



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

ÁLGEBRA DE HEISENBERG  
DEFORMADA VIA MODIFICAÇÃO NO  
OPERADOR DE TRANSLAÇÃO

FORTALEZA

2014

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

ÁLGEBRA DE HEISENBERG  
DEFORMADA VIA MODIFICAÇÃO NO  
OPERADOR DE TRANSLAÇÃO

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2014

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

ÁLGEBRA DE HEISENBERG  
DEFORMADA VIA MODIFICAÇÃO NO  
OPERADOR DE TRANSLAÇÃO

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física

Aprovada em 31/01/2014

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim  
Universidade Estadual do Ceará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Setorial de Física

F383a Ferreira, Francisco Ancelmo Pinheiro.  
Álgebra de Heisenberg deformada via modificação no operador  
de translação / Francisco Ancelmo Pinheiro Ferreira. – 2014.  
50 p.;il.

Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Ceará, De-  
partamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física,  
Centro de Ciências, Fortaleza, 2014.

Área de Concentração: Física

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

1. Mecânica Quântica. 2. Espaço de Hilbert. 3. Álgebra De-  
formada. 4. Transformada de Laplace. 5. Oscilador Harmônico.  
I.

CDD:530.12

*Ao meu filho  
Pedro Afonso*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe Maria Luiza Pinheiro Peixoto e aos meus avós maternos, Maria Nila Pinheiro e Manoel Afonso Peixoto, por terem me criado e me ensinado os valores éticos e morais que norteiam a minha vida.

À minha esposa, Maria Luana da Silva Pereira e ao meu filho, Pedro Afonso da Silva Pinheiro, por se fazerem presentes sempre que precisei e por suportarem minha ausência tão acentuada nesses últimos meses que culminaram com a confecção deste trabalho.

Aos meus irmãos e irmãs, Daniele, Patrick, Dândara, Assis Neto.

Aos meus primos e primas, Cláudia, Eliana, Maiara, Natália, Lucas e Carlos Henrique.

Aos colegas e amigos do curso de Física da UFC, Gadelha, Joel, Alan, Enedilton, Wanderley, Osmar, Júlio, Ivan (Brother), Rômulo, Sérgio (Undead), Estefferson, Rafaela, Reginaldo (Big Brother), Diego (grande conhecedor...), Saulo, Klara, Eduardo, David Figueiredo, Vagner, David Soares, Euclides, Roberto, Samuel, Gabriel, Rilder, Jorge Capuan, Jorge Luiz, Bezerra, Iolanda, Bruno Poti, Bruno Mesquita, Bruno Gondim, Philipe, Silvia, Andreij (Baiano), Levi, Anderson, Adevaldo, Lucas, Érico, Rubens, João Eduardo (John), César, Thiago, os quais quase sempre contribuíram bastante com discussões pertinentes ao assunto.

Aos Colegas e amigos de Jaguaretama, Dona Socorro, Fernando (Toin), Valério, Joel, Hélio, Flamarion, Fernando Lemos, Henrique, Patrícia, Roberto, Plácido (Laplace), Tibério, Janio, Fernando Almeida, André Martins, Rerison, Plícia, Jessyka, Alberto, Balgania, Regivando, Brígida, Evair, Janio, Danilo, Bia, Luiz Carlos, Ítalo, Talita, Marcão, Enilbert, Joseilson Oliveira, Aurélio Rodrigues (Talis), Washignton, Tadeu, Aurilo, Salatiel, Wagner, Cid, Mizael, Júnior (Muralha), Júnior (Big Head), Cláudio (PC) os quais aliviaram bastante a minha árdua tarefa das mais diversas formas.

Aos meus primeiros professores, Manoel Saraiva, Neto Leão, J. Júnior e Lacerson, responsáveis pelo meu interesse inicial pelas Ciências Naturais.

Ao professor da UFC, Dr. José Ramos Gonçalves, responsável pela minha formação básica em mecânica quântica e quem muito contribuiu para o meu interesse pelo assunto.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade, Dr. Geová Alencar, Dr. Makarius Tahim, Dr. Jorge Herbet e em especial o Dr. Raimundo Nogueira, meu orientador não tão somente neste trabalho, como também nos mais diversos assuntos que ocasionalmente apareceram no decurso desses quase quatro anos de parceria.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro ao trabalho. Ao Departamento de Física da UFC, pela estrutura propiciada, sem a qual este trabalho não teria sido executado.

Por fim, gostaria de agradecer aqueles que não estão sendo citados acima, mais que de

alguma forma contribuíram para a confecção deste trabalho.

# RESUMO

Apresentamos uma álgebra de Heisenberg deformada do tipo  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar f(\hat{x})$  oriunda de uma redefinição do operador de translação. Apontamos qual espaço de Hilbert deve ser usado para a representação da álgebra em questão e explicitamos a forma dos operadores de posição e momento em tal espaço, além disso, escrevemos também a equação que rege a evolução temporal dos sistemas quânticos (a equação de Schrödinger) e à utilizamos na solução de um problema tradicional da mecânica quântica usual: O oscilador harmônico imerso num campo elétrico uniforme. Vale ainda salientar que utilizamos um método pouco comum para a solução do oscilador harmônico, o método da transformada de Laplace.

**Palavras-chave:** Mecânica Quântica. Espaço de Hilbert. Álgebra Deformada. Transformada de Laplace. Oscilador Harmônico.

# ABSTRACT

We present an algebra of deformed Heisenberg-type  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar f(\hat{x})$  arising from a redefinition of the translation operator. We point out that the Hilbert space should be used for the representation of the algebra in question and show the explicit form of the position and momentum operators in this space, in addition, we also write the equations that governs the time evolution of quantum systems (the Schrödinger equation) and use it to solve a traditional problem in the usual quantum mechanics: the harmonic oscillator immersed in a uniform electric field . It should also point out that we used an unusual method to the solution of the harmonic oscillator, the method of the Laplace transform.

**Keywords:** Quantum Mechanics. Hilbert Space. Deformed Algebra. Laplace Transform. Harmonic Oscillator.

# LISTA DE FIGURAS

- 1 O potencial efetivo  $V'_{eff}(\eta)$  para  $\gamma = 0$  (linha contínua),  $\gamma = 0.1$  (linha tracejada), e  $\gamma = 0.2$  (linha pontilhada). Tomamos aqui  $\mathcal{E} = \omega = 1$  e usamos unidades atômicas (**ua**),  $\hbar = m = 1$ . . . . . p.32
- 2 Gráfico da energia contra  $\gamma$  para o estado fundamental e os nove primeiros estados excitados na ausência de campo elétrico, fica claro do gráfico que as energias caem abruptamente com o parâmetro  $\gamma$  a medida que aumentamos os níveis de energia. . . . . p.39

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 12
<b>2</b>	<b>FORMALISMO BÁSICO</b>	p. 14
2.1	O Operador de Translação e a Relação de Incerteza . . . . .	p. 14
2.2	Construindo um Espaço de Hilbert para as Funções de Onda . . . . .	p. 19
2.2.1	O Espaço $\mathcal{L}_\gamma^2$ . . . . .	p. 19
2.2.2	O Espaço $\mathcal{F}$ . . . . .	p. 21
2.3	A Representação de Posição . . . . .	p. 22
2.3.1	As Relações de Completeza e Ortonormalização . . . . .	p. 22
2.3.2	O Operador Posição . . . . .	p. 22
2.3.3	O Operador Momento . . . . .	p. 23
2.3.4	Os Autokets do Operador Momento . . . . .	p. 25
2.3.5	A Equação de Schrödinger . . . . .	p. 26
2.4	Resumo da Teoria . . . . .	p. 28
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES: A PARTÍCULA LIVRE E O OSCILADOR HARMÔNICO NUM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME</b>	p. 30
3.1	A Partícula Livre . . . . .	p. 30
3.2	O Oscilador Harmônico Sujeito a um Campo Elétrico Uniforme . . . . .	p. 31
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	p. 40
	<b>Apêndice A – Fundamentos Matemáticos da Teoria</b>	p. 42
A.1	Espaços Vetoriais . . . . .	p. 42

A.2 Espaços com Produto Interno . . . . .	p. 43
A.3 Espaços de Hilbert . . . . .	p. 45
<b>Apêndice B – Um Valor para a Constante de Normalização das Auto- funções de Momento</b>	p. 47
<b>REFERÊNCIAS</b>	p. 49

# 1 INTRODUÇÃO

Durante as duas últimas décadas o estudo das álgebras de Heisenberg deformadas (de diferentes formas) vêm atraindo bastante atenção. A história desse assunto é muito longa. O trabalho de H. S. Snyder [1] em 1947 propondo uma álgebra de Heisenberg deformada de forma a preservar a *invariância de Lorentz* e culminando com uma quantização do *espaço-tempo* foi o primeiro artigo publicado nessa área. Por um longo tempo, depois do trabalho de Snyder, apenas poucos trabalhos foram realizados nessa área. Recentemente o interesse no assunto foi renovado por conta de investigações em *teoria de cordas* e *gravitação quântica*, as quais sugerem uma incerteza mínima não-nula na posição oriunda de um princípio de incerteza generalizado. Em [2, 3] foi mostrado que pode-se obter tanto o princípio de incerteza generalizado bem como uma incerteza mínima no operador posição através da adição de um termo proporcional ao quadrado do operador momento no lado direito da relação de comutação canônica. Posteriormente, muitos outros trabalhos foram publicados nessa mesma linha de pesquisa, alguns exemplos são: O oscilador harmônico isotrópico d-dimensional com incerteza mínima na posição [4], o oscilador harmônico unidimensional com ambas as incertezas na posição e no momento [5], o problema de Coulomb unidimensional [6], o problema de Coulomb em três dimensões sob a ótica da teoria da perturbação [7] e mais recentemente (em 2012) um trabalho que fixa os tipos de função de deformação que implicam comprimento mínimo [8]. Na contramão de tais exemplos, recentemente R. N. Costa Filho *et al.* introduziram uma álgebra de Heisenberg deformada pela adição de um termo proporcional ao operador posição na relação de comutação canônica, a aparição de tal termo sendo justificada por uma modificação no operador de translação, modificação essa que permite a obtenção de uma equação do tipo Schrödinger capaz de modelar sistemas com massa dependente da posição [9].

O presente trabalho tem por objetivo principal a investigação dos aspectos teóricos mais importantes da álgebra introduzida por R. N. Costa Filho *et al.*. Como subproduto do objetivo principal temos aqui também desenvolvido uma grande parte do formalismo do artigo original, facilitando assim a compreensão do assunto em questão.

No Capítulo 2 expomos o operador de translação que origina a álgebra deformada que iremos estudar, estudamos a relação de incerteza associada a esta nova álgebra e definimos o espaço de Hilbert no qual iremos representá-la. Nesse "novo" espaço de Hilbert, encontramos como de praxe, a forma do operador momento, suas autofunções, as relações de ortonormalização e completeza para as autofunções da posição e explicitamos a forma da equação de Schrödinger. Terminamos o capítulo com um pequeno resumo contendo os principais aspectos da teoria. No Capítulo 3 empregamos o formalismo desenvolvido no Capítulo 2 para resolver dois problemas clássicos da teoria tradicional, o oscilador harmônico com campo elétrico aplicado e a partícula livre. No Capítulo 4 expomos a conclusão do trabalho.

No Apêndice A encontra-se uma breve revisão de alguns conceitos matemáticos fundamentais que aparecem no texto, facilitando assim a compreensão daqueles menos familiarizados com a teoria quântica. No Apêndice B mostramos uma escolha conveniente para a constante de normalização das autofunções de momento.

