UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RONDINELLE MARCOLINO BATISTA

RIGIDEZ E ESTIMATIVAS DE VOLUME DE MÉTRICAS TIPO EINSTEIN

FORTALEZA
2016

RONDINELLE MARCOLINO BATISTA

RIGIDEZ E ESTIMATIVAS DE VOLUME DE MÉTRICAS TIPO EINSTEIN

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Coorientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B337r Batista, Rondinelle Marcolino.
Rigidez e estimativas de volume de métricas tipo Einstein / Rondinelle Marcolino Batista. – 2016.
66 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.
Coorientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Sólitons de Ricci. 2. Quase sólitons de Ricci. 3. Métricas quasi-Einstein. 4. Variedades de Einstein. I. Título.

CDD 510

RONDINELLE MARCOLINO BATISTA

RIGIDEZ E ESTIMATIVAS DE VOLUME DE MÉTRICAS TIPO EINSTEIN

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: 14 / 02 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo (Examinador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Examinador)
Universidade Federal Federal do Amazonas (UFAM)

Prof. Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco (Examinador)
Universidade Nacional Autônoma do México (UNAM)

À minha linda filha Maria Sofia Soares Marcolino e a minha mãe Raimunda dos Santos Marcolino.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus e a minha mãe Raimunda pelo incondicional amor, apoio, dedicação, enfim obrigado por tudo.

A minha filha lindona Maria Sofia amor da minha vida, minha principal motivação.

A todos os meus familiares em especial, meu avô Joaquim Marcolino, meu tio Raimundo Marcolino e meu primo Jefferson Marcolino.

Agradeço também ao professor Abdênago Alves de Barros pela orientação no mestrado e doutorado, pela confiança e sensibilidade com minhas dificuldades em geral, mais acima de tudo obrigado pela amizade.

Agradeço ainda ao professor Ernani de Sousa Ribeiro Júnior pela co-orientação e por sua ajuda inestimável durante meu mestrado e doutorado, mas principalmente pela amizade.

Não posso deixar de agradecer aos professores José Nazareno Vieira Gomes, Oscar Alfredo Palmas Velasco e à professora Fernanda Ester Camillo Camargo por aceitarem participar da banca examinadora de minha tese. Em especial ao professor José Nazareno pelas sugestões à última seção do capítulo 3, quando ainda era estudante de doutorado e discutíamos quase que diariamente sobre métricas tipo Einstein, mas sobretudo pela amizade.

Também agradeço todos os meus amigos da Pós-Graduação em matemática da UFC que tive o prazer de conviver durante os cinco anos que estive na UFC, aqui representados por Leon, Deibson, Felipe, João Francisco, Edinardo, Thadeu, João Vitor, Francisco Chaves, Raimundo Bastos, José Ederson, Flávio, Isaias, Marcelo Dário, Davi Ribeiro, Valdir, Edvalter, Alex, Franciane, Elaine, Rafael Diógenes, Luciano Mari.

Na ausência da família é imprescindível termos pessoas com quem podemos confiar e viver essa caminhada no dia dia, felizmente durante minha estada em Fortaleza ganhei grandes amigos que levarei por toda vida. Meus sinceros agradecimentos a Damião Junio, Ernani Júnior, Antonio Wilson, Cícero Tiarlos, Daniel Silva, Kelton Silva, Disson Soares, José Nazareno, Raimundo, Tiago Veras, Antonio Kelson, Eraldo Lima, Adriano Medeiros, Halyson Irene e Manoel Vieira.

Gostaria de agradecer aos professores(as) da Pós-Graduação em matemática da UFC, Aldir Chaves Brasil Júnior, Antonio Caminha Muniz Neto, Diego Ribeiro Moreira, Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira, Fernanda Ester Camillo Camargo, João Lucas Marques Barbosa, Jorge Herbert Soares de Lira, José Robério Rogério, Luquésio Petrola de Melo Jorge, Marcos Ferreira de Melo, Silvano Dias Bezerra de Menezes que contribuiram diretamente na minha formação acadêmica.

Agradecer ainda aos professores Charles Escorcio, Ezequias Matos Esteves pelo apoio e amizade durante essa jornada.

Finalmente, agradecer aos professores do Departamento de Matemática da UFPI, em especial o professor Paulo Alexandre Araújo Sousa pelo incentivo desde antes do mestrado, mas sobretudo pela amizade.

A CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nosso objetivo nesta tese é abordar uma classe de métricas tipo Einstein, a saber sólitons de Ricci, quase sólitons de Ricci e métricas quasi-Einstein. Primeiramente obteremos dois resultados sobre compacidade de sólitons de Ricci gradiente, supondo que o quadrado da norma do campo que define tal sóliton é integrável e a derivada da função curvatura escalar na direção do gradiente da função potencial é não negativa, ou uma certa limitação inferior da função potencial. Em seguida, provaremos algumas fórmulas integrais para quase sóliton de Ricci compacto, que nos permite provar que todo quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é gradiente. Além disso, mostraremos que todo quase sóliton de Ricci gradiente localmente conformemente plano é isométrico à esfera euclidiana, desde que satisfaça uma certa condição integral. Prosseguindo, mostraremos que as bolas geodésicas de métricas quasi-Einstein estáveis não compactas tem crescimento no mínimo linear. Finalmente, usaremos métrica quasi-Einstein, para provarmos um teorema de trivialidade para uma certa classe de produto warped Einstein, sob uma hipótese que envolve a função warped e as constantes de Einstein do produto warped e da fibra.

Palavras-chave: Sólitons de Ricci. quase sólitons de Ricci. métricas quasi-Einstein. variedades de Einstein.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study like-Einstein metrics, namely, Ricci solitons, almost Ricci solitons and quasi-Einstein metrics. First, we deduce two compactness theorem for gradient Ricci solitons satisfying certain special conditions. In the sequel we prove some integral formulae which allow us to prove that every compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature must be gradient type. Moreover, we prove that every compact locally conformally flat gradient Ricci soliton must be isometric to standard sphere under an integral condition. Finally, we study the growth of the geodesic balls of steady quasi-Einstein metrics. Moreover, we use Einstein quasi-metric theory to prove a triviality theorem and then to produce a certain class of Einstein warped products under a suitable hypothesis in the fiber.

Keywords: Ricci solitons. Almost Ricci solitons. quasi-Einstein metrics. Einstein manifold.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da geometria das variedades Riemannianas de Einstein remonta desde o século XIX, para mais detalhes veja A. Besse (BESSE, 2008). Neste trabalho, iremos abordar algumas extensões naturais das métricas de Einstein, ou seja, trabalharemos com as métricas denotadas tipo Einstein.

Esta tese está dividida em quatro capítulos, sendo que no primeiro capítulo exibiremos, de forma sucinta, alguns resultados que serão utilizados nos demais capítulos.

No segundo capítulo, trataremos da métrica tipo Einstein mais importante dentre todas abordadas neste trabalho, a saber, os sólitons de Ricci, ou seja, uma variedade Riemanniana satisfazendo

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{1}$$

para algum campo vetorial X e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{L}_X$ denota a derivada de Lie na direção do campo X, Ric denota a curvatura de Ricci e g uma métrica Riemanniana. Além disso, se $X = \nabla f$ para alguma função diferenciável f, obtemos os sólitons de Ricci gradiente

$$Ric + Hessf = \lambda g.$$

Em meados dos anos 80, R. Hamilton(HAMILTON, 1982), introduziu a teoria do fluxo de Ricci sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g). Essencialmente, R. Hamilton considerou o seguinte fluxo geométrico

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)),$$

onde $g(t)$ é uma família de métricas em M^n. Tal fluxo tornou-se extremamente eficaz na resolução de problemas importantes em Topologia e Geometria Diferencial, como, por exemplo, a famosa Conjectura de Poincaré, provada por G. Perelman (veja (PERELMAN, 2002) e (PERELMAN, 2003)) e o Teorema da Esfera Diferenciável provado por S. Brendle e R. Schoen em (veja (BRENDLE, 2010)). Os sólitons de Ricci representam as soluções estacionárias do fluxo de Ricci, ou seja, quaisquer dois instantes desta solução diferem somente por um difeomorfismo e escalonamento. Além disso, sólitons de Ricci surgem frequentemente como limites de singularidades no fluxo de Ricci. Desta forma, é de extrema importância entendermos a geometria dos sólitons de Ricci. Neste sentido, nas últimas décadas muitos matemáticos têm trabalhado nesse tema. (para mais detalhes sobre a teoria de sólitons de Ricci, sugerimos o trabalho de H.-D. Cao em (CAO, 2010b).)

Por outro lado, O. Bonnet, em (BONNET, 1855), e S. Myers, em (MYERS, 1941), provaram, de forma independente, um dos resultados clássicos em geometria diferencial: toda variedade Riemanniana completa satisfazendo $Ric \geq k > 0$ é compacta, onde k é uma constante. É natural, portanto, indagarmos se podemos provar um resultado análogo para sólitons de Ricci. De fato, G. Perelman (PERELMAN, 2002) provou que um sóliton de Ricci gradiente contrátil ($\lambda > 0$) com dimensão 3 e curvatura seccional positiva limitada é compacto. Além disso, M.-F. López e E. García, em (LÓPES, 2008), provaram que um sóliton de Ricci contrátil é compacto se, e somente se, o campo vetorial X que define a estrutura de sóliton de Ricci tem norma limitada.

Neste contexto, apresentamos dois novos critérios de compacidade para sólitons de Ricci gradiente, o primeiro deles é o seguinte.

Teorema 1.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente contrátil. Supondo que $\int_M |\nabla f|^2 dM < \infty$ e $g(\nabla R, \nabla f) \leq 0$, então (M^n, g) é compacto e trivial.*

Convém observar que a hipótese de integrabilidade sobre o campo gradiente é fundamental pois, como veremos adiante (Observação 3.1), o espaço Euclidiano admite uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente, sua curvatura escalar é nula, mas o campo gradiente que o define não é quadrado integrável.

Em seguida, usaremos a f-parabolicidade do sóliton de Ricci gradiente contrátil para provarmos o seguinte critério de compacidade.

Teorema 1.2 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente contrátil. Se $f \geq \frac{n}{2}$, então (M^n, g) é compacta e trivial.*

No segundo capítulo deste trabalho, abordaremos uma extensão natural dos sólitons de Ricci: os quase sólitons de Ricci, que foram introduzidos por M. Rigoli, S. Pigola, M. Rimoldi e A. Setti, em (RIGOLI, 2011). Essencialmente, os autores consideraram λ na equação fundamental dos sólitons de Ricci (1) como uma função diferenciável. Em (BARROS, 2013b), A. Barros, J. Gomes e E. Ribeiro provaram que todo quase sóliton de Ricci gradiente não trivial com tensor de Ricci de Codazzi tem curvatura seccional constante. Em particular, no caso compacto, a menos de um escalonamento, este é isométrico à esfera Euclidiana. Recentemente, A. Ghosh, em (GHOSH, 2014), provou que uma métrica K-contato (em particular Sasakiana) que admite uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente tem curvatura escalar constante. Em particular, no caso compacto tal variedade é isométrica à esfera Euclidiana unitária $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Posteriormente, veremos que, assim como os sólitons de Ricci, quase sólitons de Ricci podem ser vinculados à teoria do fluxo de Ricci. Desta forma, é plausível questionarmos quais resultados da teoria de sólitons de Ricci, continuam válidos para um quase sóliton de Ricci. Por exemplo, G. Perelman provou que todo sóliton de Ricci compacto é do tipo gradiente. Baseado neste resultado, em (RIGOLI, 2011), os autores escreveram:

> *" For instance, it is an interesting problem to find under which conditions an almost Ricci soliton is necessarily gradient."*

A fim de responder este problema, generalizamos alguns resultados obtidos por A. Barros e E. Ribeiro em (BARROS, 2012b) para um quase sóliton de Ricci gradiente, para o caso em que o campo que define a estrutura de quase sóliton não é necessariamente gradiente.(veja (BARROS, 2013a).).

Teorema 1.3 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci compacto. Então, vale a* *seguinte fórmula integral:*

$$\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla R, X)dM = -\frac{n-2}{2n}\int_M R div X dM, \qquad (2)$$

onde R denota a curvatura escalar de (M^n, g).

Aplicando o Teorema 1.3, obtemos o seguinte

Corolário 1.1 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci compacto não trivial, com $n \geq 3$. Então (M^n, g) é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$ se uma das condições abaixo é satisfeita:*

1. $\int_M g(\nabla R, X)dM \leq 0$.
2. $\mathcal{L}_X R \leq 0$, *onde $\mathcal{L}$ denota derivada de Lie.*
3. *R é constante.*
4. *M^n é uma variedade homogênea.*

Uma vez que, em (BARROS, 2012b), os autores exibem uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente não trivial na esfera Euclidiana, então temos a seguinte solução parcial do problema proposto por M. Rigoli, S. Pigola, M. Rimoldi e A. Setti, em (RIGOLI, 2011).

Teorema 1.4 *Todo quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é gradiente.*

Recordemos agora, que da decomposição de Hodge-de Rham, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ sobre uma variedade Riemanniana compacta, existem $h \in C^\infty(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ de divergência nula, tais que

$$X = \nabla h + Y. \qquad (3)$$

De modo que, se X, em (3), é um campo que define uma estrutura de quase sóliton de Ricci, uma vez provado que Y é um campo de Killing, estaremos respondendo de forma alternativa quando um quase sóliton de Ricci compacto é do tipo gradiente, conforme o corolário a seguir.

Corolário 1.2 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci compacto não trivial, com $n \geq 3$. Então o campo vetorial Y dado pela decomposição de Hodge-de Rham é um campo de Killing sobre (M^n, g), desde que:*

1. *X é um campo conforme, ou*
2. *(M^n, g) possui curvatura escalar constante.*

Ressaltamos, ainda, que, no século passado, vários matemáticos tentaram provar que uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) com curvatura escalar constante, admitindo um campo vetorial conforme não trivial, é isométrica a uma esfera Euclidiana. Por exemplo, em (NAGANO, 1959), T. Nagano e K. Yano mostraram que, se (M^n, g) é uma variedade de Einstein compacta, tal resultado é verdadeiro. Em (OBATA, 1970), M. Obata e K. Yano provaram que, se $\mathcal{L}_X Ric = \beta g$, onde X é um campo vetorial conforme não trivial sobre M e β é uma função diferenciável em M, então o resultado também é verdadeiro. Em (EJIRI, 1981), N. Ejiri obteve um contra-exemplo sobre $\mathbb{S}^1 \times_\varphi N^{n-1}$, onde N^{n-1} tem curvatura escalar constante e $\mathbb{S}^1$ representa o círculo padrão. Para mais detalhes, veja (YANO, 1970). Portanto, é interessante investigarmos sob que condições uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante munida de um campo vetorial conforme não trivial é isométrico à esfera Euclidiana. Pelo Teorema 1.3, todo quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é de Einstein. Por outro lado, todo quase sóliton de Ricci satisfaz

$$Ric - \frac{R}{n}g = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g + (\lambda - \frac{R}{n})g,$$

donde X define um campo conforme não trivial sobre M, implicando, assim, que (M^n, g) é isométrico à esfera Euclidiana.

Finalmente, desde que M.-F. Lopez, E. García em (GARCIA, 2011) mostraram que um sóliton de Ricci gradiente compacto localmente conformemente plano é isométrico à esfera Euclidiana, surge naturalmente o questionamento se o mesmo é válido para um quase sóliton de Ricci gradiente. Em (CATINO, 2011), G. Catino provou que em torno dos pontos regulares da função potencial, um quase sóliton de Ricci gradiente localmente conformemente plano é localmente um produto warped com fibra de dimensão $n-1$ e curvatura seccional constante.

Neste sentido, provaremos um resultado análogo para quase sólitons de Ricci gradiente compactos satisfazendo uma certa condição integral(veja (BARROS, 2012a).).

Teorema 1.5 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente compacto localmente conformemente plano. Se*

$$-\int_M R\Delta\lambda e^{-f} dM \geq n(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f} dM, \tag{4}$$

então (M^n, g) é isométrico à Esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Em (PETERSEN, 2009b) P. Petersen e W. Wylie provaram que, se X é um campo de Killing sobre um sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, então ou Xf é constante, ou $M = N \times \mathbb{R}$. Nesta direção, para um quase sóliton de Ricci gradiente, obtemos o seguinte

Corolário 1.3 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então ou Xf é constante ou, (M^n, g) é conformemente equivalente à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Aplicando o Teorema 1.5 e o Corolário 1.3, obtemos o seguinte corolário para um quase sóliton de Ricci gradiente compacto.

Corolário 1.4 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente compacto satisfazendo (4). Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então, ou Xf é constante, ou (M^n, g)*

é isométrico à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$*.*

Continuando nosso estudo sobre métricas tipo Einstein, no último capítulo, vamos abordar as métricas quasi-Einstein, ou seja, variedades Riemannianas satisfazendo

$$Ric + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g, \tag{5}$$

para alguma função diferenciável f, uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ e $m \in (0, \infty]$. O estudo das métricas quasi-Einstein foi iniciado por Case, Shu e Wei, em (CASE, 2011). Naturalmente, métricas quasi-Einstein representam uma extensão das métricas de Einstein e dos sólitons de Ricci gradiente, isto é, quando f é constante em (5), obtemos as métricas de Einstein, por outro lado, se $m = \infty$, teremos os sólitons de Ricci gradiente.

