UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HELANO DOS SANTOS CAMPELO REGO

INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES SEMIALGÉBRICAS

FORTALEZA
2016

HELANO DOS SANTOS CAMPELO REGO

INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES SEMIALGÉBRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia e Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

R267i Rego, Helano dos Santos Campelo
Injetividade de aplicações semialgébricas / Helano dos Santos Campelo Rego. – 2016.
38 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Topologia.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Difeomorfismo local. 2. Aplicações semialgébricas. 3. Bijetividade. I. Título.

CDD 515

HELANO DOS SANTOS CAMPELO REGO

INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES SEMIALGÉBRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia e Geometria.

Aprovada em: 18/06/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vincent Grandjean
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais Elinarda e Francisco, que me trouxeram com todo o amor e carinho a este mundo, dedicaram, cuidaram e doaram incondicionalmente seu sangue e suor em forma de amor e trabalho por mim, despertando e alimentando em minha personalidade a sede pelo conhecimento e a importância deste em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Elinarda e Francisco, por toda a dedicação, pelo incentivo constante e pelo apoio incondicional!

Agradeço também a Renata que de forma especial e carinhosa me inspirou e me apoiou nos momentos de dificuldades, me incentivando quando se fez necessário.

Ao Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes, pela excelente orientação durante todo o trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Florentiu Daniel Cibotaru e Vincent Grandjean pela disponibilidade tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos diversos professores do departamento de matemática que contribuíram significativamente para minha formação pessoal e acadêmica.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

Á CAPES e FUNCAP pelo apoio financeiro.

"Eu não tenho ídolos. Tenho admiração por trabalho, dedicação e competência"

(Airton Senna)

RESUMO

Motivado pela conjectura jacobiana, apresenta-se uma variação desta considerando-se aplicações semialgébricas bem como propriedades interessantes do conjunto dos pontos não próprios da aplicação. Inicialmente faz-se uma explanação geral sobre os conceitos topológicos e teoria semialgébrica que servirão como base para um amplo entendimento do teorema principal, apresenta-se ainda uma breve introdução histórica com alguns aspectos interessantes no desenvolvimento da teoria até o momento. Por último é apresentado o teorema que trata da extensão de diferomorfismos locais à injetividade global.

Palavras-chave: Difeomorfismo Local. Aplicações Semialgébricas. Injetividade Global.

ABSTRACT

Motivated by conjecture Jacobian, it presents a change considering semi-algebraic maps and interesting properties of the set of not proper points of F. Initially makes a general explanation of the topological concepts and semi-algebraic theory that will serve as the basis for a broad understanding of the main theorem, it presents even a brief historical introduction to some aspects interesting in the development of theory until now. For last it's presented the theorem which deals with from the extension from local diffeomorphisms to the global injectivity.

Keywords: Local Diffeomorphism. Semi-algebraic Maps. Global Injectivity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A *Conjectura Jacobiana* foi proposta inicialmente por $Keller$ em 1939 e, ainda hoje, permanece sem solução. A enunciaremos da seguinte forma:

Conjectura Jacobiana: Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial com determinante jacobiano diferente de zero em todo ponto, então F é um isomorfismo.

Por *isomorfismo* entendemos que a aplicação F é invertível e que sua inversa, F^{-1}, é ainda uma aplicação polinomial. (BAILYNICKI-BIRULA and ROSENLICHT, 1962) mostram que se considerarmos K um corpo algebricamente fechado e $F : K^n \to K^n$ uma aplicação polinomial injetiva, então podemos concluir que F é sobrejetiva, logo F é invertível. CYNK and RUSEK (1991) provam que se temos F invertível então sua inversa F^{-1} também é polinomial. Com esses resultados é suficiente trabalhar objetivando a injetividade de F.

Considerando o corpo dos reais, Z. Jelonek propôs a seguinte conjectura:

Conjectura Jacobiana Real de Jelonek: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local polinomial. Se $codim(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.

Em 2002 JELONEK mostrou que se a conjectura jacobiana real é válida em dimensão $2n$, então a conjectura no caso complexo é válida em dimensão n.

Em 1994, PINCHUCK mostrou um contra-exemplo para a conjectura jacobiana considerando o caso real $n = 2$ (apresentado na última seção).

Em 2002, JELONEK mostra que: se a aplicaão $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é polinomial com a condição de que $codim(S_F) \geq 3$ então pode-se concluir que F é bijetiva. Desse modo torna-se interessante o estudo do caso em que temos $codim(S_F) \geq 2$.

Iniciaremos o presente trabalho com uma breve apresentação de superfícies e espaços tangentes bem como folheações, tópicos que nos serão úteis para uma compreensão mais ampla do teorema principal.

Trataremos de uma abordagem mais restritiva envolvendo aplicações semi-algébricas, dessa maneira iniciamos com uma breve introdução à teoria semialgébrica citando os teoremas mais importantes que utilizaremos como, por exemplo, o Teorema de Tarski-Seidenberg e o de estratificação de conjuntos semialgébricos.

Hadamard mostra que o conjunto dos pontos não próprios tem uma forte relação com a injetividade da função através do seguinte teorema que nos será muito útil:

Teorema 1: Um difeomorfismo local é difeomorfismo global se, e somente se, a aplicação é própria.