## 2 FORMALISMO BÁSICO

Neste capítulo é introduzido uma forma alternativa do operador de translação, tal forma foi proposta com o objetivo de explicar sistemas com massa dependente da posição [9] e induz algumas modificações na estrutura matemática da mecânica quântica, ou seja, no espaço de Hilbert. Tais modificações são necessárias pois de acordo com essa proposta somos levados a uma nova relação de comutação entre os operadores de posição e de momento, essa nova relação de comutação define uma estrutura algébrica sobre o espaço de Hilbert que não pode mais ser realizada da forma tradicional, pois a forma do operador de momento que verifica tal álgebra não é mais hermitiano no espaço das funções de onda quadrado integráveis padrão. Pode-se contornar esse problema mediante a apresentação de um novo espaço de Hilbert para a realização da nova relação de comutação. Neste capítulo apresentamos esse novo espaço de Hilbert e apontamos seus aspectos teóricos mais importantes.

### 2.1 O Operador de Translação e a Relação de Incerteza

Considere um estado bem localizado ao redor da posição  $x$  que pode ser mudado para outro estado bem localizado ao redor da posição  $x + dx(1 + \gamma x)$  com todas as outras propriedades físicas inalteradas, onde o parâmetro  $\gamma \geq 0$  é o inverso de um comprimento característico que determina a mistura entre o deslocamento e a posição de estado original e exigimos aqui também que  $(1 + \gamma x) > 0$ . Para  $\gamma \neq 0$ , o deslocamento depende explicitamente da posição do sistema em questão, quando  $\gamma = 0$  recuperamos a translação padrão. O processo em questão pode ser matematicamente descrito pelo operador de translação  $\mathcal{T}_\gamma(dx)$  definido por sua ação sobre um ket de posição  $|x\rangle$  como:

$$\mathcal{T}_\gamma(dx)|x\rangle = |x + dx(1 + \gamma x)\rangle. \quad (2.1)$$

O operador de translação definido na equação (2.1) é não aditivo (em conseqüência, uma translação finita não pode mais ser encarada como uma sucessão de translações infinite-

simais), como pode ser visto abaixo:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}_\gamma(dx')\mathcal{T}_\gamma(dx'')|x\rangle = \mathcal{T}_\gamma(dx')|x + dx''(1 + \gamma x)\rangle \\
& = |[x + dx''(1 + \gamma x)] + dx'\{1 + \gamma[x + dx''(1 + \gamma x)]\}\rangle \\
& = |x + (dx' + dx'' + \gamma dx'dx'')(1 + \gamma x)\rangle \\
& = \mathcal{T}_\gamma(dx' + dx'' + \gamma dx'dx'')|x\rangle \\
& \Rightarrow \mathcal{T}_\gamma(dx')\mathcal{T}_\gamma(dx'') = \mathcal{T}_\gamma(dx' + dx'' + \gamma dx'dx''). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

O inverso do operador de translação é:

$$\mathcal{T}_\gamma^{-1}(dx)|x\rangle = \left| \frac{x - dx}{1 + \gamma dx} \right\rangle. \tag{2.3}$$

É interessante notar que  $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(dx) \neq \mathcal{T}_\gamma(-dx)$ , a seguir é mostrado que o operador definido em (2.3) é realmente o operador inverso do operador de translação

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\gamma^{-1}(dx)\mathcal{T}_\gamma(dx)|x\rangle &= \mathcal{T}_\gamma^{-1}(dx)|x + dx(1 + \gamma x)\rangle \\
&= \left| \frac{(x + dx + \gamma dx x) - dx}{1 + \gamma dx} \right\rangle \\
&= \left| \frac{x + \gamma dx x}{1 + \gamma dx} \right\rangle \\
&= \left| \frac{x(1 + \gamma dx)}{1 + \gamma dx} \right\rangle = |x\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\gamma(dx)\mathcal{T}_\gamma^{-1}(dx)|x\rangle &= \mathcal{T}_\gamma(dx)\left| \frac{x - dx}{1 + \gamma dx} \right\rangle \\
&= \left| \frac{x - dx}{1 + \gamma dx} + dx\left[1 + \gamma\left(\frac{x - dx}{1 + \gamma dx}\right)\right] \right\rangle \\
&= \left| \frac{x - dx + dx + \gamma dx^2 + \gamma dx x - \gamma dx^2}{1 + \gamma dx} \right\rangle \\
&= \left| \frac{x + \gamma dx x}{1 + \gamma dx} \right\rangle = |x\rangle.
\end{aligned}$$

Assim como o operador de translação padrão, o nosso operador  $\mathcal{T}_\gamma(dx)$  também torna-se a identidade quando  $dx \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \mathcal{T}_\gamma(dx) = \hat{1}. \tag{2.4}$$

Agora, recordando que qualquer translação é gerada por um momento, passamos a partir de agora a representar o operador de translação em função de um operador de momento

generalizado  $\hat{p}_\gamma$  como abaixo:

$$\mathcal{T}_\gamma(dx) \equiv \hat{1} - \frac{i\hat{p}_\gamma dx}{\hbar}. \quad (2.5)$$

Nesse ponto já estamos em condições de deduzir a nossa relação de comutação fundamental, o procedimento em questão é descrito em detalhes abaixo.

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \mathcal{T}_\gamma(dx)]|x\rangle &= \hat{x}\mathcal{T}_\gamma(dx)|x\rangle - \mathcal{T}_\gamma(dx)\hat{x}|x\rangle \\ &= \hat{x}|x + dx(1 + \gamma x)\rangle - x\mathcal{T}_\gamma(dx)|x\rangle \\ &= [x + dx(1 + \gamma x)]|x + dx(1 + \gamma x)\rangle - x|x + dx(1 + \gamma x)\rangle \\ &= dx(1 + \gamma x)|x + dx(1 + \gamma x)\rangle \\ &\Rightarrow [\hat{x}, \mathcal{T}_\gamma(dx)]|x\rangle \simeq dx(1 + \gamma x)|x\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde o erro cometido em (2.6) é da ordem de  $dx^2$  ou superior. Agora, substituindo (2.5) em (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \mathcal{T}_\gamma(dx)]|x\rangle &= [\hat{x}, \left(\hat{1} - \frac{i\hat{p}_\gamma dx}{\hbar}\right)]|x\rangle \\ &= \frac{-idx}{\hbar}[\hat{x}, \hat{p}_\gamma]|x\rangle = dx(1 + \gamma x)|x\rangle \\ &\Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_\gamma]|x\rangle = i\hbar(1 + \gamma x)|x\rangle \\ &\Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_\gamma] = i\hbar(\hat{1} + \gamma\hat{x}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

A relação de comutação (2.7) define uma estrutura algébrica sobre o espaço de Hilbert denominada de *álgebra de Heisenberg deformada*<sup>1</sup>, em nosso caso a deformação se dá através da introdução de um termo proporcional ao operador posição. Uma observação importante aqui é que podemos recuperar a relação de comutação padrão a partir da (2.7) se fizermos  $\gamma \rightarrow 0$  e como essa relação é a base da teoria que vamos desenvolver, esperamos que tal característica se manifeste em todos os resultados encontrados. Mediante o fato de estarmos tratando agora não mais com o comutador canônico entre os operadores de posição e momento, algumas questões de suma importância na teoria quântica podem ser colocadas: (1) Como fica agora a relação de incerteza entre os operadores de posição e momento? (2) Essa nova álgebra pode ainda ser representada no espaço das funções de onda quadrado integráveis, mais ainda, existe realmente uma representação no espaço de Hilbert para tal álgebra? No presente trabalho pretendemos elucidar essas e outras questões de interesse de maneira clara e didática, comecemos com a questão da relação de incerteza.

---

<sup>1</sup>As álgebras de Heisenberg deformadas mais gerais possuem a forma  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar f(\hat{x}, \hat{p})$ .

Utilizando a forma geral da relação de incerteza para dois observáveis quaisquer A e B [10, 11]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (2.8)$$

encontramos a resposta para a primeira pergunta levantada e escrevemos a relação de incerteza como:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x} \Delta \hat{p}_\gamma &\geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}_\gamma] \rangle| = \frac{1}{2} |\langle i\hbar(1 + \gamma \hat{x}) \rangle| \\ &\Rightarrow \Delta \hat{x} \Delta \hat{p}_\gamma \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \gamma \langle \hat{x} \rangle). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A relação de incerteza (2.9) difere da sua análoga tradicional pela aparição do termo  $\gamma \langle \hat{x} \rangle$  no lado direito. O estudo das álgebras de Heisenberg deformadas mostra que o surgimento de fatores adicionais na relação de incerteza podem induzir incertezas mínimas não-nulas no operador posição e/ou no operador momento. A investigação da existência ou não de tais incertezas é de extrema importância, pois funciona como uma espécie de guia apontando para qual forma de representação devemos utilizar para que possamos realizar a nossa álgebra. Por exemplo, a aparição de uma incerteza mínima não-nula no operador de posição (comprimento mínimo) implica que não mais se pode utilizar os autokets de posição como geradores do espaço de Hilbert (nesse caso o operador posição ainda continua sendo um operador simétrico, mas perde sua auto-adjuntividade [2]) e conseqüentemente devemos utilizar a representação de momento, analogamente, uma incerteza mínima não nula no operador momento implica na não existência de um espaço de Hilbert gerado pelos autokets do momento<sup>2</sup>. No que se segue iremos investigar a existência ou não de tais incertezas mínimas não-nulas para o nosso caso.

Vamos primeiramente investigar a existência de uma incerteza mínima não-nula para o operador posição (comprimento mínimo). Olhando a desigualdade (2.9) podemos notar que a incerteza no operador posição  $\Delta \hat{x}$  pode ser feita arbitrariamente pequena, bastando que para isso tomemos a incerteza no momento  $\Delta \hat{p}_\gamma$  grande de modo a manter válida ainda a desigualdade em questão, o que nos diz que em nossa álgebra **não existe incerteza mínima não-nula para o operador posição**. Esse é um resultado de certa forma esperado, visto que na derivação do nossa relação de comutação fundamental utilizamos explicitamente os autokets de posição e a idéia de localidade dos mesmos, a existência de uma incerteza mínima não-nula para o operador posição seria na verdade uma negação da hipótese por nós assumida. Novamente, olhando para a desigualdade (2.9) percebemos que não podemos agora usar uma argumentação semelhante para o caso do operador

---

<sup>2</sup>No caso da existência de ambas as incertezas não podemos mais usar o espaço de Hilbert tradicional para representar a nossa álgebra e somos forçados a representar a álgebra em questão através do espaço de Bargmann-Fock [12]

momento, pois do lado direito da desigualdade existe um termo da mesma ordem de grandeza que  $\Delta\hat{x}$ , o termo  $\gamma\langle\hat{x}\rangle$ , e este termo pode crescer tão ou mais rápido que  $\Delta\hat{x}$ . De fato, o crescimento do termo  $\gamma\langle\hat{x}\rangle$  pode ser tal que o crescimento como um todo do lado direito da desigualdade se torne superior ao lado esquerdo para algum valor de  $\Delta\hat{x}$ , se isso acontecer não mais poderemos tomar um valor arbitrariamente pequeno para  $\Delta\hat{p}_\gamma$  (pois isso violaria a nossa desigualdade) e teremos uma velocidade mínima em nossa álgebra. Sendo assim, teremos que fazer uso de algum outro artifício para verificar a nossa questão sobre a existência de uma incerteza mínima não-nula para o operador momento. O valor mínimo que o produto das incertezas pode ter acontece quando assumimos a igualdade em (2.9), ou seja

