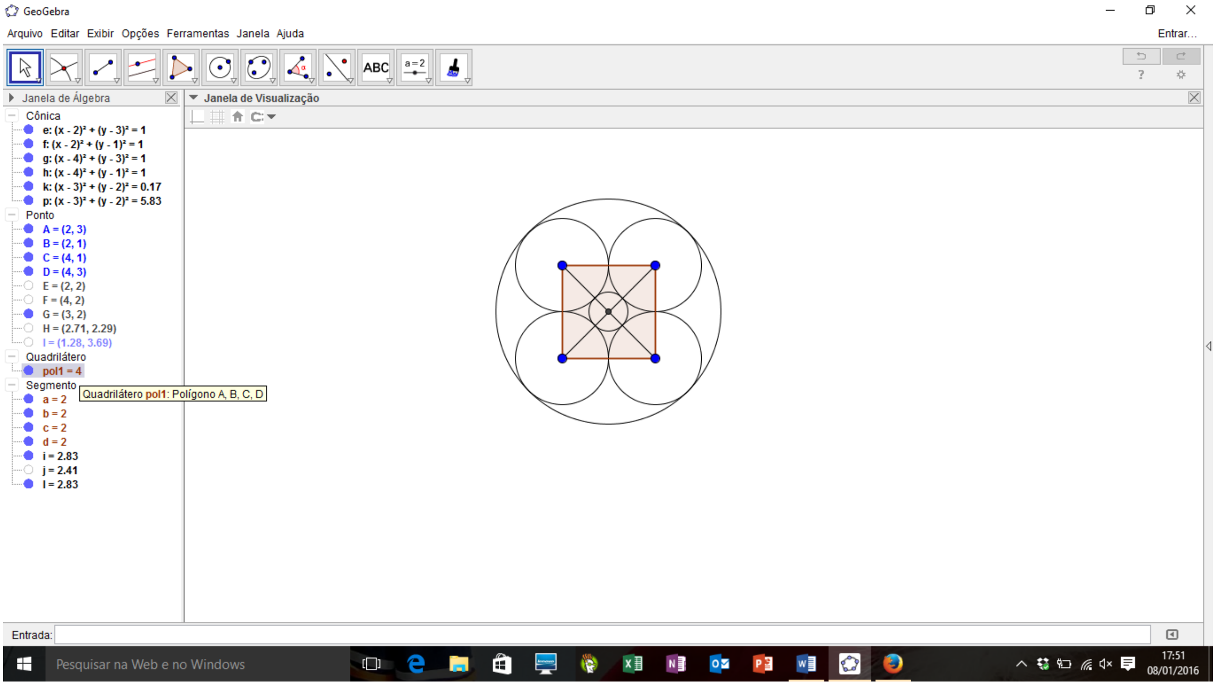
Imagem 1. Identificação do raio do círculo maior



Fonte: Construção nossa.

Voltando a exibir o quadrilátero no Geogebra, que compunha os centros dos círculos médios e traçando suas diagonais através do comando "Segmento", desejamos que o aprendiz possa escrever que o raio procurado (R) será determinado através do uso do Teorema de Pitágoras, tendo em visa que basta encontrar r.

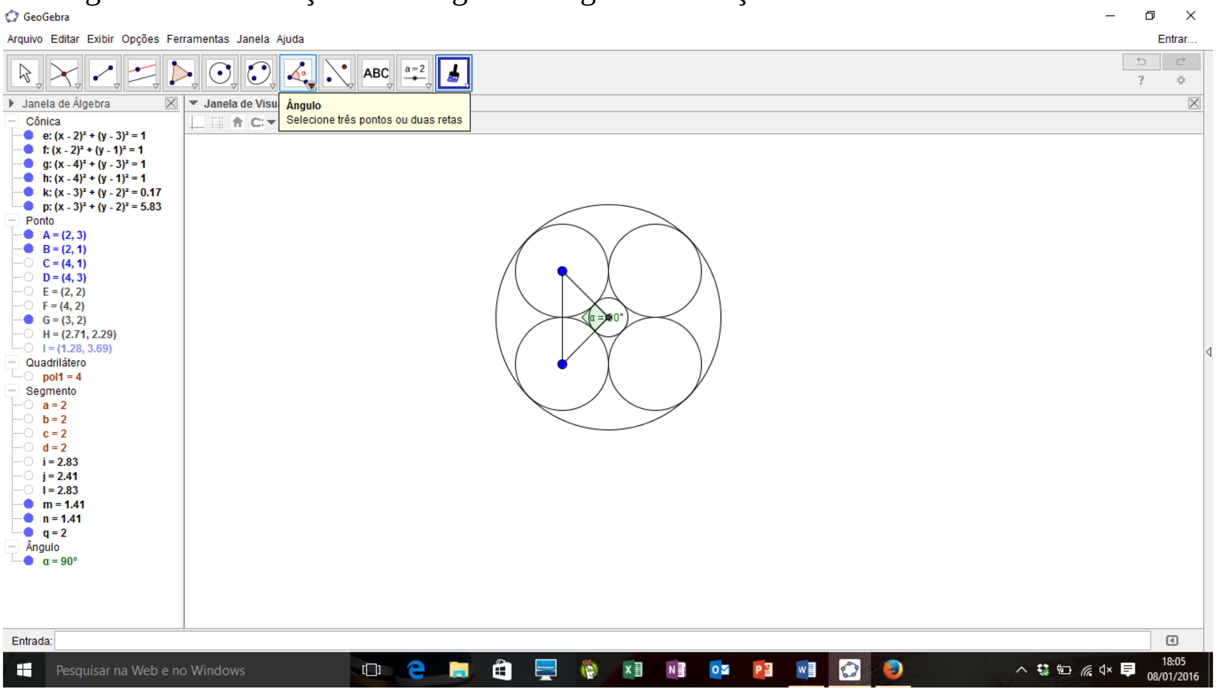
Imagem 2. Quadrilátero no círculo



Fonte: Construção nossa.

Visualizando que as diagonais do quadrado ao se cruzarem formam ângulos retos basta ser escolhido pelo aluno qualquer um desses triângulos formados para fazer utilização. Podemos ainda, caso deseje explicitar ainda mais, usar o comando “Ângulo” para denotar o ângulo de 90°.

Imagem 3. Identificação de triângulo retângulo em função dos raios dos círculos menores



Fonte: Construção nossa.

Esperamos com a visualização e construções apresentadas até o momento que o aluno perceba a existência de triângulo retângulo de catetos $r + 1$ e hipotenusa $2.r$ aplicando assim o Teorema de Pitágoras, escrevendo então:

$(2r)^2 = (r + 1)^2 + (r + 1)^2$

$4r^2 = 2(r + 1)^2$

$4r^2 = 2(r^2 + 2r + 1)$ *(dividindo por 2)*

$2r^2 = r^2 + 2r + 1$

$2r^2 - r^2 - 2r - 1 = 0$

$r^2 - 2r - 1 = 0$

Chegando nessa fase é esperado que o aluno desenvolva a resolução pela fórmula de Bháskara. Provavelmente, ao invés dos aprendizes trabalharem com "*r*" usarão "*x*", o que pode acarretar prejuízo na formalidade da escrita.

Usando a fórmula de Bháskara, deverão encontrar

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$r = \frac{\left(2 \pm \sqrt{4 + 4}\right)}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$r = 1 \pm \sqrt{2}$$

Contudo, pode ser que haja erro de operação, como fora constatado na análise prévia, ou ainda os alunos apresentem dificuldades no momento de fazer a simplificação da raiz ($\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$) ou ainda no instante de colocar o número 2 em evidência. Provavelmente após se deparar com o valor de *r* os alunos irão recorrer ao que havia sido descrito anteriormente R=1+2.r. Todavia é preciso identificar o *r* que vai ser usado, por isso cabe a observação, que deve ser feita pelo aprendiz, que devido $\sqrt{2} > 1$, o raio a ser considerado é $r = 1 + \sqrt{2}$, pois o outro valor de *r* é negativo. Logo,

$R = 1 + 2(1 + \sqrt{2})$

$R = 3 + 2\sqrt{2}$ cm

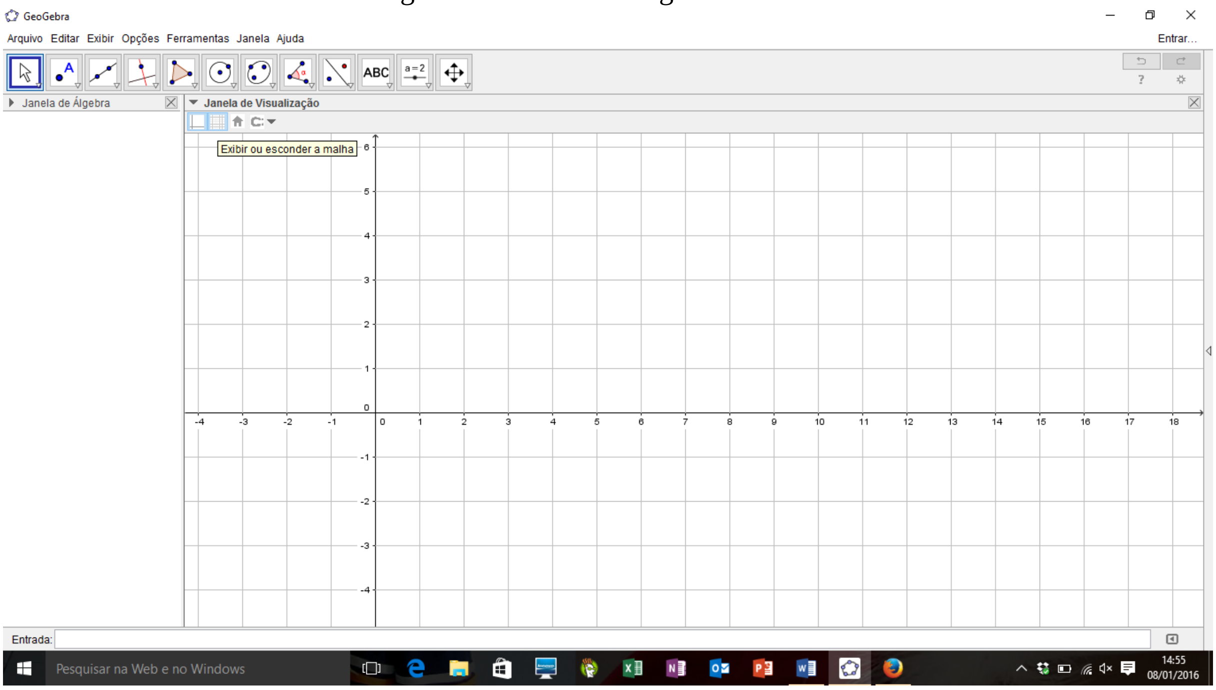
Validação – Nessa etapa espera-se que haja as discussões sobre o que foi feito, averiguando e buscando comprovar suas soluções com intuito de constatar a exatidão da mesma, bem como identificar os conceitos usados, tais como o teorema de Pitágoras e a identificação do raio de círculo maior, sendo a soma dos raios dos círculos menores. Podemos perceber que o conteúdo em si não é algo novo dos alunos, mas que se inseri no problema de forma indireta e que precisa estar absorvido pelos aprendizes para que possa assim chegar a um resultado fim.

Institucionalização – Nessa fase é o momento do professor resolver de fato todo o problema, formalizando todo o procedimento utilizado pelos aprendizes. Fazendo os alunos verificar também se os procedimentos foram escritos de maneira aceitável. Cabe ainda ao docente enfatizar que o conteúdo em si que fora usado não se trata de algo novo, mas que está sendo visto através de outra óptica, sob o ponto de vista de um problema olímpico.

COMANDOS NO GEOGEBRA

Descreveremos a seguir os passos e comandos que induzirão às devidas construções no software. As construções iniciais o professor deve realizar com antecedência, antes de ir para sala de aula, pois necessita que algumas sejam usadas como objeto dentro do problema.

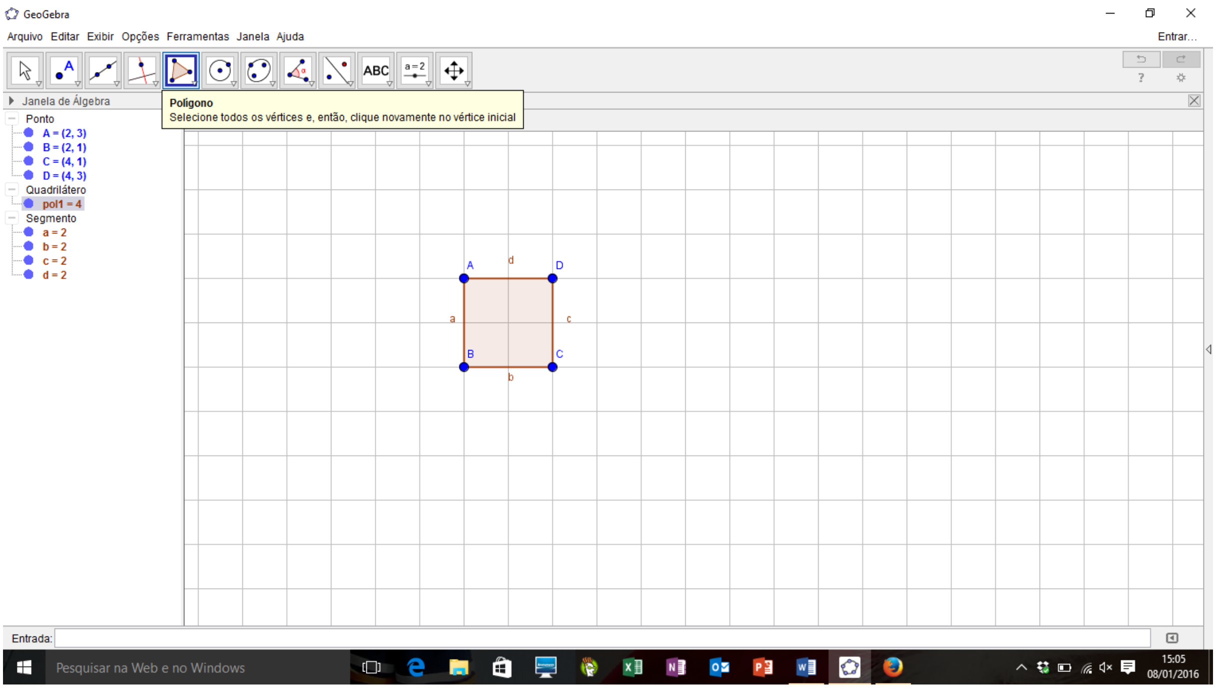
Imagem 4. Ambiente Geogebra com malha



Fonte: Construção nossa.

Exibindo a malha e depois ativando o comando polígono deve-se construir um quadrado que pode ser de qualquer tamanho. Para não ficar muito cheio a aparência da figura é aconselhável, clicando primeiro com o botão direito, desmarcar a opção “Exibir Rótulo”.

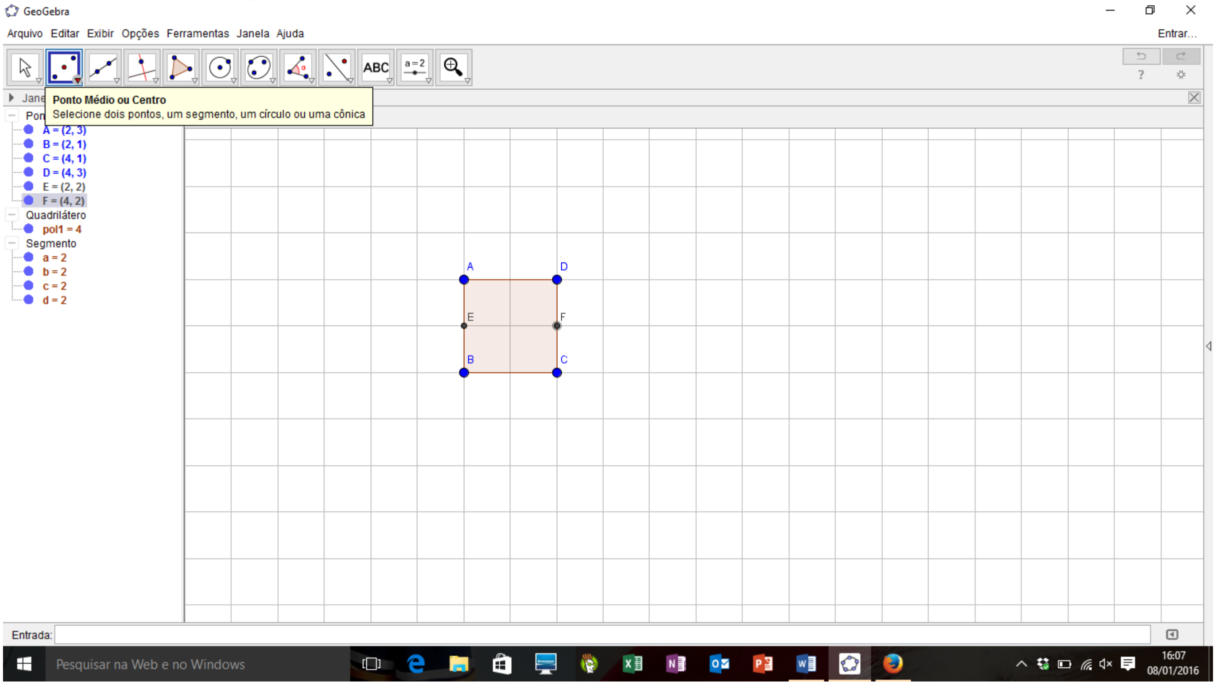
Imagem 5. Construção de um quadrado



Fonte: Construção nossa.

Ativando o comando “Ponto Médio ou Centro” clicamos em dois segmentos para identificar os raios das circunferências médias.

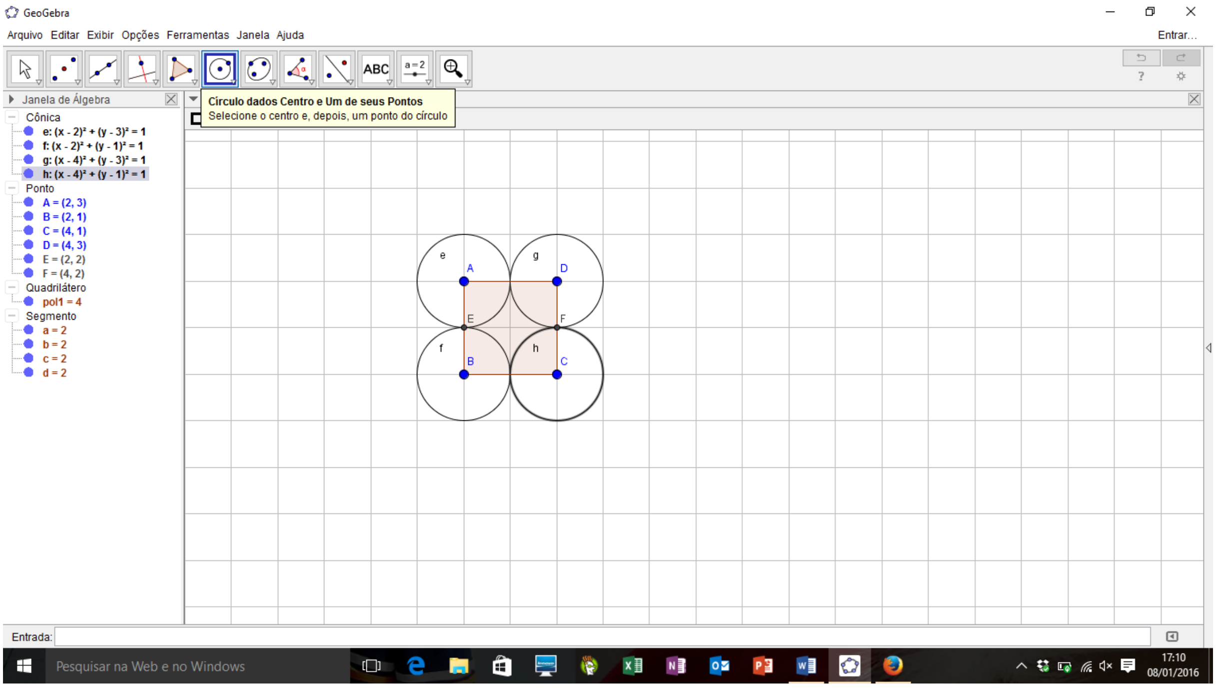
Imagem 6. Marcação do ponto médio em cada lado do quadrado



Fonte: Construção nossa.

Em seguida usamos o comando “Círculo dados centro e Um de seus pontos” e construímos quatro círculos com centro nos vértices do quadrado e raio a medida referente ao ponto médio de cada segmento.

