



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**DAVI MONTEIRO DANTAS**

**ASPECTOS GERAIS DO  
CONFINAMENTO DE CAMPOS EM  
MUNDOS BRANA NÃO FATORIZÁVEIS  
DE SEIS DIMENSÕES COM ENFOQUE  
NA LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS DE  
DIRAC, RARITA-SCHWINGER E ELKO**

**FORTALEZA**

**20 de Julho 2016**

**DAVI MONTEIRO DANTAS**

**ASPECTOS GERAIS DO CONFINAMENTO DE CAMPOS  
EM MUNDOS BRANA NÃO FATORIZÁVEIS DE SEIS  
DIMENSÕES COM ENFOQUE NA LOCALIZAÇÃO DE  
FÉRMIONS DE DIRAC, RARITA-SCHWINGER E ELKO**

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação  
em Física da Universidade Federal do Ceará, como re-  
quisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em  
Física.

Orientador:

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

20 de Julho 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Biblioteca do Curso de Física

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)

---

D2111a Dantas, Davi Monteiro

ASPECTOS GERAIS DO CONFINAMENTO DE CAMPOS EM MUNDOS BRANA  
NÃO FATORIZÁVEIS DE SEIS DIMENSÕES COM ENFOQUE NA LOCALIZAÇÃO  
DE FÉRMIONS DE DIRAC, RARITA-SCHWINGER E ELKO / Davi Monteiro Dantas  
- 2016.

166.f : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2016. Área de Concentração:  
Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Teoria de campos. 2. Partículas elementares. 3. Localização de campos em branas. 4  
Férmions. 5. Seis dimensões. . I.Título.

CDD 530.142

**DAVI MONTEIRO DANTAS**

**ASPECTOS GERAIS DO CONFINAMENTO DE CAMPOS EM MUNDOS BRANA NÃO  
FATORIZÁVEIS DE SEIS DIMENSÕES COM ENFOQUE NA LOCALIZAÇÃO DE  
FÉRMIONS DE DIRAC, RARITA-SCHWINGER E ELKO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 20 / 07 / 2016.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dr. Carlos Albero Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Roldão da Rocha Júnior  
Universidade Federal do ABC (UFABC)

---

Dr. Célio Rodrigues Muniz  
Universidade Estadual do Ceará (UECE/Quixadá)

---

Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

$$(-x_0, x_1, x_2, x_3, r, \theta)$$

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, minha mãe (Ester) e minha irmã (Dalila).

Agradeço aos meus orientadores: ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida pela orientação, sugestões em trabalhos, cobrança, ajuda em projetos, convites para eventos e por confiar em mim. Ao prof. Roldão da Rocha Jr. pela hospitalidade em me acolher na UFABC, discussões em artigos, por me apresentar novas ideias, estar sempre disposto a tirar minhas dúvidas, pelo auxílio em meus pedidos de projetos de pós doutorado e pelas suas respostas de emails quase instantâneas. Ao Dr. José Euclides, que apesar de ter cursado a graduação (e pós) praticamente em conjunto com a minha, foi o responsável por me apresentar os modelos de mundobrana e me orientar desde o mestrado nos cálculos, discussões e artigos desta tese. Gratifico todos os membros da banca.

Continuo agradecendo a todos com quem tive a oportunidade de desenvolver ou discutir as minhas publicações, ao prof. Luís José, prof. Carlos Alex da Silva, Rafael Couceiro (especialmente pela visita à UFC e colaboração), prof. Roberto Maluf (particularmente por discussões fora do contexto de dimensões extras) e ao prof. Wilami (por ter aceito minha contribuição no artigo DSG, pelas presenças nas bancas de defesa e auxílio em projetos de pós doutorado). Agradeço principalmente ao Diego Frankin, com quem pude construir melhor minhas publicações por estarmos no mesmo período do doutorado, assim tivemos mais tempo para deixarmos as ideias mais claras, assim como também ao Júlio César. Ao Victor, Samuel, Wagner, Adevaldo, Hudson, Ivan, Luciana e Aristeu, além de alunos de mestrado ou graduação que tive a oportunidade de interagir no último ano como Rafael Farias, Augusto, Michelângelo e ao grupo Lassco em geral.

A toda a UFC, bem como à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pelo financiamento de minha pós graduação. Aos colegas e professores do curso, assim como também àqueles que pude interagir em eventos como prof. Álvaro Dutra, Marcelo Hott, Luís Benito, Manoel Messias, Júlio Hoff, Alex Bernardini, Alysson Ferrari, Ahluwalia entre outros. Desculpe, não ultrapassarei o limite desta página.

## RESUMO

As teorias de dimensões extras tem aplicação em diversos ramos de Física de altas energias, auxiliando no entendimento do problema de hierarquia de Física de Partículas, nos problemas de matéria escura e energia escura, além da explicação de novas partículas. O objetivo desta tese é apresentar aspectos gerais da localização de campos em geometrias de mundo brana não fatorizáveis (“*warped*”) em seis dimensões (6D), onde destacaremos o confinamento de campos fermiônicos. Iniciaremos apresentando os modelos 6D espessos e regulares desenvolvidos pelo grupo de Teoria de Campos da UFC e faremos um comparativo destes com outros modelos finos ou não regulares da literatura. Compararemos também as diferenças que ocorrem do confinamento de campos de 5D para 6D. Além disso, a localização dos campos bosônicos (gravidade, campo escalar e campo de calibre vetorial) em 6D será também discutida. Observaremos que o modo zero da gravidade será responsável por reproduzir a lei de Newton em nosso mundo 4D. Para o tema central do confinamento de férmions, detalharemos os resultados dos artigos publicados durante meu doutorado. Demonstraremos que é necessário o uso de um acoplamento mínimo com um campo de calibre tanto para o espinor de Dirac como para o de Rarita-Schwinger em 6D, apontaremos diferentes escolhas de calibre para os diferentes modelos abordados. Seguindo, exibiremos o espinor Elko. Este espinor tem dimensão canônica de massa um em 4D (dimensão de massa dois em 6D), sendo um autoespinor do operador de conjugação de carga de dual helicidade e um candidato natural à matéria escura. Verificaremos que o Elko necessita de um acoplamento exótico para seu confinamento em 6D. Além disso, trataremos de assuntos correlacionados, como as correções da lei de Coulomb para modelos em dimensões extras. Outro assunto presente na tese será a aplicação do conceito de Entropia Configuracional para delimitar os parâmetros de modelos 6D.

**Palavras-chave:** Teoria de campos. Partículas elementares. Localização de campos em branas. Férmions. Seis dimensões.

# ABSTRACT

The theories of extra dimensions has application in various branches of Physics of high energy, explaining the particle physics hierarchy problem, the dark matter and dark energy problems, and in the new particles description, as well. The aim of the thesis is expose general aspects of fields localization in six dimensional (6D) nonfactorizable (warped) braneworlds . The main point of this work consists in the fermion fields confinement. We begin presenting thick and regular 6D models, developed by UFC Field Theory group, and compare these models with other thin or non-regular models of literature. Moreover, we compare the differences that occur between warped braneworlds in 5D and in 6D. The confinement of bosonic fields (scalar, gravity and vectorial gauge) in 6D are included. We note that the gravity zero mode reproduces the Newton's law in our world 4D. For the thesis central theme, the fermions fields confinement, the results of my PhD published papers will be detailed. We demonstrate that a minimum coupling with a gauge fields is required to confine both the Dirac spinor as for the Rarita-Schwinger spinor in 6D. In this context, some different gauge choices for this coupling in different 6D models are present. Following, we will introduce the Elko spinor. This spinor has canonical mass dimension one, being the dual helicity eigenspinors of the charge conjugation operator and a Dark matter natural candidate. The Elko spinor need an exotic coupling for his confinement in 6D. Furthermore, we apply the concept of Entropy Configurational with purpose of delimit and correlate some 6D model parameters. The corrections of Coulomb's law for 6D warped models will be also qualitatively argued.

**Keywords:** Field theory. Elementary particles. Field localization in branes. Fermions, Six dimensions.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>16</b>
<b>Lista de publicações</b>	<b>17</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>18</b>
1.1 Motivação . . . . .	18
1.1.1 Problema da hierarquia em Física de Partículas . . . . .	18
1.1.2 Matéria escura . . . . .	21
1.1.3 A suposta nova partícula com massa da ordem de 750 GeV . . . . .	25
1.2 Modelos de Mundobrana em 5D . . . . .	25
1.2.1 Campos em 5D como explicação para a suposta partícula de massa 750 GeV . . . . .	29
1.2.2 Modelos <i>warped</i> de branas espessas em 5D . . . . .	31
1.3 Conclusões do capítulo 1 e estrutura da tese . . . . .	33
<b>2 Modelos Warped em 6D</b>	<b>35</b>
2.1 Aspectos gerais de geometrias axiais 6D . . . . .	36
2.2 Alguns modelos 6D abordados nesta tese . . . . .	39
2.2.1 Modelo tipo corda Gherghetta e Shaposhnikov: . . . . .	40
2.2.2 Modelo Hamilton Sóliton-charuto: . . . . .	42
2.2.3 Modelo Conifold Resolvido: . . . . .	45
2.2.4 Modelos gerados por uma fonte específica: . . . . .	49
2.2.5 Modelos compactos: . . . . .	55
2.3 Métrica 6D na forma conforme plana . . . . .	56
2.4 Conclusões do capítulo 2 . . . . .	58
<b>3 Campos bosônicos em 6D</b>	<b>60</b>
3.1 Campo escalar (spin 0) e gravidade (spin 2): . . . . .	60
3.1.1 Confinamento do campo escalar . . . . .	61
3.1.2 Confinamento da Gravidade . . . . .	62

3.1.3	Abordagem de Schrödinger para os campos de spin 0 e spin 2 . . . . .	64
3.1.4	Gravidade/Campo escalar no GS . . . . .	67
3.2	Campo de calibre . . . . .	75
3.2.1	Abordagem de Schrödinger para o campo de spin 1 . . . . .	77
3.2.2	Campo de Calibre no GS . . . . .	78
3.3	Conclusões do capítulo 3 . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Campos fermiônicos em 6D</b>	<b>82</b>
4.1	Férmions de spin 1/2 . . . . .	82
4.1.1	Modo zero para spin 1/2 . . . . .	85
4.1.2	Modos massivos de spin 1/2 . . . . .	89
4.1.3	Abordagem de Schrödinger e forma super-simétrica dos potenciais de férmions . . . . .	93
4.1.4	Modos ressonantes para o spin 1/2 . . . . .	97
4.2	Férmions de Spin 3/2 . . . . .	99
4.2.1	Modos massivos de spin 3/2 . . . . .	103
4.2.2	Abordagem de Schrödinger para spin 3/2 . . . . .	104
4.3	Outras configurações para o calibre angular . . . . .	105
4.3.1	Modo zero fermiônico no modelo Bounce 6D (BC) . . . . .	105
4.3.2	Modo zero e modos masivos para o modelo Conifold Resolvido (RC) . . . . .	107
4.3.3	Modos massivos para o Conifold . . . . .	110
4.4	Conclusões do capítulo 4 . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Campo elko em 6D</b>	<b>115</b>
5.1	Elko livre em modelos tipo corda em 6D . . . . .	117
5.1.1	Elko livre no modelo GS . . . . .	120
5.1.2	Elko livre no modelo TA . . . . .	122
5.1.3	Elko livre no modelo HC . . . . .	125
5.2	Elko exótico em modelos em 6D . . . . .	126
5.2.1	Modo zero para o Elko exótico . . . . .	128
5.2.2	Modos massivos para o Elko exótico . . . . .	129
5.3	Conclusões do capítulo 5 . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Outros temas relacionados à tese</b>	<b>132</b>
6.1	Introdução à Entropia Configuracional (CE) . . . . .	132

6.1.1	Entropia Configuracional nos modelos TA e HC . . . . .	134
6.2	Correção na Lei de Coulomb em 6D . . . . .	136
6.3	Conclusões do capítulo 6 . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>142</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>146</b>

## Lista de Figuras

1.1	Esboço da velocidade de rotação de galáxia em função da distância de seu centro [10–14]. . . . .	22
1.2	Composição do valor teórico calculado e de uma anel de matéria desconhecida ajustando se ao perfil encontrado. . . . .	23
1.3	Lentes gravitacionais no conglomerado galáctico Abell 2218 [19]. Campos gravitacionais intensos deformam a luz em suas proximidades. . . . .	23
1.4	Colisão de galáxias no conglomerado de Bullet [21]. A porção mais clara representa a matéria escura (observada via lentes gravitacionais) e a mais escura a matéria comum (observada via radiação x). No quadro 1 temos o caso inicial, onde existem duas galáxias isoladas. No quadro 2 as galáxias iniciam o processo de colisão. O choque ocorre no quadro 3, verificamos a matéria luminosa (tonalidade escura, destacada pelo contorno traçado) sofrendo a deformação, já a matéria escura (tonalidade clara) continuar a avançar sem ser afetada. O quadro 4 é o final da colisão, as galáxias se atravessam mutuamente, como verificado pelo arraste no gás visível, enquanto as porções compostas por matéria escura transpassam se inalteradas. . . . .	24
1.5	Resultados preliminares dos grupos Atlas e CMS onde na região de massa em torno de 750 GeV há uma suposta nova partícula que decai em dois fótons. . .	26
1.6	Modelo de Randall-Sundrum 1 (RS1): brana Planck (em $y=0$ ) e brana TeV (em $y = L$ ). A escala de Planck é denotada por $M_p \sim 10^{19}$ enquanto a escala eletrofraca por $M \sim 10^3$ GeV( 1 TeV). O $v$ denota o valor esperado do vácuo para o campo escalar de Higgs acoplado na ação do modelo RS. [37]. . . . .	28
1.7	Um exemplo de decaimento do campos escalar, $S$ , em dois bósons de Higgs, $H$ . [76]. O símbolo entre os espinores com quiralidade direita ( $\times$ ) representa uma inserção. Para melhor entendimento desta inserção verifique o chamado “diagrama pinguim” na Ref. [77]. . . . .	31
1.8	Diferenças entre modelos fino e espesso em 5D. Foram feitos $b = 2$ , $\kappa = \frac{1}{2}$ e $k = 1$ . . . . .	32

2.1	Representação do RS-II, um modelo axial 6D e um modelo compacto esférico 6D. $X^2$ representa nosso universo 4D, que no caso 5D pode ser visualizado como superfície, enquanto que nos 6D como uma reta. . . . .	36
2.2	$F(r)$ para o modelo GS. Verificamos que o parâmetro $c$ regula a espessura da região não nula deste fator. Como para o GS temos $H(r) = R_0^2 F(r)$ a constante $R_0^2$ apenas regula sua amplitude. . . . .	41
2.3	$F(r)$ para o modelo HC. Verificamos que o parâmetro $c$ regula a espessura da região não nula. Quando $c \rightarrow \infty$ este fator recupera a forma do GS. . . . .	43
2.4	$H(r)$ para o modelo HC. Aqui o parâmetro $c$ regula simultaneamente a espessura e amplitude da região não nula. Associamos $R_0 = \frac{1}{c}$ quando $r \rightarrow \infty$ . . . . .	43
2.5	$R(r)$ para o modelo HC. Verificamos que o parâmetro $c$ regula tanto amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente $AdS_6$ do GS. O valor máximo da curvatura ocorre fora da origem. . . . .	44
2.6	$t_M(r)$ para o modelo HC. Observamos que a condição de energia dominante $t_0 \geq t_i$ é atendida. Na figura da esquerda $c = 0.5$ , enquanto na figura da direita $c = 3.0$ , observamos que quanto maior este parâmetro, maior será a amplitude e menor a espessura das componentes do tensor energia momento. . . . .	45
2.7	Transformação $u_a(r)$ . Observamos que para $a = 0$ temos uma reta com coeficiente angular igual a 1. Para $a \neq 0$ essas funções são aproximadamente retas com coeficientes angulares menores. Há uma diminuição brusca do coeficiente para pequenos valores de $a$ , o qual retorna ao coeficiente angular 1 para grandes valores deste parâmetro de resolução. . . . .	46
2.8	$H(r)$ para o modelo RC. O parâmetro $a$ regula o valor inicial de $H(r)$ . Na figura da esquerda $c = 0.5$ e na figura da direita $c = 1.0$ . . . . .	47
2.9	$R(r)$ para o modelo RC. Verificamos que o parâmetro $a$ regula tanto amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente $AdS_6$ do GS. Porém, há saturação na forma desta curvatura para grandes valores do parâmetro de resolução, a forma exposta para $a = 10$ se mantém para valores maiores. . . . .	48
2.10	$t_M(r)$ para o modelo RC com $c = 0.5$ . Observamos que a condição de energia dominante $t_0 \geq t_i$ é atendida no caso onde $a = 0$ (figura da esquerda). Na figura da direita $a = 5$ a densidade de energia e pressão angular se igualam. . . . .	49

2.11	$\rho(r)$ para diferentes valores de $b$ . Verificamos que este parâmetro $b$ estipula a distância da origem até o valor constante do campo ser atingido. Entretanto, verificaremos que será o parâmetro $p$ que regulará a espessura do tensor energia-momento e curvatura no modelo TA. . . . .	51
2.12	$\rho(r)$ para diferentes valores de $p$ . Verificamos que este parâmetro $p$ regula a amplitude do valor constante assintótico deste campo escalar. . . . .	51
2.13	$F(r)$ para o modelo TA. Verificamos que o parâmetro $p$ regula a espessura da região não nula. Quando $p \rightarrow 0$ este fator recupera a forma do GS. . . . .	52
2.14	$F(r)$ para o modelo TA. O parâmetro $b = c/2$ também regula a espessura e recuperamos o GS quando $b \rightarrow \infty$ . . . . .	52
2.15	$R(r)$ para o modelo TA. Podemos regular o valor da espessura da região que antecede o espaço puramente $AdS_6$ do GS através do parâmetro $p$ . . . . .	53
2.16	$t_M(r)$ para o modelo TA com $b = 0.25$ . Na figura da esquerda $p = 1.0$ , enquanto na figura da direita $p = 0.1$ . . . . .	53
2.17	$F(r)$ na figura da esquerda e a curvatura na figura da direita para o modelo BC, HC e TA com $c = 2b = 0.5$ , $p = 1.0$ e $\varpi = 1$ . . . . .	54
2.18	$t_M(r)$ para o modelo BC. As parcelas $t_0 = t_\theta$ e há uma pequena região onde todas as componentes de $t_M$ são negativas. Utilizamos os parâmetros $c = 0.5$ , $p = \varpi = \kappa_6 = 1$ . . . . .	55
2.19	Transformação $z(r)$ para vários modelos com $c = 1$ . Esta expressão é analítica para o GS na Eq. (2.73). . . . .	57
2.20	Transformação $r(z)$ para vários modelos com $c = 1$ . Esta expressão é analítica para o GS na Eq. (2.73). . . . .	57
2.21	$F(z)$ para o GS com $c = 0.5$ . Verificamos que há concordância entre o resultados numérico com o analítico da Eq. (2.75). Observe que na variável $z$ (linha cheia) as expressões decaem mais lentamente que na variável $r$ (linha pontilhada). . . . .	57
2.22	$F(z)$ para vários modelos com $c = 2b = 0.5$ e $p = 1$ . Essas expressões se alogam sobre a variável $z$ em comparação com as da variável $r$ das figuras 2.2, 2.3 e 2.13. . . . .	58
2.23	$H(z)$ para vários modelos com $c = 0.5$ , $a = 0$ (linha tracejada) e $a = 1$ (linha pontilhada). Essas expressões se alogam sobre a variável $z$ em comparação com as da variável $r$ das figuras 2.4 e 2.8. . . . .	58

3.1	$\phi(r)$ para o modelo GS com $c = 1.0$ . Ajustamos $\aleph_1 = \aleph_2$ de tal forma a adequar melhor as funções aos gráficos. Quanto maior a massa, maior a frequência de oscilação das funções. . . . .	70
3.2	$\phi(r)$ para o modelo GS com $m = 0$ , $l = 1$ , $\aleph_1 = 1$ e $\aleph_2 = 0$ . Essa solução não pode ser normalizada quando $r \rightarrow \infty$ . . . . .	71
3.3	$\phi(r)$ para o modelo GS com $m = 0$ , $l = 1$ , $\aleph_1 = 0$ e $\aleph_2 = 1$ . Embora essa solução possa ser normalizada, não é possível atender a condição de derivada nula na origem. . . . .	71
3.4	$V(z)$ potencial quântico análogo para a gravidade/campo escalar nos modelos RC com $a = 0$ (linha cheia), para o RC com $a = 0.5$ (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com $c = 0.5$ . Para o GS temos apenas uma barreira, no RC temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o caso não resolvido. . . . .	74
3.5	$\Psi_0(z)$ modo zero para gravidade/campo escalar nos modelos RC com $a = 0$ (linha cheia), para o RC com $a = 0.5$ (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com $c = 0.5$ . Todos são localizados e a característica de ter seu máximo deslocado na origem é presente no modelo RC. . . . .	74
3.6	$V(z)$ potencial quântico análogo para a gravidade/campo escalar nos modelos HC (linha cheia), para o TA com $p = 1.0$ (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com $p = 0.25$ , em todos $c = 2b = 0.5$ . Temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o modelo HC. . . . .	74
3.7	$\Psi_0$ modo zero para a gravidade/campo escalar nos modelos HC (linha cheia), para o TA com $p = 1.0$ (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com $p = 0.25$ , em todos $c = 2b = 0.5$ . Todos os modos são localizados, mas apenas para o HC este modo se anula na origem. . . . .	74
3.8	$V(z)$ potencial quântico análogo para o campo de calibre nos modelos RC com $a = 0$ (linha cheia), para o RC com $a = 0.5$ (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com $c = 0.5$ . Para o GS temos apenas uma barreira, no RC temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o caso não resolvido. . . . .	79
3.9	$\Psi_0(z)$ modo zero para o campo de calibre nos modelos RC com $a = 0$ (linha cheia), para o RC com $a = 0.5$ (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com $c = 0.5$ . Todos são localizados e a característica de ter seu máximo deslocado na origem é presente no modelo RC. . . . .	79

3.10	$V(z)$ potencial quântico análogo para o campo de calibre nos modelos HC (linha cheia), para o TA com $p = 1.0$ (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com $p = 0.25$ , em todos $c = 2b = 0.5$ . Temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o modelo HC. . . . .	80
3.11	$\Psi_0$ modo zero para o campo de calibre nos modelos HC (linha cheia), para o TA com $p = 1.0$ (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com $p = 0.25$ , em todos $c = 2b = 0.5$ . Todos os modos são localizados, mas apenas para o HC este modo se anula na origem. . . . .	80
4.1	Figura do modo zero direito com $c = 0.5$ para o HC. Um modo zero localizado ocorre para $\lambda > 1$ , porém apenas para $\lambda > 3$ as derivadas se anulam nos extremos. . . . .	89
4.2	Calibre angular para o modelo HC com a escolha da equação (4.34). A forma é semelhante ao dos potências vulcões, tendo um poço próximo da origem, seguido de uma barreira e indo a zero no infinito. . . . .	89
4.3	Modo massivo fermiônico direito no GS para $m = 0.50$ . Fizemos $A_R = B_R = 1.5 \times 10^{-3}$ e $c = 0.5$ . . . . .	91
4.4	Espectro de massa para $\lambda = 7.0$ no modelo HC. Observe que a taxa de crescimento para os primeiros valores de massa são menores que para os valores maiores de massa . . . . .	93
4.5	Autofunção normalizada para $c = 0.5$ e $\lambda = 5.0$ no modelo HC. As massas para cada modo foram dadas como $m_R = 0.4024$ (direito) e $m_L = 0.4025$ (esquerdo). . . . .	93
4.6	Autofunção normalizada para $c = 0.5$ e $\lambda = 9.0$ no modelo HC. As massas para cada modo foram dadas como $m_R = 0.4591$ (direito) e $m_L = 0.4589$ (esquerdo). . . . .	93
4.7	Potencial de Schödinger para ambas as quiralidades. Fizemos $c = 0.5$ e $\lambda = 5.0$ . As linhas espessas representam o modelo HC, enquanto usamos linhas finas para o GS. . . . .	99
4.8	Potencial de Schödinger para ambas as quiralidades. Fizemos $c = 0.5$ e $\lambda = 9.0$ . As linhas espessas representam o modelo HC, enquanto usamos linhas finas para o GS. . . . .	99
4.9	$P_L(m)$ : probabilidade relativa para $c = 0.5$ (quiralidade esquerda) no HC. . . . .	100
4.10	$P_R(m)$ : probabilidade relativa para $c = 0.5$ (quiralidade direita) no HC. . . . .	100
4.11	Autofunções normalizados para o primeiro pico ressonante do modelo HC. Em ambos os modos $\lambda = 4.0$ . . . . .	100



4.12	Autofunções normalizadas para o segundo pico ressonante da Fig. 4.9 no modelo HC. Exibimos o modo esquerdo com $\lambda = 5.0$ e $m = 1.387$ . . . . .	100
4.13	Comparativo para os férmions de mão direita no modelo HC. A linha cheia é relativa ao espinor de Rarita-Schwinger, enquanto a tracejada ao spin $1/2$ . Para $\lambda = 7$ (perfis mais largos) e $\lambda = 12$ (perfis mais agudos) em ambos para $c = 0.5$	103
4.14	Gráfico comparativo dos modos zeros de campos bosônicos e fermiônicos no HC $c = 0.50$ e $\lambda = 2.0$ (para os férmions). . . . .	103
4.15	Gráfico comparativo para o modo direito normalizado do espinor $3/2$ para $\lambda = 5.0$ e $c = 0.5$ no modelo HC. Utilizamos as massas $m_{1/2} = 0.4020$ e $m_{3/2} = 0.4018$ . . . . .	104
4.16	Integrando de (4.98) o qual verificamos ser um caso suave de uma exponencial linearmente decrescente. Tomamos para a figura os valores $p = c = 1$ e $a_0 = 2$	106
4.17	Prova da convergência da Integral (4.98). O valor numérico integrado em todo o espaço de $I_{1/2}$ é aproximadamente 0.736 para $p = c = 1$ e $a_0 = 2$ . . . . .	106
4.18	$\hat{I}$ integrando de $I(r)$ para $a = 0$ e $r_0 = 0.1$ . Todos os perfis comportam áreas finitas, mas a derivada só se anula na origem para valores grandes de $b$ comparados ao parâmetro $c$ . . . . .	108
4.19	Componente angular do calibre vetorial para $a = 0$ e $r_0 = 0.1$ . . . . .	108
4.20	$\hat{I}$ para $a \neq 0$ com $r_0 = 0.2$ . . . . .	110
4.21	Componente angular do calibre para $a \neq 0$ com $r_0 = 0.2$ . . . . .	110
4.22	Potencial para férmions direito com $a = 0$ . . . . .	111
4.23	Potencial para férmions esquerdos com $a = 0$ . . . . .	111
4.24	Potencial para férmions de mão direita para $a \neq 0$ . . . . .	112
4.25	Potencial para férmion de mão esquerda para $a \neq 0$ . . . . .	112
5.1	Soluções da parte real (linha espessa) e parte imaginária (linha fina) da autofunção massiva para o GS da Eq. (5.20). Fixamos $c = 0.5, m_n = 1.50, R_0 = 1.00$ e as constantes $\aleph_1 = \aleph_2 = 1.00$ . . . . .	123
5.2	$I'(r)$ integrando da Eq. (5.24) com $c = 0.5, m_n = 1.50, R_0 = 1.00$ e as constantes $\aleph_1 = \aleph_2 = 1.00$ . . . . .	123
5.3	$\varepsilon_0$ : modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais $\varepsilon_0(0) = 1$ e $\varepsilon'_0(0) = 0$ . Adotamos o intervalo $r \in [0, 80]$ com $c = 0.5$ e $p = 1.0$ , mas exibimos a figura apenas no intervalo de $r \in [0, 6]$ para denotarmos o valor $\varepsilon_0(0) = 1$ . . . . .	124

5.4	$\varepsilon_0$ : modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais $\varepsilon_0(0) = 1$ e $\varepsilon'_0(80) = 0$ . Adotamos o intervalo $r \in [0, 80]$ com $c = 0.5$ e $p = 1.0$ . A derivada na origem vale $\varepsilon'_0(0) \approx -0.035$ . . . . .	125
5.5	$\varepsilon'_0$ : derivada do modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais $\varepsilon_0(0) = 1$ e $\varepsilon'_0(80) = 0$ . Adotamos o intervalo $r \in [0, 80]$ com $c = 0.5$ e $p = 1.0$ . A derivada não é nula na origem. . . . .	125
5.6	Comparativo entre os coeficientes $2\mathcal{P}(r)$ (linhas cheias) e $\mathcal{Q}_0(r)$ (linhas tracejadas) para o HC (linhas grossas) e GS (linhas finas). Utilizamos $c = 0.5$ . . . . .	126
5.7	$\varepsilon_0$ : modo zero para o HC da Eq. (5.43) com condições iniciais $\varepsilon_0(r_{min}) = 0$ and $\varepsilon'_0(r_{min}) = 0$ , onde o domínio de $r \in [0.001, 80]$ . . . . .	127
5.8	Autofunções massivas para o modelo TA (linha espessa) e no GS (linha fina). Fizemos $c = 0.5$ , $R_0 = 1.0$ , $m = 15.0$ e para o GS fizemos $\aleph_1 = \aleph_2 = 5.0$ . . . . .	130
5.9	Autofunções massivas para o modelo HC (linha espessa) e no GS (linha fina). Fizemos $c = 0.5$ , $R_0 = 1.0$ , $m = 15.0$ e para o GS fizemos $\aleph_1 = \aleph_2 = 5.0$ . . . . .	130
6.1	$S(p)$ CE como função do parâmetro de espessura $p$ , para diferentes valores do parâmetro geométrico $b$ . Ocorre um ponto crítico em $p_{crit} \approx 0.09b$ . . . . .	135
6.2	$S(b)$ CE como função do parâmetro geométrico $b$ , para diferentes espessura $p$ . Este resultado concorda com a relação para o problema da hierarquia no TA. Limitamos aqui $b = 0.5$ , pois faremos $c = 1.0$ no HC. Esta imposição impede valores de massa maiores do que a massa de Planck. . . . .	135
6.3	$S(c)$ : Entropia Configuracional para o HC. . . . .	136
6.4	$\Delta V_c(x)$ no modelo SG em função da constante de acoplamento do dilaton $\lambda$ . . . . .	137
6.5	$\Delta V_c(x)$ no modelo DSG em função da constante de acoplamento do dilaton $\lambda$ . . . . .	137
6.6	$\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)$ : perfil qualitativo para o modo zero fermiônico com $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$ em modelos tipo HC ou RC. Verificamos que o comportamento na variável $z$ é semelhante ao presente na variável $r$ da Fig. 4.1. Esta expressão para $\lambda \rightarrow \infty$ representará uma delta de Dirac do tipo $\delta(z - z_*)$ . Para modelos como o GS ou TA estes modos zeros e a delta de Dirac estarão centralizados na origem $z_* = 0$ . . . . .	139
6.7	$K(z)$ : função transformadora para o campo de calibre da equação (6.14) para modelos tipo HC ou RC. Ela é proporcional ao inverso do modo zero, logo apresenta divergências na origem (para o caso do HC ou RC, mas não do GS ou TA) e tem crescimento ilimitado independente do modelo. . . . .	139

- 6.8  $\rho_n(z)$ : autofunções massivas para o campo de calibre com  $m_2 > m_1$ . O comportamento oscilante faz com estas funções não sejam normalizadas em todo domínio quando  $z \rightarrow \infty$ , sendo assim não localizadas. Os valores fixados em  $z = z_*$  serão fundamentais para o estudo da correção de Coulomb ou de Newton. 139
- 6.9  $\Delta V_c(x)$ : resultado esperado para as correções na lei de Coulomb devido à interação do modo zero fermiônico com os modos massivos do campo de calibre em 6D. Este resultado deve ocorrer para grandes valores da constante de acoplamento  $\lambda$  dos férmions. . . . . 140

## Lista de Tabelas

1.1	Relação entre as forças fundamentais. QCD- Cromodinâmica Quântica, a Força Forte é atrativa e constante para o interior hadrônico e decai exponencialmente para o exterior . QED- Eletrodinâmica Quântica, $m_b$ são os valores massas dos bósons W ou Z [5]. . . . .	19
1.2	Unidades de Planck e sua relação com as unidades do S.I. [6]. . . . .	19
1.3	Tabela das massas de quark e partículas elementares [5]. . . . .	26

## LISTA DE PUBLICAÇÕES

### Artigos publicados:

1. R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and R. da Rocha, “*Bounds on topological Abelian string-vortex and string-cigar from information-entropic measure*,” Phys. Lett. B **755**, 358 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.02.038 [arXiv:1601.00076 [hep-th]].
2. D. M. Dantas, D. F. S. Veras, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Fermionic Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld*,” Phys. Rev. D **92**, no. 10, 104007 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104007 [arXiv:1506.07228 [hep-th]].
3. L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “*Vector and fermion fields on a bouncing brane with a decreasing warp factor in a string-like defect*,” Phys. Lett. B **731**, 64 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.02.010 [arXiv:1402.1855 [hep-th]].
4. D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Fermions in a warped resolved conifold*,” Phys. Lett. B **725**, 425 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.07.021 [arXiv:1307.2317 [hep-th]].

### Artigos submetidos:

1. D. M. Dantas, R. da Rocha and C. A. S. Almeida, “*Exotic Elko on String-Like Defects in Six Dimensions*,” arXiv:1512.07888 [hep-th] (em análise no Classical and Quantum Gravity).
2. W. T. Cruz, R. V. Maluf, D. M. Dantas, and C. A. S. Almeida, “*Multiresonance modes in sine-Gordon brane models*,” arXiv:1512.07890 [hep-th] (em análise no Annals of Physics).
3. R. A. C. Correa, D. M. Dantas, P. H. R. S. Moraes, C. A. S. Almeida, “*Information-entropic measure in the Weyl pure geometrical thick brane*,” arXiv:1607.01710 [hep-th] (em análise no Phys. Lett. B).
4. J. C. B. Araújo, D.F.S. Veras (Ceara U.), D. M. Dantas, C. A. S. Almeida, “*Gravity fluctuations in a brane placed at a transverse warped resolved conifold and corrections to the Newtonian potential*,” arXiv:[hep-th] (em análise no Phys. Lett. B).

# 1 Introdução

Iniciaremos este capítulo apontando alguns problemas em aberto das áreas de Física Teórica, Física de Partículas, Cosmológica e Astronomia. Para a solução destes problemas apresentaremos a hipótese de dimensões extras, especificamente modelos de *mundobrana não fatorizáveis* (warped braneworlds) em cinco dimensões (5D). Apresentaremos os primeiros modelos nesta área, expondo suas desvantagens que motivaram a elaboração de modelos mais complexos, com espessura ou em espaços de dimensões maiores. Finalizaremos apresentando a estrutura dos capítulos seguintes da tese. Uma observação importante é que utilizaremos o ponto para denotar o separador decimal todos os gráficos, tabelas e valores de parâmetros ao longo de toda a tese, por exemplo  $1/2 = 0.5$ .

## 1.1 Motivação

Resumiremos nesta seção alguns problemas explicados por modelos de dimensões extras, sendo eles: o *Problema da hierarquia em Física de Partículas*, os desvios astronômicos que conceberam o conceito de *Matéria Escura*, além de resultados do final de 2015 no Grande Colisor de Hádrons (LHC), onde um suposto novo bóson mais pesado que o Higgs ( $m_{\gamma\gamma} \sim 750$  GeV), é previsto devido ao excesso de pares di-fótons ( $\gamma\gamma$ ) em energias de 13 TeV.

### 1.1.1 Problema da hierarquia em Física de Partículas

Em Física de Partículas o problema da hierarquia é caracterizado pela discrepância entre as escalas de Planck e a eletrofraca [1]. Essa discrepância está ligada às diferentes intensidades e domínios das quatro forças fundamentais (interações gravitacional, eletromagnética, nucleares fraca e forte) [1–3]. Um exercício bastante comum quando iniciamos a estudar Eletricidade e magnetismo é verificar que a força elétrica é cerca de  $10^{39}$  vezes mais intensa que a gravitacional [4]. Quando estudamos o interior do núcleo atômico, percebemos que deve existir uma força que supere a repulsão entre os prótons. Essa força é chamada de Força nuclear Forte, também presente na ligação dos quarks dentro de nêutrons e prótons (hádrons) [3]. Além desta, existe

a Força nuclear Fraca que está ligada aos processos de decaimento e fusão nuclear, como no decaimento beta e na fusão de hidrogênio em deutério no Sol [3]. Essas forças nucleares são de curta distância, podendo ser ignoradas para escalas de comprimento maiores que fentômetros,  $10^{-15}$  m [1].

Na tabela 1.1 há um comparativo entre as intensidades das três forças estudadas pelo Modelo Padrão com a Gravidade, bem como os nomes dos seus mediadores, as teorias que as descrevem e seus decaimento com a distância. Como observamos desta tabela, existe uma relação inversa entre intensidade e domínio das forças.

Força	Mediador	Teoria	$\propto r$	Magnitude
Forte	Glúons	QCD	variável	$10^{38}$
Eletromagnética	Fótons	QED	$1/r^2$	$10^{36}$
Fraca	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	$e^{-m_b r}/r$	$10^{25}$
Gravitacional	“Gráviton”	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1.1: Relação entre as forças fundamentais. QCD- Cromodinâmica Quântica, a Força Forte é atrativa e constante para o interior hadrônico e decai exponencialmente para o exterior. QED- Eletrodinâmica Quântica,  $m_b$  são os valores massas dos bósons W ou Z [5].

A discrepância entre as forças do Modelo Padrão e Gravidade pode ser entendida como um problema de escalas. Utilizando as unidades de Max Planck, onde as cinco constantes universais da Física são feitas unitárias (sendo elas: a constante reduzida de Planck ( $\hbar$ ), a velocidade da luz no vácuo ( $c$ ), a constante gravitacional ( $G$ ), a constante de Boltzmann ( $K_b$ ) e a constante de Coulomb ( $k_e$ )), teremos a seguinte relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I) na tabela 1.2 [6].

Unidade	Conversão de Planck	Valor no S.I
Massa	$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$\sim 2.176 \times 10^{-8} kg$
Comprimento	$l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$\sim 1.616 \times 10^{-35} m$
Tempo	$t_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$	$\sim 5.391 \times 10^{-44} s$
Carga	$q_{pl} = \sqrt{4\pi\hbar c\epsilon_0}$	$\sim 1.875 \times 10^{-18} C$
Temperatura	$\Theta_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G K_b^2}}$	$\sim 1.417 \times 10^{32} K$
Energia	$E_{pl} = m_{pl} c^2$	$\sim 1.9561 \times 10^9 J / 1.22 \times 10^{19} GeV$

Tabela 1.2: Unidades de Planck e sua relação com as unidades do S.I. [6].