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}_\gamma = \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{x}\rangle),$$

queremos saber para qual limite  $\Delta\hat{p}_\gamma$  tende quando  $\Delta\hat{x}$  cresce indefinidamente, então, tudo o que precisamos fazer para checar se existe ou não uma incerteza mínima não-nula para  $\Delta\hat{p}_\gamma$  é investigar o limite da expressão  $\frac{\hbar}{2\Delta\hat{x}}(1 + \gamma\langle\hat{x}\rangle)$ . Primeiramente temos que por definição:

$$(\Delta\hat{x})^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 \Rightarrow \langle\hat{x}\rangle = \pm\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - (\Delta\hat{x})^2},$$

o sinal negativo na expressão para  $\langle\hat{x}\rangle$  não é de interesse pois nesse caso ele apenas diminuiria o lado direito da desigualdade (2.9). Das considerações acima podemos concluir que o limite mínimo para a incerteza no momento é dada pela expressão

$$\min(\Delta\hat{p}_\gamma) = \lim_{\Delta\hat{x} \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{2\Delta\hat{x}}(1 + \gamma\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - (\Delta\hat{x})^2}),$$

como estamos supondo que  $\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - (\Delta\hat{x})^2}$  vai para o infinito (pois essa é a única possibilidade que pode implicar numa incerteza mínima não-nula), podemos aplicar a regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{\Delta\hat{x} \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{2\Delta\hat{x}}(1 + \gamma\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - (\Delta\hat{x})^2}) = \frac{\hbar\gamma}{4} \lim_{\Delta\hat{x} \rightarrow \infty} \frac{(2\Delta\hat{x} - 2\Delta\hat{x})}{\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - (\Delta\hat{x})^2}} = 0,$$

onde foi usado o fato de que

$$\frac{\partial\langle\hat{x}^2\rangle}{\partial\Delta\hat{x}} = 2\Delta\hat{x}.$$

Mostramos assim que a exemplo do operador posição **o operador momento também não possui uma incerteza mínima não-nula**, o que implica, entre outras coisas, que podemos usar também seus autokets como base para o espaço dos estados. Por uma questão de conveniência, manteremos a escolha tradicionalmente usada nos livros textos, ou seja, usaremos os autokets da posição como os vetores para formar a base do nosso espaço dos estados.

## 2.2 Construindo um Espaço de Hilbert para as Funções de Onda

### 2.2.1 O Espaço $\mathcal{L}_\gamma^2$

Com o intuito de conferir coerência matemática ao modelo proposto vamos construir um espaço de Hilbert de tal forma a conciliar a nossa álgebra deformada com a hermiticidade do operador momento<sup>3</sup>, hermiticidade esta que deixa de ser válida, como pode ser visto na ref. [13], se quisermos continuar trabalhando num espaço de Hilbert do tipo  $\mathcal{L}^2$  tradicionalmente usado em mecânica quântica.

**Definição 2.2.1.** O nosso espaço de Hilbert será composto por todas as funções  $\psi(x)$  que por definição possuem a integral

$$\int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \frac{dx}{1 + \gamma x}$$

convergente (à Lebesgue [14]) e finita, onde  $\gamma > 0$  é um parâmetro real e  $x$  é um número real qualquer pertencente ao intervalo  $(-\frac{1}{\gamma}, +\infty)$ . À esse novo conjunto de funções, que é ainda um espaço de funções quadrado integráveis<sup>4</sup> só que agora com uma função peso no integrando dada por  $f(x) = \frac{1}{1+\gamma x}$  denotaremos por  $\mathcal{L}_\gamma^2(-\frac{1}{\gamma}, +\infty)$  ou simplesmente  $\mathcal{L}_\gamma^2$ .

Da análise funcional, sabe-se que os espaços de Hilbert possuem um produto interno, uma norma e uma métrica bem definidos. Passemos então a tais definições para o nosso caso.

**Definição 2.2.2.** Sejam  $\psi_\alpha(x)$  e  $\psi_\beta(x)$  duas funções quaisquer pertencentes ao espaço  $\mathcal{L}_\gamma^2$ , o *produto interno (ou escalar)* em  $\mathcal{L}_\gamma^2$  é definido por:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \psi_\beta^*(x) \psi_\alpha(x) \frac{dx}{1 + \gamma x}. \quad (2.10)$$

Pode-se notar que a definição (2.10) se reduz a definição tradicional no limite  $\gamma \rightarrow 0$ .

Vamos mostrar agora que definição feita por nós verifica os axiomas de produto escalar:

(i)  $\langle \beta | \alpha \rangle$  e  $\langle \alpha | \beta \rangle$  são ambos o complexo conjugado um do outro,

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*. \quad (2.11)$$

<sup>3</sup>Segundo um dos postulados da mecânica quântica a hermiticidade de um operador é necessária para que este possa representar uma grandeza física num determinado espaço de Hilbert

<sup>4</sup>Na verdade ambos  $\mathcal{L}^2$  e  $\mathcal{L}_\gamma^2$  são casos particulares do espaço das funções quadrado integráveis  $L^2$  definido de forma que  $\int_a^b |\psi(x)|^2 \mu(x) dx < \infty$  para  $\mu(x)$  positiva definida no intervalo  $[a, b]$ .

Demonstração

$$\begin{aligned}\langle\beta|\alpha\rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta}^*(x) \psi_{\alpha}(x) = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} [\psi_{\alpha}^*(x) \psi_{\beta}(x)]^* \\ &= \left[ \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\alpha}^*(x) \psi_{\beta}(x) \right]^* = \langle\alpha|\beta\rangle^*.\end{aligned}$$

(ii) Postulado da métrica positiva definida,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad (2.12)$$

onde a igualdade só é válida se  $|\alpha\rangle$  for o ket nulo.

Demonstração

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} |\psi_{\alpha}(x)|^2$$

e como o integrando é sempre positivo, temos que a integral será sempre positiva.

(iii) O produto interno é linear em relação ao ket,

$$\langle\beta|a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2\rangle = a_1\langle\beta|\alpha_1\rangle + a_2\langle\beta|\alpha_2\rangle. \quad (2.13)$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\langle\beta|a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2\rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta}^*(x) [a_1\psi_{\alpha_1}(x) + \psi_{\alpha_2}(x)] \\ &= a_1 \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta}^*(x) \psi_{\alpha_1}(x) + a_2 \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta}^*(x) \psi_{\alpha_2}(x) \\ &= a_1\langle\beta|\alpha_1\rangle + a_2\langle\beta|\alpha_2\rangle.\end{aligned}$$

(iv) O produto interno é antilinear em relação ao bra,

$$\langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2|\alpha\rangle = b_1^*\langle\beta_1|\alpha\rangle + b_2^*\langle\beta_2|\alpha\rangle. \quad (2.14)$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2|\alpha\rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} [b_1\psi_{\beta_1}(x) + b_2\psi_{\beta_2}(x)]^* \psi_{\alpha}(x) \\ &= b_1^* \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta_1}^*(x) \psi_{\alpha}(x) + b_2^* \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta_2}^*(x) \psi_{\alpha}(x)\end{aligned}$$

$$= b_1^* \langle \beta_1 | \alpha \rangle + b_2^* \langle \beta_2 | \alpha \rangle.$$

**Definição 2.2.3.** Seja  $\psi_\alpha(x)$  uma função pertencente a  $\mathcal{L}_\gamma^2$ , a *norma* de  $\psi_\alpha(x)$  em  $(a, b)$  é definida por:

$$\| \psi_\alpha \| = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}, \quad (2.15)$$

a norma definida pela (2.15) é por vezes dita ser uma *norma induzida pelo produto interno*.

**Definição 2.2.4.** Sejam  $\psi_\alpha(x)$  e  $\psi_\beta(x)$  duas funções quaisquer de  $\mathcal{L}_\gamma^2$ , definimos a *métrica* (ou *distância*) entre  $\psi_\alpha(x)$  e  $\psi_\beta(x)$  por

$$d(\alpha, \beta) = \| \psi_\alpha - \psi_\beta \| \quad (2.16)$$

Resta-nos aqui um último critério para garantir que o espaço  $\mathcal{L}_\gamma^2$  por nós definido é um espaço de Hilbert, temos ainda que mostrar que toda sequência de Cauchy<sup>5</sup> em  $\mathcal{L}_\gamma^2$  converge para um elemento desse conjunto. A demonstração nesse caso se dá através do teorema de Riesz-Fischer o qual possui uma demonstração matemática bastante complexa e por esta razão vamos apenas enunciá-lo.

**Teorema 2.2.1** (Riesz-Fischer). Se  $\{u_k\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2$  então  $\{u_k\}$  é convergente em  $L^2$ .

## 2.2.2 O Espaço $\mathcal{F}$

Até aqui a teoria por nós desenvolvida no que diz respeito ao espaço  $\mathcal{L}_\gamma^2$  é desprovida de qualquer significado físico. Podemos atribuir um significado físico ao espaço  $\mathcal{L}_\gamma^2$  (ou mais precisamente a uma parte dele) mediante a seguinte definição.

**Definição 2.2.5.** O espaço das funções de onda  $\mathcal{F}$  é um subconjunto do  $\mathcal{L}_\gamma^2$  tal que para cada ket  $|\alpha\rangle$  do espaço de estados  $\xi_x$  da partícula, associamos uma e somente uma função<sup>6</sup>  $\psi_\alpha(x) \equiv \langle x | \alpha \rangle$  em  $\mathcal{F}$ ; ou seja, cada função  $\psi_\alpha(x) \in \mathcal{F}$  é encarada como uma projeção do ket de estado  $|\alpha\rangle$  na direção dos vetores de base  $|x\rangle$  (autokets do operador posição).

<sup>5</sup>No Apêndice A encontra-se a definição de sequência de Cauchy

<sup>6</sup>A qual representa a amplitude da densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula entre  $x$  e  $x + dx(1 + \gamma x)$

## 2.3 A Representação de Posição

### 2.3.1 As Relações de Completeza e Ortonormalização

Como estamos trabalhando agora num espaço de Hilbert definido de forma diferente da usual, esperamos que as relações de ortonormalização e completeza sejam modificadas de tal forma a se adequar ao nosso novo conjunto de interesse. Vamos examinar então como estas duas relações se apresentam.