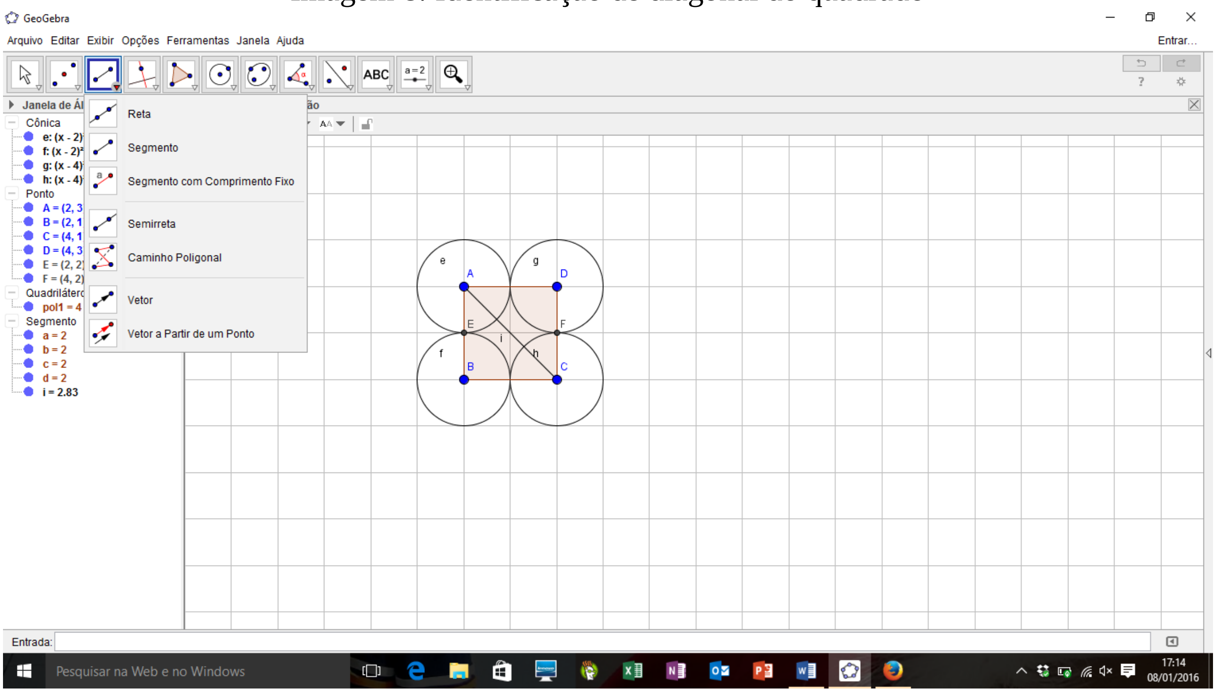
Imagem 7. Construção de círculos centrada nos vértices do quadrado



Fonte: Construção nossa

Para construirmos o círculo central, no caso o menor, deveremos usar o comando “Segmento” com auxiliar na identificação do raio e do centro.

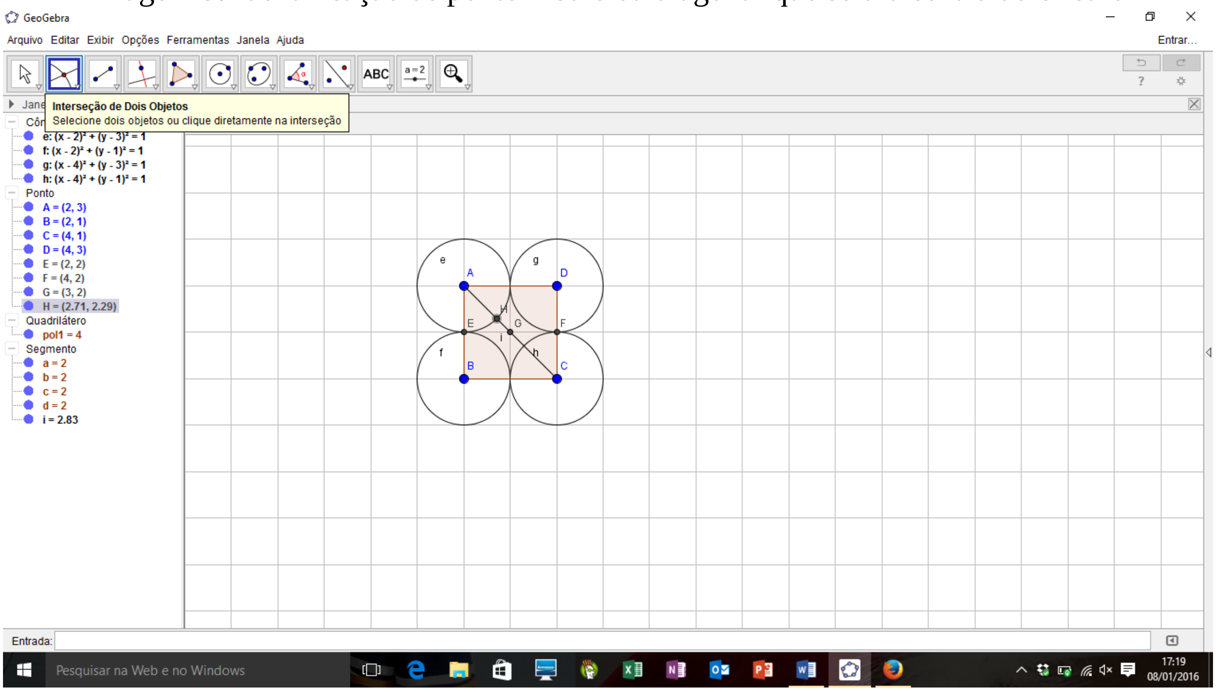
Imagem 8. Identificação de diagonal do quadrado



Fonte: Construção nossa.

Em seguida usamos a opção “Ponto Médio ou Centro” e depois “Interseção de dois objetos”.

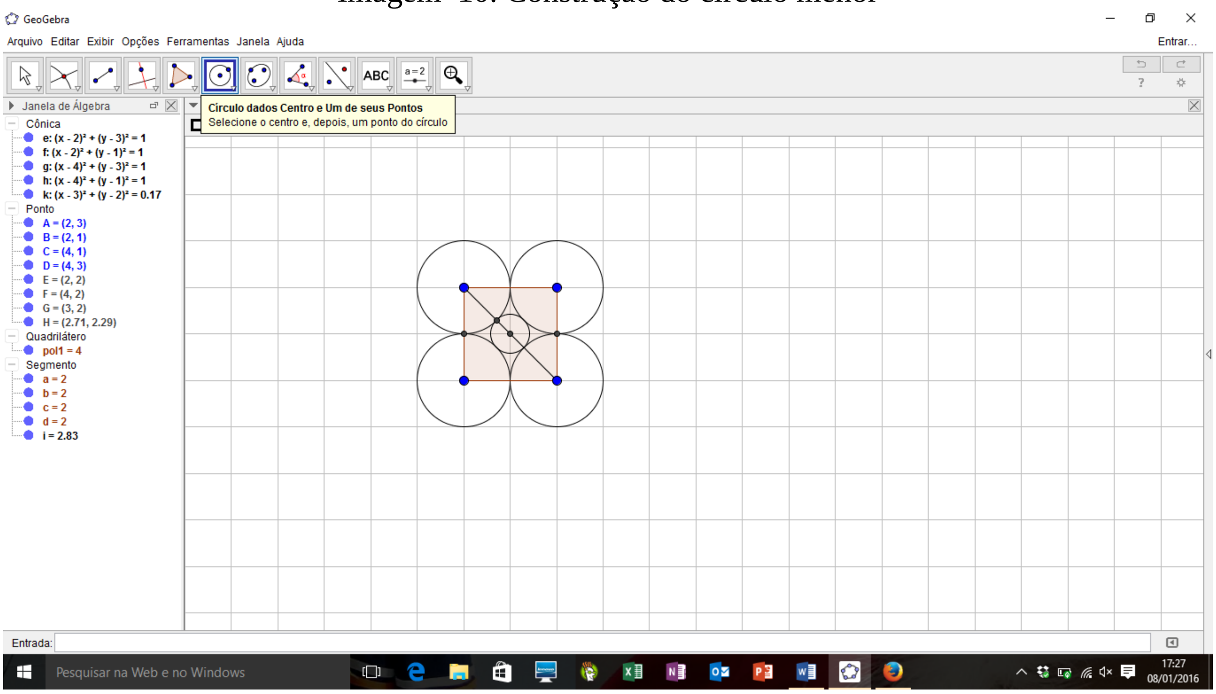
Imagem 9. Identificação de ponto médio da diagonal que será o centro do círculo



Fonte: Construção nossa.

Feito isto basta usar mais uma vez o comando “Círculo dados centro e Um de seus pontos”.

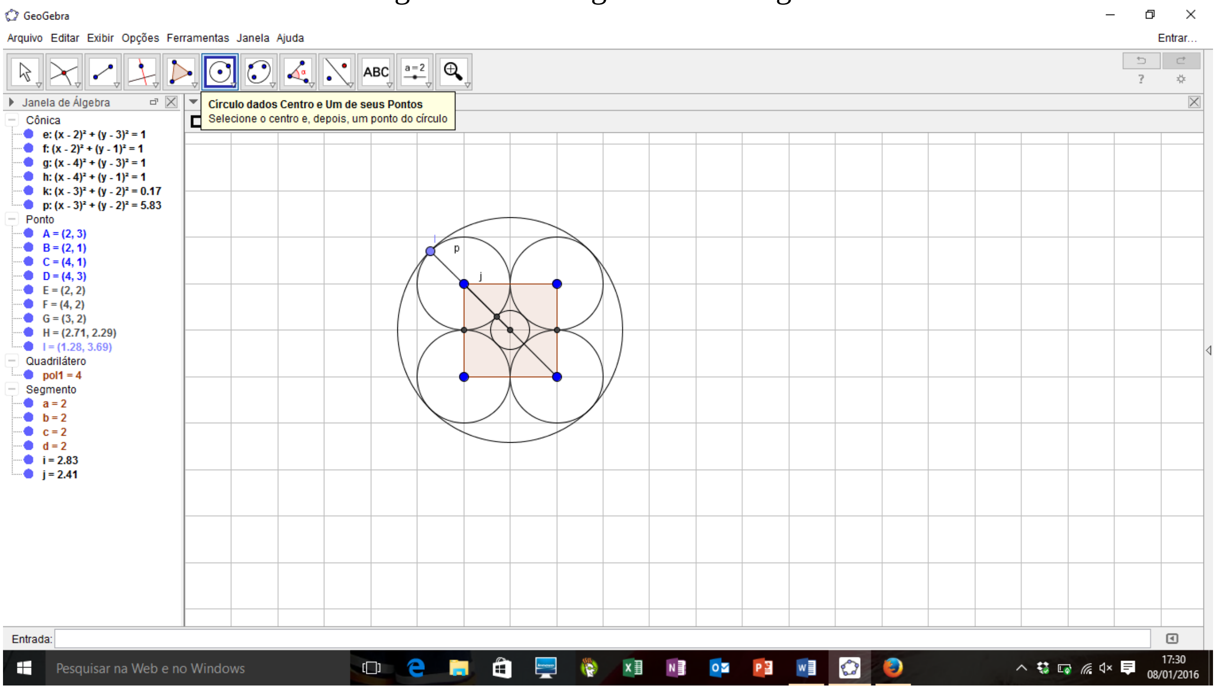
Imagem 10. Construção do círculo menor



Fonte: Construção nossa.

Para obtermos o círculo maior iremos usar o comando “Segmento” e prolongar o já existente até o final de um dos círculos que esteja intersectando-o, a fim de identificar o raio.

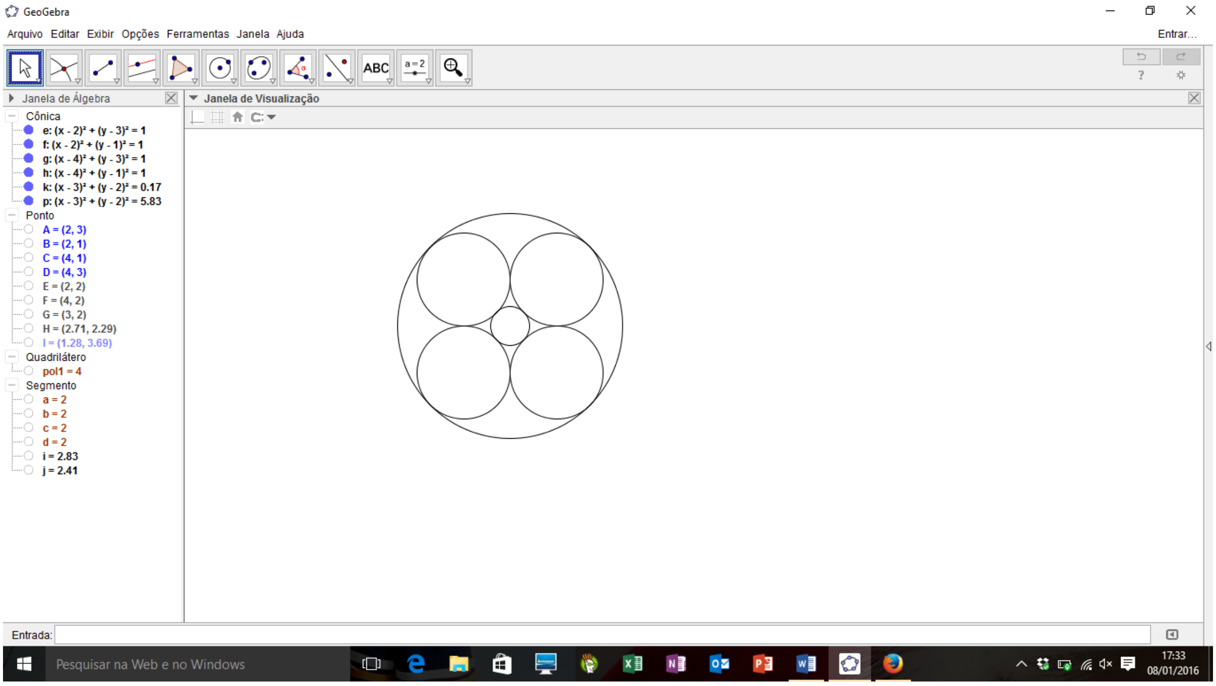
Imagem 11. Prolongamento do segmento



Fonte: Construção nossa.

Após escondermos a malha e desmarcamos “Exibir rótulo”, obtemos a figura inicial que é expressa no enunciado. De fato, a figura abaixo que deve ser mostrada inicialmente.

Imagem 12. Desenho do enunciado



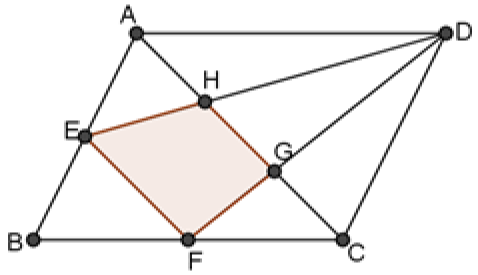
Fonte: Construção nossa.

SITUAÇÃO OLÍMPICA 2

Conhecimento prévio: Semelhança de Triângulos.

Problema – (Prova OBMEP 2014 - 1ª fase – questão 16)

O paralelogramo *ABCD* tem área 24 cm² e os pontos *E* e *F* são os pontos médios dos lados *AB* e *BC*, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero *EFGH*?



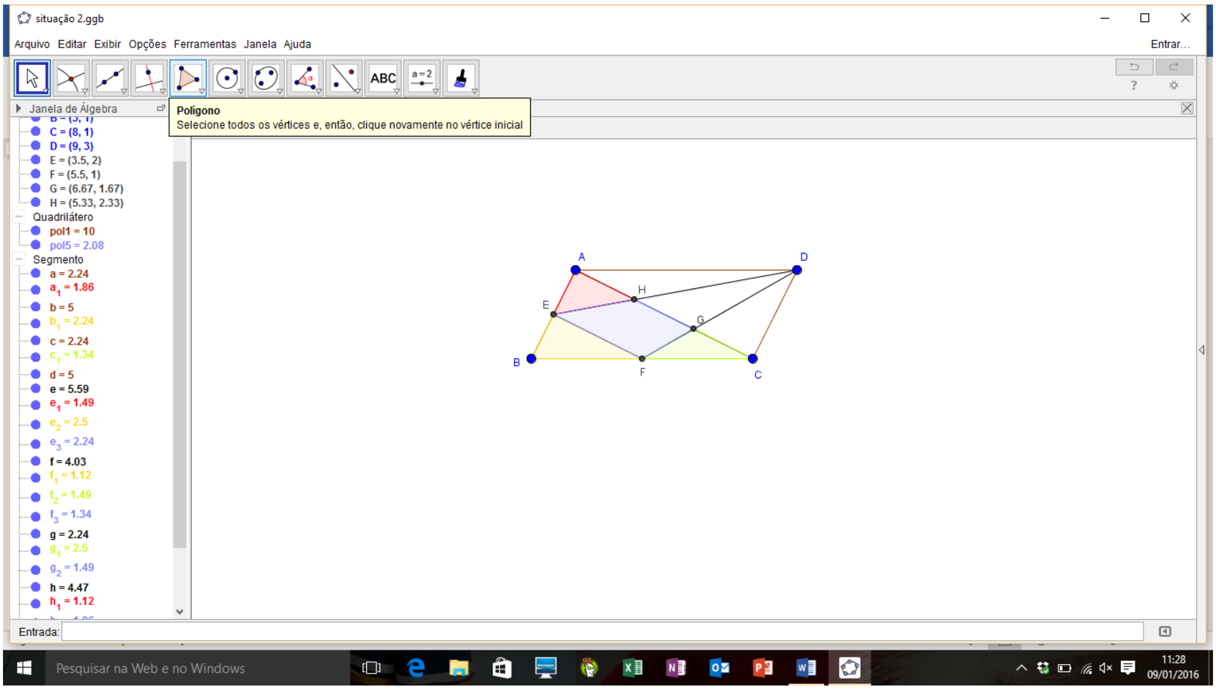
Ação – Descreveremos aqui o que esperamos que aconteça inicialmente, isto é, quais as primeiras reações do aluno. Provavelmente o aprendiz deverá pensar na área desejada como sendo a diferença de triângulos, buscando assim identificar a área do triângulo EFD e em seguida a do triângulo HGD ou ainda usar a diferença entre os triângulos ABC e a soma de AEH, EBF e FGC, tendo em vista que no enunciado fora relatado algumas condições sobre o ponto médio de dois dos segmentos do quadrilátero que podem permitir de forma mais facilitada encontrar essas respectivas áreas. O uso da semelhança de triângulo talvez não seja usado de início, apenas depois de algumas tentativas de resolução.

Formulação – No primeiro momento, após ter mostrado o problema e esperado a ação dos alunos, o professor pode auxiliar o seu desenvolvimento buscando fazer com que os mesmos consigam ter uma melhor compreensão ao visualizar que a área desejada trata-se de uma diferença. Podendo ser descrita abaixo por:

$$\Delta_{\text{EFGH}} = \Delta_{ABC} - (\Delta_{GFC} + \Delta_{AEH} + \Delta_{EBF})$$

(Acreditamos que a priori o aluno não use essa formalização, mas que poderá escrever algo parecido.)

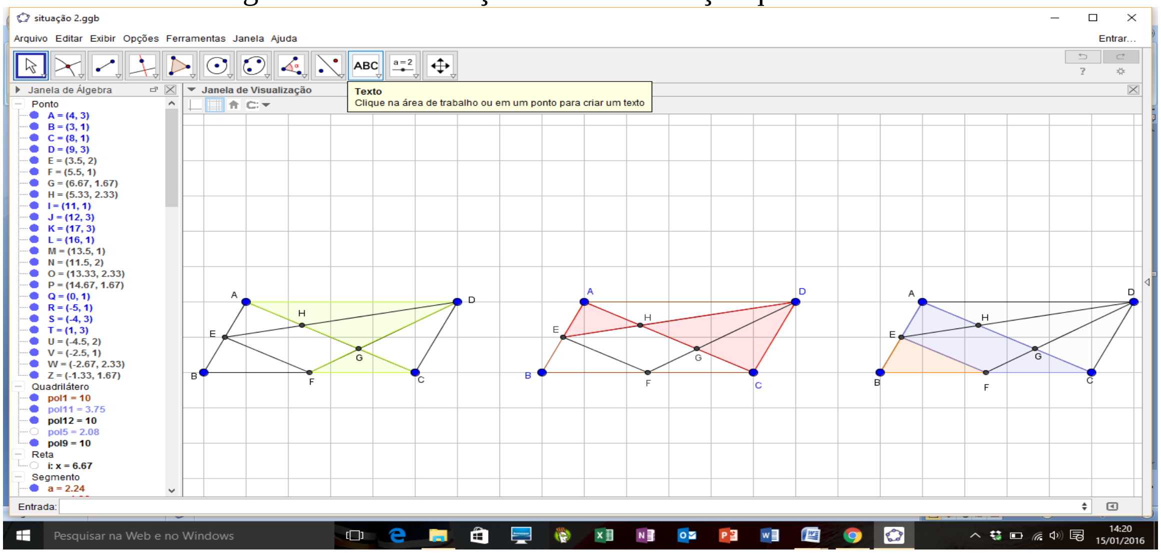
Imagem 13. Identificação das áreas que deverão ser usadas ao longo da resolução



Fonte: Cosntrução nossa.

Podemos ainda apresentar três construções, referente a cada área procurada, e deixar que o aprendiz use primeiro o que lhe for mais conveniente. Induziremos os alunos, através das construções, que seja usado a semelhança de triângulos entre Δ_{GFC} e Δ_{GAD}, bem como em Δ_{AEH} e Δ_{DHC} e em Δ_{ABC} e Δ_{BEF}.