No sistema de Planck as quatro forças tem a mesma intensidade em unidades unitárias. Este regime igualitário ocorreria em energias da ordem de  $10^{19}$  GeV, chamado de *escala de Planck* ( $M_{Pl}$ ). Em contraste, a escala de energia onde vivemos, chamada de escala de *Eletrofraca* ( $M_*$ ) é da ordem de apenas  $10^3$  GeV ou 1 TeV. A essa diferença de escalas de energia chamamos *Problema da hierarquia*.

$$M_{Pl} \sim 10^{16} M_*. \quad (1.1)$$

Dado este problema, os modelos de mundobrana supõe que nosso espaço quadridimensional, uma membrana onde impera a escala Eletrofraca, estaria embebido em um espaço com mais dimensões regido pela escala de Planck. Através dessa suposição é possível relacionar as escalas dependendo do número de dimensões extras e do comprimento de seus raios. Exibiremos com alguns detalhes desta explicação na seção 1.2

Ainda sobre nosso sistema de unidades, utilizaremos durante a tese a medida da *dimensão canônica de massa* [7] para nossas grandezas físicas, denotada como  $dim[X]$ . Esse cálculo é bastante empregado no estudo de renormalização em Teoria de Campos [7], entretanto utilizaremos este conceito apenas para checar a dimensão de massa dos campos em dimensões superiores e adequar as unidades dos parâmetros livres dos modelos a serem estudados.

Uma vez que igualamos a constante  $c = 2.99 \times 10^8$  m/s  $\equiv 1$ , nossas unidade de comprimentos  $[L]$  e tempo  $[T]$  devem ser iguais, uma vez que  $c = 1$  é adimensional. Ao procedermos da mesma forma com as outra cinco constantes universais, chegaremos que todo o novo sistema será regido por apenas uma unidade, escolheremos a massa  $[M]$ . O estudo da dimensão canônica de massa nos auxilia a chegar a consistência de nossas contas.

Por exemplo, dada uma ação em quatro dimensões na forma:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

sendo  $\mathcal{L}$  a densidade lagrangiana. O comprimento tem dimensão  $dim[x] = [L]$ , assim  $dim[\int d^4x] = [L]^4$ . Em nosso sistema de unidades o comprimento tem o inverso da dimensão da massa  $[L] = [M]^{-1}$  (confira pela dimensão de massa do comprimento Compton  $\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{mc}$  quando  $c = \hbar = 1$ , por exemplo). Então, para que nossa ação seja adimensional devemos ter  $dim[\mathcal{L}] = [L]^{-4} = [M]^4$ , com isso  $dim[S] = [M]^4 [M]^{-4} = [M]^0$ .

Para o exemplo onde nossa lagrangiana é a de um campo escalar massivo, notamos que:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2]$$



neste contexto a dimensão de cada derivada se torna  $dim[\partial] = [L]^{-1} = [M]^1$ , pois a derivação reduz em uma unidade de comprimento a quantidade original, assim:

$$dim[\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi] = ([M]^1 \times dim[\Phi] \times [M]^1 \times dim[\Phi]) \equiv [M]^4,$$

$$[M]^2 dim[\Phi]^2 = [M]^4, \quad dim[\Phi]^2 = [M]^2 \Rightarrow dim[\Phi] = [M]^1$$

o que também pode ser verificada pelo termo de massa:

$$dim[m^2 \Phi^2] = [M]^2 dim[\Phi]^2 \equiv [M]^4 \Rightarrow dim[\Phi] = [M]^1.$$

Dizemos assim que o campo escalar tem *dimensão de massa um* em quatro dimensões. Por conveniência, abreviaremos nossa notação daqui para frente em termos apenas dos expoentes das dimensões de massa  $[M]$ :

$$dim[\mathcal{L}] = 4, \quad dim[d^4x] = -4, \quad dim[S] = 0, \quad dim[\partial_\mu] = 1, \quad dim[\Phi] = 1.$$

Verificaremos nos capítulos 3 e 4 que para 4D o campo de spin 1/2 terá dimensão  $dim[\Psi] = 3/2$  e o campo de spin 1 terá  $dim[A_\mu] = 1$ . Apresentaremos no capítulo 5 um espinor que tem a mesma dimensão de massa do campo de spin 0 (campo escalar),  $dim[\lambda_\mu(x)] = 1$ .

### 1.1.2 Matéria escura

Depois predição de Netuno pelos desvios na órbita de Urano, em 1841. A sua descoberta, em 1846, foi um importante passo da Física Teórica [8, 9]. Alguns problemas astronômicos atuais, respondido apenas por teorias, são os conceito de de matéria e energia escura. Introduziremos a matéria escura através de um exercício simples. Tratando nossa galáxia como uma esfera uniforme de Massa  $M_0$  e Raio  $R_0$ , calculamos seu campo gravitacional por uma Lei de Gauss, com a qual encontraremos a velocidade de rotação em função da distância do centro da galáxia como [10, 11]:

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{GM_0/R_0^3}, & \text{para } r < R_0 \\ \sqrt{GM_0/r}, & \text{para } r > R_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo  $G$  a constante gravitacional universal.

Verificamos que para o interior da galáxia, há uma relação linear entre a velocidade de rotação e a distância, assim as bordas giram mais rápido que o centro. Para o exterior, um corpo longínquo enxergaria a galáxia da mesma forma que um planeta enxerga o Sol em nosso sistema, quanto mais afastado menor será a sua velocidade. Tendo isto em mente, os trabalhos de Vera Rubin, a partir dos anos de 1970, estudaram a rotação de aproximadamente 60 galáxias isoladas [12]. Através deles se verificou que a aproximação de velocidade de rotação encontrada em (1.2) era válida somente para o interior, porém para o exterior das galáxias, onde se presumiu não haver matéria, a velocidade de rotação continuava constantes ao invés de decair. A figura 1.1 esboça o comportamento encontrado por Rubin [10–14].

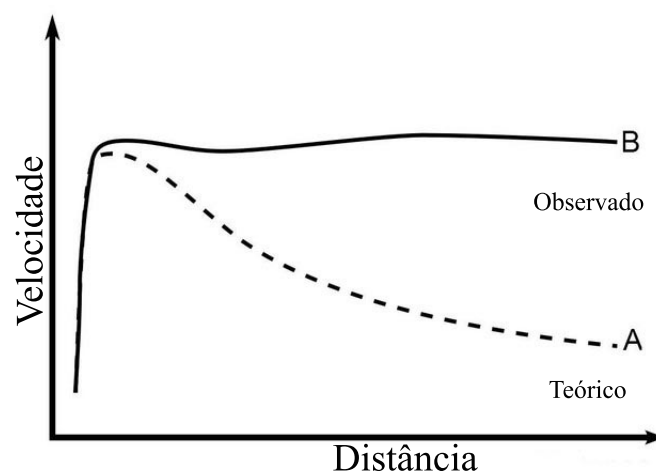


Figura 1.1: Esboço da velocidade de rotação de galáxia em função da distância de seu centro [10–14].

Já na figura 1.2, temos uma prova que se a massa desconhecida for distribuída em forma de uma aréola em torno das galáxia, ela explicaria o comportamento observado experimentalmente.

Antes mesmo deste resultado, já em 1933, F.Zwicky estudou o conglomerado de galáxias Coma [15]. Tendo encontrado experimentalmente a dispersão de velocidades desse sistema, estimou a massa total contida no conglomerado utilizando o Teorema de Virial. Comparando o valor encontrado teoricamente com o observado, se chegou à surpreendente conclusão que a matéria visível correspondia a apenas 2% do valor calculado. Outro resultado semelhante foi obtido pelas observações de Horace W. Babcock para a Nebulosa de Andrômeda em 1939 [16].

Outro problema é o das *Lentes gravitacionais* [17, 18] em locais imprevistos [19, 20]. Campos gravitacionais intensos curvam a trajetória da luz, esse fenômeno é conhecido em Astronomia como Lentes gravitacionais, exemplificado na figura 1.3. Visualizamos nesta figura raios de luz desfocados e curvados em determinadas regiões, o que indica haver algum corpo muito massivo

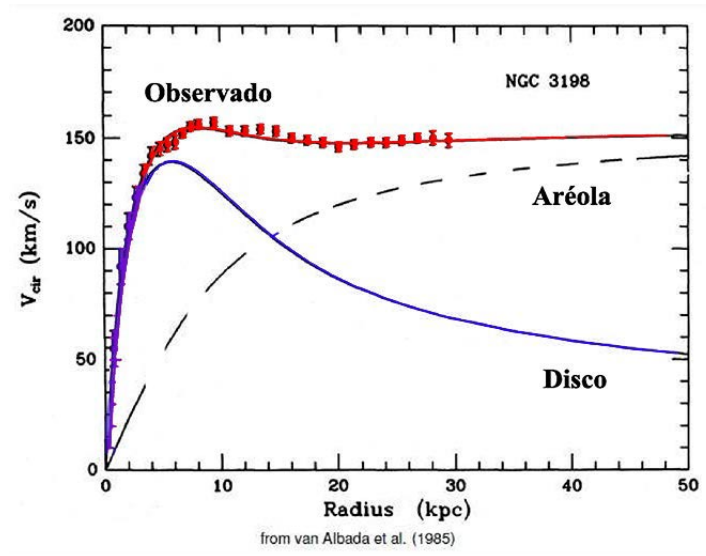


Figura 1.2: Composição do valor teórico calculado e de uma anel de matéria desconhecida ajustando se ao perfil encontrado.

nestes pontos, em algumas regiões, sem nada que pudesse aparentemente os gerar [19, 20].

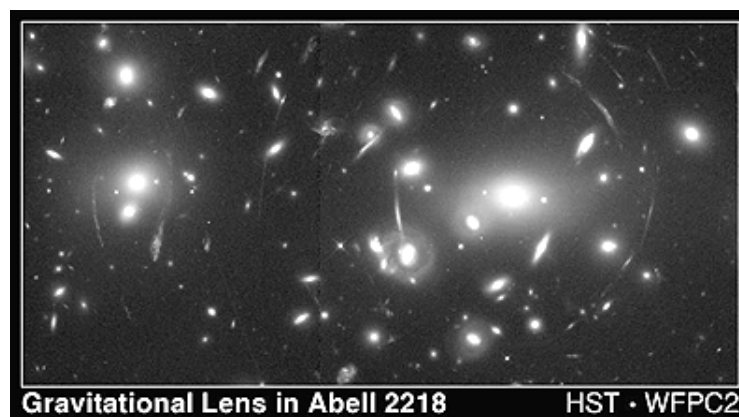


Figura 1.3: Lentes gravitacionais no conglomerado galáctico Abell 2218 [19]. Campos gravitacionais intensos deformam a luz em suas proximidades.

Como último caso citaremos o choque de galáxias no conglomerado Bullet, captado pelo grupo Chandra em 2004 [21]. Nele é possível verificar um comportamento anômalo de parte da matéria que permeia o gás estelar. Este choque tinha diferentes interpretações dependendo do método que se utiliza para observá-lo. Quando observado diretamente pela captação de radiação x das galáxias, observamos a colisão, com deformação das galáxias. Quando visualizado de forma indireta, por lentes gravitacionais, observando pelo contorno da luz vinda de estrelas mais longínquas, percebia-se que não havia a colisão, a matéria galáctica passava uma pela outra sem interagir. A figura 1.4 é uma reconstrução dessa observação. Durante esse choque as interações predominantes são eletromagnéticas, como a matéria escura é neutra, ela não sofre

deformação.

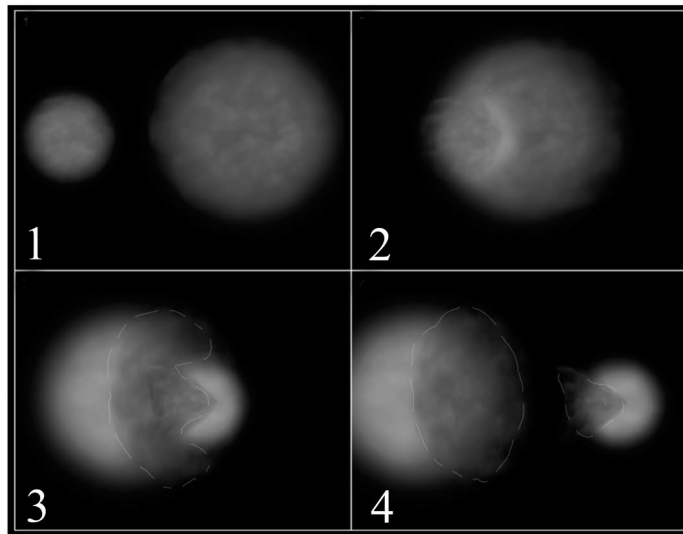


Figura 1.4: Colisão de galáxias no conglomerado de Bullet [21]. A porção mais clara representa a matéria escura (observada via lentes gravitacionais) e a mais escura a matéria comum (observada via radiação x). No quadro 1 temos o caso inicial, onde existem duas galáxias isoladas. No quadro 2 as galáxias iniciam o processo de colisão. O choque ocorre no quadro 3, verificamos a matéria luminosa (tonalidade escura, destacada pelo contorno traçado) sofrendo a deformação, já a matéria escura (tonalidade clara) continuar a avançar sem ser afetada. O quadro 4 é o final da colisão, as galáxias se atravessam mutuamente, como verificado pelo arraste no gás visível, enquanto as porções compostas por matéria escura transpassam se inalteradas.

Tendo em vista esta problemática, os astrônomos teóricos atribuíram a explicação de todos estes fenômenos o termo *matéria escura*, aquela não observada, mas necessária para “fecharmos” as contas. Essa matéria estaria distribuída em forma de auréolas (“halo”) em torno das galáxias. Seus possíveis constituintes são separados em três grupos, os Axions, os MACHOs e as WIMPs.

Áxions são conhecidos na Cromodinâmica Quântica por resolverem o problema de violação forte de simetria CP (carga-paridade) [22], tem a característica de serem partículas pouco massivas, entre elas temos os campos escalares associados DÍLATON [23] e “Chameleon” [24].

MACHOS são uma sigla para Massive Astrophysical Compact Halo Objects (Objeto Astrofísico Masivo de Halo Compacto) que seriam grandes objetos densos que emitem pouquíssima ou nenhuma radiação, assim como estrelas de nêutros e buracos negros.

Por último, a candidata atualmente mais aceita para a composição da matéria escura são as

WIMPs - Weakly Interacting Massive Particle [10, 11, 13, 14, 25, 26]. Traduzidas para português como Partículas Massivas Fracamente Interagentes (sendo também um trocadilho para "fracote") são previstas pelo Modelo Padrão e atendem a todos requisitos de matéria escura. Existem diversos experimentos sendo desenvolvidos atualmente para a detecção dessas WIMPs detalhados em [14].

Resultados mais recentes, obtidos pelo satélite Planck em 2013 [27], apontam que o universo seria constituído por apenas 4,9% de matéria conhecida (visível), 26,8% de matéria escura e a sua composição majoritária, de 68,3%, seria a energia responsável pela imprevista expansão acelerada do universo. Essa energia foi postulada para explicar o desvio experimental na Lei de Hubble [28].

### 1.1.3 A suposta nova partícula com massa da ordem de 750 GeV

Nesta subsecção os resultados recentes sobre a descoberta de um possível nova partícula (mais pesada que o bóson de Higgs) serão brevemente apresentados. Detalhes sobre a explicação desta partícula via dimensões extras estarão dispostos na seção 1.2.1.

Durante o ano de 2015 os grupos Atlas [29] e CMS [30] obtiveram, isoladamente, um interessante resultado de excesso de pares di-fótons ( $\gamma\gamma$ ) em energias de 13 TeV no Grande Colisor de Hádrons (LHC). Foi divulgado em 15 de dezembro de 2015 [31–33] o que se supõe ser uma nova partícula cuja massa é da ordem de 750 GeV. A imagem abaixo ilustra esse excesso na região  $m_{\gamma\gamma} \sim 750$  GeV extraída de apresentações de slides do grupos Atlas [32] e CMS [33].

Abaixo segue a tabela 1.3 com as massas aproximadas de quarks e partículas fundamentais. Podemos assim ter uma ideia do quão esta (possível) nova partícula é pesada.

Os resultados preliminares sobre o spin desta partícula são estudados no momento atual da escrita desta tese.

## 1.2 Modelos de Mundobrana em 5D

Nessa seção apresentaremos os modelos de métricas não fatorizáveis (*warped*) em cinco dimensões (5D) e pontos favoráveis destes modelos na explicação dos temas apontados na seção

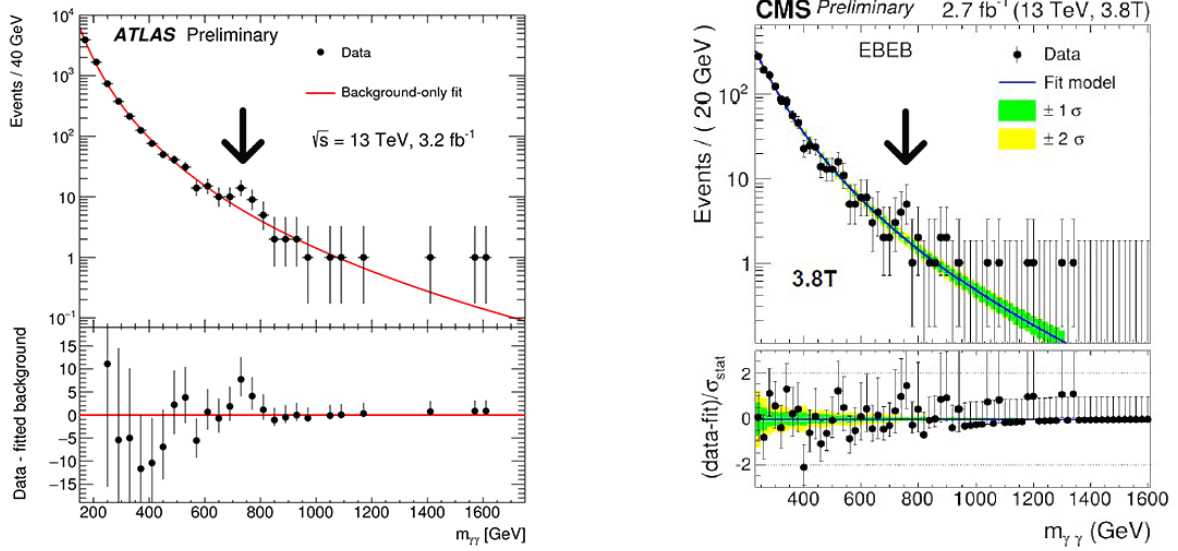


Figura 1.5: Resultados preliminares dos grupos Atlas e CMS onde na região de massa em torno de 750 GeV há uma suposta nova partícula que decai em dois fótons.

Partícula	Massa (GeV)	Partícula	Massa (GeV)
Bóson de Higgs	125	Muon	0.11
Quark Top	170	Quark Down	$4.0 \times 10^{-3}$
Bóson Z	91	Quark Up	$2.0 \times 10^{-3}$
Bóson W	80	Neutrino do Tau	$< 16 \times 10^{-3}$
Quark Bottom	4.2	Elétron	$5 \times 10^{-4}$
Tau	1.8	Neutrino do Múon	$< 2 \times 10^{-4}$
Quark Charm	1.2	Neutrino do Elétron	$< 2 \times 10^{-6}$
Quark Strange	0.12	Fóton	$\sim 10^{-21}$

Tabela 1.3: Tabela das massas de quark e partículas elementares [5].

1.1 anteriormente. Apontaremos ao final os problemas presente em modelos 5D finos, os quais são resolvidos através de modelos 5D espessos.

O espaço-tempo que percebemos é quadridimensional [34], ou seja, um ambiente de apenas três dimensões espaciais (largura, altura e profundidade) e uma dimensão temporal, denotadas como (3+1)D ou 4D. Entretanto, apontaremos alguns resultados teóricos interessantes ao se trabalhar com a hipótese de mais dimensões. Nessa visão o espaço 4D é chamado de brana, uma alusão à “membrana” como uma visualização de um superfície bidimensional em um espaço tridimensional, e o espaço onde esta brana está embebida é chamado de “Bulk”.

As primeiras propostas do tratamento de dimensões extras em Física foram feitas de forma

independente por Theodor Kaluza [35], em 1921, e Oscar Klein [36], em 1926. O modelo Kaluza-Klein (KK) tinha como objetivo a unificação da Gravidade com o Eletromagnetismo através de uma dimensão extra compactificada de raio  $R$ , com comprimento da ordem de  $10^{-23}$  m [35–37], algo ainda hoje fora da nossa escala experimental. Várias propostas ao longo dos anos foram aplicadas às chamadas Teorias de Kaluza Klein [38–42].

Em 1998, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [43], estenderam a proposta do Modelo KK para mais dimensões. No modelo ADD foi encontrada a relação entre as escalas de Planck (Bulk) em relação à escala Eletrofraca (Bрана) como:

$$M_{Pl}^2 = M_*^{n+2} (2\pi R)^n,$$

sendo  $n$  o número de dimensões extras e  $R$  o raio. Ajustando  $n$  e  $R$  poderemos encontrar o valor esperado por (1.1).

Particularizaremos nossa exposição para os modelos de dimensões extra *warped*<sup>1</sup> (cuja métrica é não fatorizável). Podemos denotar também o número de dimensões extras através do termo *codimensão*.

Em 1999, os dois modelos *warped* de Randall-Sundrum (RS) [44, 45] expuseram a ideia de que nosso mundo poderia ser composto como uma brana 4D embebida em um espaço 5D. A métrica do modelo RS-II é exibida abaixo [45]:

$$ds_5^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad \text{com } A(y) = k|y|, \quad (1.3)$$

para o RS-I temos a mesma métrica com a seguinte compactificação  $y = r_c \phi$  com  $\phi \in [0, 2\pi]$ . A métrica de Minkowski é do tipo  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , os  $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$  são as dimensões do espaço-tempo 4D, o  $y$  é a dimensão extra e  $A(y)$  o fator de warp, sendo  $k$  uma constante ajustável relacionada à curvatura do espaço anti de Sitter ( $AdS_5$ ). Na concepção destes modelos os modos sem massa (*modo zero*) de cada campo devem ser confinados na brana, e a esse processo de confinamento é dado o nome de *localização*.

Destes modelos se extraiu a resolução do problema da hierarquia de Física de Partículas, o qual consiste na discrepância de intensidade entre a força da gravidade e as outras três forças fundamentais (eletromagnética, fraca e forte). A relação obtida foi a seguinte:

$$M_p^2 = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2k\pi r_c}), \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>O adjetivo “*warped*” é traduzido como contorcido ou dobrado, isso se dá pelo fato desta dimensão adicional entrelaçar as demais.

observamos que a diferença entre a escala de Planck ( $M_p \sim 10^{19}$ ) e a escala eletrofraca ( $M \sim 10^3$  GeV) é descrita por uma exponencial decrescente dependente da constante  $k$  e da distância entre as branas  $L = 2\pi r_c$ .

No primeiro modelo de Randall-Sundrum (RS-I) [44] a dimensão extra é compactificada,  $y \in [0, L]$ , e existe uma brana em cada extremidade. A brana situada na origem é chamada de brana de Planck (também nomeada de escondida ou ultravioleta) e a brana da extremidade  $L = 2\pi r_c$  é chamada de brana da escala TeV (fraca, visível, infravermelho). Conseguiu se estipular um decaimento exponencial da escala de Planck na escala Fraca pela equação (1.4). No segundo modelo (RS-II) a distância entre as branas é estendida, podendo inclusive ser infinita. A gravidade usual em 4D é obtida do gráviton sem massa (confinado em nossa brana). Enquanto que os grávitons massivos (não confinados) são responsáveis por uma correção na lei de Newton para distâncias menores que micrômetros [45]. Entretanto, essa correção ainda não teria sido verificada devido a precisão dos experimentos atuais [46–48]. Ilustramos na figura 1.6 uma representação do modelo RS-I.

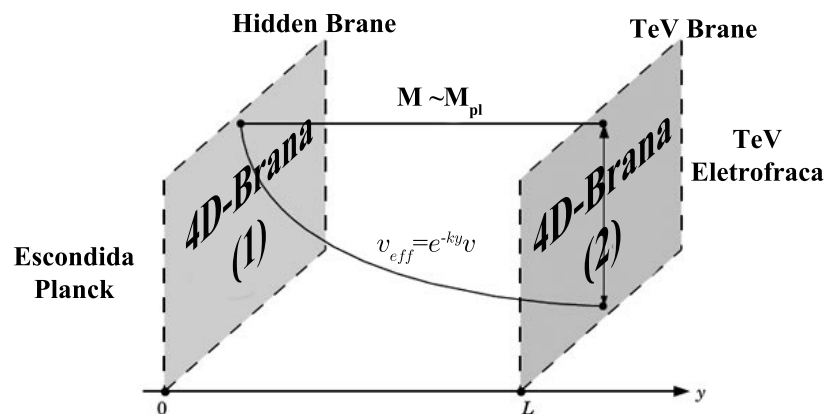


Figura 1.6: Modelo de Randall-Sundrum 1 (RS1): brana Planck (em  $y=0$ ) e brana TeV (em  $y = L$ ). A escala de Planck é denotada por  $M_p \sim 10^{19}$  enquanto a escala eletrofraca por  $M \sim 10^3$  GeV (1 TeV). O  $v$  denota o valor esperado do vácuo para o campo escalar de Higgs acoplado na ação do modelo RS. [37].

Apontamos nesta seção como os modelos RS permitem explicar o problema da Hierarquia, citamos brevemente que existem modelos em 5D tentando explicar fenômenos de matéria escura através de campos escalares interagentes com a brana nas Refs. [49–51], além dos que vinculam mundobrana com energia escura [52–54]. Em seis dimensões (6D) existem trabalhos como os do prof. Coimbra [55, 56] que utilizam um disco extradimensional para explicar as curvas de rotação das galáxias. Sob outro ponto de vista, podemos estudar a localização de campos que em



4D já se dispõe a explicar a matéria escura, como é o caso para o campo escalar “*Chameleon*” [57], para o espinor 3/2 Gravitino Ref. [58, 59] ou do campo Elko, abordado no capítulo 5. Encerramos apenas frisando que são abundantes as referências com as mais variadas propostas nos temas envolvendo mundobrana com matéria escura [60–62] e energia escura (assim, também quanto ao *problema da hierarquia da constante cosmológica*) [63–66].

### 1.2.1 Campos em 5D como explicação para a suposta partícula de massa 750 GeV

#### Gráviton e Radion

Retornando a descoberta da possível nova partícula no LHC [29–33], a Ref. [67] dos anos 2000, dentre várias estimativas, apontou que no modelo RS poderia haver um gráviton massivo ressonante com energia estimada de 600 GeV, um valor próximo do encontrado em 2015. Alguns artigos atuais ajustaram parâmetros de modelos 5D para reafirmar a validade do gráviton como um candidato a esta partícula [68, 69]. Outros atribuem esta partícula a um campo escalar relacionado à distância entre as branas, chamado de *radion* [70]. Este *radion* pode ter sua massa ajustada ao da partícula encontrada no LHC [71–74]. Cabe esperar o refinamento de dados para saber o *spin* da partícula encontrada e assim termos o veredito se tratamos como um gráviton (*spin* 2) ou um campo escalar (*spin* 0), resultados preliminares nesse sentido estão presentes nos slides dos grupos Atlas e CMS de março de 2016 [32, 33]. As Refs. [73, 74] agregam a temática de matéria escura e mundobrana na explicação da partícula. Outra abordagem está apresentada nos trabalhos [75, 76], onde a interação de um campo escalar com férmions é utilizada como explicação para esta nova partícula. Em resumo, o procedimento utilizado em todos esses casos consiste na obtenção das expressões de modos massivos de campos nestes modelos e fixações de valores para as constantes de acoplamentos. Então, vinculam-se essas expressões aos canais de decaimentos de partículas obtidos no LHC. Comentaremos abaixo sobre o mecanismo empregado para descrever esta partícula através da interação de um campo escalar com férmions em 5D.

### Campo escalar acoplado com férmions

O trabalho da referência [76] foi submetido no final de março de 2016, por Csaba Csaki e Lisa Randall (autora dos modelos RS). Nele a métrica (1.3) é posta na forma *conforme plana*, dada por:

$$ds_5^2 = \left(\frac{L}{z}\right)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) , \quad (1.5)$$

onde a brana de Planck é definida em  $z = L_0$  e a brana TeV em  $z = \tilde{L}$ . Partindo de uma ação onde um campo escalar  $S$  interage via um acoplamento Yukawa com um férmion  $\Psi$  em 5D como:

$$I = \int dx^4 \sqrt{-g} \tilde{L} Y_i \bar{\Psi}_i \tilde{S} \Psi_i \rightarrow \int dx^4 \left[ y_i^{eff} S \chi_i^1 \psi_i^1 + h.c \right] \quad (1.6)$$

sendo  $y_i^{eff} = y_i^{eff}(z)$  uma “constante” de acoplamento efetiva. É tomada a decomposição KK usual para o espinor

$$\Psi(x^\mu, z) = \sum_n [\chi(x^\mu) g_n(z) + \psi(x^\mu) f_n(z)] \quad (1.7)$$

sendo  $\chi = (\chi_R, \chi_L)$  um espinor 4D de quiralidade esquerda (*L-Left*) no *Bulk* 5D e  $\psi = (\psi_R, \psi_L)$  um espinor 4D de quiralidade direita (*R-Right*) no *Bulk* 5D. As funções  $g_n(z)$  (*Left*) e  $f_n(z)$  (*Right*) denotam a componente na dimensão extra de cada espinor no *Bulk*. Aplicando essa decomposição na equação de movimento extraída da ação, teremos a seguinte expressão para os modos massivos em termos das funções de Bessel  $J, Y$ :

$$g_n(z) = \left(\frac{L}{z}\right)^{\frac{5}{2}} \left[ A_n J_{c+\frac{1}{2}}(m_n z) + B_n Y_{c+\frac{1}{2}}(m_n z) \right] , \quad (1.8)$$

$$f_n(z) = \left(\frac{L}{z}\right)^{\frac{5}{2}} \left[ A_n J_{c-\frac{1}{2}}(m_n z) + B_n Y_{c-\frac{1}{2}}(m_n z) \right] , \quad (1.9)$$

sendo  $A_n$  e  $B_n$  constantes de integração e  $c$  regula a localização do modo zero na brana. Para  $c > \frac{1}{2}$  localizamos o modo esquerdo, enquanto para  $c < -\frac{1}{2}$  o direito é confinado, já para  $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$  não há nenhum modo zero localizado. No capítulo 4, verificaremos as semelhanças as expressões de modo zero, Eq. (4.37), e para as funções massivas de férmions em 6D na Eq. (4.73).

O procedimento realizado até aqui quase não tem novidade comparada à localização usual de férmions em 5D através de um acoplamento Yukawa (especificaremos na próxima seção). Porém, o trabalho segue fazendo várias considerações fenomenológicas sobre este campo escalar  $S$  e os modos massivos fermiônicos. Avançando para o resultado final, é possível obter as

razões de larguras de decaimento  $\Gamma$  dos pares de bósons  $WW$ ,  $WZ$  e de  $Z\gamma$  como:

$$\frac{\Gamma_W}{\Gamma_\gamma} = \frac{2}{s^4} \frac{\Lambda_W^2}{\Lambda_\gamma^2} \sim 5.3, \quad (1.10)$$

$$\frac{\Gamma_Z}{\Gamma_\gamma} = \Lambda_\gamma^2 \left( \frac{\tan(\theta_W^2)}{\Lambda_W} + \frac{\cot(\theta_W^2)}{\Lambda_W} \right)^2 \sim 2.0, \quad (1.11)$$

$$\frac{\Gamma_{\gamma Z}}{\Gamma_\gamma} = \Lambda_\gamma^2 \left( \frac{\tan(\theta_W)}{\Lambda_W} + \frac{\cot(\theta_W)}{\Lambda_W} \right)^2 \sim 0.12, \quad (1.12)$$

onde os parâmetros  $\Lambda$ ,  $\theta$ ,  $s^4$  são obtidos em termos do primeiro modo massivo relacionado ao primeiro zero da expressão (1.8) e (1.9), além de considerações sobre o termo de acoplamento  $y_i^{eff}$ .

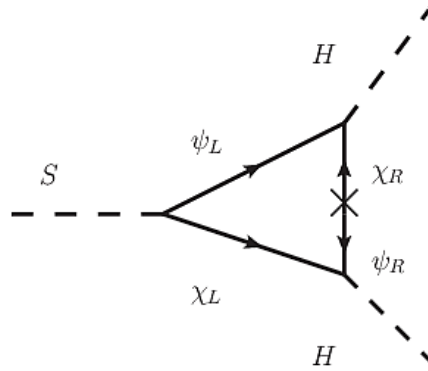


Figura 1.7: Um exemplo de decaimento do campos escalar,  $S$ , em dois bósons de Higgs,  $H$ . [76]. O símbolo entre os espinores com quiralidade direita ( $\times$ ) representa uma inserção. Para melhor entendimento desta inserção verifique o chamado “diagrama pinguim” na Ref. [77].

Encerramos esta subseção apontando que há atualmente diversos artigos sendo submetidos e publicados nesta perspectiva, com muitas citações entre si.

### 1.2.2 Modelos *warped* de branas espessas em 5D

Apesar dos bons resultados obtidos pelos modelos de RS [44, 45], este configura um modelo simplificado onde a brana não possui espessura e por isso apresenta algumas falhas [78–80]. Entre essas falhas está o não confinamento de modos zeros dos campos de spin 1 (gauge ou calibre vetorial que representa o campo eletromagnético) e de spin  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$  (férmions que representam a matéria) [78], além de singularidades em termos que envolvem derivadas. Esses problemas foram corrigidos nos anos seguintes, em trabalhos mais complexos onde a brana tem espessura implementada por um campo escalar [79, 80]. A construção e estabilidade destes modelos espessos é geralmente embasada em *Defeitos Topológicos*, como paredes de domínio em 5D [81–84].

Assim, foram desenvolvidos muitas publicações na geração de branas espessas, especialmente no Brasil, destacamos algumas desenvolvidas (ou estudadas) pelo grupo de Teoria de Campos da UFC [85–95], além de em outros importantes pólos como [96–108]. Especificamente as referências [91, 92, 103] demonstram como o campo de calibre pode ser confinado neste modelos  $AdS_5$  espessos, acoplados com o dÍlaton [91, 92] ou outros campos escalares [103]. Para fÉrmons, um acoplamento tipo Yukawa é apresentado como solução para a localização do modo zero [93, 94, 104, 105, 109–111]. Alternativamente, outros tipos de acoplamento são propostos nas Ref. [112, 113] nos modelos RS.

Escolhendo o caso mais simples de modelos 5D espessos presente na Ref. [79], faremos um comparativo para ilustrar os fatores de warp,  $A(y)$ , e de suas derivadas,  $A'(y)$  e  $A''(y)$  de um modelo espesso e um fino. Segue abaixo esses fatores para o caso RS (fino) [44, 45] e o modelo espesso de M. Gremm (MG) [79] :

$$A(y) = k|y|, \quad A'(y) = k \operatorname{sgn}(y), \quad A''(y) = 2k\delta(y) \quad (1.13)$$

$$A(y) = b \ln [2 \cosh(\kappa y)], \quad A'(y) = b\kappa \tanh(\kappa y), \quad A''(y) = b\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa y) \quad (1.14)$$

para o caso espesso,  $b$  é um parâmetro de amplitude e  $\kappa$  um parâmetro de espessura. Observe o comparativo dos fatores de warp,  $A(y)$ , fino e espesso da Eq. (1.13) na figura 1.8.

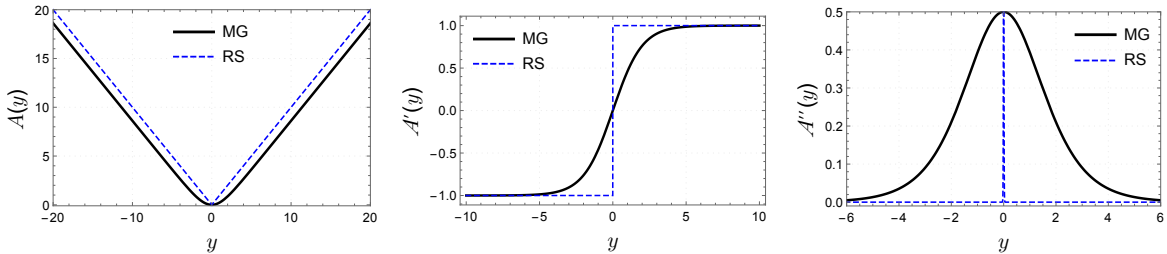


Figura 1.8: Diferenças entre modelos fino e espesso em 5D. Foram feitos  $b = 2$ ,  $\kappa = \frac{1}{2}$  e  $k = 1$ .

Verificamos na figura da esquerda de Fig. 1.8 que a diferença entre o fator fino (linha tracejada) e espesso (linha cheia) ocorre apenas em torno da origem. Na figura do meio de Fig. 1.8 vemos que essa diferença implica na descontinuidade na derivada primeira para o modelo RS, enquanto que o espesso se mantém contÍnuo. Na terceira figura de Fig. 1.8 a definição de espessura pode ser melhor entendida, para o caso fino temos uma distribuição *delta de Dirac* (infinitamente fina), enquanto que o caso espesso possui uma distribuição larga. Verifiquemos o comportamento do escalar de curvatura obtida da mÉtrica (1.3) é dado como

$$R = 8A''(y) - 20(A'(y))^2, \quad (1.15)$$

substituindo na equação (1.15) os fatores da equação (1.13), concluiremos que esta curvatura é singular na origem para o modelo RS, enquanto bem definida para o caso espesso. Em ambos os casos essa curvatura tende a um espaço  $AdS_5$  para grandes valores de  $y$ . A essa suavização atribuímos que os modelos espessos são mais realistas que modelos finos, sendo também mais gerais (podemos obter modelos finos através dos espessos para grandes valores de  $\kappa$ ). Lembremos novamente que os problemas de confinamento de férmions e campo de gauge em modelos 5D finos são resolvidos em modelos espessos [80].

### 1.3 Conclusões do capítulo 1 e estrutura da tese

Encerramos aqui nossa introdução. Resumimos que modelos de mundobrana dispõem de fortes aplicações fenomenológicas na atualidade, um período bastante produtivo para publicações nesta área. Utilizamos como problemas explicados por dimensões extras, a hierarquia das forças fundamentais, matéria e energia escura, além da bastante recente suposição de uma nova partícula no LHC. Apresentamos modelos espessos em 5D, os quais tem várias contribuições de pesquisadores nacionais. Exibiremos nos próximos capítulos modelos em 6D e a localização de campos nestes modelos. Abaixo está a estrutura dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 apresentaremos modelos em seis dimensões, apontaremos as vantagens obtidas por estes modelos em comparação aos em 5D. Focaremos em detalhar modelos axiais espessos trabalhados no grupo da UFC, elaborados com o intuito de resolverem problemas presentes em modelos 6D finos. Uma visão geral sobre a equação de Einstein e seus tensores em 6D estará detalhada e nos servirá de base para a aplicação de alguns cálculos durante toda a tese. Comentaremos sobre algumas aplicações exclusivas para modelos em seis dimensões.