Além disso, métricas quasi-Einstein com $m = 1$, satisfazendo $\Delta e^{-f} + \lambda e^{-f} = 0$ definem métricas estáticas com constante cosmológica λ. A teoria das métricas estáticas está intimamente ligada com o teorema da massa positiva e a relatividade geral. Para maiores detalhes veja, por exemplo, (ANDERSON, 1999), (ANDERSON, 2009) e (CORVINO, 2000).

Por outro lado, em (KIM, 2003) e (CASE, 2011), os autores notaram que, para $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, estudar métricas quasi-Einstein é equivalente a estudar a base de um produto warped Einstein, de maneira que todos os resultados de métricas quasi-Einstein refletem um resultado sobre produto warped Einstein. Além disso, tais métricas representam uma nova e elegante maneira de obtermos novos exemplos de métricas de Einstein.

Dada a importância das estimativas de volume para o entendimento da geometria e topologia das variedades Riemannianas, nosso próximo resultado estende para uma métrica quasi-Einstein estacionária ($\lambda = 0$), uma estimativa para o volume das bolas geodésicas, obtida de maneira independente por S. Yau, em (YAU, 1976), e E. Calabi, em (CALABI, 1975), para métricas satisfazendo $Ric \geq 0$ (em particular $Ric = 0$), e por O. Munteanu e N. Sesum para um sóliton de Ricci gradiente estacionário, ou seja, métricas satisfazendo $Ric + Hessf = 0$(veja (MUNTEANU, 2013).).

Teorema 1.6 *Se* $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ *é uma métrica quasi-Einstein estacionária não compacta com* $m \in (1, \infty]$*, então existem constantes uniformes* c *e* $r_0 > 0$ *tais que, para qualquer* $r > r_0$*,*

$$cr \leq Vol(B_p(r)).$$

Como veremos no capítulo 6, dada uma métrica quasi-Einstein, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\Delta f - |\nabla f|^2 = \lambda m - \mu m e^{2f/m}.$$

Assim, nosso próximo resultado fornece uma estimativa para o volume ponderado (f-volume) das bolas geodésicas de uma certa classe de métricas quasi-Einstein expansivas($\lambda < 0$).

Teorema 1.7 *Se* $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ *é uma métrica quasi-Einstein expansiva com* $\mu = 0$ *e* $m \in [1, \infty)$*, então existe uma constante uniforme* $c > 0$ *tal que, para todo* $r \geq 1$*,*

$$ce^{\sqrt{-\lambda m}r} \leq Vol_f(B_p(r)).$$

Finalmente, sabendo que uma métrica quasi-Einstein satisfaz o princípio do máximo fraco no infinito para o f-Laplaciano, usaremos a estreita relação entre métricas quasi-Einstein e produto warped Einstein, para provarmos o seguinte resultado de trivialidade.

Teorema 1.8 *Seja* $N = M^n \times_u F^m$ *um produto warped Einstein com constante de Einstein* $\lambda < 0$ *e fibra de Einstein* F^m *com constante de Einstein* $\mu < 0$*. Se a função warped* u *satisfaz*

$$u \leq \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}},$$

então N *é um produto Riemanniano.*

2 PRELIMINARES

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar, de forma sucinta, alguns resultados que utilizaremos no decorrer do nosso trabalho. Para maiores detalhes sobre os pontos abordados, recomendamos as referências (CAMINHA, 2013), (CHOW, 2010).

2.1 Um teorema tipo L^1 Liouville

Estudar sob que condições uma variedade Riemanniana satisfaz a propriedade L^1 Liouville representa um tema de atividade científica bastante ativo em geometria diferencial. Dizemos que uma variedade Riemanniana satisfaz a propriedade L^1 Liouville, se toda $f : M \to \mathbb{R}$ função não-negativa, integrável, satisfazendo $\Delta f \geq 0$ é constante. Em (SCHOEN, 1976), R. Schoen e S.-T. Yau provaram um teorema tipo L^1 Liouville, a saber: toda função não-negativa e integrável definida numa variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa satisfazendo

$$2f\Delta f \geq |\nabla f|^2$$

é identicamente nula.

Modificando a prova dada por R Schoen e S. Yau, obtemos um resultado mais geral do qual, exibiremos a prova. Nossa demonstração é inspirada na prova do Teorema do Schoen e Yau, dada no livro (CAMINHA, 2013) de A. Caminha.

Teorema 2.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientada e com volume infinito. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, não-negativa e integrável, tal que*

$$2f\Delta f \geq |\nabla f|^2 \tag{6}$$

sobre M, então f é identicamente nula.

Demonstração. Afirmamos inicialmente que f é subharmônica. De fato, se $p \in M$ é tal que $f(p) > 0$, então (6) garante que $(\Delta f)(p) \geqslant 0$. Seja $A = \{p \in M; f(p) = 0\}$. Se $p \in \mathrm{Int}(A)$, então $(\Delta f)(p) = 0$. Por outro lado, se $p \in \partial A$, existe uma sequência $(p_k)_{k\geqslant 1}$ de pontos $p_k \notin A$ tais que $p_k \to p$. Mas, como $f(p_k) > 0$, segue novamente de (6) que $(\Delta f)(p_k) \geqslant 0$. Fazendo $k \to \infty$, concluímos, então, que $(\Delta f)(p) \geqslant 0$.

Fixado $\epsilon > 0$, temos $f + \epsilon > 0$. Por outro lado, se $h = \sqrt{f+\epsilon}$, um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned} 2\Delta h &= -\frac{1}{2}(f+\epsilon)^{-\frac{3}{2}}|\nabla f|^2 + (f+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\Delta f \\ &\geq -(f+\epsilon)^{-\frac{3}{2}} f\Delta f + (f+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\Delta f \\ &= (f+\epsilon)^{-\frac{3}{2}}\Delta f(-f + f + \epsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Mas, se $\eta \in C_c^\infty(M)$, segue da primeira identidade de Green que

$$\int_M (\eta^2 \Delta(h^2) + \langle \nabla(\eta^2), \nabla(h^2) \rangle) dM = \int_M \mathrm{div}(\eta^2 \nabla(h^2)) dM = 0, \tag{7}$$

e do fato de h ser subharmônica

$$-\int_M \eta^2 |\nabla h|^2 - 2\int_M \langle \eta \nabla \eta, h \nabla h \rangle dM = \int_M \eta^2 h \Delta h dM \geq 0. \tag{8}$$

Fixe agora $p \in M$. Para cada $R > 1$, tome $\eta \in C_c^\infty(M)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em $B_R = B(p; R)$, $\eta = 0$ em $B_{2R}^C = B(p, 2R)^C$ e $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$, com C independente do $R > 1$ escolhido.

Com η escolhida como acima, segue de (8) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_{B_{2R}} \eta^2 |\nabla h|^2 dM - 2\int_{B_{2R} \setminus B_R} \langle h \nabla \eta, \eta \nabla h \rangle dM \\ &\leq -\int_{B_{2R} \setminus B_R} \eta^2 |\nabla h|^2 dM - \int_{B_R} |\nabla h|^2 dM \\ &\quad + 2\Big(\int_{B_{2R} \setminus B_R} \eta^2 |\nabla h|^2 dM \Big)^{1/2} \Big(\int_{B_{2R} \setminus B_R} h^2 |\nabla \eta|^2 dM \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\Gamma = \Big(\int_{B_{2R} \setminus B_R} \eta^2 |\nabla h|^2 dM \Big)^{1/2},$$

segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla h|^2 dM &\leq -\Gamma^2 + 2\Gamma \Big(\int_{B_{2R}} h^2 |\nabla \eta|^2 dM \Big)^{1/2} \\ &\leq \int_{B_{2R}} h^2 |\nabla \eta|^2 dM \\ &\leq \frac{C^2}{R^2} \int_{B_{2R}} h^2 dM. \end{aligned}$$

Pondo $B_R' = B_R \setminus f^{-1}(0)$ e substituindo $h = \sqrt{f + \epsilon}$, a estimativa *tipo-gradiente* acima fica reduzida a

$$\int_{B_R'} \frac{|\nabla f|^2}{4(f + \epsilon)} dM \leq \frac{C^2}{R^2} \int_{B_{2R}} (f + \epsilon) dM;$$

fazendo agora $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_{B_R'} \frac{|\nabla f|^2}{4f} dM \leq \frac{C^2}{R^2} \int_{B_{2R}} f dM. \tag{9}$$

Por fim, fazendo $R \to +\infty$, segue da integrabilidade de f que

$$\int_{M \setminus f^{-1}(0)} \frac{|\nabla f|^2}{4f} dM \leq 0,$$

daí f é constante em cada componente conexa de $M' := M \setminus f^{-1}(0)$. Há, então, duas possibilidades:
(i) Uma das componentes, digamos $\mathcal{C}$, tem bordo vazio em M': então M' é componente conexa de M, e a conexidade de M garante que $M' = M$ e $f^{-1}(0) = \emptyset$. Mas, daí f é constante e não nula em M, digamos $f = c$, donde

$$cVol(M) = \int_M f dM < +\infty,$$

uma contradição, pois, por hipótese, $Vol(M) = \infty$.
(ii) Toda componente conexa $\mathcal{C}$ de M' tem bordo não-vazio em M: então, uma vez que f é constante em $\mathcal{C}$ e nula em $\partial\mathcal{C}$, temos $f = 0$ em $\mathcal{C}$. Logo $f = 0$ em M.

2.2 Variedade Riemanniana ponderada

Nesta seção, apresentaremos uma pequena introdução sobre variedades Riemannianas ponderadas. Qualquer função positiva diferenciável f definida em uma variedade Riemanniana (M^n, g) define uma medida (forma volume) ponderada $d\nu$ sobre M, pondo $d\nu = f dM$. A função f é chamada fator de ponderação da medida ponderada $d\nu$. Em particular, o fator de ponderação da medida (forma volume) Riemanniana dM é $f \equiv 1$. De forma que temos a seguinte.

Definição 2.1 *Uma variedade Riemanniana ponderada $(M^n, g, e^{-f}dM)$ é uma variedade Riemanniana (M^n, g) munida com a forma volume ponderada $e^{-f}dM$, onde dM é a forma volume associada à métrica g e f é uma função diferenciável definida em M.*

É importante salientarmos que a definição de gradiente de uma função definida em $(M^n, g, e^{-f}dM)$ é idêntica a definição no caso clássico (M^n, g), entretanto a definição de divergência de um campo vetorial é modificada. Para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, o operador divergente ponderado $div_{e^{-f}}$ é dado por

$$div_{e^{-f}} X = e^f div(e^{-f} X), \tag{10}$$

onde div denota o operador divergente em (M^n, g). Assim, para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $u \in C^\infty(M)$, temos

$$\int_M div_{e^{-f}}(uX)e^{-f}dM = \int_M g(\nabla u, X)e^{-f}dM,$$

desde que, X ou u tenham suporte compacto.

O operador Laplaciano ponderado (f-Laplaciano) Δ_f associado à forma volume ponderada $e^{-f}dM$ é dado por

$$\Delta_f = div_{e^{-f}} \circ \nabla,$$

ou seja, dado $u \in C^\infty(M)$, temos

$$\Delta_f u = \Delta u - g(\nabla f, \nabla u). \tag{11}$$

É natural pensarmos que todos os resultados válidos para o caso Riemanniano continuam válidos para o caso ponderado, contudo existe uma quantidade considerável de resultados que não se estende de maneira natural para o caso ponderado. Desde que as fórmulas de Green continuam válidas para o caso ponderado, isto é, se u e v são funções definidas sobre M, e pelo menos uma destas, tem suporte compacto, vale

$$\int_M u\Delta_f v e^{-f}dM = -\int_M g(\nabla u, \nabla v)e^{-f}dM = \int_M v\Delta_f u. \tag{12}$$

Analogamente ao caso Riemanniano, dizemos que uma variedade Riemanniana ponderada $(M^n, g, e^{-f}dM)$ possui volume ponderado (f-volume) infinito, se $\int_M e^{-f}dM = \infty$. Uma vez que temos a versão ponderada das fórmulas de Green, similarmente à prova do Teorema 2.1, substituindo o volume infinito pelo volume ponderado infinito é possível mostrar o seguinte teorema tipo L^1 Liouville para variedades Riemannianas ponderadas.

Teorema 2.2 *Seja $(M^n, g, e^{-f}dM)$ uma variedade Riemanniana ponderada, com volume ponderado(f-volume) infinito. Se $u : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa satisfazendo $\int_M ue^{-f}dM < \infty$ e*

$$su\Delta_f u \geq |\nabla u|^2, \tag{13}$$

onde $0 < s \leq 2$, então u é identicamente nula.

Para maiores detalhes sobre a teoria das variedades Riemannianas ponderadas, veja (GRIGOR'YAN, 2009).

2.3 Variedades localmente conformemente plana

Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g), com $n \geq 3$, existe uma decomposição clássica do tensor de curvatura de Riemann. Mais precisamente, denotando por Rm, Ric, W e R o tensor curvatura de Riemann, o tensor de Ricci, o tensor de Weyl e sua curvatura escalar, respectivamente, temos a seguinte decomposição ortogonal em relação ao produto interno de Hilbert Schmidt

$$Rm = \frac{R}{2n(n-1)} g \odot g + \frac{1}{n-2}\Big(Ric - \frac{R}{n} g\Big) \odot g + W, \tag{14}$$

onde $\odot$ representa o produto Kulkarni-Nomizu, ou seja,

$$(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ik},$$

para quaisquer tensores simétricos α e β do tipo $(0, 2)$. A expressão em coordenadas locais da decomposição (14) é dada por

$$\begin{aligned} R_{ijkl} =& -\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \\ &+ \frac{1}{2}(R_{il}g_{jk} + g_{il}R_{jk} - R_{ik}g_{jl} - g_{ik}R_{jl}) + W_{ijkl}. \end{aligned} \tag{15}$$

É fácil ver que o tensor de Weyl satisfaz às mesmas simetrias algébricas do tensor curvatura de Riemann, além disso, o tensor de Weyl é totalmente de traço nulo, ou seja, o traço sobre quaisquer duas entradas do tensor W_{ijkl} é zero. Também, o tensor de Weyl é invariante por métricas conformes, isto é, para qualquer $\varphi \in C^\infty(M)$

$$W(e^{2\varphi} g) = W(g). \tag{16}$$

Definição 2.2 *Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente plana se, para cada $p \in M$, existem um sistema de coordenadas locais $\{x^1, ..., x^n\}$ em uma vizinhança U de M e uma função positiva f sobre U tais que*

$$g_{ij} = f\delta_{ij},$$

onde δ_{ij} denota a métrica Euclidiana.

Pode-se provar usando a decomposição irredutível do tensor de Riemann (14) que vale a seguinte decomposição

$$Rm = \frac{1}{2} S \odot g + W,$$

onde $S = Ric - \frac{R}{2(n-1)}g$ é chamado o tensor de Weyl-Schouten. Denotamos por

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} \\ &= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \end{aligned} \tag{17}$$

o tensor de Cotton. É sabido que, para $n = 3$, $W_{ijkl} \equiv 0$ e (M^3, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, $C_{ijk} = 0$. Além disso, para $n \geq 4$, $W_{ijkl} = 0$ se, e somente se, (M^n, g) é localmente conformemente plana. Mais ainda, para $n \geq 4$, $W_{ijkl} = 0$ implica $C_{jkl} = 0$. Pode-se mostrar que a nulidade do tensor de Cotton é equivalente a harmonicidade do tensor de Weyl.

Para uma prova detalhada dos fatos acima listados, veja o capítulo 1 em (CHOW, 2010).

3 SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE

Neste capítulo, iniciaremos nossa abordagem sobre as métricas tipo Einstein estudando os sólitons de Ricci gradiente, ou seja, uma variedade Riemanniana (M^n, g) satisfazendo

$$Ric + Hessf = \lambda g,$$

para alguma função $f \in C^\infty(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que, quando f é constante, tal estrutura reduz-se a uma métrica de Einstein.

Um teorema clássico em Geometria Riemanniana devido a Bonnet (BONNET, 1855) e Myers (MYERS, 1941), afirma que uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci satisfazendo $Ric \geq k > 0$ é necessariamente compacta. Nesse sentido, G. Perelman em (PERELMAN, 2002) provou que, em dimensão 3, um sóliton de Ricci gradiente contrátil ($\lambda > 0$) com curvatura seccional positiva limitada é necessariamente compacto. Em (LÓPES, 2008), López e García provaram que uma condição necessária e suficiente para que um sóliton de Ricci contrátil seja compacto é a limitação da norma do campo que define sua estrutura de sóliton de Ricci.

Não obstante, na seção 2 deste capítulo, aplicaremos o Teorema 2.1 para obtermos um critério de compacidade para um sóliton de Ricci gradiente contrátil sob uma condição de integrabilidade na norma do gradiente da função que define a estrutura de sóliton de Ricci gradiente. Além disso, usando a f-parabolicidade dos sólitons de Ricci gradiente contráteis, obtemos mais um critério de compacidade, impondo uma limitação na função que define a estrutura de sóliton de Ricci.