Finalizamos o trabalho com a apresentação e demonstração do seguinte teorema:

Teorema 4.2.7: (ALEXANDRE FERNANDES and SANTOS (2014)) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local semialgébrico tal que para qualquer $(n-2)$-combinação, $\{i_1, ..., i_{n-2}\}$, de I_n, as folhas de $F_{i_1 \ldots i_{n-2}}$ são simplesmente conexas. Se $\operatorname{codim}(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.

2 PRELIMINARES

2.1 Conceitos Preliminares

Inicialmente introduziremos o conceito de superfície de classe C^k, onde $0 \leq k \leq \infty$, para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

Definição 2.1.1: Dado $U \subset \mathbb{R}^m$, um subconjunto aberto, uma *imersão* de U em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, é uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$, tal que para cada $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva.

Definição 2.1.2: Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ (considerando-se a topologia induzida) é uma *superfície de dimensão m e classe* C^k, quando para todo ponto $p \in M$ existem: um aberto $V \subset M$ $(p \in V)$ e uma aplicação $\varphi : U \to M \cap V$, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e:

$i)$ φ é um homeomorfismo;

$ii)$ φ é uma imersão de classe C^k.

A aplicação φ é chamada uma *parametrizaсão* de classe C^k. A diferença $n-m$ é chamada a codimensão de M em $\mathbb{R}^n$.

Observamos que o fato de φ ser imersão é equivalente a matriz jacobiana, de ordem $n \times m$, ter posto m.

Exemplo 2.1.3: Considerando $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão m. Tomando $T : \mathbb{R}^m \to E$ isomorfismo linear, munindo E com a toplogia induzida de $\mathbb{R}^n$ concluímos que T é um homeomorfismo e como é linear então T é de classe C^∞, logo é um difeomorfismo C^∞, dessa forma E é uma superfície de dimensão m e classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.4: A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$ é uma superfície de dimensão n e classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$, pois tomando o pólo norte $N = (0, ..., 1)$, consideremos a projeção estereográfica $\phi_N : S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\phi_N(x) = \tfrac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, ..., x_n) \text{ onde } x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$$

Vemos que ϕ_N é um difeomorfismo. De maneira análoga mostra-se que ϕ_S, a projeção com respeito a pólo sul, também é difeomorfismo e assim concluímos que S^n é uma superfície de dimensão n, e de classe C^∞, em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 2.1.5: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

$i)$ M é uma superfície de dimensão m e classe C^k em $\mathbb{R}^n$.

$ii)$ Dado $p \in M$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ $(p \in V)$ e aplicação $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, de ordem C^k, tal que $\Gamma(g) = M \cap V$.

Definição 2.1.6: Dada $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, uma aplicação diferenciável. Um ponto $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ diz-se *valor regular de* f se para todo $p \in f^{-1}(c)$, a diferencial $df(p)$ é sobrejetiva.

Corolário 2.1.7: Seja $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ aplicação de classe C^k (restrição a U de uma aplicação C^k definida em $\mathbb{R}^n$), se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular de f então $f^{-1}(c) = M$ é superfície de dimensão m e classe C^k de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: ver LIMA (2008).

Exemplo 2.1.8: A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$ pode ser descrita como a imagem inversa, $f^{-1}(1)$, da função $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = < x, x >$. Temos que f é diferenciável e dados x e v em $\mathbb{R}^{n+1}$ vale:

$$df(x) \cdot v = 2 < v, x >$$

Assim $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o único *ponto crítico* (ponto onde o gradiente se anula) de f. Sendo $f(0) = 0 \neq 1$ temos que 1 é valor regular de f. Dessa forma concluímos que $S^n = f^{-1}(1)$ é superfície de dimensão n.

Introduziremos agora a definição de *recobrimento* que nos será útil no Teorema de Hadamard na última seção.

Definição 2.1.9: Dado um espaço topológico X, um *espaço de recobrimento*, ou simplesmente um *recobrimento*, é um par $(\tilde{X}, p)$, onde $\tilde{X}$ é um espaço topológico e $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva tal que: para todo $x \in X$ existe aberto $U \subset X$, com $x \in U$, tal que $p^{-1}(U)$ se escreve como união de abertos de $\tilde{X}$ dois a dois disjuntos que são aplicados homeomorficamente sobre U, as componentes de $p^{-1}(U)$ são chamadas $folhas$ do recobrimento p.

Exemplo 2.1.10: A aplicação $h : \mathbb{R} \to S^1$ dada por: $h(t) = (cos(t), sen(t))$ é um recobrimento.

Definição 2.1.11: Uma aplicação $h : \tilde{X} \to X$ é *própria* quando a pré-imagem de um conjunto compacto por h é subconjunto compacto de .

Proposição 2.1.12: Sejam $\tilde{X}$ e X espaços topológicos e $p : \tilde{X} \to X$ homeomorfismo local sobrejetivo. Se p é uma aplicação própria, então $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento de X com um número n de folhas.