No capítulo 3 estudaremos o confinamento dos campos bosônicos (campo escalar, campo eletromagnético e gravidade) na forma geral para alguns modelos apresentados no capítulo 2. Verificaremos que, diferente do caso 5D, todos estes campos tem seus respectivos modos zero naturalmente confinados (sem necessidade de acoplamento com campos de fundo que não a gravidade) em 6D. Concluiremos que o campo escalar (spin 0) e a gravidade (spin 2) têm suas equações diferenciais idênticas, enquanto para o campo eletromagnético (spin 1) teremos redução de algumas ordens de fatores em comparação a gravidade/ campo escalar. Para todos os campos e 6D os modos massivos serão descritos por funções de Bessel e serão não localizados. Trataremos também da abordagem de Schrödinger para todos estes campos.

As contribuições de minhas publicações para esta tese se iniciam no capítulo 4. Nele apresentaremos aspectos gerais para o confinamento de férmions de spin  $1/2$  e  $3/2$  em 6D. Verificaremos que diferente dos campos tratados no capítulo 3, necessitamos de um acoplamento com um campo de fundo para confinarmos o modo zero fermiônico em 6D. Propusemos um acoplamento mínimo de férmions com um campo eletromagnético de fundo. A escolha deste calibre é fundamental para o confinamento do modo zero e presença de ressonância nos modos massivos. Apresentaremos três tipos de escolha em três modelos diferentes para esta comprovação. A abordagem de Schrödinger será bem mais detalhada neste capítulo, uma vez que o campo fermiônico é separado em duas porções independentes (com quiralidade direita e esquerda).

O confinamento do espinor Elko, candidato à matéria escura, será presente no capítulo 5. Demonstraremos que este espinor, assim como os outros férmions do capítulo 4, não é naturalmente localizado em 6D. Entretanto, por este espinor ter dimensão canônica de massa um, as interações permitidas para este campo são bastante limitadas. Apresentaremos um acoplamento bem particular, resultado da estrutura exótica deste espinor, como solução para o problema da localização deste campo.

No capítulo 6 apresentaremos os resultados do último ano de meu doutorado. Introduziremos o conceito de Entropia Configuracional para fixar alguns parâmetros de modelos 6D. Faremos também um análise qualitativa da correção da lei de Coulomb através da interação de modos massivos do campo de calibre e do modo zero de férmions em 6D.

Finalizaremos exibindo as conclusões e perspectivas dos principais pontos desta tese no capítulo 7. No arquivo digital desta tese todas referências listadas ao final contém os *links* clicáveis para suas respectivas páginas no INSPIREHEP. Lá estarão disponíveis as versões ARXIV e originais das revistas (com o DOI) de cada artigo.

## 2 Modelos Warped em 6D

Neste capítulo exibiremos modelos de mundobrana de espaços “warped” em seis dimensões (6D), os quais são também chamados de modelos de codimensão 2. Focaremos em fazer uma breve revisão sobre a geração destes modelos, apontando características gerais de modelos chamados de defeito tipo corda (por alusão à *Teoria de Cordas*) [114–119]. Estes modelos são um caso particular de uma vasta classe de geometrias de codimensão 2, que possuem as mais diversas aplicações em correspondência AdS/CFT [120] e especialmente em Cosmologia, devido à sua intersecção com a temática de *cordas cósmicas* [121–127]. Compararemos pontos positivos e negativos de alguns modelos tipo corda com relação entre si e ilustrando resultados em gráficos. Sugerimos para consulta mais detalhada os artigos originais de cada modelo (listados em cada subseção) e indicamos a tese de José Euclides Gomes da Silva [114] para uma abordagem com viés matemático mais detalhado quanto à construção de alguns dos modelos aqui expostos.

### Vantagens de modelos 6D sobre 5D

Observamos na seção anterior que o modelo RS possui alguns problemas, os quais podem ser resolvidos pela introdução de uma espessura à brana. Nesta seção apresentaremos a alternativa de se trabalhar em modelos de codimensão 2 (6D). Iniciamos motivando características gerais de modelos 6D sobre os 5D.

- Os grávitons massivos de modelos 6D contribuem com uma menor correção na Lei de Newton [119];
- Não há necessidade de ajuste fino na constante cosmológica em 6D com a tensão na brana para cancelamento da constante cosmológica 4D [119];
- O confinamento do modo zero do campo vetorial de calibre ocorre de forma espontânea (apenas a interação com a gravidade é necessária), mesmo em modelos finos [128, 129];
- É possível explicar a hierarquia da massa de neutrinos (férmions sem carga e de massa muito pequena) através de modelos em codimensão 2 compactos [130];

- Já existem também alguns trabalhos recentes explicando a possível nova partícula de 750 GeV através de um cenário “warped” 6D [131, 132].

Separaremos os modelos “warped” 6D em duas categorias, os *axiais* e os *em coordenadas compactas*. Nos axiais a simetria é cilíndrica (o espaço transverso é um círculo cujo raio é a dimensão não compacta e a coordenada angular a dimensão compacta, sendo o eixo nosso espaço 4D) [116–119, 128, 129, 133–141]. Nosso grupo da UFC trabalhou somente nestes modelos axiais [142–155] e por isso eles serão bem mais detalhados a seguir. Nos modelos compactos a simetria é esférica (dois ângulos descrevem o espaço transverso e o raio é nosso espaço 4D). Podemos citar como exemplos destes o chamado “Apple Shaped” [156], “Football Shaped” [157–159], “Teardrop” [160] e os “Nested” (aninhados) [131, 132, 161].

Na figura 2.1 existe uma representação destes modelos. Ilustramos o segundo modelo RS2 (não compacto), seguido de um exemplo de modelos 6D axial e por último a representação de um cenário 6D com duas dimensões compactas.

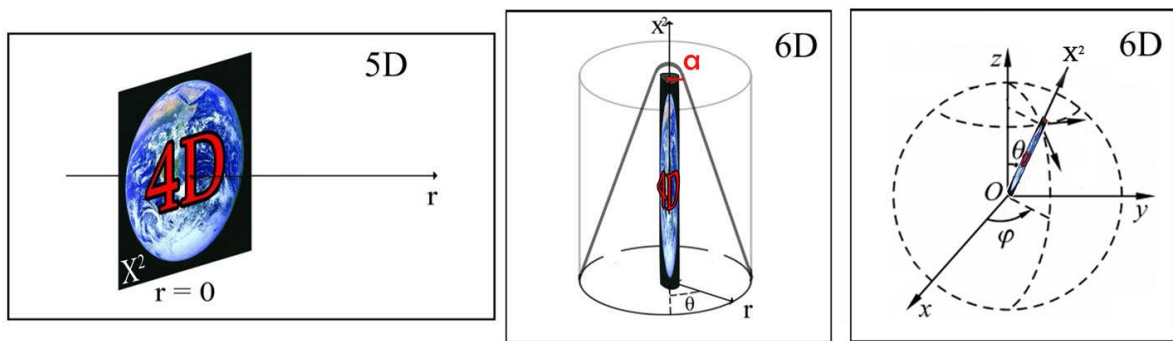


Figura 2.1: Representação do RS-II, um modelo axial 6D e um modelo compacto esférico 6D.  $X^2$  representa nosso universo 4D, que no caso 5D pode ser visualizado como superfície, enquanto que nos 6D como uma reta.

## 2.1 Aspectos gerais de geometrias axiais 6D

Modelos de mundobrana com simetria axial em 6D (ou codimensão 2) são chamados de defeitos tipo corda [116–119], este nome se dá devido às semelhanças destes modelos com defeitos topológicos tipo corda cósmicas [162–166].



Para estes modelos, a seguinte ação de Einstein Hilbert é exposta em 6D [119]:

$$S_6 = \int_{\mathcal{M}_6} \left( \frac{1}{2\kappa_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x, \quad (2.1)$$

onde  $\kappa_6 = 8\pi G_N = 8\pi/M_6^4$ , sendo  $G_N$  a constante de Newton e  $M_6^4$  a massa de Planck em seis dimensões,  $R$  é o escalar de curvatura no “Bulk”, que possui dimensão canônica de massa  $\dim[R] = 2$ . Ainda  $\mathcal{L}_m$  é o lagrangiano de matéria e  $\Lambda$  a constante cosmológica em 6D, ambos com dimensão de massa 6. Obtemos desta ação a seguinte equação de Einstein [119]

$$R_{MN} - \frac{R}{2}g_{MN} = -\kappa_6(\Lambda g_{MN} + T_{MN}). \quad (2.2)$$

onde  $R_{MN}$  é o tensor Ricci (escrito em termos do tensor de Riemann) e  $T_{MN}$  é o tensor energia-momentum. Exporemos a forma destes tensores em termos da métrica a ser definida a seguir.

Desta convenção podemos adequar a métrica dos modelos axiais na seguinte forma [119, 128, 129, 133–136, 139, 140, 143–155]:

$$ds_6^2 = F(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + H(r)d\theta^2, \quad H(r) = \beta(r)F(r), \quad (2.3)$$

onde o espaço transversal é composto pelas coordenadas  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Representamos o fator “warp” por  $F(r)$  e o termo angular  $H(r)$  com  $\dim[\beta] = 2$ . Utilizaremos a seguinte assinatura para a métrica plana de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ .

O problema da hierarquia é aqui resolvido pela relação das escalas através do volume extra dimensional [119, 135, 136, 139, 140, 145–155]

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty dr F(r) \sqrt{H(r)}, \quad (2.4)$$

Para evitar singularidades nas curvaturas (intrínseca e extrínseca) é necessário que as seguintes condições de regularidade sejam atendidas [119, 135, 136]:

$$F(r)|_{r=0} = \text{cte} \quad (2.5a)$$

$$F'(r)|_{r=0} = 0, \quad (2.5b)$$

$$H(r)|_{r=0} = 0, \quad (2.5c)$$

$$\left( \sqrt{H(r)} \right)' |_{r=0} = 1, \quad (2.5d)$$

verificaremos que o atendimento dessas condições será uma interessante questão a ser abordada nos diversos modelos da seção 2.2.

Iniciaremos agora o cálculo dos tensores da Equação de Einstein em Eq. (2.2) para obtermos a curvatura e o tensor energia momento. Os símbolos de Christoffel são calculados como:

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2}g^{KP} [\partial_N g_{KM} + \partial_M g_{KN} - \partial_K g_{MN}] , \quad (2.6)$$

para a métrica da Eq. (2.3) possui os seguintes termos não nulos:

$$\Gamma_{r\mu}^\mu = \frac{1}{2} \frac{F'}{F}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^r = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} F', \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} (F' \beta + F \beta'), \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{F'}{F} + \frac{\beta'}{\beta} \right). \quad (2.7)$$

Com isso o tensor de Riemann que tem forma

$$R_{KMN}^P = \partial_M \Gamma_{\nu K}^P - \partial_K \Gamma_{\mu K}^P + \Gamma_{\mu L}^P \Gamma_{\mu K}^L - \Gamma_{\nu L}^P \Gamma_{\nu K}^L , \quad (2.8)$$

se reduz aos índices

$$\begin{aligned} R_{\nu\nu\mu}^\mu &= -R_{\nu\mu\nu}^\mu = \left( \frac{F'}{2F} \right)^2 , \\ R_{rr\mu}^\mu &= \left( \frac{F'}{2F} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{F''}{F}, \quad R_{\mu r \nu}^r = \eta_{\mu\nu} \left[ \left( \frac{F'}{2F} \right)^2 - \frac{1}{2} F'' \right] \\ R_{\theta\theta\mu}^\mu &= \beta \left( \frac{F'}{2F} \right)^2 + \frac{1}{4} F' \beta', \quad R_{\mu\theta\nu}^\theta = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F \left( \frac{F'}{F} + \frac{\beta'}{\beta} \right) \\ R_{\theta\theta r}^r &= \frac{1}{2} \beta F'' + \frac{1}{2} F' \beta' - \frac{\beta F'^2}{4F} + \frac{1}{2} F \beta'' - \frac{F \beta'^2}{4\beta}, \\ R_{r\theta r}^\theta &= -\frac{F''}{2F} - \frac{F' \beta'}{2F\beta} + \frac{F'^2}{4F^2} - \frac{\beta''}{2\beta} + \frac{\beta'^2}{4\beta^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

O tensor de Ricci dado por  $R_{MN} = R_{MPN}^P$  terá as componentes:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \left( \frac{3F'^2}{F} + \frac{\beta' F'}{\beta} + 2F'' \right) \\ R_{rr} &= -\frac{5F''}{2F} - \frac{F' \beta'}{2F\beta} + \frac{5F'^2}{4F^2} - \frac{\beta''}{2\beta} + \frac{\beta'^2}{4\beta^2} \\ R_{\theta\theta} &= \frac{1}{4} \left( -\frac{3\beta F'^2}{F} - 6\beta' F' + \frac{F \beta'^2}{\beta} - 2\beta F'' - 2F \beta'' \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim a curvatura escalar dada por  $R = g^{MN} R_{MN}$  pode ser simplificada como:

$$R = - \left( 5 \frac{F''}{F} + \frac{5}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 + 3 \frac{F' \beta'}{F \beta} + \frac{\beta''}{\beta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right)^2 \right) \quad (2.11)$$

De forma análoga, se considerarmos apenas a composição do espaço transversal que forma a secção 2D da variedade  $\mathcal{M}_2$  teríamos uma métrica:

$$ds_2^2 = dr^2 + \beta(r) d\theta^2 \quad (2.12)$$

e desta uma curvatura na forma:

$$R_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right)^2 - \frac{\beta''}{\beta} \quad (2.13)$$

Retornando a variedade completa  $\mathcal{M}_6$ , calculando o tensor de Einstein como  $G_{MN} = R_{MN} - \frac{R}{2}g_{MN} = -\kappa_6(\Lambda g_{MN} + T_{MN})$  e adotando a constante cosmológica em 4D como nula  $\Lambda_4 = 0$ , obteremos:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \left( 2F'' + \frac{5F'\beta'}{4\beta} + \frac{F'^2}{2F} + \frac{F\beta''}{2\beta} - \frac{F\beta'^2}{4\beta^2} \right); \\ G_{rr} &= \frac{F'\beta'}{F\beta} + \frac{5F'^2}{2F^2}, \quad G_{\theta\theta} = 2\beta \left( F'' + \frac{F'^2}{2F} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por fim, dada a característica diagonal da métrica na Eq. (2.3), as Refs. [119, 135, 136, 145, 147–150, 153–155] utilizam a seguinte decomposição para o tensor energia-momento em seus índices mistos  $T_N^M = T_M \delta_N^P$  e assim teremos [119, 135, 136, 145, 147–150, 153–155]

$$t_0(r) = -\frac{1}{\kappa_6} \left[ 2\frac{F''}{F} + \frac{5F'\beta'}{4F\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta''}{\beta} - \frac{1}{4} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right)^2 \right] - \Lambda, \quad (2.15a)$$

$$t_r(r) = -\frac{1}{\kappa_6} \left[ \frac{F'\beta'}{F\beta} + \frac{5}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 \right] - \Lambda, \quad (2.15b)$$

$$t_\theta(r) = -\frac{1}{\kappa_6} \left[ 2\frac{F''}{F} + \frac{1}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 \right] - \Lambda, \quad (2.15c)$$

sabemos que a condição de energia dominante é verificada quando [135]:

$$t_0 \geq |t_i|, \quad \text{com } i = r, \theta. \quad (2.16)$$

Na próxima subseção apresentaremos algumas métricas em 6D as quais podem ou não obedecer às condições de regularidade da Eq. (2.5) e de energia dominante da Eq. (2.16).

## 2.2 Alguns modelos 6D abordados nesta tese

Nesta seção particularizaremos as equações gerais definidas na seção 2.1. Daremos foco aos modelos elaborados em nosso grupo como proposta para o atendimento das condições de regularidade Eq. (2.5) e de energia dominante da Eq. (2.16) [143–155]. Separaremos cada modelo nas subseções a seguir.

### 2.2.1 Modelo tipo corda Gherghetta e Shaposhnikov:

Poucos meses depois da publicação do segundo de Randall-Sundrum, RS-II, foi elaborada uma extensão deste em 6D. Tony Gherghetta e Mikhail Shaposhnikov (GS) desenvolveram em seu trabalho “*Localizing Gravity on a Stringlike Defect in Six Dimensions*” [119] um defeito tipo corda em 6D. O modelo GS apresenta a vantagem de não conter singularidades como o modelo de RS e prover uma menor correção na Lei de Newton em 4D.

Este modelo GS se baseia em uma aproximação do tensor energia momento da Eq. (2.15) para tratar de um versão do modelo RS em 6D. Pretendendo analisar um caso onde a fonte de matéria fosse exponencialmente decrescente, suprimida ao longo da dimensão extra, se definiu que a região onde essa fonte sobrevivia como “*core*” (núcleo) da corda [119, 135, 136]. Uma das possibilidades mais simples para representar os fatores de “*warp*” da métrica na Eq. (2.3) é adotar a solução fora desse núcleo  $r > r_0$ , onde o tensor energia momento dado na equação (2.15) é sempre nulo [119, 133], assim:

$$F(r) = e^{-c r} \quad , \quad H(r) = R_0^2 e^{-c r} \quad , \quad (2.17)$$

onde  $c > 0$  é uma constante que regula a curvatura e a constante cosmológica do modelo GS (desempenha o mesmo papel do  $k$  do modelo RS da Eq. (1.3)), mostraremos que esse espaço é um anti-deSitter ( $AdS_6$ ). Note também da equação (2.3) que no GS temos  $\beta = R_0^2$ , este termo representa o raio do espaço transversal, sendo também uma constante de regularização dimensional  $dim[R_0] = -1$  (comprimento), enquanto  $dim[c] = 1$  (massa).

Em princípio a solução apresentada na equação (2.17) seria válida apenas para o exterior do núcleo da corda, porém a Ref. [119] propõe o caso infinitamente fino onde  $r_0 \rightarrow 0$  e assim essa solução seria válida em todo domínio de  $r$ . Entretanto, o trabalho de Tinyakov-Zuleta, na Ref. [135], prova que não é possível observar o caso de energia dominante para um modelo infinitamente fino em 6D, além de outras considerações problemáticas sobre a escolha de  $\beta$  constante [135]. Isso motivou nosso grupo a trabalhar com versões suaves e espessas de modelos 6D a fim de corrigir esses problemas e atender tanto as condições de energia (2.16) como as de regularidade (2.5).

Um gráfico dos fatores do modelo GS da Eq. (2.17) é presente na figura 2.2.

Verificamos que nem todas as condições de regularidade dispostas na equação (2.5) são obe-

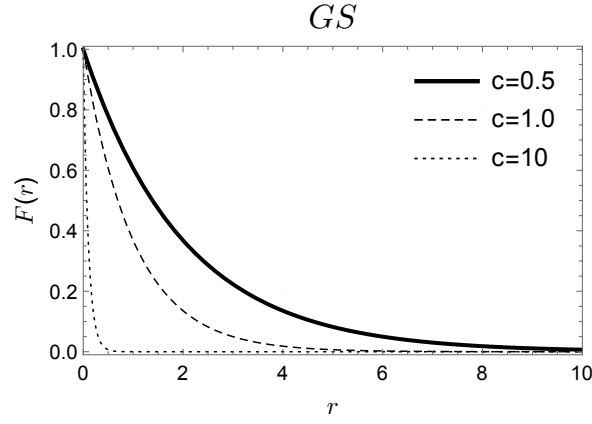


Figura 2.2:  $F(r)$  para o modelo GS. Verificamos que o parâmetro  $c$  regula a espessura da região não nula deste fator. Como para o GS temos  $H(r) = R_0^2 F(r)$  a constante  $R_0^2$  apenas regula sua amplitude.

decidas para todo  $c$ :

$$F(0) = 1, \quad (2.18a)$$

$$F'(r)|_{r=0} = -c e^{-cr}|_{r=0} = -c, \quad (2.18b)$$

$$H(0) = R_0^2, \quad (2.18c)$$

$$\left( \sqrt{H(r)} \right)' \Big|_{r=0} = \frac{1}{2} \frac{H'(r)}{\sqrt{H(r)}} \Big|_{r=0} = -\frac{R_0}{2} c \quad (2.18d)$$

apenas a condição (2.5a) é observada. Abordaremos modelos que corrigem este problema de regularidade nas próximas subseções.

Seguindo, necessitamos para o cálculo da curvatura na equação (2.11) das derivadas:

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = \frac{H'(r)}{H(r)} = -c, \quad \frac{F''(r)}{F(r)} = \frac{H''(r)}{H(r)} = c^2, \quad \frac{\beta'(r)}{\beta(r)} = \frac{\beta''(r)}{\beta(r)} = 0 \quad (2.19)$$

assim a curvatura da equação (2.11) tem a seguinte forma no GS

$$R = - \left( 5c^2 + \frac{5}{2}c^2 \right) = -\frac{15}{2}c^2, \quad (2.20)$$

representando um espaço  $AdS_6$  [119], enquanto a curvatura da variedade transversa pela equação (2.13) é nula por  $\beta$  ser uma constante.

O tensor momento energia dado pelas equações (2.15) com o auxílio das Eqs. (2.19) é obtido como:

$$t_0 = t_r = t_\theta = -\frac{5}{2} \frac{c^2}{\kappa_6} - \Lambda, \quad (2.21)$$

onde para que estas componentes se anulem (solução de vácuo) verificamos que a constante cosmológica deve ter a forma:

$$\Lambda = -\frac{5}{2} \frac{c^2}{\kappa_6}, \quad (2.22)$$

como esperado a constante cosmológica é negativa, verificamos que o parâmetro  $c$  está relacionado com a constante cosmológica e com a massa de Planck no “Bulk”  $c = \sqrt{-2\Lambda\kappa_6/5}$ .

Por fim, a solução para o problema da hierarquia apresentada na Eq. (2.4) com os fatores de “warp” da Eq. (2.17) é exibida como

$$M_p^2 = 2\pi R_0 M_6^4 \int_0^\infty dr e^{-\frac{3}{2}cr} = \left(\frac{4\pi R_0}{3c}\right) M_6^4, \quad (2.23)$$

o resultado onde  $M_P \gg M_6$  é reproduzido quando o parâmetro geométrico tende a zero ( $c \rightarrow 0$ ). Verificaremos que esta relação para a hierarquia se manterá para os próximos modelos apresentados, uma vez que todos eles recairão assintoticamente no modelo fino GS. Este resultado também será observado no cálculo da Entropia Configuracional na seção 6.1.

### 2.2.2 Modelo Hamilton Sóliton-charuto:

Como motivação para corrigir o problema das condições de regularidade (2.18), o modelo chamado “string cigar” [147–149, 153] propõe um espaço transversal construído a partir do chamado “Hamilton’s cigar soliton” [167], que está associado ao fluxo de Ricci [167–170].

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{MN}(\lambda) = -2R_{MN}(\lambda),$$

sendo  $\lambda$  um parâmetro métrico Ref. [147–149, 153] foi obtido a seguinte forma para a variedade transversal:

$$ds_2^2 = dr^2 + \tanh^2(r)d\theta^2, \quad (2.24)$$

a partir disso os seguintes fatores de “warp” foram derivados para o chamado “Hamilton string cigar” (HC) [147–149, 153]

$$F(r) = e^{-cr + \tanh(cr)}, \quad H(r) = \left(\frac{\tanh(cr)}{c}\right)^2 e^{-cr + \tanh(cr)}, \quad (2.25)$$

aqui  $\beta(r) = \left(\frac{\tanh(cr)}{c}\right)^2$ , observe que para  $\beta(r \rightarrow \infty) = c^{-2}$  atingimos o valor constante associado ao  $R_0^2$  do modelo GS, assim.

$$R_0 = \frac{1}{c}, \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Um gráfico desses fatores no HC é presente nas figuras 2.3 e 2.4 onde verificamos ser um caso suave do GS da Fig. 2.2.

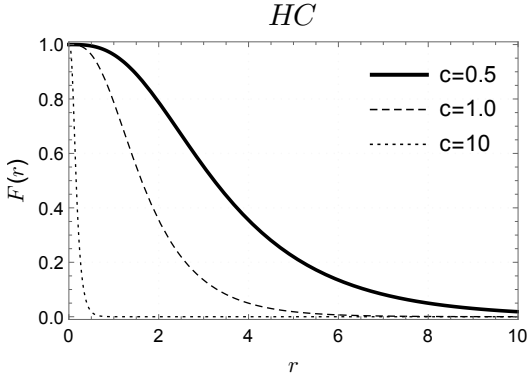


Figura 2.3:  $F(r)$  para o modelo HC. Verificamos que o parâmetro  $c$  regula a espessura da região não nula. Quando  $c \rightarrow \infty$  este fator recupera a forma do GS.

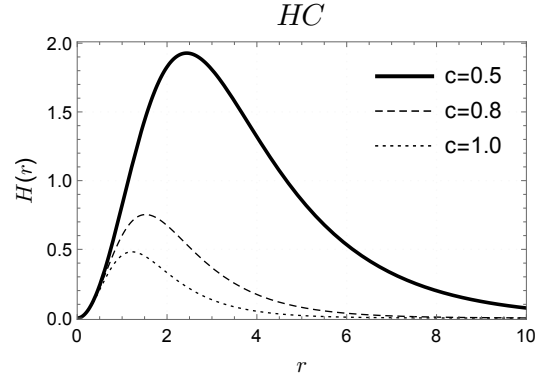


Figura 2.4:  $H(r)$  para o modelo HC. Aqui o parâmetro  $c$  regula simultaneamente a espessura e amplitude da região não nula. Associamos  $R_0 = \frac{1}{c}$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Observamos que no HC todas as condições da Eq. (2.5) são obedecidas uma vez que a tangente hiperbólica se anula na origem [147–149, 153]:

$$F(0) = 1, \quad (2.27a)$$

$$F'(r)|_{r=0} = [-c \tanh(cr)^2 e^{-cr+\tanh(cr)}] |_{r=0} = 0, \quad (2.27b)$$

$$H(0) = 0, \quad (2.27c)$$

$$\left(\sqrt{H(r)}\right)' \Big|_{r=0} = \left[ \left( \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{1}{2} \tanh^3(cr) \right) e^{-\frac{1}{2}[cr-\tanh(cr)]} \right] \Big|_{r=0} = 1 \quad (2.27d)$$

Para facilitar o cálculo da curvatura e tensor energia momentos calculamos para o HC os termos

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = -c \tanh(cr)^2, \quad (2.28)$$

$$\frac{F''(r)}{F(r)} = c^2 [1 + \operatorname{sech}^4(cr) - 2(\tanh(cr) + 1) \operatorname{sech}^2(cr)], \quad (2.29)$$

$$\frac{\beta'(r)}{\beta(r)} = 2c \frac{\operatorname{sech}^2(cr)}{\tanh(cr)}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\beta''(r)}{\beta(r)} = -2c^2 \left( \frac{\operatorname{sech}^2(cr)}{2 \tanh(cr)} - 2 \right) \left( \frac{\operatorname{sech}^2(cr)}{\tanh(cr)} \right)^2 \quad (2.31)$$

temos que  $\tanh(r \rightarrow \infty) \approx 1$  e  $\operatorname{sech}(r \rightarrow \infty) \approx 0$ , assim longe da origem todos os valores apresentados no HC das equações (2.31) convergem para aqueles calculados no GS nas Eqs. (2.19).

A curvatura da equação (2.11) será no HC [147–149, 153]:

$$R = -c^2 \left( \frac{15}{2} \tanh^4(cr) - 4 \operatorname{sech}^2(cr) - 16 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) \right), \quad (2.32)$$

cujo gráfico é presente na figura 2.5, onde verificamos que longe da origem o espaço converge para o  $AdS_6$  do GS em que  $R = -\frac{15}{2}c^2$ .

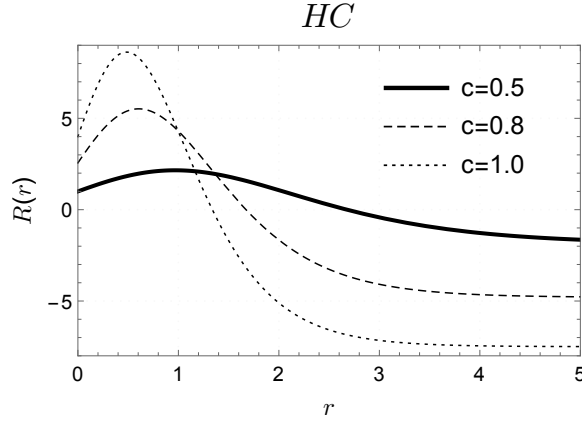


Figura 2.5:  $R(r)$  para o modelo HC. Verificamos que o parâmetro  $c$  regula tanto amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente  $AdS_6$  do GS. O valor máximo da curvatura ocorre fora da origem.

Observamos que a curvatura desta variedade  $\mathcal{M}_2$  é dada na Eq. (2.24) será

$$R_{\mathcal{M}_2} = 4 \operatorname{sech}^2(r), \quad (2.33)$$

que longe da origem converge para um espaço plano, assim como no GS.

Por fim, o tensor momento energia dado pelas equações (2.15) com o auxílio das Eqs. (2.19) é obtido no HC [147–149, 153], onde utilizamos o mesmo valor de constante cosmológica da Eq. (2.22) onde  $\Lambda = -\frac{5}{2} \frac{c^2}{\kappa_6}$ :

$$t_0(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 7 \operatorname{sech}^2(cr) + \frac{13}{2} \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) \right], \quad (2.34a)$$

$$t_r(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 2 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) \right], \quad (2.34b)$$

$$t_\theta(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 4 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) \right], \quad (2.34c)$$

verificamos que todas essas quantidades vão a zero para grandes valores de  $r$  e que o máximo dessas quantidade é deslocado da origem, como também verificado na construção numérica do modelo tipo vórtice da Ref. [136]. Além disso, a condição de energia dominante é verificada, como podemos observar na figura 2.6.



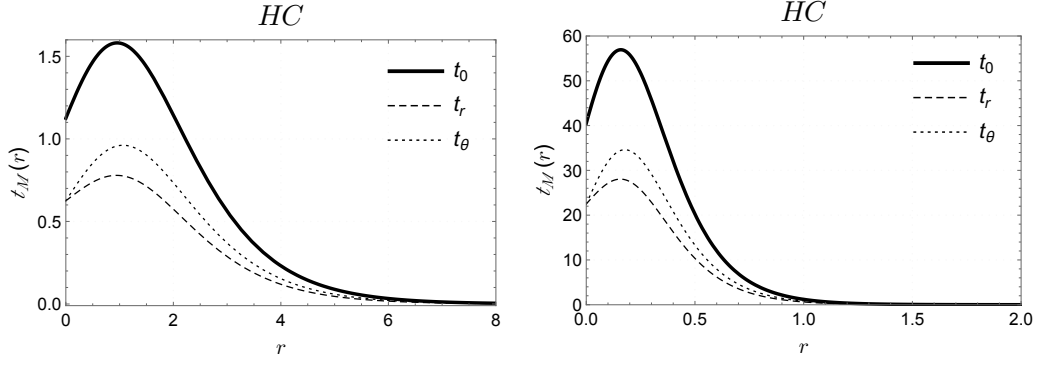


Figura 2.6:  $t_M(r)$  para o modelo HC. Observamos que a condição de energia dominante  $t_0 \geq t_i$  é atendida. Na figura da esquerda  $c = 0.5$ , enquanto na figura da direita  $c = 3.0$ , observamos que quanto maior este parâmetro, maior será a amplitude e menor a espessura das componentes do tensor energia momento.

### 2.2.3 Modelo Conifold Resolvido:

O chamado “*Resolved Conifold*” (RC) tem seu espaço transversal obtido a partir de um espaço Calabi-Yau de Teoria de cordas [145, 146, 151]. Sua principal característica é comportar um parâmetro de resolução,  $a$ , o qual permite substituir a ponta deste cone por uma esfera de raio  $a$ , removendo assim singularidades cônicas deste espaço.

Este 2–ciclo transversal tem a seguinte forma [145, 146, 151]

$$ds_2^2 = \left( \frac{u^2 + 6a^2}{u^2 + 9a^2} \right) du^2 + \frac{1}{6} (u^2 + 6a^2) d\theta^2 \quad (2.35)$$

a qual pode ser adaptada para a forma que estamos tratando em (2.12) através da transformação

$$dr^2 = \left( \frac{u^2 + 6a^2}{u^2 + 9a^2} \right) du^2, \quad (2.36)$$

assim obteremos [145, 146, 151]:

$$ds_2^2 = dr^2 + \frac{1}{6} (u_a^2(r) + 6a^2) d\theta^2 \quad (2.37)$$

onde

$$u_a(r) = \begin{cases} r & , a = 0 \\ -i\sqrt{6}aE\left(\arcsin\left(\frac{ir}{3a}\right), \frac{2}{3}\right) & , a \neq 0, \end{cases}$$

sendo a função  $E(x_1, x_2)$  a integral elíptica de segunda espécie. O gráfico desta transformação  $u_a(r)$  está presente na figura 2.7 onde verificamos que para todos os valores do parâmetro de resolução temos  $u_a(r=0) = 0$ .

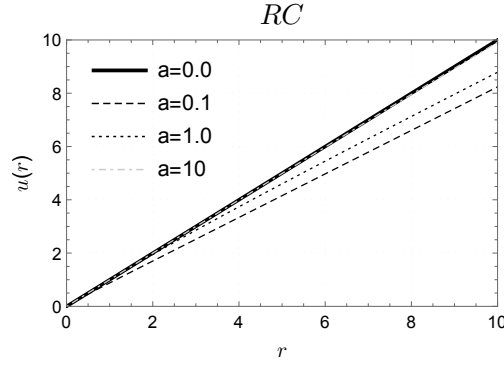


Figura 2.7: Transformação  $u_a(r)$ . Observamos que para  $a = 0$  temos uma reta com coeficiente angular igual a 1. Para  $a \neq 0$  essas funções são aproximadamente retas com coeficientes angulares menores. Há uma diminuição brusca do coeficiente para pequenos valores de  $a$ , o qual retorna ao coeficiente angular 1 para grandes valores deste parâmetro de resolução.

Utilizou-se o mesmo fator  $F(r)$  do HC, com isso o fator  $H(r)$  para o Conifold Resolvido foi definidos como [145, 146, 151]:

$$F(r) = e^{-cr+\tanh(cr)} \quad , \quad H(r) = \frac{1}{6} (u^2(r, a) + 6a^2) e^{-cr+\tanh(cr)} \quad , \quad (2.38)$$

com  $\beta(r, a) = \frac{1}{6} (u^2(r, a) + 6a^2)$ , que não tende para um valor constante quando para grandes valores de  $r$ . Segue o gráfico do fator angular no HC pela figura 2.8

Antes de calcularmos as condições de regularidade no RC, precisamos dos valores de  $F'/F$  da Eq. (2.31) e de  $\beta'/\beta$  detalhados abaixo e utilizaremos as regras da cadeia de derivação através da relação de transformação em Eq. (2.36).

$$u'(r) = \sqrt{\frac{u^2 + 9a^2}{u^2 + 6a^2}} \quad , \quad u'' = \frac{3a^2 u}{u^2 + 6a^2} \quad , \quad (2.39)$$

$$\beta' = \frac{1}{3} u'(r) u(r) = \frac{u \sqrt{u^2 + 9a^2}}{3 \sqrt{u^2 + 6a^2}} \quad (2.40)$$

$$\frac{\beta'(r)}{\beta(r)} = 2u \frac{\sqrt{u^2 + 9a^2}}{(u^2 + 6a^2)^{3/2}} \quad , \quad (2.41)$$

$$\beta'' = \frac{1}{3} (u''u + u'^2) = \frac{1}{3} \left( \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{u^2 + 6a^2} \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{\beta''(r)}{\beta(r)} = 2 \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} \quad (2.43)$$

Observamos as condições de regularidade da Eq. (2.5a) e Eq. (2.5b) são obedecidas, pois  $F(r)$  é o mesmo do HC (ver equações (2.27)). Para as condições no  $H(r)$  das Eq. (2.5c) e Eq. (2.5d), apenas o caso não regular  $a = 0$  as atende. Verifique do também da Eq. (2.2.3) que

$u_a(0) = 0$  [145, 146, 151].

$$H(0, a) = \frac{u_a^2(0) + a^2}{6} = \frac{a^2}{6}, \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{H(r, a)}\right)' \Big|_{r=0} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta'}{\beta} + \frac{F'}{F} \right] \sqrt{\beta F} \Big|_{r=0} = \frac{1}{\sqrt{6}} u_a(0) \frac{\sqrt{u_a^2(0) + 9a^2}}{u_a^2(0) + 6a^2}, \\ \left(\sqrt{H(r, a=0)}\right)' \Big|_{r=0} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \left(\sqrt{H(r, a \neq 0)}\right)' \Big|_{r=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.44b)$$

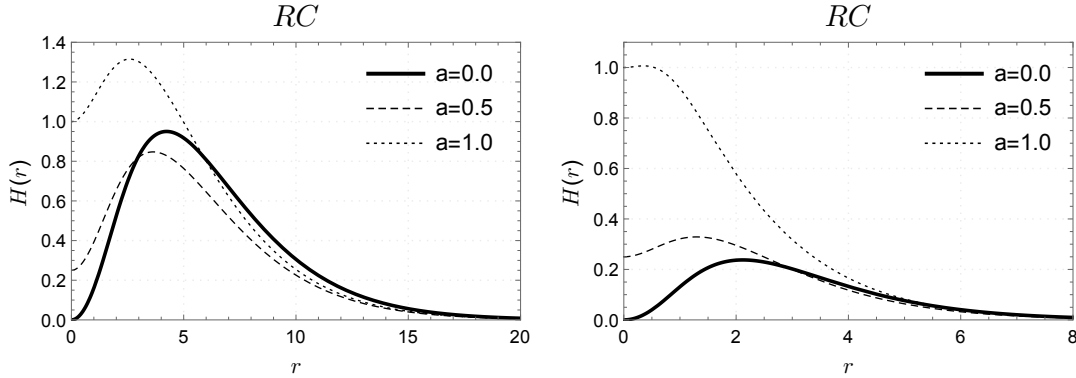


Figura 2.8:  $H(r)$  para o modelo RC. O parâmetro  $a$  regula o valor inicial de  $H(r)$ . Na figura da esquerda  $c = 0.5$  e na figura da direita  $c = 1.0$ .