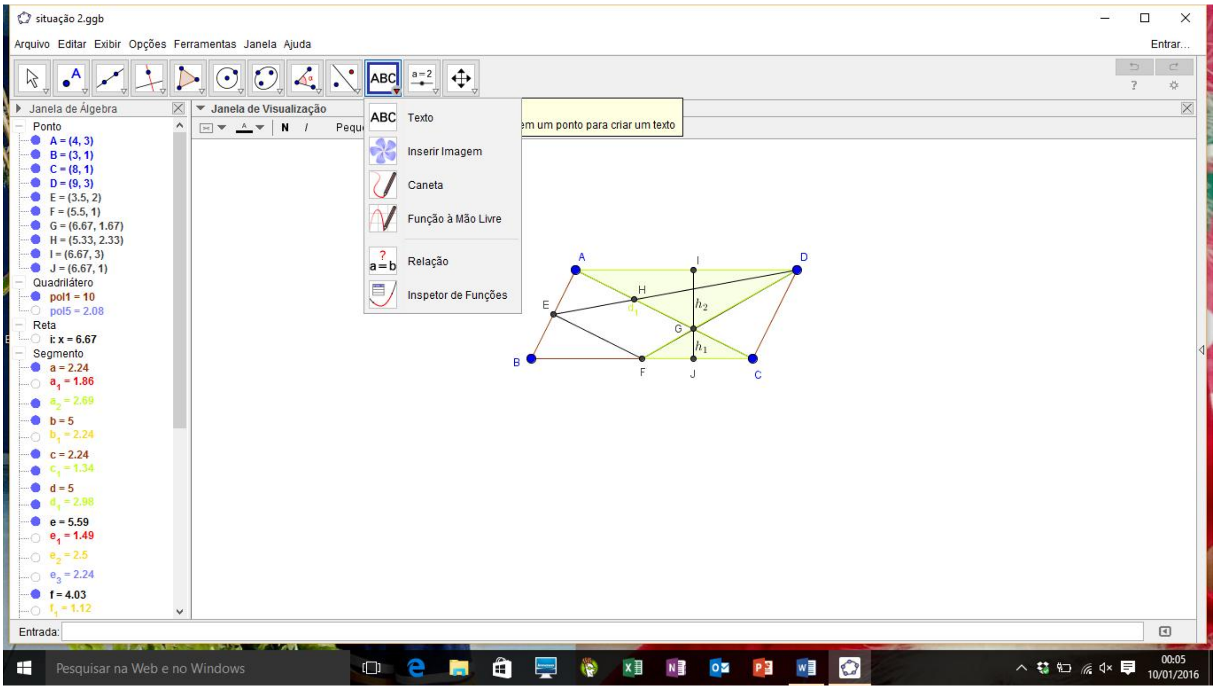
Imagem 14. Identificação das semelhanças que deverá ser usada



Fonte: Construção nossa.

Realizando a primeira semelhança podemos usar os triângulos ADG e FGC. Para isso usaremos uma reta para denotar que a altura do quadrilátero coresponde a soma das alturas dos dois triângulos.

Imagem 15. Constatação das alturas dos triângulos FGC e AGD com identificação de cada uma



Fonte: Construção nossa.

A partir de então, espera-se que os alunos algebrizem, matematizem sobre os triângulos destacados usando semelhança de triângulos. Escrevendo, então que:

$$\Delta_{GFC} \sim \Delta_{\mathrm{AGD}}$$

pois possuem ângulo oposto pelo vértice e ângulos alternos internos, o que implica semelhança de triângulos onde

$$\frac{AD}{FC} = \frac{h_2}{h_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\frac{b}{2}} = \frac{h_2}{h_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_2}{h_1} = 2 \ \Rightarrow \ h_2 = 2h_1$$

Devido $H = h_1 + h_2$, tem-se que $H = 3h_1$ ou ainda $h_1 = \frac{H}{3}$. Sabendo que $b.H = 24\ cm^2$, pois paralelogramo e retângulo possuem mesma fórmula para cálculo de área, temos que:

$$\Delta_{GFC} = \frac{\frac{b}{2}.h_1}{2} = \frac{b}{4}.\frac{H}{3} = \frac{b.H}{12} = \frac{24}{12} = 2\ cm^2$$

(Lembramos que isso é o que esperamos que os alunos façam, contudo sabemos que ainda poderão apresentar outros caminhos até chegarem a este modelo apresentado.)

Entendemos que mesmo mostrando as três figuras simultaneamente (Imagem 14) e sendo percebido que cada uma das situações referem-se a triângulos semelhantes, apenas duas delas seguem o mesmo raciocínio, idêntica a primeira resolução que esperamos ser apresentada, no caso identifiquem que $\Delta_{AEH} = 2\ cm^2$

Na figura abaixo (imagem 16) desejamos que os alunos usem uma propriedade que garante que a razão de áreas semelhantes corresponde a uma constante (esta de semelhança ou proporcionalidade) elevada ao quadrado, levando a obter:

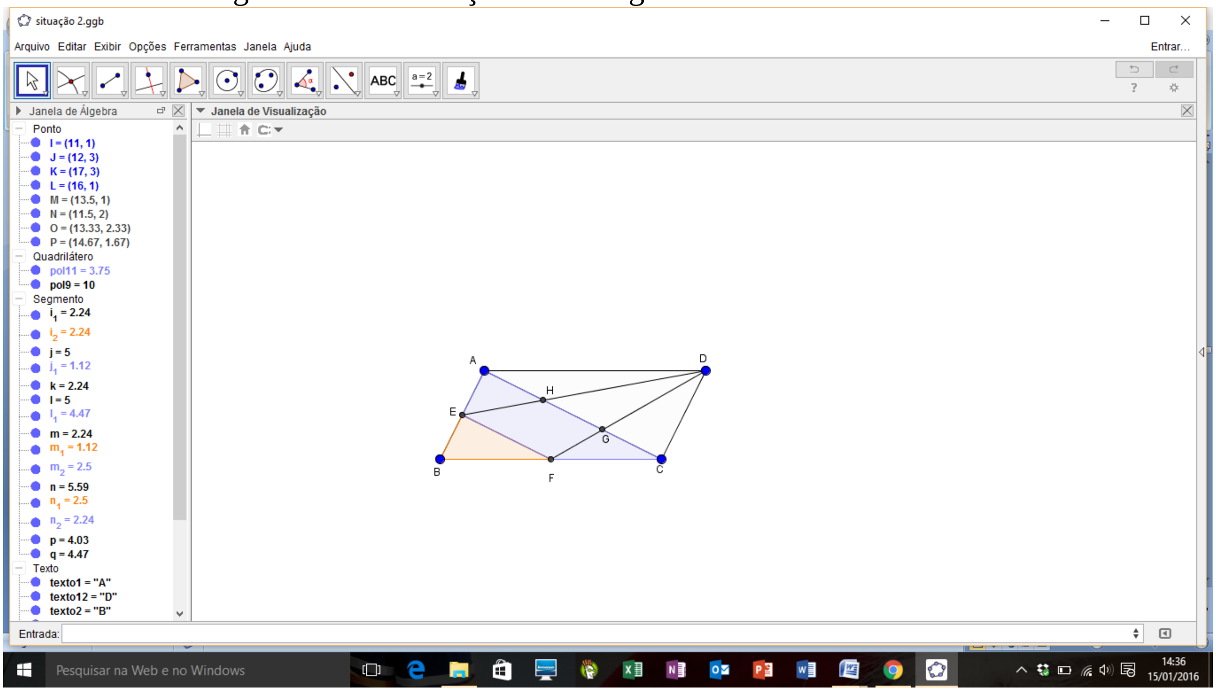
$$\frac{\Delta_{\mathrm{ABC}}}{\Delta_{EBF}} = \left(\frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)}\right)^2 \Longrightarrow \frac{12}{\Delta_{EBF}} = 4 \ \Longrightarrow \Delta_{EBF} = 3\ cm^2$$

Voltando para a observação inicial:

$$\Delta_{\mathrm{EFGH}} = \Delta_{ABC} - (\Delta_{GFC} + \Delta_{AEH} + \Delta_{EBF})$$

$$\Delta_{EFGH} = 12 - (2 + 2 + 3) = 12 - 7 = 5\ cm^2$$

Imagem 16. Visualização dos triângulos semelhantes ABC e EBF



Fonte: Construção nossa.

Acreditamos que haverá alunos ou que desconheça este fato ou ainda não se lembre disto tentando usar outros artifícios para encontrar uma solução. No caso dos aprendizes não conseguirem realizar nenhum desenvolvimento, cabe ao professor indicar esta propriedade fazendo com que os mesmos possam evoluir em seu aprendizado.

Validação – Nesta etapa os aprendizes devem confrontar suas ideias e suas respostas, validando ou não seus cálculos aritméticos. Verificando se houve algum erro durante o processo de resolução. É importante que os aprendizes afirmem em seus argumentos que o conhecimento do conceito da semelhança de triângulo é a chave da questão.

Institucionalização – Após o processo de validação realizada entre os alunos cabe ao professor organizar as ideias, revendo os conceitos que foram usados, bem como realizar a solução, para que os discentes percebam tanto como deve acontecer a escrita e como a rigorosidade matemática. Vejamos a seguir os conceitos empregados de acordo com Dolce e Pompeo (1997, p. 204).

- **Definição de Semelhança de Triângulos**

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

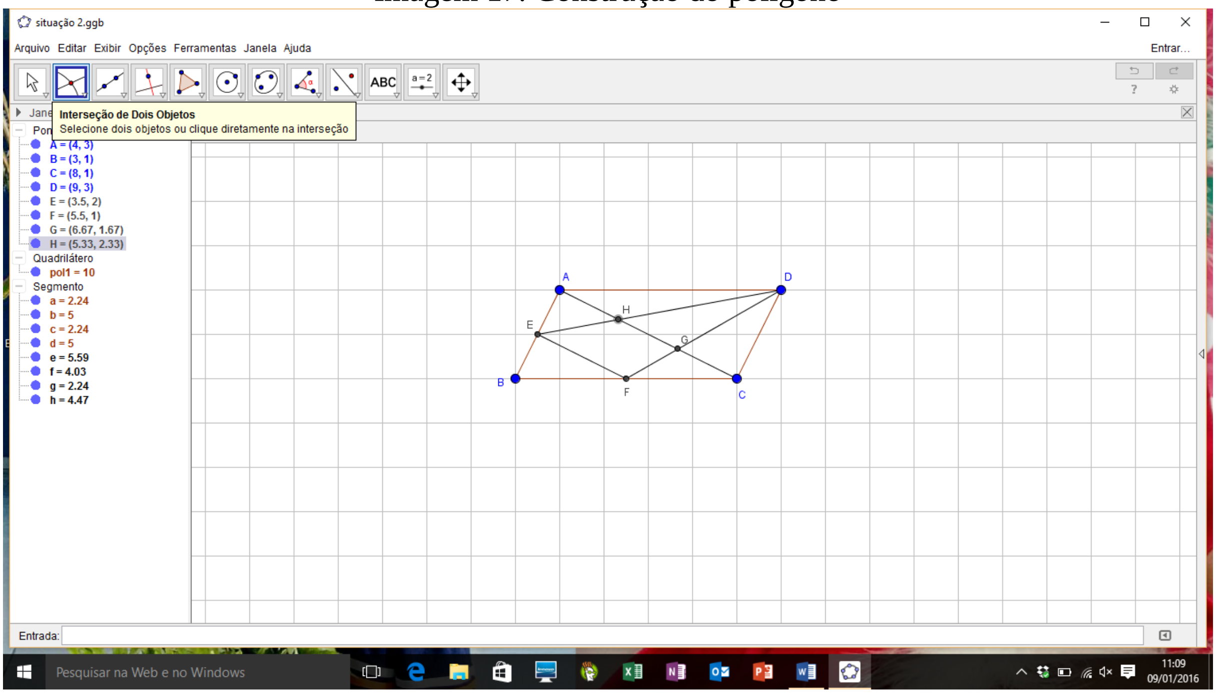
- **Propriedade de Semelhança de Triângulos**

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

COMANDOS NO GEOGEBRA

As construções poderão desde esse início ser exibida aos aprendizes, as mesmas serão realizadas usando apenas a geometria. Iniciaremos deixando exibida a malha e depois usaremos o comando "Polígono" para construirmos um paralelogramo, em seguida usando o comando "Ponto Médio ou Centro" marcamos os pontos E e F, talvez o ponto que apareça tenha outra letra, mas caso queira modificá-las basta renomeá-las. Usamos ainda o comando "Interseção de dois objetos" clicando nos segmentos AC e FD, aparecendo o ponto G, e depois em AC e ED, criando o ponto H.

Imagem 17. Construção do polígono

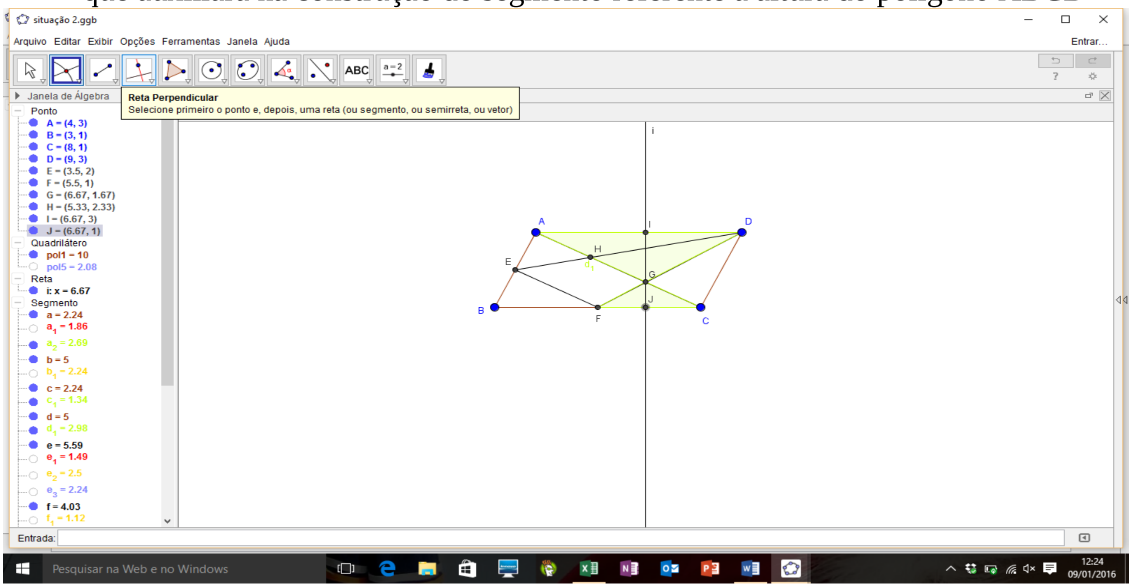


Fonte: Construção nossa

Depois criamos quatro polígonos, deixando-os de cores distintas, também escondemos os vários rótulos e a malha. É importante observar que essas construções ao serem realizadas no Geogebra sempre devem indicar corretamente os mesmos pontos (vértice, ponto médio, interseção) e isto deve ser feito clicando com o botão direito do mouse em cima de cada ponto e deixando desmarcando a opção “exibir rótulo” e, em seguida, escrever, através do comando “Texto”, identificando pontos iguais para as três figuras. Esperamos que as visualizações possam auxiliar na descrição de modelos matemáticos que devem ser feitas por cada discente, na prerrogativa de identificar a área de cada triângulo ($\Delta_{GFC}, \Delta_{AEH}, \Delta_{EBF}$) para depois chegar à resolução final.

Inicialmente procurando a área Δ_{GFC} desabilitaremos as áreas não interessadas, no momento, buscando usar o comando “Reta perpendicular” e depois “Interseção de dois objetos” identificando os pontos de interseção, que devemos anotar, para depois construírmos segmentos exatamente passando por eles.

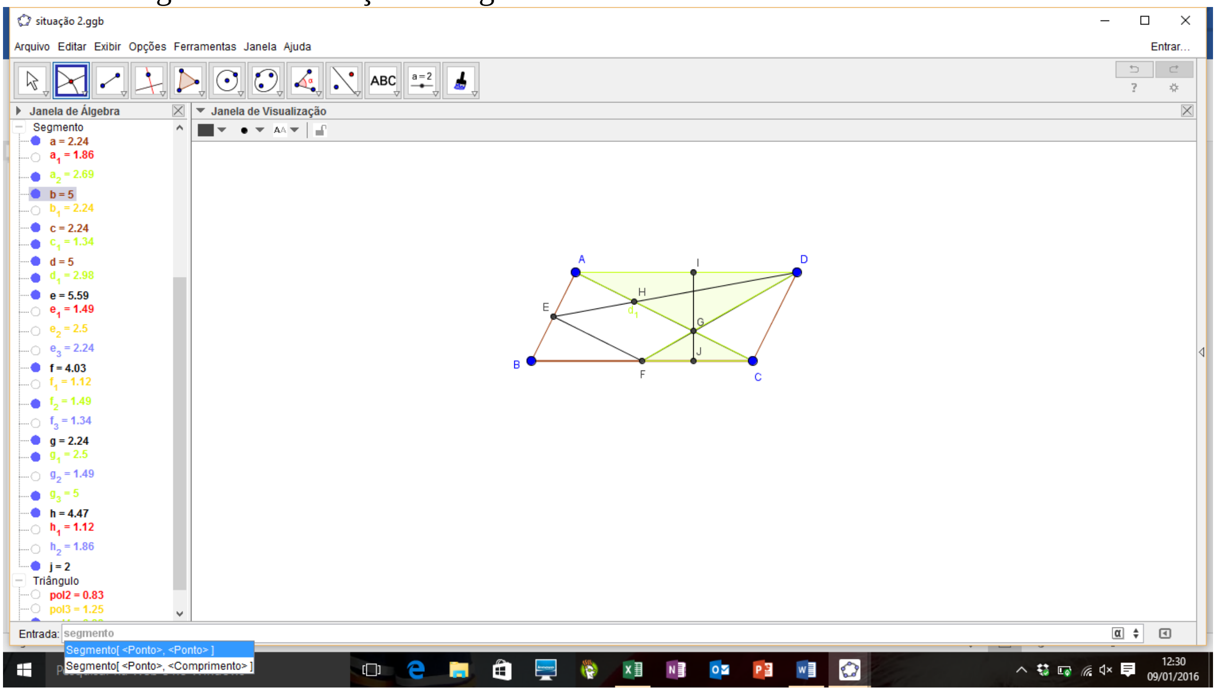
Imagem 18. Identificação da semelhança entre os triângulos ADG e FGC e da reta que auxiliará na construção do segmento referente a altura do polígono ABCD



Fonte: Construção nossa

Essa construção da imagem 18 serve de base para escrevermos o segmento que denota as alturas dos triângulos FGC e ADG.

Imagem 19. Denotação do segmento IJ descrevendo as alturas de FGC e AGD



Fonte: Construção nossa

Podemos ainda identificar as alturas dos triângulos, h_1 e h_2, usando o comando "Texto" (escrevendo ' h_1' e depois ' h_2'), ativando a opção "Fórmula Latex".

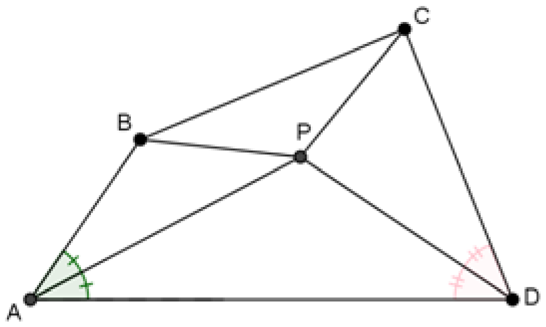
Essa construção é feita escrevendo em "Campo de Entrada" a entrada "Segmento[ponto, ponto]", onde esses pontos são os da interseção, que identificamos anteriormente.

SITUAÇÃO OLÍMPICA 3

Conhecimento prévio: congruência.

Problema. (Banco de Questões OBMEP 2015 – questão 25)

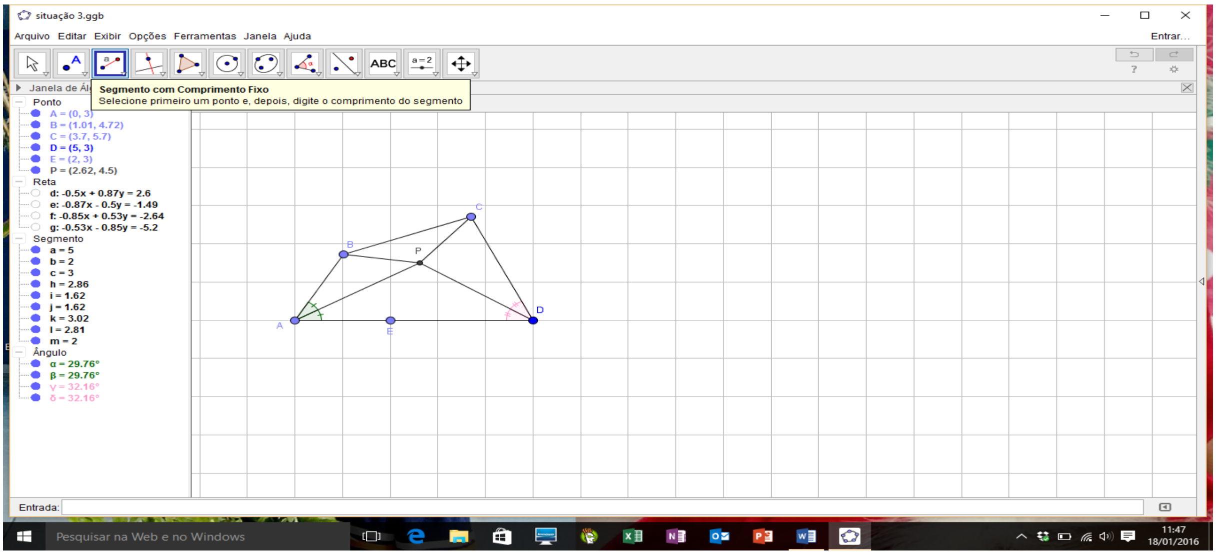
No quadrilátero ABCD, o lado AD é tal que AD=AB+CD. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes de BÂD e C$\widehat{D}$A, mostre que BP=PC.