Demonstração: Dado $x \in X$, como p é homeomorfismo local temos que $p^{-1}(x)$ é discreto, observando que p é aplicação própria temos que $p^{-1}(x)$ é compacto, logo possui um número finito de elementos, digamos $p^{-1}(x) = \{x_1, ..., x_n\}$. Como p é homeo local então existem abertos $A_1, ..., A_n$, em $\tilde{X}$, tais que $x_i \in A_i$ e cada A_i é aplicado homeomorficamente em uma vizinhança de x, dessa forma existe um aberto $V \subset \cap(p(A_i))$ tal que $x \in V$ e $p^{-1}(V) \subset \cup A_i$. Tomando $U_i = p^{-1}(V) \cap A_i$, teremos que $p|_{U_i}$ é homeomorfismo sobre V, os U_i são dois a dois disjuntos e $p^{-1}(V) = \cup U_i$. Concluindo assim que p é um recobrimento com n folhas.

2.2 Espaço Tangente

Definição 2.2.1: Dada uma superfície de clase C^k, $M^m \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que v é um vetor tangente à M no ponto p, se existe uma curva $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$, onde I é intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo a origem, diferenciável na origem tal que $\lambda(I) \subset M$, $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Assim denotamos por T_pM o *espaço tangente à M no ponto p* como o conjunto de todos os vetores tangentes à M no ponto p.

Definição 2.2.2: Sejam M^m e N^n superfícies diferenciáveis de classe C^k e $f : M \to N$ de classe C^r $(r \leq k)$. Dado o ponto $p \in M$ definimos a *diferencial de f no ponto p*, como a aplicação $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ dada por:

$$df(p) \cdot [\lambda] = [f \circ \lambda]$$

Lema 2.2.3: Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k, com $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies com $f(M) \subset N$, então $df(p)(T_pM) \subset T_{f(p)N}$ para todo ponto $p \in M$.

Demonstração: Dado $v \in T_pM$ e $\lambda : I \to M$ uma curva diferenciável tal que

$\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$, assim tomando $\alpha = f \circ \lambda$ teremos $\alpha(0) = f(p)$, $\alpha(I) \subset N$ e

$$df(p) \cdot v = df(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = (f \circ \lambda)'(0) = \alpha'(0) \in T_{f(p)}N$$

Assim $df(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$.

Proposição 2.2.4: Seja M^m é uma superfície de classe C^k, então para todo para $p \in M$ temos que T_pM é um subespaço vetorial m-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como M é superfície de classe C^k, existe aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo p e um difeomorfismo, de classe C^k, $\phi : V \to \phi(V)$ tal que $\phi(M \cap V) = \phi(V) \cap \mathbb{R}^m$, logo pelo lema anterior temos:

$$d\phi(p)(T_pM) = d\phi(p)(T_p(M \cap V)) = T_{\phi(p)}(\phi(V) \cap \mathbb{R}^m) = T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

Logo $T_pM = d\phi(p)^{-1}(\mathbb{R}^m)$, portanto T_pM é subespaço vetorial m-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Folheação

Definição 2.3.1: Seja M uma n-variedade suave e Λ uma coleção de subvariedades k-dimensionais de M. Uma carta suave (U, φ) de M é dita uma *carta flat para* Λ quando: $\varphi(U)$ é um cubo em $\mathbb{R}^n$ e cada subvariedade em Λ tem intersecção com U vazia ou uma união de fatias k-dimensionais da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n$. Assim uma *folheação de dimensão k em M* é definida como uma coleção Λ de subvariedades k-dimensionais disjuntas, conexas, imersas (chamadas *folhas da folheação* Λ), cuja a união é M e que em uma vizinhança de cada ponto de M existe uma carta flat de Λ.

Exemplo 2.3.2:
i) A coleção de raios abertos da forma $\{\lambda x; \lambda > 0\}$, quando x varia em $\mathbb{R}^n - 0$, é uma folheação de $\mathbb{R}^n - 0$.
(ii) A coleção de todas as esferas centradas na origem de dimensão $(n-1)$ é uma folheação de $\mathbb{R}^n - 0$.

Definição: 2.3.3 Sejam M e N superfícies de classe C^k, uma aplicação $f : M \to N$ de classe C^r $(r \leq k)$ é uma *submersão no ponto* p, quando a diferencial $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é uma aplicação sobrejetiva.

Exemplo: 2.3.4 Seja $f : M \to \mathbb{R}$ aplicação de classe C^k, então f é uma submersão de classe C^k se, e somente se, $df(p) \neq 0$.

Teorema: 2.3.5 (Forma Local das Submersões) Seja $f : M^m \to N^n$ submersão no ponto $p \in M$, então dada uma carta local em N, (V, ψ), com $f(p) \in V$, existe um difeomorfismo $\xi : U \to \psi(V) \times W$, onde $U \subset M$ aberto contendo p com $f(U) \subset V$ e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ aberto, tais que:

$$(\psi \circ f \circ \xi^{-1})(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$$

Para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W$.

Como consequência temos que se $f : M^m \to N^n$ é uma submersão de classe C^r entre variedades diferenciáveis, então as curvas de nível: $L_c = f^{-1}(c)$, para $c \in Im(f)$, são folhas de uma folheação de classe C^r e codimensão n, em M.

Proposição 2.3.6: Se $F = (f_1, ..., f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é difeormorfismo global, então as folheações $F_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são planos.