A curvatura para o RC será dada pela Eq. (2.11) como [145, 146, 151]:

$$\begin{aligned} R &= -5c^2 \left[ \frac{1}{2} \tanh^4(cr) + \operatorname{sech}^4(cr) - 2(\tanh(cr) + 1)\operatorname{sech}^2(cr) + 1 \right] \\ &- \left[ -6c \tanh^2(cr) u \frac{\sqrt{u^2 + 9a^2}}{\sqrt{(u^2 + 6a^2)^3}} + 2 \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} - 2u^2 \frac{u^2 + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^3} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

o gráfico desta expressão está na figura 2.9, onde verificamos que longe da origem o espaço converge para o  $AdS_6$  do GS.

Observamos que a curvatura desta variedade  $\mathcal{M}_2$  é dada na Eq. (2.24) será

$$R_{\mathcal{M}_2} = -2u^2 \left[ \frac{(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} - \frac{u^2 + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^3} \right], \quad (2.46)$$

para o caso onde  $a = 0$  obtemos que a curvatura do espaço transversal é sempre nula. Para  $a \neq 0$  este valor é negativo no origem e cresce com  $r$  até atingir o valor constante nulo.

O tensor momento energia é descrito nas Refs. [119, 146], utilizamos  $\Lambda = -\frac{5}{2} \frac{c^2}{\kappa_6}$ :

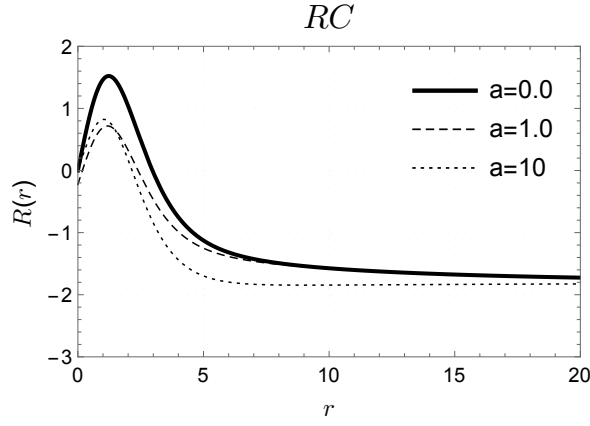


Figura 2.9:  $R(r)$  para o modelo RC. Verificamos que o parâmetro  $a$  regula tanto amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente  $AdS_6$  do GS. Porém, há saturação na forma desta curvatura para grandes valores do parâmetro de resolução, a forma exposta para  $a = 10$  se mantém para valores maiores.

Para  $a = 0$  temos os tensores:

$$t_0(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 4 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) + \frac{5 \tanh^2(cr)}{2cr} \right], \quad (2.47a)$$

$$t_r(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 2 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) + \frac{2}{cr} \tanh^2(cr) \right], \quad (2.47b)$$

$$t_\theta(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 4 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) \right], \quad (2.47c)$$

observe que para o RC o valor de  $t_\theta$  da equação (2.47c) é mesmo do HC da Eq. (2.34c) uma vez que esta componente não depende do  $\beta$  (conferir (2.15c)). Logo, para  $a \neq 0$  temos também o mesmo  $t_\theta$ , mas  $t_0$  e  $t_r$  serão:

$$t_0(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 4 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) + \frac{5u \tanh^2(cr)}{2c^2(u^2 + 6a^2)} \sqrt{\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}} + \frac{3u a^2}{c^2(u^2 + 6a^2)} \frac{r}{(r^2 + 6a^2)^{3/2}(r^2 + 9a^2)^{1/2}} \right], \quad (2.48a)$$

$$t_r(r) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5 \operatorname{sech}^2(cr) + 2 \tanh(cr) \operatorname{sech}^2(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4(cr) + \frac{2u \tanh^2(cr)}{u^2 + 6a^2} \sqrt{\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}} \right], \quad (2.48b)$$

aqui  $t_0 > t_i$  apenas para  $a = 0$ , para valores grandes do parâmetro de resolução temos igualdade  $t_0 = t_\theta$  como podemos observar na figura 2.10.

Observamos na seção anterior que para o HC todas as condições de energia e de regularidade são atendidas, mas para o RC há um conflito. Para o caso não resolvido ( $a = 0$ ) as condições de

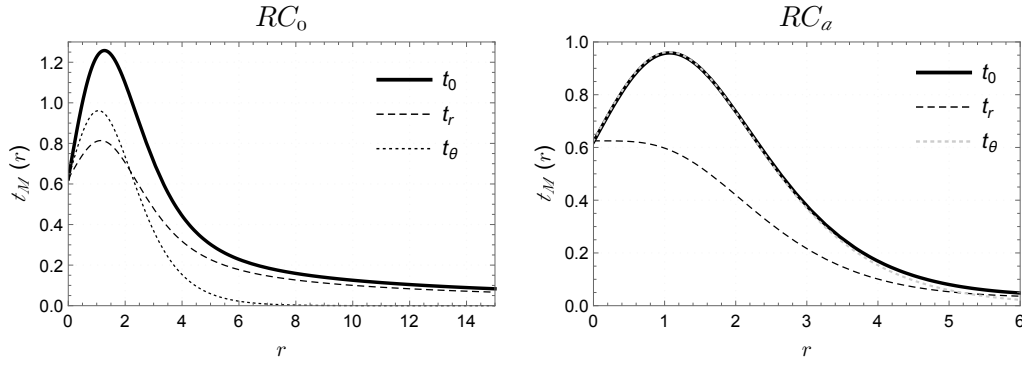


Figura 2.10:  $t_M(r)$  para o modelo RC com  $c = 0.5$ . Observamos que a condição de energia dominante  $t_0 \geq t_i$  é atendida no caso onde  $a = 0$  (figura da esquerda). Na figura da direita  $a = 5$  a densidade de energia e pressão angular se igualam.

regularidade e de energia dominante são atendidas, porém a métrica apresenta singularidade cônica. Para o caso resolvido  $a \neq 0$ , onde não há singularidade cônica, apenas as duas condições de regularidade da Eq. (2.5a) e da Eq. (2.5b) são atendidas e nem todas as condições de energia são atendidas e  $t_0 \sim t_\theta$ . Além disso, a característica que atende a condição de regularidade  $H(0) = 0$  em (2.5c) pode promover algumas algumas grandezas singulares na localização de dos campos bosônicos ou fermiônicos que serão abordados nos próximos capítulos. Na subseção seguinte, apresentaremos modelos que propõem uma densidade lagrangiana de interação na ação de Einstein em 6D ao invés de um *ansatz* para o espaço transversal.

### 2.2.4 Modelos gerados por uma fonte específica:

Uma outra abordagem sobre construção de modelos 6D está presente nas referências [136–141, 143, 144]. Onde os fatores de “*warp*” são extraídos diretamente da densidade de lagrangiana de uma ação em 6D. Nas Ref. [136–140] a seguinte ação gera o modelo “*Topological Abelian string vortex*” (chamado assim em analogia ao defeito topológico tipo vórtice em duas dimensões):

$$S = - \int dx^6 \sqrt{-g} \left[ \left( \frac{R}{2\kappa} + \Lambda \right) + \frac{1}{2} (D^M \phi(r, \theta))^* (D_M \phi(r, \theta)) - \frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} - V(\phi) \right], \quad (2.49)$$

sendo  $\phi$  um campo escalar em 6D ( $\dim[\phi] = 2$ ) e  $F_{MN}$  o tensor eletromagnético. A derivada covariante é do tipo  $D_M = \partial_M - iqA_M$ . O potencial de interação é dado por  $V(\phi)$ .

O conceito de vórtice é aplicado ao se impor o *ansatz* de Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

[171, 172] nos campos escalar e de calibre:

$$\phi(r, \theta) = v\rho(r) e^{-il\theta} \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{A}_\theta(r) = \frac{1}{q} [l - P(r)], \quad \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_r = 0, \quad (2.51)$$

aqui  $v = 1$  é apenas uma constante de regularização dimensional  $\dim[v] = 2$ ,  $\dim[\rho] = 0$  e  $P(r)$  é uma função (também adimensional) que descreve a evolução do calibre angular na dimensão extra  $r$ .

Da ação na Eq.(2.49), e da métrica na Eq. (2.3) com a imposição da Eq. (2.50) o seguinte sistema de equações diferenciais é obtido:

$$\rho'' + (4f + h)\rho' - \frac{P^2}{H}\rho - \frac{1}{v^2} \frac{dV}{d\rho} = 0 \quad (2.52)$$

$$P'' + (4f - h)P' - (vq\rho)^2 P = 0, \quad (2.53)$$

sendo  $f = \frac{F'}{2F}$ ,  $h = \frac{H'}{2H}$  e  $P = l[1 - \alpha(r)]$ .

As seguintes condições de contorno são adotadas:

$$\rho(r \rightarrow 0) = 0 = \alpha(r \rightarrow 0),$$

$$\rho(r \rightarrow \infty) = 1 = \alpha(r \rightarrow \infty). \quad (2.54)$$

As primeiras referências a trabalhar com este modelo [136, 137] o resolvem de forma numérica para assim obterem campos que respeitem todas as condições de ANO (2.54), como as condições de regularidade em (2.5) e de energia dominante em (2.16) [136, 137]. Entretanto, buscando uma solução analítica para a equação (2.52) que não respeite todas essas condições, as referências [139, 140] impõem a simplificação  $P(r) \equiv 0$ , com isso  $f = h$ . Assim a componente do campo escalar das Eqs.(2.52) e (2.53) expõe a seguinte forma exata:

$$\rho(r) = 2\sqrt{p} \arctan(\sinh(br/p)), \quad (2.55)$$

onde  $p \geq 0$  é um parâmetro adimensional que regula a espessura e  $b \geq 0$  desempenha o mesmo papel do  $c$  nos modelos anteriores ( $\dim[b] = 1$ ). Segue um gráfico deste campo escalar que tem perfil de um *Kink* nas Fig. 2.11 e Fig. 2.12.

Do campo escalar da Eq.(2.55), das equações (2.52) e (2.53) com  $P(r) \equiv 0$  encontraremos  $f = h$  e assim:

$$f'(r) = -\frac{1}{4} (\rho')^2(r), \quad (2.56)$$

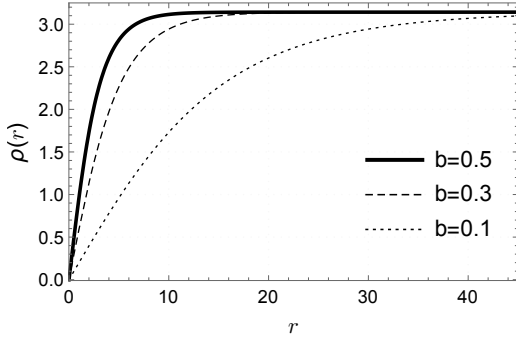


Figura 2.11:  $\rho(r)$  para diferentes valores de  $b$ . Verificamos que este parâmetro  $b$  estipula a distância da origem até o valor constante do campo ser atingido. Entretanto, verificaremos que será o parâmetro  $p$  que regulará a espessura do tensor energia-momento e curvatura no modelo TA.

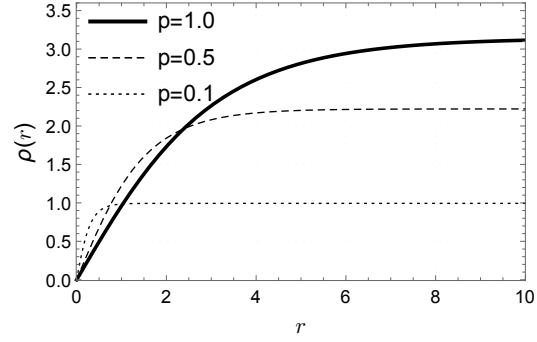


Figura 2.12:  $\rho(r)$  para diferentes valores de  $p$ . Verificamos que este parâmetro  $p$  regula a amplitude do valor constante assintótico deste campo escalar.

aplicando o campo da Eq.(2.55) chegaremos à relação

$$\begin{aligned} f(r) = h(r) &= -b \tanh\left(\frac{br}{p}\right) = \frac{1}{2} \frac{F'(r)}{F(r)}, \\ F(r) &= \cosh^{-2p}\left(\frac{br}{p}\right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Assim os fatores de “warp” o modelo que chamaremos de “*Torrealba’s Topological Abelian string vortex*” (TA) podem ser definidos na forma [139, 140]:

$$F(r) = \operatorname{sech}^{2p}\left(\frac{br}{p}\right), \quad H(r) = R_0^2 \operatorname{sech}^{2p}\left(\frac{br}{p}\right), \quad (2.58)$$

onde aqui podemos relacionar o parâmetro  $b$  como:

$$b = \frac{c}{2}, \quad (2.59)$$

Um gráfico desses fatores no TA está presente na figura 2.13 e 2.14 onde verificamos obter um caso suave do GS. Diferente dos outros modelos tratados até aqui, podemos variar isoladamente espessura e amplitude desses fatores. Porém, como este modelo foi pensado para ser uma simplificação que gere solução analítica da equação (2.52), não obedece as condições do *ansatz* ANO na Eq. (2.54), e adiantamos que como o RC para  $a \neq 0$ , não obedecerá as condições de regularidade no  $H(r)$  (2.5c) e (2.5d), e como consequência tem seu  $t_0(r) = t_\theta(r)$ .

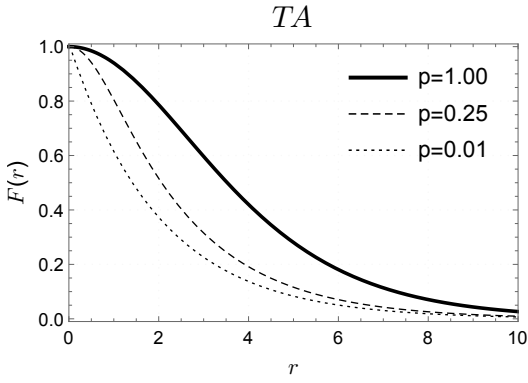


Figura 2.13:  $F(r)$  para o modelo TA. Verificamos que o parâmetro  $p$  regula a espessura da região não nula. Quando  $p \rightarrow 0$  este fator recupera a forma do GS.

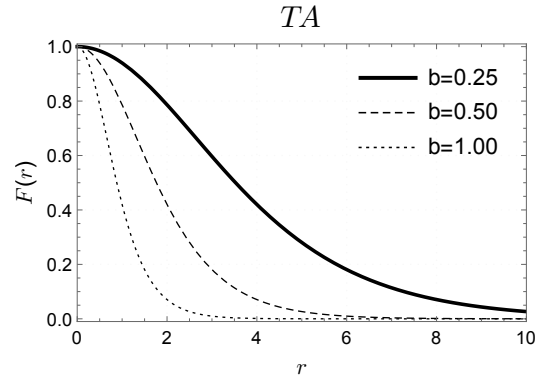


Figura 2.14:  $F(r)$  para o modelo TA. O parâmetro  $b = c/2$  também regula a espessura e recuperamos o GS quando  $b \rightarrow \infty$ .

Entretanto, no TA apenas as condições sobre o fator  $F(r)$  são obedecidas (Eq. (2.5a) e Eq. (2.5b)), como também observado para o RC com  $a \neq 0$  pelas equações (2.44):

$$F(0) = 1, \quad (2.60a)$$

$$F'(r)|_{r=0} = \left[ -2b \sinh\left(\frac{br}{p}\right) \operatorname{sech}^{2p+1}\left(\frac{br}{p}\right) \right]_{r=0} = 0, \quad (2.60b)$$

$$H(0) = R_0^2, \quad (2.60c)$$

$$\left( \sqrt{H(r)} \right)' \Big|_{r=0} = \left[ -b \sinh\left(\frac{br}{p}\right) \operatorname{sech}^{p+1}\left(\frac{br}{p}\right) \right]_{r=0} = 0 \quad (2.60d)$$

Para o TA, explicitamos  $F'/F = H'/H$  e  $F''/F = H''/H$ :

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = -2b \tanh\left(\frac{br}{p}\right), \quad (2.61)$$

temos que  $\tanh(r \rightarrow \infty) \approx 1$  e  $\operatorname{sech}(r \rightarrow \infty) \approx 0$ , assim longe da origem todos os valores apresentados no TA das equações (2.61) convergem para aqueles calculados no GS nas Eqs. (2.19).

A curvatura da equação (2.11) será no TA:

$$R = -15b^2 \left[ 1 + \tanh^2\left(\frac{br}{p}\right) - \left(\frac{2}{3p} + 1\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{br}{p}\right) \right], \quad (2.62)$$

cujo gráfico é presente na figura 2.15. Observe que independente do valor da espessura  $p$ , longe da origem os termos dominantes dessa expressão será  $R(r \rightarrow \infty) \approx -30b^2 = -\frac{15}{2}c^2$  que é justamente o valor da curvatura no GS. A curvatura do espaço transversal é sempre nula, como no GS. Outro detalhe é que o valor máximo da curvatura ocorre na origem, diferente dos



resultados observados na referência onde este modelo original é numericamente analisado [136] e dos modelos expostos na seção anterior.

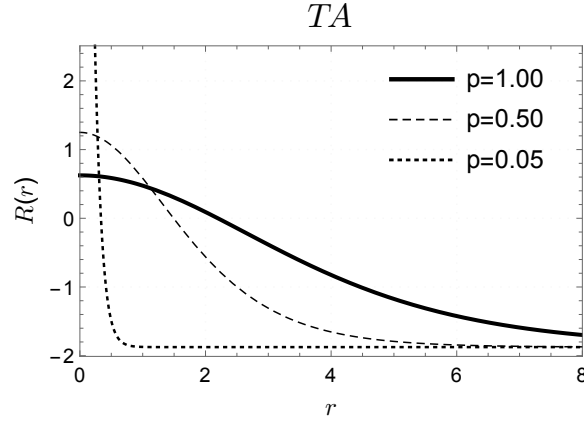


Figura 2.15:  $R(r)$  para o modelo TA. Podemos regular o valor da espessura da região que antecede o espaço puramente  $AdS_6$  do GS através do parâmetro  $p$ .

Para o TA as componentes do tensor energia momento são:

$$t_0(r) = t_\theta(r) = 10 \frac{b^2}{\kappa_6} \left[ \left( \frac{2}{5p} + 1 \right) \text{sech}^2 \left( \frac{br}{p} \right) \right], \quad t_r(r) = 10 \frac{b^2}{\kappa_6} \text{sech}^2 \left( \frac{br}{p} \right), \quad (2.63)$$

verificamos que todas estas quantidades tem valor máximo na origem e vão a zero para grandes  $r$ . Aqui  $t_0(r) = t_\theta(r)$  para todos os valores de  $b, p$ . Segue o gráfico desta grandeza na figura 2.16

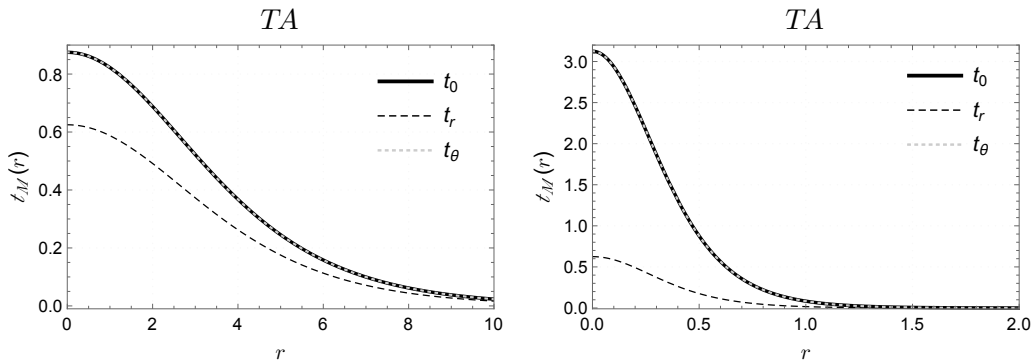


Figura 2.16:  $t_M(r)$  para o modelo TA com  $b = 0.25$ . Na figura da esquerda  $p = 1.0$ , enquanto na figura da direita  $p = 0.1$ .

Outro modelo construindo por campos escalares é o “*Brane bounce-type configuration*” (BC) [143, 152]. Este modelo 6D é baseado no cenário 5D da Ref. [84], o termo “*bounce*” é empregado no sentido de elasticidade e deformação, em correspondência à forma de seu po-

tencial escalar gerador [84, 143, 152].

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \nu^2)^2, \quad \phi(r) = \nu \tanh(cr). \quad (2.64)$$

para o BC em 6D as constantes  $\dim[\lambda] = \dim[p] = 2$ . Destas soluções foi possível encontrar os seguintes fatores de “warp” dados por:

$$F(r) = e^{-A(r)}, \quad H(r) = R_0^2 e^{-B(r)}, \quad (2.65)$$

$$A(r) = \varpi B(r) = p \left( \frac{1}{2} \tanh^2(cr) + \ln[\cosh(cr)] \right); \quad (2.66)$$

onde  $\varpi$  é uma constante adimensional de proporcionalidade e  $p$  desempenha o mesmo papel regulador de espessura do modelo TA (também adimensional). Destes fatores observamos que as condições de regularidade da Eq. (2.5a) e Eq. (2.5b) são atendidas, porém as Eq. (2.5c) e Eq. (2.5d) são violadas, como no caso do TA na Eq. (2.58) e do RC para  $a \neq 0$  na Eq. (2.38).

Seguem abaixo os gráfico da figura 2.17 dos fatores de “warp” e curvatura do modelo BC comparado ao HC e TA.

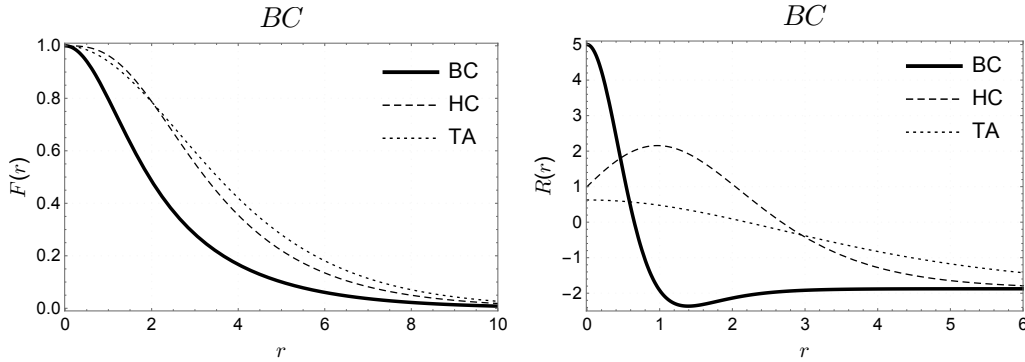


Figura 2.17:  $F(r)$  na figura da esquerda e a curvatura na figura da direita para o modelo BC, HC e TA com  $c = 2b = 0.5$ ,  $p = 1.0$  e  $\varpi = 1$ .

Enquanto o tensor energia momento para o BC, obtido ao se aplicar os fatores da Eq. (2.65) na Eq. (2.15), está representado na figura 2.18. Notamos desta fig. 2.18 que o modelo BC apresenta  $t_0 = t_\theta$ , comportamento semelhante ao do modelo RC para grandes valores de  $a$  (na fig. 2.10) e ao do modelo TA (apresentado na figura 2.16).

Terminamos aqui os detalhes de modelos axiais, os quais serão aplicados na localização de campos nos capítulos posteriores. Citaremos abaixo alguns modelos compactos apenas por contextualização. Não trabalharemos detalhes quanto à localização de campos em modelos compactos nesta tese.

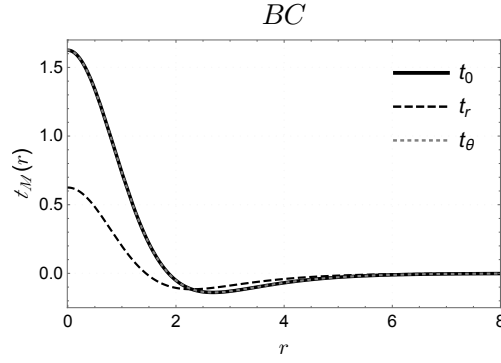


Figura 2.18:  $t_M(r)$  para o modelo BC. As parcelas  $t_0 = t_\theta$  e há uma pequena região onde todas as componentes de  $t_M$  são negativas. Utilizamos os parâmetros  $c = 0.5$ ,  $p = \varpi = \kappa_6 = 1$ .

### 2.2.5 Modelos compactos:

Como citado nas vantagens de modelos 6D, outra interessante característica em modelos com duas dimensões compactas é na resolução do problema da hierarquia da massa dos neutrinos [130]. Essa hierarquia é explicada pelas famílias confinadas de modos zeros fermiônicos [156, 157] através de um mecanismo chamado de “*Masses and Mixings*” (massas e misturas). Nestes artigos a métrica exibe uma forma do tipo:

$$ds_6^2 = \phi^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \epsilon^2 (d\varphi^2 + \beta^2 \sin^2(\varphi)d\theta^2) \quad (2.67)$$

sendo  $\dim[\beta] = 0$  e  $\dim[\epsilon] = -1$  constantes e os ângulos limitados aos valores  $\varphi \in [0, \pi]$  enquanto  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Observe que os fatores “*warped*”,  $\phi^2(\varphi)$  e  $\beta^2 \sin^2(\varphi)$ , dependem apenas de um ângulo extra,  $\varphi$ .

Trataremos abaixo da métrica dos modelos presente nos trabalhos [131, 132, 161] a qual é chamada de *multiply “warped” nested* (aninhada) :

$$ds_6^2 = \varsigma(\theta) [(\sigma(\varphi)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + R_\varphi^2 d\varphi^2)] + R_\theta^2 d\theta^2 \quad (2.68)$$

onde os ângulos  $\varphi, \theta \in [0, \pi]$  e as constantes  $R_\varphi, R_\theta$  desempenham o mesmo papel de ajuste dimensional que o  $R_0$  nos modelos axiais. Os fatores são dados por [161]:

$$\sigma(\varphi) = e^{-c|\varphi|}, \quad \varsigma(\theta) = \frac{\cosh(k\theta)}{\cosh(k\pi)}. \quad (2.69)$$

Estes artigos de geometrias aninhadas submetidos nas referências [131, 132] já se propõe a explicar a suposta partícula de 750 GeV.

Encerramos aqui a apresentação de modelos em 6D, na seção seguinte trabalharemos com a chamada forma conforme plana de métricas (que consiste em colocar o fator de “warp” em evidência, planificando o espaço). Esta transformação será útil no estudo dos modos massivos dos campos estudados em 6D.

## 2.3 Métrica 6D na forma conforme plana

Verificaremos nos próximos capítulos que nossas equações de campo na variável  $r$  serão equações diferenciais de *Sturm-Liouville*. Porém, existem algumas vantagens de fazermos transformações de variáveis e trabalharmos nossos campos como uma equação tipo de Schrödinger, entre as vantagens apontamos a abordagem análoga ao problema de uma partícula em uma caixa da Mecânica Quântica e com isto estudarmos os modos massivos ressonantes, além de comprirmos e padronizar a notação para melhor comparativo entre os resultados obtidos de cada campo.

Para o estudo da equação tipo de Schrödinger a métrica da Eq. (2.3) deve ser posta em sua forma conforme plana:

$$ds_6^2 = F(z) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2 + \beta(z) d\theta^2] \quad (2.70)$$

onde nosso fator de “warp”  $F(z)$  pode ser também chamado de fator conforme nesta forma. Essa transformação é obtida através da mudança

$$dr^2 \mapsto F dz^2, \quad dr \mapsto \sqrt{F} dz \Rightarrow \int dr = \int F^{-\frac{1}{2}}(z) dz \quad (2.71)$$

Verificamos que nem sempre existe solução analítica dessa transformação para os  $F(z)$  tratados na seção anterior. Porém, para o GS onde  $F(r) = e^{-cr}$  teremos a seguinte integração da equação (2.71) :

$$\int dz = z + C_z, \quad \int e^{\frac{c}{2}r'} dr = \frac{2}{c} e^{\frac{c}{2}r} + C_r, \quad (2.72)$$

as constantes de integrações  $C_z$  e  $C_r$  são arbitrárias e regulam os valores das relações  $z(r)$  ou  $r(z)$  na origem. Escolheremos aqui o caso onde  $z(r=0) = 0$  que ocorre para  $C_r - C_z = \frac{2}{c}$ .

$$z(r) = \frac{2}{c} (e^{\frac{c}{2}r} + 1) \Rightarrow r(z) = \frac{2}{c} \ln \left[ \frac{cz}{2} + 1 \right] \quad (2.73)$$

por conveniência de notação usaremos daqui para frente

$$\tilde{z} = z + 2/c. \quad (2.74)$$

Ilustraremos nas figuras 2.19 e 2.20 a seguir as transformações de variáveis no GS e em outros modelos como HC, RC e TA que são obtidos apenas via interpolação numérica.

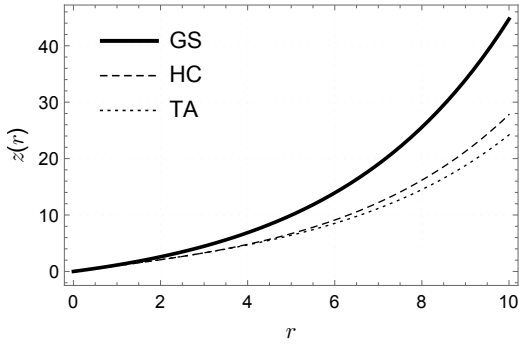


Figura 2.19: Transformação  $z(r)$  para vários modelos com  $c = 1$ . Esta expressão é analítica para o GS na Eq. (2.73).

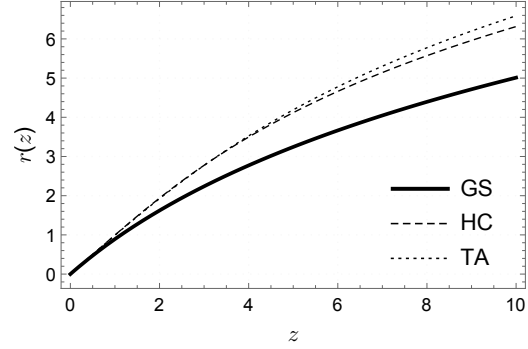


Figura 2.20: Transformação  $r(z)$  para vários modelos com  $c = 1$ . Esta expressão é analítica para o GS na Eq. (2.73).

Com as a relação de  $r(z)$  na Eq. (2.73) podemos calcular o  $F(z)$  no GS como:

$$F(z) = F[r(z)] = e^{-c r(z)} = e^{-2 \ln[c\tilde{z}/2]} = \left(\frac{c\tilde{z}}{2}\right)^{-2}$$

$$F(z) = \frac{4}{c^2} \frac{1}{\tilde{z}^2} \quad (2.75)$$

verificamos que este  $F(z)$  da Eq. (2.75) decai mais lentamente que  $F(r)$  presente na Eq. (2.17), como exibido na figura 2.21. Já nas figuras (2.22) e (2.23) os fatores  $F(z)$  e  $H(z)$  foram obtidos numericamente.

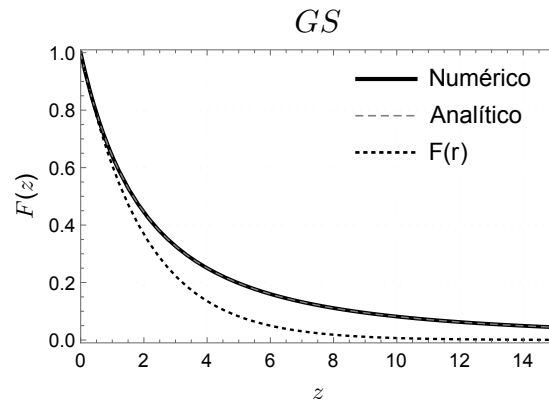


Figura 2.21:  $F(z)$  para o GS com  $c = 0.5$ . Verificamos que há concordância entre o resultados numérico com o analítico da Eq. (2.75). Observe que na variável  $z$  (linha cheia) as expressões decaem mais lentamente que na variável  $r$  (linha pontilhada).

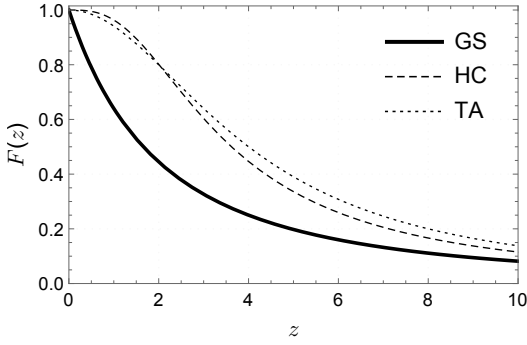


Figura 2.22:  $F(z)$  para vários modelos com  $c = 2b = 0.5$  e  $p = 1$ . Essas expressões se alogam sobre a variável  $z$  em comparação com as da variável  $r$  das figuras 2.2, 2.3 e 2.13.

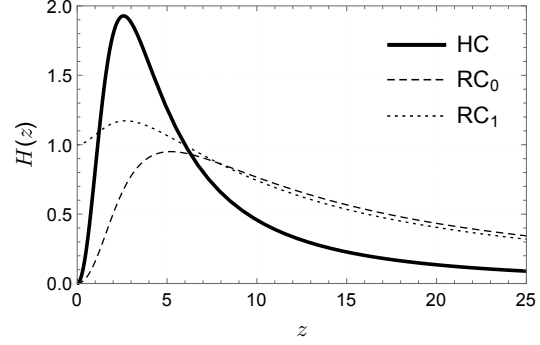


Figura 2.23:  $H(z)$  para vários modelos com  $c = 0.5$ ,  $a = 0$  (linha tracejada) e  $a = 1$  (linha pontilhada). Essas expressões se alogam sobre a variável  $z$  em comparação com as da variável  $r$  das figuras 2.4 e 2.8.

## 2.4 Conclusões do capítulo 2

Encerramos o capítulo resumindo suas principais conclusões:

- Apontamos que modelos 6D tem vantagens sobre modelos 5D. Entre elas, o confinamento do campo de calibre sem necessidade de outros acoplamentos que não com a gravidade;
- Apresentamos os tensores de Relatividade Geral (símbolos de Christoffel, tensor de Riemann e Ricci, escalar de curvatura e tensor energia momento) em termos de uma métrica genérica em 6D e assim obtivemos resultados gerais que podem ser particularizados para cada modelo;
- Apresentamos uma série de modelos axiais. Elegemos entre estes os modelos GS, HC, RC, TA e BC para estudarmos nossos campos em capítulos seguintes;
- Notamos que nem os modelos estudados são regulares, de fato apenas o HC e o RC para  $a = 0$  satisfazem estas condições. Realizamos comparações entre estes modelos ao calcularmos e plotarmos suas grandezas como o escalar de curvatura (sendo um espaço  $AdS_6$  em todos os modelos apresentados) e o tensor energia-momento. Verificamos que o não atendimento das condições de regularidade coincidem com o não atendimento da condição de energia dominante;

- Apresentamos a transformação conforme e a obtemos analiticamente para o modelo GS. Observamos que o nesta variável  $z$  os fatores de “*warp*” decaem mais lentamente que na variável original,  $r$ . Exibimos as transformações para os outros modelos como HC, TA e RC de maneira numérica.

$$r_1 \approx 6.371 \text{ Km}$$

## 3 Campos bosônicos em 6D

Estudaremos nesse capítulo a localização do campo escalar (spin 0), campo eletromagnético (campo de calibre (“*gauge*”) vetorial de spin 1) e gravidade (spin 2). Iniciaremos com o tratamento geral de cada campo, e particularizaremos para o modelo GS (onde a os resultados são anlíticos). Resumiremos a seguir as etapas do processo de localização destes campos:

- Da ação de cada campo obteremos suas respectivas equações de movimento no “*Bulk*”;
- Apresentaremos a decomposição de Kaluza-Klein para cada campo, separando nas variáveis da brana ( $x^\mu$ ), radial ( $r$ ) e angular ( $\theta$ );
- Obteremos a equação diferencial massiva na variável radial;
- Analisaremos o caso sem massa (modo zero), o qual deve ser normalizável e obedecer à condições de contorno para que seja dito *localizado*;
- Verificaremos que os modos massivos não podem ser normalizados e não serão assim *localizados*.

Iniciaremos tratando os campos na variável  $r$ , a qual gerará equações diferenciais do tipo Sturm-Liouville e que possuem condições de contorno de derivada nula nos extremos (condições de Neumann homogêneas). No final de cada subseção abordaremos a métrica na forma conforme, variável  $z$  (ver seção 2.3), onde as equações diferenciais serão tipo Schrödinger. Apontaremos as vantagens de cada formalismo no decorrer destas seções.

### 3.1 Campo escalar (spin 0) e gravidade (spin 2):

Nesta seção observaremos que as autofunções de campo escalar e gravidade são regidas pelas mesmas equações diferenciais. Esta relação entre autofunções dos campos de spin 0 e spin 2 também é verificada em 5D [78].



### 3.1.1 Confinamento do campo escalar

Para a localização do campo escalar partiremos da seguinte ação em  $D$  dimensões

$$S_{spin-0}^{(D)} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi d^D x, \quad (3.1)$$

analisando a dimensão de massa dessa ação teremos  $dim[S_{\phi^D}] = 0$  e  $dim[d^D x \sqrt{-g}] = -D$ , considerando um *ansatz* métrico diagonal exposto na Eq (2.3) da seção anterior, verificamos que  $dim[g^{ab}] = 0$ ,  $dim[g^{\Omega\Theta}] = 2$  e  $dim[\partial_a] = -1$ ,  $dim[\partial_\Omega] = 0$ , onde os índices  $a, b$  indicam coordenadas retangulares e  $\Omega, \Theta$  coordenadas angulares, então

$$dim[\Phi] = \frac{D-2}{2}, \quad (3.2)$$

Particularizando para  $D = 6$  teremos a ação abordada nos trabalhos [128, 129, 145]:

$$S_{spin-0}^{(6)} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi d^6 x, \quad (3.3)$$

logo,  $dim[\Phi] = 2$ .

Dessa ação extraímos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \Phi] = 0. \quad (3.4)$$

aplicando a métrica da Eq. (2.3) na Eq. (3.4), chegaremos a

$$\left[ \frac{\eta^{\mu\nu}}{F} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{\partial_r (F^2 H^{\frac{1}{2}} \partial_r)}{F^2 H^{\frac{1}{2}}} + \frac{\partial_\theta^2}{H} \right] \Phi = 0. \quad (3.5)$$

Separaremos as variáveis através da decomposição KK [128, 129, 145]:

$$\Phi(x^\mu, r, \theta) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \varphi_n(x^\mu) \chi_{n,l}(r) e^{il\theta}, \quad (3.6)$$

verificando a equação (3.2), notamos pela Eq. (3.6) que a porção que descreve o campo escalar em 4D tem  $dim[\varphi(x^\mu)] = 1$  (como detalhado ao fim da seção 1.1.1), assim a porção que descreve o campo escalar na coordenada radial tem  $dim[\chi_n(r)] = 1$ , justificando  $dim[\Phi] = 2$ . O termo angular  $l$  indica o orbital da função de onda.