Ação – Sabendo que esta fase se caracteriza por revelar toda ação inicial do aluno diante de um problema, acreditamos, então que o mesmo primeiro trace retas ou ainda busque trabalhar com os triângulos já contemplados na figura tentando descobrir características que contribua significativamente na resolução. Pode ser ainda que não haja reação por não ter ideias para iniciar.

Formulação – Acreditamos que mesmo com muitas tentativas os alunos poderão obter tentativas fracassadas, não conseguindo evoluir, apresentando resistência em identificar com que passos iniciar a solução, por isso entendemos que é importante que o professor esteja preparado para induzi-los à resposta, propiciando que o aprendiz perceba os caminhos que se dará até a resposta desejada, apresentando de forma verbal ou escrita o que vêem em cada construção realizada no Geogebra, pois o objetivo é o de despertar conjecturas, o raciocínio que descreva a solução, sendo que estas apresentações podem ser seguidas de uma variável micro-didática: os questionamentos feitos pelo docente aos discentes.

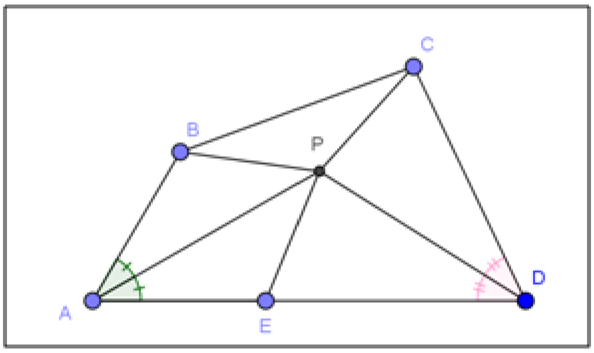
Imagem 20. Quadrilátero construído no Geogebra



Fonte: Construção nossa.

É intuitivo dizer que nesta fase os alunos deverão modelar matematicamente através do que será apresentado a seguir. Desejamos que os aprendizes consigam mostrar que BP=PC, assim, iniciamos mostrando que os mesmos devem fazer uso de um ponto E, em AD, tal que AE=AB, para auxiliar na resolução. Em seguida deve ser realizada um questionamento: “agora o que podemos fazer? Seria interessante realizar outra construção?”.

Imagem 21. Identificação do ponto E no segmento AD e construção do segmento PE



Fonte: Construção nossa.

Desejamos que os aprendizes percebam e descrevam que os triângulos ABP e APE são congruentes através do caso LAL, analisando que:

$$AB=AE,\ B\hat{A}P = E\hat{A}P \text{ e } AP \text{ (lado em comum)}$$

Sendo observada a congruência o discente deve concluir que BP = PE. Contudo, sabemos que alguns alunos podem não perceber que se trata de um caso de congruência. Assim, é preciso despertar através de questionamentos sobre suas observações diante da problemática exposta.

É importante, também, que seja analisado e escrito pelos aprendizes que os triângulos EPD e PCD são congruentes pelo mesmo raciocínio (pelo caso LAL). Devido

$$AD = AE + ED \text{ e } AD = AB + CD, \text{ tem-se que } ED = CD, \text{ pois } AE = AB.$$

Concluindo que PE = PC. Dessa forma, obtemos que PC = BP, ou seja, o triângulo BPC é isóscele de base maior BC.

Validação – Nesse processo esperamos que os aprendizes validem ou não suas respostas, apresentando e defendendo suas soluções. É interessante notar que os mesmos deverão constatar duas coisas: a primeira referente a construção do ponto E que auxilia na solução e a outra que é o conhecimento do conceito de congruência que permite a finalização do problema.

Institucionalização – Nesse procedimento cabe ao professor realizar a solução, constatando e enfatizando a importância de, em alguns momentos, fazer uso de um ponto, no caso o ponto E, que sirva para auxiliar na identificação dos triângulos congruentes. Destacando ainda os casos de congruência, conforme Dolce e Pompeo (1997, p. 39), temos:

- **Congruência de Triângulos**

Existem três condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes.

  - Primeiro caso de congruência - LAL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruente dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

- Segundo caso de congruência – ALA

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

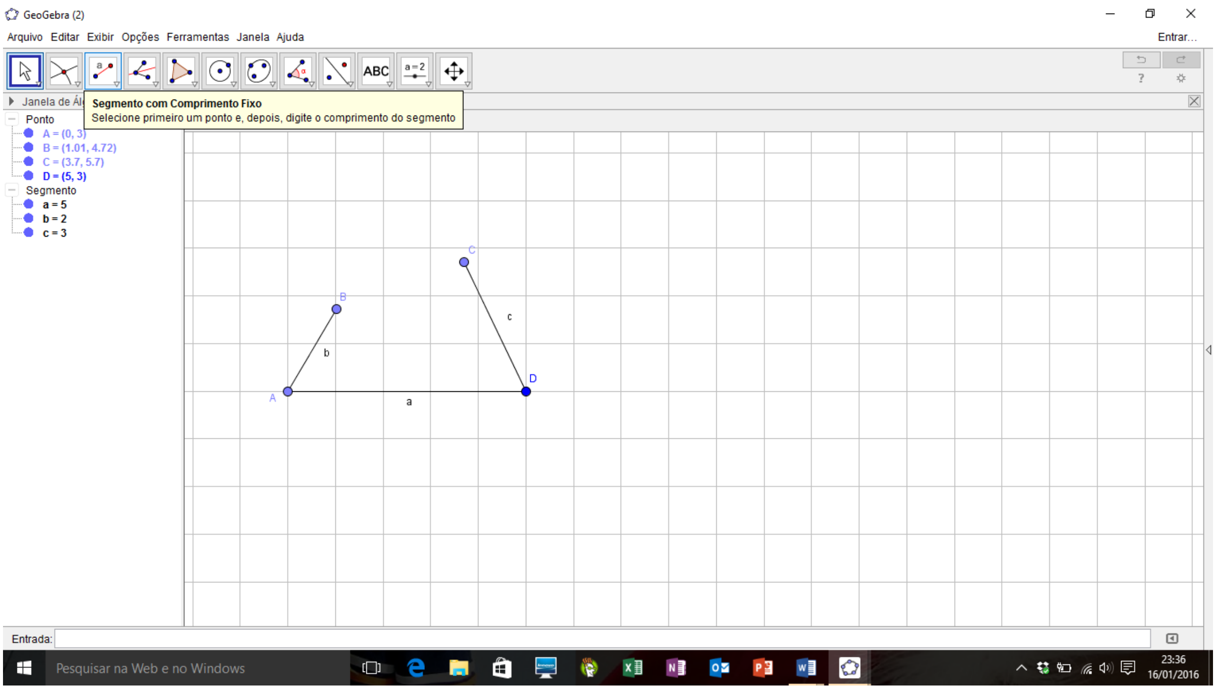
- Terceiro caso de congruência – LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Vejamos a seguir as construções realizadas no software. Para a figura ficar exata vamos fazer uso das condições dadas no enunciado. Primeiro criamos um segmento de qualquer tamanho através do comando "Segmento", denotado por AD, caso apareça outro nome para o segmento, renomeie o ponto clicando com o botão direito na opção "Renomear", em seguida criamos dois segmentos de tamanhos fixos quaisquer (AB e CD), onde a soma desses deve ser equivalente ao primeiro construído.

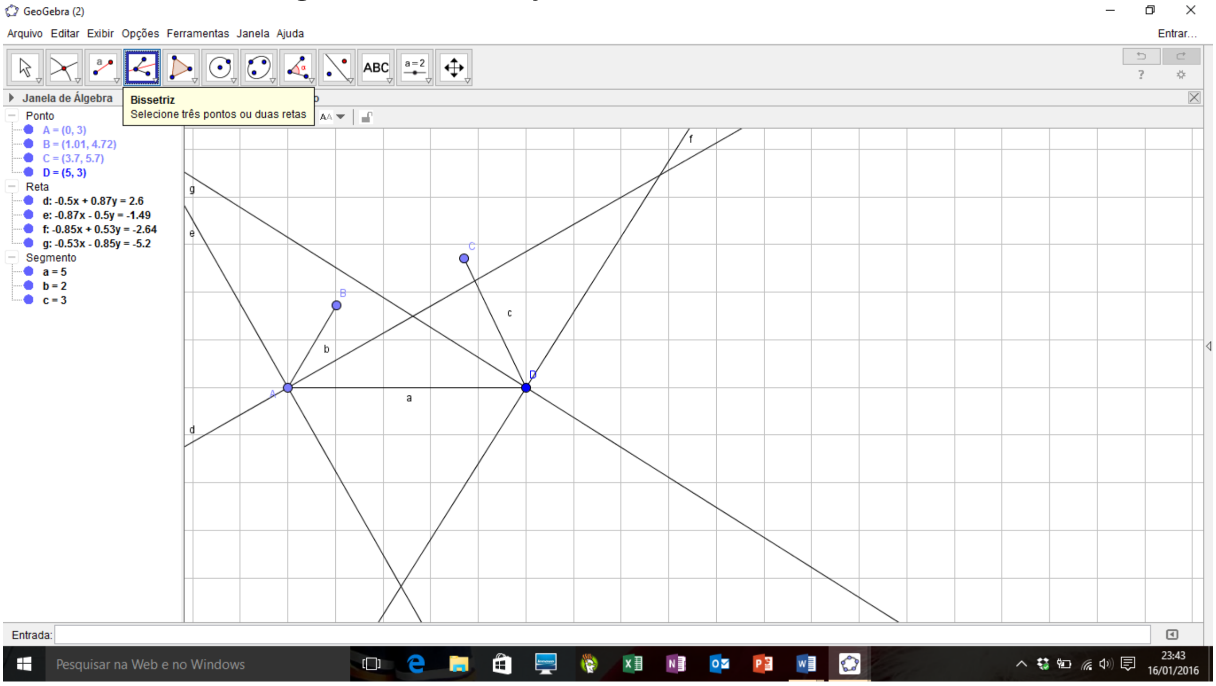
Imagem 22. Início da construção do polígono



Fonte: Construção nossa.

Utilizando o comando “Bissetriz”, identificamos as bissetrizes BÂD e CD̂A.

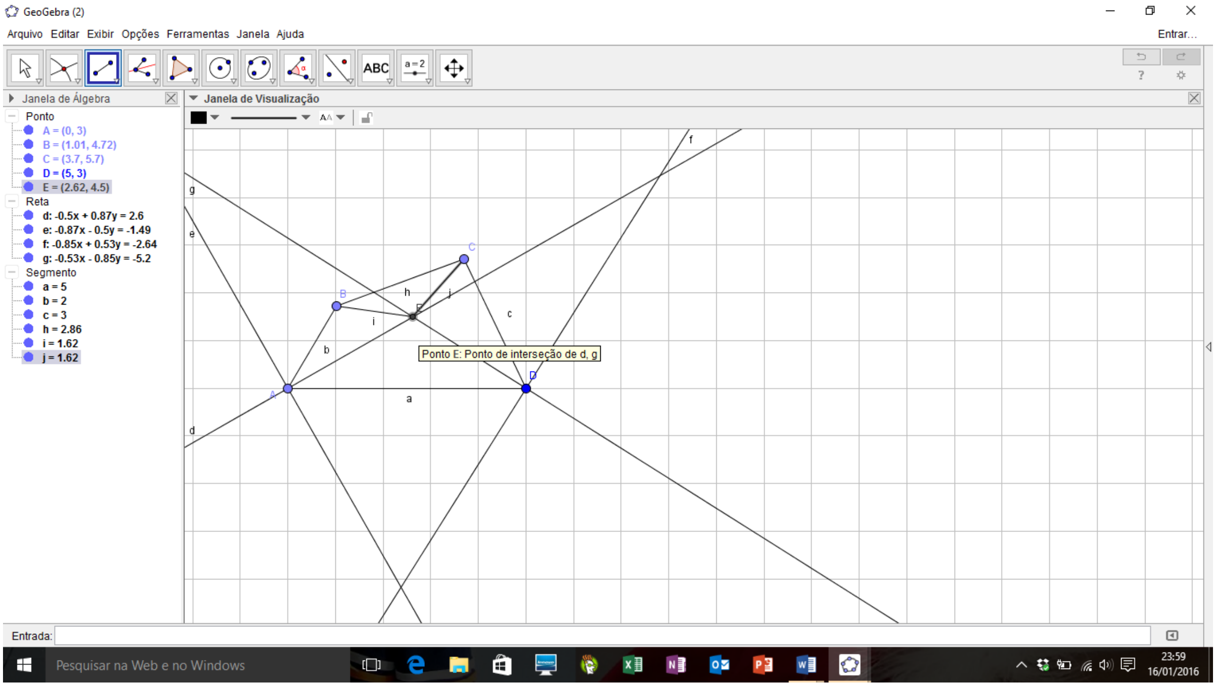
Imagem 23. Identificação das bissetrizes de BÂD e CD̂A



Fonte: Construção nossa.

Marcando o ponto de interseção (P, que deve ser renomeado caso apareça outro nome) através de “Interseção de dois objetos”, e após ter o quadrilátero fechado traçamos os segmentos entre os vértices B, C e P.

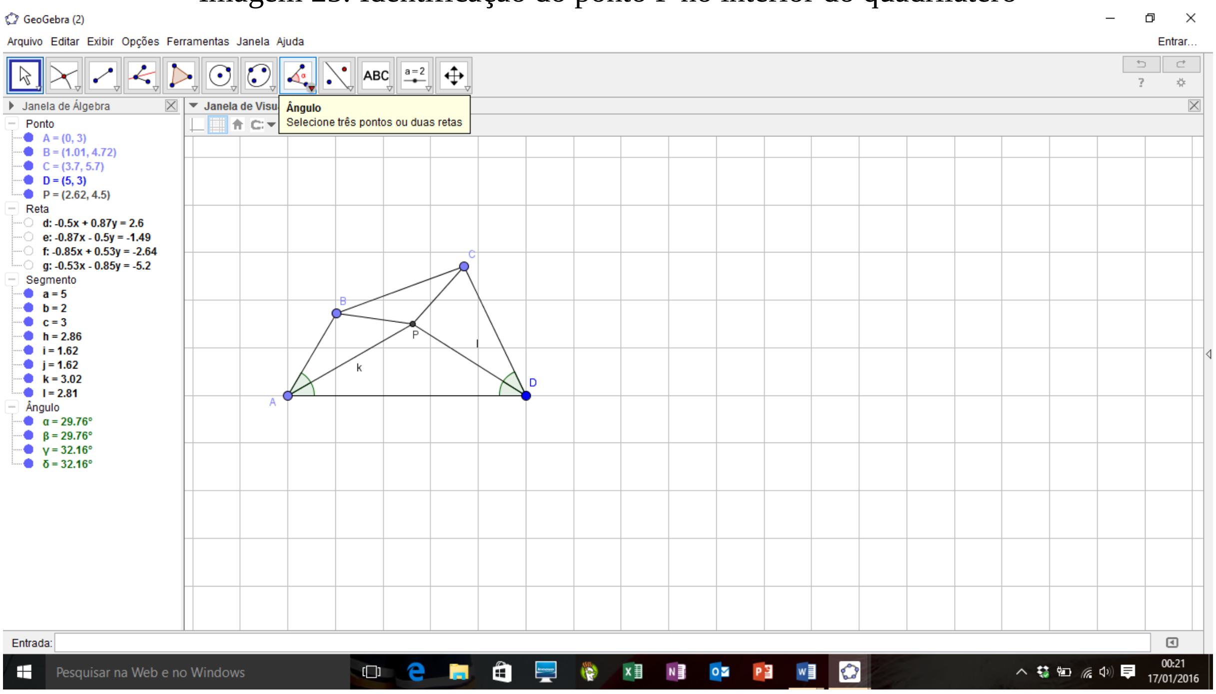
Imagem 24. Identificação da interseção entre as retas que descrevem as bissetrizes $B\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$



Fonte: Construção nossa.

Em seguida deve ser desativado as retas bissetrizes, devendo ser criado mais dois segmentos (BP e PC). Fazendo uso do comando ângulo, podemos enfatizar as congruências ou apenas deixar destacado.

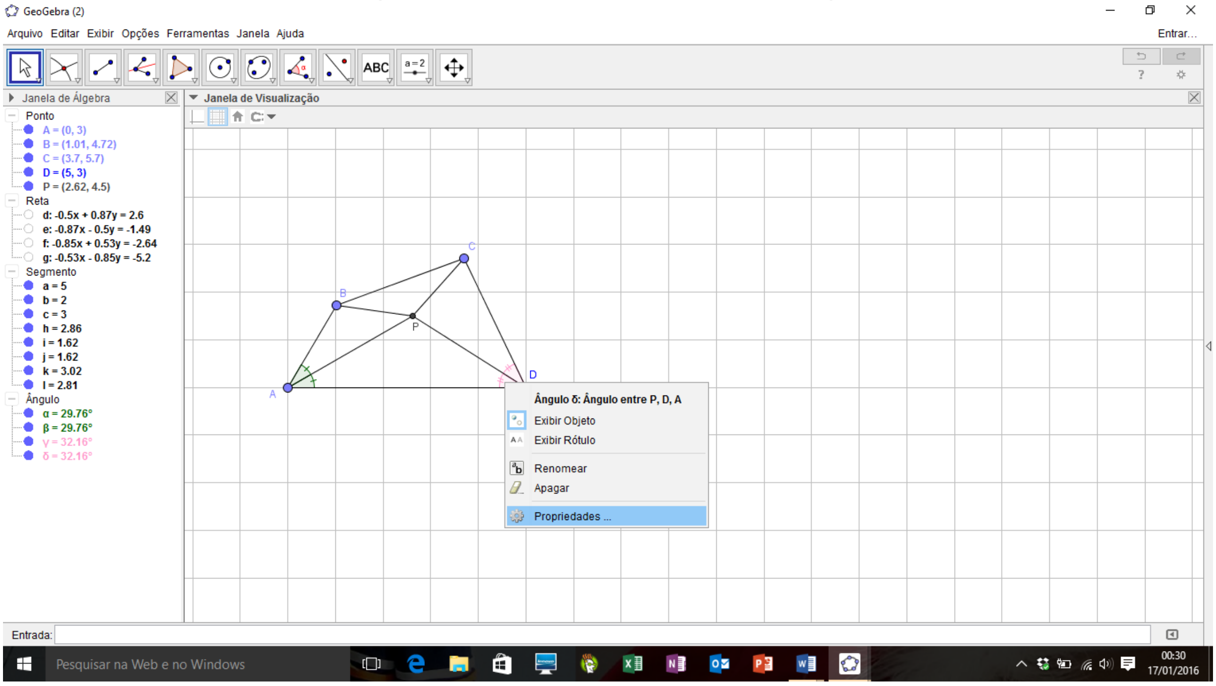
Imagem 25. Identificação do ponto P no interior do quadrilátero



Fonte: Construção nossa.

Podemos também usar as propriedades e modificar as cores ou o estilo dos ângulos, conforme mostramos a seguir na imagem 26.

Imagem 26. Modificação na cor dos ângulos



Fonte: Construção nossa.

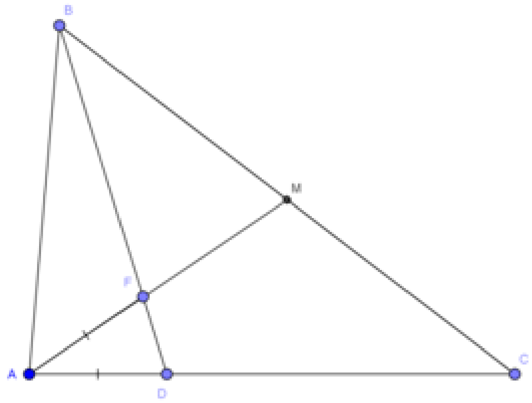
Para construirmos o ponto E no segmento AD usamos o comando “segmento com comprimento fixo”, que deve ter a mesma medida do segmento AB. Em seguida usamos o comando “segmento” e traçamos EP, conforme imagem 21. Esta é a primeira construção que deverá auxiliar na conjecturação dos alunos.

SITUAÇÃO OLÍMPICA 4

Conhecimentos prévios: semelhança de triângulo, razões de semelhança.