Demonstração: Considere uma $(n-2)$-combinação ordenada $\{i_1, ..., i_{n-2}\}$ de I_n, seja $\{j, k\} = I_n - \{i_1, ..., i_{n-2}\}$. As folhas de $F_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são dadas por $F^{-1}(L)$ onde $L = \{c_{i_1}, ..., c_{j-1}, \mathbb{R}, ..., c_{k-1}, \mathbb{R}, ..., c_{i_{n-2}}\}$ e os $c_i \in \mathbb{R}$ são constantes para cada $(n-2)$-combinação tomada. Como F é um difeomorfismo podemos concluir que as folhas de $F_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são difeomorfas ao plano L.

Proposição 2.3.7: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local. Então, dado $k \in I_{n-1}$ e $\{i_1, ..., i_k\}$ uma k-combinação arbitrária de elementos de I_n, as folheações $F_{i_1 \dots i_k}$ não possuem folhas compactas.

Dem.: Supondo que $F_{i_1 \dots i_k}$ tenha uma folha compacta N. tomando $i \in I_n - \{i_1, ..., i_k\}$ e usando a compacidade de N, temos que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ atinge valor máximo em algum ponto $x_0 \in N$. Dessa forma o vetor gradiente de f_i está no espaço normal de N em x_0 e tal espaço é gerado pelos vetores gradientes de $f_{i_1}, ..., f_{i_k}$ no ponto x_0. Portanto a matriz jacobiana de F não tem posto máximo em x_0, contradição, uma vez que F é difeomorfismo local.

2.4 Transversalidade

Definição 2.4.1: Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^m$ superfícies. Um caso interessante de imersão ocorre quando se tem $F : M \to N$ é mergulho topológico (homeomorfismo sobre sua imagem $F(M) \subseteq N$). Uma *superfície mergulhada* em $M \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto $S \subseteq M$ (variedade com a topologia de subespaço) envolvido com uma estrutura suave na qual a aplicação inclusão $i : S \hookrightarrow M$ é mergulho suave. Nesse caso a diferença *dim* M - *dim* S é chamada a *codimensão* de S em M.

Sejam S e S' duas superfícies mergulhadas em $M \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que elas se *intersectam transversalmente* quando para cada ponto $p \in (S \cap S')$, os espaços tangentes T_pS e T_pS' juntos geram o espaço T_pM.

Proposição 2.4.2: Sejam M e N superfícies suaves mergulhadas em $\mathbb{R}^n$ que se intersectam transversalmente, então $M \cap N$ é uma superfície mergulhada de M cuja a codimensão é igual a soma das codimensões de M e N.

3 APLICAÇÕES SEMIALGÉBRICAS

3.1 Conjuntos Semialgébricos

Definição 3.1.1: Um *subconjunto semialgébrico* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto satisfazendo uma combinação booleana de equações e desigualdades polinomiais com coeficientes reais,. Dessa forma a classe de subconjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$ é a menor classe, SA_n, tal que:

1) Se $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ então $\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) = 0\} \in SA_n$ e $\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) > 0\} \in SA_n$.

2) Se A e $B \in SA_n$ então $A \cup B$, $A \cap B$ e $\mathbb{R}^n - A$ ainda estão em SA_n.

Exemplo 3.1.2: Subconjuntos definidos por equações polinomiais, chamados algébricos, em $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ são semialgébricos.

Proposição 3.1.3: Os subconjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}$ são exatamente uniões finitas de pontos e intervalos abertos.

Demonstraçao: É suficiente analisar a definião de conjunto semialgébrico e usar o teorema fundamental da álgebra.

Proposição 3.1.4: Todo subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ é escrito como a união finita de subconjuntos semialgébricos da forma:

$\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) = 0$ e $Q_1(x) > 0, \ ... \ , Q_l(x) > 0\}$, onde $l \in \mathbb{N}$ e $P, Q_1, ..., Q_l \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$.

Teorema 3.1.5: (Tarski-Seidenberg) Seja A um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, a projeção nas n primeiras coordenadas. Então $\pi(A)$ é subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$.

Demonstraçao: Observando que A é a união finita de conjuntos da forma: $\{x = (x_{n+11}, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \ ... \ , Q_k(x) > 0\}$ então é suficiente analisar o caso em que A tem essa forma. Usando a primeira versão do teorema de Tarski-Seidenberg encontrada no trabalho de COSTE, concluímos que existe uma combinação booleana $C(X_1, ..., X_n)$ de equações polinomiais e desigualdades nas variáveis $X_1, ..., X_n$ tal que:

$$\pi(A) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \exists x_{n+1} \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in A\}$$

é o conjunto dos pontos $(x_1, ..., x_n)$ que satisfazem a combinação $C(X_1, ..., X_n)$. Dessa forma concluímos que $\pi(A)$ é semialgébrico.

Corolário 3.1.6: Se A é um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^{n+k}$, então a imagem por uma projeção em um espaço de n coordenadas é um semialgébrico de $\mathbb{R}^n$.

A demonstração baseia-se no uso do teorema e indução em k.