3.1 Sólitóns de Ricci gradiente

Nesta seção, definiremos os sólitons de Ricci, além de exibirmos alguns exemplos. Os sólitons de Ricci desempenham um papel importante no estudo do fluxo de Ricci por aparecerem naturalmente nesta teoria como soluções auto-similares. Mais precisamente, eles representam os pontos estacionários do fluxo, ou seja, ao longo desta solução em quaisquer dois instantes as métricas diferem apenas por um difeomorfismo e escalonamento. Neste capítulo, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana orientável, com $n \geq 3$, e sem bordo no caso compacto.

Definição 3.1 *Uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) define um sóliton de Ricci, quando existem um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{18}$$

que denotaremos por (M^n, g, X, λ).

Dizemos que um sóliton de Ricci é *expansivo, estacionário ou contrátil*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Quando $X = \nabla f$ em (18) para alguma função $f \in C^\infty(M)$, então (18) tem a forma

$$Ric + Hessf = \lambda g, \tag{19}$$

e este será chamado sóliton de Ricci gradiente. A função f que define a estrutura de sóliton de Ricci gradiente é chamada função potencial.

Definição 3.2 *Dizemos que um sóliton de Ricci gradiente é trivial, quando a função potencial f em (19) é constante.*

Como dito na introdução desta seção, um sóliton de Ricci aperece de forma natural na teoria do fluxo de Ricci, como mostra o próximo teorema, veja (CHOW, 2010).

Teorema 3.1 *Seja $(M, g, \nabla f, -\lambda/2)$ um sóliton de Ricci gradiente com campo vetorial ∇f completo, então existem uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci, isto é,*

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)),$$

com $g(0) = g$, difeomorfismos $\phi(t)$ com $\phi(0) = Id_M$, funções $f(t)$ com $f(0) = f$ definidas para todo t, tal que $\tau(t) = \lambda t + 1 > 0$, satisfazendo:

1. *$\phi(t) : M \to M$ uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos gerados pelos campos $X(t) = \frac{1}{\tau(t)}\nabla f$, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t)(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\nabla f)(\phi(t)(x));$$

2. *$g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g$;*
3. *$f(t) = \phi(t)^* f$;*
4. *$Ric(g(t)) + Hessf(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)}g(t) = 0$,*
   onde $Hessf(t)$, é a Hessiana de $f(t)$ com respeito à métrica $g(t)$.

Demonstração. Defina $\tau(t) = \lambda t + 1$. Já que o campo ∇f é um campo vetorial completo, existe uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $\phi(t) : M \to M$ gerado pelo campo $\frac{1}{\tau(t)}\nabla f$, definido para todo $\tau(t) > 0$. Defina $f(t) = f \circ \phi(t)$ e $g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g$. Assim

$$\left.\frac{\partial g(t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \frac{\lambda}{\tau(t_0)}g(t_0) + \tau(t_0)\left.\frac{\partial(\phi(t)^* g)}{\partial t}\right|_{t=t_0}.$$

Denotando o gradiente da função $f(t_0)$ na métrica $g(t_0)$ por $\nabla^{t_0} f(t_0)$, temos que

$$\begin{aligned} \tau(t_0)\left.\frac{\partial(\phi(t)^* g)}{\partial t}\right|_{t=t_0} &= \tau(t_0)\mathcal{L}_{(\phi(t_0)^{-1})_*(\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}|_{t=t_0})}\phi(t_0)^* g_0 \\ &= \mathcal{L}_{\nabla^{t_0} f(t_0)}g(t_0), \end{aligned}$$

uma vez que

$$\left.\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{\tau(t_0)}\nabla f = \phi(t)_*(\nabla^{t_0} f(t_0)).$$

Consequentemente

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\nabla^t f(t)} g(t).$$

Como $g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g$, então

$$\begin{aligned} -2Ric(g(t)) &= \phi(t)^*(-2Ric(g)) \\ &= \phi(t)^*(\lambda g + \mathcal{L}_{\nabla f} g) \\ &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\nabla^t f(t)} g(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$Ric(g(t)) + Hessf(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\nabla^t f(t)} g(t) \\ &= -2Ric(g(t)). \end{aligned}$$

Por fim, exibiremos agora alguns exemplos clássicos de sólitons de Ricci gradiente.

Exemplo 3.1 (Sólitons de Einstein) *Se (M^n, g) é uma variedade de Einstein com constante de Einstein λ, tomando $f : M \to \mathbb{R}$ constante, temos que $Hessf = 0$, assim*

$$Ric + Hessf = \lambda g.$$

Portanto $(M, g, \nabla f, \lambda)$ define um sóliton de Ricci gradiente.

Exemplo 3.2 (Sóliton de Ricci Gaussiano) *Seja $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e g a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$. Assim, seu tensor curvatura é identicamente nulo, implicando que $Ric = 0$. Além disso, se $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, então*

$$Hessf\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Logo, $\mathrm{Hess}\, f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = 0$*, se $i \neq j$, e* $\mathrm{Hess}\, f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \lambda$*, donde*

$$Ric_{ij} + Hessf_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Portanto $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ define um sóliton de Ricci gradiente chamado sóliton de Ricci Gaussiano, que pode ser expansivo e contrátil.

Exemplo 3.3 (Sóliton de Ricci de Hamilton) *Seja $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ uma superfície Riemanniana, munida com a métrica*

$$g_\Sigma := \frac{1}{1 + x^2 + y^2} g,$$

onde g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^2$. Após um longo cálculo, mostra-se que o campo vetorial $X = -2\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\Big)$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$, satisfaz

$$Ric(g_\Sigma) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_\Sigma = 0,$$

ou seja, $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, X)$ define uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente estacionário. Note, ainda, que $X = \nabla f$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2)$. De fato, escrevendo

$$\nabla f = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y},$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{-2x}{1 + x^2 + y^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} = g_\Sigma(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x})\\ &= a_x u g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) + a_y u g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\\ &= a_x u,\end{aligned}$$

onde $u = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, assim $a_x = -2x$; analogamente obtemos $a_y = -2y$. Logo, na métrica g_Σ,

$$\nabla f = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, \nabla f)$ define uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente estacionário.

3.2 Compacidade de sólitons de Ricci gradiente

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 2.1 e a f-parabolicidade dos sólitons de Ricci gradiente contráteis, para mostrarmos dois critérios de compacidade para sólitons de Ricci gradiente. Na verdade, provaremos critérios de compacidade e trivialidade, ou seja, além da compacidade, a função f que define a estrutura de sóliton de Ricci é constante.

Primeiramente, lembremos as equações de estrutura dos sólitons de Ricci gradiente, o item 3 da proposição abaixo, que foi provada em (HAMILTON, 1993), é conhecida como *equação de Hamilton.*

Proposição 3.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente. Então as condições abaixo são satisfeitas:*

1. $R + \Delta f = n\lambda$.
2. $\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla_j f$.
3. $R + |\nabla f|^2 = 2\lambda f$*; quando* $\lambda = 0$ *vale* $R + |\nabla f|^2 = c$*, onde* c *é uma constante positiva.*
4. $\Delta_f R = \Delta R - g(\nabla f, \nabla R) = -2|Ric - \frac{R}{n}g|^2 + 2\frac{R}{n}\Delta f$.

Para uma prova, veja (BATISTA, 2013) ou (PETERSEN, 2009a). Com estes fatos, obtivemos seguinte

Teorema 3.2 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente contrátil. Suponha que*

$\int_M |\nabla f|^2 dM < \infty$ e $g(\nabla f, \nabla R) \leq 0$, onde R denota a curvatura escalar, então (M^n, g) é compacto e trivial.

Demonstração. Primeiramente, suponha por contradição que M^n não é compacta. Pelos itens 1 e 2 da Proposição 3.1 e pela fórmula de Bochner, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= |Hessf|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) - g(\nabla f, \nabla R) \\ &= |Hessf|^2 + \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla R) - g(\nabla f, \nabla R) \\ &= |Hessf|^2 - \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla R) \\ &\geq |\nabla|\nabla f||^2 - \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla R), \end{aligned} \tag{20}$$

onde utilizamos a desigualdade de Kato na última linha. Agora, multiplicando (20) por $4|\nabla f|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 2|\nabla f|^2\Delta|\nabla f|^2 &\geq 4|\nabla f|^2|\nabla|\nabla f||^2 - 2|\nabla f|^2 g(\nabla f, \nabla R) \\ &= |\nabla|\nabla f|^2|^2 - 2|\nabla f|^2 g(\nabla f, \nabla R) \\ &\geq |\nabla|\nabla f|^2|^2, \end{aligned}$$

já que $g(\nabla f, \nabla R) \leq 0$. Por outro lado, como o volume de um sóliton de Ricci gradiente contrátil é infinito, veja (CAO, 2010b), concluímos que a função $|\nabla f|^2$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.1 devido a R. Schoen e S.-T. Yau. Portanto $|\nabla f| = 0$, consequentemente f é constante, daí segue que $Ric = \lambda g$. Assim, usando o Teorema de Bonnet-Myers concluímos que M^n é compacta, contradizendo nossa hipótese.

Uma vez que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é uma variedade Riemanniana compacta, aplicando o Teorema de Stokes ao item 4 da Proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned} 2\int_M \left|Ric - \frac{R}{n}g\right|^2 dM &= -\int_M \Delta R dM + \int_M g(\nabla f, \nabla R)dM + 2\int_M \frac{R}{n}\Delta f dM \\ &= \int_M g(\nabla f, \nabla R)dM - \frac{2}{n}\int_M g(\nabla f, \nabla R)dM \\ &= \frac{n-2}{n}\int_M g(\nabla f, \nabla R)dM \leq 0, \end{aligned}$$

logo $Ric = \frac{R}{n}g$, como $n \geq 3$ pelo Lema de Schur R é constante, novamente pelo item 4 $\Delta f = 0$. Portanto, pelo Princípio do máximo de Hopf f é constante, ou seja, temos a trivialidade.

Observação 3.1 *Note que no Teorema 3.2, não podemos abrir mão da integrabilidade da função $|\nabla f|^2$, pois como vimos no Exemplo 3.1, o sóliton de Ricci Gaussiano é não-trivial, não-compacto e sua curvatura escalar é nula, ou seja, $g(\nabla R, \nabla f) = 0$.*

Em (PIGOLA, 2011), Pigola, Rimoldi e Setti mostram que a curvatura escalar de um sóliton de Ricci gradiente contrátil é não-negativa. Assim, segue do item 3 da Proposição 3.1 que a função que define a estrutura de sóliton de Ricci é não-negativa. Desta forma, obtemos um critério de compacidade para um sóliton de Ricci gradiente contrátil, impondo uma restrição na função potencial.

Teorema 3.3 *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente contrátil. Se* $f \geq \frac{n}{2}$, *então* (M^n, g) *é compacta e trivial.*

Demonstração. Primeiramente suponha por contradição que M^n é não compacta. Usando os itens 1 e 3 da Proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned}\Delta_f(-f) &= -\Delta f + g(\nabla f, \nabla f)\\ &= R - \lambda n + |\nabla f|^2\\ &= 2\lambda f - \lambda n.\end{aligned}$$

Assim, já que $f \geq \frac{n}{2}$, então

$$\Delta_f(-f) = 2\lambda(f - \frac{n}{2}) \geq 0. \tag{21}$$

Por outro lado, Pigola, Rimoldi e Setti, em (PIGOLA, 2011), provaram que todo sóliton de Ricci gradiente contrátil é f parabólico. Da definição de f-parabolicidade, segue que $-f$ é constante, donde $Ric = \lambda g$. Logo, pelo Teorema de Bonnet-Myers, M^n é compacta, contradizendo a hipótese. Portanto M é compacta. De (21), temos que $(\Delta_f f)e^{-f} \leq 0$; como

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta_f f)e^{-f} dM &= \int_M \Delta f e^{-f} dM - \int_M g(\nabla f, \nabla f)e^{-f} dM\\ &= \int_M g(\nabla f, \nabla f)e^{-f} dM - \int_M |\nabla f|^2 e^{-f} dM = 0,\end{aligned}$$

segue que $\Delta f = |\nabla f|^2$. Portanto, pelo Princípio do máximo de Hopf, f é constante, ou seja, temos a trivialidade.

4 QUASE SÓLITONS DE RICCI COMPACTOS

Em (RIGOLI, 2011), Rigoli, Pigola, Rimoldi e Setti, motivados pela noção de sóliton de Ricci, introduziram o estudo de quase sóliton de Ricci. Essencialmente, os autores modificaram a definição de sóliton de Ricci, considerando λ na equação fundamental dos sólitons de Ricci

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

uma função diferenciável sobre M. Uma vez que G. Perelman, em (PERELMAN, 2002), provou que todo sóliton de Ricci compacto é do tipo gradiente, em (RIGOLI, 2011), os autores escreveram:

> *" For instance, it is an interesting problem to find under which conditions an almost Ricci soliton is necessarily gradient."*

Na segunda seção deste capítulo, que corresponde ao artigo (BARROS, 2013a) realizado em colaboração com A. Barros e E. Ribeiro, provamos algumas condições que respondem afirmativamente o problema proposto anteriormente. Em particular, provamos que todo quase sóliton de Ricci compacto é gradiente, desde que sua curvatura escalar seja constante.

É sabido que todo sóliton de Ricci compacto localmente conformemente plano é isométrico à esfera euclidiana, veja (GARCIA, 2011). Novamente, motivados pelo estudo dos sólitons de Ricci, é natural questionarmos se o mesmo é válido para quase sólitons de Ricci compactos. Nesse sentido, na última seção deste capítulo, que corresponde a uma parte do artigo (BARROS, 2012a) feito em colaboração com A. Barros e E. Ribeiro, provamos que todo quase sóliton de Ricci compacto localmente conformemente plano é isométrico à esfera Euclidiana, desde que satisfaça uma certa condição integral.

4.1 Quase sólitons de Ricci

Nesta seção definiremos o principal objeto matemático deste capítulo, a saber: quase sólitons de Ricci. Além disso, exibiremos alguns exemplos. Vamos denotar por (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientável completa sem bordo. Em adição, somente na seção 4.2, denotaremos a curvatura escalar por S, para evitarmos possíveis ambiguidades de notação.

Definição 4.1 *Uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) define um quase sóliton de Ricci, quando existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\lambda \in C^\infty(M)$, satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{22}$$

que denotaremos por (M^n, g, X, λ).

Em alguns casos, é conveniente escrevermos (22) em coordenadas, ou seja, se x^i é um sistema de coordenadas locais, então

$$R_{ij} + \frac{1}{2}(X_{ij} + X_{ji}) = \lambda g_{ij}, \tag{23}$$

onde $R_{ij} = Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ e $X_{ij} = \nabla_i X_j = g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$.

Inspirado na nomenclatura da teoria dos sólitons de Ricci, dizemos que um quase sóliton de Ricci é *expansivo, estacionário ou contrátil*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Caso contrário, o quase sóliton de Ricci é dito *indefinido*. Quando $X = \nabla f$ em (22), para alguma função $f \in C^\infty(M)$, então (22) tem a forma

$$Ric + Hessf = \lambda g, \tag{24}$$

e este será chamado quase sóliton de Ricci gradiente. A função f é chamada função potencial da estrutura do quase sóliton de Ricci gradiente. Analogamente ao caso não gradiente, quando oportuno, usaremos (24) em coordenadas, isto é,

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \lambda g_{ij}, \tag{25}$$

onde $\nabla_i \nabla_j f = Hessf(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Definição 4.2 *Dizemos que um quase sóliton de Ricci é trivial quando X em (22) é um campo de Killing, ou f em (24) é uma função constante.*

É importante salientarmos que nas últimas décadas foram introduzidas várias generalizações do tensor de Ricci. Por exemplo, J. Case, Y.-J. Shu e G. Wei introduziram em (CASE, 2011) o conceito de métricas quasi-Einstein, que estudaremos no Capítulo 6. Outras generalizações têm sido consideradas nos últimos anos, por exemplo G. Maschler em (MASCHLER, 2008), substituiu a equação (24) pelo que ele chama de "equação Ricci-Hessiana", ou seja

$$Ric + \alpha Hessf = \lambda g,$$

onde $\alpha, \lambda \in C^\infty(M)$. Com as "equações Ricci-Hessiana", Maschler obtém novas métricas Kähler através de mudança conforme de sólitons de Ricci-Kähler.

Bem como os sólitons de Ricci, também podemos associar quase sóliton de Ricci ao fluxo de Ricci. Com efeito, sejam (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana completa e $g(t)$ uma solução do fluxo de Ricci, ou seja,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)),$$

definida no intervalo $[0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, tal que existe uma família a 1-paramêtro de difeomorfismo $\varphi_t : M^n \to M^n$, com $\varphi_0 = Id_M$ e $g(t)(x) = \tau(x,t)\varphi_t^* g_0$ para todo $x \in M$, onde τ

é uma função positiva e diferenciável definida em $M^n \times [0, \epsilon)$, satisfazendo $\tau(x, 0) = 1$. Então

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\tau(x,t)\varphi_t^* g(0) + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^* g(0).$$

Calculando em $t = 0$, temos que

$$-2Ric_{g_0} = -2\lambda(x) g_0 + \mathcal{L}_X g_0,$$

onde $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tau(x, 0)$ e $X = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, 0)$. Portanto (M^n, g_0, X, λ) é um quase sóliton de Ricci.