Podemos partir da nossa definição de produto escalar para encontrar a forma do operador identidade em  $\mathcal{F}$  (relação de completeza):

$$\begin{aligned}
 \langle \beta | \alpha \rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \psi_{\beta}^*(x) \psi_{\alpha}(x) = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \langle \beta | x \rangle \langle x | \alpha \rangle \\
 &= \langle \beta | \left[ \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} |x\rangle \langle x| \right] | \alpha \rangle \\
 &\Rightarrow \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} |x\rangle \langle x| = 1.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Podemos agora facilmente encontrar a relação de ortonormalização usando a relação de completeza, para tanto vamos inserir essa relação numa função de onda arbitrária  $\langle x' | \alpha \rangle$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle x' | \alpha \rangle &= \langle x' | \hat{1} | \alpha \rangle = \langle x' | \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} |x\rangle \langle x| \alpha \rangle \\
 &\Rightarrow \langle x' | \alpha \rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx \left( \frac{\langle x' | x \rangle}{1 + \gamma x} \right) \langle x | \alpha \rangle \\
 &\Rightarrow \langle x' | x \rangle = (1 + \gamma x) \delta(x' - x).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

### 2.3.2 O Operador Posição

A forma do operador posição na base de seus autokets é bastante simples de ser obtida, senão vejamos:

$$\langle x | \hat{x} | \alpha \rangle = x \langle x | \alpha \rangle$$

logo na representação de posição, o operador de posição é representado simplesmente por seus autovalores,

$$\hat{x} = x \tag{2.19}$$

Seja  $A$  um operador definido no espaço das funções de onda. Por definição [10], o

operador  $A$  será hermitiano, se e somente se:

$$\langle A\beta|\alpha\rangle = \langle\beta|A\alpha\rangle.$$

ou de maneira equivalente

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A|\beta\rangle^*. \quad (2.20)$$

Dada a definição de operador hermitiano, vamos mostrar agora que o operador posição satisfaz a condição de hermiticidade (2.20), começamos por inserir a relação de completudeza no lado esquerdo da (2.20),

$$\begin{aligned} \langle\beta|\hat{x}|\alpha\rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \langle\beta|x\rangle \langle x|\hat{x}|\alpha\rangle \\ &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\beta}^*(x) x \psi_{\alpha}(x) \\ &= \left[ \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\alpha}^*(x) x \psi_{\beta}(x) \right]^* \\ &= \langle\alpha|\hat{x}|\beta\rangle^* \end{aligned}$$

e assim está mostrada a hermiticidade do operador posição.

### 2.3.3 O Operador Momento

Examinamos aqui qual deve ser a aparência do operador de momento no novo espaço de Hilbert das funções de onda quadrado integráveis, é lógico esperar que ele sofra alguma modificação na sua forma, pois esse operador foi definido em função de um outro o qual modificamos (o operador de translação). O ponto de partida para esta tarefa é a definição de momento como gerador de translações infinitesimais:

$$\left( \hat{1} - \frac{i\hat{p}_{\gamma}\delta x}{\hbar} \right) |\alpha\rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \mathcal{T}_{\gamma}(\delta x)|x\rangle \langle x|\alpha\rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} |x + \delta x(1+\gamma x)\rangle \langle x|\alpha\rangle$$

fazemos agora

$$\begin{aligned} x' = x + \delta x(1+\gamma x) &\Rightarrow x = \frac{x' - \delta x}{1 + \gamma \delta x} \Rightarrow dx = \frac{dx'}{1 + \gamma \delta x} \\ &\Rightarrow \left( \hat{1} - \frac{i\hat{p}_{\gamma}\delta x}{\hbar} \right) |\alpha\rangle = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx'}{1 + \gamma x'} |x'\rangle \langle \frac{x' - \delta x}{1 + \gamma \delta x} | \alpha \rangle \\ &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx'}{1 + \gamma x'} |x'\rangle \left[ \langle x' | \alpha \rangle - \delta x(1 + \gamma x') \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle \right], \end{aligned}$$

onde foi usada a expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{x' - \delta x}{1 + \gamma \delta x} \middle| \alpha \right\rangle &\simeq \langle x' | \alpha \rangle - \delta x (1 + \gamma x') \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle, \\
\Rightarrow \left( \hat{1} - \frac{i \hat{p}_\gamma \delta x}{\hbar} \right) | \alpha \rangle &= | \alpha \rangle - \delta x \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx' | x' \rangle \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle \\
\Rightarrow \hat{p}_\gamma | \alpha \rangle &= -i \hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx' | x' \rangle \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle \\
\Rightarrow \langle x | \hat{p}_\gamma | \alpha \rangle &= -i \hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx' \langle x | x' \rangle \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle \\
&= -i \hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx' (1 + \gamma x') \delta(x - x') \frac{d}{dx'} \langle x' | \alpha \rangle \\
\Rightarrow \langle x | \hat{p}_\gamma | \alpha \rangle &= -i \hbar (1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \langle x | \alpha \rangle. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Portanto, na representação de posição o operador momento tem a seguinte forma:

$$\hat{p}_\gamma = -i \hbar (1 + \gamma x) \frac{d}{dx}. \tag{2.22}$$

Tendo encontrado a forma do operador momento, vamos mostrar agora que este juntamente com o operador posição verificam a álgebra (2.7):

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}_\gamma] \psi_\alpha(x) &= x(-i \hbar)(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \psi_\alpha(x) + (i \hbar)(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} [x \psi_\alpha(x)] \\
&= x(-i \hbar)(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \psi_\alpha(x) + i \hbar (1 + \gamma x) \psi_\alpha(x) + x(i \hbar)(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \psi_\alpha(x) \\
&= i \hbar (1 + \gamma x) \psi_\alpha(x) \\
\Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_\gamma] &= i \hbar (1 + \gamma x),
\end{aligned}$$

mostramos assim que a álgebra definida por (2.7) pode ser realizada no nosso espaço de funções  $\mathcal{F}$ .

Vamos mostrar agora que o operador de momento generalizado  $\hat{p}_\gamma$  é hermitiano. começamos por inserir a relação de completeza no lado esquerdo da (2.20),

$$\begin{aligned}
\langle \beta | \hat{p}_\gamma | \alpha \rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \langle \beta | x \rangle \langle x | \hat{p}_\gamma | \alpha \rangle \\
&= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \psi_\beta^*(x) (-i \hbar)(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \psi_\alpha(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} dx \psi_{\beta}^*(x) \frac{d}{dx} \psi_{\alpha}(x) = -i\hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \psi_{\beta}^*(x) d[\psi_{\alpha}(x)] \\
&= -i\hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} d[\psi_{\alpha}(x)\psi_{\beta}^*(x)] - \psi_{\alpha}(x)d[\psi_{\beta}^*(x)] = i\hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \psi_{\alpha}(x)d[\psi_{\beta}^*(x)]
\end{aligned}$$

(onde foi usado o fato de que as funções de onda se anulam nos extremos de integração)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \beta | \hat{p}_{\gamma} | \alpha \rangle &= \left\{ -i\hbar \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \psi_{\alpha}^*(x) d[\psi_{\beta}(x)] \right\}^* \\
&= \left[ \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\gamma x} \psi_{\alpha}^*(x) (-i\hbar)(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \psi_{\beta}(x) \right]^* \\
&= \langle \alpha | \hat{p}_{\gamma} | \beta \rangle^*
\end{aligned}$$

como queríamos. É importante salientar aqui que a hermiticidade do operador  $\hat{p}_{\gamma}$  garante que o operador de translação é unitário, como pode ser visto abaixo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\gamma}^{\dagger}(dx)\mathcal{T}_{\gamma}(dx) &= \left( \hat{1} + \frac{i\hat{p}_{\gamma}^{\dagger}dx}{\hbar} \right) \left( \hat{1} - \frac{i\hat{p}_{\gamma}dx}{\hbar} \right) \\
&= \left( \hat{1} - \frac{i\hat{p}_{\gamma}dx}{\hbar} + \frac{i\hat{p}_{\gamma}^{\dagger}dx}{\hbar} + \frac{\hat{p}_{\gamma}\hat{p}_{\gamma}^{\dagger}(dx)^2}{\hbar^2} \right) \cong \hat{1}
\end{aligned}$$

onde o erro cometido na aproximação é de segunda ordem em  $dx$ . Sendo  $\mathcal{T}_{\gamma}$  um operador unitário, este pode atuar nos kets sem alterar a sua norma, ou seja, se o sistema esta num estado representado por um ket arbitrário  $|\alpha\rangle$  que é unitário, depois que o operador de translação atua, o sistema vai se encontrar num estado  $|\beta\rangle = \mathcal{T}_{\gamma}|\alpha\rangle$  de tal forma que o novo ket  $|\beta\rangle$  ainda terá a norma unitária. Em suma, a norma é invariante sob translações. Em símbolos:

$$\langle \beta | \beta \rangle = \langle \alpha | \mathcal{T}_{\gamma}^{\dagger} \mathcal{T}_{\gamma} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{1} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle.$$

### 2.3.4 Os Autokets do Operador Momento

Vamos escrever agora a forma das autofunções do operador momento na base de posição, começamos pela relação (2.21); tomando  $|\alpha\rangle$  como o autovetor de momento  $|\hat{p}_{\gamma}\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x | \hat{p}_{\gamma} | p_{\gamma} \rangle &= -i\hbar(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \langle x | p_{\gamma} \rangle \quad (2.23) \\
\Rightarrow p_{\gamma} \langle x | p_{\gamma} \rangle &= -i\hbar(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \langle x | p_{\gamma} \rangle \\
\Rightarrow \frac{ip_{\gamma}}{\hbar} \frac{dx}{1+\gamma x} &= \frac{d\langle x | p_{\gamma} \rangle}{\langle x | p_{\gamma} \rangle}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{ip_\gamma}{\hbar} \int \frac{dx}{1 + \gamma x} = \int \frac{d\langle x|p_\gamma\rangle}{\langle x|p_\gamma\rangle} \\
&\Rightarrow \frac{ip_\gamma}{\hbar\gamma} \ln(1 + \gamma x) + C = \ln \langle x|p_\gamma\rangle \\
&\Rightarrow \langle x|p_\gamma\rangle = N \exp \left[ \frac{ip_\gamma}{\hbar\gamma} \ln(1 + \gamma x) \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde  $N$  é uma constante de normalização.

### 2.3.5 A Equação de Schrödinger

Nesse tópico analisamos como fica a forma de um dos mais importantes postulados da mecânica quântica, a equação de Schrödinger. Sabemos que a deformação imposta ao comutador canônico (oriunda de uma redefinição do operador de translação) implica numa deformação equivalente no operador momento, tal deformação obviamente vai se refletir no operador hamiltoniano do sistema e por conseguinte também na equação de Schrödinger.

Começemos pela consideração de que no presente trabalho apenas estaremos interessados em hamiltonianas independentes do tempo, ou seja, sistemas para os quais a energia permanece inalterada com o passar do tempo. Sob a ótica de tais sistemas, o operador hamiltoniano assume a forma:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\gamma^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{2.25}$$

A equação de Schrödinger dependente do tempo é [11] :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle = \hat{H} |\alpha, t\rangle, \tag{2.26}$$

na representação de posição escrevemos a (2.26) como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x|\alpha, t\rangle = \langle x|\hat{H}|\alpha, t\rangle \tag{2.27}$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha(x, t) = H \phi_\alpha(x, t),$$

donde podemos usar a separação de variáveis:

$$\phi_\alpha(x, t) = \psi_\alpha(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \tag{2.28}$$

para obtermos

$$H\psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x). \tag{2.29}$$

Agora explicitando  $H$  na representação de posição obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \left( -i\hbar(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \right) \right] + V(x) \right\} \psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x) \\ \Rightarrow & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ (1+\gamma x)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \right] + V(x) \right\} \psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x). \end{aligned} \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a nossa equação de Schrödinger resultante, aparentemente esta equação é mais complicada que sua análoga tradicional pois surgiram novos termos dentre eles uma nova diferencial em primeira ordem na função dependente. É interessante observar que, se mais uma vez fizermos o parâmetro  $\gamma$  tender a zero, recuperaremos a forma original da equação de Schrödinger. A equação (2.30) pode ser reduzida a forma tradicional da equação de Schrödinger através da seguinte transformação de ponto:

$$\begin{aligned} \eta &= \pm \frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\eta} &= \pm(1+\gamma x) \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (2.31)$$

e substituindo na relação (2.30) obtemos:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + V_{eff}(\eta) \right] \psi_\alpha(\eta) = E\psi_\alpha(\eta). \quad (2.32)$$

Como podemos ver, a equação (2.32) tem realmente a forma da equação de Schrödinger tradicional, a diferença é que agora teremos que resolver um novo potencial, a saber, o potencial efetivo  $V_{eff}(\eta)$  na nova variável  $\eta$ . O fato de podermos recuperar a forma canônica da equação de Schrödinger através de uma transformação de ponto na representação de posição permite agora um mapeamento que pode ser utilizado para resolver alguns problemas sem precisarmos resolver a equação para o potencial efetivo. A ref. [15] é um exemplo de tal mapeamento, nela o problema do oscilador harmônico é mapeado no potencial de Morse [16]. É óbvio que tal mapeamento não será sempre vantajoso, por exemplo, sabemos que a equação de Schrödinger somente admite soluções analíticas para certas classes de potenciais, e pode obviamente acontecer que o potencial efetivo resultante do mapeamento da equação deformada na equação tradicional seja um potencial que não pertença a classe de potenciais solúveis analiticamente, nesse caso teremos que encontrar alguma forma de resolver a equação deformada.