Problema – (Banco de Questões OBMEP 2015 – questão 26)

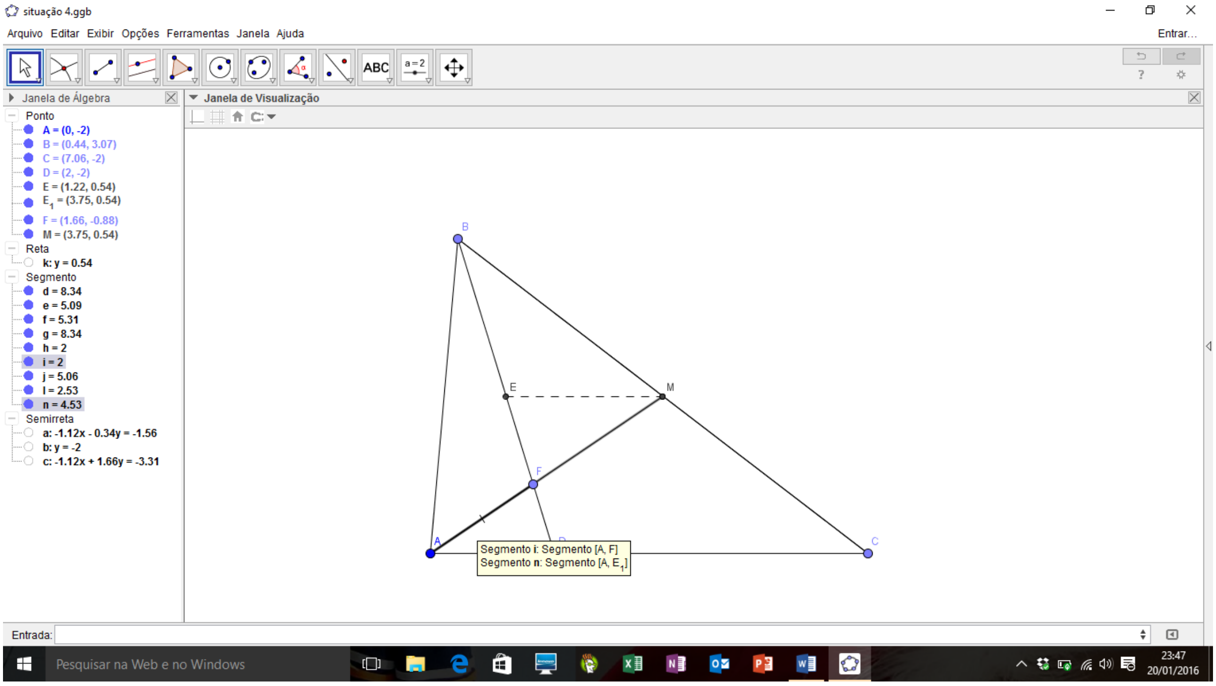
Sejam D um ponto no lado AC do triângulo ABC e F a interseção de BD e da mediana AM. Se AF = AD, encontre a razão entre CD e FM.



Ação - Esperamos que o aprendiz use alguma relação que envolva os triângulos (semelhança ou congruência) ou inicie traçando segmentos que sirvam de auxílio, ou ainda identifique um ponto auxiliar para depois trilhar outros caminhos. Entendemos que resolver problemas de geometria nem sempre é fácil ver um caminho, por isso é muito importante que o professor esteja preparado para despertar a intuição do aluno.

Formulação – Essa fase é marcada pelas descrições, verbais ou escritas, que os alunos devem realizar diante da situação apresentada. Indicamos que o professor pesquisador construa um ponto auxiliar E, em CD, de forma a obtermos um segmento EM paralelo ao segmento AB buscando levar o aprendiz a observar procedimentos que nos levarão à solução, conforme a imagem 27.

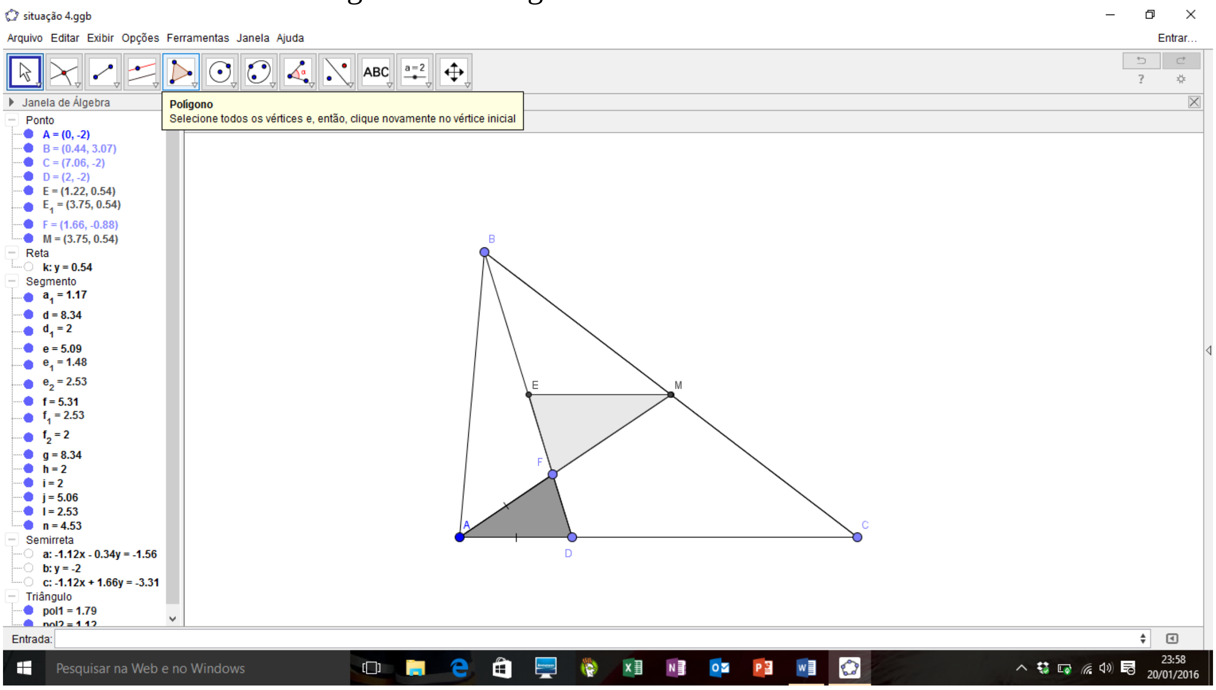
Imagem 27. Ponto E no segmento AC com definição do segmento EM



Fonte: Construção nossa.

Desejamos que os alunos constatem a semelhança entre esses dois triângulos AFD e EFM. O professor pode ainda deixar essas regiões hachuradas para que o aprendiz perceba esta relação sem ao menos ser questionado nada, apenas por sua percepção (ver imagem 28).

Imagem 28. Triângulos AFD e EFM hachurados

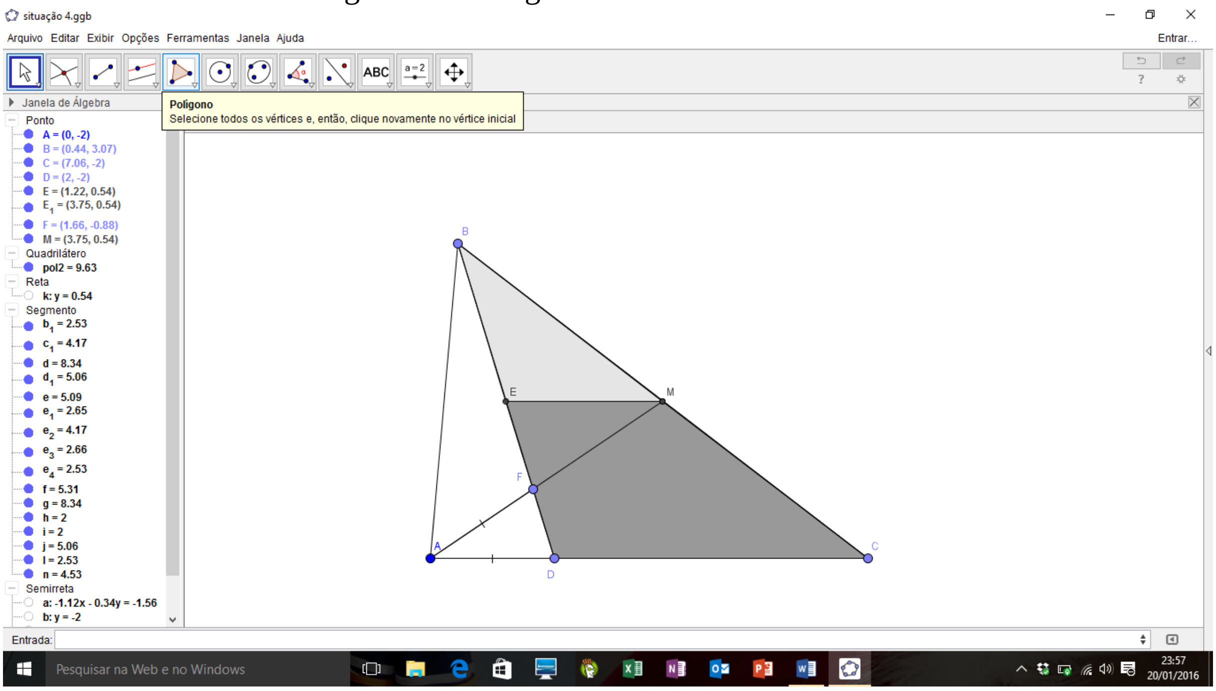


Fonte: Construção nossa.

Agora, o que podemos concluir desses dois triângulos AFD e EFM? Espera-se que o aprendiz perceba que ambos triângulos são semelhantes, pelo caso AAA, tendo em vista que possui ângulo oposto pelo vértice, $F\widehat{D}A \equiv F\widehat{E}M$ e $E\widehat{M}F \equiv F\widehat{A}D$. Devido o triângulo AFD ser isósceles, tem-se que MEF também é isósceles onde $EM \equiv FM$.

O que podemos observar dos triângulos BEM e BDC? (Neste caso é interessante a apresentação da construção a seguir, que é feita fazendo uso do comando "Polígono") É esperado que os aprendizes percebam que se trata de triângulos semelhantes, pelo caso AAA, pois há um ângulo em comum, $B\widehat{E}M \equiv B\widehat{D}C$ e $B\widehat{M}E \equiv B\widehat{C}D$.

Imagem 29. Triângulos BEM e BDC hachurados



Fonte: Construção nossa.

O professor pode ainda incentivar fazendo um questionamento a fim de que o aluno obtenha uma conclusão: "sabendo que M é o ponto médio do segmento CB o que podemos concluir?" Espera-se que o aprendiz use as relações de semelhança, especificamente que escreva CB = 2.CM, isto é, conclua que a constante de proporcionalidade da medida maior pela menor do triângulo BDC por BEM é 2. Levando a

$$\frac{CD}{FM} = \frac{CD}{EM} = 2$$

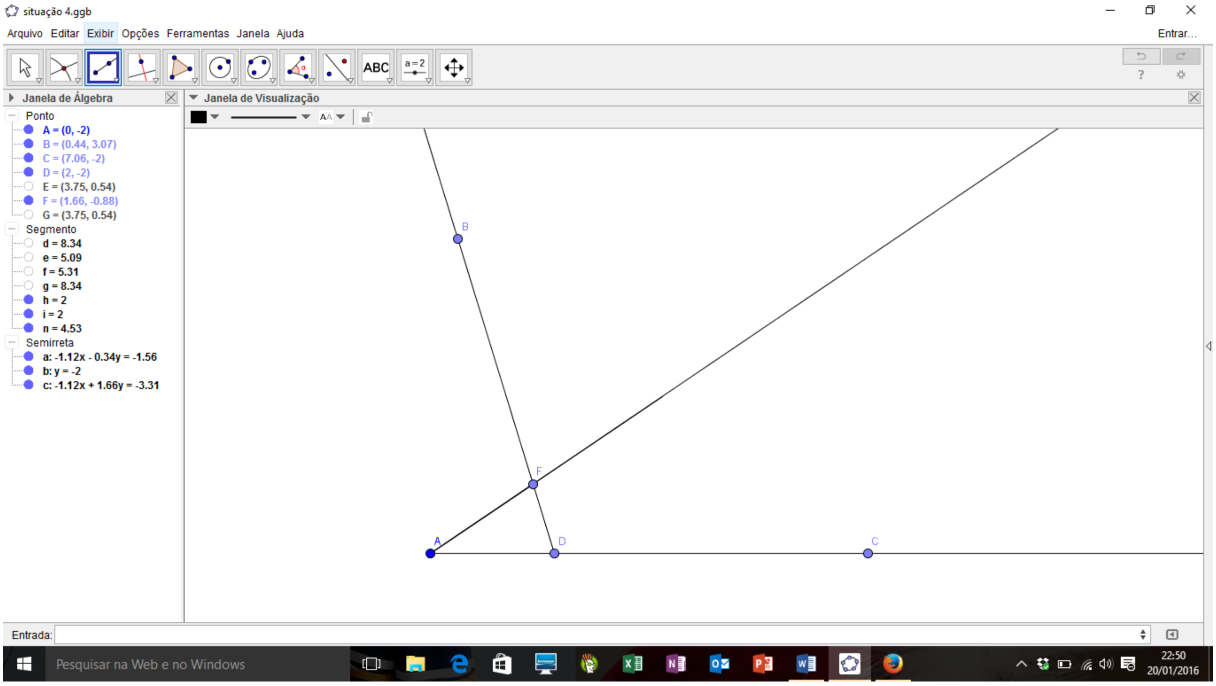
Validação – Como cada etapa descrita nessa situação olímpica retrata as expectativas diante das reações dos alunos perante o problema exposto, entendemos que na validação o aprendiz deverá afirmar o que o fez chegar a solução fim, esperamos que destaquem que os incrementos acrescidos, como a identificação do ponto E, do segmento EM paralalelo ao segmento AC e das relações da semelhança de triângulo é o que os fez seguir com a resolução. O conceito usado pelos alunos se refere aos critérios de Semelhança de Triângulo.

Institucionalização – Nessa fase o professor deve resolver a problemática com o objetivo de constatação dos elementos, conteúdos e raciocínio que induziram e que poderão servir de auxílio a outros problemas. É preciso ainda enfatizar aos alunos os conceitos (critérios) de semelhança de triângulo e procedimentos importantes para a resolução, conforme descrito na Situação Olímpica 2 (visto em Dolce e Pompeo (1997)), bem como denotar que a criação do E e do segmento EM é a base para a aplicação dos conceitos a priori já conhecidos.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Inicialmente realizamos a construção da figura no software Geogebra usando os seguintes comandos: “Segmento com comprimento fixo” e escrevemos AF e AD, em seguida usamos a “Semirreta” passando por AF, AD e DF, bem como criamos um ponto na semi-reta após o segmento AD e isto deve ser feito para auxiliar na identificação do ponto médio.

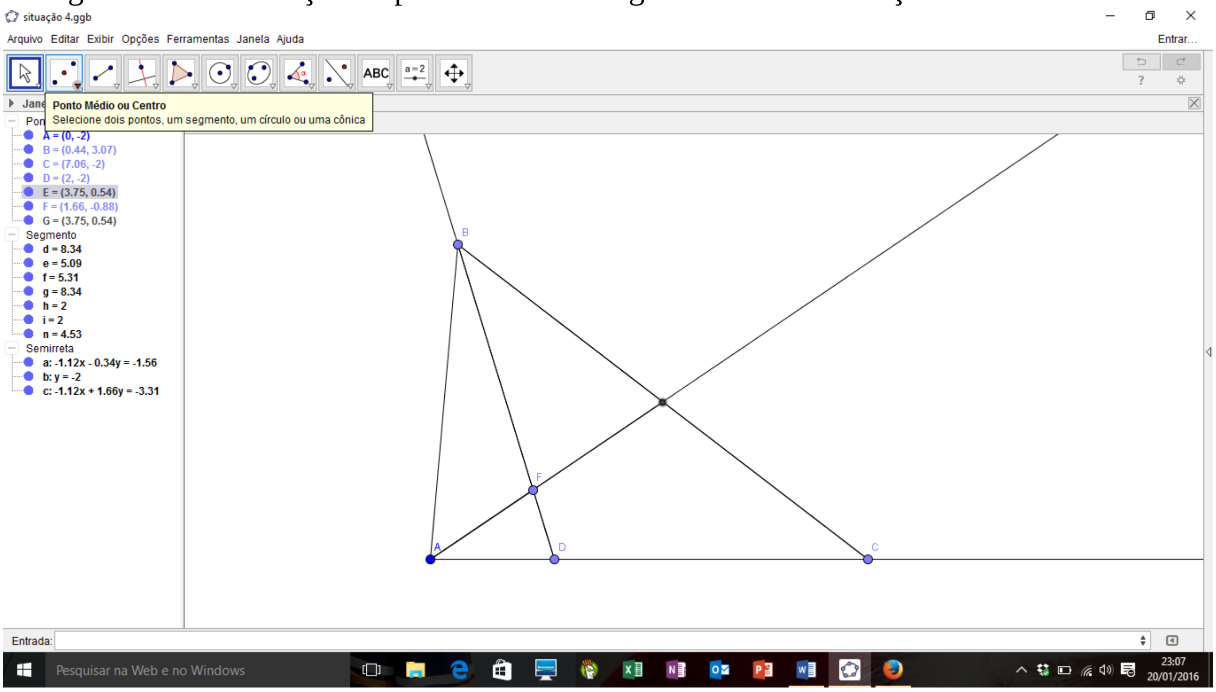
Imagem 30. Início da construção do polígono



Fonte: Construção nossa.

Após criarmos as semi-retas, devemos fazer os segmentos para fechar o triângulo e escondemo-las, pois se ocultarmos cada um então desaparecerá. Para identificar o ponto médio (M) usamos o comando "ponto médio" e interseção entre BC e a semi-reta AF, para auxiliar na posição "ideal" em que deve ficar os lados do triângulo ABC.

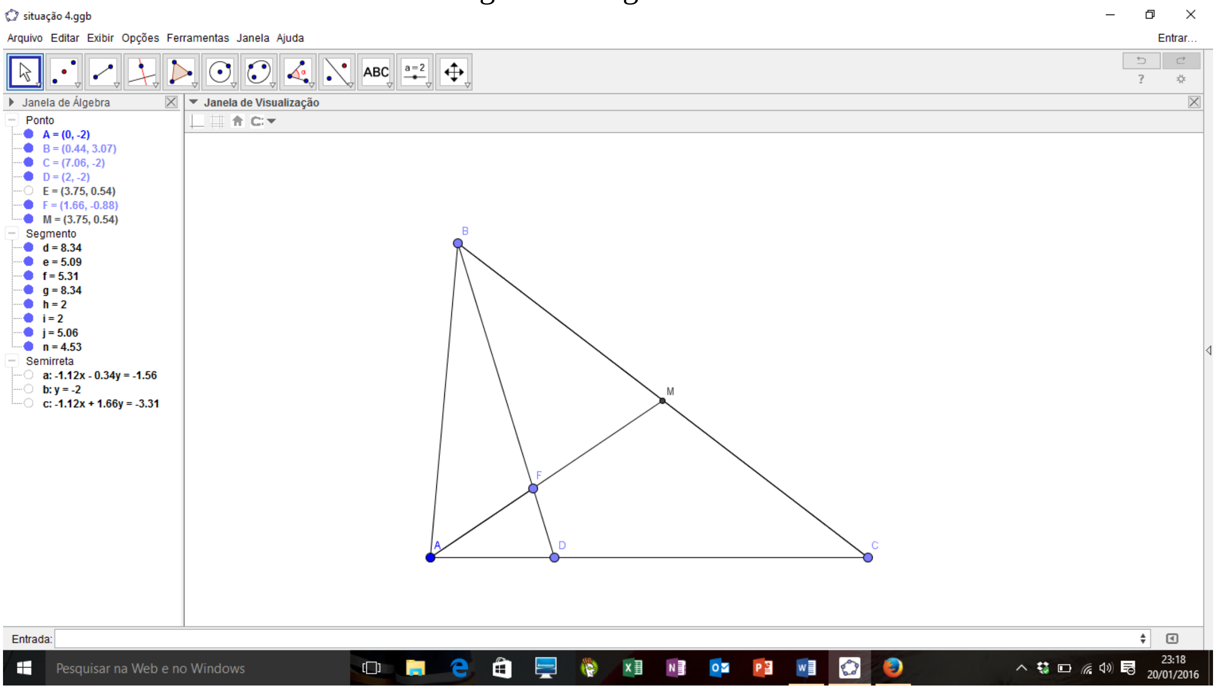
Imagem 31. Identificação do ponto médio do segmento BC e interseção com a semi-reta AF



Fonte: Construção nossa.

Após identificar a localização de M devemos identificar apenas o segmento AM, dessa forma usando o comando “Segmento [A,M]” podemos desabilitar a semirreta AM.

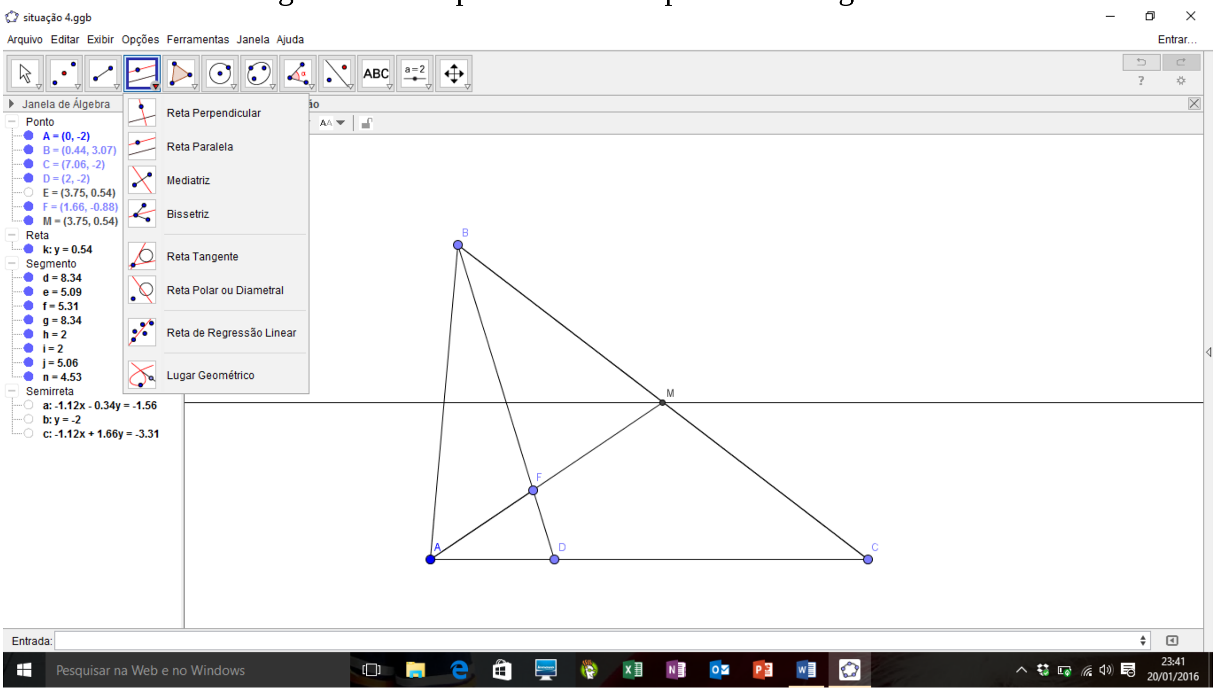
Imagem 32. Segmento AM



Fonte: Construção nossa.