Um ponto extremamente importante na teoria de sólitons de Ricci, bem como na teoria de quase sólitons de Ricci, é a existência de exemplos não triviais destes tipos de estruturas. Uma vez que a lista de exemplos não-triviais de sólitons de Ricci compactos é pequena, exibiremos um exemplo de um quase sóliton de Ricci compacto não trivial devido a A. Barros e E. Ribeiro, que pode ser encontrado em (BARROS, 2012b).

Exemplo 4.1 *Considere a esfera Euclidiana* $(\mathbb{S}^n, g_0)$*, onde* g_0 *é sua métrica canônica,* X *um campo dado pela projeção de um campo unitário constante não-nulo* $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ *sobre* $T\mathbb{S}^n$ *e* $\lambda = \frac{1}{n}(divX + R)$*. Então* X *é um campo conforme sobre* $\mathbb{S}^n$*, onde seu subgrupo a 1-parâmetro são transformações conformes, mas não isometrias. Assim,* $(\mathbb{S}^n, g_0, X, \lambda)$ *é um quase sóliton de Ricci.*

É sabido que não existem sólitons de Ricci compactos não triviais de dimensão dois (HAMILTON, 1988) e dimensão três (IVEY, 1993). Contudo, como mostra o exemplo anterior, existe uma estrutura não trivial de quase sóliton de Ricci sobre $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 2$.

4.2 Quase sólitons de Ricci compactos com curvatura escalar constante

Em (BARROS, 2012b), A. Barros e E. Ribeiro obtiveram um teorema de rigidez para quase sóliton de Ricci gradiente compacto. Mais precisamente, os autores provaram que tal estrutura é isométrica à esfera Euclidiana, desde que sua curvatura escalar seja constante. A estratégia da prova reside na obtenção de uma fórmula integral para um quase sóliton de Ricci gradiente compacto, a saber

$$\int_M \left|Ric - \frac{S}{n}g\right|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla S, \nabla f) dM, \tag{26}$$

sendo f dada na equação fundamental (24). Tal fórmula integral segue por integração da expressão do f-Laplaciano da curvatura escalar, que é dado por

$$\frac{1}{2}\Delta_f S = \lambda S - |Ric|^2 + (n-1)\Delta\lambda. \tag{27}$$

Nosso propósito nesta seção é estender tais fórmulas para o caso em que o campo que define o quase sóliton de Ricci não seja necessariamente gradiente, para enfim obtermos o mesmo teorema de rigidez acima enunciado. E, então, aplicarmos tal rigidez para provarmos sob que condições quase sólitons de Ricci compactos são gradientes.

Primeiramente, recordemos que o tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana satisfaz às condições do lema a seguir.

Lema 4.1 *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana, então*

$$
\begin{aligned}
R_{ij,k} - R_{ik,j} &= -R_{tijk,t}; & (28)\\
R_{ij,kl} - R_{ij,lk} &= R_{tikl}R_{tj} + R_{tjkl}R_{it}; & (29)\\
S_k = 2R_{ki,i} &= 2R_{ik,i}; & (30)\\
R_{ij,k} &= R_{ji,k}. & (31)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, verifica-se o seguinte

Lema 4.2 *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$
\begin{aligned}
X_{ijk} - X_{ikj} &= X_t R_{tijk}; & (32)\\
X_{ijkl} - X_{ikjl} &= R_{tijk}X_{tl} + R_{tijk,l}X_t; & (33)\\
X_{ijkl} - X_{ijlk} &= R_{tikl}X_{tj} + R_{tjkl}X_{it}. & (34)
\end{aligned}
$$

Usando os Lemas 4.1 e 4.2, vamos provar o seguinte resultado.

Lema 4.3 *Se (M^n, g, X, λ) é um quase sóliton de Ricci, então as seguintes fórmulas são verdadeiras:*

$$S + X_{ii} = \lambda n \tag{35}$$

$$R_{lj}X_l = -X_{jii} - (n-2)\lambda_j \tag{36}$$

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = -\frac{1}{2}R_{lijk}X_l + \frac{1}{2}(X_{kij} - X_{jik}) + \lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik} \tag{37}$$

Demonstração. A primeira igualdade segue diretamente tomando o traço da equação fundamental (23). Tomando novamente o traço na equação (32) sobre os índices i e k, obtemos

$$X_{iji} - X_{iij} = R_{liji}X_l = R_{lj}X_l.$$

Em seguida, usando a igualdade acima e a derivada covariante da equação fundamental (23), juntamente com o fato que a derivada covariante do tensor métrico é nulo, teremos

$$
\begin{aligned}
R_{ij,i} &= -\frac{1}{2}(X_{iji} + X_{jii}) + \lambda_i g_{ij}\\
&= -\frac{1}{2}(X_{iji} - X_{iij} + X_{iij} + X_{jii}) + \lambda_i g_{ij}\\
&= -\frac{1}{2}R_{lj}X_l - \frac{1}{2}(X_{iij} + X_{jii}) + \lambda_i g_{ij}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, usando a segunda identidade de Bianchi contraída (30) e a derivada covariante da equação (35), segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_j &= -\frac{1}{2}R_{lj}X_l - \frac{1}{2}(X_{iij} + X_{jii}) + \lambda_i g_{ij}\\ &= -\frac{1}{2}R_{lj}X_l + \frac{1}{2}S_j - \frac{n}{2}\lambda_j - \frac{1}{2}X_{jii} + \lambda_j,\end{aligned}$$

isto é,

$$R_{lj}X_l = -X_{jii} - (n-2)\lambda_j,$$

provando, assim, (36). Tomando a derivada covariante da equação fundamental (23), temos que

$$R_{ij,k} + \frac{1}{2}(X_{ijk} + X_{jik}) = \lambda_k g_{ij}$$

e

$$R_{ik,j} + \frac{1}{2}(X_{ikj} + X_{kij}) = \lambda_j g_{ik}.$$

Agora subtraindo as equações acima e usando a equação (32), obtemos

$$\begin{aligned}R_{ij,k} - R_{ik,j} &= -\frac{1}{2}(X_{ijk} + X_{jik} - X_{ikj} - X_{kij}) + \lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}\\ &= -\frac{1}{2}R_{lijk}X_l + \frac{1}{2}(X_{kij} - X_{jik}) + \lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik},\end{aligned}$$

finalizando a prova do lema. Afim de obter a expressão do f-Laplaciano da curvatura escalar (27) de um quase sóliton de Ricci gradiente, E. Ribeiro em (RIBEIRO, 2011), obteve a fórmula do f-Laplaciano do tensor de Ricci de tal estrutura, a saber

$$\Delta_f R_{ik} = 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + (n-2)\nabla_i\nabla_k\lambda + \Delta\lambda g_{ij}. \tag{38}$$

Nesse sentido, obtemos uma fórmula análoga a do f-Laplaciano do tensor de Ricci, para o caso em que o campo que define a estrutura de um quase sóliton de Ricci não seja, necessariamente gradiente.

Proposição 4.1 *Se (M^n, g, X, λ) é um quase sóliton de Ricci, então*

$$\begin{aligned}\Delta_X R_{ik} = 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} + \frac{1}{2}R_{is}(X_{sk} - X_{ks}) + \frac{1}{2}R_{sk}(X_{si} - X_{is})\\ +(n-1)\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj},\end{aligned} \tag{39}$$

onde $\Delta_X R_{ik} = \Delta R_{ik} - g(\nabla R_{ik}, X)$, que chamaremos X-Laplaciano.

Demonstração. Usando a equação (37), temos que

$$R_{ki,j} - R_{kj,i} = \frac{1}{2}R_{lkji}X_l + \frac{1}{2}(X_{jki} - X_{ikj}) + \lambda_j g_{ki} - \lambda_i g_{kj}.$$

Levando em conta que o tensor métrico possui derivada covariante nula, a derivada covariante da igualdade acima implica que

$$R_{ki,jt} - R_{kj,it} = \frac{1}{2}(R_{ijkl,t}X_l + R_{ijkl}X_{lt}) + \frac{1}{2}(X_{jkit} - X_{ikjt}) + \lambda_{jt}g_{ki} - \lambda_{it}g_{kj}. \tag{40}$$

Por outro lado, segue de (29) e da simetria do tensor de Ricci, que

$$\begin{aligned} R_{jk,ij} &= R_{jk,ji} + R_{sjij}R_{sk} + R_{skij}R_{js} \\ &= R_{jk,ji} + R_{si}R_{sk} + R_{skij}R_{js}. \end{aligned} \tag{41}$$

Uma vez que $\Delta R_{ik} = R_{ik,jj}$, podemos reescrever (40) pondo

$$\Delta R_{ik} = R_{jk,ij} + \frac{1}{2}(R_{ijkl,j}X_l + R_{ijkl}X_{lj}) + \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj}. \tag{42}$$

Por outro lado, pela segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned} R_{ijkl,j}X_l &= -R_{ijlj,k}X_l - R_{ijjk,l}X_l \\ &= -R_{il,k}X_l + R_{ik,l}X_l. \end{aligned} \tag{43}$$

Substituindo (43) em (42) e usando a equação (41), temos que

$$\begin{aligned} \Delta R_{ik} &= R_{jk,ij} + \frac{1}{2}(R_{ik,l} - R_{il,k})X_l + \frac{1}{2}R_{ijkl}X_{lj} \\ &+ \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\ &= R_{jk,ji} + R_{si}R_{sk} + R_{skij}R_{js} + \frac{1}{2}(R_{ik,l} - R_{il,k})X_l \\ &+ \frac{1}{2}R_{ijkl}X_{lj} + \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj}. \end{aligned}$$

Assim, usando novamente a segunda identidade de Bianchi contraída (30) e a equação fundamental (23), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta R_{ik} &= \frac{1}{2}S_{ki} + R_{si}R_{sk} + R_{skij}R_{js} - \frac{1}{2}R_{skij}X_{sj} \\ &+ \frac{1}{2}(R_{ik,l} - R_{il,k})X_l + \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\ &= \frac{1}{2}S_{ki} + R_{si}R_{sk} + R_{skij}R_{js} - R_{skij}(-R_{sj} + \lambda g_{sj} - \frac{1}{2}X_{js}) \\ &+ \frac{1}{2}(R_{ik,l} - R_{il,k})X_l + \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\ &= \frac{1}{2}S_{ki} + R_{si}R_{sk} + 2R_{skij}R_{js} + \lambda R_{ik} + \frac{1}{2}R_{skij}X_{js} \\ &+ \frac{1}{2}(R_{ik,s} - R_{is,k})X_s + \frac{1}{2}(X_{jkij} - X_{ikjj}) + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj}. \end{aligned} \tag{44}$$

Agora, calculemos a seguinte soma

$$Y = \frac{1}{2}S_{ik} + R_{sk}R_{si} - \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{1}{2}X_{skis}. \tag{45}$$

Primeiramente, tomando a segunda derivada covariante em (35), obtemos

$$\frac{1}{2}S_{ik} = -\frac{1}{2}X_{ssik} + \frac{n}{2}\lambda_{ik}.$$

Substituindo esta equação em (45) e usando (33), (34) e (28), temos

$$\begin{aligned}
Y &= -\frac{1}{2}X_{ssik} + \frac{n}{2}\lambda_{ik} + R_{sk}R_{si} - \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{1}{2}X_{skis} \\
&= \frac{1}{2}(X_{skis} - X_{ssik}) + R_{sk}R_{si} - \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= \frac{1}{2}(X_{skis} - X_{sksi} + X_{sksi} - X_{ssik}) + R_{sk}R_{si} - \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= \frac{1}{2}(R_{tsis}X_{tk} + R_{tkis}X_{st} + R_{tsks}X_{ti} + R_{tsks,i}X_t) \\
&\quad + R_{sk}R_{si} - \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= \frac{1}{2}(R_{ti}X_{tk} + R_{tkis}X_{st} + R_{tk}X_{ti}) + \frac{1}{2}(R_{sk,i} - R_{si,k})X_s + R_{sk}R_{si} + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= \frac{1}{2}(R_{si}X_{sk} + R_{tkis}X_{st} + R_{sk}X_{si}) - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + R_{sk}R_{si} + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= R_{si}(R_{sk} + \frac{1}{2}X_{sk}) + \frac{1}{2}(R_{tkis}X_{st} + R_{sk}X_{si}) - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= R_{si}(-\frac{1}{2}X_{ks} + \lambda g_{sk}) + \frac{1}{2}(R_{tkis}X_{st} + R_{sk}X_{si}) - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= -\frac{1}{2}R_{si}X_{ks} + \lambda R_{ik} + \frac{1}{2}R_{tkis}X_{st} + \frac{1}{2}R_{sk}X_{si} - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + \frac{n}{2}\lambda_{ik}.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior na equação (44), temos

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= -\frac{1}{2}R_{si}X_{ks} + 2\lambda R_{ik} + \frac{1}{2}R_{tkis}X_{st} + \frac{1}{2}R_{sk}X_{si} \\
&\quad -\frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + 2R_{skij}R_{sj} + \frac{1}{2}R_{skij}X_{js} + \frac{1}{2}R_{ik,s}X_s \\
&\quad -\frac{1}{2}X_{ikss} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} + \frac{n}{2}\lambda_{ik}.
\end{aligned}$$

Agora, das equações (33) e (34), temos que

$$\begin{aligned}
X_{ikss} - X_{issk} &= X_{ikss} - X_{isks} + X_{isks} - X_{issk} \\
&= R_{tiks}X_{ts} + R_{tiks,s}X_t + R_{tiks}X_{ts} + R_{tsks}X_{it}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tomando a derivada covariante na equação (36), obtemos

$$X_{issk} = -R_{ti,k}X_t - R_{ti}X_{tk} - (n-2)\lambda_{ik}.$$

Assim,

$$X_{ikss} = -R_{ti,k}X_t - R_{ti}X_{tk} + R_{tiks}X_{ts} + R_{tiks,s}X_t + R_{tiks}X_{ts} + R_{tk}X_{it} - (n-2)\lambda_{ik}. \quad (46)$$

Finalmente, podemos usar a primeira identidade de Bianchi e as equações (46) e (28) para inferirmos

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} - \frac{1}{2}R_{si}X_{ks} + \frac{1}{2}R_{tkis}X_{st} \\
&+\frac{1}{2}R_{sk}X_{si} - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + \frac{1}{2}R_{skij}X_{js} + \frac{1}{2}R_{ik,s}X_s \\
&-\frac{1}{2}(-R_{it,k}X_t - R_{it}X_{tk} + R_{tiks}X_{ts} + R_{tiks,s}X_t + R_{tiks}X_{ts} + R_{tk}X_{it}) \\
&+\frac{(n-2)}{2}\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} + \frac{n}{2}\lambda_{ik} \\
&= 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} - \frac{1}{2}R_{si}X_{ks} + \frac{1}{2}R_{tkis}X_{st} + \frac{1}{2}R_{sk}X_{si} \\
&-\frac{1}{2}R_{tski,t}X_s + \frac{1}{2}R_{skij}X_{js} + \frac{1}{2}R_{ik,s}X_s + \frac{1}{2}R_{is,k}X_s + \frac{1}{2}R_{is}X_{sk} \\
&-\frac{1}{2}R_{tiks}X_{ts} - \frac{1}{2}R_{tiks,s}X_t - \frac{1}{2}R_{tiks}X_{ts} - \frac{1}{2}R_{sk}X_{is} \\
&+(n-1)\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\
&= 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} + \frac{1}{2}R_{is}(X_{sk} - X_{ks}) + \frac{1}{2}R_{sk}(X_{si} - X_{is}) \\
&+\frac{1}{2}R_{ik,s}X_s + \frac{1}{2}R_{ik,s}X_s - \frac{1}{2}R_{tisk,t}X_s - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s \\
&+R_{tkis}X_{st} - R_{tiks}X_{ts} - \frac{1}{2}R_{tiks,s}X_t + (n-1)\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\
&= 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} + R_{ik,s}X_s + \frac{1}{2}R_{is}(X_{sk} - X_{ks}) + \frac{1}{2}R_{sk}(X_{si} - X_{is}) \\
&+R_{skit}X_{ts} - R_{tiks}X_{ts} - \frac{1}{2}R_{tisk,t}X_s - \frac{1}{2}R_{tski,t}X_s \\
&-\frac{1}{2}R_{tkis,t}X_s + (n-1)\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj} \\
&= 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{js} + R_{ik,s}X_s + \frac{1}{2}R_{is}(X_{sk} - X_{ks}) + \frac{1}{2}R_{sk}(X_{si} - X_{is}) \\
&+(n-1)\lambda_{ik} + \lambda_{jj}g_{ki} - \lambda_{ij}g_{kj},
\end{aligned}$$

finalizando assim a prova da proposição.

Observação 4.1 *Observe que, quando $X = \nabla f$ na Proposição 4.1, a expressão do X-Laplaciano se reduz a expressão do f-Laplaciano (38), obtida por E. Ribeiro em (RIBEIRO, 2011).*

Usando a Proposição 4.1, obtemos a versão não-gradiente da fórmula integral

(26), obtida por A. Barros e E. Ribeiro em (BARROS, 2012b).