Para uma definição que apresente uma maior facilidade em aplicações, usaremos fórmulas de primeira ordem para caracterizar conjuntos semialgébricos. Uma *fórmula de primeira ordem*, na linguagem de corpos ordenados com parâmetros em $\mathbb{R}$, é uma fórmula escrita com um número finito de conjunções, disjunções, negações e quantificadores (existenciais e universais), iniciando com fórmulas atômicas do tipo: $f(x_1, ..., x_n) = 0$ ou $g(x_1, ..., x_n) > 0$, onde f e g são polinômios com coeficientes reais.

A seguinte proposição mostra que, de fato, qualquer conjunto caracterizado por uma fórmula de primeira ordem é um conjunto semialgébrico.

Proposição 3.1.7: Seja $\phi(x_1, ..., x_n)$ uma fórmula de primeira ordem com parâmetros em $\mathbb{R}$, com variáveis livres $x_1, ..., x_n$. Então $\{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x)\}$ é um conjunto semialgébrico.

Demonstração: *i*) Nos casos de união, disjunção e negação de fórmulas de primeira ordem que não apresentam quantificadores ($\exists$ e $\forall$) temos claramente conjuntos semialgébricos.

ii) No caso em que $\phi(x)$ é da forma $\exists y;\ \psi(x, y)$, tomamos o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n;\ \psi(x, y)\}$, que é semialgébrico de $\mathbb{R}^{n+1}$, vemos que $A = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x)\}$ é a projeção de S. Logo, pelo teorema de Tarski-Seidenberg, temos que A é semialgébrico. Quantificadores universais são reduzidos a negações e quantificadores existenciais ($\forall y \equiv \nexists\ y \neg$).

Proposição 3.1.8: O fecho e o interior de um conjunto semialgébrico A ainda são conjuntos semialgébricos.

Demonstração: Observamos inicialmente que a fronteira de A, $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall \epsilon > 0, \exists y \in A \text{ e } y' \in A^c; |y - x|^2 < \epsilon^2 \text{ e } |y' - x|^2 < \epsilon^2\}$, como a fronteira de A é dada por uma fórmula de primeira ordem, podemos concluir que ∂A é semialgébrico. Dessa maneira temos que $\overline{A} = A \cup \partial A$ e, portanto, o fecho de A também é semialgébrico. No caso do interior vemos que $intA = A - \partial A$, sendo assim o $intA$ é semialgébrico.

3.2 Aplicações Semialgébricas

Definição 3.2.1: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos. Uma aplicação $f : A \to B$ é dita *semialgébrica* se o gráfico de f, denotado por $\Gamma(f)$, é subconjunto semialgébrico do espaço produto $\mathbb{R}^m$ x $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2.2: Sejam os conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ semialgébricos e $F : A \to B$ polinomial, então F é semialgébrica. De fato, temos que $\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}; x \in A \text{ e } y = F(x)\}$, como é dado por uma fórmula de primeira ordem, concluímos que $\Gamma(F)$ é semialgébrico.

Exemplo 3.2.3: Seja A semialgébrico e $f : A \to \mathbb{R}$ semialgébrica com $f \geq 0$ em A, então $\sqrt{f}$ é semialgébrica. Observando que $\Gamma(\sqrt{f}) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}; y^2 = f(x)\}$ concluímos que $\sqrt{f}$ é semialgébrica.

Proposição 3.2.4: $i)$ A composição de aplicações semialgébricas é semialgébrica.
$ii)$ Dado A semialgébrico, o conjunto das funções semialgébricas reais definidas em A forma um anel.

Demonstração: $i)$ Supondo $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$ e $C \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos semialgébricos com $f : A \to B$ e $g : B \to C$ semialgébricas, temos então que $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ são semialgébricos. Notando que $\Gamma(g \circ f)$ é a projeção de $(\Gamma(f) \text{ x } \mathbb{R}^n) \cap (\mathbb{R}^m \text{ x } \Gamma(g))$ em $\mathbb{R}^{m+p}$, nas primeiras m e nas últimas p coordenadas, concluímos, pelo teorema de Tarski-seidenberg, que a composição $g \circ f$ é semialgébrica.

$ii)$ A demonstração segue diretamente de $i)$ notando que $f + g$ é dado pela composição $(f, g) : A \to \mathbb{R}^2$ com a função soma $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Proposição 3.2.5: Seja $f : A \to B$ uma aplicação semialgébrica. Se $S \subset A$ é semialgébrico, então o conjunto $f(S)$ é semialgébrico. Se $T \subset B$ é semialgébrico então $f^{-1}(T)$ é semialgébrico.

Demonstração: Temos que o conjunto $C = (S \text{ x } B) \cap \Gamma(f)$ é semialgébrico de A x B e $f(S) = \pi(C)$, onde π é a projeção $\pi : A$ x $B \to A$. No caso $T \subset B$ vemos que $D = (A$ x $T) \cap \Gamma(f)$ é semialgébrico e $f^{-1}(T) = \pi(D)$ $(\pi : A$ x $B \to B)$.

Proposição 3.2.6: Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico. A função $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por: $d(x) = dist(x, A)$ é semialgébrica.