Tal construção ocorre fazendo uso do comando “Reta paralela”, depois usamos “Interseção” e construímos o segmento EM. Podemos também mudar o estilo dos segmentos em – propriedade – estilo.

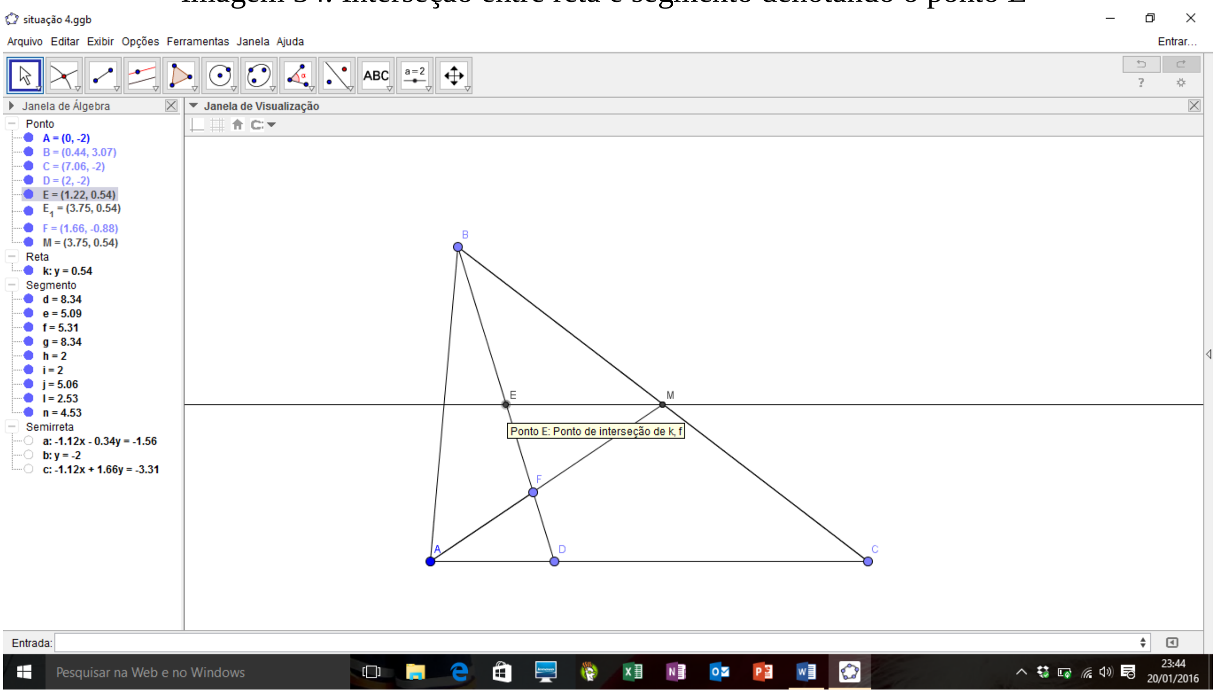
Imagem 33. Reta passando em M paralela ao segmento AC



Fonte: Construção nossa.

Depois definimos a interseção desta reta com o segmento BD usando o comando "Interseção de dois objetos" e clicando em cima dois segmentos.

Imagem 34. Interseção entre reta e segmento denotando o ponto E



Fonte: Construção nossa.

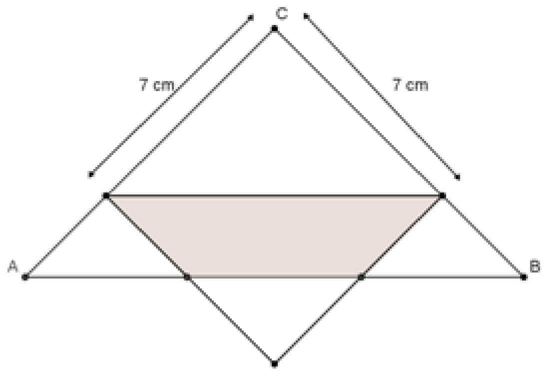
Podemos ainda colorir tornando mais claro o que queremos identificar e fazer uso a fim de auxiliar na solução, onde inicialmente criamos os polígonos através do comando "Polígono" ativando nas ferramentas, onde apenas os vértices podem ser selecionados, ou escrevendo na caixa de entrada, neste caso, “Polígono[A,F,D]” e “Polígono [EFM]”, obtendo a imagem 28 e 29.

SITUAÇÃO OLÍMPICA 5

Conhecimentos prévios: área de triângulo, função.

Problema - (Prova f2 – OBMEP 2013 – questão 4 (item b))

A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por *f* (*x*) a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura abaixo a área da região cinzenta, em cm², é *f* (7).

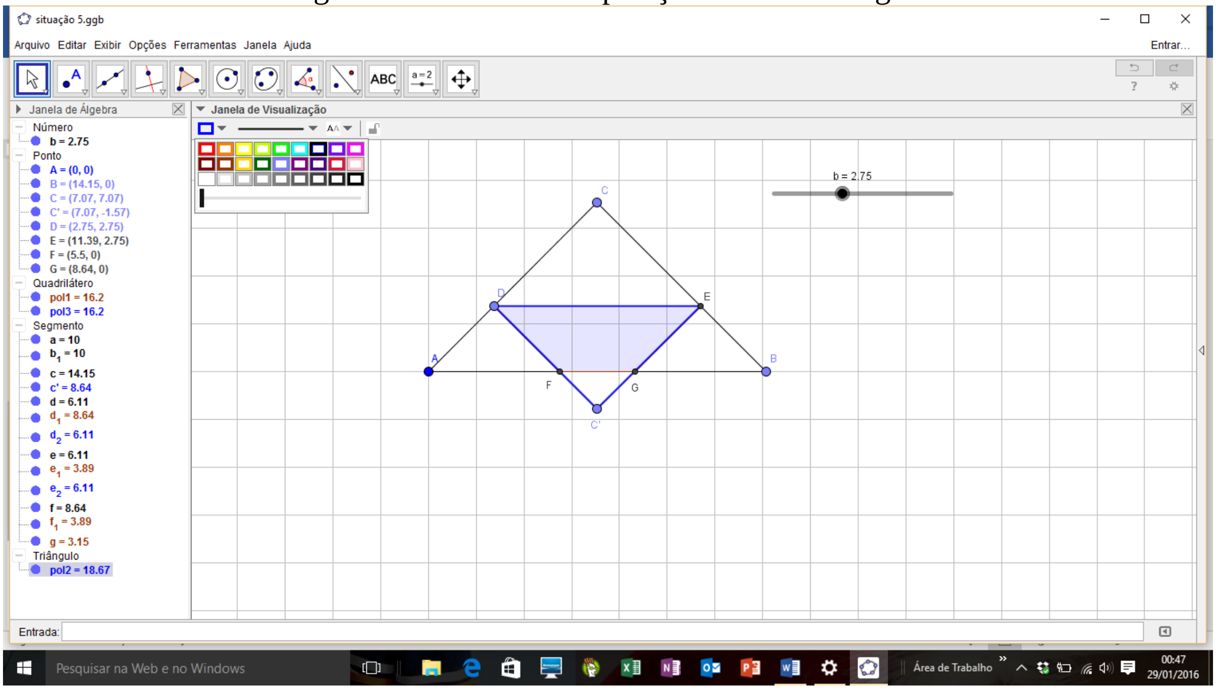


Escreva as expressões de *f* (*x*) para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

Ação – Ao se deparar com a problemática é intuitivo que o aluno olhe para área poligonal como sendo apenas área de trapézio, pois pode percebê-la como sendo uma região fixa, ou que se trata da diferença entre áreas de triângulos; ou ainda que a área está dividida em dois resultados de acordo com a sobreposição. Assim, deve-se inicialmente encontrar informações numéricas ou algébricas que conduzam a encaminhar a solução, considerando que a percepção esteja de forma correta ou ainda se for registrada de forma errada e enganosa em algum momento da ação, por parte do aluno, que a área é uma região fixa. Essa carência deve ser suprida pelo professor ao mostrar de forma interativa a área em diversas posições fazendo uso do software Geogebra destacando a área resultante da interseção visando contribuir na compreensão dos alunos. Essa fase do auxílio do docente deve ocorrer na fase seguinte, na formulação.

Formulação – Conforme Brousseau (1989) essa fase corresponde pelos argumentos/modelos matemáticos formalizados ou não, realizados pelo aluno diante da problemática a ser solucionada. Dessa forma o professor poderá auxiliar realizando a interatividade da figura, denotando a área de interesse, podendo ainda averiguar os valores para cada x, fazendo o aluno intuir o modelo que deverá descrever a área, conforme imagem 35.

Imagem 35. Área de sobreposição entre os triângulos



Fonte: Construção nossa.

Pretendemos o aprendiz identifique que a área sendo esta quando o triângulo fica totalmente sobreposto vale $x^2/2$, nesse caso quando $0 \leq x \leq 5$. Ainda, pela interatividade deve ser percebido e argumentado que quando $5 \leq x \leq 10$ a área será $\mathbf{x^2 - (\text{área do triângulo } FGC')}$. Para tanto é preciso constatar se os discentes identificam as medidas DF e FC', no caso 10-x e 2x-10, respectivamente. Se essa constatação não for possível é preciso que o professor pesquisador os auxiliem através de questionamentos, tais como: "Qual a medida de AD? Vocês percebem alguma correspondência entre a medida de AD e DF? Contudo, quanto mede DC' e FC'?". O intuito é permitir que o aprendiz identifique a área do triângulo FGC', obtendo f(x), a área sobreposta, como sendo:

$$\frac{x^2}{2}, \text{ quando } 0 \leq x \leq 5$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2}, \text{ quando } 5 \leq x \leq 10 \text{ ou ainda}$$

$$\frac{x^2-4x^2+40x-100}{2} \text{ que corresponde a } \frac{-3x^2+40x-100}{2} \text{ para } 5 \leq x \leq 10$$

Após entenderem que essa definição condiz com funções quadráticas é preciso que seja validado se as mesmas estão corretas.

Validação – Por ser uma fase onde o aluno deve provar e comprovar seus resultados, através de apresentação e discussão sobre o que foi feito, para que seja sanado as dúvidas ainda existentes e validado as respostas. Realizando uso dos conceitos e principais ideias usadas nesse problema é possível que o aluno tenha ciência de que sem o conhecimento de função com a discriminação de domínio a sua constatação não seria possível, além do conceito de área de triângulo que neste problema é básico.

Institucionalização – É a fase de formalização da solução, nesse momento cabe ao professor pesquisador juntar as ideias dos aprendizes e sintetizar as respostas, ressaltando os conhecimentos usados.

- Área de Triângulo

Área de um triângulo é denotado pelo produto da base com a altura dividido por dois, isto é,

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

- Conceito de Domínio, conforme Iezzi e Murakami (1977).

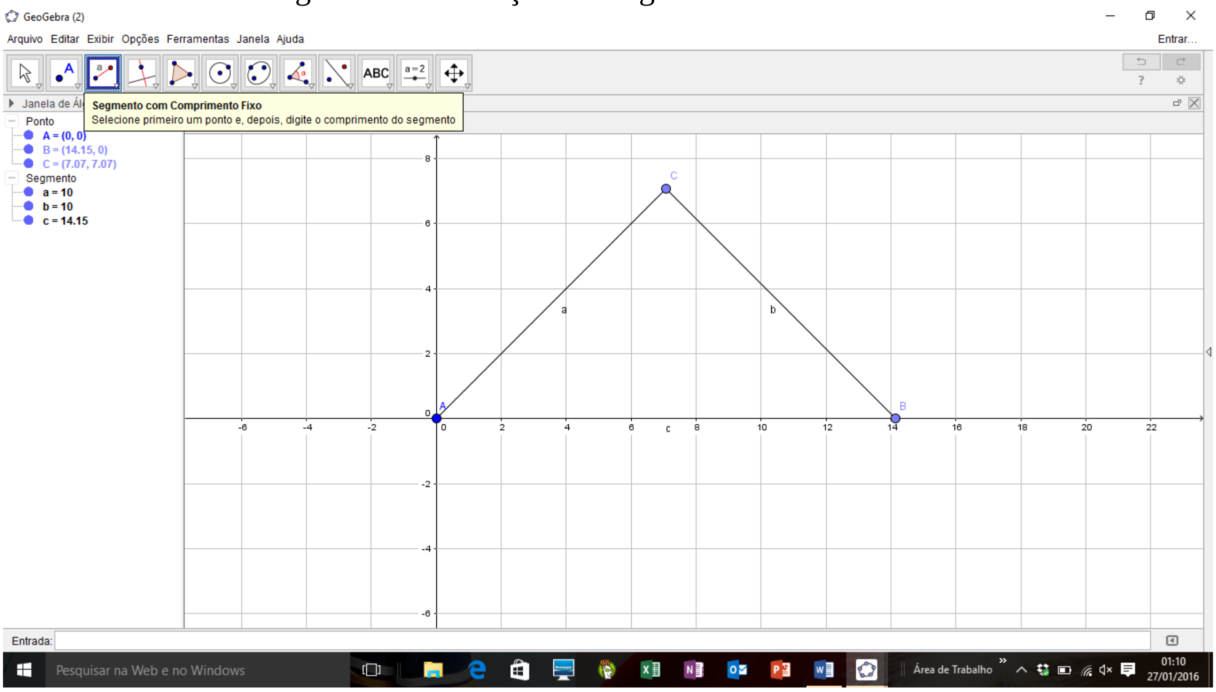
Seja $f: A \rightarrow B$ uma função, chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Lembramos que o uso da *Situação Olímpica* visa conceber meios e estratégias de solução que concebam o uso de conceitos já conhecido dos alunos.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Construiremos o triângulo baseado nos “Segmentos com comprimento fixo”, devido o triângulo ser isósceles e reto, então primeiro escrevemos um segmento AC, em seguida um segmento CB de forma que possuam o mesmo comprimento, para facilitar usamos a malha e algumas vezes o plano cartesiano. Escrevemos ainda o segmento AB usando apenas o comando “Segmento”.

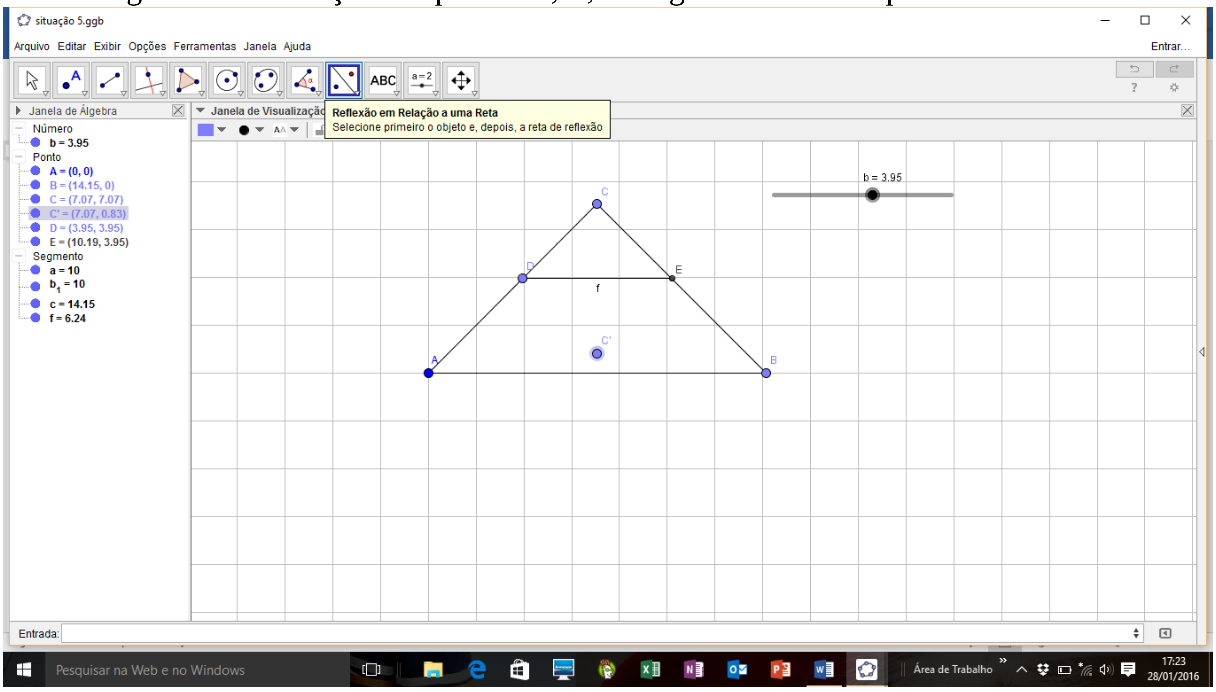
Imagem 36. Construção dos segmentos de medidas fixas



Fonte: Construção nossa.

Depois identificamos qual a reta que passa por cada segmento usando “Reta” e marcando um ponto em cada cateto, mas que esteja associado um fator de variação que é definido anteriormente, no caso utilizamos o “Controle deslizante”, onde o valor deve variar de 0 até a abscissa do ponto C, no caso, **um ponto será (b,b)**, onde b é o nome do controle acrescido, e o outro será **((100 - 5sqrt(2) b) / (5sqrt(2)), b)**. Após criados os pontos, deletamos as retas, em seguida criamos um segmento entre os pontos D e E, depois usamos o comando “Reflexão em relação a uma reta” em relação o ponto C e o segmento DE.

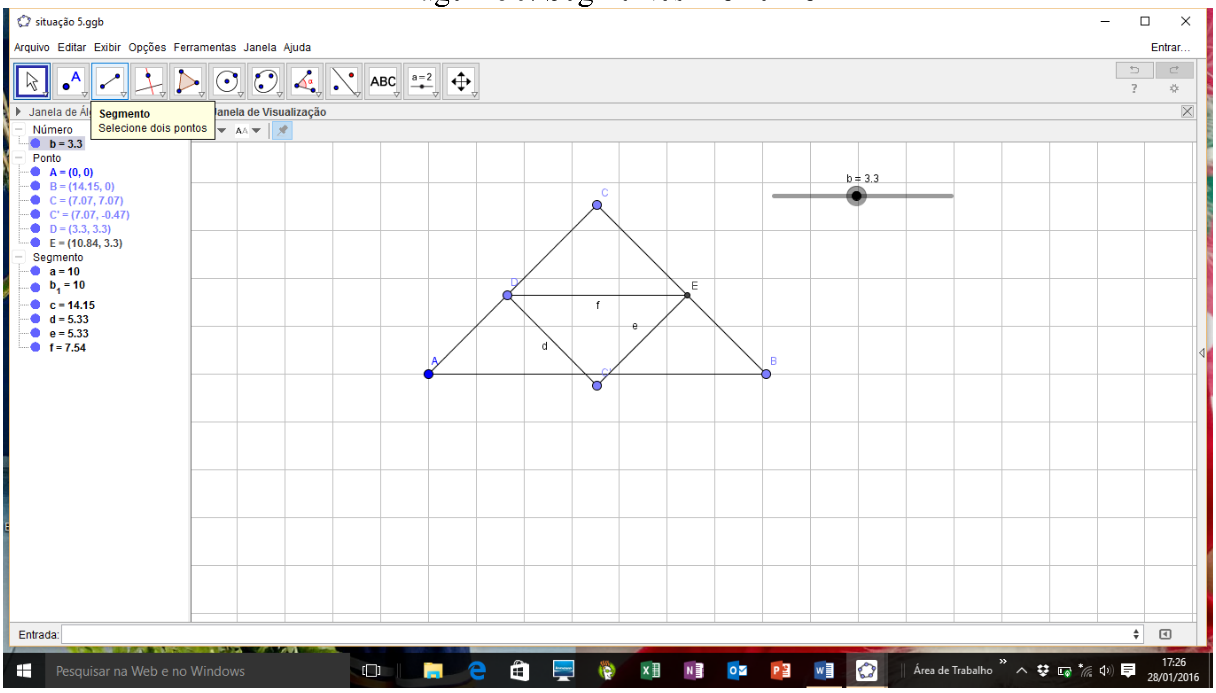
Imagem 37. Denotação dos pontos D, E, do segmento DE e do ponto reflexão de C



Fonte: Construção nossa.

Em seguida traçamos dois segmentos um entre o ponto D e C’ e outro entre E e C’.