Teorema 4.1 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci compacto. Então vale a seguinte fórmula integral:*

$$\int_M |Ric - \frac{S}{n}g|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla S, X)dM = -\frac{n-2}{2n}\int_M S div X dM. \tag{47}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que tomando o traço na expressão do X-Laplaciano do tensor de Ricci (39), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta S - \frac{1}{2}g(\nabla S, X) = \lambda S - |Ric|^2 + (n-1)\Delta\lambda, \tag{48}$$

ou seja, a fórmula do X-Laplaciano da curvatura escalar de um quase sóliton de Ricci não necessariamente gradiente.

Note agora que $|Ric - \frac{S}{n}g|^2 = |Ric|^2 - \frac{S^2}{n}$, daí

$$\frac{1}{2}(\Delta S - g(\nabla S, X)) = -|Ric - \frac{S}{n}g|^2 + \frac{S}{n}(n\lambda - S) + (n-1)\Delta\lambda. \tag{49}$$

Integrando a identidade (49) e usando (35), temos que

$$\begin{aligned} \int_M \left|Ric - \frac{S}{n}g\right|^2 dM &= \frac{1}{2}\int_M g(\nabla S, X)dM + \frac{1}{n}\int_M S div X dM \\ &= -\frac{1}{2}\int_M S div(X) dM + \frac{1}{n}\int_M S div X dM, \\ &= -\frac{n-2}{2n}\int_M S div X dM \\ &= \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla S, X)dM, \end{aligned} \tag{50}$$

concluindo assim a prova do teorema.

Observação 4.2 *Observe que quando $X = \nabla f$ no Teorema 4.1, a fórmula integral (47) reduz-se a fórmula integral (26), obtida por A. Barros e E. Ribeiro em (BARROS, 2012b).*

Como consequência do Teorema 4.1, obtemos um resultado de rigidez para quase sólitons de Ricci compactos, onde o campo vetorial associado ao quase sóliton de Ricci não é necessariamente do tipo gradiente. Vale resaltar que A. Barros e E. Ribeiro em (BARROS, 2012b), obtiveram o mesmo corolário para o caso em que $X = \nabla f$.

Corolário 4.1 *Se (M^n, g, X, λ) é um quase sóliton de Ricci compacto não trivial, com $n \geq 3$. Então (M^n, g) é isométrica à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, se uma das condições abaixo é satisfeita:*

1. *$\int_M g(\nabla S, X)dM \leq 0$.*
2. *$\mathcal{L}_X S \leq 0$, onde $\mathcal{L}$ denota derivada de Lie.*
3. *S é constante.*

4. M^n é uma variedade homogênea.

Demonstração. De fato, qualquer uma das hipóteses do corolário aplicadas ao Teorema 4.1 implica diretamente que $Ric = \frac{S}{n}g$. Assim, da equação fundamental do quase sóliton de Ricci (22), segue que

$$Ric - \frac{S}{n}g = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g + (\lambda - \frac{S}{n})g, \tag{51}$$

donde concluímos que X é um campo vetorial conforme não trivial. Assim, podemos aplicar o Teorema 2 de (BARROS, 2012b) para concluir que (M^n, g) é isométrica à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, finalizando assim a prova do corolário.

Notando que todas as condições do corolário acima são equivalentes, podemos responder o problema proposto em (RIGOLI, 2011) por Rigoli, Pigola, Rimoldi e Setti, descrito no início deste capítulo.

Problema 5 *Sob que condições um quase sóliton de Ricci compacto é necessariamente gradiente?*

Usando o Corolário 4.1, obtemos o seguinte corolário que responde parcialmente o problema anterior para dimensão maior que dois.

Corolário 5.1 *Todo quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é gradiente.*

Demonstração. Primeiramente lembremos que, se X é um campo de vetores em uma variedade compacta M^n, o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham, veja (WARNER, 1983), nos ensina que é possível decompor o campo X como a soma de um campo de vetores Y de divergente nulo e o gradiente de uma função diferenciável $h : M \to \mathbb{R}$, ou seja

$$X = \nabla h + Y, \tag{52}$$

onde $divY = 0$ e $h \in C^\infty(M)$ é chamado potencial de Hodge-de Rham.

Com efeito, considerando a 1-forma $X^\flat$ e aplicando o Teorema de Hodge-de Rham, existe uma única decomposição da 1-forma $X^\flat$ da seguinte forma

$$X^\flat = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

onde γ é uma 1-forma harmônica. Agora basta considerarmos $Y = (\delta\beta + \gamma)^\sharp$ e $(d\alpha)^\sharp = \nabla h$ para obtermos o afirmado.

Segue de (52) que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = Hessh + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g. \tag{53}$$

Além disso, tomando o traço na igualdade (53), segue que

$$divX = \Delta h, \tag{54}$$

pois $divY = 0$.

Pelo Corolário 4.1, (M^n, g) é isométrica à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, donde (M^n, g) é Einstein e sua curvatura escalar S é igual a $n(n-1)$. Assim, substituindo (54) e o valor da curvatura escalar na igualdade (35), temos que

$$\Delta h = \lambda n - n(n-1). \tag{55}$$

Por outro lado, usando o fato que (M^n, g) é Einstein, (54), juntamente com o fato que $S = n(n-1)$ em (49), segue que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\Delta_X S &= -\left|Ric - \frac{S}{n}g\right|^2 + \frac{S}{n}(\lambda n - S) + (n-1)\Delta\lambda \\ &= \frac{n(n-1)}{n}\Delta h + (n-1)\Delta\lambda \\ &= (n-1)\Delta(h+\lambda). \end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Princípio do máximo de Hopf, temos que $h = -\lambda + c$, onde c é uma constante. Assim, de (55) concluímos que

$$\Delta h + nh = n(c - (n-1)). \tag{56}$$

Portanto, a menos de uma constante, h é a primeira autofunção do Laplaciano da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$. Consequentemente, ∇h é um campo vetorial conforme, isto é,

$$Hessh = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla h}g = \frac{\Delta h}{n} = (\lambda - (n-1))g.$$

Desde que (M^n, g) é Einstein, segue que X é um campo vetorial conforme, tal que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = (\lambda - \frac{S}{n})g = (\lambda - (n-1))g.$$

Por outro lado, segue da igualdade (53) que

$$(\lambda - (n-1))g = (\lambda - (n-1))g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g,$$

ou seja, Y é um campo vetorial de Killing, daí $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = Hessh$, donde

$$Ric + Hessh = \lambda g,$$

assim $(M^n, g, \nabla h, \lambda)$ define uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente.

Usando a decomposição dada em (52), podemos provar uma versão alternativa do Teorema 4.1 em termos do potencial de Hodge-de Rham, conforme o próximo teorema.

Teorema 5.1 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci compacto. Então vale a seguinte fórmula integral:*

$$\int_M |Ric - \frac{S}{n} g|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla S, \nabla h) dM, \tag{57}$$

onde h é o potencial de Hodge-de Rham, dado em (52).

Demonstração. Note que, usando (53) temos

$$\int_M g(\nabla S, X) = -\int_M S div X = -\int_M S \Delta h = \int_M g(\nabla S, \nabla h).$$

Assim, basta substituirmos essa igualdade na fórmula integral (47).

Observe também que, uma vez provado que o campo vetorial Y dado pela decomposição de Hodge-de Rham em (52) é um campo de Killing, estaremos respondendo o Problema 5. Desta forma, obtemos o seguinte.

Corolário 5.2 *Se (M^n, g, X, λ) é um quase sóliton de Ricci compacto não trivial, com $n \geq 3$, então o campo vetorial Y dado pela decomposição de Hodge-de Rham é um campo de Killing sobre (M^n, g), desde que:*

1. *X seja um campo conforme.*
2. *(M^n, g) possua curvatura escalar constante.*

Demonstração. Quando X é um campo conforme, é conhecido que $\int_M g(\nabla S, X) dM = 0$ (veja por exemplo, Bourguignon e Ezin (BOURGUIGNON, 1987)). Por completude, exibiremos uma prova deste fato. Da conformidade do campo X, temos que

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = \frac{2 div X}{n} g_{ij}.$$

Multiplicando a equação anterior por R_{ij} e integrando obtemos

$$\frac{2}{n} \int_M R_{ij} g_{ij} div X dM = \int_M R_{ij} (\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) dM.$$

Em seguida, integrando por partes e aplicando a segunda identidade de Bianchi contraída (30), temos que

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \int_M S div X dM &= 2 \int_M R_{ij} \nabla_i X_j dM = -2 \int_M g(div(Ric), X) dM \\ &= -\int_M g(\nabla S, X) = \int_M S div X dM,\end{aligned}$$

donde

$$\frac{2-n}{n}\int_M g(\nabla S, X)dM = 0.$$

Logo, para $n > 2$, $\int_M g(\nabla S, X)dM = \int_M SdivX = 0$. Portanto, segue do Teorema 4.1 que $Ric = \frac{S}{n}g$. Assim, a curvatura escalar é constante e o resultado segue da última parte da prova do Corolário 5.1. A segunda afirmação segue naturalmente deste último argumento, o que completa a prova do corolário.

5.1 Quase sólitons de Ricci gradiente compactos localmente conformemente plano

Nesta seção, estudaremos quase sólitons de Ricci gradiente compacto localmente conformemente planos. Motivados pelo estudo de sólitons de Ricci gradiente, em (GARCIA, 2011), os autores provaram que um sóliton de Ricci gradiente compacto localmente conformemente plano é isométrico à esfera Euclidiana. Catino em (CATINO, 2011), mostrou que, dado um quase sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ localmente conformemente plano, em torno de qualquer ponto regular de f, M^n é localmente um produto warped com fibra (de dimensão $n-1$) F^{n-1}, tal que a curvatura seccional de F^{n-1} é constante.

Considerando tais quase sólitons de Ricci gradiente, obteremos um resultado similar ao obtido em (GARCIA, 2011) para quase sólitons de Ricci gradiente compactos localmente conformemente planos, mas com uma hipótese integral adicional.

Primeiramente recordemos algumas fórmulas satisfeitas por um quase sóliton de Ricci gradiente, as quais foram obtidas por A. Barros e E. Ribeiro em (BARROS, 2012b) que estendem fórmulas semelhantes para sólitons de Ricci obtidas por Hamilton.

Proposição 5.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente. Então as condições seguintes são verdadeiras:*

1. $R + \Delta f = \lambda n$.
2. $\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla_j f + 2(n-1)\nabla_i \lambda$.
3. $\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - R_{ijks}\nabla_s f = (\nabla_j \lambda)g_{ik} - (\nabla_i \lambda)g_{jk}$.
4. $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda\nabla f$.

Para a prova, veja (BARROS, 2012b). Agora, recordemos a definição de divergencia de um $(0,4)$-tensor α

$$(div\alpha)_{ijk} = g^{lm}\nabla_m \alpha_{lijk}.$$

Lema 5.1 *Se $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é um quase sóliton de Ricci gradiente, então*

1. $(divRm)_{jkl} = R_{lkjs}\nabla_s f + (\nabla_l \lambda)g_{kj} - (\nabla_k \lambda)g_{jl}$.
2. $\nabla_i(R_{ijkl}e^{-f}) = ((\nabla_l \lambda)g_{kj} - (\nabla_k \lambda)g_{lj})e^{-f}$.

3. $\nabla_i(R_{ik}e^{-f}) = ((n-1)\nabla_k\lambda)e^{-f}$,

onde Rm denota o tensor curvatura de Riemann.

Demonstração. Para obtermos o primeiro item, basta usarmos a identidade de Ricci e a terceira relação da Proposição 5.1. Com efeito,

$$\begin{aligned}(divRm)_{jkl} &= \nabla_i(R_{ijkl}) = \nabla_i R_{klij}\\ &= -\nabla_k R_{liij} - \nabla_l R_{ikij}\\ &= -\nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{kj}\\ &= R_{lkjs}\nabla_s f + (\nabla_l\lambda)g_{kj} - (\nabla_k\lambda)g_{lj}.\end{aligned} \tag{58}$$

A segunda identidade segue diretamente do item 1. Com efeito,

$$\begin{aligned}\nabla_i(R_{ijkl}e^{-f}) &= \nabla_i(R_{ijkl})e^{-f} - (\nabla_i f)R_{ijkl}e^{-f}\\ &= ((\nabla_l\lambda)g_{kj} - (\nabla_k\lambda)g_{jl})e^{-f}.\end{aligned}$$

Finalmente, pela segunda identidade de Bianchi contraída e o item 2 da Proposição 5.1, temos que

$$\begin{aligned}\nabla_i(R_{ik}e^{-f}) &= (\nabla_i R_{ik})e^{-f} - (\nabla_i f)R_{ik}e^{-f}\\ &= \frac{1}{2}\nabla_k R e^{-f} - (\nabla_i f)R_{ik}e^{-f}\\ &= (R_{ki}\nabla_i f + (n-1)\nabla_k\lambda - \nabla_i f R_{ik})e^{-f}\\ &= (n-1)(\nabla_k\lambda)e^{-f},\end{aligned}$$

o que completa a prova do lema. Como consequência do lema anterior, obtemos a seguinte fórmula integral para a norma do divergente do tensor de Riemann.

Corolário 5.3 *Se $\big(M^n, g, \nabla f, \lambda\big)$ é um quase sóliton de Ricci gradiente compacto, então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M |divRm|^2 e^{-f}dM = &-\int_M Rg(\nabla\lambda,\nabla f)e^{-f}dM - \int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM\\ &-(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f}dM + \int_M g(\nabla\lambda,\nabla R)e^{-f}dM.\end{aligned}$$

Demonstração. Usando o Lema 5.1 e o item 2 da Proposição 5.1, temos que

$$\begin{aligned}\int_M |divRm|^2 e^{-f}dM &= \int_M R_{lkjs}\nabla_s f(-\nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{kj})e^{-f}dM\\ &\quad+\int_M (\nabla_l\lambda g_{kj} - \nabla_k\lambda g_{lj})(-\nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{kj})e^{-f}dM\\ &= -\int_M R_{lkjs}\nabla_s f\nabla_k R_{lj}e^{-f}dM + \int_M R_{lkjs}\nabla_s f\nabla_l R_{kj}e^{-f}dM\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_M (\nabla_l\lambda g_{kj} - \nabla_k\lambda g_{lj})(-\nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{kj})e^{-f}dM\\
=&-\int_M \nabla_l(R_{lkjs}e^{-f})\nabla_s f R_{kj}dM + \int_M \nabla_k(R_{lkjs}e^{-f})\nabla_s f R_{lj}dM\\
&-\int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM + \int_M R_{lkjs}\nabla_k\nabla_s f R_{lj}e^{-f}dM\\
&+\int_M g(\nabla\lambda, \nabla R)e^{-f}dM\\
=&-2\int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{lj}e^{-f}dM - 2\int_M \nabla_l(R_{lkjs}e^{-f})\nabla_s f R_{kj}dM\\
&+\int_M g(\nabla\lambda, \nabla R)e^{-f}dM\\
=&-2\int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM + \int_M g(\nabla\lambda, \nabla R)e^{-f}dM\\
&-2\int_M ((\nabla_s\lambda)g_{jk} - (\nabla_j\lambda)g_{sk})\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM\\
=&-2\int_M Rg(\nabla\lambda, \nabla f)e^{-f}dM - 2\int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM\\
&+2\int_M Ric(\nabla f, \nabla\lambda)e^{-f}dM + \int_M g(\nabla\lambda, \nabla R)e^{-f}dM\\
=&-2\int_M Rg(\nabla\lambda, \nabla f)e^{-f}dM - 2\int_M R_{lkjs}\nabla_l\nabla_s f R_{kj}e^{-f}dM\\
&-2(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f}dM + 2\int_M g(\nabla\lambda, \nabla R)e^{-f}dM,
\end{aligned}
$$

finalizando, assim, a prova do corolário.

Observação 5.1 *Agora observe que, para qualquer variedade Riemanniana (M^n, g), temos que*

$$\nabla_i\nabla_j R_{ik} - \nabla_j\nabla_i R_{ik} = R_{jm}R_{mk} - R_{ijkm}R_{im}. \tag{59}$$

Com efeito, usando a fórmula de comutação para derivada covariante, obtemos

$$\nabla_i\nabla_j R_{lk} - \nabla_j\nabla_i R_{lk} = -R_{ijlm}R_{mk} - R_{ijkm}R_{im},$$

agora basta fazer $l = i$ na igualdade anterior.