As componentes 4D obedecem à uma equação de Klein-Gordon [128, 129, 145]:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_n(x^\mu) = m_n^2 \varphi_n(x^\mu), \quad (3.7)$$

assim a Eq. (3.5) será dada por uma equação de Sturm-Liouville na variável  $r$  como [128, 129, 145]

$$\left[ \partial_r^2 + 2\mathcal{P}(r)\partial_r + \left( \frac{m_{n,l}^2}{F} - \frac{l^2}{H} \right) \right] \chi_{n,l}(r) = 0. \quad (3.8)$$

onde chamamos  $\mathcal{P}$  de

$$\mathcal{P}(r) = \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{H'}{H} = \frac{5}{4} \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{\beta'}{\beta}. \quad (3.9)$$

verificaremos que esse termo será recorrente na localização de outros campos e por isso o escrevemos aqui com o fator  $2\mathcal{P}$ .

Interromperemos brevemente as considerações sobre  $\chi_{n,l}(r)$ , pois demonstraremos que para a gravidade a equação diferencial encontrada será a mesma da Eq. (3.8). Assim trabalharemos com estes dois campos de maneira conjunta.

### 3.1.2 Confinamento da Gravidade

Para a gravidade é feita uma perturbação na métrica da Eq. (2.3) na forma [119, 136, 147]

$$ds_6^2 = F(r)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dr^2 + H(r)d\theta^2, \quad (3.10)$$

onde o seguinte calibre é utilizado  $\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0$ . Observe que  $\dim[h_{\mu\nu}] = \dim[\eta_{\mu\nu}] = 0$ .

Da linearização da equação de Einstein em (2.2) obteremos uma solução desacoplada da fonte devido às escolhas da Eq. (2.15), assim chegaremos à seguinte equação diferencial para a perturbação  $h_{\mu\nu}$  [119, 147]

$$\square_6 h_{\mu\nu} = \partial_M(\sqrt{-g_6} \eta^{MN} \partial_N h_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.11)$$

Adotaremos a seguinte decomposição de Kaluza-Klein [119, 147]:

$$h_{\mu\nu}(x^\mu, r, \theta) = \frac{1}{M_p^2} \sum_{n,l=0}^{\infty} \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) \phi_{n,l}(r) e^{il\theta}, \quad (3.12)$$

o termo constante  $M_p^{-2}$  é utilizado aqui para garantir que essa perturbação seja adimensional [37, 173]. Novamente,  $\tilde{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  representa a porção 4D da gravidade, o  $\phi_{n,l}(r)$  a porção radial e o termo exponencial a componente angular.

Impondo a seguinte condição nas componentes relacionadas à 3-brana [119, 136, 147]:

$$\square_4 \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) = m_n^2 \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu), \quad (3.13)$$

observaremos que a gravidade possui a mesma equação de Sturm-Liouville do campo escalar na Eq. (3.8) [119, 136, 147].

$$\left[ \partial_r^2 + 2\mathcal{P} \partial_r + \left( \frac{m_{n,l}^2}{F} - \frac{l^2}{H} \right) \right] \phi_{n,l}(r) = 0, \quad (3.14)$$

assim todos conceitos aplicados para as autofunções da gravidade,  $\phi_{n,l}(r)$ , tem a mesma interpretação para a autofunções do campo escalar  $\chi_{n,l}(r)$ . Optaremos por tratar com os  $\phi_{n,l}(r)$  de agora em diante.

O chamado *modo zero* ( $m = 0$ ) de uma *onda-s* ( $l = 0$ ) torna a equação (3.14) como:

$$\begin{aligned} & [\partial_r^2 + 2\mathcal{P}(r) \partial_r] \phi_0(r) = 0, \\ \Rightarrow & \frac{\phi_0''(r)}{\phi_0'(r)} = -2\mathcal{P}(r) = -\frac{5}{2} \frac{F'}{F} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

chamando  $\xi(r) = \phi_0'(r)$  teremos  $\frac{\xi'(r)}{\xi(r)} = -\frac{5}{2} \frac{F'}{F} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta}$ , integrando chegaremos à relação logarítmica  $\ln[\xi(r)] = -\ln[F^{5/2}(r)\beta^{1/2}(r)]$  e assim a solução geral de  $\phi_0$  será dada por:

$$\phi_0(r) = C_0 + C_1 \int_r dr' \left( F^{-\frac{5}{2}}(r') \beta^{-\frac{1}{2}}(r') \right). \quad (3.16)$$

onde os  $C$  são constantes de integração.

Para que essas autofunções  $\phi_{n,l}(r)$  sejam ditas *localizadas* é necessário a obediência das seguintes condições:

As *condições de contorno* [119, 128, 135, 147, 153]:

$$\phi'(r \rightarrow 0) = \phi'(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.17)$$

necessárias para que os operadores diferenciais das equações Eq (3.4) e Eq. (3.11) sejam auto-adjuntos [119, 128, 135, 136].

E a *condição de ortonormalidade* [119, 128, 135, 136, 147, 153]:

$$\int_0^\infty dr \frac{\sqrt{-g(r)}}{F(r)} [\phi_n^*(r) \phi_s(r)] = \delta_{n,s}, \quad (3.18)$$

para garantir que a probabilidade seja finita.

Verificaremos que o único modo que atenderá as condições (3.17) e (3.18) para todos os modelos da seção 2.2 (onde os fatores de “*warp*” são decrescentes) será a solução de modo zero constante exposta na equação (3.16):

$$C_0 = \left( \int_0^\infty dr F^{3/2}(r) \beta^{1/2}(r) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

argumentamos que a integração do termo  $C_1 \int_r dr' \left( F^{-\frac{5}{2}}(r') \beta^{-\frac{1}{2}}(r') \right)$  gerará exponenciais crescente que divergem no infinito, não atendendo assim nem as condições de contorno, nem a condição de ortogonalidade.

Com esta solução constante poderemos redefinir o modo zero como [119, 128, 147, 153]:

$$\tilde{\phi}_0(r) = \tilde{C}_0 \sqrt{\frac{\sqrt{-g(r)}}{F(r)}} = \tilde{C}_0 F^{\frac{3}{4}}(r) \beta^{\frac{1}{4}}(r), \quad (3.19)$$

Os modos massivos ( $m \neq 0$ ) gerarão equações de Bessel, as quais não atenderão a condição de normalização, sendo assim os modos massivos serão *não localizados* [119, 128, 135, 136, 147, 153]. Esta demonstração ocorrerá na seção destinada ao modelo GS.

### 3.1.3 Abordagem de Schrödinger para os campos de spin 0 e spin 2

Uma maneira alternativa bastante comum em referências 5D [37, 87–90, 95, 173, 174] é transformar a equação de Sturm-Liouville presente na Eq. (3.14) em uma equação dita tipo *Schrödinger* (sem termos de derivada primeira e sem dependência da coordenada radial no termo de massa). Esta é a chamada *abordagem de Schrödinger*. Para isto, eliminamos a dependência de  $r$  nos autovalores de massa ao fazermos a transformação nas derivadas da equação (3.14):

$$m^2 F^{-1}(r) \mapsto m^2 \Rightarrow dr^2 \mapsto F dz^2 \quad (3.20)$$

esta transformação já foi estudada na seção 2.3, observe que com isto teremos o mesmo resultado da equação (2.71):

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{\sqrt{F}} dr, & \left( \frac{dz}{dr} \right) \frac{d}{dz} &= F^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}, \\ \partial_r &\mapsto F^{-\frac{1}{2}} \partial_z, & \partial_r^2 &\mapsto \frac{1}{F} \left( \partial_z^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{F}}{F} \partial_z \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\dot{F} \equiv \partial_z F$ . Assim, aplicando essa relação das derivadas em toda a equação (3.14) obtemos:

$$\left[ \frac{1}{F} \left( \partial_z^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{F}}{F} \partial_z \right) + \frac{1}{F} \left( \frac{5}{2} \frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \partial_z + \frac{1}{F} \left( m_{n,l}^2 - \frac{l^2}{\beta} \right) \right] \phi_{n,l}(z) = 0. \quad (3.22)$$

como esperado, essa transformação gera um termo  $F^{-1}(z)$  em toda a equação, podendo assim ser cancelado:

$$\left[ \partial_z^2 + \left( 2 \frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \partial_z + \left( m_{n,l}^2 - \frac{l^2}{\beta} \right) \right] \phi_{n,l}(z) = 0. \quad (3.23)$$

com o intuito de eliminarmos o termo de derivada primeira, faremos a seguinte mudança na variável dependente:

$$\phi_{n,l}(z) = K(z)\Psi_{n,l}(z) \quad (3.24)$$

verificaremos que  $\dim[\Phi] = \dim[K] = 1/2$ . Aplicando as derivadas:

$$\dot{\phi} = \dot{K}\Psi + K\dot{\Psi}, \quad \ddot{\phi} = \ddot{K} + 2\dot{K}\dot{\Psi} + K\ddot{\Psi} \quad (3.25)$$

substituindo essa nova transformação na equação (3.23):

$$\begin{aligned} & K\ddot{\Psi}_{n,l}(z) + 2\left(\frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{K}}{K}\right)K\dot{\Psi}_{n,l}(z) + \\ & + \left(m_{n,l}^2 - \frac{l^2}{\beta} + 2\left(\frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\ddot{K}}{K}\right)K\Psi_{n,l}(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

para anularmos o termo de derivada primeira devemos fazer:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}}{K} &= \frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \ln K = -\left(\ln F + \frac{1}{4}\ln \beta\right) \\ K(z) &= F^{-1}(z)\beta^{-\frac{1}{4}}(z), \end{aligned} \quad (3.27)$$

Do valor obtido para  $K(z)$  na Eq. (3.27) calculamos sua derivadas como:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{5}{4}\frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta}, \quad \frac{\ddot{K}}{K} = -\frac{F''}{F} + \frac{F'\beta'}{2F\beta} + \frac{2F'^2}{F^2} - \frac{\beta''}{4\beta} + \frac{5\beta'^2}{16\beta^2}, \quad (3.28)$$

podemos reescrever a equação (3.1.3) na forma de uma equação de Schrödinger análoga aplicando esses resultados de  $\dot{K}/K$  e  $\ddot{K}/K$ :

$$-\ddot{\Psi}_{n,l}(z) + U(z)\Psi_{n,l}(z) = \left[m_n^2 + \frac{l^2}{\beta(z)}\right]\Psi_{n,l}(z), \quad (3.29)$$

onde:

$$U(z) = \frac{\ddot{F}}{F} + \frac{1}{2}\frac{\dot{F}\dot{\beta}}{F\beta} + \frac{\ddot{\beta}}{4\beta} - \frac{3}{16}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 \quad (3.30)$$

este potencial pode ser decomposto como:

$$U(z) = \mathcal{W}^2(z) + \dot{\mathcal{W}}(z), \quad \text{com} \quad \mathcal{W} = \frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta} = \mathcal{P} \quad (3.31)$$

assim para o caso de onda- $s$  ( $l = 0$ ) conseguimos adequar a equação de Schrödinger na seguinte forma *Super Simétrica análoga*:

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger\Psi(z) = \left[\frac{d}{dz} + \mathcal{W}(z)\right]\left[-\frac{d}{dz} + \mathcal{W}(z)\right]\Psi(z) = m^2\Psi_m(z), \quad (3.32)$$

detalharemos que esta propriedade garante a inexistência de táquions (massas imaginárias) na seção 4.1.3.

As condições de contorno da Eq. (3.17) se modificam pelas transformações (2.71) e (3.24) como:

$$\frac{\dot{\Psi}(0)}{\Psi(0)} = -\frac{\dot{K}(0)}{K(0)}, \quad \frac{\dot{\Psi}(\infty)}{\Psi(\infty)} = -\frac{\dot{K}(\infty)}{K(\infty)}. \quad (3.33)$$

E a condição de ortonormalidade da Eq. (3.18) passa a ser aquela bem conhecida para o cálculo da probabilidade em espaços planos de Mecânica Quântica:

$$\int_0^\infty \Psi_i^*(z) \Psi_j(z) dz = \delta_{ij}. \quad (3.34)$$

O modo zero de onda- $s$  nesta variável  $z$  pode ser obtido como:

$$\Psi_0(z) = C_0 F(z) \beta^{\frac{1}{4}}(z), \quad (3.35)$$

onde  $C_0$  é uma constante de normalização.

A referência “*Universal aspects of gravity localized on thick branes*” de Csaki Csaba [173] trabalha com um caso geral de uma equação de Schrödinger onde o modo zero, assumindo valores afastados da origem, pode ser aproximado por uma função decrescente na forma:

$$\Psi_0(z) \approx \tilde{z}^{-\alpha}, \text{ quando } \tilde{z} \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

com  $\alpha > 0$  sendo a potência que regula o decaimento deste modo zero. Como explicitado para o GS na equação (2.74),  $\tilde{z} \sim (z + C_z)$ , onde  $C_z$  é uma constante de integração específica de cada modelo (desprezível quando  $\tilde{z} \rightarrow \infty$ ). Através desta suposição é possível estimar os seguintes resultados de forma geral:

O potencial quântico análogo de Schrödinger terá a seguinte forma assintótica em termos do decaimento  $\alpha$ :

$$U(\tilde{z}) \approx \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\tilde{z}^2} \quad (3.37)$$

As funções de Bessel que representarão os modos massivos serão do tipo:

$$\Psi_n(z) = \tilde{z}^{\frac{1}{2}} [\mathfrak{N}_{1_n} J_{\alpha+1}(m_n \tilde{z}) + \mathfrak{N}_{2_n} Y_{\alpha+1}(m_n \tilde{z})] \quad (3.38)$$

Para  $\tilde{z} \rightarrow 0$  teremos o seguinte valor das funções em termo de suas massas na origem:

$$K(0) \Psi_n(0) \approx \left(\frac{m}{c}\right)^{\alpha-1} \quad (3.39)$$

Este valor na equação (3.39) nos levará à uma correção da Lei de Newton na forma:

$$V(x) \approx \frac{G_N m_1 m_2}{x} \left[ 1 + \frac{C}{(cx)^{2\alpha-1}} \right] \quad (3.40)$$

sendo  $x = |x|$  uma distancia medida na 4D, considerando apenas o termos espaciais  $(x^1, x^2, x^3)$ , as massas  $m_1$  e  $m_2$  de partículas pontuais e  $C$  uma constante.

Para o caso 5D, observamos que o modo zero apresenta a forma [37, 45]

$$\Psi_0(z) = (k|z|+1)^{3/2} ,$$

com isso concluímos da equação (3.36) que  $\alpha = \frac{3}{2}$ . O potencial fora da origem proposto na Eq. (3.37) pode ser corretamente verificado como [37, 45]

$$U(\tilde{z}) \approx \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} ,$$

como também as funções massivas terão ordem  $J_2, Y_2$  pela Eq. (3.38), a mesma forma esperada nas Ref. [37, 45]:

$$\Psi_n(z) = \sqrt{|z| + \frac{1}{k}} \left[ \aleph_{1n} J_2 \left( m_n \left[ |z| + \frac{1}{k} \right] \right) + \aleph_{2n} Y_2 \left( m_n \left[ |z| + \frac{1}{k} \right] \right) \right] ,$$

assim como a correção do potencial newtoniano em 5D está prevista corretamente pela Eq. (3.40) como sendo de ordem de  $\mathcal{O} [(kx)^{-2}]$

$$V(x) \approx \frac{G_N m_1 m_2}{x} \left[ 1 + \frac{1}{(kx)^2} \right] . \quad (3.41)$$

Verificaremos que estas expressões também serão válidas em 6D, onde encontraremos  $\alpha = 2$  e essa é uma das motivações de detalharmos esta abordagem de Schödinger. Particularizaremos a seguir todos estes resultados para o modelo GS onde a maioria dos resultados podem ser obtidos analiticamente.

### 3.1.4 Gravidade/Campo escalar no GS

Para os fatores de “warp” da métrica do GS da Eq. (2.17), teremos a equação de Sturm-Liouville em (3.14) como [119, 128, 136, 147, 153]

$$\phi_m'' - \frac{5}{2} c \phi_m' + M^2 e^{cr} \phi_m = 0. \quad (3.42)$$

onde  $M^2 = m^2 - l^2/R_0^2$ , verifique que os autovalores dessa equação são dados tanto pela massa,  $m$ , como pelo número de onda,  $l$ .

Separaremos aqui o caso das *ondas-s* ( $l = 0$ ) [119], ao final observaremos como este número orbital influenciará no processo de *localização*:

$$\phi_m'' - \frac{5}{2}c\phi_m' + m^2 e^{cr} \phi_m = 0. \quad (3.43)$$

para o chamado *modo zero* ( $m = 0$ ) verificamos que essa Eq. (3.43) é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, assim sua solução geral será:

$$\begin{aligned} \phi_0'' - \frac{5}{2}c\phi_0' &= 0, \quad \text{com } \phi_0(r) \equiv e^{\lambda r} \\ \lambda^2 - \frac{5c}{2}\lambda &= 0, \quad \text{assim } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{5}{2}c \\ \phi_0(r) &= C_0 + C_1 e^{\frac{5}{2}cr}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

observe que esse resultado concorda com a expressão geral do modo zero presente na Eq. (3.16) com a reparametrização  $C_1 \mapsto \left(\frac{2}{5cR_0}\right) C_1$ .

Testemos agora para que casos essa solução obedece as condições de contorno nos limites (3.17):

$$\phi_0'(r) = \frac{5c}{2}C_1 e^{\frac{5}{2}cr} \neq 0 \quad \text{se } C_1 \neq 0, \quad (3.45)$$

assim concluímos que as derivadas só se anulam nos extremos para a solução solução da Eq. (3.1.4) na forma da constante  $\phi_0(r) = C_0$  [119].

Chequemos agora a condição de ortonormalidade da Eq. (3.18):

$$\int_0^\infty dr \left( R_0 e^{-\frac{3}{2}cr} \right) C_0^2 = 1 \quad \Rightarrow C_0 = \sqrt{\frac{3c}{2R_0}} \quad (3.46)$$

ela também é atendida, assim observamos que existe modo zero localizado para os campos escalar e de para a gravidade no modelo GS [119, 128].

Uma forma alternativa de trabalhar com este modo zero é, sabendo que a solução de  $\phi_0 = cte$ , redefinirmos a condição de ortonormalidade (3.18) como em [119, 147, 153]:

$$\int_0^\infty dr \left[ \tilde{\phi}_0^*(r) \tilde{\phi}_0(r) \right] = 1, \quad \text{com } \tilde{\phi}_0(r) = \sqrt{\frac{3c}{2}} e^{-\frac{3}{4}cr}, \quad (3.47)$$

Encerado o tratamento do modo zero, vamos aos modos massivos ( $m \neq 0$ ) de *ondas-s* ( $l = 0$ ). Demonstraremos a seguir que eles serão descritos para o campo escalar/gravidade em 6D por funções de Bessel de ordem 5/2 [119]:

Primeiro, desejamos colocar a equação (3.43) na forma:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left[ 1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2 \right] y(x) = 0, \quad (3.48)$$



Tomemos a seguinte transformação na variável independente com o intuito de transformarmos  $m^2 e^{cr} \mapsto 1$  e encontramos parte do termos  $\left[1 - \left(\frac{r}{x}\right)^2\right] y(x)$  :

$$u(r) = m \int_0^{r'} e^{\frac{cr}{2}} = \frac{2m}{c} (e^{cr/2} - 1), \quad (3.49)$$

isolando  $r$  na equação acima obteremos

$$r(u) = \frac{2}{c} \ln \left[ \frac{uc}{2m} + 1 \right] \quad (3.50)$$

uma vez que pela Eq. (2.17) temos  $F(r) = e^{-cr}$ , obteremos o  $F(u) = e^{-c r(u)}$  como:

$$F(u) = \left( \frac{uc}{2m} + 1 \right)^{-2}, \quad (3.51)$$

definindo  $x := u + \frac{2m}{c}$ .

$$F(x) = \left( \frac{2m}{c} \right)^2 x^{-2} \quad (3.52)$$

Com esta modificação as derivadas se alteram na forma:

$$\phi'(r) \mapsto \frac{m}{\sqrt{F}} \dot{\phi}(x), \quad \phi''(r) \mapsto \frac{m^2}{F} \left( \ddot{\phi}(x) - \frac{\dot{F}}{2F} \dot{\phi}(x) \right) \quad (3.53)$$

Então a equação (3.43) se transforma em:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{F} \ddot{\phi}(x) - \dot{\phi}(x) \left[ \frac{5cm}{2\sqrt{F}} + \frac{m^2}{2F} \left( \frac{\dot{F}}{F} \right) \right] + \frac{m^2}{F} \phi(x) &= 0 \quad \left( \times \frac{F}{m^2} \right) \Rightarrow \\ \ddot{\phi}(x) - \dot{\phi}(x) \left[ \frac{5c\sqrt{F}}{2m} + \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right) \right] + \phi(x) &= 0, \quad \left( \sqrt{F} = \frac{2m}{cx}, \quad \frac{\dot{F}}{F} = -\frac{2}{x} \right); \\ \ddot{\phi}(x) - \frac{4}{x} \dot{\phi}(x) + \phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Propomos agora a seguinte mudança na variável dependente com a finalidade e eliminarmos o fator 4 no termo de derivada primeira e compormos os coeficientes do termo sem derivada.

$$\phi(x) = v(x)y(x), \quad \dot{\phi} = \dot{v}y + y\dot{v}, \quad \ddot{\phi} = \ddot{v}y + 2\dot{v}\dot{y} + \dot{y}\dot{v}; \quad (3.55)$$

Com isso teremos (3.54) como:

$$\ddot{y}(x) + \dot{y}(x) \left[ \frac{2\dot{v}}{v} - \frac{4}{x} \right] + y(x) \left[ \frac{\ddot{v}}{v} - \frac{4}{x} \frac{\dot{v}}{v} + 1 \right] = 0 \quad (3.56)$$

Para que obtenhamos a Eq. (3.56) na forma da Eq. de Bessel (3.48), temos que fazer  $\frac{2\dot{v}}{v} - \frac{4}{x} = \frac{1}{x}$ , assim:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{5}{2x} \Rightarrow \frac{\ddot{v}}{v} = \frac{15}{4x^2}; \quad (3.57)$$

Por fim, substituindo (3.57) em (3.56) teremos:

$$\ddot{y}(x) + \frac{1}{x}\dot{y}(x) + \left[1 - \frac{25}{4x^2}\right]y(x) = 0. \quad (3.58)$$

Ou seja, uma equação de Bessel presente na Eq. (3.48) com ordem  $n = 5/2$ . A solução desta é na forma:

$$y(x) = C_1 J_{\frac{5}{2}}(x) + C_2 Y_{\frac{5}{2}}(x); \quad (3.59)$$

retornando a variável original,  $r$ , uma vez que temos  $x = \frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}}$  e de (3.57) que  $v = x^{5/2}$ .

$$\phi_n(r) = e^{\frac{5c}{4}r} \left[ \aleph_{1_n} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}}\right) + \aleph_{2_n} Y_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}}\right) \right]; \quad (3.60)$$

onde os termos constantes de  $\left(\frac{2m}{c}\right)^{5/2}$  foram embutidos nos  $\aleph$ . Este resultado foi encontrado na Ref. [119].

O gráfico dessas soluções está presente na figura 3.1. Observamos que o fator  $e^{\frac{5c}{4}r}$  amplia a oscilação das funções de Bessel conforme  $r$  cresce. Assim independentemente do atendimento das condições de contorno em (3.17), não se é possível obedecer a condição de normalidade (3.18). Concluí-se que *nenhum modo massivo de onda-s é localizado no GS* [119].

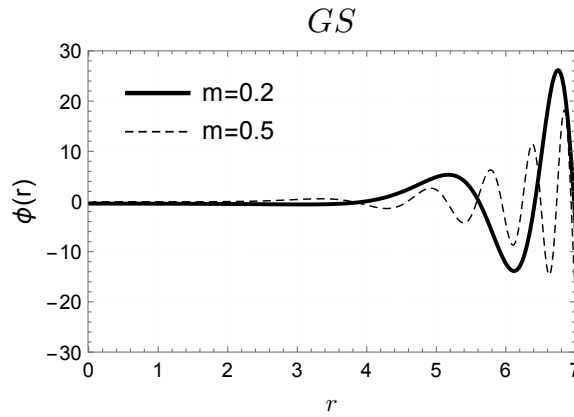


Figura 3.1:  $\phi(r)$  para o modelo GS com  $c = 1.0$ . Ajustamos  $\aleph_1 = \aleph_2$  de tal forma a adequar melhor as funções aos gráficos. Quanto maior a massa, maior a frequência de oscilação das funções.

De maneira análoga, para os modos sem massa de soluções de *onda-l*, com  $l > 0$ , teremos soluções tipo *Bessel modificada*. Verifique que para o caso onde  $m = 0$  e  $l \neq 0$  teremos para o GS a equação (3.42) como:

$$\phi_m'' - \frac{5}{2}c\phi_m' - \left(\frac{l^2}{R_0^2}\right)e^{cr}\phi_m = 0. \quad (3.61)$$

comparando com a equação massiva de onda- $s$  em (3.43) que podemos substituir  $m^2$  em  $-l^2/R_0^2$ , ou seja,  $m$  em  $-il/R_0$  e assim seguindo os mesmos procedimentos conseguiremos uma equação na forma modificada como:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \left[1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2\right]y(x) = 0, \quad (3.62)$$

a qual terá solução

$$\phi(r) = e^{\frac{5c}{4}r} \left[ \aleph_{1l} I_{\frac{5}{2}} \left( \frac{2l}{R_0 c} e^{\frac{cr}{2}} \right) + \aleph_{2l} K_{\frac{5}{2}} \left( \frac{2l}{R_0 c} e^{\frac{cr}{2}} \right) \right]; \quad (3.63)$$

onde os termos constantes de  $\left(\frac{2l}{R_0 c}\right)^{5/2}$  foram embutidos nos  $\aleph$ .

O gráfico das funções de Bessel modificadas estão presentes na figura 3.2 para o caso onde  $\aleph_2 = 0$  e na figura 3.3 para  $\aleph_1 = 0$  ambos para *onda-p* ( $l = 1$ ).

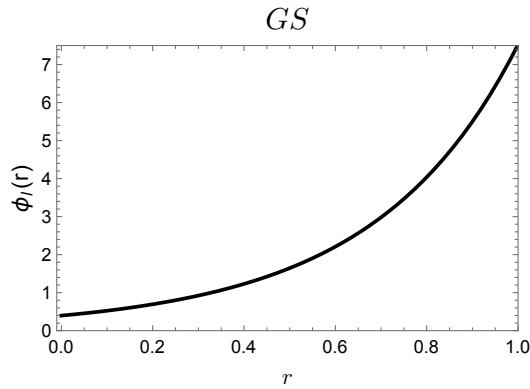


Figura 3.2:  $\phi(r)$  para o modelo GS com  $m = 0$ ,  $l = 1$ ,  $\aleph_1 = 1$  e  $\aleph_2 = 0$ . Essa solução não pode ser normalizada quando  $r \rightarrow \infty$ .

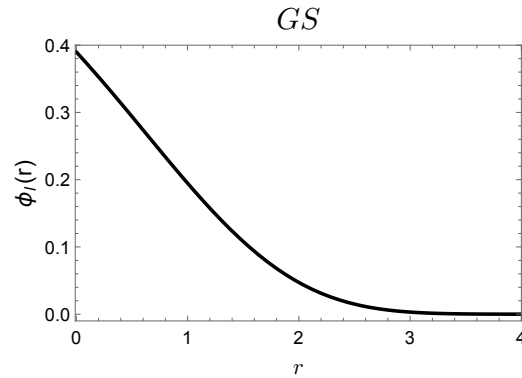


Figura 3.3:  $\phi(r)$  para o modelo GS com  $m = 0$ ,  $l = 1$ ,  $\aleph_1 = 0$  e  $\aleph_2 = 1$ . Embora essa solução possa ser normalizada, não é possível atender a condição de derivada nula na origem.

Com estes perfis não podemos ter nenhuma combinação de  $\aleph_1$ ,  $\aleph_2$  que permita ao mesmo tempo uma solução normalizada e de derivada nula nos extremos. *Não existe assim nenhum modo zero localizado para  $l > 0$ .* Para sermos formais quanto às ondas- $l$ , deveríamos calcular o valor analítico das derivadas tanto da equação (3.60) como a da (3.63) e aplicarmos o caso onde a condição (3.18) seria válida. Com isso concluiríamos que não há maneira de atender às condições (3.17) e (3.18) simultaneamente. Caso o leitor esteja interessado em obter este resultado, as referências [37] além das tabela presentes na Ref. [175] podem auxiliar nesta verificação.

Caso adotemos simultaneamente  $m \neq 0$  e  $l \neq 0$  haveria um “modo zero” localizado toda vez que  $m = \frac{l}{R_0}$ . Dessa conclusão verificamos que devemos ter necessariamente  $l = 0$ , pois esta é a única solução de onda sem massa localizada, enquanto que para os modos massivos  $l \neq 0$  possibilita modos massivos localizados. Trabalharemos de agora em diante apenas com as soluções de *onda-s*.

Para os casos de onda-*s*, aplicando a derivada na autofunção (3.60) e impondo um limite na variável  $r = r_{\max}$ , teremos um espectro discreto onde as condições de derivadas nulas nos extremos da Eq. (3.17) serão sempre válidas. Através disso se obtém o seguinte espectro de massa [119]:

$$m_n \simeq c \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{\max}}, \quad (3.64)$$

Detalhes sobre obtenção numérica deste espectro em outros modelos em 6D estão presentes nos artigos [148, 150], e com bastantes detalhes na tese de Diego Frankin de Souza Veras na Ref. [176].

Alternativamente, utilizando o sistema onde a métrica é conforme especificado na seção 2.3 para a geometria e na seção 3.1.3, teremos para o GS a Eq. (2.75):

$$F(z) = \frac{4}{c^2} \frac{1}{\tilde{z}^2}, \quad \beta(z) = R_0^2 \quad (3.65)$$

lembrando que  $\tilde{z} = z + 2/c$ .

A função  $K(z)$  da equação (3.27) será:

$$K(z) = F^{-1}(z) \beta^{-\frac{1}{4}}(z) = \frac{c^2}{4\sqrt{R_0}} \tilde{z}^2, \quad (3.66)$$

podemos notar aqui que  $\dim[K] = 1/2$ .

Calculamos o potencial da equação de Schrödinger para através da Eq. (3.31):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z) &= \frac{\dot{F}(z)}{F(z)} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\beta}(z)}{\beta(z)}, \quad \text{como} \quad \frac{\dot{\beta}(z)}{\beta(z)} = 0, \quad \mathcal{W}(z) = \frac{\dot{F}(z)}{F(z)} = -\frac{2}{\tilde{z}}, \\ \dot{W}(z) &= \frac{2}{\tilde{z}^2}, \quad W^2(z) = \frac{4}{\tilde{z}^2}, \\ U(z) &= \dot{W} + W^2 = 6\tilde{z}^{-2} = \frac{6}{\left(z + \frac{2}{c}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

assim a equação de de Schrödinger para gravidade/ campo escalar no GS será [147, 150]:

$$-\ddot{\Psi}_n(z) + \frac{6}{\left(z + \frac{2}{c}\right)^2} \Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z) \quad (3.68)$$

onde o modo zero da Eq. (3.35) expõe a seguinte forma normalizada:

$$\Psi_0(z) = \sqrt{\frac{24}{c^3}} \left( z + \frac{2}{c} \right)^{-2}. \quad (3.69)$$

Observe que a condição (3.33) é obedecida uma vez que  $\frac{\dot{\Psi}(z)}{\Psi(z)} = -\frac{\dot{K}(z)}{K(z)} = -2 \left( z + \frac{2}{c} \right)^{-1}$ . Além disso, comparando esse modo ao da equação (3.36) notamos que  $\alpha = 2$ . Veja também que  $\dim[\Psi] = 1/2$ , logo preservamos a dimensão de massa na transformação da equação (3.24), onde  $\dim[\phi] = \dim[K \Psi] = 1$ .

Para os modos massivos, utilizaremos a tabela presente no “*Handbook of Mathematical Functions*” [175] em que em sua equação (9.1.49) apresenta:

$$\left[ \partial_Z^2 + \left( \lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{Z^2} \right) \right] \omega(Z) = 0 \Rightarrow \omega(Z) = \sqrt{Z} [J_\nu(\lambda Z) + Y_\nu(\lambda Z)]; \quad (3.70)$$

assim comparando a Eq. (3.68) e Eq. (3.70) que  $Z = \tilde{z}$ ,  $\lambda = m$ ,  $\nu = \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$ , logo

$$\Psi_n(z) = \sqrt{\tilde{z}} \left[ \aleph_{1n} J_{\frac{5}{2}}(m\tilde{z}) + \aleph_{2n} Y_{\frac{5}{2}}(m\tilde{z}) \right], \quad (3.71)$$

como esperado pela equação (3.38) para  $\alpha = 2$ , as funções de Bessel são de ordem  $5/2$ . O mesmo comportamento da equação para a variável original  $\phi(r)$  em (3.60) é observado, não existem modos massivos localizados pelo não atendimento das equação (3.33) e (3.34).

Além disso os valores:

$$|\Psi_n|^2(0) = \frac{4}{cR_0} m_n^2 e^{-c r_{\max}}, \quad \Delta V(x) \sim (cx)^{-3}$$

são obtidos na referência original do GS [119], o que confirmam as fórmulas do Csaki [173] nas equação (3.39) e (3.40) para  $\alpha = 2$ .

Para outros modelos, os resultados estão presente no HC nas referências [147, 148], para o TA em [139] e para o BC em [143]. No capítulo 5, retornaremos a este assunto quando utilizarmos o acoplamento exótico para confinarmos o campo Elko.

Ao aplicarmos as métricas de cada modelo, verificaremos como resultado das expressões (2.19), (2.31), (2.43), (2.61) que todas as equações diferenciais, seja de Sturm-Liouville como de Schrödinger convergirão para o GS. Os modos zeros de gravidade/ campo escalar para estes modelos são todos localizados e nenhum modo massivo, em nenhum modelo, pode ser confinado.

Encerramos esta subseção plotando os modos zeros de cada modelo tratados na seção 2.2 na variável  $z$  assim como seus potenciais de de Schrödinger. Em todos os modelos os modos

massivos são equações de Bessel, que diferem entre si apenas pelo seu valor na origem [119, 139, 143, 146–148, 153]

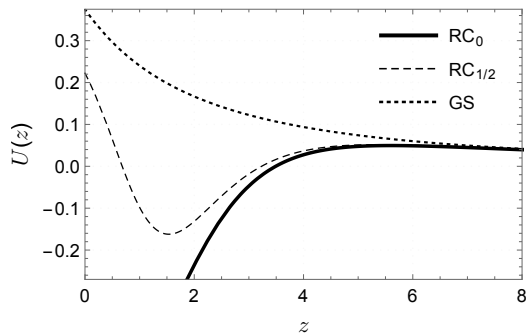


Figura 3.4:  $V(z)$  potencial quântico análogo para a gravidade/campo escalar nos modelos RC com  $a = 0$  (linha cheia), para o RC com  $a = 0.5$  (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com  $c = 0.5$ . Para o GS temos apenas uma barreira, no RC temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o caso não resolvido.

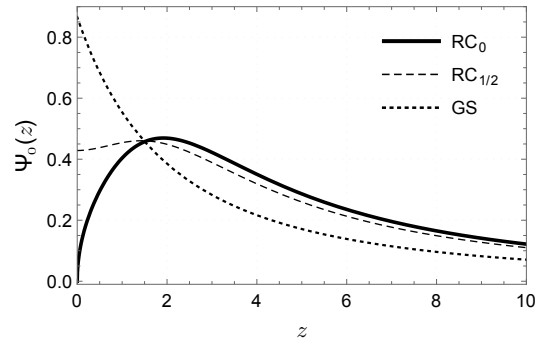


Figura 3.5:  $\Psi_0(z)$  modo zero para gravidade/campo escalar nos modelos RC com  $a = 0$  (linha cheia), para o RC com  $a = 0.5$  (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com  $c = 0.5$ . Todos são localizados e a característica de ter seu máximo deslocado na origem é presente no modelo RC. .

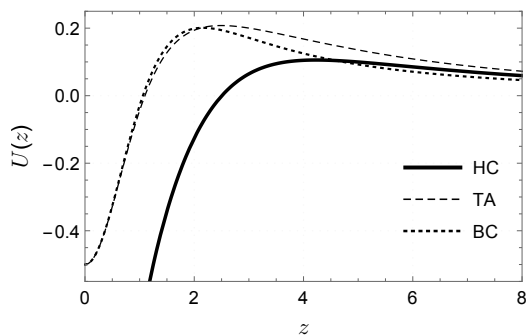


Figura 3.6:  $V(z)$  potencial quântico análogo para a gravidade/campo escalar nos modelos HC (linha cheia), para o TA com  $p = 1.0$  (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com  $p = 0.25$ , em todos  $c = 2b = 0.5$ . Temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o modelo HC.

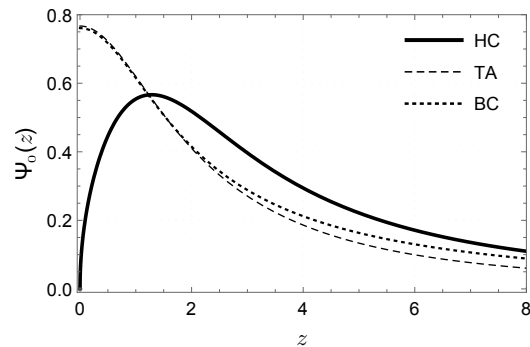


Figura 3.7:  $\Psi_0$  modo zero para a gravidade/campo escalar nos modelos HC (linha cheia), para o TA com  $p = 1.0$  (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com  $p = 0.25$ , em todos  $c = 2b = 0.5$ . Todos os modos são localizados, mas apenas para o HC este modo se anula na origem.

## 3.2 Campo de calibre

Verificaremos nesta seção que o campo de calibre em 6D é naturalmente confinado em espaços  $AdS_6$ , mesmo para o caso fino [128, 129, 137, 140, 146, 149, 152, 153]. Isso é uma vantagem sobre modelos 5D, onde é necessário um acoplamento tipo dÍlaton para a localização do campo de calibre em espaços  $AdS_5$  [91, 92, 103].

Iniciaremos com a análise da dimensão canônica de massa para o campo de gauge em D dimensões:

$$S_{spin1} = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} \mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}_{RS}, \quad (3.72)$$

onde  $\mathcal{F}_{MN} = \partial_M \mathcal{A}_N - \partial_N \mathcal{A}_M$ . A dimensão de massa para coordenadas não compatas é dada por  $dim[F] = (dim[\mathcal{A}] - 1)$  enquanto para compactas  $dim[F] = dim[\mathcal{A}]$ , assim

$$dim[\mathcal{A}_a] = \frac{D+2}{2}, \quad dim[\mathcal{A}_\Omega] = \frac{D}{2} \quad (3.73)$$

Para modelos tipo corda em 6D as referências [128, 129, 137, 138, 146, 148, 177] tratam essa ação como

$$S_{spin-1} = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} \mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}_{RS} d^6 x, \quad (3.74)$$

com a seguinte equação de movimento [128, 129]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_S \sqrt{-g} g^{SM} g^{RN} \mathcal{F}_{MN}) = 0. \quad (3.75)$$

Impondo a fixação de calibre como presente nas Refs. [128, 129, 146, 148].