Demonstração: O gráfico da função distância de um ponto de $\mathbb{R}^n$ ao conjunto A é dado por:

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq 0 \text{ e } \forall y \in A,\, t^2 \leq |x-y|^2 \text{ e } \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in A;\, (t^2+\epsilon) > |x-y|^2\}.$$

Logo o gráfico da função é dado por uma fórmula de primeira ordem, portanto é um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Um dos principais teoremas da teoria semialgébrica é conhecido como teorema de $estratifica\tilde{c}\tilde{a}o$ que nos mostra que, em um certo sentido, um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ pode ser comparado a uma superfície. Encontramos mais detalhes no trabalho de COSTE.

Proposição 3.2.7: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico então S pode ser decomposto como união finita $S = \cup_{i=1}^{p} C_i$ onde:

$i)$ Cada C_i é difeomorfo a um hipercubo $(0,1)^{d_i}$;

$ii)$ O fecho de cada C_i, em S, é união de C_i com $C_j's$, $j \neq i$ e $d_j < d_i$.

A decomposição $S = \cup C_i$, de acordo com a proposição anterior, é chamada uma $estratifica\tilde{c}\tilde{a}o$ de S.

4 SOBRE A CONJECTURA JACOBIANA NO CASO DE APLICAÇÕES SEMIALGÉBRICAS

4.1 Conceitos e Aspectos Históricos

Definição 4.1.1: Dada $F : M \to N$ uma aplicação contínua entre espaços localmente compactos. Um ponto $y \in N$ é dito *ponto não próprio de* F se não existe vizinhança U de y, tal que $F^{-1}(\overline{U})$ seja compacto. Denotaremos por S_F o conjunto dos pontos não próprios de F. Vemos que F é própria se, e somente se, $S_F = \emptyset$.

Hadamard mostra que o conjunto dos pontos não próprios tem uma forte relação com a injetividade da função: um difeomorfismo local é difeomorfismo global se, e somente se, a aplicação é própria, ou seja, $S_F = \emptyset$.

Teorema 4.1.2 (Hadamard): Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 com determinante jacobiano diferente de zero em todo ponto do domínio. Se f é própria então f é um difeomorfismo, de classe C^1, global.

Demonstração: Pelo teorema da aplicação inversa e usando o fato de que o determinante jacobiano de f nunca se anula, concluímos que f é um difeomorfismo local de classe C^1 e como é própria temos um recobrimento sobre $\mathbb{R}^n$ com uma única folha, logo f é difeomorfimso global.

Em 1994, PINCHUCK mostrou um contra-exemplo para a conjectura jacobiana real no cano $n = 2$, dado da seguinte forma:

Considere:

$t = xy + 1;$

$h = t(xt + 1);$

$m = \frac{h+1}{x}(xt + 1)^2$ e

$u = 170mh + 91h^2 + 195mh^2 + 69h^3 + 75h^3m + \frac{75}{4}h^4$

Tomemos então $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ onde $f_1(x, y) = m + h$ e $f_2(x, y) = -t^2 - 6th(h + 1) - u$

Dessa forma temos que $detf' = t^2 + (t + f(13 - 15h))^2 + f^2$ que é estritamente positivo em $\mathbb{R}^2$ e só se anula quando $t = f = 0$, no entanto, se $t = 0$ teremos $f = \frac{1}{x}$ e ainda $f(1, 0) = f(-1, -2)$, o que nos mostra que f não é injetiva.

Introduziremos agora alguns conceitos e resultados que serão úteis para uma compreensão mais ampla do teorema principal. Seja $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $DF_p \neq 0$ em todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, então para cada $i \in I_n$ consideramos as superfícies obtidas ao se tomar $\{f_i = constante\}$, tais superfícies formam folheações diferenciáveis de codimensão 1 de $\mathbb{R}^n$, F_i, chamadas *Folheações Coordenadas.* Mais geralmente dada uma k-combinação de elementos de I_n, digamos $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$, as folheações $F_{i_1}, ..., F_{i_k}$ são duas a duas transversas, dessa forma a interseção $F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_k}$ é uma folheação diferenciável de codimensão k de $\mathbb{R}^n$, a qual denotaremos por: $F_{i_1 \ldots i_k}$.

4.2 Teoremas Principais

Iniciaremos com algumas proposições e corolários que relacionam o conjunto dos pontos não próprios com a injetividade da aplicação semialgébrica.

Lema 4.2.1: Seja a aplicação semialgébrica $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, o conjunto de pontos $x \in A$ tais que $f(x) > 0$ é semialgébrico de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Observando que o conjunto $(0, +\infty)$ é semialgébrico de $\mathbb{R}$ teremos que $f^{-1}(0, +\infty)$ é semialgébrico de $\mathbb{R}^m$. Assim o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^m;\ f(x) > 0\}$ é semialgébrico.

Proposição 4.2.2: Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua e semialgébrica, então S_F é semialgébrico.

Demonstração: Observando que $p \in S_F$ se, e somente se, $\forall \epsilon > 0$ existe $q \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|F(q) - p| < \epsilon$ e $|q| > \frac{1}{\epsilon}$. Definimos o conjunto:

$$\sum\nolimits_F = \{(p, q, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty);\ |q| > \tfrac{1}{\epsilon} \text{ e } |F(q) - p| < \epsilon\}$$

Mostraremos que $\sum_F$ é semialgébrico.