Como consequência da equação (59) e do Corolário 5.3, derivamos o seguinte

Lema 5.2 *Se $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é um quase sóliton de Ricci gradiente compacto, então*

$$\int_M |divRm|^2 e^{-f}dM = \int_M |\nabla Ric|^2 e^{-f}dM - \int_M R\Delta\lambda e^{-f}dM - n(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f}dM.$$

Demonstração. De fato, integrando por partes e usando a simetria do tensor de Ricci, segue que

$$
\begin{aligned}
-2\int_M \nabla_k R_{jl}\nabla_l R_{jk}e^{-f}dM &= 2\int_M R_{jk}\nabla_l\nabla_k R_{jl}e^{-f}dM - 2\int_M R_{jk}\nabla_k R_{jl}\nabla_l f e^{-f}dM\\
&= 2\int_M R_{jk}\nabla_i\nabla_j R_{ik}e^{-f}dM - 2\int_M R_{jk}\nabla_j R_{ik}\nabla_i f e^{-f}dM.
\end{aligned}
$$

Novamente integrando por partes e da equação (59), temos que

$$
\begin{aligned}
-2\int_M \nabla_k R_{jl}\nabla_l R_{jk}e^{-f}dM &= 2\int_M R_{jk}(\nabla_j\nabla_i R_{ik} + R_{jm}R_{mk} - R_{ijkm}R_{im})e^{-f}dM\\
&\quad +2\int_M \nabla_j(R_{jk}e^{-f})R_{ik}\nabla_i f + 2\int_M R_{jk}R_{ik}\nabla_j\nabla_i f e^{-f}dM\\
&= -2\int_M \nabla_j(R_{jk}e^{-f})\nabla_i R_{ik}dM + 2\int_M R_{jk}R_{jm}R_{mk}e^{-f}dM\\
&\quad -2\int_M R_{ijkm}R_{im}R_{jk}e^{-f}dM + 2\int_M \nabla_j(R_{jk}e^{-f})R_{ik}\nabla_i f dM\\
&\quad +2\int_M R_{jk}R_{ik}\nabla_j\nabla_i f e^{-f}dM.
\end{aligned}
$$

Agora do item 2 da Proposição 5.1, do item 3 do Lema 5.1, da segunda identidade de Bianchi contraída (30) e da equação fundamental (25), deduzimos

$$
\begin{aligned}
-2\int_M \nabla_k R_{jl}\nabla_l R_{jk}e^{-f}dM &= 2\int_M R_{jk}R_{ik}(R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f)e^{-f}dM\\
&\quad -\int_M \nabla_j(R_{jk}e^{-f})\nabla_k R dM - 2\int_M R_{ijkm}R_{im}R_{jk}e^{-f}dM\\
&\quad +2\int_M \nabla_j(R_{jk}e^{-f})(\frac{1}{2}\nabla_k R - (n-1)\nabla_k\lambda)dM\\
&= 2\int_M \lambda|Ric|^2 e^{-f}dM - 2\int_M R_{ijkm}R_{im}R_{jk}e^{-f}dM\\
&\quad -2(n-1)^2\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f}dM.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_M |divRm|^2 e^{-f}dM &= \int_M |-\nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{kj}|^2 e^{-f}dM\\
&= 2\int_M |\nabla Ric|^2 e^{-f}dM - 2\int_M \nabla_k R_{jl}\nabla_l R_{jk}e^{-f}dM\\
&= 2\int_M |\nabla Ric|^2 e^{-f}dM + 2\int_M \lambda|Ric|^2 e^{-f}dM\\
&\quad -2\int_M R_{ijkm}R_{im}R_{jk}e^{-f}dM - 2(n-1)^2\int_M |\nabla\lambda|^2 e^{-f}dM\\
&= 2\int_M |\nabla Ric|^2 e^{-f}dM + 2\int_M \lambda|Ric|^2 e^{-f}dM
\end{aligned}
$$

$$+2\int_M R_{ijkm}\nabla_i\nabla_m f R_{jk}e^{-f}dM - 2\int_M \lambda|Ric|^2e^{-f}dM$$
$$-2(n-1)^2\int_M |\nabla\lambda|^2e^{-f}dM.$$

Comparando a equação acima com o Corolário 5.3, temos

$$\begin{aligned}\int_M |divRm|^2e^{-f}dM &= \int_M |\nabla Ric|^2e^{-f} - \int_M Rg(\nabla\lambda,\nabla f)e^{-f}dM \\ &+ \int_M g(\nabla R,\nabla\lambda)e^{-f}dM - n(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2e^{-f}dM. \qquad (60)\end{aligned}$$

Observe que o teorema da divergência nos fornece

$$\begin{aligned}\int_M g(\nabla R,\nabla\lambda)e^{-f}dM &= \int_M g(\nabla R, e^{-f}\nabla\lambda)dM \\ &= \int_M Rg(\nabla f,\nabla\lambda)e^{-f}dM - \int_M R\Delta\lambda e^{-f}dM.\end{aligned}$$

Agora basta substituirmos a equação anterior em (60) para finalizarmos a prova do lema.

Teorema 5.2 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente compacto localmente conformemente plano. Se*

$$-\int_M R\Delta\lambda e^{-f}dM \geq n(n-1)\int_M |\nabla\lambda|^2e^{-f}dM, \qquad (61)$$

então (M^n, g) é isométrico à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Demonstração. Primeiramente, observe que qualquer variedade Riemanniana localmente conformemente plana satisfaz

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_k R g_{ij} - \nabla_j R g_{ik}). \qquad (62)$$

Para isto, veja a identidade (28.19) em (EISENHART, 1949). Por outro lado, lembre que em (58)

$$(divRm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}. \qquad (63)$$

Consequentemente, segue de (62) e (63) que uma variedade Riemanniana localmente conformemente plana, satisfaz

$$|divRm|^2 = \frac{|\nabla R|^2}{2(n-1)}. \qquad (64)$$

Assim, aplicando (61) no Lema 5.2, temos a seguinte desigualdade

$$\int_M |divRm|^2 e^{-f} dM \geq \int_M |\nabla Ric|^2 e^{-f} dM. \tag{65}$$

Uma vez que

$$|\nabla Ric|^2 - \frac{1}{n}|\nabla R|^2 = \left|\nabla_k R_{ij} - \frac{1}{n}\nabla_k R g_{ij}\right|^2 \geq 0,$$

isto é,

$$|\nabla Ric|^2 \geq \frac{1}{n}|\nabla R|^2. \tag{66}$$

Agora (64), (65) e (66) implicam que

$$\frac{1}{2(n-1)}\int_M |\nabla R|^2 e^{-f} dM \geq \frac{1}{n}\int_M |\nabla R|^2 e^{-f} dM,$$

ou seja,

$$0 \geq \frac{n-2}{2n(n-1)}\int_M |\nabla R|^2 e^{-f} dM,$$

donde R é constante. Portanto, podemos aplicar o Corolário 4.1 para concluirmos que (M^n, g) é isométrica à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, o que finaliza a prova do teorema. Para o que segue precisamos do seguinte

Lema 5.3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $\mathcal{L}_X Hessf = Hess\mathcal{L}_X f$.*

Demonstração. Considere $\{\partial_i\}$ um referencial geodésico em torno de um ponto $p \in M$ qualquer. Como X é de Killing, $\mathcal{L}_X g = 0$, então, para quaisquer i, j, k, temos

$$\begin{aligned}
0 = (\mathcal{L}_X g)_{ij} &= g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X) \\
&= x^k g(\nabla_{\partial_i}\partial_k, \partial_j) + \partial_i x^k g(\partial_k, \partial_j) \\
&\quad + x^k g(\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_k) + \partial_j x^k g(\partial_i, \partial_k) \\
&= \partial_i x^j + \partial_j x^i,
\end{aligned}$$

donde

$$\partial_k\partial_i x^j = -\partial_k\partial_j x^i = -\partial_j\partial_k x^i = \partial_j\partial_i x^k = \partial_i\partial_j x^k = -\partial_i\partial_k x^j = -\partial_k\partial_i x^j,$$

daí

$$\partial_k\partial_i x^j = 0. \tag{67}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
(Hess\mathcal{L}_X f)_{ij} &= \partial_i\partial_j(\mathcal{L}_X f) - (\nabla_{\partial_i}\partial_j)\mathcal{L}_X f \\
&= \partial_i\partial_j(x^k\partial_k f) \\
&= \partial_i(\partial_j x^k\partial_k f + x^k\partial_j\partial_k f) \\
&= \partial_i\partial_j x^k\partial_k f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f + \partial_i x^k\partial_j\partial_k f + x^k\partial_i\partial_j\partial_k f.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Hessf)_{ij} &= (\nabla_X Hessf)(\partial_i,\partial_j) + Hessf(\nabla_{\partial_i}X,\partial_j) + Hessf(\partial_i,\nabla_{\partial_j}X) \\
&= D_X(\partial_i\partial_j f) - Hessf(\nabla_X\partial_i,\partial_j) - Hessf(\partial_i,\nabla_X\partial_j) \\
&\quad + x^k Hessf(\nabla_{\partial_i}\partial_k,\partial_j) + \partial_i x^k Hessf(\partial_k,\partial_j) \\
&\quad + x^k Hessf(\partial_i,\nabla_{\partial_j}\partial_k) + \partial_j x^k Hessf(\partial_i,\partial_k) \\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f - x^k Hessf(\nabla_{\partial_k}\partial_i,\partial_j) - x^k Hessf(\partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j) \\
&\quad + \partial_i x^k Hessf(\partial_k,\partial_j) + \partial_j x^k Hessf(\partial_i,\partial_k) \\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f + \partial_i x^k\partial_k\partial_j f - \partial_i x^k(\nabla_{\partial_k}\partial_j)f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f \\
&\quad - \partial_j x^k(\nabla_{\partial_i}\partial_k)f \\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f + \partial_i x^k\partial_k\partial_j f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f.
\end{aligned}$$

Comparando as duas últimas identidades, deduzimos

$$(Hess\mathcal{L}_X f)_{ij} = \partial_i\partial_j x^k\partial_k f + (\mathcal{L}_X Hessf)_{ij}.$$

Portanto, pela igualdade (67), $\mathcal{L}_X Hessf = Hess\mathcal{L}_X f$, o que prova o lema.

Corolário 5.4 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci. Se X é um campo vetorial de Killing sobre M^n, então, ou $D_X f$ é constante ou (M^n, g) é conformemente equivalente à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração. Desde que X é um campo vetorial de Killing, ou seja, $\mathcal{L}_X g = 0$, então o fluxo associado ao campo X são isometrias, donde $\mathcal{L}_X\mathrm{Ric} = 0$. De sorte que

$$Hess\,\mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_X Hess\, f = \mathcal{L}_X\lambda g,$$

daí

$$\Delta\mathcal{L}_X f = n\mathcal{L}_X\lambda. \tag{68}$$

Consequentemente, concluímos que

$$Hess(\,\mathcal{L}_X f) = \frac{\Delta\mathcal{L}_X f}{n}g.$$

Portanto podemos aplicar o Teorema 6.3 (p. 28 de Yano(YANO, 1970)) para concluirmos que, ou $D_X f$ é constante, ou (M^n, g) é conformemente equivalente à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Além disso, se supusermos que (61) é satisfeita, então podemos provar o próximo corolário.

Corolário 5.5 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci compacto satisfazendo a condição (61). Se X é um campo vetorial de Killing sobre M^n, então, ou $D_X f$ é constante ou (M^n, g) é isométrico à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 5.4 que, ou $D_X f$ é constante, ou (M^n, g) é conformemente equivalente à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$. No último caso, concluímos que (M^n, g) é localmente conformemente plana, pois a esfera Euclidiana é localmente conformemente plana. Como por hipótese (61) é satisfeita, aplicamos o Teorema 5.2 para concluirmos que (M^n, g) é isométrica à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.

6 MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN

Continuando o nosso estudo sobre métricas tipo Einstein, neste capítulo, estudaremos variedades munidas de métricas quasi-Einstein, ou seja, variedades Riemannianas (M^n, g) satisfazendo
$$Ric + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g,$$
onde $f \in C^\infty(M)$, $0 < m \leq \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que, quando $m = \infty$, tal estrutura reduz-se aos sólitons de Ricci gradiente. Além disso, quando $m = \infty$ e f é constante, obtemos as métricas de Einstein.

Como é conhecido as taxas de crescimento do volume das bolas geodésicas de uma variedade Riemanniana contêm informações geométricas extremamente importantes. S.-T. Yau, em (YAU, 1976), e E. Calabi, em (CALABI, 1975), provaram de maneira independente que para variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não-negativa, a taxa de crescimento do volume das bolas geodésicas é pelo menos linear. Em particular,isso é satisfeito por variedades Riemannianas Ricci planas, a saber, satisfazendo $Ric = 0$. Em (MUNTEANU, 2013), O. Munteanu e N. Sesum provaram que a taxa de crescimento das bolas geodésicas de um sóliton de Ricci gradiente estacionário, isto é, satisfazendo

$$Ric + Hessf = 0,$$

é igual à aquela provada por Yau e Calabi para variedades Riemannianas satisfazendo $Ric = 0$.

Na segunda seção deste capítulo, que corresponde ao artigo (BARROS, 2015) em colaboração com A. Barros e E. Ribeiro, provamos que o volume das bolas geodésicas das métricas quasi-Einstein estacionárias, ou seja,

$$Ric + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = 0,$$

também tem crescimento no mínimo linear.

Analogamente, podemos questionar sobre o equivalente para variedades Riemannianas ponderadas. Nesse sentido, F. Morgan, em (MORGAN, 2005), H.-D. Cao e D. Zhou, em(CAO, 2010a), provaram que, se $Ric + Hessf = \lambda g$, com $\lambda > 0$, então seu f-volume é finito. É bem conhecido que $Ric + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df \geq 0$ implica f-volume infinito (veja (LI, 2005)). Nesse contexto, provaremos uma estimativa para o f-volume das bolas geodésicas de uma certa classe de métrica quasi-Einstein expansivas.

Finalmente, na última seção, usaremos a estreita relação das métricas quasi-Einstein com produtos warped Einstein para provamos um resultado de trivialidade de uma certa classe de produtos warped Einstein.

6.1 Métrica quasi-Einstein

Definição 6.1 *Uma variedade Riemanniana completa* (M^n, g) *define uma métrica quasi-Einstein, quando existe* $f \in C^\infty(M)$, $m \in (0, \infty]$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$Ric + Hessf - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g. \tag{69}$$

Denotaremos tal estrutura por $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$.

Em alguns casos, é conveniente escrevermos (69) em coordenadas, ou seja, se $\{x^1, ..., x^n\}$ é um sistema de coordenadas em torno de algum ponto, então

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{m} df_i \cdot df_j = \lambda g_{ij}, \tag{70}$$

onde $\nabla_i \nabla_j f = Hessf(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ e $df_i = g(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^i})$.

Inspirados na nomenclatura da teoria dos sólitons de Ricci, chamamos f de função potencial. Além disso, dizemos que uma métrica quasi-Einstein é *expansiva*, *estacionária* ou *contrátil*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$.

Definição 6.2 *Dizemos que uma métrica quasi-Einstein é trivial quando* f *em (69) é constante.*

A equação (69) é particularmente interessante, pois quando f é constante e $m = \infty$, ela se reduz a

$$Ric = \lambda g,$$

ou seja, às métricas de Einstein. Ademais, se tivermos somente $m = \infty$, então (69) será

$$Ric + Hessf = \lambda g,$$

isto é, os sólitons de Ricci gradientes que estudamos no Capítulo 3.

É importante destacar também que métricas quasi-Einstein com $m = 1$, satisfazendo $\Delta e^{-f} + \lambda e^{-f} = 0$ são métricas estáticas com constante cosmológica λ. Métricas estáticas têm sido extensivamente estudadas devido a ligação com curvatura escalar, Teorema da massa positiva e relatividade geral. Para mais detalhes, veja, por exemplo, as referências (ANDERSON, 1999), (ANDERSON, 2009) e (CORVINO, 2000).

Em (BESSE, 2008) p.265, observa-se que produto warped representa uma fonte profícua de construção de novos exemplos de variedades Riemannianas de Einstein. Os autores escreveram:

> *"Nevertheless warped products do give new examples of complete Einstein manifolds and the Einstein equations are quite interesting".*

Nesse sentido, quando f não é constante e $m \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, uma métrica quasi-Einstein representa uma forma elegante de construir exemplos de produtos warped Einstein. A seguir, explicaremos em maiores detalhes como se dá essa construção.

Primeiramente recorde que para um produto warped, temos o seguinte resultado que pode ser encontrado em (OŃEILL, 1983).

Proposição 6.1 *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped, com $m > 1$. Se X e Y são campos horizontais e V e W campos verticais sobre N, então*

1. $Ric_N(X,Y) = Ric_M(X,Y) - \frac{m}{u}(Hessu)(X,Y)$.
2. $Ric_N(X,V) = 0$.
3. $Ric_N(V,W) = Ric_F(V,W) - g_F(V,W)\Big(\frac{\Delta u}{u} + (m-1)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\Big)$.

Como consequência da Proposição 6.1, obtemos o corolário a seguir.

Corolário 6.1 *Um produto warped $N = M \times_u F$ é de Einstein com $Ric = \lambda g$ se, e somente se,*

1. $Ric_M = \lambda g_M + \frac{m}{u}Hessu$.
2. (F^m, g_F) *é de Einstein com* $Ric_F = \mu g_F$,
3. $u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = \mu$.