A equação (2.30) pode ainda ser colocada sob a forma [9]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi_\alpha(x)}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2m_e} \right) \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} + V(x)\psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x) \quad (2.33)$$

onde  $m_e = \frac{m}{(1+\gamma x)^2}$  é a massa efetiva da partícula. Equações como essa aparecem em problemas com massa dependente da posição como por exemplo na ref. [17] onde uma equação semelhante a (2.33) é usada para modelar o problema de uma partícula numa heteroestrutura semicondutora.

## 2.4 Resumo da Teoria

Esta seção tem por objetivo a organização das idéias expostas na teoria, visto que, no presente texto, os conceitos foram sendo construídos da forma como se apresentaram na realidade, ou seja, o problema da álgebra deformada surgiu a partir da reformulação de um conceito, ao contrário do que acontece de costume na maioria dos trabalhos que tratam de álgebras deformadas, onde define-se primeiramente a álgebra para em seguida estudar as modificações impostas por tal definição nos conceitos previamente conhecidos.

Construímos um espaço de Hilbert que preserva a hermiticidade padrão dos operadores de momento e posição mediante a redefinição do nosso espaço de funções quadrado integráveis, encontramos assim um espaço de funções  $\mathcal{F}$  isomorfo<sup>7</sup> ao espaço dos estados  $\xi_x$  gerado pelos autokets de posição  $|x\rangle$  no qual os operadores assumem as formas:

$$\hat{x} = x \quad (2.34)$$

e

$$\hat{p}_\gamma = -i\hbar(1 + \gamma x)\frac{d}{dx}. \quad (2.35)$$

No espaço  $\mathcal{F}$  encontramos a relação de ortonormalização para os autokets de posição como sendo

$$\langle x|x'\rangle = (1 + \gamma x')\delta(x - x'). \quad (2.36)$$

Encontramos também a forma das autofunções do momento como sendo

$$\langle x|p_\gamma\rangle = N \exp\left[\frac{ip_\gamma}{\hbar\gamma} \ln(1 + \gamma x)\right]. \quad (2.37)$$

A relação de completeza assume em  $\mathcal{F}$  a forma

$$\int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} |x\rangle\langle x| = 1. \quad (2.38)$$

---

<sup>7</sup>Duas estruturas matemáticas são ditas isomorfas se há um mapeamento um-para-um entre os elementos de tais estruturas.

A equação de Schrödinger escrita no nosso "novo" espaço de funções é:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ (1 + \gamma x)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \right] + V(x) \right\} \psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x). \quad (2.39)$$

Mostramos que esta pode ser simplificada por meio da transformação:

$$\eta = \pm \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma} \quad (2.40)$$

conduzindo a uma equação quem possui a forma tradicional mas agora sujeita a um potencial efetivo em geral diferente do originalmente proposto:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + V_{eff}(\eta) \right] \psi_\alpha(\eta) = E\psi_\alpha(\eta). \quad (2.41)$$

De posse dos resultados acima, vamos agora aplicá-los na solução de dois problemas tradicionais da mecânica quântica padrão, o caso da partícula livre e o problema de um oscilador harmônico imerso num campo elétrico uniforme.

### 3 APLICAÇÕES: A PARTÍCULA LIVRE E O OSCILADOR HARMÔNICO NUM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME

Esse é um capítulo devotado a aplicação do formalismo desenvolvido anteriormente, os problemas resolvidos aqui são o problema da partícula livre, que foi escolhido devido a sua simplicidade, e o problema do oscilador harmônico num campo elétrico uniforme, este último é um pouco mais complicado e foi escolhido dentre outras coisas porque nos permite aplicar uma técnica de solução da equação de Schrödinger pouco comum, a técnica da transformada de Laplace.

#### 3.1 A Partícula Livre

O hamiltoniano para a partícula livre é:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\gamma^2}{2m}. \quad (3.1)$$

Neste caso em particular temos que o operador hamiltoniano  $\hat{H}$  comuta com o operador momento  $\hat{p}_\gamma$ , pois o primeiro é uma função do segundo. Da álgebra dos operadores lineares [10, 11], sabemos que se dois operadores comutam então eles devem possuir autovetores iguais a menos de uma constante multiplicativa, dessa forma podemos afirmar que as autofunções do momento são as mesmas autofunções para o problema da partícula livre, e como:

$$\hat{H}|p_\gamma\rangle = E|p_\gamma\rangle \Rightarrow E = \frac{p_\gamma^2}{2m}. \quad (3.2)$$

É costume definir aqui o chamado número de onda como sendo:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_\gamma}{\hbar}. \quad (3.3)$$

Dessa forma expressamos as autoenergias da partícula livre por:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (3.4)$$

nota-se que aqui as autoenergias não dependem de maneira explícita do parâmetro  $\gamma$ . As autofunções não normalizadas são dadas pela (2.23)

$$\psi_k(x) = N \exp \left[ \frac{ik}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) \right].$$

Diferentemente do caso tradicional, a solução não é mais uma "onda plana", no entanto a solução tradicional pode ainda ser obtida da (3.5) no limite  $\gamma \rightarrow 0$ .

A solução geral para a partícula livre deve englobar todos os possíveis valores do número de onda  $k$  bem como a dependência temporal, usando as (2.24), (2.28) e (3.4), a solução na forma final fica:

$$\phi_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(k) \exp \left[ \frac{ik}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) - \frac{i\hbar k^2 t}{2m} \right] dk \quad (3.5)$$

## 3.2 O Oscilador Harmônico Sujeito a um Campo Elétrico Uniforme

O hamiltoniano para uma partícula de carga  $q$  movendo-se sob a ação de uma força restauradora e sujeita a um campo elétrico uniforme externo  $\mathcal{E}$  é:

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}_\gamma^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x}, \quad (3.6)$$

na representação de posição a (3.6) assume a forma

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ (1 + \gamma x)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \right] + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x, \quad (3.7)$$

empregando agora a mudança de variável  $\eta = -\frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma}$  obtemos:

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} e^{-2\gamma\eta} - \left( \frac{m\omega^2}{\gamma^2} + \frac{q\mathcal{E}}{\gamma} \right) e^{-\gamma\eta} + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} + \frac{q\mathcal{E}}{\gamma}. \quad (3.8)$$

O hamiltoniano (3.8) expresso agora em termos da nova variável  $\eta$  possui o potencial efetivo

$$V'_{eff}(\eta) = \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} e^{-2\gamma\eta} - \left( \frac{m\omega^2}{\gamma^2} + \frac{q\mathcal{E}}{\gamma} \right) e^{-\gamma\eta} + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} + \frac{q\mathcal{E}}{\gamma},$$

na figura 1 estão plotados 3 gráficos para  $V'_{eff}(\eta)$ , podemos ver a partir da observação

desses plots que o número de estados ligados para o sistema diminui com o aumento de  $\gamma$ , ou seja, quanto maior for o valor de  $\gamma$  menor será o número de estados discretos do sistema. Veremos depois que esse potencial pode ser usado para modelar a interação entre átomos de uma molécula diatômica, assumindo esse ponto de vista como válido, podemos dizer ainda baseados na figura 1, que a energia de dissociação<sup>1</sup> diminui com o aumento de  $\gamma$ , o que é equivalente a aparição de uma força dissipativa no sistema.

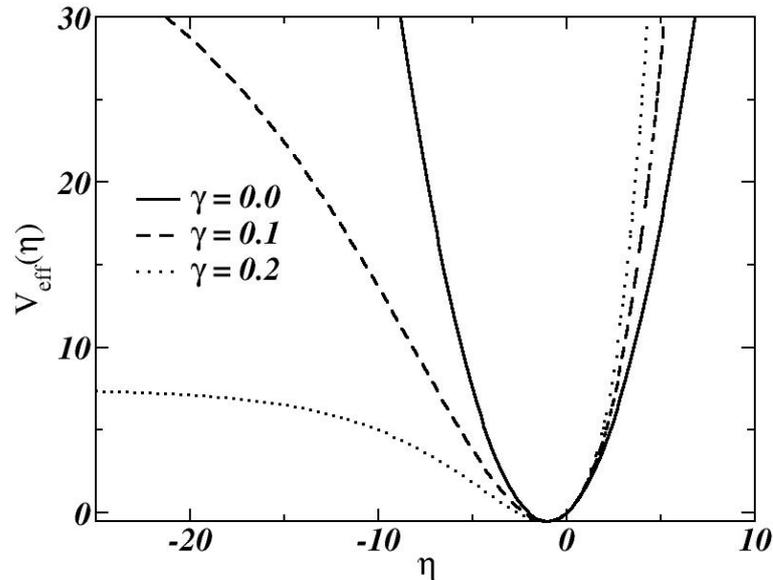


Figura 1: O potencial efetivo  $V'_{eff}(\eta)$  para  $\gamma = 0$  (linha contínua),  $\gamma = 0.1$  (linha tracejada), e  $\gamma = 0.2$  (linha pontilhada). Tomamos aqui  $\mathcal{E} = \omega = 1$  e usamos unidades atômicas (**ua**),  $\hbar = m = 1$ .

por uma questão de comodidade vamos trabalhar apenas com o hamiltoniano sem a parte constante do potencial, visto que hamiltonianos que diferem apenas de uma constante possuem as mesmas autofunções diferindo apenas por um deslocamento nos espectros, vamos deixar pra somar a parte de energia retirada aqui no final. Dessa forma o novo hamiltoniano de interesse será:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} e^{-2\gamma\eta} - \left( \frac{m\omega^2}{\gamma^2} + \frac{q\mathcal{E}}{\gamma} \right) e^{-\gamma\eta} \quad (3.9)$$

Agora tomamos

$$D = \frac{m\omega^2}{2\gamma^2}$$

e

$$c = \left( 1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2} \right)$$

<sup>1</sup>Chamamos de energia de dissociação a energia necessária para romper uma ligação química.

dessa forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + De^{-2\gamma\eta} - 2Dce^{-\gamma\eta}. \quad (3.10)$$