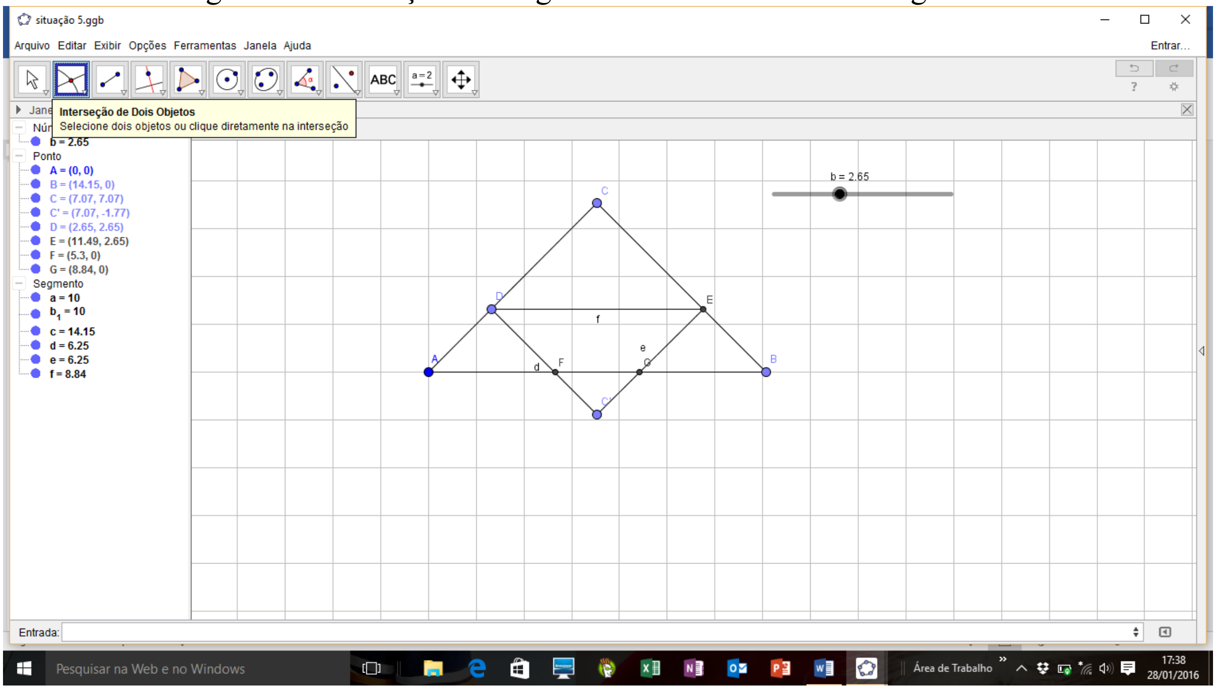
Imagem 38. Segmentos DC’ e EC’



Fonte: Construção nossa.

Identificamos ainda os pontos de interseção entre os segmentos DC’ e AB e depois entre EC’ e AB.

Imagem 39. Interseção dos segmentos DC’ e EC’ com o segmento AB



Fonte: Construção nossa.

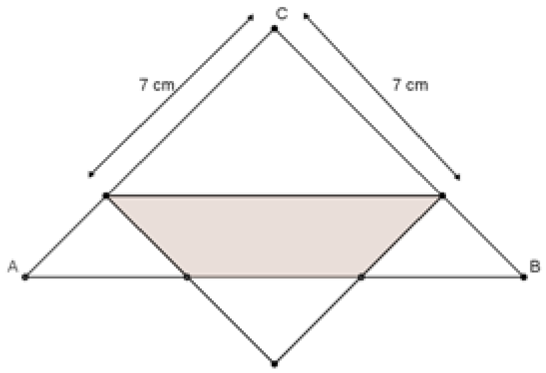
Após ter criado as representações geométricas devemos fazer do comando “Polígonos” descrevendo as áreas de interesse. Serão três a saber: um será o quadrilátero com vértices DFGE, que será o pol1, construído usando o referido comando, bem como o triângulo passando em DEC’, que será o pol2, e o polígono descrito através de um teste lógico **Se[0 ≤ b ≤ 3.6, pol1, pol2]** na caixa de entrada. No pol1 e pol2 devemos deixar sem coloração. É preciso ainda lembrar de desmarcar os rótulos de cada segmento, clicando com botão direito a opção “exibir rótulo” para deixar a figura com uma aparência elegante, como podemos ver na imagem 35. Pronto figura finalizada!

SITUAÇÃO OLÍMPICA 6

Conhecimentos prévios: função, fórmula de Bháskara.

Problema - (Prova f2 – OBMEP 2013 – questão 4 (item c e d))

A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura abaixo a área da região cinzenta, em cm², é $f(7)$.



Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x e determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Ação – Fazendo uso da função descrita na *Situação Olímpica* 5 (anterior), cabe ao aprendiz realizar conjecturas para representar graficamente as duas funções quadráticas que separam-se de acordo com domínio definido em dois intervalos. Pode ser que o discente simplesmente busque fazer um esboço, visualizando o modelo do gráfico real, ou ainda tente construir com seus detalhes identificando as raízes e o vértice.

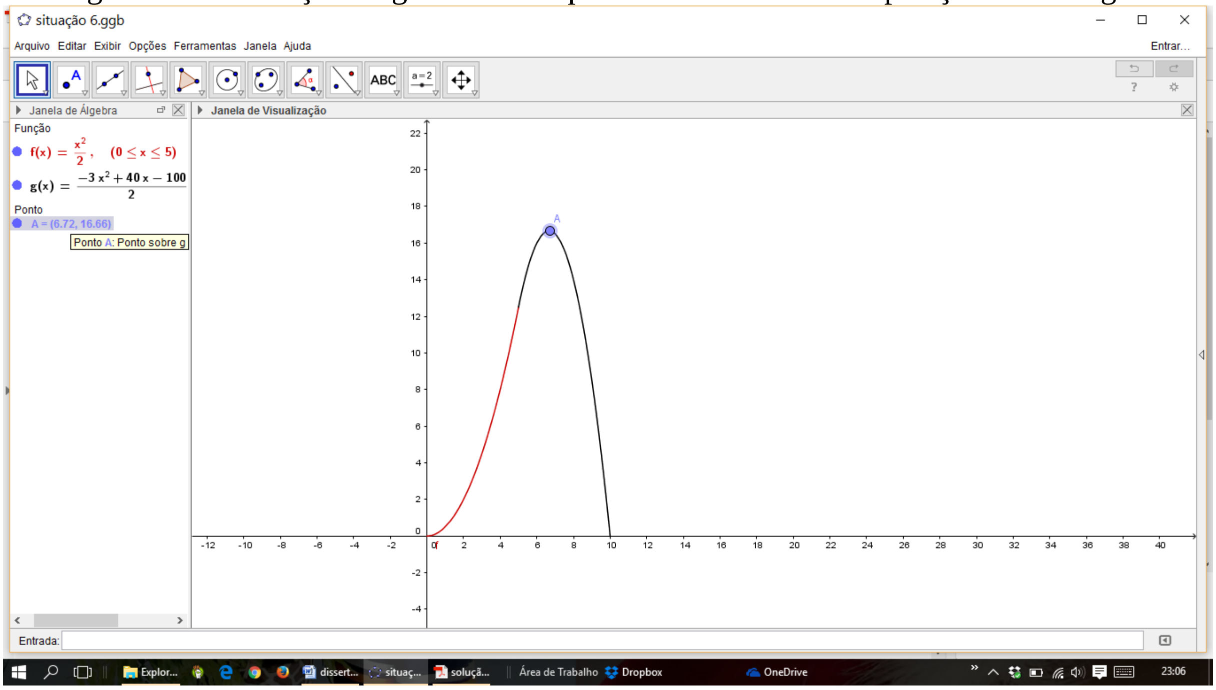
Validação - A estratégia de construir gráfico por ser um conhecimento prévio do aluno, deve conduzi-lo a identificar as raízes através da fórmula de Bháskara e usar a fórmula que condiz o vértice, no caso de:

$\frac{x^2}{2}$, temos a raiz $x = 0$ e o vértice (0,0);

$\frac{-3x^2+40x-100}{2}$, as raízes são $x_1 = \frac{10}{3}$ e $x_2 = 10$ e o vértice (20/3;50/3).

Todavia, é preciso que seja identificado pelos aprendizes quais das raízes e vértices Ox pertencem ao domínio para cada função. A apresentação do gráfico realizada pelo professor pesquisador através do software Geogebra pode indicar melhor como o mesmo deve ser.

Imagem 40. Construção do gráfico correspondente a área de sobreposição dos triângulos



Fonte: Construção nossa.

Pela visualização o aluno deve ser levado a perceber inicialmente o gráfico que ora eles, inclusive devem ter feito, constatando que o valor máximo está inserido na função definida para $5 \le x \le 10$, isto é, na segunda parte da função, tendo que identificar o y vértice de $\frac{-3x^2+40x-100}{2}$.

Validação – Entendemos que nessa fase o debate maior será pela construção correta do gráfico através do posicionamento dos elementos devidos, se estes tiverem sidos calculados corretamente, já que o cálculo das operações elementares é uma das grandes dificuldades apresentadas na análise prévia, o que pode levar a resultados indevidos inclusive quanto ao valor máximo que corresponde a 33,34 cm². Mas, o que deve ser claro é qual das duas funções, já que ambas são quadráticas, deva ser usada para então fazer uso da fórmula que descreve o y vértice.

Institucionalização – Nessa fase deverá ser realizada toda organização das informações pensadas e escritas pelos aprendizes, a solução concreta a fim de que sejam realizadas as correções necessárias. O único conceito usado neste problema, além da identificação do gráfico que contém a indicação do valor máximo, é o vértice de uma função, especificamente o da imagem.

Definição de vértice

O ponto $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

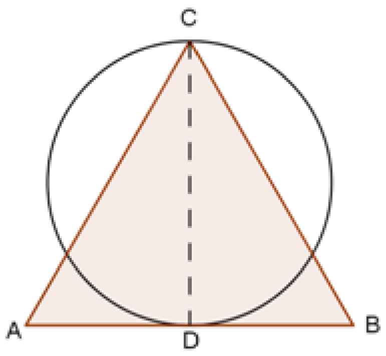
CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Usando o “Campo de entrada” inserimos as duas funções, uma por vez, descrevendo o intervalo onde cada uma está definida através do comando “Função[função, valor inicial de x, valor final de x]”, em particular, “Função[x^2/2,0,5]”e”Função[(-3x^2+40x-100)/2,5,10]”. Um dos objetivos é tornar perceptível ao aluno o ponto máximo, após tal constatação é esperado que o aluno perceba que o valor de interesse corresponde ao y vértice. A imagem resultante pode ser visualizado na imagem 40.

SITUAÇÃO OLÍMPICA 7

Conhecimentos prévios: área de triângulo, área de setores e de segmentos circulares, Teorema de Pitágoras.

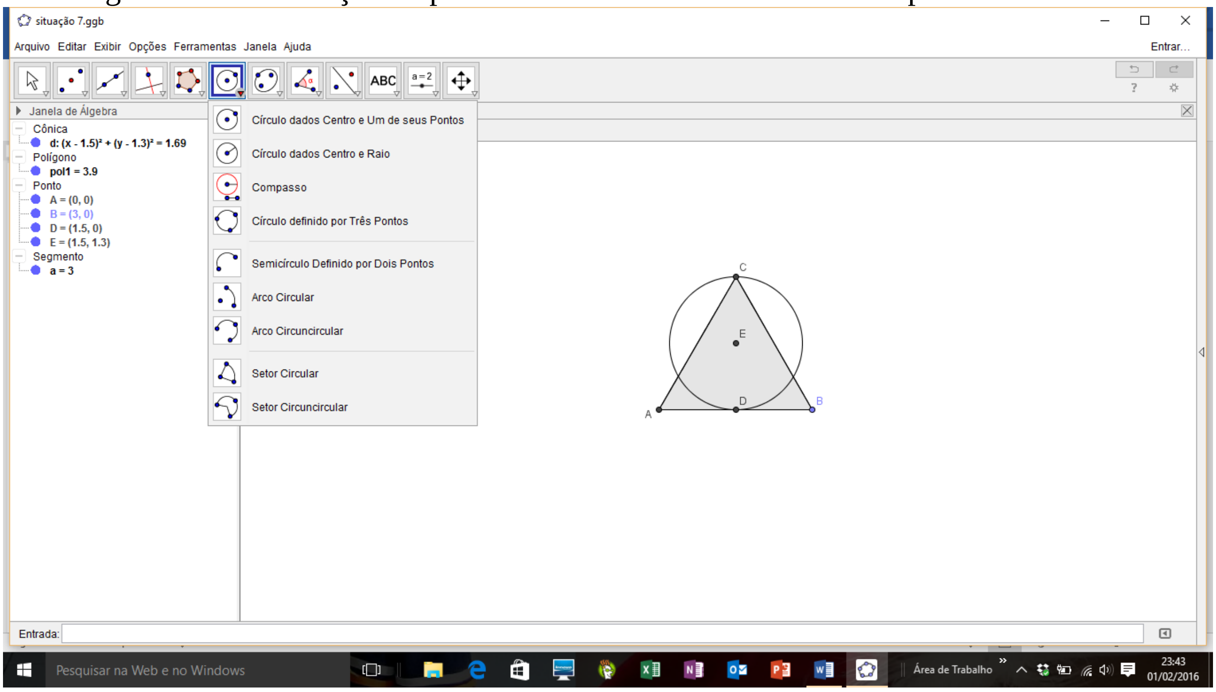
Problema – (Banco de Questões OBMEP 2015 - questão 2 (modificada)). No desenho abaixo, o ΔABC é um triângulo equilátero e CD é tanto a altura do triângulo quanto o diâmetro do círculo. Se AB = 10 cm, determine a área NÃO sombreada.



Ação - Este momento é marcado pela busca do aprendiz no desenvolvimento de alguma estratégia fazendo uso do diâmetro. Sabemos que é necessário que seja dado um tempo para que o mesmo busque raciocinar mais. Acreditamos ainda que as construções realizadas ou pelo próprio aluno ou auxiliada pelo professor pode permitir que seja percebida de forma mais clara o procedimento da solução. Com esse pensamento descreveremos tais construções na etapa de formulação a seguir.

Formulação – Nessa fase faremos algumas construções com o intuito de fazer o aluno escrever a solução através das observações que forem comentadas. Podemos despertar no aprendiz a percepção através de questionamentos, como afirma Polya (1995, p.14) em seu “método de questionar do professor”. Iniciamos mostrando os pontos E, centro da circunferência, e D, ponto médio do segmento AB, em seguida o professor pode realizar questionamentos sobre o que pode ser realizado a posteriori.

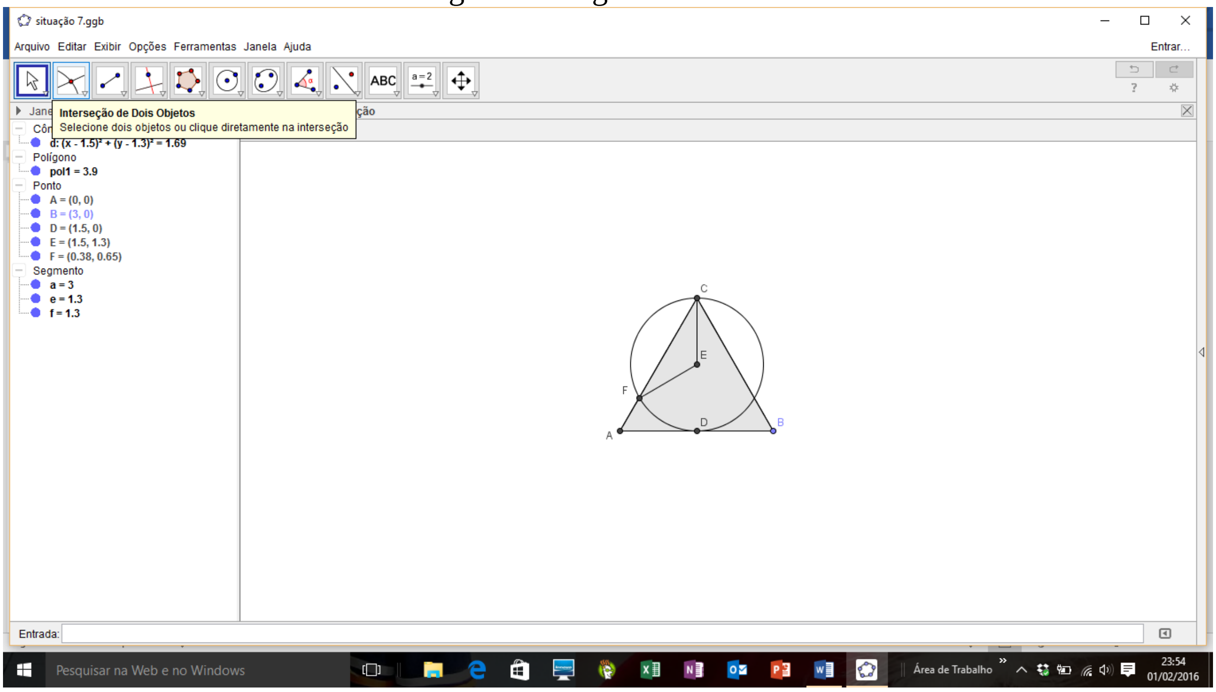
Imagem 41. Visualização do ponto E centro da circunferência e D ponto médio de AB



Fonte: Construção nossa.

É claro que podem surgir várias ideias como também nenhuma, todavia algumas dicas o docente pode sinalizar: “e se traçarmos segmentos EF e EC o que podemos concluir? Ao visualizar a figura abaixo (imagem 42) o que podemos perceber?”. É esperado que os aprendizes respondam que os segmentos EF e CE referem-se ao raio da circunferência, bem como temos o triângulo CFE isósceles, onde o ângulo CÊF mede 120º.

Imagem 42. Segmentos EF e EC



Fonte: Construção nossa.

Por hipótese sabemos que o triângulo ABC é equilátero, fazendo com que possamos calcular o raio, metade da altura do referido triângulo, usando o Teorema de Pitágoras. Podemos ainda destacar que a área desejada é do segmento circular CF que é a diferença entre as áreas do setor FEC pelo triângulo FEC. Dessa forma é esperado que escreva inicialmente:

$$(DC)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 \text{ o que implica } (DC)^2 + 5^2 = 10^2$$

$$(DC)^2 = 100 - 25$$

$$DC = \sqrt{75} = \sqrt{3.25} = 5\sqrt{3}\ cm = diâmetro$$

Tendo assim, que o raio corresponde a $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, ou seja, $2{,}5\sqrt{3}$ cm.

O aprendiz deve usar o fato do ângulo $C\hat{E}F$ ser 120º e a relação de área de setores.

$$Área\ do\ setor = 120.\frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$$

$$A_{FEC} = \frac{EF \times CE \times sen\,\theta}{2} = r^2 \times \frac{sen\,120°}{2} = r^2 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 \text{ (área do triângulo FEC)}$$

Assim, Área desejada = área do setor FEC – área do triângulo FEC, o que corresponde a

$$Ad\ = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$= \frac{\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) r^2}{12}$$

$$= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} . \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} . \left(\frac{75}{4}\right) = \frac{75\pi}{12} - \frac{75\sqrt{3}}{16} = \frac{25\pi}{4} - \frac{75\sqrt{3}}{16}$$

$$= \frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{16}\ cm^2$$

Como temos duas regiões iguais, a área procurada é o dobro do valor encontrado, ou seja,$\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{8}\ cm^2$.

Validação – Esperamos que nessa fase o estudante retrate todo o conhecimento usado neste problema, destacando os principais conceitos que lhes foram importantes, tais como o ponto de partida, que foi a identificação do ponto E, bem como o Teorema de Pitágoras para indicar a medida do raio (segmento CE) e o uso das fórmulas de área de setor circular, usando as medidas em ângulos, e da área de triângulos usando a função seno, pois conhece-se duas medidas e o ângulo entre esses lados.

Institucionalização – Nessa etapa esperamos designar de maneira formalizada a solução, tornando claro todos os procedimentos, os conhecimentos usados como um item importante do saber e considerando que os conceitos simples devem ser administrados de forma a auxiliar na solução do problema, podemos ainda enfatizar que o uso de estratégias mínima indicam um primeiro passo para resolver um problema, neste caso a indicação dos pontos E e F, que permitiram a construção do triângulo isósceles.

Conceitos usados

- **Área de setor circular**

A área do setor é proporcional ao comprimento do arco ou à medida do ângulo central. Podemos descrevê-la através das seguintes fórmulas:

$A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$, onde R é o raio e α a medida em graus

Área de triângulo

A área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido

$$A = \frac{1}{2} l_1 . l_2 . sen\ \theta$$

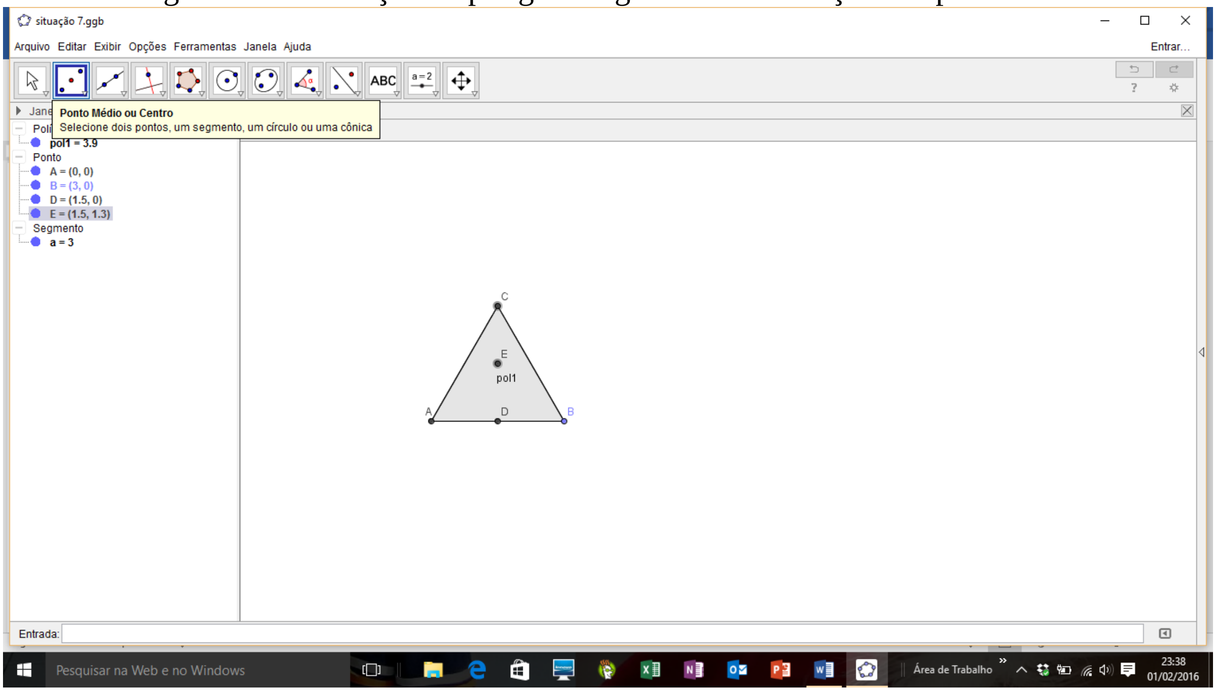
Onde l_1e l_2 são os lados compreendidos entre o ângulo θ.