Se $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ define uma métrica quasi-Einstein com $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, ou seja,

$$Ric + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g,$$

pondo $u = e^{-f/m}$, temos $\nabla u = -\frac{u}{m}\nabla f$ e para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\frac{m}{u}\nabla_X\nabla u &= \frac{m}{u}\Big(-\frac{u}{m}\nabla_X\nabla f - X\Big(\frac{u}{m}\Big)\nabla f\Big)\\ &= -\nabla_X\nabla f + \frac{m}{u}\frac{u}{m^2}X(u)\nabla f\\ &= -\nabla_X\nabla f + \frac{1}{m}g(\nabla f, X)\nabla f,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{m}{u}Hessu = Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df. \tag{71}$$

Daí, podemos reescrever (69), pondo

$$Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g, \tag{72}$$

ou seja, (M^n, g) satisfaz o item 1 do Corolário 6.1. Afirmamos que existe $\mu \in \mathbb{R}$, satisfazendo o item 3 do Corolário 6.1. Com efeito, tomando o traço da equação (72), temos que

$$R - \frac{m}{u}\Delta u = \lambda n. \tag{73}$$

Da segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, $dR = 2div(Ric)$, que aplicada em (73), fornece

$$2divRic = d\Big(m\frac{\Delta u}{u}\Big) = \frac{m}{u^2}(ud(\Delta u) - \Delta u du). \tag{74}$$

Por outro lado, segue da definição de divergência que

$$div\Big(\frac{Hessu}{u}\Big)_k = g^{ij}\nabla_j\Big(\frac{Hessu}{u}\Big)_{ik} = -\frac{1}{u^2}g^{ij}u_j(Hessu)_{ik} + \frac{1}{u}g^{ij}\nabla_j(Hessu)_{ik}.$$

Assim, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} div\Big(\frac{Hessu}{u}\Big)(X) &= -\frac{1}{u^2}Hessu(\nabla u, X) + \frac{1}{u}div(Hessu)(X) \\ &= -\frac{1}{2u^2}g(\nabla|\nabla u|^2, X) + \frac{1}{u}div(Hessu)(X), \end{aligned} \tag{75}$$

onde, na última igualdade usamos que $\nabla|\nabla u|^2 = 2\nabla_{\nabla u}\nabla u$. Agora lembre que

$$div(Hessu)(X) = Ric(\nabla u, X) + g(\nabla\Delta u, X). \tag{76}$$

Para uma prova disto, veja pág.33 em (BATISTA, 2013). De (69), segue que

$$Ric(\nabla u, X) - \frac{m}{u}Hessu(\nabla u, X) = \lambda g(\nabla u, X). \tag{77}$$

Substituindo (76) e (77) em (75), temos

$$\begin{aligned} div\Big(\frac{Hessu}{u}\Big) &= -\frac{1}{2u^2}d(|\nabla u|^2) + \frac{m}{2u^2}d(|\nabla u|^2) + \frac{\lambda}{u}du + \frac{1}{u}d(\Delta u) \\ &= \frac{1}{2u^2}\{(m-1)d(|\nabla u|^2) + \frac{\lambda}{u}du + \frac{1}{u}d(\Delta u)\}. \end{aligned} \tag{78}$$

Uma vez que o divergente do tensor métrico é nulo, segue de (73) que $divRic = mdiv\Big(\frac{Hessu}{u}\Big)$, logo (74) e (78) implicam que

$$\frac{1}{2u^2}(ud(\Delta u) - \Delta u du) = \frac{1}{2u^2}\{(m-1)d(|\nabla u|^2) + \frac{\lambda}{u}du + \frac{1}{u}d(\Delta u)\},$$

donde

$$ud(\Delta u) + (m-1)d(|\nabla u|^2) + \Delta u du + 2\lambda u du = 0.$$

Daí

$$d(u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2) = 0.$$

Portanto, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = \mu,$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta f - |\nabla f|^2 = m\lambda - m\mu e^{\frac{2f}{m}}.$$

Sabendo disto e usando o Corolário 6.1, em (CASE, 2011) e (KIM, 2003), os autores obtiveram a seguinte caracterização das métricas quasi-Einstein.

Teorema 6.1 *Seja $M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein com constante de Einstein λ, função warped $u = e^{-f/m}$ e F^m uma variedade de Einstein. Então $(M^n, g_M, \nabla f, \lambda, m)$ satisfaz à equação das métricas quasi-Einstein (69). Além disso, a constante de Einstein μ de F^m satisfaz*

$$\Delta f - |\nabla f|^2 = m\lambda - m\mu e^{\frac{2f}{m}}. \tag{79}$$

Reciprocamente, se uma variedade Riemanniana $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ satisfaz (69), então f satisfaz (79) para alguma constante $\mu \in \mathbb{R}$. Considere o produto warped $N^{n+m} = M^n \times_u F^m$, com $u = e^{-f/m}$ e F^m de Einstein com $Ric_F = \mu g_F$. Então N é de Einstein com $Ric_N = \lambda g_N$.

O teorema acima permite estudar um produto warped Einstein de uma maneira alternativa, ou seja, somente através da equação (69). Vale salientar que alguns problemas interessantes sobre produto warped Einstein têm sido resolvidos utilizando esta perspectiva; veja por exemplo (KIM, 2003), (CASE, 2010) e (CASE, 2011).

Exemplos de métricas quasi-Einstein com $\lambda < 0$ e μ com sinal arbitrário, ou com $\lambda = 0$ e $\mu \geq 0$ são construídos em (BESSE, 2008). Além disso, quando $\lambda = 0$, $\mu > 0$ todos os exemplos são não-triviais. Em (QIAN, 1997), Z. Quian provou um teorema análogo ao Teorema de Bonnet-Myers, mais precisamente, se $\lambda > 0$ em (70), então M é compacta. Por outro lado, D. Kim e H. Kim, em (KIM, 2003), mostraram que, no caso compacto, $\lambda \leq 0$ implica trivialidade, o que equivale, pelo Teorema 6.1 ao seguinte resultado.

Teorema 6.2 (D. Kim, H. Kim (KIM, 2003)) *Se $N = M^n \times_u F^m$ é um produto warped Einstein com curvatura escalar não positiva e base compacta, então N é um produto Riemanniano.*

Nesta mesma direção, J. Case, em (CASE, 2010), mostrou que $\lambda \geq 0$ e $\mu \leq 0$ implicam trivialidade, ou equivalentemente

Teorema 6.3 (J. Case (CASE, 2010)) *Se $N = M^n \times_u F^m$ é um produto warped Einstein com constante de Einstein $\lambda \geq 0$ e fibra de Einstein F^m com constante de Einstein $\mu \leq 0$, então N é um produto Riemanniano.*

Observação 6.1 *Observe que, como mostramos anteriormente, dada uma métrica quasi-Einstein, sempre existe $\mu \in \mathbb{R}$ satisfazendo (79), a restrição $m \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ só é necessária quando usamos métricas quasi-Einstein sobre uma base de produto warped Einstein.*

Para finalizarmos esta seção, exibiremos dois exemplos de métricas quasi-Einstein sobre $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ obtidas por E. Ribeiro e K. Bezerra em (KELTIM, 2013). Na verdade, eles provam que tais exemplos são os únicos possíveis para tal variedade munida com a métrica produto padrão.

Considerando $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com a métrica produto padrão, ou seja,

$$g = \frac{1}{x_n^2}\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + dt^2, \tag{80}$$

prova-se facilmente que o tensor de Ricci de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é dado por

$$Ric = -(n-1)g_{\mathbb{H}^n} + (n-1)dt^2, \tag{81}$$

onde $g_{\mathbb{H}^n}$ é a métrica canônica do hiperbólico. Desta forma, temos os seguintes exemplos.

Exemplo 6.1 *Considerando $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com a métrica (80) e função potencial $f(x,t) = \pm\sqrt{(n-1)m}t$, é fácil ver que $\nabla f = \pm\sqrt{(n-1)m}\partial_t$. Consequentemente $Hessf = 0$. Portanto, usando (81), conclui-se que $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, -(n-1), m)$ define uma métrica quasi-Einstein.*

Exemplo 6.2 *Agora, considerando $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ com a métrica (80) e função potencial $f(x,t) = -m\ln(\cosh(\mu t + a))$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $\mu = \sqrt{\frac{n-1}{m}}$, temos $\nabla f = -m\mu(\tanh(\mu t + a)\partial_t$. Nestas condições, (81) implica que $(\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}, g, \nabla f, -(n-1), m)$ define uma métrica quasi-Einstein.*

6.2 Volume e f-volume de métricas quasi-Einstein

Nosso propósito nesta seção é estender para métricas quasi-Einstein a seguinte estimativa de volume

$$Vol(B_r(p)) \geq cr,$$

provada em (YAU, 1976), (CALABI, 1975) e (MUNTEANU, 2013), respectivamente para métricas com tensor de Ricci não-negativo e sóliton de Ricci gradiente estacionário. Além disso, motivados pelos resultados sobre f-volume obtidos em (MORGAN, 2005), (CAO, 2010a) para um sóliton de Ricci gradiente contrátil e, em (LI, 2005), para uma métrica quasi-Einstein estacionária, provaremos uma estimativa para o f-volume das bolas geodésicas de uma certa classe de métricas quasi-Einstein expansivas.

Uma vez que em (QIAN, 1997) e (WEI, 2007) prova-se que métrica quasi-Einstein com m finito e $\lambda > 0$ é compacta, e em (KIM, 2003) prova-se que não existe estrutura não trivial de métrica quasi-Einstein compacto com $\lambda \leq 0$, nesta seção sempre iremos trabalhar com métrica quasi-Einstein não compacta com $\lambda \leq 0$.

Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ uma métrica quasi-Einstein. Pondo $u = e^{-f/m}$, vimos em (71) que

$$Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = -\frac{m}{u}Hessu. \tag{82}$$

Assim, podemos reescrever (69) pondo

$$Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g. \tag{83}$$

Consequentemente, podemos usar a equação (83) para estudar (69) quando m é finito e vice e versa. Tomando o traço em (83), obtemos

$$\frac{u}{m}(R - \lambda n) = \Delta u. \tag{84}$$

Por outro lado, tomando o traço na equação (69), temos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n,$$

assim

$$R + \Delta_f f + \frac{m-1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n.$$

Usando (79), obtemos

$$R - \lambda n + \frac{m-1}{m}|\nabla f|^2 = -\lambda m + \mu m e^{\frac{2f}{m}}.$$

Como $\nabla u = -\frac{u}{m}\nabla f$, temos

$$\frac{u^2}{m}(R - \lambda n) + (m-1)|\nabla u|^2 = -\lambda u^2 + \mu. \tag{85}$$

Lembremos agora que L. Wang, em (WANG, 2012), provou que a curvatura escalar de métricas quasi-Einstein não compactas com $\lambda \leq 0$ satisfaz $R \geq \lambda n$, assim

$$(m-1)|\nabla u|^2 \leq -\lambda u^2 + \mu. \tag{86}$$

Isto mostra de forma alternativa que não existe métrica quasi-Einstein não trivial com $\lambda \geq 0$ e $\mu \leq 0$ (como dito anteriormente, isto foi provado em (CASE, 2010)). Portanto, quando estivermos tratando de uma métrica quasi-Einstein estacionária, podemos assumir que $\mu > 0$. Dito isto, temos a seguinte estimativa de volume.

Teorema 6.4 *Seja* $(M^n, g, \nabla f, 0, m)$ *uma métrica quasi-Einstein não compacta estacionária com* $m \in (1, \infty]$. *Então existem constantes uniforme* c *e* $r_0 > 0$ *tais que, para qualquer* $r > r_0$,

$$Vol(B_r(p)) \geq cr. \tag{87}$$

Demonstração. Primeiramente, podemos assumir que $m \in (1, \infty)$, pois o caso limite corresponde aos sólitons de Ricci gradientes estacionários, que, já sabemos, satisfazem a estimativa de volume desejada, como mostraram O. Munteanu e N. Sesum, em (MUNTEANU, 2013). Assim, usando a hipótese sobre m em (86), segue que

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{\mu}{m-1}. \tag{88}$$

Desde que $R \geq 0$, temos $\int_{B_r(p)} uRd\sigma \geq 0$, para cada $r > 0$, onde $d\sigma$ denota o elemento de volume Riemanniano. Se, para todo $r > 0$, tivermos $\int_{B_p(r)} uRd\sigma = 0$, então $R = 0$ em M^n, uma vez que $u > 0$. Por outro lado, L. Wang, em (WANG, 2012), provou que, para toda métrica quasi-Einstein, a seguinte identidade é satisfeita:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}g(\nabla f, \nabla R) = &-\frac{m-1}{m}\Big|Ric - \frac{R}{n}g\Big|^2 \\ &-\frac{n+m-1}{mn}(R-n\lambda)\Big(R - \frac{n(n-1)}{n+m-1}\lambda\Big),\end{aligned} \tag{89}$$

donde, segue que $Ric = 0$. Mas, para este caso, (87) já foi provado por Yau e Calabi, respectivamente, em (YAU, 1976) e (CALABI, 1975). Se porém, existir $r_0 > 0$ tal que $mC_0 := \int_{B_{r_0}(p)} uRd\sigma > 0$, então, usando novamente o fato que $R \geq 0$ e (84), segue que, para todo $r \geq r_0$

$$\begin{aligned} mC_0 &\leq \int_{B_r(p)} uRd\sigma = m\int_{B_r(p)} \Delta u d\sigma \\ &= m\int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \leq \int_{\partial B_r(p)} |\nabla u| d\eta \\ &\leq m\sqrt{\frac{\mu}{m-1}} \cdot Area(\partial B_r(p)), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $\frac{\partial u}{\partial \eta} \leq |\nabla u| \leq \sqrt{\frac{\mu}{m-1}}$. Isto implica que, para $r \geq r_0$,

$$Area(\partial B_p(r)) \geq c > 0,$$

para uma constante uniforme c. Integrando a desigualdade anterior de r_0 a r, temos

$$Vol(B_p(r)) \geq c(r - r_0) \geq c_0 \cdot r,$$

para todo $r \geq 2r_0$. Equivalentemente, usando o Teorema 6.1, podemos enunciar o Teorema 6.4 em termos de produto warped Einstein.

Teorema 6.5 *Se $N = M^n \times_u F^m$ é um produto warped Ricci flat, então existem constantes uniforme $c > 0$ e $r_0 > 0$ tais que, para qualquer $r \geq r_0$, as bolas geodésicas da base satisfazem*

$$Vol(B_p(r)) \geq cr.$$

De maneira análoga, podemos obter o mesmo resultado acima para uma certa classe de métricas quasi-Einstein expansivas, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 6.6 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ uma métrica quasi-Einstein não compacta expansiva com $\mu \leq 0$ e $m \in (1, \infty)$. Então existem constantes uniformes c e $r_0 > 0$ tais que, para qualquer $r > r_0$,*

$$Vol(B_r(p)) \geq cr, \tag{90}$$

se $-k < f$, onde k é uma constante positiva.

Demonstração. Das hipóteses sobre a função potencial f, μ, m e de (86), segue que

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{-\lambda e^{2k/m}}{m-1}.$$

Já que $R \geq \lambda n$, então $\int_{B_r(p)} u(R-\lambda n)d\sigma \geq 0$, para cada $r > 0$, onde $d\sigma$ denota o elemento de volume Riemanniano. Se, para todo $r > 0$, tivermos $\int_{B_r(p)} u(R-\lambda n)d\sigma = 0$, então $R = \lambda n$ em M^n, uma vez que $u > 0$. Segue de (89) que (M^n, g) é de Einstein. Por outro lado, Case, em (CASE, 2010), descreve completamente todas as estruturas de métricas quasi-Einstein que são de Einstein. Em particular, não existe variedade Riemanniana de Einstein com estrutura de métrica quasi-Einstein expansiva, com função potencial satisfazendo $-\infty < f$. Assim, existe $r_0 > 0$ tal que $mC_0 := \int_{B_{r_0}(p)} u(R-\lambda n)d\sigma > 0$, daí, usando novamente o fato que $R \geq \lambda n$ e (84), segue que, para todo $r \geq r_0$,

$$\begin{aligned} mC_0 &\leq \int_{B_r(p)} u(R-\lambda n)d\sigma = m\int_{B_r(p)} \Delta u d\sigma \\ &= m\int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \leq \int_{\partial B_r(p)} |\nabla u| d\eta \\ &\leq m\sqrt{\frac{-\lambda e^{2k/m}}{m-1}} \cdot Area(\partial B_r(p)), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $\frac{\partial u}{\partial \eta} \leq |\nabla u| \leq \sqrt{\frac{-\lambda e^{2k/m}}{m-1}}$. Isto implica que, para $r \geq r_0$,

$$Area(\partial B_p(r)) \geq c > 0,$$

para uma constante uniforme c. Integrando a desigualdade acima de r_0 a r, temos

$$Vol(B_p(r)) \geq c(r - r_0) \geq c \cdot r,$$

para todo $r \geq 2r_0$.

Novamente, usando o Teorema 6.1, podemos enunciar o Teorema 6.6 em termos de um produto warped Einstein.

Teorema 6.7 *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein com constante de Einstein $\lambda < 0$, função warped $u < +\infty$ e fibra de Einstein F^m com constante de Einstein $\mu \leq 0$. Então existem constantes uniformes $c > 0$ e $r_0 > 0$ tais que, para qualquer $r \geq r_0$ as bolas geodésicas da base satisfazem*

$$Vol(B_r(p)) \geq cr.$$

Para finalizarmos esta seção, obteremos uma estimativa para o f-volume de uma certa classe de métricas quasi-Einstein. Observe que, diferentemente das estimativas obtidas anteriormente, o próximo teorema abrange o caso $m = 1$, ou seja, as métricas estáticas como frisamos na primeira seção deste capítulo.