O potencial

$$V_{eff}(\eta) = De^{-2\gamma\eta} - 2Dce^{-\gamma\eta} \quad (3.11)$$

é conhecido como Potencial de Morse Generalizado [18]. Passemos agora a solução da equação (2.39) para esse potencial, a solução pode ser obtida através de vários métodos, dentre eles o que vamos utilizar aqui é o método da transformada de Laplace que é usado em [19] para resolver o potencial de Morse. Substituindo a (3.11) na (2.39) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} + De^{-2\gamma\eta} - 2Dce^{-\gamma\eta} \right) \psi_\alpha(\eta) = \psi_\alpha(\eta) \\ \Rightarrow & \left( \frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{2mD}{\hbar^2} e^{-2\gamma\eta} + \frac{4mDc}{\hbar^2} e^{-\gamma\eta} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi_\alpha(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

agora fazemos a seguinte mudança de variável

$$y = ke^{-\gamma\eta}, \quad k = \left( \frac{2\sqrt{2mD}}{\hbar\gamma} \right)$$

e

$$\beta^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2\gamma^2}$$

e assim resulta:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} = -\gamma ke^{-\gamma\eta} \frac{d}{dy} = -\gamma y \frac{d}{dy}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\eta^2} &= \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d}{d\eta} \right) = -\gamma y \frac{d}{dy} \left( -\gamma y \frac{d}{dy} \right) = \gamma^2 y \left( \frac{d}{dy} + y \frac{d^2}{dy^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{d\eta^2} = \gamma^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + \gamma^2 y \frac{d}{dy}. \end{aligned}$$

Os demais termos da equação ficam

$$\begin{aligned} -\frac{2mD}{\hbar^2} e^{-2\gamma\eta} &= -\frac{2mD}{\hbar^2} \frac{y^2}{k^2} = -\frac{\gamma^2}{4} y^2 \\ \frac{4mDc}{\hbar^2} e^{-\gamma\eta} &= \frac{4mDc}{\hbar^2} \frac{y}{k} = \frac{\gamma^2}{2} kcy \\ \frac{2mE}{\hbar^2} &= -\gamma^2 \beta^2 \end{aligned}$$

substituindo esses valores na (3.12) obtemos:

$$\left( y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} - y^2 + \frac{kc}{2} y - \beta^2 \right) \psi_\alpha(y) = 0$$

por comodidade, faça  $d = kc$  para obter

$$\left( y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} - y^2 + \frac{d}{2}y - \beta^2 \right) \psi_\alpha(y) = 0. \quad (3.13)$$

Agora vamos trocar a função de onda fazendo a mudança:

$$\psi_\alpha(y) = y^A f(y) \quad (3.14)$$

a (3.14) implica que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \psi_\alpha(y) &= Ay^{A-1} f(y) + y^A \frac{df(y)}{dy} \\ \Rightarrow y \frac{d}{dy} \psi_\alpha(y) &= Ay^A f(y) + y^{A+1} \frac{df(y)}{dy} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \psi_\alpha(y) &= \frac{d}{dy} \left\{ \frac{d}{dy} [y^A f(y)] \right\} = \frac{d}{dy} \left[ Ay^{A-1} f(y) + y^A \frac{d}{dy} f(y) \right] \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dy^2} \psi_\alpha(y) &= A(A-1)y^{A-2} f(y) + Ay^{A-1} \frac{df(y)}{dy} + Ay^{A-1} \frac{df(y)}{dy} + y^A \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \\ \Rightarrow y^2 \frac{d^2}{dy^2} \psi_\alpha(y) &= A(A-1)y^A f(y) + 2Ay^{A+1} \frac{df(y)}{dy} + y^{A+2} \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

substituindo as (3.15) e (3.16) na (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \left[ y^{A+2} \frac{d^2}{dy^2} + (2A+1)y^{A+1} \frac{d}{dy} + A^2 y^A - \frac{y^{A+2}}{4} + \frac{d}{2} y^{A+1} - \beta^2 \right] f(y) &= 0 \\ \Rightarrow \left[ y^2 \frac{d^2}{dy^2} + (2A+1)y \frac{d}{dy} - \frac{y^2}{4} + \frac{d}{2} y + A^2 - \beta^2 \right] f(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

agora escolhamos  $A = -\beta$  (a opção  $A = \beta$  não é aceitável porque  $\psi_\alpha(y)$  tem que ser finita quando  $y \rightarrow \infty$ ), dessa forma a equação (3.17) torna-se:

$$\begin{aligned} \left[ y^2 \frac{d^2}{dy^2} (-2\beta+1)y \frac{d}{dy} - \frac{y^2}{4} + \frac{d}{2} y \right] f(y) &= 0 \\ \Rightarrow \left[ y \frac{d^2}{dy^2} - (2\beta-1) \frac{d}{dy} - \frac{y}{4} + \frac{d}{2} \right] f(y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Uma transformada de Laplace, é uma função  $F(p)$ , tal que [20] :

$$\mathcal{L}\{f(y)\} = \int_0^\infty f(y) e^{-py} dy = F(p), \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (3.19)$$

A transformada de Laplace é um operador linear, dessa forma, aplicando a definição acima na equação (3.18) temos:

$$\mathcal{L}\left\{ y \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right\} - (2\beta-1) \mathcal{L}\left\{ \frac{df(y)}{dy} \right\} - \frac{1}{4} \mathcal{L}\{yf(y)\} + \frac{d}{2} \mathcal{L}\{f(y)\} = 0 \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y \frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right\} &= \int_0^\infty y \frac{d^2 f(y)}{dy^2} e^{-py} dy = -\frac{d}{dp} \left[ \int_0^\infty \frac{d^2 f(y)}{dy^2} e^{-py} dy \right] \\
&= -\frac{d}{dp} \left( \mathcal{L}\left\{ \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right\} \right) = -\frac{d}{dp} [p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] \\
&= -\left[ 2pF(p) + p^2 \frac{dF(p)}{dp} - f(0) \right] = -2pF(p) - p^2 \frac{dF(p)}{dp}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{df(y)}{dy} \right\} = pF(p) - f(0) = pF(p) \tag{3.22}$$

$$\mathcal{L}\{yf(y)\} = \int_0^\infty yf(y)e^{-py} dy = -\frac{d}{dp} \left[ \int_0^\infty f(y)e^{-py} dy \right] = -\frac{dF(p)}{dp} \tag{3.23}$$

o termo  $f(0)$  foi considerado zero aqui pois quando  $y \rightarrow 0, \eta \rightarrow +\infty \Rightarrow \psi_\alpha \rightarrow 0$  e  $f \rightarrow 0$ , substituindo (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.20) obtemos,

$$\begin{aligned}
-2pF(p) - p^2 \frac{dF(p)}{dp} - (2\beta - 1)pF(p) + \frac{1}{4} \frac{dF(p)}{dp} + \frac{d}{2} F(p) &= 0 \\
\Rightarrow \left[ -(2\beta + 1)p + \frac{d}{2} \right] F(p) - \left( p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{dF(p)}{dp} &= 0
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\left( p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{dF(p)}{dp} + \left[ (2\beta + 1)p - \frac{d}{2} \right] F(p) &= 0 \\
\Rightarrow \ln[F(p)] = - \int \frac{[(2\beta + 1)p - \frac{d}{2}]}{(p^2 - \frac{1}{4})} dp
\end{aligned} \tag{3.24}$$

agora,

$$\int \frac{[(2\beta + 1)p - \frac{d}{2}]}{(p^2 - \frac{1}{4})} dp = (2\beta + 1)I_1 - \frac{d}{2}I_2$$

onde,

$$I_1 = \int \frac{p dp}{(p^2 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{2} \int \frac{d(p^2 - \frac{1}{4})}{(p^2 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{2} \ln(p^2 - \frac{1}{4})$$

e

$$I_2 = \int \frac{dp}{(p^2 - \frac{1}{4})} = \int \frac{dp}{p - \frac{1}{2}} - \int \frac{dp}{p + \frac{1}{2}} = \ln(p - \frac{1}{2}) - \ln(p + \frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right).$$

Pelos resultados acima temos,

$$\ln[F(p)] = -\frac{(2\beta + 1)}{2} \ln(p^2 - \frac{1}{4}) + \frac{d}{2} \ln\left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right) + C$$

ou

$$\ln[F(p)] = \ln\left(p + \frac{1}{2}\right)^{-(2\beta+1)} \left(1 - \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{[d-(2\beta+1)]}{2}} + C$$

$$\Rightarrow F(p) = N'' \left( p + \frac{1}{2} \right)^{-(2\beta+1)} \left( 1 - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{[d-(2\beta+1)]}{2}} \quad (3.25)$$

a parte  $\left( 1 - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{[d-(2\beta+1)]}{2}}$  é uma função plurívoca e visto que as funções de onda devem ser unívocas devemos tomar:

$$d - (2\beta + 1) = 2n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{d-1}{2}). \quad (3.26)$$

A expressão para o binômio de Newton é [21]

$$(x + a)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j a^{n-j} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} x^j a^{n-j}$$

tomando  $x = -\frac{1}{p + \frac{1}{2}}$  e  $a = 1$  na expressão acima, obtemos

$$\left( 1 - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( -\frac{1}{p + \frac{1}{2}} \right)^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \left( p + \frac{1}{2} \right)^{-j}$$

substituindo a expressão acima na equação (3.25) resulta:

$$F(p) = N' \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n! (p + \frac{1}{2})^{-(2\beta+j+1)}}{(n-j)!j!} \quad (3.27)$$

aplicando a transformada inversa de Laplace na (3.27) encontramos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(y) = N' \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{(n-j)!j!} \mathcal{L}^{-1}\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)^{-(2\beta+j+1)}\right].$$

Na ref. [21] encontramos o resultado

$$\mathcal{L}^{-1}\{n!(p-a)^{-(n+1)}\} = y^n e^{ay}$$

ou de forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(p-a)^{-(n+1)}\} = \frac{y^n e^{ay}}{\Gamma(n+1)}.$$

Tomando  $n = 2\beta + j$  e  $a = -\frac{1}{2}$  na expressão acima, implica

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{-(2\beta+j+1)}\right\} = \frac{y^{2\beta+j} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma(2\beta + j + 1)}$$

$$\Rightarrow f(y) = N' y^{2\beta} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{(n-j)!j!} \frac{y^j}{\Gamma(2\beta + j + 1)}$$

ou

$$f(y) = Ny^{2\beta} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n! \Gamma(2\beta + 1)}{(n-j)! j! \Gamma(2\beta + j + 1)} y^j. \quad (3.28)$$

Uma função hipergeométrica confluyente é uma função tal que [21]:

$$F(-n, \alpha, y) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n! \Gamma(\alpha)}{(n-j)! j! \Gamma(\alpha + j)} y^j. \quad (3.29)$$