A função $(|.|^2 \circ F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é semialgébrica. Assim a função $g : \mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^n$ x

$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(p, q, \epsilon) = \epsilon^2 - |F(q) - p|^2$$

É semialgébrica, logo o conjunto $A = \{(p, q, \epsilon);\ g(p, q, \epsilon) > 0\}$ é semialgébrico. Tomando $B = \{(p, q, \epsilon);\ |q|^2 > \frac{1}{\epsilon^2}\}$ vemos que B também é semialgébrico. Dessa forma o conjunto $\sum_F = (A \cap B)$ é semialgébrico.

Teorema 4.2.3: (Hardt) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e $F : A \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua e semialgébrica. Então existe uma partição de $\mathbb{R}^m = S_1 \cup ... \cup S_d$ tal que a restrição de F a cada $F^{-1}(S_i)$, é fibrado trivial. Em particular, dados p e $q \in S_i$, $F^{-1}(p)$ é homeomorfo a $F^{-1}(q)$.

Corolário 4.2.4: Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo local semialgébrico, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^{-1}(p) \leq k$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$

Demonstração: Como F é um homeomorfismo local semialgébrico, temos que $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $F^{-1}(p)$ é discreto, portanto finito. Pelo teorema de $Hardt$ existe uma partição finita de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos semialgébricos $S_1, ..., S_d$, onde se $p, q \in S_i$ então $F^{-1}(p)$ e $F^{-1}(q)$ são homeomorfos (tem a mesma cardinalidade), assim basta tomar $k = \max_{i=1,\ldots,d}\{\mathrm{F}^{-1}(p); p \in S_i\}$.

Corolário 4.2.5: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local semialgébrico. Então F é própria em p_0 se, e somente se, a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}$, que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ a cardinalidade de $F^{-1}(p)$, é localmente constante em p_0.

Demonstração: Assumindo inicialmente que f é própria mostraremos que h é localmente constante em p_0:

Como F é difeomorfismo local temos que $F^{-1}(p_0)$ é formado por pontos isolados, tais pontos estão em um número finito uma vez que F é semialgébrica. Dessa maneira tomamos $F^{-1}(p_0) = \{x_1, ..., x_k\}$, onde existem abertos $U_i \subset \mathbb{R}^n$ dois a dois disjuntos aplicados difeomorficamente em vizinhanças de p_0, tais que $x_i \in U_i$. Assim, por contradição, se h não é localmente constante em p_0 então existe sequência y_n convergindo para p_0 de modo que a cardinalidade de cada $F^{-1}(y_n)$ é diferente da cardinalidade de $F^{-1}(p_0)$. Pelas hipóteses sobre F, o conjunto dos pontos de $\{F^{-1}(y_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto possui ponto de acumulação, digamos x, vemos que $x \notin (\cup\ U_i)$ o que implica que $x \notin F^{-1}(p_0)$, uma contradição, uma vez que a imagem da sequência que converge para x é uma subsequência de y_n e esta por sua vez converge para p_0.

Agora usando o fato de que a aplicação h é localmente constante em p_0 mostraremos que F é uma aplicação própria.

Inicialmente vemos que $F^{-1}(p_0) = \{x_1, ..., x_k\}$ e cada x_i possui vizinhança U_i difeomorfa a uma vizinhança V_i de p_0, como h é localmente constante em p_0 existe vizinhança W de p_0 onde h é constante igual a k. Tomamos $V = W \cap_{i=1}^{k} V_i$, vemos que cada ponto em V possui exatamente k pré-imagens, uma em cada U_i. Assim existe vizinhança V' do ponto p_0 tal que $F^{-1}(\overline{V'})$ é compacto, concluímos que F é própria em p_0.

Em 2002, jelonek provou o seguinte lema:

Lema 4.2.6: Seja F um subconjunto semialgébrico fechado de $\mathbb{R}^n$. Se codim$(S) \geq 2$ então o conjunto $(\mathbb{R}^n - S)$ é conexo. Se codim$(S) \geq 3$ então $(\mathbb{R}^n - S)$ é simplesmente conexo.

Além disso JELONEK mostra que se um difeomorfismo local polinomial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz codim$(S) \geq 3$, então F é difeomorfismo global.

Teorema 4.2.7: (ALEXANDRE FERNANDES and SANTOS (2014)) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local semialgébrico tal que para qualquer $(n-2)$-combinação, $\{i_1, ..., i_{n-2}\}$, de I_n as folhas de $F_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são simplesmente conexas. Se codim$(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.

Demonstração: Pelo Teorema de *Hadamard* é suficiente provar que o conjunto dos pontos não próprios, S_F, é vazio. Por contradição suponhamos que $S_F \neq \emptyset$, logo por hipótese codim$(S_F) \geq 2$, assim S_F se decompõe como união de S_i. Tomamos $p \in S_k$, onde S_k é uma componente da estratificação de dimensão maximal. Mostraremos que $F^{-1}(.)$ é localmente constante em p e usaremos o corolário [4.2.5] para concluir que o ponto p tem que ser próprio.

Como S_F é fechado, então pelo lema [4.2.6] concluímos que $(\mathbb{R}^n - S_F)$ é conexo e pelo corolário [4.2.4], existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^{-1}(q) = k$, $\forall q \in (\mathbb{R}^n - S_F)$. Supondo codim$(S_F) = r$. Como S é semialgébrico e dim$(S) = (n-r)$ teremos que um plano r-dimensional da forma:

$$L_{i_1 \dots i_r} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n ;\, x_k = p_k \ \forall k \notin \{i_1, ..., i_n\}\}$$

tal plano intersecta S em p de forma que p é isolado na intersecção.