Teorema 6.8 *Se $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ é uma métrica quasi-Einstein expansiva com $\mu = 0$ e $m \in (0, \infty)$, então existe uma constante uniforme $c > 0$ tal que, para todo $r \geq 1$*

$$Vol_f(B_r(p)) \geq ce^{\sqrt{-\lambda m}r}. \tag{91}$$

Demonstração. Usando o fato que $\mu = 0$ na igualdade (79), temos que

$$\Delta e^{-f} = (-\Delta f + |\nabla f|^2)e^{-f} = -\lambda m e^{-f}.$$

Integrando sobre $B_r(p)$, temos

$$\begin{aligned} -\lambda m \int_{B_r(p)} e^{-f} &= \int_{B_r(p)} \Delta e^{-f} \\ &= \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial}{\partial r}(e^{-f}) \\ &\leq \sqrt{-\lambda m} \int_{\partial B_r(p)} e^{-f}, \end{aligned} \tag{92}$$

onde, na última igualdade, usamos que $|\frac{\partial f}{\partial r}| \leq |\nabla f| \leq \sqrt{-\lambda m}$ (para uma prova deste fato, veja (WANG, 2012)). Denotando

$$\xi(r) := Vol_f(B_p(r)) = \int_{B_r(p)} e^{-f},$$

segue de (92) que

$$\xi'(r) \geq \sqrt{-\lambda m}\xi(r).$$

Integrando de 1 a r, concluímos que

$$\xi(r) = \int_{B_r(p)} e^{-f} \geq ce^{\sqrt{-\lambda m}r},$$

para algum $c > 0$.

Alternativamente, podemos reescrever o Teorema 6.8 em termos de produto warped Einstein como segue.

Teorema 6.9 *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein com curvatura escalar R negativa, função warped $u = e^{-f/m}$ e fibra de Einstein F^m Ricci flat. Então existe uma constante uniforme $c > 0$, tal que, para todo $r \geq 1$ as bolas geodésicas da base satisfazem*

$$Vol_f(B_r(p)) \geq ce^{\sqrt{-\frac{R}{n+m}m}r}.$$

6.3 Um teorema de trivialidade de produto warped Einstein

A. L. Besse, em (BESSE, 2008) pág.265, questiona a existência de um produto warped Einstein compacto. O autor escreveu:

"Does there exist a compact Einstein warped product with nonconstant warping function?"

Como dito anteriormente, usando a teoria de métrica quasi-Einstein, em (KIM, 2003), os autores dão uma resposta parcial negativa. Mais precisamente eles provaram o seguinte

Teorema 6.10 *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein com base compacta e F^m de Einstein. Se N possui curvatura escalar não positiva, então o produto warped é, na verdade um produto Riemanniano.*

Além disso, no Teorema 6.3, J. Case, em (CASE, 2010), provou um teorema análogo sem a hipótese de compacidade para o caso $\lambda \geq 0$ e $\mu \leq 0$.

Nesse sentido, combinando a teoria das métricas quasi-Einstein com o princípio do máximo fraco no infinito para o f-Laplaciano, provaremos um teorema de trivialidade de produto warped Einstein, não tratado em (KIM, 2003) e (CASE, 2010), ou seja, produto warped Einstein com curvatura escalar negativa, base não-compacta e fibra tendo curvatura escalar negativa.

Dizemos que uma variedade Riemanniana satisfaz o Princípio do máximo fraco no infinito para o f-Laplaciano, se dada uma função $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfazendo $\sup_M u = u^* < +\infty$, existe uma sequência $\{x_n\} \subset M$, tal que

$$u(x_n) \geq u^* - \frac{1}{n} \qquad e \qquad \Delta_f u(x_n) \leq \frac{1}{n},$$

onde $\Delta_f = \Delta - g(\nabla f, \nabla\ )$.

Teorema 6.11 *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein com constante de Einstein $\lambda < 0$, função warped u e fibra de Einstein F^m com constante de Einstein $\mu < 0$. Se a função warped satisfaz*

$$u \leq \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}, \tag{93}$$

então N é um produto Riemanniano.

Demonstração. Pelo Teorema 6.1, podemos assumir que $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ define uma métrica quasi-Einstein expansiva com função potencial dada por $f = -m \ln u$ e $\mu < 0$. Segue das estimativas do f-volume em (QIAN, 1997) e do Teorema 9 em (PIGOLA, 2011) aplicado a $(M, g, \nabla f, \lambda, m)$ a validade do Princípio do máximo fraco no infinito para o f-Laplaciano. Uma vez que, $|\nabla f|^2 \leq -\lambda m$ veja (WANG, 2012) para a prova, podemos aplicar o Princípio do máximo fraco no infinito à função $|\nabla f|^2$. Desta forma, existe uma sequência $\{x_n\} \subset M$, tal que

$$|\nabla f|^2(x_n) \geq \overline{|\nabla f|^2} - \frac{1}{n} \qquad e \qquad \Delta_f |\nabla f|^2(x_n) \leq \frac{1}{n},$$

onde $\overline{|\nabla f|^2} = \sup_M |\nabla f|^2$ denota o sup da função $|\nabla f|^2$. Somando $-\frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla|\nabla w|^2)$ na fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla w|^2 = |Hessw|^2 + Ric(\nabla w, \nabla w) + g(\nabla w, \nabla \Delta w),$$

temos que

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla w|^2 = |Hessw|^2 + Ric(\nabla w, \nabla w) + Hessf(\nabla w, \nabla w) - \nabla w(g(\nabla f, \nabla w)) + g(\nabla w, \nabla \Delta w),$$

onde acima usamos que

$$\begin{aligned} Hessf(\nabla w, \nabla w) &= g(\nabla_{\nabla w}\nabla f, \nabla w) \\ &= \nabla w(g(\nabla f, \nabla w)) - g(\nabla f, \nabla_{\nabla w}\nabla w) \\ &= \nabla w(g(\nabla f, \nabla w)) - \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla|\nabla w|^2). \end{aligned}$$

Daí, segue a versão ponderada da fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla w|^2 = |Hessw|^2 + Ric(\nabla w, \nabla w) + Hessf(\nabla w, \nabla w) + g(\nabla w, \nabla \Delta_f w).$$

Substituindo as iguadades (69) e (79), na fórmula de Bochner ponderada

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 = |Hessf|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + Hessf(\nabla f, \nabla f) + g(\nabla f, \nabla \Delta_f f),$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 &\geq \lambda|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^4 - 2\mu e^{2f/m}|\nabla f|^2 \\ &= (\lambda - 2\mu u^{-2} + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)|\nabla f|^2 \\ &\geq \frac{1}{m}|\nabla f|^4, \end{aligned}$$

onde usamos que $u \leq \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}$ na última desigualdade. Portanto, nos pontos x_n

$$\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 \geq \frac{1}{m}\left(\overline{|\nabla f|^2} - \frac{1}{n}\right)^2,$$

fazendo $n \to \infty$, segue que $\overline{|\nabla f|^2} = 0$, donde f é constante.

7 CONCLUSÃO

Nesta tese abordamos uma classe de métricas tipo Einstein, a saber sólitons de Ricci, quase sólitons de Ricci e métricas quasi-Einstein. Primeiramente obtemos dois resultados sobre compacidade de sólitons de Ricci gradiente, supondo que o quadrado da norma do campo que define tal sóliton é integrável e a derivada da função curvatura escalar na direção do gradiente da função potencial é não negativa, ou uma certa limitação inferior da função potencial.

Em seguida, provamos algumas fórmulas integrais para quase sóliton de Ricci compacto, que nos permitiram provar que todo quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é gradiente. Além disso, mostramos que todo quase sóliton de Ricci gradiente localmente conformemente plano é isométrico à esfera euclidiana, desde que satisfaça uma certa condição integral.

Finalmente, mostramos que as bolas geodésicas de métricas quasi-Einstein estáveis não compactas tem crescimento no mínimo linear. Além disso, usamos métrica quasi-Einstein, para provarmos um teorema de trivialidade para uma certa classe de produto warped Einstein, sob uma hipótese que envolve a função warped e as constantes de Einstein do produto warped e da fibra.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, M. Scalar curvature, metric degenerations and the static vacuum Einstein equations on 3-manifolds I. **Geometric and Functional Analysis**, volume 9, nº 5, 855–967, 1999.

ANDERSON, M.; KHURI, M. The static extension problem in General relativity. **Preprint, 2009. arXiv: math/0909.4550v1**, 2009. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 20 ago. 2009. 2009.

BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO Jr, E. Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient. **Monatshefte fur Mathematik**, volume 174, nº 2, 29–39, 2013a.

BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO Jr, E. Rigidity of gradient almost Ricci solitons. **Illinois Journal of Mathematics**, volume 56, 1267–1279, 2012a.

BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO Jr, E. Bounds on volume growth of geodesic balls for Einstein warped products. **Proceedings of the American Mathematical Society**, volume 143, nº 10, 4415–4422, 2015.

BARROS, A.; GOMES, J. N. V.; RIBEIRO Jr, E. A note on rigidity of the almost Ricci soliton. **Archiv der Mathematik (Printed ed.)**, volume 100, 481–490, 2013b.

BARROS, A.; RIBEIRO Jr, E. Some characterizations for compact almost Ricci solitons. **Proceedings of the American Mathematical Society**, volume 140, 1033–1040, 2012b.

BATISTA, R. Rigidez de sólitons gradiente. **Dissertação(Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará**, , 70 págs Fortaleza 2013.

BESSE, A. Einstein manifolds. **, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Reprint of the 1997 edition**, 2008.

BONNET, O. Sur quelques propriétés des lignes géodésiques. **C. R. Ac. Sci.Paris**, volume 40 1311–1313 1855.

BOURGUIGNON, J.; EZIN, J. Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations. **Transactions of the American Mathematical Society**, volume 301, nº 2, 723–736, 1987.

BRENDLE, S. Ricci flow and the sphere theorem. **American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics**, Volume 111, 176 págs, 2010.

CALABI, E. On manifolds with non-negative Ricci curvature II. **Notices American Mathematics Society**, volume 22, A–205, 1975.

CAMINHA, A. Tópicos de Geometria Diferencial. **Preprint**, 2013.

CAO, H.-D.; ZHOU, D. On complete gradient shrinking Ricci solitons. **Journal Differential Geometry**, volume 85, nº 2 , 175–186, 2010a.

CAO, H,-D.: Recent progress on Ricci solitons. **Advanced Lectures in Mathematics**, volume 11, 1–38, 2010b.

CAO, X. Compact gradient shrinking Ricci solitons with positive curvature operator. **The Journal of Geometric Analysis**, volume 17, 425–433, 2007.

CASE, J.; SHU, Y.-S.; WEI, G. Rigidity of Quasi-Einstein metrics. **Differential Geometry and its Applications.** volume 29, nº 1, 93–100, 2011.

CASE, J. On the nonexistence of quasi-Einstein metrics. **Pacific Journal of Mathematics.** volume 248, 227–284, 2010.

CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor. **Mathematische Zeitschrift**, volume 271, 751–756, 2011.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. Hamiltonś Ricci Flow. **Providence, RI.: American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics**, volume 77, 2010.

CHOW, B.; KNOPF, D. The Ricci flow: An Introduction. **Providence, RI.: American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs**, volume 110, 2004.

CORVINO, J. Scalar curvature deformations and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Communications in Mathematical Physysics**, volume 214, 137–189, 2000.

EISENHART L. P. Riemannian Geometry. **Princeton University Press, Princeton, N. J.**, 2Ed printing 1949.

EJIRI, N. A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan** volume 33, 261-266 1981.

GHOSH, A. Certain Contact Metrics as Ricci Almost Solitons. **Results in Mathematics**, volume 65, Issue 1-2, 81–94, 2014.

GOMES, J. N. V. Rigidez de superfícies de contato e caracterizaç ão de variedades riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial. **Tese**

ao(Doutorado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, , 91 págs Fortaleza 2012.

GRIGOR'YAN, A. Heat kernel and analysis on manifolds. **AMS/IP Studies in Advanced Mathematics**, volume 47, 498 págs, 2009.

HAMILTON, R. S. Three manifolds with positive Ricci curvature. **Journal Differential Geometry**, volume 17, 255–306, 1982.

HAMILTON, R. S. **The Ricci flow on surfaces.** Contemporary Mathematics, volume 71, 237–261. 1988.

HAMILTON, R. The Ricci flow on Surface. **In Mathematics and General Relativity. Providence, R.I.: American Mathematical Society, Contemporary Mathematics**, volume 71, 237–262, 1998.

HAMILTON, R. S. The formation of singularities in the Ricci flow. **Surveys in Differential Geometry, International Press, Combridge**, volume 2, 7–136, 1995.

IVEY, T. Ricci solitons on compact three-manifolds. **Differential Geometry and its Applications**, volume 3, 301–307, 1993.

KIM, D.-S.; KIM, Y. H. Compact Einstein warped produt spaces with nonpositive scalar curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, volume 131, 2573–2576, 2003.

LI, X.-D. Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds. **J. Math. Pures Appl.** volume 84, Issue 10, 1295–1361, 2005.

LÓPEZ, M. F.; GARCÍA, E. Rigidity of shrinking Ricci solitons. **Mathematische Zeitschrift.** 2011, Volume 269, Issue 1-2, 461–466, 2011.

LÓPEZ, M. F. ; GARCÍA, E. **A remark on compact Ricci solitons.** Mathematische Annalen. volume 340 Issue 4, 893–896, 2008.

MASCHLER, G. Special Kahler-Ricci potentials and Ricci solitons. **Ann. Global Anal. Geom.** volume 34, 367-380, 2008.

MASCHLER, G. Almost soliton duality. **Preprint, 2013. arXiv: math/1301.0290v2**, 2013. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 31 ago. 2013.

MASTROLIA, P.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M. Some geometric analysis on generic Ricci solitons. **To appear in, Commun. Contemp. Math.** ,2012.

MYERS, S. Riemannian manifolds with positive mean curvature. **Duke Math. J.**, volume 8, 401–404, 1941.

MORGAN, F. Manifolds with density. **Notices of the Amer. Math. Soc.** volume 52, 853–858, 2005.

MORGAN, J.; TIAN, G. Ricci flow and the PoincarÃ© conjecture. **Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA,** 2007.

MUNTEANU, O.; SESUM, N. On gradient Ricci solitons. **Journal of Geometric Analysis.** Volume 23, Issue 2, , 539–561, 2013.

NAGANO, T.; YANO, K. Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. **Ann. of Math.** volume 69,451-461, 1959.

OBATA, M. ; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. **J. Diff. Geo.** volume 4, 53–72, 1970.

OŃEILL, B. Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity. **Academic Press, New York**, 1983.

PERELMAN, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric aplications. **Preprint. arXiv: math/0211159v1**, 2002. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 20 ago. 2012.

PERELMAN, G. Ricci flow with surgery on three manifolds. **Preprint. arXiv: math/0303109v1**, 2003. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 10 mar. 2003.

PETERSEN, P.; WYLIE. W. Rigidity of gradient Ricci Solitons. **Pacific Journal of Mathematics**, volume 241, nº 2, 329–345, 2009a.

PETERSEN, P.; WYLIE. W. On gradient Ricci Solitons with symmetry. **Proceedings of the American Mathematical Society**, volume 137, 2985–2092, 2009b.

PETERSEN, P. Riemannian geometry. **Graduate Texts in Mathematics New York : Springer-Verlag**, volume 171, 1998.

PIGOLA, S.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. **Math. Z** nº 68, 777–790, 2011.

QIAN, Z.. Estimates for weighted volumes and applications. **Quart. J. Math. Oxford** nº 2 235–242, 1997.

RIBEIRO Jr, E.; BEZERRA, K. A note on the uniqueness of quasi-Einstein metrics on

$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Preprint, arXiv: math/1301.7737v3**, 2013. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 01 ago. 2013. 2013.

RIGOLI, M.; PIGOLA, S.; RIMOLDI, M. e SETTI, A. Ricci Almost Solitons. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.** nº 5 volume X, 757–799, 2011.

RIBEIRO JÚNIOR, E. A geometria das métricas tipo-Einstein. **Tese(Doutorado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará**, , 90 págs Fortaleza 2011.

SCHOEN, R.; YAU, S. T. Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature. **Comment. Math. Helv.** volume 39, 333–341, 1976.

YANO, K. Integral formulas in Riemannian geometry. **Marcel Dekker, Inc., New York,** 1970.

YAU, S.T. Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry. **Indiana Univ. Math. J.** volume 25, 659–670, 1976.

WANG, L. On noncompact quasi-Einstein metrics. **Pacific J. Math.** volume 254, 449-464, 2012.

WEI, G.; WYLIE, W. Comparison geometry for the smooth metric measure spaces. **in Proceedings of the fourth ICCM, Vol. 2 (Hangzhou, China), edited by S. Yau,** 191–202, 2007.

WARNER, F. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups. **New York: Springer-Verlag,** 1983.