Teorema de Pitágoras: Dado um triângulo retângulo, a sua hipotenusa ao quadrado é a soma do quadrado dos catetos.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

A construção realizada no software deve ser realizada antes da aula, indicando alguns elementos que possa tornar mais acessível o conhecimento; descreveremos a seguir os comandos. Selecionamos “Polígono regular” indicando o número de arestas, depois identificamos os pontos médios de AB e depois de DE.

Imagem 43. Construção do polígono regular e identificação dos pontos E e D



Fonte: Construção nossa.

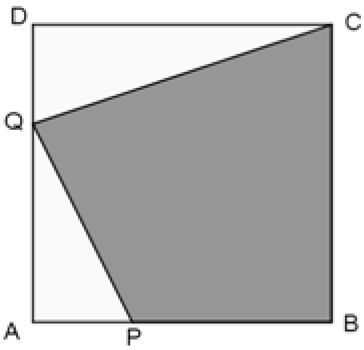
Em seguida, usando o comando “Círculo dado centro e um de seus pontos” construímos um círculo com centro no ponto E de raio EC, ver imagem 41. Após finalização do desenho, passamos para o segundo estágio que é o de apresentar aos alunos sinalizando ideias e estratégias. Indicamos a interseção, originando o ponto F e que usando o “Segmento” enfatizamos o triângulo FEC de raio 30º, 30º e 120º, respectivamente, FCE (ver imagem 42).

SITUAÇÃO OLÍMPICA 8

Conhecimentos prévios: função quadrática, área de quadrado e de triângulo.

Problema – (Banco de Questões OBMEP 2014 – questão 9)

O quadrado ABCD desenhado na figura abaixo tem lado 3 cm.



Os pontos P e Q podem ser deslocados sobre os segmentos AB e AD respectivamente de forma que o comprimento do segmento AP meça a metade do comprimento do segmento AQ.

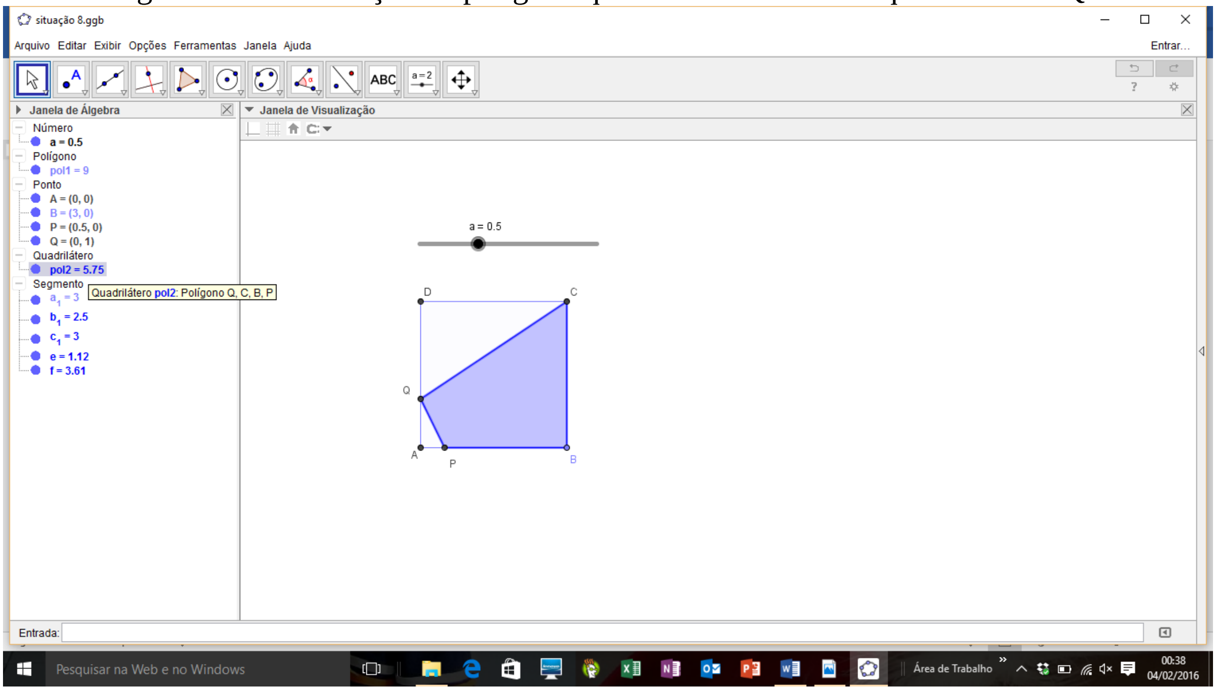
a) Determine o valor da área do quadrilátero hachurado em função do comprimento do segmento AP.

b) Determine a área máxima que o quadrilátero hachurado pode assumir.

Ação – Essa fase é o momento inicial de atuação do aluno diante do que foi exposto, logo entendemos que o mesmo deva trabalhar olhando para a área de interesse como sendo a diferença entre as áreas, no caso do quadrado por triângulos, e que as medidas laterais do triângulo dependem da variação das medidas dos segmentos AP=x e AQ=2x. Uma das primeiras características que devem ser vistas e escritas pelos alunos. Na fase seguinte, formulação, cabe ao professor realizar de forma interativa a movimentação dos pontos P e Q para que facilite os procedimentos iniciais de percepção e conjecturação.

Formulação – Devido essa fase ser de troca de informações o docente pode realizar construções e expor algumas movimentações no intuito de permitir que os aprendizes possam percebera área máxima e conjecturar a função que a descreve.

Imagem 44. Identificação do polígono que descreve a área do quadrilátero PQCB



Fonte: Construção nossa.

A prerrogativa após as percepções é permitir que os aprendizes possam algebrizar, modelar usando expressões matemáticas a fim de validar posteriormente os resultados encontrados.

Notadamente, descrevemos o que entendemos que o aluno possa realizar nessa fase.

$$Área\ desejada = Área\ quadrado - (A_{APQ} + A_{QDC})$$

O ponto crucial aqui provavelmente é identificar as medidas dos catetos dos triângulos APQ e QDC. Olhando para o triângulo APQ a medida de AP = x e a medida de AQ=2x, bem como a medida de QD = 3-2x e a medida de DC = 3. Assim,

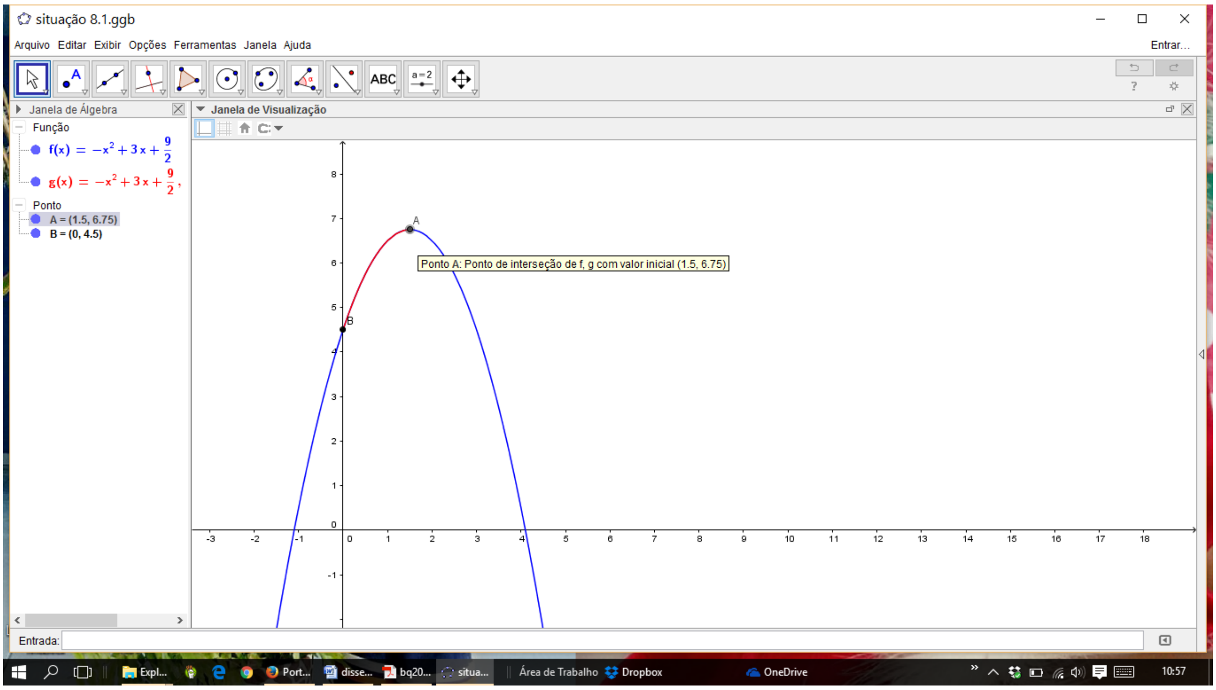
$$Área\ desejada = A(x) = 3^2 - \left(\frac{x.2x}{2} + (3-2x).\frac{3}{2}\right)$$

$$A(x) = 9 - x^2 - \frac{9}{2} + 3x$$

$$A(x) = -x^2 + 3x + \frac{9}{2}, \forall\, x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

A variação de x, o domínio da área desejada (A(x)), pode, em muitos casos, nem ser constatado pelos alunos, o que deve ser um fator de questionamento por parte do professor. A construção do gráfico é um requisito conhecido de quem já possui o conhecimento de função, especificamente, gráfico de função quadrática que se comporta como uma parábola por isso entendemos que se o domínio não for identificado de forma correta o mesmo não poderá ser validado. Assim, é claro que o gráfico possui concavidade para baixo, pois o termo de x^2 é negativo, admitindo um valor máximo. É importante que o aluno observe para o gráfico visando apenas o domínio (ver imagem 45), pois visualmente o valor máximo facilmente pode ser percebido.

Imagem 45. Visualização do gráfico da função que descreve a área *A(x)* destacado de cor vermelha



Fonte: Construção nossa.

Podemos ainda identificar os pontos que corresponde as extremidades relativas a função no domínio [0;1,5] realizando o cálculo aplicando os valores x=0 e depois x=1,5 na função $A(x) = -x^2 + 3x + 9/2$ encontrando os seguintes valores A(0)=9/2 e A(1,5)=6,75

Visualmente constatamos que pode ser percebido pelo aprendiz que o valor máximo é atingido quando x=3/2, implicando que:

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2}$$

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}$$

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}\text{ cm}^2$$

Então a área máxima será 27/4 cm² e será atingida quando x=3/2.

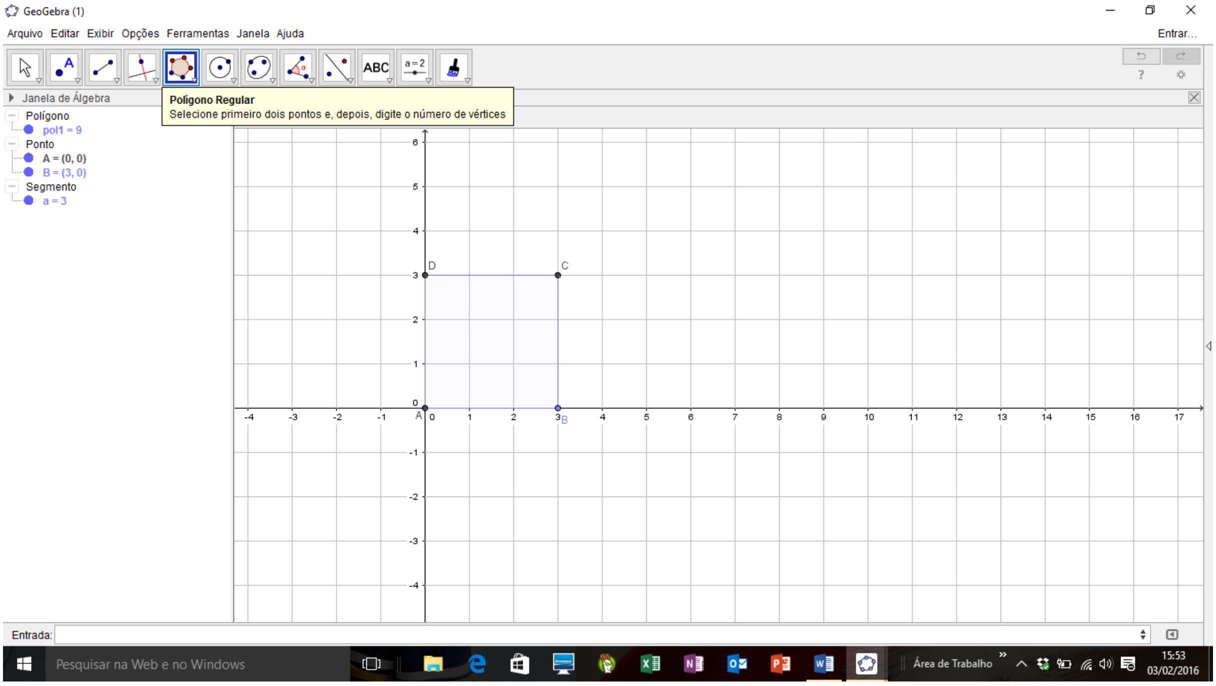
Validação – Espera-se que o modelo matemático seja validado após confrontação com o enunciado informado e com a utilização do Geogebra ao se constatar com o valor do segmento AP=x. É importante ainda considerar que pelo uso do software (ver imagem 44 e imagem 45) se pode antecipar e prever qual, de fato, deve ser o valor máximo e que esta deriva de uma função quadrática. É interessante notar ainda que o único conceito que usamos é o de função, derivado da diferença entre as áreas de quadrado e do triângulo, especificamente função quadrática, construção de gráfico e identificação de domínio, conforme se pode perceber pelo polígono.

Institucionalização – Este procedimento serve para constatação formal da solução que ao ser exposta ao aprendiz permite que seja percebido como deve proceder a escrita matemática, sendo este de grande relevância para provas de segunda fase da Olimpíada de Matemática. Contudo, é importante perceber que o uso correto do conceito de função, mesmo que a priori de forma indireta, sendo que foi causado pela diferença entre as áreas, deve ser analisado, no sentido de que o domínio é a peça chave para o prosseguimento da resolução. Assim, destacamos mais uma vez os conceitos de função, área de triângulo e de quadrado.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Denotaremos a seguir os comandos que determinam a figura desejada. Iniciamos exibindo o plano cartesiano e a malha para facilitar a identificação de pontos que queiramos usar, logo em seguida usamos o comando “Polígono regular” com quatro vértices e neste caso consideramos a origem no ponto (0,0) de lado medindo 3.

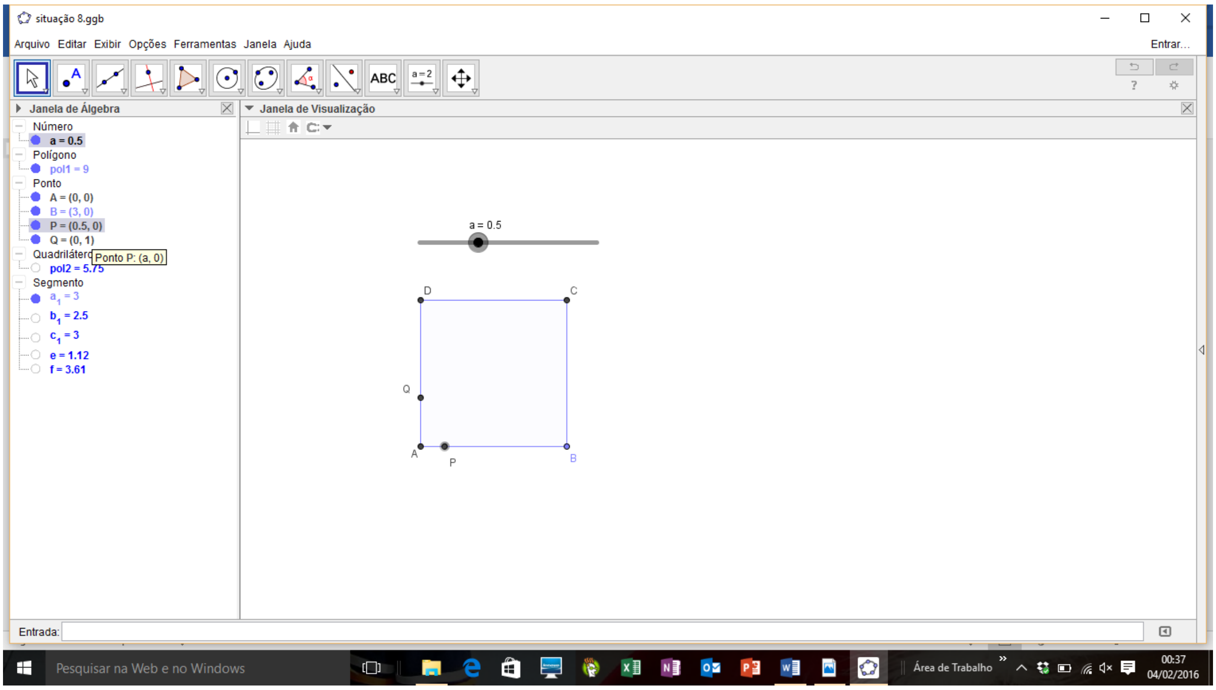
Imagem 46. Visualização do quadrado sob a malha



Fonte: Construção nossa.

Depois construímos um "controle deslizante" *a* variando de 0 a 1.5. Consequentemente, criamos dois pontos na "caixa de entrada", um designado por *(a,0)* e outro por *(0,2a)*.

Imagem 47. Visualização do quadrado com os pontos P e Q descritos através do controle deslizante *a*

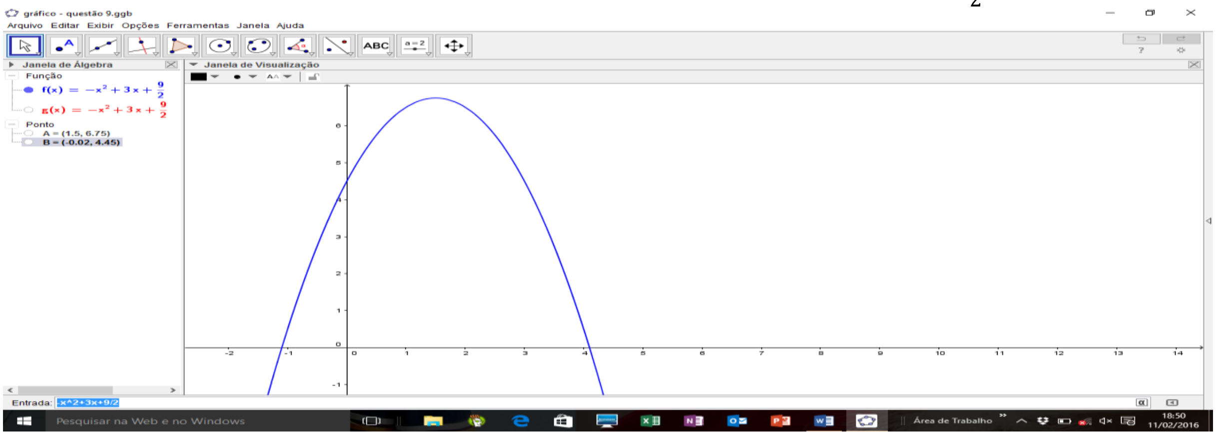


Fonte: Construção nossa.

Construindo um “Polígono” com vértices PBCQ podemos identificar a área desejada. Fazendo a movimentação da região através do controle deslizante pode também ser percebido o valor da área indicado em pol2 (ver imagem 44).

Outra construção usada foi da visualização do gráfico da função que descreve a área hachurada $A(x) = -x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ sem identificação do domínio, para chamar atenção dos alunos qual importância do uso desse conceito. Em seguida, após constatação de todos quanto ao domínio correto, inseri outra função $A(x)$ limitada entre 0 e 1,5.

Imagem 48. Visualização da função $A(x) = -x^2 + 3x + \frac{9}{2}$



Fonte: Construção nossa.

Contudo, o gráfico que representa a área de interesse, que deve ser apontado pelos aprendizes e depois exposto pelo professor pesquisador, deve ter representatividade através do comando “$função[-x^2 + 3x + 9/2{,}0{,}1.5]$” escrito na “caixa de entrada” (ver imagem 45).