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \mathcal{A}_\theta = 0, \quad \mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r(r, \theta) \quad (3.76)$$

Assim, decompostemos a equação de movimento como da Eq. (3.75)

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{F}{H} \partial_\theta^2 \right) \mathcal{A}_r = 0, \quad (3.77)$$

$$\partial_r \left( \frac{F^2}{\sqrt{H}} \partial_\theta \mathcal{A}_r \right) = 0, \quad (3.78)$$

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{F}{H} \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sqrt{H}} \partial_r \left( F \sqrt{H} \partial_r \right) \right) \mathcal{A}_\lambda = 0. \quad (3.79)$$

Tomando a decomposição KK para o campo de gauge em seis dimensões [128, 129, 153]

$$\mathcal{A}_\mu(x^M, r, \theta) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \mathcal{A}_\mu^{(n,l)}(x^\mu) \rho_n(r) e^{il\theta} \quad (3.80)$$

$$\mathcal{A}_r(x^M, r, \theta) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \mathcal{A}_\mu^{(n,l)}(x^\mu) \varrho_n(r) e^{il\theta} \quad (3.81)$$

analisando a dimensão canônica de massa, notamos que  $\dim[\mathcal{A}_b(x^M, r, \theta)] = 4$ , que a porção 4D do campo de calibre tem  $\dim[\mathcal{A}_b^{(n,l)}(x^\mu)] = 3$ , logo  $\dim[\rho_n(r)] = \dim[\varrho_n(r)] = 1$ .

Assim como tratado para a gravidade/ campo escalar na subseção 3.1.2, obteremos a seguinte equação de Sturm-Liouville para o caso de onda- $s$  [146, 148]

$$\left[ \partial_r^2 + \left( 2\mathcal{P} - \frac{F'}{F} \right) \partial_r + \frac{m_n^2}{F} \right] \rho_n(r) = 0, \quad (3.82)$$

que pode ser reescrita como

$$\rho_n''(r) + \left( \frac{3}{2} \frac{F'}{F} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \right) \rho_n'(r) + \frac{m_n^2}{F} \rho_n(r) = 0, \quad (3.83)$$

observamos que essa equação (3.83) difere apenas de um fator na derivada primeira daquela encontrada para gravidade na Eq. (3.14), onde lá  $\frac{5}{2} \frac{F'(r)}{F(r)}$  é substituído aqui por  $\frac{3}{2} \frac{F'(r)}{F(r)}$  [128, 129, 153].

As condição de contorno para que as funções de onda do campo de calibre seja localizado são as mesmas da gravidade:

$$\rho'(r \rightarrow 0) = \rho'(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.84)$$

Entretanto, devido à diferença no operador em (3.75), as condições de ortonormalidade são dadas por [128, 129, 153]:

$$\int_0^\infty dr \frac{\sqrt{-g(r)}}{F^2(r)} [\rho_n^*(r) \rho_s(r)] = \delta_{n,s}, \quad (3.85)$$

De maneira semelhante ao da Eq. (3.16) a solução de modo zero da equação (3.83) será [128, 153]:

$$\rho_0(r) = C_0 + C_1 \int dr' \left( F^{-\frac{3}{2}}(r) \beta^{-\frac{1}{2}}(r) \right). \quad (3.86)$$

onde apenas o caso de  $\rho_0(r) = C_0 = \left( \int_0^\infty dr F^{1/2}(r) \beta^{1/2}(r) \right)^{-\frac{1}{2}}$  atende as condições requeridas em (3.84) e (3.85). Poderemos assim redefinir este modo zero como de calibre como [153]:

$$\tilde{\rho}_0(r) = \tilde{C}_0 \sqrt{\frac{\sqrt{-g(r)}}{F^2(r)}} = \tilde{C}_0 F^{\frac{1}{4}}(z) \beta^{\frac{1}{4}}(z). \quad (3.87)$$

Aqui obtivemos um modo zero localizado para o campo de calibre em 6D sem necessidade de interações com outros campos na ação (3.72), o que é vantagem sobre o caso em cinco dimensões. Os modos massivos serão novamente Funções de Bessel, porém de ordem  $\frac{3}{2}$ , que também não obedecerão às condições de contorno presentes nas (3.84) e (3.85), sendo assim *não localizados*.



### 3.2.1 Abordagem de Schrödinger para o campo de spin 1

De maneira semelhante a detalhada para a gravidade na subseção 3.1.3, a equação de Sturm-Liouville do campo de calibre da equação (3.83) é transformada em uma equação de Schrödinger através da mesma transformação na variável independente da equação (3.1.3). A diferença é que aqui a mudança na variável dependente é feita na forma:

$$\rho_{n,l}(z) = K(z)\Psi_{n,l}(z), \quad \text{onde} \quad K(z) = F^{-\frac{1}{2}}(z)\beta^{-\frac{1}{4}}(z), \quad (3.88)$$

com isso o potencial da equação de Schrödinger para o campo de calibre será [148]:

$$U(z) = \frac{1}{4} \left[ 2\frac{\ddot{F}}{F} - \left(\frac{\dot{F}}{F}\right)^2 + \frac{\dot{F}\dot{\beta}}{F\beta} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 \right], \quad (3.89)$$

que aqui também pode ser decomposto, mas com mudança em seu  $\mathcal{W}$ :

$$U(z) = \mathcal{W}^2(z) + \dot{\mathcal{W}}(z), \quad \text{com} \quad \mathcal{W} = \frac{1}{2}\frac{\dot{F}}{F} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (3.90)$$

a qual apresentará a mesma forma *Super Simétrica análoga*: da equação (3.32) e também não haverá táquions para o campo de calibre.

As condições de contorno da Eq. (3.84) se modificam pelas transformações (2.71) e (3.88) como:

$$\frac{\dot{\Psi}(0)}{\Psi(0)} = -\frac{\dot{K}(0)}{K(0)}, \quad \frac{\dot{\Psi}(\infty)}{\Psi(\infty)} = -\frac{\dot{K}(\infty)}{K(\infty)}. \quad (3.91)$$

E a condição de ortonormalidade em Eq. (3.85) passa a ser

$$\int_0^\infty \Psi_i^*(z)\Psi_j(z)dz = \delta_{ij}. \quad (3.92)$$

O modo zero de onda- $s$  nesta variável  $z$  pode ser obtido como para o campo de calibre como:

$$\Psi_0(z) = C_0 F^{\frac{1}{2}}(z)\beta^{\frac{1}{4}}(z), \quad (3.93)$$

onde  $C_0$  é uma constante de normalização.

Comparando com o modo zero da gravidade na equação (3.93) com o modo zero do campo de calibre (3.35), verificamos que:

$$\Psi_0^{spin\ 1}(z) = F(z)^{-\frac{1}{2}}\Psi_0^{spin\ -2}(z), \quad (3.94)$$

assim notamos o decaimento do modo zero do campo de gauge é mais lento que o modo zero do campo da gravidade.

### 3.2.2 Campo de Calibre no GS

Para o modelo GS, a Eq. (3.83) será [146, 153]

$$\phi_m'' - \frac{3}{2}c\phi_m' + (m_0^2 - l^2/R_0^2) e^{c\rho} \rho_m = 0. \quad (3.95)$$

O modo zero do campo normalizado para o campo de calibre será dado pela equação (3.87) [119, 146, 153]

$$\rho_0(r) = \sqrt{\frac{c}{2R_0}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\rho}_0(r) = \sqrt{c} e^{-\frac{c}{2}r}, \quad (3.96)$$

Os modos massivos podem ser encontrados da mesma forma que detalhado a partir da equação (3.48), apenas substituindo o valor  $\frac{5}{2}$  por  $\frac{3}{2}$  e assim encontraremos o mesmo resultado das Ref. [129, 146, 148, 153]

$$\rho_m(r) = e^{\frac{3}{4}cr} \left[ B_1 J_{3/2} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{1}{2}cr} \right) + B_2 Y_{3/2} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{1}{2}cr} \right) \right], \quad (3.97)$$

são mais uma vez não localizados, mas impondo a condição (3.84), encontraremos o espectro de massa para o campo de calibre como [129, 148]

$$m_n = \frac{c}{2} n\pi e^{-\frac{c}{2}r_{\max}}. \quad (3.98)$$

Na variável  $z$ , teremos o  $K(z)$  da Eq. (3.88) para o campo de calibre como:

$$K(z) = F^{-\frac{1}{2}}(z)\beta^{-\frac{1}{4}}(z) = \frac{c}{2\sqrt{R_0}} \tilde{z}, \quad (3.99)$$

para o campo de calibre também temos  $\dim[K] = 1/2$ .

Calculamos o potencial da equação de Schrödinger para através da Eq. (3.90):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z) &= \frac{1}{2} \frac{\dot{F}(z)}{F(z)} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\beta}(z)}{\beta(z)}, \quad \text{como} \quad \frac{\dot{\beta}(z)}{\beta(z)} = 0, \quad \mathcal{W}(z) = \frac{1}{2} \frac{\dot{F}(z)}{F(z)} = -\frac{2}{\tilde{z}}, \\ \dot{W}(z) &= W^2(z) = \frac{1}{\tilde{z}^2}, \\ U(z) &= \dot{W} + W^2 = 2\tilde{z}^{-2} = \frac{2}{\left(z + \frac{2}{c}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

assim a equação de de Schrödinger para o campo de calibre no GS será:

$$-\ddot{\Psi}_n(z) + \frac{2}{\left(z + \frac{2}{c}\right)^2} \Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z) \quad (3.101)$$

onde o modo zero da Eq. (3.93) expõe a seguinte forma normalizada para o campo de calibre:

$$\Psi_0(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \left( z + \frac{2}{c} \right)^{-1}, \quad (3.102)$$

comparando esse modo ao da equação (3.36) notamos que  $\alpha = 1$ . E pela equação (3.70) comparando com a Eq. (3.101) concluímos mais uma vez que  $Z = \tilde{z}$ ,  $\lambda = m$ ,  $\nu = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ , logo

$$\Psi_n(z) = \sqrt{\tilde{z}} \left[ \aleph_{1n} J_{\frac{3}{2}}(m\tilde{z}) + \aleph_{2n} Y_{\frac{3}{2}}(m\tilde{z}) \right], \quad (3.103)$$

como esperado pela equação (3.38) para  $\alpha = 1$ . O mesmo comportamento da equação para a variável original  $\rho_n(r)$  em (3.97) é observado, não existem modos massivos localizados, já que nenhum deles atendem as equações (3.91) e (3.92) simultaneamente.

Não podemos afirmar diretamente que a correção para a lei de Coulomb em 6D será de ordem  $\mathcal{O} \sim [(cx)^1]$ , uma vez que a forma como esta correção é gerada envolve bem mais campos do que os assumidos para a correção de Newton. A ação que descreve esta correção leva não só os modos massivos do campo de calibre, mas também o modo zero do campo fermiônico (que será obtido no próximo capítulo). Comentaremos qualitativamente este resultado na seção 6.2.

Encerramos esta subseção plotando para o campo de calibre os modos zeros de cada modelo tratados na seção 2.2 na variável  $z$  assim como seus potenciais de de Schrödinger. Em todos os modelos os modos massivos são equações de Bessel, que diferem entre si apenas pelo valor inicial. [119, 139, 143, 146–148, 153]

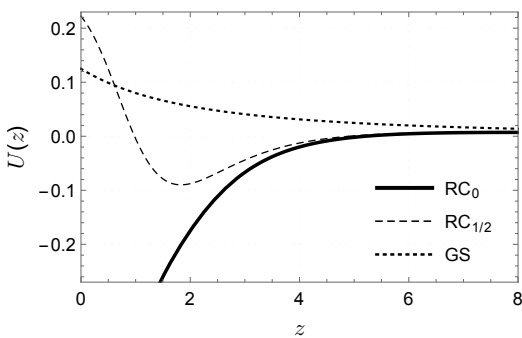


Figura 3.8:  $V(z)$  potencial quântico análogo para o campo de calibre nos modelos RC com  $a = 0$  (linha cheia), para o RC com  $a = 0.5$  (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com  $c = 0.5$ . Para o GS temos apenas uma barreira, no RC temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o caso não resolvido.

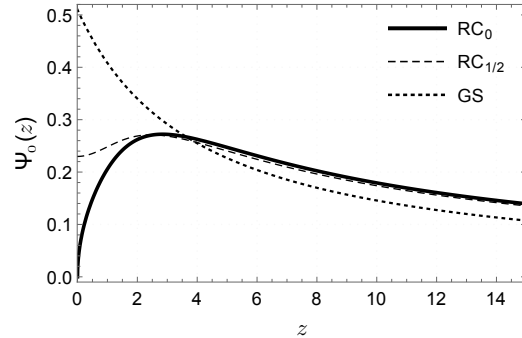


Figura 3.9:  $\Psi_0(z)$  modo zero para o campo de calibre nos modelos RC com  $a = 0$  (linha cheia), para o RC com  $a = 0.5$  (linha tracejada) e para o GS (linha pontilhada) todos com  $c = 0.5$ . Todos são localizados e a característica de ter seu máximo deslocado na origem é presente no modelo RC.

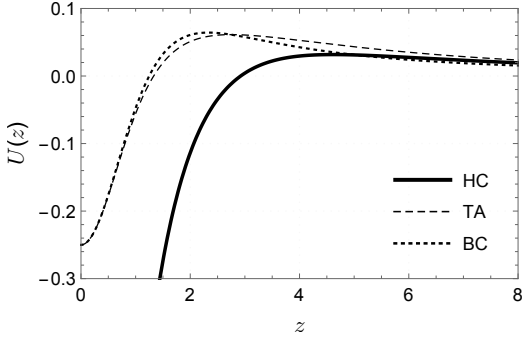


Figura 3.10:  $V(z)$  potencial quântico análogo para o campo de calibre nos modelos HC (linha cheia), para o TA com  $p = 1.0$  (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com  $p = 0.25$ , em todos  $c = 2b = 0.5$ . Temos potenciais vulcões, onde existe singularidade para o modelo HC.

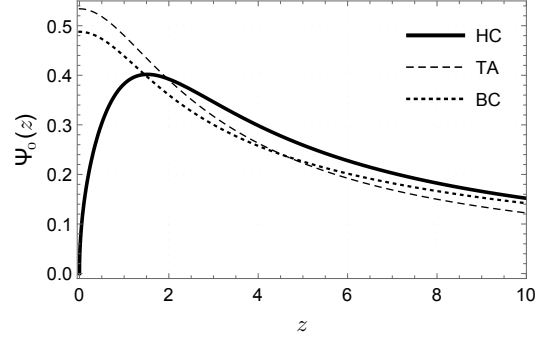


Figura 3.11:  $\Psi_0$  modo zero para o campo de calibre nos modelos HC (linha cheia), para o TA com  $p = 1.0$  (linha tracejada) e para o BC (linha pontilhada) com  $p = 0.25$ , em todos  $c = 2b = 0.5$ . Todos os modos são localizados, mas apenas para o HC este modo se anula na origem.

### 3.3 Conclusões do capítulo 3

Finalizamos o capítulo listando suas principais conclusões:

- Verificamos que os modos zero e massivos para gravidade e campo escalar compartilham das mesmas expressões em 6D [128], este resultado também é verificado em modelos 5D [78];
- Os modos zeros de gravidade/campo escalar são localizados. Na variável  $r$ , são dados por constantes, enquanto os modos massivos (não confinados) por funções de Bessel de ordem  $5/2$ ;
- Demonstramos que o campo de calibre é confinado naturalmente em 6D. Na variável  $r$ , seu modo zero é uma constante e suas funções massivas divergentes são funções de Bessel de ordem  $3/2$ ;
- Comentamos pela abordagem de Schrödinger que não existem táquions para gravidade/campo escalar ou campo de calibre em 6D devido à forma super-simétrica do potencial quântico análogo da Eq. de Schrödinger (este fato será detalhado na seção 4.1.3);
- Para todos os campos bosônicos obtivemos analiticamente o modo zero na variável  $z$  no

modelo GS.

- Através do expoente de decaimento do modo zero na variável  $z$ , confirmamos os resultados da Ref. [173] para as ordens das funções de Bessel, os valores destas na origem e a ordem da correção da lei de Newton devido aos modos massivos. Sendo que o campo de calibre possui ordens menores do que a gravidade/campo escalar. Não podemos comentar ainda sobre a ordem da correção da lei de Coulomb por apresentar aspectos diferentes daquelas para a lei de Newton. Voltaremos a este assunto no capítulo 6.2

$$x_2 \approx 3^{\circ}41'49.1'' S S$$

## 4 Campos fermiônicos em 6D

Estudaremos nesse capítulo o confinamento dos campos de spin  $1/2$ . Verificaremos que estes são os únicos campos a não serem naturalmente confinados em 6D. Devido a isto, apresentaremos a solução inicialmente proposta por Yu Xiao Liu em seu artigo [133], onde o uso de um campo de calibre de fundo que se acopla minimamente com férmions possibilita a localização do modo zero fermiônico. O tema central de meu doutorado foi o estudo de escolhas de calibres acoplados a férmions de tal forma que o modo zero deste campo seja confinado e que ainda os modos massivos gerem potenciais do tipo vulcões para que existam modos massivos ressonantes. Essa técnica foi aplicada para vários modelos em nossos artigos [151–153], os quais serão juntamente com a Ref [133] a base deste capítulo.

Na seção 4.1, nos basearemos principalmente na Ref. [153] que consiste no confinamento de férmions no modelo “*Hamilton’s cigar soliton*” (HC). Na seção 4.2 trataremos do confinamento do campo de spin  $3/2$ , observaremos que existem apenas pequenas variações entre as ordens dos modos localizados do spin  $1/2$  para o  $3/2$ , assim como também verificado no capítulo anterior entre spin 0 (ou spin 2) e o spin 1. Na seção final 4.3, mostraremos como outras escolhas de calibres em outros modelos podem afetar o resultado nos modos zero e massivos. Estas outras escolhas foram utilizadas em meus primeiros artigos [151, 152].

### 4.1 Férmions de spin 1/2

Partiremos da seguinte ação para férmions de spin  $\frac{1}{2}$  não massivos no “*Bulk*” em  $D$  dimensões:

$$S_{spin1/2} = i \int d^D x \sqrt{-g} \bar{\Psi}(x^M) \Gamma^M D_M \Psi(x^M), \quad (4.1)$$

a dimensão de massa do  $\Psi$  será

$$dim[\Psi] = \frac{D-1}{2} \quad (4.2)$$

Particularizando para o caso 6D [128, 133, 134, 177, 178] teremos

$$S_{6_{1/2}} = i \int \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi d^6x, \quad (4.3)$$

verificamos que  $\dim[\Psi] = 5/2$ . As matrizes de Dirac em 6D são de ordem  $8 \times 8$ . As matrizes no espaço curvo,  $\Gamma^M$ , se relacionam com as do espaço plano,  $\Gamma^{\bar{M}}$ , como

$$\Gamma^M = \xi_M^{\bar{M}} \Gamma^{\bar{M}}, \quad (4.4)$$

onde as “vielbeins” são dadas por  $g_{MN} = \xi_M^{\bar{M}} \xi_N^{\bar{N}} \eta_{\bar{M}\bar{N}}$ . Estas matrizes obedecem à álgebra de Clifford  $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = +2g^{MN} \mathbb{1}_8$ . A derivada covariante de calibre é representada por  $D_M$ , tendo a forma [133, 134, 177]

$$D_M = \partial_M + \Omega_M - iqA_M, \quad (4.5)$$

onde a conexão de spin é calculada como

$$\Omega_M = \frac{1}{4} \eta^{\bar{P}\bar{N}} \xi_N^{\bar{M}} \left[ \partial_M \xi_{\bar{P}}^{\bar{N}} + \Gamma_{M\bar{Q}}^{\bar{N}} \xi_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \right] \Gamma_{\bar{M}} \Gamma_{\bar{N}}, \quad (4.6)$$

e o campo vetorial de calibre de fundo com simetria cilíndrica tem a forma

$$A_M = A_\mu(x) \hat{x} + A_\theta(r) \hat{\theta}, \quad (4.7)$$

chamamos atenção para que nosso calibre de fundo,  $A_M$ , não é relacionado ao calibre dinâmico da seção anterior  $\mathcal{A}_M$ . O uso deste acoplamento é fundamental para que férmions sejam confinados em 6D [133, 134, 177].

Para o cálculo da conexão de spin, os resultados apresentados para os símbolos Christoffel na equação (2.6) são necessários. Sabendo também que devido à forma diagonal de nossa métrica as “vielbeins” se reduzem à raiz dos fatores de “warp” como  $\xi_M^{\bar{M}} = \sqrt{g_{MN}} \delta_M^{\bar{M}}$ , podemos deduzir os termos não nulos da conexão de spin como

$$\Omega_\mu = \frac{1}{4} \frac{F'(r)}{\sqrt{F(r)}} \Gamma_{\bar{\mu}} \Gamma_{\bar{r}} \quad \text{e} \quad \Omega_\theta = \frac{1}{4} \frac{H'(r)}{\sqrt{H(r)}} \Gamma_{\bar{\theta}} \Gamma_{\bar{r}}. \quad (4.8)$$

Substituindo a equação (4.5) e (4.8) na ação (4.3) com a métrica da Eq. (2.3), obteremos uma equação de Dirac na forma:

$$\begin{aligned} \Gamma^M D_M \Psi = & \left[ F^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{\bar{\mu}} \left( \partial_\mu - iqA_\mu(x) \right) + \Gamma^{\bar{r}} \left( \partial_r + \frac{F'}{F} + \frac{H'}{4H} \right) + \right. \\ & \left. + H^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{\bar{\theta}} \left( \partial_\theta - iqA_\theta(r) \right) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

O espinor de Weyl e as matrizes gamma são usualmente representadas em seis dimensões como [128, 133, 134, 151, 152, 177, 178]:

$$\Psi(x, r, \theta) = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ 0 \end{pmatrix}_{8 \times 1}, \quad (4.10)$$

$$\Gamma^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\bar{\mu}} \\ \gamma^{\bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}, \quad \Gamma^{\bar{r}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}, \quad \Gamma^{\bar{\theta}} = i \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{\theta} \\ \gamma^{\theta} & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}. \quad (4.11)$$

Devido à nossa assinatura para métrica  $(-, +, +, +, +, +)$  as matrizes  $\gamma^\mu$  (quadradas de ordem 4) na representação de Weyl serão:

$$\gamma^0 = -i\sigma^1 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \gamma^k = -\sigma^2 \otimes \sigma^k, \quad \gamma^5 = \sigma^3 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \gamma^\theta = \mathbb{1}_4, \quad (4.12)$$

na notação acima separamos os índices  $\mu = (0, 1, 2, 3, 5, 6)$  dos índices  $k = (1, 2, 3)$  correndo apenas nos termos espaciais da brana. Os  $\mathbb{1}_j$  são as matriz identidade de ordem  $j$  e as matrizes de Pauli  $\sigma^k$  são expressas a seguir:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

O operador  $\otimes$  representa o produto direto (produto Kronecker) entre as matrizes. Para matrizes quadradas de ordem dois este produto é dado como:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} \\ a_{21}\mathcal{B} & a_{22}\mathcal{B} \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (4.14)$$

Nesta convenção a matriz  $\gamma^0$  é anti hermitiana, e todas as outras hermitianas. A operação de quiralidade da  $\gamma^5$  faz  $\gamma^5\psi_{R,L} = \pm\psi_{R,L}$ . Esta matriz também pode ser representada como  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . O operador de Dirac impõe que  $\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi = m\psi$ . Apontamos que na Ref. [179] há um estudo detalhado de como obter as matrizes de Dirac em várias representações de dimensões superiores.

Decompondo nosso espinor  $\psi_4$  em sua forma de Kaluza-Klein [128, 133, 134, 151, 152, 177, 178]

$$\psi_4(x, r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} \left[ \psi_{R_{n,l}}(x)\alpha_{R_{n,l}}(r) + \psi_{L_{n,l}}(x)\alpha_{L_{n,l}}(r) \right] e^{il\theta}. \quad (4.15)$$

encontramos pela Eq. (4.2) que  $\dim[\psi_4(x, r, \theta)] = \frac{5}{2}$ , que nossos modos Direito e Esquerdo em 4D tem a dimensão de massa usual  $\dim[\psi_{R_{n,l}}(x)] = \dim[\psi_{L_{n,l}}(x)] = \frac{3}{2}$ , logo  $\dim[\alpha_{R,L}(r)] = 1$ .



Usando as equações. (4.10), (4.11) e (4.15) para a solução de onda- $s$  [128, 133, 134], a equação de Dirac da Eq.(4.9) gerará a seguinte expressão diferencial de primeira ordem com termos cruzados:

$$\begin{cases} [\partial_r + \mathcal{P}(r) + \mathcal{W}(r)] \alpha_{R_n}(r) = -\frac{m_n}{\sqrt{F(r)}} \alpha_{L_n}(r) \\ [\partial_r + \mathcal{P}(r) - \mathcal{W}(r)] \alpha_{L_n}(r) = \frac{m_n}{\sqrt{F(r)}} \alpha_{R_n}(r), \end{cases} \quad (4.16)$$

onde

$$\mathcal{P}(r) = \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{H'(r)}{4H(r)} = \frac{5}{4} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{4} \frac{\beta'(r)}{\beta(r)} \quad (4.17)$$

e

$$\mathcal{W}(r) = q \frac{A_\theta(r)}{\sqrt{H(r)}} = q \frac{A_\theta(r)}{\sqrt{\beta(r)F(r)}}. \quad (4.18)$$

Chamaremos aqui o termo  $\mathcal{P}(r)$  de geométrico, por conter apenas os fatores métricos (termo este recorrente desde o capítulo anterior na Eq.(3.9)). Quanto ao termo  $\mathcal{W}(r)$  chamaremos de termo de acoplamento. Verificaremos a seguir que na ausência do termo de acoplamento, o termo geométrico será responsável pela divergência dos modos zeros (direito e esquerdo) fermiônicos.

### 4.1.1 Modo zero para spin 1/2

Para  $m = 0$ , as expressões da equação (4.16) se decompõem em duas equações diferenciais de primeira ordem, cuja solução está mostrada abaixo [153]:

$$\alpha_{R_n, L_s}^0(r) = C_0 \exp \left[ - \int_{r'} (\mathcal{P} \pm \mathcal{W}) dr' \right], \quad (4.19)$$

novamente,  $C_0$  é uma constante de normalização.

Os resultados contidos até a equação (4.19) são apenas revisão do confinamento de férmions em 6D. Apresentaremos nosso trabalho [153] a partir daqui.

Impusemos a condição de contorno de que o espinor se anule em seus limites de  $r = [0, \infty)$

$$\begin{cases} \alpha_{R,L}^0(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_{R,L}^0(r) = 0 \\ \partial_r [\alpha_{R,L}^0(r)]_{r=0} = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial_r [\alpha_{R,L}^0(r)] = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

e assim como também verificado pela equação (3.18) para a gravidade e (3.85) para o campo vetorial de calibre, o campo fermiônico deve ter seu modo zero normalizado:

$$\int_0^\infty |\alpha_{R_n, L_s}(r)|^2 dr' = \delta_{R_n, L_s}. \quad (4.21)$$

esta condição implica que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_{R,L}^0(r) = 0$ .

Na verdade, a condição de ortonormalidade necessária seria apenas que:

$$\int_0^\infty F^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-g} |\alpha_{R_n, L_s}(r)|^2 dr' = \delta_{R_n, L_s}, \quad (4.22)$$

entretanto verificaremos que a condição disposta na Eq. (4.21) é mais restritiva que esta Eq. (4.22). Através desta condição da Eq. (4.21) poderemos definir uma escolha de calibre que não gere singularidades para o espinor e que obedeça às condições de contorno presentes na Eq. (4.20).

### Modo zero de férmons 1/2 no GS

Começaremos analisando a escolha do calibre presente na equação (4.18) de tal forma a localizar férmons sem massa no modelo GS [133].

Para o modelo GS temos os fatores de “warp” da equação (2.17) como  $F(r) = e^{-cr}$ ,  $\beta(r) = R_0^2$ , logo:

$$\mathcal{P}(r) = -\frac{5}{4}c \quad \text{e} \quad \mathcal{W}(r) = q \frac{A_\theta(r)}{R_0} e^{cr}. \quad (4.23)$$

caso o leitor queira acompanhar também os resultados do I. Oda na Ref. [128], a métrica exposta por ele recai no GS para  $c = c_1$ .

De maneira um pouco diferente da proposta pela condição ortonormalidade da equação (4.21), as referências [128, 133, 134] adotam a seguinte condição baseada na ação efetiva  $S_{eff}^0(x, r, \theta)$  [128, 133] usando a ação (4.3) e a decomposição (4.15):

$$S_{eff}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu [\partial_\mu + iqA_\mu(x)] \psi(x) d^4x' \int_0^\infty \hat{I}_{\frac{1}{2}}(r) dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (4.24)$$

com isso a condição de ortonormalidade da equação (4.21) se torna menos restritiva

$$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \hat{I}_{\frac{1}{2}}(r) dr' = \int_0^\infty \sqrt{-g} F^{-\frac{1}{2}}(r) |\alpha_{R_n, L_s}^0(r)|^2 dr' = \delta_{R_s, L_n}, \quad (4.25)$$

obteremos para o GS que (4.25) será:

$$\hat{I}_{\frac{1}{2}}(r) = C_0 \exp \left[ \int_{r'} \left( \frac{1}{2}c \mp 2q \frac{A_\theta(r)}{R_0} e^{cr} dr' \right) \right], \quad (4.26)$$

podemos verificar facilmente que para o caso sem acoplamento, ou seja  $A_\theta = 0$ , teremos um modo não normalizável. Para este caso sem acoplamento a integral da Eq. (4.25) gerada da Eq. (4.26) se tornará:

$$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \hat{I}_{\frac{1}{2}}(r) dr = C_0 \int_0^\infty \left( e^{\int \frac{c}{2} dr} \right) dr' = \frac{2C_0}{c} e^{\frac{cr}{2}} \Big|_{r=0}^{r=\infty} \quad (\text{diverge}). \quad (4.27)$$

o que também é observado na referência [128]. Pela Eq. (4.23), concluímos que esta divergência foi gerada ao se fazer  $\mathcal{W} = 0$ , notamos então que  $\mathcal{P}$  é o termo responsável pela divergência.

Para que esta expressão (4.28) seja normalizável é necessário um calibre angular  $A_\theta$  que torne o argumento desta exponencial negativo, assim concluímos que:

$$\frac{cr}{2} \mp \frac{2q}{R_0} \int_{r'} A_\theta(r) e^{cr} dr < 0 \quad (4.28)$$

como os sinais  $\mp$  estão associados as quiralidades  $R, L$ , verificamos também em 6D que não é possível tomar uma escolha que confine simultaneamente os modos zeros direito e esquerdo, semelhante aos casos em 5D [93, 94, 104, 105, 109, 110].

A referência [133] propõe então a seguinte escolha sobre o calibre angular para o modo direito de tal forma que a equação (4.28) seja finita:

$$A_\theta(r) \equiv \lambda e^{-\frac{cr}{2}}, \quad \text{com } \lambda > \frac{cR_0}{4q} \quad (4.29)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento adimensional  $\dim[\lambda] = 0$ .

Outra configuração mais geral apontada na mesma referência [133] é

$$A_\theta(r) \equiv \left( \frac{cR_0}{4q} + r^n \right) e^{-\frac{cr}{2}} \quad (4.30)$$

em todas estas escolhas, embora o perfil do modo zero seja localizado, a condição de contorno presente na equação (4.20) foi ignorada.

Assim nosso trabalho também se destinou a definirmos uma escolha para o modelo HC de tal forma a preservar todas as condições sobre o espinor além de garantir o estudo das ressonâncias para os modos massivos.

### Modo zero de férmions 1/2 no HC

A parte original de nosso trabalho se inicia a partir daqui. Para o modelo HC com seus fatores de “warp” da equação (2.25):

$$F(r) = e^{-cr + \tanh(cr)}, \quad H(r) = \left( \frac{\tanh(cr)}{c} \right)^2 e^{-cr + \tanh(cr)}$$

e com o auxílio dos termos simplificados na equação (2.31), obteremos:

$$\mathcal{P}(r) = \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{H'(r)}{4H(r)} = -c \left[ \frac{5}{4} \tanh^2(cr) - 2 \operatorname{sech}^2(cr) \coth(cr) \right] \quad (4.31)$$

e

$$\mathcal{W}(r) = q \frac{A_\theta(r)}{\sqrt{H(r)}} = cq \frac{A_\theta(r)}{\tanh(cr)} e^{\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}. \quad (4.32)$$

observe que o termo  $\mathcal{P}(r)$  será mais uma vez responsável pela divergência do argumento da exponencial modo zero da Eq. (4.19) no caso de  $A_\theta = 0$ :

$$- \int_{r'} \mathcal{P}(r) dr' = \frac{5}{4} \left[ cr - \tanh(cr) + \frac{2}{5} \ln \left( \frac{\tanh(cr)}{c} \right) \right] \quad (4.33)$$

este fator é não convergente (quando exponenciado o termo  $cr$  sozinho já faz com que a exponencial seja infinita no infinito), assim o  $A_\theta(r)$  da Eq. (4.18) será fixada de tal maneira a sobrepor essa divergência.

Vamos impor que

$$\mathcal{W}(r) = -\lambda \mathcal{P}(r), \quad (4.34)$$

onde mais uma vez  $\lambda$  é uma constante de acoplamento adimensional, o modo zero *direito* se tornará:

$$\alpha_R^0(r) = C_0 \exp \left[ \int_{r'} dr' (\lambda - 1) \mathcal{P} \right] = C_0 F^{(\lambda-1)}(r) H^{\frac{1}{4}(\lambda-1)}(r), \quad (4.35)$$

com esta escolha teremos o calibre angular para o HC como

$$A_\theta(r) = \frac{\lambda}{q} \left[ \frac{5}{4} \tanh^3(cr) - 2 \operatorname{sech}^2(cr) \right] e^{-\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}, \quad (4.36)$$

o qual gerará o modo zero

$$\alpha_R^0(r) = C_0 \left( \frac{\tanh(cr)}{c} \right)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} \exp \left( \frac{5}{4} (1 - \lambda) [cr + \tanh(cr)] \right) \quad (4.37)$$

Note que na ausência de acoplamento ( $\lambda = 0$ ), o modo zero não é normalizado. Para  $\lambda > 1$ , o modo zero é normalizado, mas somente para  $\lambda > 3$  existem derivadas contínuas e nulas na origem e no infinito. Dessas restrições escolhemos  $\lambda > 3$  de tal forma que tenhamos todas as condições da Eq. (4.20) e Eq. (4.21) satisfeitas.

A figura 4.1 e 4.2 representam o modo zero e o campo angular de calibre, respectivamente. Em ambos os casos o  $\lambda$  controla a amplitude, enquanto o parâmetro  $c$  regula a espessura sobre a coordenada radial. O deslocamento do modo zero da origem da Eq. (4.37). concorda com o afastamento do núcleo da brana da origem, conforme apresentado na seção 2.2. Além disso, observamos que o modo zero reproduz as características das condições de contorno, sendo suave, quando  $\lambda > 3$ .

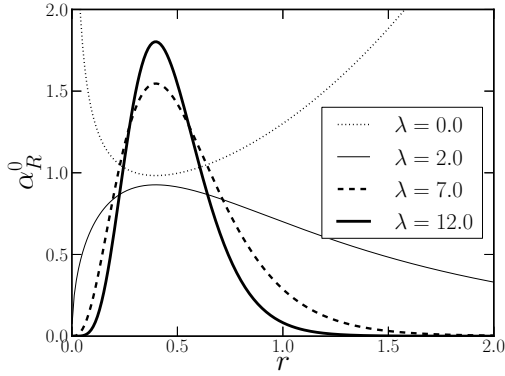


Figura 4.1: Figura do modo zero direito com  $c = 0.5$  para o HC. Um modo zero localizado ocorre para  $\lambda > 1$ , porém apenas para  $\lambda > 3$  as derivadas se anulam nos extremos.

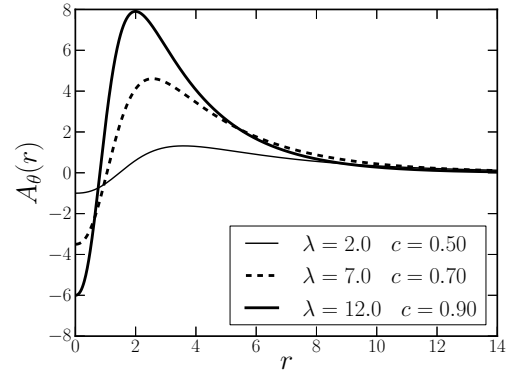


Figura 4.2: Calibre angular para o modelo HC com a escolha da equação (4.34). A forma é semelhante ao dos potências vulcões, tendo um poço próximo da origem, seguido de uma barreira e indo a zero no infinito.

Tratando sobre o modo zero *esquerdo* podemos fazer  $\lambda \mapsto -\lambda$  na Eq. (4.34), obteremos a mesma restrição de  $|\lambda| > 3$  para termos um modo localizado. É impossível confinar simultaneamente os modos direitos e esquerdos, como também verificado em 5D [93, 94, 104, 105, 109, 110].

### 4.1.2 Modos massivos de spin 1/2

Para estudarmos os modos massivos, decomporemos o sistema presente na equação (4.16) através da mudança para variável conforme  $z(r)$  dada na Eq. (2.71) assim:

$$\left( \partial_z^2 + 2\tilde{\mathcal{P}}\partial_z + \left[ \tilde{\mathcal{P}}^2 - \tilde{\mathcal{W}}^2 + \left( \dot{\tilde{\mathcal{P}}} \pm \dot{\tilde{\mathcal{W}}} \right) \right] \right) \alpha_{R_n, L_n}(z) = -m_n^2 \alpha_{R_n, L_n}(z), \quad (4.38)$$

devemos modificar aqui os termos na nova variável como

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(z)\sqrt{F(z)} \quad , \quad \tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}(z)\sqrt{F(z)}. \quad (4.39)$$

os pontos sobre os termos indicam derivadas com relação ao  $z$  e os sinais  $+$ ,  $-$  representam as quiralidades direita e esquerda, respectivamente.