Comparando (3.28) e (3.29), temos

$$f(y) = Ny^{2\beta} e^{-\frac{y}{2}} F(-n, 2\beta + 1, y). \quad (3.30)$$

Agora, vamos usar a seguinte relação entre os polinômios generalizados de Laguerre e as funções hipergeométricas confluentes [21]:

$$L_n^\alpha(y) = \binom{n + \alpha}{n} F(-n, \alpha + 1, y)$$

ou

$$L_n^\alpha(y) = \frac{(n + \alpha)!}{\alpha! n!} F(-n, \alpha + 1, y)$$

ou ainda

$$F(-n, \alpha + 1, y) = \frac{n! \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^\alpha(y).$$

agora trocamos  $\alpha \rightarrow 2\beta$  na expressão acima e substituímos na expressão (3.30) e obtemos,

$$f(y) = \frac{Nn! \Gamma(2\beta + 1)}{\Gamma(n + 2\beta + 1)} y^{2\beta} e^{-\frac{y}{2}} L_n^{2\beta}(y). \quad (3.31)$$

substituindo a expressão (3.31) na definição (3.14), encontramos

$$\psi_\alpha(y) = N_n y^\beta e^{-\frac{y}{2}} L_n^{2\beta}(y)$$

ou

$$\psi_\alpha(y) = N_n y^{\frac{d}{2} - (n + \frac{1}{2})} e^{-\frac{y}{2}} L_n^{d-2n-1}(y) \quad (3.32)$$

inserindo a relação (3.32) na condição de normalização,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma y} \psi_\alpha^*(y) \psi_\alpha(y) dy = 1$$

encontramos

$$N_n = \left[ \frac{\gamma(d - 2n - 1) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(d - n)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Agora retornemos a relação (3.26)

$$\begin{aligned}
d - (2\beta + 1) &= 2n \Rightarrow \beta = \frac{d}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \beta^2 &= \left[\frac{d}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow -\frac{2mE_n}{\hbar^2\gamma^2} = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{d}{2}\right]^2 \\
\Rightarrow E_n &= -\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)d + \frac{d^2}{4}\right] \\
\Rightarrow E_n &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\hbar\gamma^2 d}{2m\omega} - \frac{\hbar\gamma^2}{2m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{\hbar^2\gamma^2 d^2}{8m}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Agora vamos voltar as nossas variáveis originais,

$$\begin{aligned}
d = kc &= \frac{2\sqrt{2mD}}{\hbar\gamma} \left(1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2}\right) = \frac{2m\omega}{\hbar\gamma^2} \left(1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\hbar\gamma^2 d}{2m\omega} = \left(1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

o último termo na expressão (3.34) fica:

$$-\frac{\hbar^2\gamma^2 d^2}{8m} = -\frac{m\omega^2}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2}\right)^2 = -\frac{m\omega^2}{2\gamma^2} - \frac{q\mathcal{E}}{\gamma} - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.$$

Substituindo os termos acima calculados na expressão (3.34) e somando os termos que retiramos no hamiltoniano original,  $\frac{q\mathcal{E}}{\gamma}$  e  $\frac{m\omega^2}{2\gamma^2}$ , encontramos a nossa expressão para as autoenergias

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{q\mathcal{E}\gamma}{m\omega^2}\right) - \frac{\hbar\gamma^2}{2m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \tag{3.35}$$

Tomando agora  $\gamma \rightarrow 0$  na (3.35) obtemos

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \tag{3.36}$$

que é o resultado fornecido pela mecânica quântica tradicional pro oscilador imerso num campo elétrico uniforme. Se ao invés disso, tomarmos  $\mathcal{E} \rightarrow 0$  na (3.35) obtemos o resultado

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 - \frac{\hbar\gamma^2}{2m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{3.37}$$

que é o mesmo resultado obtido na ref. [15]. Pode-se ter uma idéia qualitativa a partir da expressão (3.37) mediante a figura 2, onde estão plotados os gráficos da energia contra  $\gamma$  (em unidades atômicas) para alguns níveis de energia dados pela (3.37), vemos a partir dos referidos gráficos que a energia decresce mais abruptamente com o parâmetro  $\gamma$  a medida

que aumentamos o nível de energia, o que significa que a medida que aumentamos o valor do parâmetro  $\gamma$  os níveis de energia mais altos vão sendo gradativamente destruídos, em perfeita harmonia com a análise feita no gráfico do potencial (figura 1), onde associamos o parâmetro  $\gamma$  com uma força dissipativa.

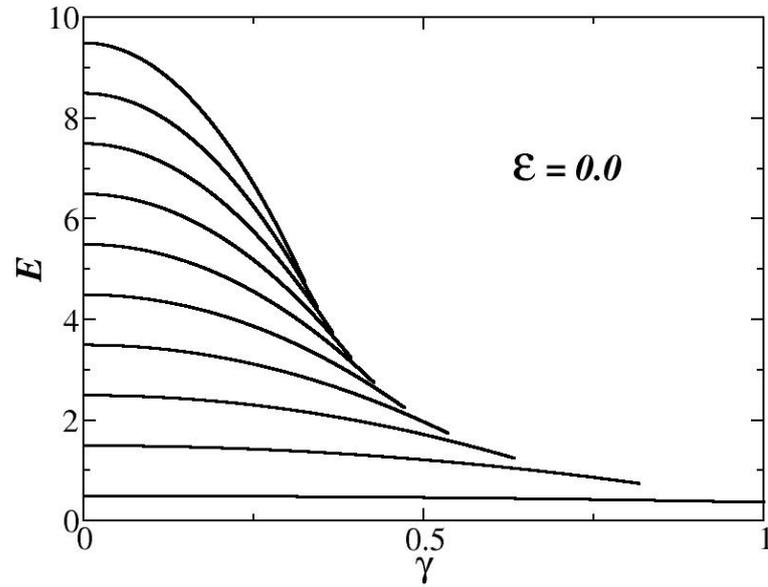


Figura 2: Gráfico da energia contra  $\gamma$  para o estado fundamental e os nove primeiros estados excitados na ausência de campo elétrico, fica claro do gráfico que as energias caem abruptamente com o parâmetro  $\gamma$  a medida que aumentamos os níveis de energia.

## 4 CONCLUSÃO

No presente trabalho partimos de uma modificação introduzida no operador de translação (modificação essa feita com o objetivo de gerar uma equação capaz de explicar a evolução temporal de sistemas com massa dependente da posição) a qual nos levou a uma relação de comutação entre os operadores de posição e momento diferente da usual, a saber,  $[\hat{x}, \hat{p}_\gamma] = i\hbar(1 + \gamma x)$ . Mostramos que uma relação dessa forma não introduz incertezas mínimas não-nulas para os operadores canônicos de posição e momento. Esse resultado mostra que existiu um espaço de Hilbert onde pode-se realizar esta álgebra deformada de tal maneira que ainda temos os operadores canônicos representando grandezas físicas. O espaço de Hilbert escolhido para a realização da álgebra proposta é um espaço de funções quadrado integráveis com peso, o qual provamos no decorrer do Capítulo 2 ser um espaço de Hilbert. Ainda nesse espaço de Hilbert, encontramos a forma dos operadores de posição e momento e mostramos explicitamente que estas formas verificam a nossa relação de comutação deformada. Encontramos também as autofunções do momento, as relações de ortonormalização e completeza, a equação de Schrödinger e apontamos um método que pode ser usado para simplificar a forma desta última. Tal método consiste basicamente no mapeamento originado numa transformação canônica de ponto. No Capítulo 3 usamos o formalismo brevemente desenvolvido no Capítulo 2 para a solução de dois problemas tradicionais da mecânica quântica, a partícula livre e o oscilador harmônico simples. Na solução do oscilador harmônico simples usamos o método da transformada de Laplace aliado ao método da transformação canônica para resolver analiticamente a equação de Schrödinger.

Vale ressaltar que todo o estudo foi desenvolvido para uma partícula sem spin movendo-se apenas na direção- $x$ . Pode-se sem dúvida realizar um estudo mais generalizado de tal forma a incluir muitas partículas em três dimensões por exemplo, pode-se também incluir o spin no nosso formalismo. Usou-se aqui somente os autokets de posição como base para o espaço dos estados da partícula, poderíamos também ter escolhido os autokets de momento para formar a base do espaço de estados. Acreditamos também ser possível uma

extensão de tal tratamento para a mecânica clássica através da identificação do comutador canônico com os parênteses de poisson.

Pode-se concluir a partir dos Capítulo 2 do presente texto que a alteração introduzida no comutador canônico, mediante a modificação no operador de translação, torna inviável a representação da álgebra deformada no espaço das funções quadrado integráveis convencional, caso ainda queiramos que o operador momento seja hermitiano. Somos então forçados a introduzir um novo conjunto de funções para representarmos esta álgebra deformada. Uma outra conclusão, agora oriunda do Capítulo 3, é que a introdução do termo proporcional a posição no comutador canônico, é equivalente em seus efeitos a aparição de uma espécie de força de atrito fictícia no sistema original, ou seja, pode-se obter os mesmos efeitos da álgebra deformada, para um potencial qualquer, mediante a adição de um potencial "fantasma" (potencial este fazendo o papel de uma força de amortecimento) para um sistema regido pela álgebra de Heisenberg canônica.

# APÊNDICE A – Fundamentos Matemáticos da Teoria

Nesse apêndice são apresentados alguns conceitos matemáticos fundamentais a compreensão da teoria desenvolvida no texto. As definições, conceitos e teoremas aqui expostos são uma adaptação da ref. [22].

## A.1 Espaços Vetoriais

**Definição A.1.1.** Um *espaço vetorial*  $\mathcal{V}$  é uma coleção de elementos  $\psi, \phi, \chi, \dots$  (chamados de vetores) para os quais está definida uma *multiplicação por escalar*  $a\psi$  e uma *soma vetorial*  $\psi + \phi$  para todo *escalar*  $a$  pertencente a um certo conjunto e para todos os vetores  $\psi, \phi$ , tal que

$$a(b\psi) = (ab)\psi,$$

$$\psi + \phi = \phi + \psi,$$

$$\psi + (\phi + \chi) = (\psi + \phi) + \chi,$$

$$a(\psi + \chi) = a\psi + a\phi,$$

$$(a + b)\psi = a\psi + b\psi.$$

Além do que em  $\mathcal{V}$  deve existir um *vetor zero*  $0$  tal que

$$\psi + 0 = 0 + \psi$$

para todo  $\psi \in \mathcal{V}$ . Se o conjunto de escalares consiste de todos os números reais então  $\mathcal{V}$  é dito ser um *espaço vetorial real*. Similarmente, se o conjunto de escalares consiste de todos os números complexos,  $\mathcal{V}$  é dito ser um *espaço vetorial complexo*. O conjunto de escalares é por vezes denominado de *corpo*.

Um conjunto de vetores  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  de  $\mathcal{V}$  é dito ser *linearmente dependente* se existe

um conjunto de escalares  $a_1, a_2, \dots, a_d$  não nulos (pertencentes a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) tais que:

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_d\psi_d = 0. \quad (\text{A.1})$$

Se a única solução de (A.1) for  $a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0$  então o conjunto  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  é dito ser *linearmente independente*. Se  $\mathcal{V}$  contém um conjunto de  $d$  vetores linearmente independentes, mas todo conjunto de  $(d + 1)$  vetores é linearmente dependente, então  $\mathcal{V}$  é dito ser um *espaço  $d$ -dimensional*. Se por outro lado, o número de vetores linearmente independentes é ilimitado, então  $\mathcal{V}$  é dito um *espaço de dimensão infinita*.

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço de dimensão finita  $d$  e seja  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  qualquer conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathcal{V}$ . Então qualquer  $\psi \in \mathcal{V}$  pode ser unicamente expresso em termos de  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  por

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_d\psi_d, \quad (\text{A.2})$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_d$  são um conjunto de escalares que depende de  $\psi$ . O conjunto  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  é dito ser uma *base* para  $\mathcal{V}$ .

O conjunto de vetores  $\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_d$  definido em termos da base  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$  por

$$\psi'_n = \sum_{m=1}^d S_{mn}\psi_m$$

para  $n = 1, 2, \dots, d$  forma um conjunto linearmente independente se e somente se a matriz  $\mathbf{S}$  formada pelos  $S_{mn}$  é *não singular*. Então quando  $\mathbf{S}$  é não singular, o conjunto  $\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_d$  é uma outra base para  $\mathcal{V}$

## A.2 Espaços com Produto Interno

**Definição A.2.1.** Um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre o corpo dos complexos  $\mathbb{C}$  é dito ser um espaço com *produto interno* se para cada par de vetores  $\psi, \phi \in \mathcal{V}$  existe um número complexo correspondente  $\langle \psi | \phi \rangle$  (chamado de produto interno de  $\psi$  com  $\phi$ ) tal que:

- (a)  $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$ ;
- (b)  $\langle a\psi | b\phi \rangle = a^*b\langle \psi | \phi \rangle$  para quaisquer  $a, b \in \mathbb{C}$ ;
- (c)  $\langle \psi + \phi | \chi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle + \langle \phi | \chi \rangle$  para qualquer  $\chi \in \mathcal{V}$ ;
- (d)  $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$  para todo  $\psi \in \mathcal{V}$  e
- (e)  $\langle \psi | \psi \rangle = 0$  se e somente se  $\psi = 0$ .