De fato, seja $T_pS = [w_1, ..., w_{n-r}]$. Então existem vetores $\{e_{i_1}, ..., e_{i_r}\}$ tal que o conjunto $\{w_1, ..., w_{n-r}, e_{i_1}, ..., e_{i_r}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, dessa forma tomamos L o espaço gerado pelos vetores $\{e_{i_1}, ..., e_{i_r}\}$. Sem perda de generalidade, supondo

$$L = \{p_1, ..., p_{n-2}, x_{n-r+1}, ..., x_n;\ x_j \in \mathbb{R}\},$$

Temos que L intersecta S em p de maneira que p é isolado na intersecção, uma vez que $\dim(S) = (n-r)$. Como F é semialgébrico, $F^{-1}(p)$ é finita, portanto existe um círculo C no plano 2-dimensional:

$$l = \{(p_1, ..., p_{n-2}, x_{n-1}, x_n);\ x_{n-1}, x_n \in \mathbb{R}\},$$

Centrado em p tal que $C \cap S_F = \emptyset$. Como $C \cap S_F = \emptyset$, temos que $F^{-1}(C)$ é variedade compacta e semialgébrico, portanto união finita de círculos $C_1, ..., C_{k'}$. Cada C_i está contido em uma folha da folheação $F_{1,...,n-2}$ (assumindo codimensão igual a 2), mas tal folheação é dada por planos. Assim cada C_i é bordo de um disco 2-dimensional D_i. Como $F(D_i)$ cobre o disco limitado por C, temos que existe um único ponto $q_i \in D_i$ tal que $F(q_i) = p$. logo $\{q_1, ..., q_{k'}\} \subset F(p)$ e, portanto $F^{-1}(p) \geq k'$. Como F é difeomorfismo local e podemos tomar uma sequencia de pontos em $\mathbb{R}^n - S_F$ convergindo para p (devido a dimensão da S_F), vemos que a cardinalidade de $F^{-1}(p)$ deve ser exatamente k, logo a aplicação considerada tem pré-imagem localmente constante em p implicando que p é ponto próprio de F, dessa forma $S_F \equiv \emptyset$. Logo a aplicação é própria e por $Hadamard$ temos que F é uma bijeção.

5 CONCLUSÃO

Em vista do que foi discutido nesse trabalho, percebemos que fortalecendo as hipóteses sobre uma folheação do domínio e a codimensão do conjunto de pontos não-proprios da aplicação, temos um resultado análogo à Conjectura Jacobiana. Jelonek mostra em 2002 que para uma aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuja codimensão de $S_F \geq 3$ teremos F uma bijeção. Outros resultados na mesma linha devem-se a H. BASS and WRIGHT (1982) que mostram se a conjectura jacobiana é valida quando se consideram aplicações polinomiais da forma $I + H$, onde I é a identidade e H um polinômio cúbico, e $n \geq 2$ então ela é válida no caso geral, ainda no mesmo sentido temos DRUZKOWISK (1983) que mostra que é suficiente tratar certo tipo de aplicação polinomial cúbica considerando $n \geq 2$.

Como a Conjectura Jacobiana ainda é um problema em aberto, tal linha de pesquisa recebeu inúmeras contribuições nos últimos anos tornando-a ainda mais atrativa. Pretendo continuar os estudos nessa área principalmente lidando com aplicações semialgébricas, na tentativa de poder contribuir de forma significativa nesse contexto.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE FERNANDES, CARLOS MAQUERA; SANTOS, JEAN VENATO. Jacobian Conjecture and semialgebraic maps. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 157, n. doi:10.1017/S0305004114000279, p. 221–229, 2014.

BAILYNICKI-BIRULA, ANDRZEJ; ROSENLICHT, MAXWELL. Injective morphisms of real algebraic varieties. **American Mathematical Society**, v. 13, n. 2, p. 200–203, 1962.

COSTE, MICHEL. **An Introduction to Semialgebraic Geometry**. Universite de Rennees, 2002.

COSTE, MICHEL. **Real Algebraic Sets**, 2005. Disponível em: <http://https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/RASroot.pdf>. Acesso em: 01 maio. 2015.

CYNK, SLAWOMIR; RUSEK, KAMIL. Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets. **Annales Polinici Mathematici**, v. 56, n. 1, p. 29–35, 1991.

DRUZKOWISK, L. An effective approach to Kellerâs Jacobian Conjecture. **Math. Ann**, v. 264, p. 300–313, 1983.

H. BASS, E. CONNEL; WRIGHT, D. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. **Bull. Amer. Math. Society**, v. 7, p. 287–330, 1982.

JELONEK, Z. Geometry of real polynomial mappings. **Math. Zeitschrift**, v. 239, p. 321–333, 2002.

LIMA, ELON LAGES. **Variedades Diferenciáveis**. IMPA, 2008.

PINCHUCK, S. A counterexample to the strong Jacobian conjecture. **Math. Zeitschrift**, v. 217, p. 1–4, 1994.