A equação decomposta em (4.38) é formada por duas equações independentes de Sturm-Liouville para cada quiralidade. Utilizamos aqui esta transformação apenas para decompor as

equações cruzadas, abordaremos a análise completo no formalismo de Schrödinger na seção 4.1.3. Retornaremos agora para a variável original  $r$  para continuarmos analisando estas equações de maneira analítica:

$$\alpha''_{R_n, L_n}(r) + \left[ 3f + \frac{1}{2}g \right] \alpha'_{R_n, L_n}(r) + \left\{ \frac{(1 \mp \lambda)}{8} [5f^2 + fg + 10f' + 2g'] + (1 - \lambda^2) \left[ \frac{5}{4}f + \frac{g}{4} \right]^2 \right\} \alpha_{R_n, L_n} = -\frac{m_n^2}{F} \alpha_{R_n, L_n}(r) \quad (4.40)$$

onde

$$f(r) = \frac{F'(r)}{F(r)} \quad \text{e} \quad g(r) = \frac{\beta'(r)}{\beta(r)}. \quad (4.41)$$

### Modos massivos no GS

Para o modelo tipo corda fina (GS) teremos  $f = -c$  e  $g = 0$ , assim a equação massiva de Sturm-Liouville (4.40) se reduz em

$$\alpha''_{R_n, L_n}(r) - 3c\alpha'_{R_n, L_n}(r) + \frac{5c^2}{8} \left[ (1 \mp \lambda) + \frac{5}{2}(1 - \lambda^2) \right] \alpha_{R_n, L_n}(r) = -m_n e^{cr} \alpha_{R_n, L_n}(r). \quad (4.42)$$

Para  $\lambda = 0$  esta equação será

$$\alpha''_{R, L}(r) - 3c\alpha'_{R, L}(r) + \frac{35}{16}c^2\alpha_{R, L}(r) = -m_n e^{cr} \alpha_{R, L}(r), \quad (4.43)$$

a solução exibida abaixo pode ser obtida pelo mesmo método empregado durante a seção 3.1.3 a partir da equação (3.48):

$$\alpha_{R, L} = e^{\frac{3cr}{2}} \left[ A_{R, L}^1 J_{\pm \frac{1}{2}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) + B_{R, L}^1 Y_{\pm \frac{1}{2}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) \right], \quad (4.44)$$

sendo  $A_{R, L}^1, B_{R, L}^1$  constantes de integração. Vale mencionar que a ordem dessas funções de Bessel são dadas por  $\mu_{R, L} = \pm \frac{1}{2}$ , enquanto para os grávitons ou campos escalares 5/2 (conferir equação (3.60)) [119] e para o campo vetorial de calibre de ordem 3/2 (3.83) [129].

Para  $\lambda \neq 0$ , as ordens dessas equações de Bessel dependerão do valor das constantes de acoplamento

$$\mu_{R, L} = (5\lambda \pm 1)/2 \quad (4.45)$$

e assim:

$$\alpha_{R, L} = e^{\frac{3cr}{2}} \left[ A_{R, L}^1 J_{\mu_{R, L}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) + B_{R, L}^1 Y_{\mu_{R, L}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) \right], \quad (4.46)$$

Esta equação Eq. (4.46) para férmons massivos tem semelhanças com as obtidas em 5D [180–183], onde a constante de acoplamento também modifica a ordem das funções de Bessel. Plotamos na figura 4.3 o perfil para o modo massivo fermiônico direito presente na Eq. (4.46) para diferentes valores de  $\lambda$ .

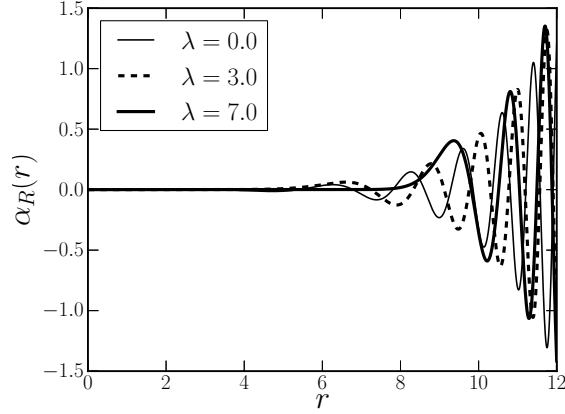


Figura 4.3: Modo massivo fermiônico direito no GS para  $m = 0.50$ . Fizemos  $A_R = B_R = 1.5 \times 10^{-3}$  e  $c = 0.5$ .

Observamos mais uma vez pela Eq. (4.46) que nenhum modo massivo no GS é normalizável, logo não localizado. Entretanto, para satisfazer a condição de contorno da Eq. (4.20), temos a restrição que  $\mu_R > 7$  e  $\mu_L > 8$ . Embora  $\lambda$  possa ser em princípio qualquer valor real, particularizaremos aqui o caso onde  $\lambda$  é inteiro. Para  $\lambda$  par obteremos as ordens de  $\mu_{R,L}$  como valores semi-inteiros, enquanto para  $\lambda$  ímpar ordens inteiras. Esta imposição evita ordens irracionais nas funções de Bessel. A característica  $\mu_R = \mu_L + 1$  demonstrará uma interessante relação no potencial da equação análoga de Schrödinger na seção 4.1.3.

Ao se aplicar as condições da Eq. (4.20) nos modos massivos da Eq. (4.46) na origem e adotando o valor limite para a variável radial como  $r = r_{\max}$ , para  $m \ll c$  obteremos a condição que  $B_{R,L} = 0$  e assim

$$J_{\mu_{R,L}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr_{\max}}{2}} \right) = 0. \quad (4.47)$$

Das raízes da função de Bessel da Eq. (4.47), encontraremos o espectro discreto  $m_n$  na forma [184]

$$m_n \approx \frac{c\pi}{2} e^{-\frac{cr_{\max}}{2}} \left[ n + \frac{2\mu_{R,L} - 3}{4} + \frac{\mu_{R,L}}{2} \frac{(2 - \mu_{R,L})}{\left( n + \frac{2\mu_{R,L} - 3}{4} \right) \pi^2} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{n^2} \right) \right]. \quad (4.48)$$

este espectro massivo (4.48) apresenta um perfil crescente, como esperado pela referência [128].

Para grandes valores de  $n$ , o espectro da Eq. (4.48) é linear em  $n$ . Para pequenos valores de  $n$  ele se torna da ordem de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ . O chamado “*gap*”, geralmente apresentado como salto entre a massa zero (que tem seu campo localizado) e o primeiro modo massivo (não localizado) pode ser calculado no GS como aproximadamente

$$\Delta m \approx \frac{c\pi}{2} e^{-\frac{cr_{max}}{2}}, \quad (4.49)$$

para  $r_{max} \gg c$  este “*gap*” tende a zero e o espectro será contínuo [44, 119, 128].

### Modos massivos no HC

Nesta subseção apenas exibiremos as soluções massivas obtidas numericamente para o modelo HC. Para detalhe sobre os métodos numéricos empregados nesta abordagem sugiro a consulta da tese de Diego Frankin na Ref. [176].

Explicitando os termos da equação (4.41) para o HC teremos

$$f(r) = -c \tanh^2(cr) \quad \text{and} \quad g(r) = 2c \frac{\text{sech}(cr)}{\tanh(cr)}, \quad (4.50)$$

aplicaremos estes resultados na (4.40) para obtermos as soluções de forma numérica. Para contornarmos a singularidade na origem exibida para alguns quantidades do modelo HC o domínio foi fixado entre  $r \in [0.01, 13.00]$  com passos constantes  $h = 0.01$ .

O espectro de massa está representado na figura 4.4 para  $\lambda = 7.0$  com diferentes valores do parâmetro  $c$ . Observe que o espectro é monotonamente crescente, como esperado nas teorias de Kaluza-Klein. Impusemos para a construção de gráfico o regime onde  $m \ll c$  [129]. Além disso, a taxa de crescimento de  $m_n$  é moderadamente menor para os primeiros valores de  $n$ . Este resultado está de acordo com o resultado analítico gerado pelo modelo fino GS da Eq. (4.48). As massas são a princípio independentes para os modos esquerdo e direito, entretanto o resultado gerado pelos espectros de massas dos modos direito e esquerdo são indistinguíveis, o que comprovam que as massas possíveis para estes modos são praticamente as mesmas.

Nas figuras 4.5 e 4.6 as autofunções estão representadas, ambas para  $c = 0.5$ , mas  $\lambda = 5.0$  na Fig. 4.5 enquanto  $\lambda = 9.0$  na Fig.4.6. Próximo à brana, elas se comportam como funções de Bessel de ordem maior que 2. Como podemos verificar analiticamente das expressões (4.50) para grandes valores de  $r$ , o perfil das funções massivas no modelo HC recupera a forma dos presentes no modelo GS [147] (plotado na Fig. 4.3).



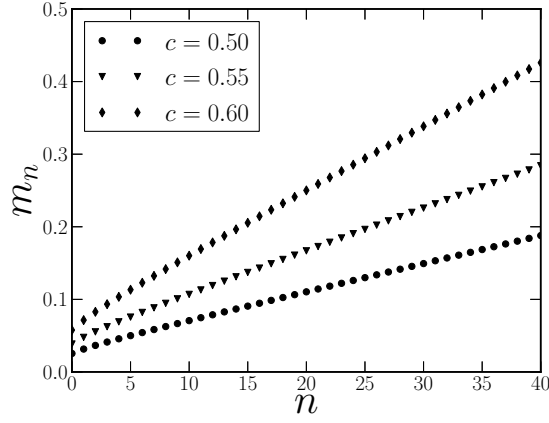


Figura 4.4: Espectro de massa para  $\lambda = 7.0$  no modelo HC. Observe que a taxa de crescimento para os primeiros valores de massa são menores que para os valores maiores de massa

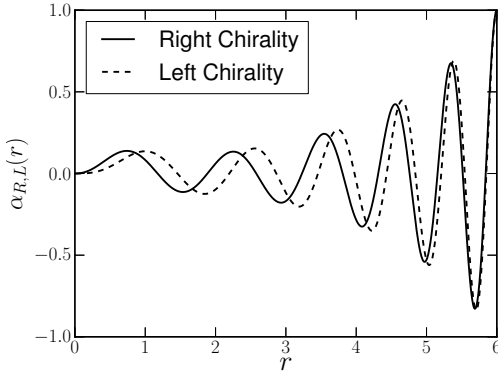


Figura 4.5: Autofunção normalizada para  $c = 0.5$  e  $\lambda = 5.0$  no modelo HC. As massas para cada modo foram dadas como  $m_R = 0.4024$  (direito) e  $m_L = 0.4025$  (esquerdo).

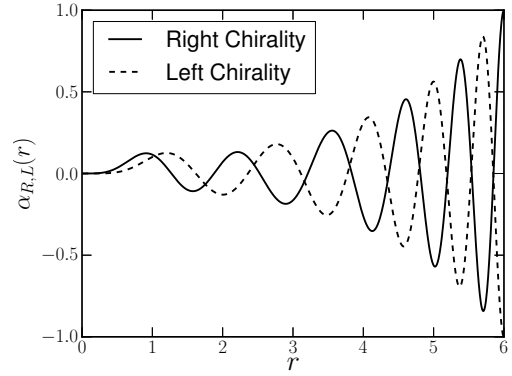


Figura 4.6: Autofunção normalizada para  $c = 0.5$  e  $\lambda = 9.0$  no modelo HC. As massas para cada modo foram dadas como  $m_R = 0.4591$  (direito) e  $m_L = 0.4589$  (esquerdo).

### 4.1.3 Abordagem de Schrödinger e forma super-simétrica dos potenciais de férmions

Assim como realizado nas seções 2.3, 3.1.3, 3.2.1 transformaremos nossa variável  $r \mapsto z$  de tal forma a obtermos uma equação quântica análoga a de Schrödinger. Verificaremos que os potenciais independentes para férmions direitos e esquerdos também estão sujeitos a uma forma super-simétrica. Mostraremos com detalhes como os potenciais excluirão a existência de massas imaginárias puras (táquions), este resultado comprovará a afirmação que fizemos para a

gravidade na equação (3.32) e campo de calibre na equação (3.90).

Primeiro de tudo, aplicaremos a mudança de  $r \mapsto z$  da equação (2.71) na equação (4.16) para decompô-la em suas quiralidades direita e esquerda, porém permanecendo na variável  $z$ , faremos a seguinte mudança na variável dependente

$$\alpha_{R,L}(z) = K(z)\tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad K(z) = \exp \left[ - \int_{z'} \tilde{\mathcal{P}}(z) dz' \right] = F^{-\frac{5}{4}}(z)\beta^{-\frac{1}{4}}(z), \quad (4.51)$$

esta mudança eliminará os termos de derivada primeira em relação aos modos  $\alpha_{R,L}(z)$  da equação (4.38) e assim teremos uma equação de Schrödinger na forma:

$$[-\partial_z^2 + V_{R,L}(z)] \tilde{\alpha}_{R,L}(z) = m^2 \tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad (4.52)$$

onde este potencial depende apenas dos termos de acoplamento com o campo de calibre da Eq. (4.18) na variável  $z$

$$V_{R,L}(z) = \tilde{\mathcal{W}}^2(z) \pm \partial_z \tilde{\mathcal{W}}(z), \quad (4.53)$$

pela fixação da Eq. (4.34), teremos neste sistema de variáveis  $\tilde{\mathcal{W}}(z) = -\lambda \tilde{\mathcal{P}}(z)$ . O modo zero fermiônico tem a seguinte expressão neste sistema de variáveis:

$$\tilde{\alpha}_{R,L}^0(z) = C_0 \left[ F^{\frac{5}{4}}(z)\beta^{\frac{1}{4}}(z) \right]^{\pm\lambda}, \quad (4.54)$$

onde  $C_0$  é uma constante de normalização, demonstraremos este resultado na próxima seção. Verificamos que as novas condições de contorno em  $z$  apresentam a mesma forma daquelas para gravidade na Eq. (3.33) e para o Campo de calibre na Eq. (3.91). Assim:

$$\left[ \frac{\dot{\tilde{\alpha}}_{R,L}^{(n)}(z)}{\tilde{\alpha}_{R,L}^{(n)}(z)} = -\frac{\dot{K}(z)}{K(z)} \right]_{z=(0,\infty)} = -\lambda, \quad (4.55)$$

este resultado pode ser verificado ao se comparar a forma do modo zero dado na Eq. (4.54) e o  $K(z)$  da Eq. (4.51), como  $\tilde{\alpha}_{R,L}^0(z) = C_0 [K(z)]^{\mp\lambda}$ , esta condições na Eq. (4.55) será sempre válida para qualquer que seja o valor de  $\lambda$ . Entretanto a nova condição de ortogonalidade dada por:

$$\int_0^\infty dz \left[ \tilde{\alpha}_{R,L}^{(n)*}(z) \tilde{\alpha}_{R,L}^{(s)}(z) \right] = \delta_{n,z} \quad (4.56)$$

limita que para  $\lambda > 0$  o modo direito é confinado, enquanto que para  $\lambda < 0$  o esquerdo é o localizado.

### Demonstração da Forma super-simétrica do potencial e ausência de táquions

A estrutura do potencial descrito na (4.53) nos permite reescrever a equação do tipo Schrödinger como um sistema de operadores

$$H_R \tilde{\alpha}_R(z) = m^2 \tilde{\alpha}_R(z), \quad H_L \tilde{\alpha}_L(z) = m^2 \tilde{\alpha}_L(z), \quad (4.57)$$

onde os operadores hamiltonianos podem ser  $H_{R,L}$  fatorados por

$$H_R = A^\dagger A, \quad H_L = A A^\dagger \quad (4.58)$$

e

$$A(z) := \frac{d}{dz} + \tilde{\mathcal{W}}(z). \quad (4.59)$$

Estes operadores hamiltonianos análogos da Eq. (4.57) e da Eq. (4.57) apresentam uma estrutura de mecânica quântica super-simétrica representada através da construção de outros operadores na forma [185–187]

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

estes operadores  $Q^2, Q^{\dagger 2}$  são nilpotentes, isto é  $Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0$ , e assim podemos redefinir nossos operadores hamiltonianos super-simétricos como [185–187]

$$H = \begin{pmatrix} H_R & 0 \\ 0 & H_L \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

que respeitam à seguinte álgebra com relações de comutação e anti comutação [185–187]

$$H = \{Q, Q^\dagger\}, \quad [Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (4.62)$$

assim  $H_{R,L}$  são relacionados por  $H_L^\dagger = H_R$  chamados assim parceiros super-simétricos, e devido a isso o termo  $\tilde{\mathcal{W}}$  é associado ao superpotencial [94, 185–187].

Explicitamente para o modo direito temos a mesma composição das equação para gravidade da Eq. (3.32) e campo de calibre Eq. (3.90), mas obviamente para valores diferentes de  $Q$  devido à diferentes  $\mathcal{W}$ :

$$H_R \tilde{\alpha}_R(z) = Q Q^\dagger \tilde{\alpha}_R(z) = m^2 \tilde{\alpha}_R(z), \quad (4.63)$$

e para o modo esquerdo temos a outra parcela da anticomutação

$$H_L \tilde{\alpha}_L(z) = Q^\dagger Q \tilde{\alpha}_L(z) = m^2 \tilde{\alpha}_L(z). \quad (4.64)$$

esta ordem de comutação para o modo esquerdo da Eq. (4.64) é a mesma ordem  $Q^\dagger Q \Psi(z)$  para gravidade em 5D [173].

Uma interessante característica do sistema super-simétrico análogo da Eq. (4.58) é que o espectro massivo de férmons de quiralidade esquerda e direita são iguais [94, 173, 174]. De fato, considerando uma autofunção massiva  $\tilde{\alpha}_R(z)$  de modo direito o hamiltoniano  $H_R$  (4.57) de massa  $m_R$  pode ser relacionado com o modo esquerdo como

$$\tilde{\alpha}_L := \frac{1}{m_R} A \tilde{\alpha}_R. \quad (4.65)$$

Aplicando o hamiltoniano esquerdo  $H_L$  na autofunção direita  $\tilde{\alpha}_L$ , encontraremos  $H_L \tilde{\alpha}_L(z) = m_R^2 \tilde{\alpha}_L(z)$ , ou seja,  $\tilde{\alpha}_L$  é uma autofunção esquerda com mesma massa do  $\tilde{\alpha}_R$  [185]. Observe que

$$\tilde{\alpha}_R := \frac{1}{m_L} A^\dagger \tilde{\alpha}_L, \quad (4.66)$$

teremos  $H_R \tilde{\alpha}_R(z) = m_L^2 \tilde{\alpha}_R(z)$ , ou seja,  $\tilde{\alpha}_R$  é uma autofunção de modo direito com mesma massa da autofunção de modo esquerdo  $\tilde{\alpha}_L$ . Assim, para cada massa de uma autofunção direita  $\tilde{\alpha}_R$  existe uma autofunção esquerda  $\tilde{\alpha}_L$  com mesmas massas.

A característica super-simétrica de  $H_{R,L}$  também garante que o espectro é nulo ou positivo. A relação ao se aplicar consecutivamente os operadores hamiltonianos em sua autofunções duais nos gerarão  $\|A \tilde{\alpha}_{R,L}\|^2 = m^2 \|\tilde{\alpha}_{R,L}\|^2$ , e então,  $m \geq 0$ . Assim, a inexistência de modos taquiônicos (norma negativa, logo massa imaginárias) é garantida.

A fatoração do hamiltoniano e inexistência de estados de norma negativa nos permitem reduzir o problema de se encontrar um estado de fundamental através de uma equação de primeira ordem, ao invés de uma de segunda ordem. Para o modo zero direito temos  $H_R \tilde{\alpha}_R^0 = 0 \Rightarrow \|A \tilde{\alpha}_R^0\| = 0$ , e assim  $A \tilde{\alpha}_R^0 = 0$ , enquanto para o modo zero esquerdo  $\tilde{\alpha}_L^0$ ,  $H_L \tilde{\alpha}_L^0 = 0 \Rightarrow A^\dagger \tilde{\alpha}_L^0 = 0$ . Logo, os modos sem massa  $\tilde{\alpha}_{R,L}^0$  satisfazem as equações

$$\dot{\tilde{\alpha}}_{R,L}^0 \pm \tilde{W}(z) \tilde{\alpha}_{R,L}^0 = 0, \quad (4.67)$$

cujas soluções são

$$\tilde{\alpha}_{R,L}^0 = e^{\mp \int_0^z \tilde{W}(z') dz'}, \quad (4.68)$$

mais uma vez observamos que da (4.68), somente é possível normalizar uma das quiralidades, e assim apenas o modo zero se o modo direito for localizado, o esquerdo não será e vice-versa.

Aplicando a segunda mudança da Eq. (4.51), obteremos (4.19) para o modo zero como

$$\tilde{\alpha}_{R,L}^0(z) = C_{0R,L} \left( F(z) H^{\frac{1}{4}}(z) \right)^{\pm\lambda}. \quad (4.69)$$

esta demonstração é a mesma presente na Eq. (4.54) com  $H(z) = \beta(z)F(z)$ . Assim, para  $\lambda > 0$  somente o modo direito é localizado. Enquanto para  $\lambda < 0$  apenas o esquerdo é confinado.

Para o modelo fino GS com o auxílio do que foi desenvolvido na seção 2.3, observamos que o potencial exibirá a forma

$$V_{R,L}(z) = \frac{5\lambda}{2} \left[ \frac{5\lambda}{2} \mp 1 \right] \frac{1}{\left( z + \frac{2}{c} \right)^2}. \quad (4.70)$$

Este potencial exibirá uma barreira próxima a origem para ambas as quiralidades que decaem indo a zero no infinito (indica que não há *gap* verdadeiro de massa, o *gap* que assumiremos é decorrente apenas de nossa discretização). Encontramos o mesmo resultado na seção relativa à equação de Sturm-Liouville da seção 4.1.2, onde para um valor muito grande de  $r$  teremos um espectro contínuo e livre de “*gap*”.

Novamente, uma equação de Bessel para a variável  $z$  é obtida com a mudança de variável

$$x := m \left( z + \frac{2}{c} \right), \quad (4.71)$$

Assim a equação de Schödinger se tornará

$$\left[ -\partial_x^2 + \left\{ \frac{5\lambda}{2} \left[ \frac{5\lambda}{2} \mp 1 \right] \frac{1}{x^2} \right\} - 1 \right] \tilde{\alpha}_{R,L}(x) = 0, \quad (4.72)$$

cuja solução é uma equação de Bessel com as mesmas ordens  $\mu_{R,L} = \frac{5\lambda \pm 1}{2}$

$$\tilde{\alpha}_{R,L}(x) = \sqrt{x} \left[ A_{R,L} J_{\mu_{R,L}}(x) + B_{R,L} Y_{\mu_{R,L}}(x) \right]. \quad (4.73)$$

verificamos que a Eq. (4.73) é a própria Eq. (4.46) em outro sistema de coordenadas.

#### 4.1.4 Modos ressonantes para o spin 1/2

Embora não existam modos massivos localizados, alguns destes modos podem exibir uma alta amplitude relativa nas proximidade da brana [94], são os chamados *estados massivos ressonantes*, obtidos a partir da equação quântica análoga de Schödinger [173]. Convém dizer que para a gravidade e campo de calibre os modos massivos, mesmo não ressonantes, contribuem para a correção da potencial da lei de Newton e de Colomb em 4D, respectivamente. Entretanto

os modos massivos de campos fermiônicos são geralmente explorados sem abordagem fenomenológica, exceto pelos resultados comentados nas seções 1.2.1 (massa da partícula de 750 GeV) e 2.2.5 (massa dos neutrinos).

Para a existência de ressonâncias é necessária a presença de um poço no potencial da equação de Schödinger e o valor deste modo ressoante deve ocorrer até a massa máxima  $m^2$  que se iguala ao valor da barreira do potencial [173, 174] (o modo ressonante deve estar dentro do poço de potencial). O método da probabilidade relativa  $P_{R,L}(m)$  consiste em se encontrar uma partícula de massa  $m$  em torno de uma região de comprimento  $2\epsilon$  que circunda o mínimo do poço de potencial  $\bar{z}$ , este método foi apresentado nas Refs. [94, 110], entre outras.

$$P_{R,L}(m) = \frac{1}{\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |\tilde{\alpha}_{R,L}(z)|^2 dz} \int_{\bar{z}-\epsilon}^{\bar{z}+\epsilon} |\tilde{\alpha}_{R,L}(z)|^2 dz, \quad (4.74)$$

sendo  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  os limites de nosso domínio na variável  $z$ . Foi utilizado também  $\epsilon = 0.1$ . Esta probabilidade relativa nos ajudará a encontrar os valores de massas ressonantes, os quais apresentarão picos bem definidos no gráfico desta função  $P_{R,L}(m)$ .

Nesta seção exibiremos apenas os gráficos obtidos de nosso artigo [153], detalhe sobre os métodos numéricos empregados, como Método da Matriz, [188] e o algoritmo de Numerov [189], estarão explicitados nas Refs. [153, 176]. Os potenciais de modo direito e esquerdo para o modelo “*Hamilton’s cigar soliton*”(HC) apresentam uma forma do tipo vulcão, porém com uma singularidade na origem devido à obediência das condições de regularidade em (2.5). Para o modelo GS temos apenas um barreira, o que impede que existam modos ressonantes para este modelo fino. Observe o potenciais nas figuras 4.7 e 4.8. Convém dizer mais uma vez que estes potenciais são dependentes dos termos de acoplamentos  $\mathcal{W}$  o qual fixamos seu valor na equação (4.34), podemos ter formas diferentes para estes potenciais de acordo com as escolhas sobre nosso calibre angular.

Nas figuras 4.9 e 4.10, representamos as funções de probabilidade relativa  $P_{R,L}(m)$  para  $c = 0.5$  no modelo HC. Verificamos que o modo esquerdo apresenta picos mais proeminentes para os valores de constante de acoplamento  $\lambda = 4.0$  e  $\lambda = 5.0$ , enquanto para os de modo direito com  $\lambda = 4.0$  e  $\lambda = 6.0$ . Entretanto, apenas o primeiro pico do modo esquerdo  $P_L$  representa uma ressonância de fato. Verificamos isto ao testar a massa do pico de  $P_{R,L}(m)$  na equação de Schrödinger, onde o comportamento da função de onda candidata à ressonância deve apresentar o seguinte comportamento presente nas figuras 4.11 e 4.12. Observe que a solução  $\tilde{\alpha}_L(z)$  para  $\lambda = 4.0$  tem grande amplitude nas proximidades da origem, o que indicam forte interação com a brana e amplitude de oscilação bastante reduzida em comparação com este comportamento

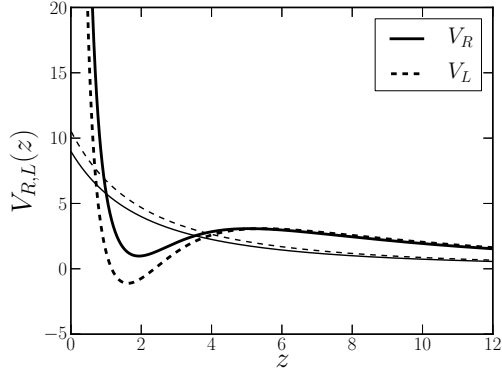


Figura 4.7: Potencial de Schödinger para ambas as quiralidades. Fizemos  $c = 0.5$  e  $\lambda = 5.0$ . As linhas espessas representam o modelo HC, enquanto usamos linhas finas para o GS.

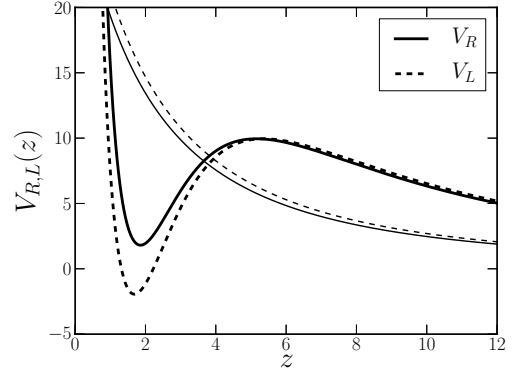


Figura 4.8: Potencial de Schödinger para ambas as quiralidades. Fizemos  $c = 0.5$  e  $\lambda = 9.0$ . As linhas espessas representam o modelo HC, enquanto usamos linhas finas para o GS.

da origem quando essa função evolui em  $z$ , este comportamento é o que caracteriza um modo ressonante [94]. Os picos ressonantes dos modos direito,  $P_R(m)$ , e esquerdo,  $P_L(m)$ , ocorrem para valores próximos de massa.

Encontraremos valores similares para outros valores de  $c$ . Em geral, a constante de acoplamento  $\lambda$  determina se haverá ou não ressonâncias, enquanto o parâmetro geométrico  $c$  controlará apenas o quão afastado da origem se encontra o valor da massa ressonante. Este resultado é esperado ao estudarmos a Eq. (4.49), embora na variável  $r$  e exclusivo para o modelo analítico GS, é observado que o parâmetro  $c$  tem relação com o espectro de massa e com o valor máximo de nosso domínio.

## 4.2 Férmons de Spin 3/2

Nesta seção estudaremos o confinamento do campo de Rarita-Schwinger (spin 3/2). Começemos expondo sua ação como [128, 133]:

$$S_{6_{3/2}} = i \int \sqrt{-g} \bar{\Psi}_M \Gamma^{[M} \Gamma^N \Gamma^{P]} D_N \Psi_P d^6x, \quad (4.75)$$

os colchetes nos índices das matrizes denotam regra antisimétrica. Aqui a dimensão de massa  $\dim[\Psi_b] = 5/2$  é igual a do espinor  $1/2$ , entretanto a  $\dim[\Psi_\theta] = 3$ . Sua equação de movimento

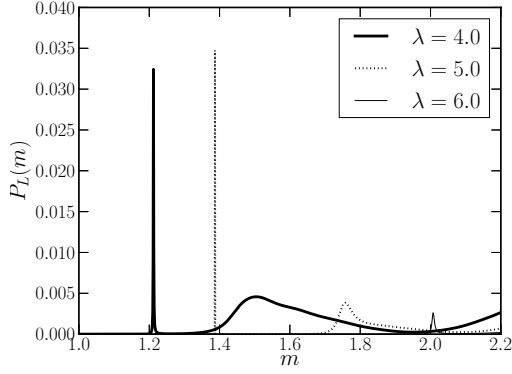


Figura 4.9:  $P_L(m)$ : probabilidade relativa para  $c = 0.5$  (quiralidade esquerda) no HC.

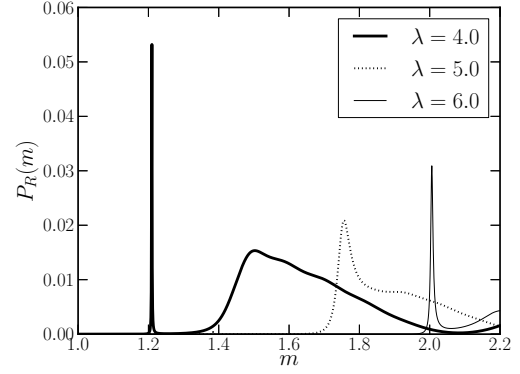


Figura 4.10:  $P_R(m)$ : probabilidade relativa para  $c = 0.5$  (quiralidade direita) no HC.

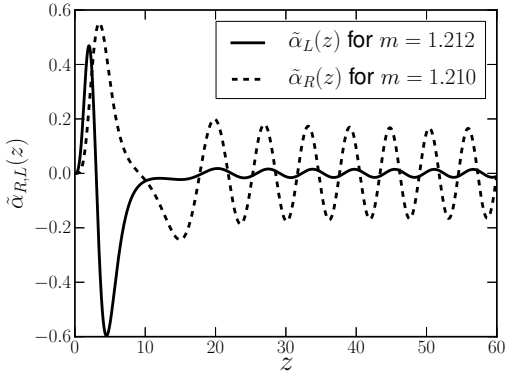


Figura 4.11: Autofunções normalizados para o primeiro pico ressonante do modelo HC. Em ambos os modos  $\lambda = 4.0$ .

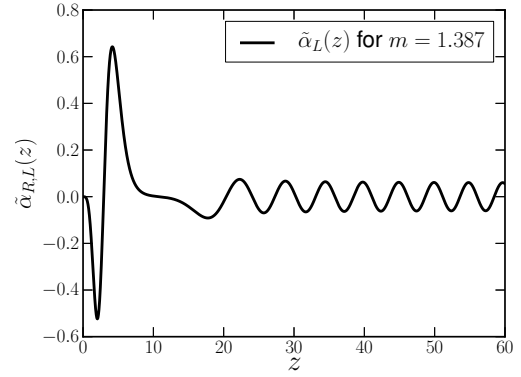


Figura 4.12: Autofunções normalizadas para o segundo pico ressonante da Fig. 4.9 no modelo HC. Exibimos o modo esquerdo com  $\lambda = 5.0$  e  $m = 1.387$ .

é na forma

$$\Gamma^{[M} \Gamma^N \Gamma^{P]} D_N \Psi_P = 0. \quad (4.76)$$

De agora em diante encurtaremos a notação de  $\Gamma^{MNP}$  como o produto triplo das matrizes.

A derivada covariante para o spin 3/2 apresenta um termo adicional se comparada ao caso de spin 1/2 (4.5)

$$D_M \Psi_N = (\partial_M + \Omega_M - iqA_M) \Psi_N - \Gamma_{MN}^P \Psi_P. \quad (4.77)$$

Os termos não nulos desta Eq. (4.77) com a seguinte imposição para as componentes de espi-



nores  $\Psi_\theta = \Psi_r = 0$  [133] serão:

$$D_\mu \Psi_\nu = \left( \partial_\mu + \frac{1}{4} \frac{F'}{F} \Gamma_\mu \Gamma_r - iq A_\mu \right) \Psi_\nu, \quad (4.78)$$

$$D_\mu \Psi_r = -\frac{1}{2} \frac{F'}{F} \Psi_\mu, \quad D_r \Psi_\mu = \left( \partial_r - \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \right) \Psi_\mu, \quad (4.79)$$

$$D_\theta \Psi_\mu = \left( \partial_\theta + \frac{1}{4} \frac{H'}{H} \Gamma_\theta \Gamma_r - iq A_\theta \right) \Psi_\mu. \quad (4.80)$$

Semelhante ao caso do spin 1/2 da Eq. (4.10), os autores da Ref. [128, 133, 134] exibem uma forma 4D para o spin-vetor de Rarita-Schwinger que é:

$$\Psi_\mu(x, r, \theta) = \begin{pmatrix} \psi_\mu^{(4)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Com a seguinte decomposição KK para o spin 3/2:

$$\psi_\mu^{(4)}(x, r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} \left[ \psi_{\mu R_{n,l}}(x) u_{R_{n,l}}(r) + \psi_{\mu L_{n,l}}(x) u_{L_{n,l}}(r) \right] e^{il\theta}, \quad (4.82)$$

novamente, devido as imposições nas componentes transversas do espinor 3/2 as dimensões de massa de  $\dim[\psi_\mu^{(4)}(x, r, \theta)] = 5/2$ ,  $\dim[\psi_{\mu R_{n,l}}(x)] = 3/2$  e  $\dim[u_{R,L_{n,l}}(r)] = 1$ .

Aqui a porção 4D possui as seguintes restrições [133, 134, 190]:

$$\partial^\mu \psi_\mu = \gamma^\mu \psi_\mu = 0, \quad \gamma^{\mu\nu\rho} (\partial_\nu - iq A_\nu) \psi_{\rho R,L} = m \gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu L,R}$$

Com isso os termos não nulos de  $\Gamma^{MNP} D_N \Psi_P$  são

$$\Gamma^{\rho\mu\nu} D_\mu \Psi_\nu = \Gamma^{\rho\mu\nu} (\partial_\mu - iq A_\mu) \Psi_\nu + \frac{F'}{F} \Gamma^{\nu\rho} \Gamma_r \Psi_\nu, \quad (4.83)$$

$$\Gamma^{\rho\mu r} D_\mu \Psi_r = -\frac{1}{2} \frac{F'}{F} \Gamma^{\rho\mu r} \Psi_\mu, \quad \Gamma^{\rho r \mu} D_r \Psi_\mu = \Gamma^{\rho r \mu} \left( \partial_r - \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \right) \Psi_\mu, \quad (4.84)$$

$$\Gamma^{\rho\theta\mu} D_\theta \Psi_\mu = \Gamma^{\rho\theta\mu} (\partial_\theta - iq A_\theta) \Psi_\mu + \frac{H'}{4H} \Gamma^{\mu\rho} \Gamma_r \Psi_\mu. \quad (4.85)$$

Assim, escrevendo todas as matrizes no espaço plano ( $\Gamma^M = \xi_M^M \Gamma^{\bar{M}}$ ) a equação de movimento (4.76) com as equações (4.83)-(4.85) se tornarão

$$\begin{cases} \left[ \partial_r + \left( \mathcal{P}(r) - \frac{F'}{2F} \right) + \mathcal{W}(r) \right] u_{R_n}(r) = -\frac{m_n}{\sqrt{F(r)}} u_{L_n}(r) \\ \left[ \partial_r + \left( \mathcal{P}(r) - \frac{F'}{2F} \right) - \mathcal{W}(r) \right] u_{L_n}(r) = \frac{m_n}{\sqrt{F(r)}} u_{R_n}(r), \end{cases} \quad (4.86)$$

onde a  $\mathcal{P}(r)$  está definida na Eq. (4.17) e  $\mathcal{W}(r)$  na Eq. (4.18). Concluimos que o caso massivo para o espinor 3/2 contido na Eq. (4.86) é similar ao do spin 1/2 da Eq. (4.16) com a diferença do termo  $-\frac{F'}{2F}$ .

Logo, a mesma escolha de  $A_\theta$  apontada na Eq. (4.36), que implica em  $\mathcal{W}(r) = -\lambda\mathcal{P}(r)$  na Eq. (4.34) se mantém válida e é suficiente para o confinamento do modo zero do espinor 3/2 na forma

$$u_R^0(r) = \mathcal{C}_0 \exp \left[ \int_{r'} dr' \left( (\lambda - 1) \mathcal{P} - \frac{F'}{2F} \right) \right] = \mathcal{C}_0 F^{(\lambda - \frac{1}{2})}(r) H^{\frac{1}{4}(\lambda - 1)}(r). \quad (4.87)$$

novamente  $\mathcal{C}_0$  é uma constante de integração.

Mais uma vez, para o caso onde  $\lambda = 0$ , a expressão em (4.87) é idêntica a obtida na Ref. [128], sendo não normalizada. Além disso, a componente da ação efetiva na coordenada radial será a mesma para o spin 3/2 ou 1/2 da Eq. (4.25). Temos a correlação entre o modo zero dos espinores 3/2 (4.87) e 1/2 (4.37) como

$$u_{R,L}^0(r) = F^{-\frac{1}{2}} \alpha_{R,L}^0(r), \quad (4.88)$$

esta relação é similar àquela dos modos zeros de gravidade (ou campo escalar) comparada ao campo de calibre mostrada na Eq. (3.94). Através da relação (4.88), as amplitudes do espinor 3/2 são maiores do que no caso do spin 1/2 nas proximidades da origem. Visualizamos este resultado na Fig. 4.13, onde comparamos os modo zero do espinor de Rarita-Schwinger field (4.87) com o espinor de Dirac da Eq. (4.37).