Para qualquer espaço vetorial  $\mathcal{V}$  munido de um produto interno, pode-se definir uma

norma  $\| \cdot \|$  para qualquer  $\psi \in \mathcal{V}$  por

$$\| \psi \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

Qualquer espaço vetorial  $\mathcal{V}$  munido da operação  $\| \cdot \|$  é dito ser um *espaço normado*. Pode-se mostrar que em qualquer espaço normado valem as relações:

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \| \psi \| \| \phi \| \quad (\text{A.3})$$

e

$$\| \psi + \phi \| \leq \| \psi \| + \| \phi \| . \quad (\text{A.4})$$

As relações (A.3) e (A.4) são conhecidas respectivamente como *desigualdade de Schwarz* e *desigualdade triangular*.

Pode-se estender o conceito de distância no  $\mathbb{R}^3$  a qualquer espaço vetorial  $\mathcal{V}$  dotado de um produto interno, para tanto, considere dois vetores  $\psi$  e  $\phi$  pertencentes a  $\mathcal{V}$ , definimos a *distância (ou métrica)*  $d(\psi, \phi)$  entre  $\psi$  e  $\phi$  em  $\mathcal{V}$  por

$$d(\psi, \phi) = \| \psi - \phi \| \quad (\text{A.5})$$

tal que:

- (i)  $d(\psi, \phi) = d(\phi, \psi)$ ;
- (ii)  $d(\psi, \psi) = 0$ ;
- (iii)  $d(\psi, \phi) > 0$  se  $\psi \neq \phi$ , e
- (iv)  $d(\psi, \phi) \leq d(\psi, \chi) + d(\chi, \psi)$  para quaisquer  $\psi, \phi, \chi \in \mathcal{V}$ .

Diz-se que um espaço vetorial onde temos uma métrica definida é um *espaço métrico*.

Dois elementos  $\psi$  e  $\phi$  de  $\mathcal{V}$  são ditos *ortogonais* se  $\langle \psi | \phi \rangle = 0$ . Um vetor  $\psi$  é descrito como sendo *normalizado* se  $\| \psi \| = 1$ . Um conjunto de vetores  $\psi_1, \psi_2, \dots$  é então *ortonormal* se  $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3, \dots$ .

Conjuntos ortonormais são muito úteis como bases. Se  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial de dimensão  $d$  munido de um produto interno e se a base da equação (A.2) é um conjunto ortonormal em  $\mathcal{V}$ , então podemos formar um produto interno em ambos os lados da equação (A.2) com o vetor  $\psi_j$  resultando

$$\langle \psi_j | \psi \rangle = \sum_{k=1}^d a_k \langle \psi_j | \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^d a_k \delta_{jk} = a_j.$$

O que implica que a equação (A.2) pode ser reescrita como

$$\psi = \sum_{k=1}^d \langle \psi_k | \psi \rangle \psi_k. \quad (\text{A.6})$$

### A.3 Espaços de Hilbert

Para espaços vetoriais (com produto interno) de dimensão infinita é natural esperar que a expansão (A.6) seja válida trocando-se a série finita por uma infinita. Isso imediatamente levanta a questão sobre a convergência de tais séries infinitas. Com a métrica introduzida na seção anterior pode-se dizer que a sequência infinita  $\phi_1, \phi_2, \dots$  de vetores num espaço vetorial  $\mathcal{V}$  (munido de um produto interno) tende para um limite  $\phi \in \mathcal{V}$  (ou seja,  $\phi_n \rightarrow \phi$  quando  $n \rightarrow \infty$ ) se, e somente se,  $d(\phi_n, \phi) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então para uma série infinita pode-se dizer que  $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$  converge para  $\phi$  se a sequência de somas parciais definidas para  $n = 1, 2, \dots$  por  $\phi_n = \sum_{j=1}^n \psi_j$  converge para  $\phi$ .

Uma sequência para a qual

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(\phi_n, \phi_m) = 0$$

(onde  $m$  e  $n$  tendem para o infinito independentemente) é chamada de *sequência de Cauchy*.

**Definição A.3.1.** Um *espaço de Hilbert*  $\mathcal{H}$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos  $\mathbb{C}$ , no qual está definido um produto interno e de tal maneira que toda sequência de Cauchy converge para um elemento de  $\mathcal{H}$ .

**Definição A.3.2.** Um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dito ser *separável* se existir um conjunto enumerável de elementos  $\mathcal{S}$  contido em  $\mathcal{H}$  tal que todo vetor  $\psi \in \mathcal{H}$  possui algum elemento  $\phi \in \mathcal{S}$  arbitrariamente perto dele. Ou seja, para qualquer  $\psi \in \mathcal{H}$  e qualquer  $\epsilon > 0$  deve existir um  $\phi \in \mathcal{S}$  tal que  $d(\phi, \psi) < \epsilon$ . O conjunto  $\mathcal{S}$  é então dito ser *denso* em  $\mathcal{H}$ .

**Definição A.3.3.** Um conjunto ortonormal de vetores  $\psi_1, \psi_2, \dots$  de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dito ser *completo* se não existir vetor não nulo de  $\mathcal{H}$  que seja ortogonal a cada um dos  $\psi_1, \psi_2, \dots$

Dadas as definições acima os seguintes dois teoremas são suficientes para que possamos garantir a validade de (A.6) para espaços de dimensão infinita.

**Teorema A.3.1.** Se um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão infinita é separável, então este

espaço contém pelo menos um conjunto completo ortonormal, e todo conjunto completo ortonormal de vetores neste espaço é enumerável.

**Teorema A.3.2.** Se o conjunto de vetores  $\psi_1, \psi_2, \dots$  forma um conjunto completo ortonormal para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão infinita, então qualquer vetor  $\psi$  deste espaço pode ser escrito como

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k | \psi \rangle \psi_k. \quad (\text{A.7})$$

## APÊNDICE B - Um Valor para a Constante de Normalização das Autofunções de Momento

No texto as autofunções do momento foram calculadas sem a especificação da constante de normalização, neste apêndice é mostrado uma forma para a determinação de tal constante, começamos escrevendo o produto interno entre as autofunções do momento na representação de posição

$$\begin{aligned}
 \langle p_\gamma | p'_\gamma \rangle &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \langle p_\gamma | x \rangle \langle x | p'_\gamma \rangle \\
 &= \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} N^* \exp \left[ \frac{-ip_\gamma}{\hbar\gamma} \ln(1 + \gamma x) \right] N \exp \left[ \frac{ip'_\gamma}{\hbar\gamma} \ln(1 + \gamma x) \right] \\
 &= |N|^2 \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\infty} \frac{dx}{1 + \gamma x} \exp \left[ \frac{i \ln(1 + \gamma x)}{\hbar\gamma} (p'_\gamma - p_\gamma) \right] \\
 &= |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d \left[ \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma} \right] \exp \left[ \frac{i \ln(1 + \gamma x)}{\hbar\gamma} (p'_\gamma - p_\gamma) \right] \\
 &\Rightarrow \langle p_\gamma | p'_\gamma \rangle = |N|^2 2\pi \hbar \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

onde usamos o resultado da teoria das distribuições:  $\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp[iy(x - x')]$ . A expressão (B.1) mostra que os autokets do momento são ortogonais, podemos escolher a constante N de tal forma a obter uma relação de ortonormalização para esses autokets, a escolha que permite uma tal ortonormalização é óbvia:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{B.2}$$

Podemos usar um raciocínio análogo ao utilizado no Capítulo 2 e deduzir a completeza a partir da ortogonalização, claramente a relação (B.1) conduz a relação de ortogonaliza-

ção convencional para o momento, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\gamma} |p_{\gamma}\rangle \langle p_{\gamma}| = 1. \quad (\text{B.3})$$

# REFERÊNCIAS

- [1] SNYDER, H. S. Quantized Space-Time. *Physical Review*, v. 71, n. 1, p. 38–41, jan. 1947. ISSN 0031-899X.
- [2] KEMPF, A.; MANGANO, G.; MANN, R. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, v. 52, n. 2, p. 1108–1118, jul. 1995. ISSN 0556-2821.
- [3] KEMPF, A. Noncommutative geometric regularization. *Physical Review D*, v. 54, n. 8, p. 5174–5178, out. 1996. ISSN 0556-2821.
- [4] CHANG, L. et al. Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations. *Physical Review D*, v. 65, n. 12, p. 125027, jun. 2002. ISSN 0556-2821.
- [5] QUESNE, C.; TKACHUK, V. M. Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, n. 41, p. 10373–10389, out. 2003. ISSN 0305-4470.
- [6] FITYO, T. V.; VAKARCHUK, I. O.; TKACHUK, V. M. One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 9, p. 2143–2149, mar. 2006. ISSN 0305-4470.
- [7] BRAU, F. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 7691, 1999.
- [8] MASŁOWSKI, T.; NOWICKI, A.; TKACHUK, V. M. Deformed Heisenberg algebra and minimal length. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 45, n. 7, p. 075309, fev. 2012. ISSN 1751-8113.
- [9] Costa Filho, R. N. et al. Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. *Physical Review A*, v. 84, n. 5, p. 050102, nov. 2011. ISSN 1050-2947.
- [10] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics, Vol. 1*. [S.l.]: Wiley, 1991. 914 p. ISBN 047116433X.
- [11] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. *Modern Quantum Mechanics (2nd Edition)*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2010. 550 p. ISBN 0805382917.
- [12] KEMPF, A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 35, n. 9, p. 4483, set. 1994. ISSN 00222488.
- [13] MAZHARIMOUSAVI, S. H. Revisiting the displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. *Physical Review A*, v. 85, n. 3, p. 034102, mar. 2012. ISSN 1050-2947.

- [14] ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 8524402709.
- [15] Costa Filho, R. N. et al. Morse potential derived from first principles. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 101, n. 1, p. 10009, jan. 2013. ISSN 0295-5075.
- [16] M.MORSE, P. Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics.II.Vibrational Levels. *Physical Review*, v. 34, p. 57–64, 1929.
- [17] BASTARD, G. *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures (Monographs of Physics (Les Editions de Physique))*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1991. 357 p. ISBN 0470217081.
- [18] ARDA, A.; SEVER, R. Bound State Solutions of Schrödinger Equation for Generalized Morse Potential with Position-Dependent Mass. *Communications in Theoretical Physics*, v. 56, n. 1, p. 51–54, jul. 2011. ISSN 0253-6102.
- [19] CHEN, G. The exact solutions of the Schrödinger equation with the Morse potential via Laplace transforms. *Physics Letters A*, v. 326, n. 1-2, p. 55–57, maio 2004. ISSN 03759601.
- [20] BUTKOV, E. *Física Matemática*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 725 p. ISBN 8521611455.
- [21] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition*. [S.l.]: Academic Press, 2007. 1200 p. ISBN 0123736374.
- [22] CORNWELL, J. F. *Group Theory in Physics, Volume 1: An Introduction (Techniques of Physics)*. [S.l.]: Academic Press, 1997. 349 p. ISBN 0121898008.