Finalizamos com isso todo o estudo dos modos sem massa de spin 0, spin 1/2, spin 1, spin 3/2 e spin 2. Observamos na seção 3.1 que o campo escalar e gravidade tem mesmas expressões para seus modos zero na Eq. (3.19), para o calibre vetorial  $U(1)$  na equação (3.87), para o spin 1/2 na Eq. (4.37) e para o spin 3/2 na Eq. (4.87) (onde escolhemos o caso onde a condição de ortonormalidade apresenta solução diferente de uma constante). Aplicamos o resultado para  $\lambda = 2$  para os campos fermiônicos, apenas para mostrarmos um comparativo entre as expressões dos modos zeros destes campos nas figuras 4.14.

A forma explícita para o modo zero direito de spin 3/2 no modelo HC será

$$u_R^0(r) = \mathcal{C}_0 \left( \frac{\tanh(cr)}{c} \right)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} \exp \left( \frac{1}{4}(3 - 5\lambda)[cr + \tanh(cr)] \right). \quad (4.89)$$

é necessário que  $\lambda > 1$  para que tenhamos um modo normalizado, mas somente para  $\lambda > 3$  a condição de derivada nula na origem é obedecida. Novamente apenas uma das quiralidades pode ser confinada, sendo o modo esquerdo obtido ao se fazer  $\lambda \mapsto -\lambda$ .

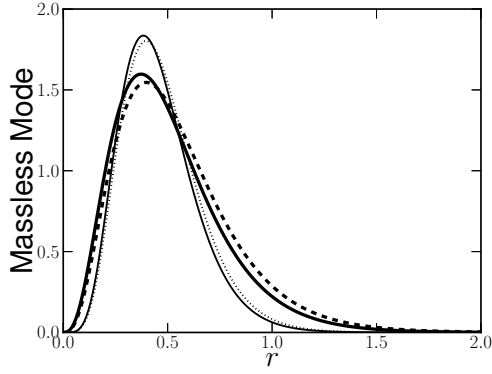


Figura 4.13: Comparativo para os férmions de mão direita no modelo HC. A linha cheia é relativa ao espinor de Rarita-Schwinger, enquanto a tracejada ao spin 1/2. Para  $\lambda = 7$  (perfis mais largos) e  $\lambda = 12$  (perfis mais agudos) em ambos para  $c = 0.5$

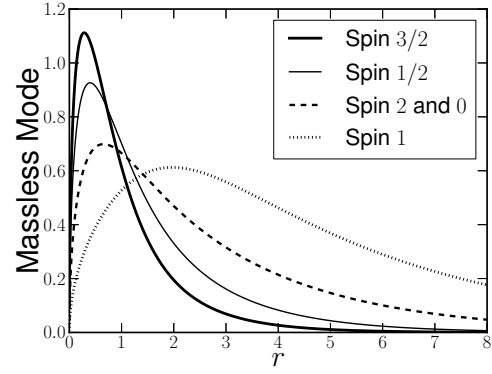


Figura 4.14: Gráfico comparativo dos modos zeros de campos bosônicos e fermiônicos no HC  $c = 0.50$  e  $\lambda = 2.0$  (para os férmions).

### 4.2.1 Modos massivos de spin 3/2

Mais uma vez usando a transformação na variável  $z$  da equação (3.1.3), decomponemos a equação (4.86) nas seguintes equações independentes de segunda ordem :

$$\left[ \partial_z^2 + 2 \left( \tilde{\mathcal{P}}(z) - \frac{\dot{F}}{2F} \right) \partial_z + \left\{ (1 \mp \lambda) \dot{\tilde{\mathcal{P}}}(z) - \partial_z \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right) + (1 - \lambda^2) \tilde{\mathcal{P}}^2(z) - \frac{\tilde{\mathcal{P}}(z) \dot{F}}{F} + \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right)^2 \right\} \right] u_{R,L} = -m^2 u_{R,L}(z), \quad (4.90)$$

sendo  $\tilde{\mathcal{P}}(z) = \sqrt{F}P(z)$ .

Retornando à variável  $r$ , a Eq. (4.90) se torna

$$\left[ \partial_r^2 + \left( 2f + \frac{g}{2} \right) \partial_r + \left\{ \frac{(1 \mp \lambda)}{8} [5f^2 + fg + 10f' + 2g'] + (1 - \lambda^2) \left[ \frac{5}{4}f + \frac{g}{4} \right]^2 + \left[ \frac{5}{4}f^2 + \frac{fg}{4} + \frac{f'}{2} \right] \right\} \right] u_{R,L}(r) = -\frac{m^2}{F} u_{R,L}(r), \quad (4.91)$$

observamos também que existem poucas mudanças nas expressões massivas de spin 3/2 (4.91) para as de spin 1/2 da Eq. (4.40). Devido a isso, o espectro obtido de forma numérica para o spin 3/2 apresenta variações imperceptíveis da Fig. 4.4. A única diferença relevante pode ser

notada nas amplitudes do espinor 3/2 serem maiores do as do espinor 1/2 nas proximidades da origem. Representamos essa diferença na figura 4.15.

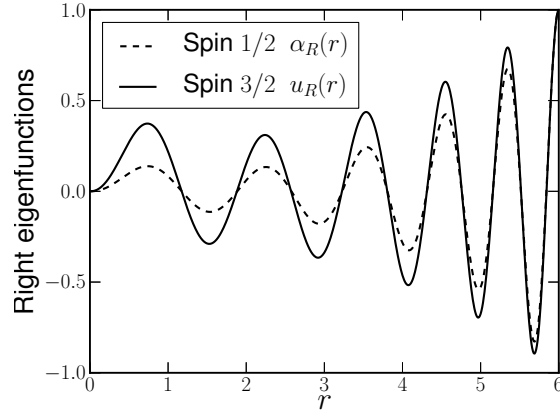


Figura 4.15: Gráfico comparativo para o modo direito normalizado do espinor 3/2 para  $\lambda = 5.0$  e  $c = 0.5$  no modelo HC. Utilizamos as massas  $m_{1/2} = 0.4020$  e  $m_{3/2} = 0.4018$ .

## 4.2.2 Abordagem de Schrödinger para spin 3/2

Aplicando a segunda transformação de variáveis onde (4.90) se transforma em

$$u_{R,L}(z) = \exp \left[ - \int_{z'} \left( \tilde{\mathcal{P}}(z) - \frac{\dot{F}}{2F} \right) dz' \right] \tilde{u}_{R,L}(z), \quad (4.92)$$

assim a Eq. (4.90) se transformará numa equação tipo Schrödinger com a forma

$$\left[ -\partial_z^2 + V_{R,L}^{3/2}(z) \right] \tilde{u}_{R,L}(z) = m^2 \tilde{u}_{R,L}(z), \quad (4.93)$$

sendo o potencial o mesmo do caso de spin 1/2

$$V_{R,L}^{3/2}(z) = \lambda^2 \tilde{\mathcal{P}}^2(z) \mp \lambda \partial_z \tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{W}}^2(z) \pm \partial_z \tilde{\mathcal{W}}. \quad (4.94)$$

Assim para o spin 3/2 temos a equação de Schrödinger (4.94) na mesma forma daquela para spin 1/2 (4.53), isso ocorre, pois a mudança na variável dependente é concebida para anularmos os termos de derivada primeira, que é justamente o termo que difere spin 1/2 e spin 3/2 em termos das autofunções  $u_{R,L}$  na Eq. (4.90). Como mostrado na seção 4.1.3, a forma deste potencial da Eq. (4.94) tem semelhanças com operadores de super-simetria e essa analogia nos garante a igualdade do espectro massivo dos modos direito e esquerdo, bem como a ausência de modos taquiônicos.

## 4.3 Outras configurações para o calibre angular

Verificamos ao longo deste capítulo que é necessário um acoplamento com um campo de calibre de fundo para que o modo zero do campo fermiônico seja localizado. No trabalho [133] as escolhas da Eq. (4.29) e Eq. (4.30) foram adotadas, porém esta escolha tinha como única finalidade a de confinar o modo zero. Propusemos no trabalho [153] uma escolha geral que contempla tanto o modo zero como modos massivos ressonantes para férmions na equação (4.34).

Nesta seção demonstraremos outras escolhas apontadas em outras geometrias de tal forma a confinar o modo zero e possibilitarem interessantes resultados para modos massivos ou entre o campo fermiônico e o de calibre.

### 4.3.1 Modo zero fermiônico no modelo Bounce 6D (BC)

Na Ref. [152] apresentamos o confinamento do campo de calibre e do campo fermiônico no modelo BC, dado pela equação (2.65) do fim da seção 2.2.4, onde seus fatores de “warp” são

$$F(r) = e^{-A(r)}, H(r) = R_0^2 e^{-B(r)},$$

$$A(r) = kB(r) = p \left( \frac{1}{2} \tanh^2(cr) + \ln[\cosh(cr)] \right).$$

Minha contribuição para este trabalho foi verificar se era possível obter uma escolha através do calibre dinâmico que simultaneamente localizasse tanto o modo zero deste campo de calibre como o modo zero fermiônico, porém não analisamos as ressonâncias para esta escolha.

Durante as decomposições do calibre dinâmico da seção 3.2 impusemos na equação (3.76) que  $\mathcal{A}_\theta = 0$ , esta escolha comum em 6D [128, 129, 149], impossibilitaria que este campo interagisse com férmions a fim de confiná los. Porém, mantendo a componente radial do campo de calibre dinâmico  $\mathcal{A}_r(r) \neq 0$ , observaremos que é solução possível para afixarmos o  $\mathcal{A}_\theta(r) = cte$  sem prejudicar o confinamento do campo de calibre. De agora em diante, escreveremos  $\mathcal{A}_M$  simplesmente como  $A_M$ .

A equação o componente radial para o campo fermiônico direito sem massa foi obtida na Ref. [152] como:

$$\left( \partial_r + \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{4} \frac{H'(r)}{H(r)} - iqA_r(r) + eH^{-\frac{1}{2}}(r)A_\theta(r) \right) \alpha(r) = 0, \quad (4.95)$$

cuja solução apresenta a forma

$$\alpha(r) = C_0 F^{-1} H^{-\frac{1}{4}} \exp \left( \int^r (iqA_r - eH^{-\frac{1}{2}} A_\theta) dr \right). \quad (4.96)$$

Ao se inserir essa solução na ação efetiva de férmions observaremos que a componente radial  $iqA_r(r)$  desaparece devido as operação com norma quadrada e assim

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &\propto \int_0^\infty \left( dr P^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -2q \int^r H^{-\frac{1}{2}} A_\theta \right) \right) = \\ &= \int_0^\infty dr \exp \left( \frac{1}{2} A(r) - 2qR_0^{-1} \int^r e^{\frac{1}{2}B(r)} A_\theta \right). \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde os valores e  $F(r)$  e  $H(r)$  foram substituídos pelos das equação (2.65). Novamente observamos que o valor de  $A_\theta$  é fundamental para tornar a integração finita, aqui adotaremos o caso onde  $A_\theta = a_\theta = \text{constante}$ . E assim a integral (4.97) é convergente quando  $r \rightarrow 0$ , para longe da origem,  $r \rightarrow \infty$ , podemos verificar que as exponenciais dos fatores de “warp” da equação (2.65) apresentam crescimento linear  $A(r) = B(r) \approx \zeta r$  e com esta aproximação é possível verificar que a integração da Eq. (4.97) converge, observe que

$$I_{\frac{1}{2}} \propto \int_0^\infty dr \exp \left( \frac{1}{2} \zeta r - \frac{4a_0}{R_0 \zeta} e^{\frac{1}{2} \zeta r} \right). \quad (4.98)$$

Adotando  $a_0 \equiv \frac{R_0 \beta}{8}$  observamos que a exponencial cresce mais rapidamente que a função linear, permitindo a convergência da integral como verificado nas figuras 4.16 e 4.17. Além disso, confinaremos o modo esquerdo ao impormos  $a_0 \rightarrow -a_0$  na equação (4.98).

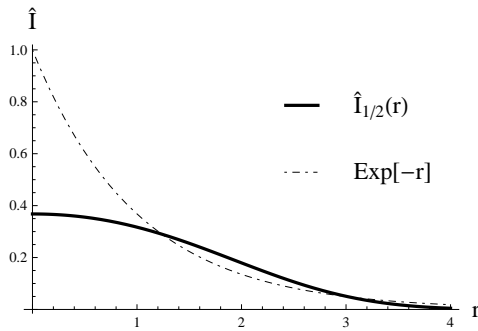


Figura 4.16: Integrando de (4.98) o qual verificamos ser um caso suave de uma exponencial linearmente decrescente. Tomamos para a figura os valores  $p = c = 1$  e  $a_0 = 2$

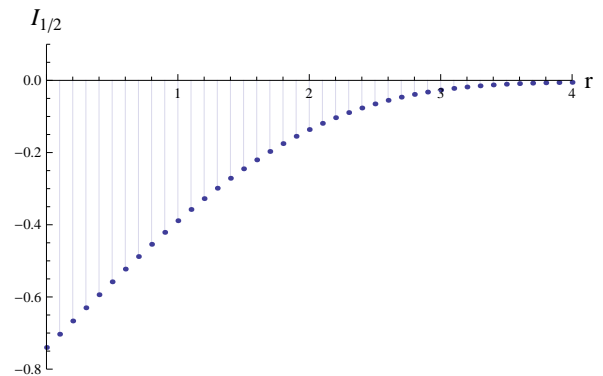


Figura 4.17: Prova da convergência da Integral (4.98). O valor numérico integrado em todo o espaço de  $I_{1/2}$  é aproximadamente 0.736 para  $p = c = 1$  e  $a_0 = 2$ .

A solução simples de  $A_\theta$  constante é semelhante a presente na equação (4.29), isso se deve por ambos os modelos GS e BC não respeitarem a condição de regularidade sobre o fator de “warp”  $H(r)$  das equações (2.5). Não estudamos as ressonâncias neste cenário. A seguir, verificaremos um outro tipo escolha feita especificamente para o modelo Conifold Resolvido (RC).

### 4.3.2 Modo zero e modos masivos para o modelo Conifold Resolvido (RC)

Detalharemos a seguir a escolha de calibre realizada no trabalho [151], onde férmions foram confinados no Conifold Resolvido (apresentado na seção 2.2.3). Este artigo foi publicado antes da Ref. [153]. O objetivo principal deste trabalho foi o de obter uma escolha de calibre que tanto localizasse o modo zero fermiônico, como permitir a criação de um potencial para a equação análoga de Schödinger do tipo vulcão e livre de poço infinito (para a escolha da seção anterior na Eq. (4.34), observamos que os potenciais quânticos análogos foram divergentes na origem, conferir figuras 4.7 e 4.8). Este resultado foi motivado ao se observar as formas de diversos potenciais de Schödinger em 5D [93, 94, 104, 105, 109–111].

#### Conifold singular

Para o caso onde o parâmetro de resolução é nulo (cone singular),  $a = 0$ , teremos a seguinte expressão para o modo zero fermiônico:

$$\alpha_{R,L}(r) = \frac{C_0}{\sqrt{r}} \exp \left[ \frac{5}{4} [cr - \tanh(cr)] - q \int^r [iA_r(r') \pm \frac{\sqrt{6}}{r'} e^{\frac{1}{2}[cr' - \tanh(cr')]} A_\theta(r')] dr' \right] \quad (4.99)$$

esta equação em (4.99) é similar a encontrada para o GS na [133], exceto pelos termos  $\tanh(cr)$  e pelo fator possivelmente singular  $\frac{1}{r} A_\theta(r)$  que é induzido pelo comportamento singular do conifold não resolvido, o qual também é verificado para gravidade e campo escalar nos trabalhos [145, 147].

Apesar desta característica singular na expressão do espinor em (4.99), a ação efetiva proporcionada por este se mantém finita, como observaremos abaixo

$$S_{6_{eff}} = \int_{x^M} \sqrt{-g} \bar{\Psi} i \Gamma^M D_M \Psi d^M x = 2\pi \int_x d^M x \bar{\psi} i \Gamma^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} \psi \int_0^\infty dr F^2(r) \beta^{\frac{1}{2}}(r) |\alpha_{R,L}(r)|^2 \quad (4.100)$$

Assim a integral da porção radial será

$$\begin{aligned} I_{R,L}(r) &= \int_0^\infty dr F^2(r) \beta^{\frac{1}{2}}(r) |\alpha_{R,L}(r)|^2 \\ &= C_0^2 \int_0^\infty dr \left( e^{\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]} \right) e^{\mp 2\sqrt{6}q \int^r dr' A_\theta(r')} \left[ \frac{1}{r'} e^{\frac{1}{2}[cr' - \tanh(cr')]} \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Com o intuito de proporcionarmos que a Eq. (4.101) seja convergente e que seu potencial de Schödinger seja sempre finito, adotamos a seguinte escolha de calibre

$$A_{\theta_R}(r) = \left( \frac{r e^{-\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}}{4\sqrt{6}} \right) \lambda \tanh^2 b(r - r_0), \quad (4.102)$$

onde  $\lambda$  é a constante de acoplamento e  $b$  um parâmetro de  $\dim[b] = 1$  que regula a espessura de nossas soluções,  $r_0$  outra constante que desloca a origem de nossas soluções, este deslocamento revelará uma singularidade para a função de onda da Eq. (4.99). Com essa expressão (4.102) a integração da Eq. (4.101) será

$$I_R = C^2 \int_0^\infty dr e^{\frac{1}{2}[(c-\lambda)r + \frac{\lambda}{b} \tanh b(r-r_0) - \tanh(cr)]}. \quad (4.103)$$

É observado que  $I_R$  converge quando  $\lambda > c$ , mas tem perfil suave apenas quando  $\lambda \geq b > c$ . Exibimos o integrando  $I_R$  e  $A_\theta$  para  $c = 1$  as Fig. (4.18) e Fig.(4.19). Aqui comentamos que este  $A_\theta$  tem o mesmo significado do campo de calibre dos modelos de corda topológicas abelianas em 6D [136–138].

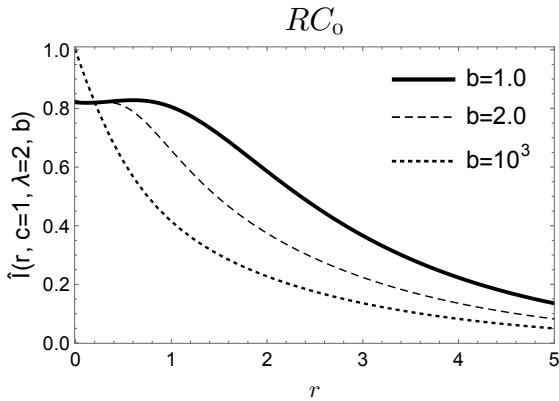


Figura 4.18:  $\hat{I}$  integrando de  $I(r)$  para  $a = 0$  e  $r_0 = 0.1$ . Todos os perfis comportam áreas finitas, mas a derivada só se anula na origem para valores grandes de  $b$  comparados ao parâmetro  $c$

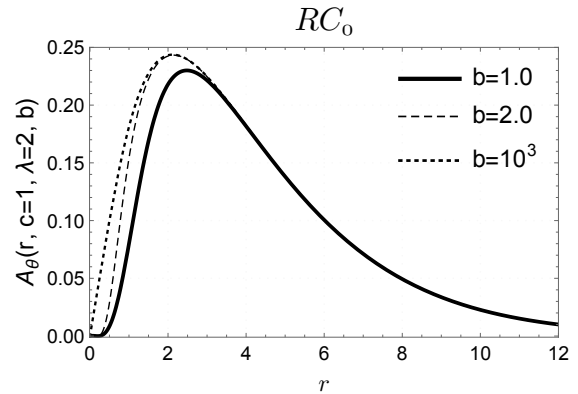


Figura 4.19: Componente angular do calibre vetorial para  $a = 0$  e  $r_0 = 0.1$ .



Da mesma forma que verificado para os outros casos de acoplamento de férmions, o modo esquerdo é confinado ao fazermos  $\lambda \mapsto -\lambda$ . E apenas um desses modos pode ser localizados.

### Conifold Resolvido

Para  $a \neq 0$ , a solução da teremos a solução

$$\alpha_{R,L}(r) = \frac{C_a}{\sqrt[4]{v_a^2 - 1}} \exp \left[ \frac{5}{4} [cr - \tanh(cr)] - q \int [iA_r(r) \pm \frac{e^{\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}}{a\sqrt{1 - v_a^2}} A_\theta(r)] dr \right] \quad (4.104)$$

onde  $C_a$  é uma constante de normalização e  $v_a = E \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{i}{\sqrt{6a}} r \right), \frac{2}{3} \right)$ , sendo  $E()x_1, x_2$  a integração elíptica de segunda espécie.

Diferentemente do caso da equação (4.99), para  $a \neq 0$  temos um espinor bem definido na origem. Com o parâmetro de resolução controlando o valor do espinor em torno da origem.

A forma do  $\alpha_{R,L}(r)$  da Eq. (4.104) levará a uma expressão de  $I_{R,L}$  como

$$I_{R,L}(r) = C_a^2 \int_0^\infty dr (e^{\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}) e^{\mp 2q \int dr \frac{e^{\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}}{a\sqrt{1 - v_a^2}} A_\theta(r)}. \quad (4.105)$$

Escolhendo um *ansatz* semelhante ao do caso resolvido da equação (4.102) na forma

$$A_{\theta_R}(r) = \left( a \frac{\sqrt{1 - v_a^2} e^{-\frac{1}{2}[cr - \tanh(cr)]}}{4q} \right) \lambda \tanh^2 b(u_a(r) - r_0), \quad (4.106)$$

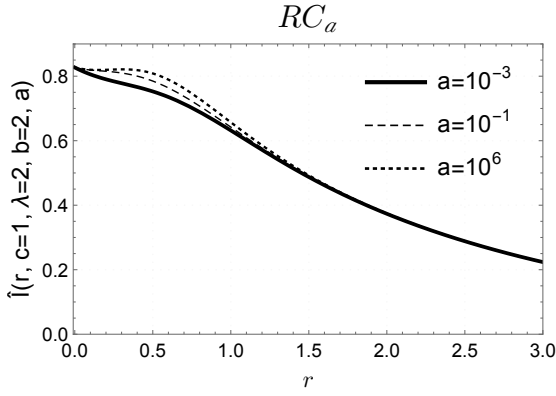
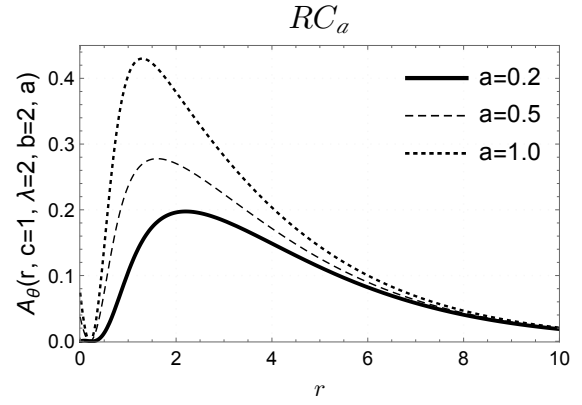
com isso  $I_R$  terá a forma

$$I_R = C^2 \int_0^\infty dr e^{\frac{1}{2}[(c-\lambda)r - \lambda \int \operatorname{sech}^2 b(u_a(r) - r_0) dr - \tanh(cr)]}. \quad (4.107)$$

Mais uma vez  $\lambda > c$  proporciona um  $I_R$  finito, porém a condição para que sua derivada se anule na origem tem a forma

$$\lambda \int \operatorname{sech}^2 b(u_a(r) - r_0) dr > \tanh(cr), \quad (4.108)$$

o gráfico para o caso resolvido de  $I_R$  da Eq. (4.107) está na figura (Figure-4.20) e a forma do calibre da equação (4.106) na (Figure-4.21), ambos para  $c = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $r_0 = 0.2$ .

Figura 4.20:  $\hat{I}$  para  $a \neq 0$  com  $r_0 = 0.2$ .Figura 4.21: Componente angular do calibre para  $a \neq 0$  com  $r_0 = 0.2$ .

### 4.3.3 Modos massivos para o Conifold

Mudando nossa coordenada pela transformação  $\frac{dz}{dr} = F^{-\frac{1}{2}}(r, c)$ , teremos nossa equação de movimento dos modos direito e esquerdo para  $m \neq 0$  como

$$\left[ \partial_z + \frac{\dot{F}}{F} + \frac{(\dot{\beta}F)}{4\beta F} - iqF^{\frac{1}{2}}A_z \pm \frac{qA_\theta}{\sqrt{\beta}} \right] \left[ \partial_z + \frac{\dot{F}}{F} + \frac{(\dot{\beta}F)}{4\beta F} - iqF^{\frac{1}{2}}A_z \mp \frac{qA_\theta}{\sqrt{\beta}} \right] \alpha_{R,L}(z) = -m^2 \alpha_{R,L}(z), \quad (4.109)$$

onde os pontos ( $\dot{\cdot}$ ) denotam  $\frac{d}{dz}$ . Verificamos mais uma vez da eq. (4.3.3) que os modos direito e esquerdo mudam apenas por um sinal no termo de acoplamento.

Aplicando a mudança na variável dependente

$$\alpha_{R,L}(z) = K(z) \tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad K(z) = F^{-\frac{5}{4}}(z) \beta^{-\frac{1}{4}}(z) e^{-iq \int F^{\frac{1}{2}}(z) A_z(z) dz'} \quad (4.110)$$

a Eq.(4.3.3) se tornará

$$\left( -\partial_z^2 + \left[ \left( \frac{qA_\theta(z)}{\sqrt{\beta(z)}} \right)^2 \mp \left( \frac{qA_\theta(z)}{\sqrt{\beta(z)}} \right)' \right] \right) \tilde{\alpha}_{R,L}(z) = m^2 \tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad (4.111)$$

sendo assim a Eq. (4.111) é uma equação de Schrödinger cujo potencial na variável original será dado por

$$V_{R,L}(r) = \left( \frac{qA_\theta(r)}{\sqrt{\beta(r)}} \right)^2 \mp \sqrt{F(r)} \left( \frac{qA_\theta(r)}{\sqrt{\beta(r)}} \right)'. \quad (4.112)$$

essa expressão para o potencial quântico análogo de Schrödinger da Eq. (4.112) é similar a encontrada para o caso compacto do modelo 6D da referência [177]. Porém, no presente caso nossos potenciais dependem do parâmetro de resolução.

### Modos massivos para o Conifold singular

Para  $a = 0$ , o potencial de Schrödinger na variável original será

$$V_{R,L}^0(r, \lambda, b) = \frac{\lambda^2}{16} e^{-[cr - \tanh(cr)]} \tanh b(r - 0.2) \left[ \tanh^3 b(r - 0.2) + \right. \\ \left. \pm \frac{1}{\lambda^2} \left( 8b \operatorname{sech}^2 b(r - 0.2) - 2c \tanh^2(cr) \tanh b(r - 0.2) \right) \right], \quad (4.113)$$

cujo gráfico está representado na Fig. (4.22) (para férmions direitos) e na Fig. (4.23) (para férmions esquerdos), ambos para  $c = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $r_0 = 0.2$ .

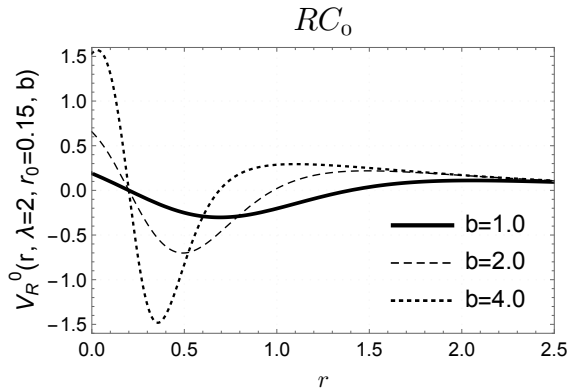


Figura 4.22: Potencial para férmions direito com  $a = 0$ .

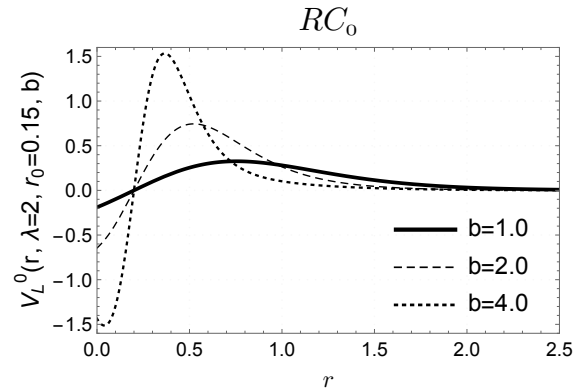


Figura 4.23: Potencial para férmions esquerdos com  $a = 0$ .

Como usual para férmions em mundobrana, este tipo de potencial apresentado para o modo esquerdo tem um poço próximo à brana, enquanto o direito uma barreira. Além disso, o parâmetro  $b$  controla a profundidade do poço e a altura da barreira. Como o potencial vai a zero no infinito, não há gap de massa.

### Modos massivos para o Conifold Resolvido

Para  $a \neq 0$ , teremos o potencial na forma

$$V_{R,L}^a(r, \lambda, b) = \frac{\lambda^2}{16} e^{-[cr - \tanh(cr)]} \tanh b(u_a(r) - 0.2) \left[ \tanh^3 b(u_a(r) - 0.2) \mp \frac{16a^2b}{\lambda(r^2 + 6a^2)} \times \right. \\ \left. \times \left( \sqrt{\frac{(r^2 + 6a^2)(r^2 + 9a^2)}{54a^2}} \operatorname{sech}^2 b(u_a(r) - 0.2) - 2c \tanh^2(cr) \tanh b(u_a(r) - 0.2) \right) \right], \quad (4.114)$$

o qual representamos na figura (4.24) (férmions de mão de esquerda e na figura (4.25) (férmions de mão direita), ambos para  $c = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $r_0 = 0.2$ .

Novamente, os potenciais apresentam forma de vulcão/ vulcão invertido, onde o poço na origem é característico do modo esquerdo. Note que o parâmetro de resolução  $a$ , assim como o  $b$ , controla a amplitude do poço e da barreira. Além disso, para  $a \approx 0$  o potencial muda abruptamente sua derivada, não recuperando o caso de  $a = 0$ , isto era esperado pela descontinuidade da função  $u_a(r)$  da Eq. (2.2.3).

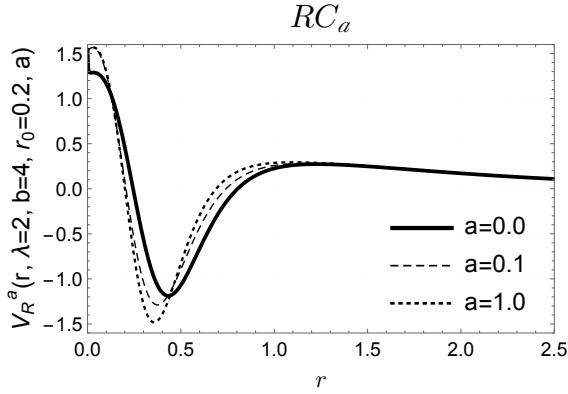


Figura 4.24: Potencial para férmions de mão direita para  $a \neq 0$ .

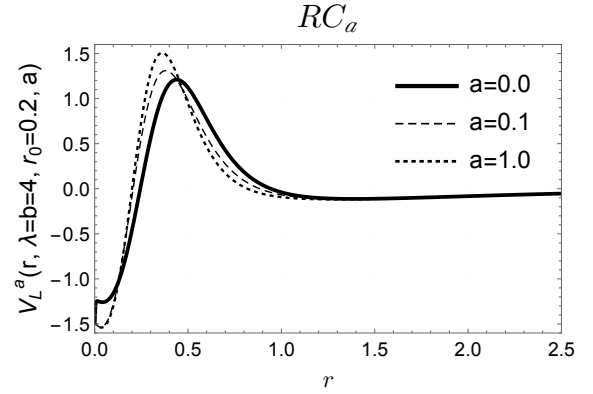


Figura 4.25: Potencial para férmion de mão esquerda para  $a \neq 0$ .

As escolhas adotadas para fixação do calibre no RC foram realizadas antes da imposta no trabalho no HC em nosso trabalho [153]. No trabalho sobre a localização de férmions no Conifold Resolvido [151], queríamos destacar como o parâmetro de resolução ajusta o potencial de Schrödinger e assim influiria nos modos ressonantes, porém devido as características interessantes presentes no modelo “*Hamilton’s cigar soliton*” estudados nos trabalhos [153], nosso trabalho seguinte se destinou ao modelo HC, onde uma escolha mais simples se mostrou eficaz tanto para o confinamento de férmions sem massa como para a análise dos modos ressonantes de férmions massivos.

## 4.4 Conclusões do capítulo 4

Finalizamos o capítulo listando suas principais conclusões:

- Demonstramos a importância do acoplamento com um campo de calibre de fundo no confinamento de férmions de spin  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$  em 6D. Independente da escolha sobre este calibre, é impossível confinar simultaneamente os modos direito e esquerdo;
- Revisamos a escolha de calibre apresentada na Ref. [133] para a localização de férmions de spin  $1/2$  e  $3/2$  no modelo GS. Verificamos que apesar da condição de ortonormalidade ser atendida, as condições de contorno foram esquecidas neste trabalho [133].
- Propusemos então uma escolha que se adequou à todas as condições exigidas, além de gerar modos massivos ressonantes. Particularizamos esta escolha para o modelo regular HC.
- Observamos que as funções de Bessel que descrevem os modos massivos (não localizadas) têm ordens dependentes dos termos de acoplamento. Notamos também que para uma imposição onde a constante de acoplamento tem valor inteiro, os modos massivos direito possuem suas funções de Bessel com uma unidade de ordem maior que as do modo esquerdo;
- Detalhamos a forma super-simétrica exposta pela forma dos potenciais quânticos análogos na abordagem de Schrödinger. Verificamos que as massa serão sempre reais positivas e demonstramos que a ordem de operação do hamiltoniano sobre o modo direito coincide com aqueles dos capítulos anteriores para gravidade/campo escalar e campo de calibre. Já para o modo esquerdo a ordem dos operadores no hamiltoniano é a mesma para gravidade em 5D;
- Estudamos os modos massivos ressonantes no modelo HC. Verificamos que as ressonâncias para o modo esquerdo são mais expressivas que as do modo direito. As autofunções ressonantes tem amplitudes maiores nas proximidades da origem, a amplitude das oscilações longe da origem são bastante reduzidas em comparação aos outros modos massivos não ressonantes;
- Analisamos os modos zero e massivos de spin  $3/2$ , que se diferenciam do caso de spin  $1/2$  apenas por apresentarem maiores amplitudes (devido à ordens menores dos expoentes

dos fatores de “*warp*” nestes modos). Esta relação é semelhante a encontrada no caso do spin 0 (ou spin 2) para o spin 1;

- Finalizamos o capítulo 4 apontando outras escolhas de acoplamento trabalhadas nos modelos BC e RC. Para o BC utilizamos uma solução constante de calibre que foi suficiente para o confinamento do modo zero. Para o RC expusemos uma escolha mais complexa que permitisse que os potenciais da equação de Schrödinger fossem livre de descontinuidades.

$$x_3 \approx 38^{\circ}34'33.3'' \text{ W}$$

## 5 Campo elko em 6D

A base deste capítulo é nossa publicação submetida na Ref. [155]. Estudaremos um espinor  $1/2$  que possui dimensão canônica de massa um em quatro dimensões (mesma dimensão de massa do campo escalar). Este campo é chamado Elko, uma sigla alemã para auto espinor do operador de conjugação de carga com dual helicidade (“*Eigenspinoren des LadungskonjugationsOperators*”) [191–196]). O primeiro artigo publicado sobre o Elko é de 2005 por Dharam Vir Ahluwalia e Daniel Grumiller [191]. As características deste espinor lhe conferem a propriedade de ser um campo fermiônico candidato natural à descrição de matéria escura [197]. As interações do Elko com outros campos do modelo padrão e com campo de calibre são suprimidas por pelo menos uma magnitude da escala de unificação. Isso significa que as interações permitidas para o Elko são limitadas apenas à gravidade, campo de Higgs, a salvo propriedades geradas a partir de geometrias não triviais. Mostraremos que este campo Elko não é confinado sem auxílios de acoplamentos em 6D na seção 5.1, assim com também verificado no Capítulo 4 para espinores de dimensão de massa  $3/2$  (dimensão de massa  $5/2$  em 6D). Utilizaremos um acoplamento chamado de exótico para o resolvermos o problema do confinamento do Elko na seção 5.2. A seguir faremos um breve abordagem sobre a concepção e aplicações deste campo.

Nas referências [191, 192, 196] o estudo do Elko é motivado pelo operador de conjugação de carga (o qual correlaciona partícula e antipartícula). Seguindo as Refs. [191, 192, 196] e aplicando o operador de Wigner de reversão temporal para spin  $1/2$ ,  $\Theta$ , nas matrizes de Pauli da Eq. (4.13) teremos [191, 192, 196]

$$\Theta\sigma^j\Theta^{-1} = -(\sigma^j)^* , \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Este  $\Theta$  operando em um espinor tipo Weyl com  $\phi_+$  (quiralidade direita) e  $\phi_-$  (quiralidade esquerda) nos levará a seguinte relação entre o espaço dos momentos e o espaço das posições [192]:

$$\Theta\phi_{\pm}^*(p^\mu) = e^{\mp\frac{1}{2}\sigma\cdot\varphi} \Theta\phi_{\pm}^*(k^\mu) , \quad (5.2)$$

chamando as fases  $\zeta_\lambda = e^{-\frac{1}{2}\sigma\cdot\varphi}$  e  $\zeta_\rho = e^{+\frac{1}{2}\sigma\cdot\varphi}$ , notamos que  $\phi_+$  (de mão direita) se transformará em  $\zeta_\lambda\Theta\psi_+^*$  (de mão esquerda), assim como  $\phi_-$  (de mão esquerda) se transformará em em  $\zeta_\rho\Theta\psi_-^*$

(de mão direita) e isso motivou Ahluwalia a escrever o espinor Elko na forma [192]:

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \zeta_\rho \Theta \psi_-^* \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \rho(p^\mu) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \zeta_\rho \Theta \psi_+^* \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

onde o espinor  $\rho(p^\mu)$  é descartado por não apresentar um conjunto independente adicional do espinor  $\lambda(p^\mu)$  [192]. Definido o operador de conjugação de carga  $C$  como [192]:

$$C \equiv \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} K,$$

onde  $K$  denota a operação de complexo conjugado para autofunções a serem operadas. Assim os quatro tipos de Elko, separados em auto-conjugados e anti auto-conjugados desta operação de conjugação de carga, são dados por [191, 192, 194, 196]

$$\varsigma_\pm(k^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta \chi_\pm^* \\ \chi_\pm \end{pmatrix}, \quad \tau_\pm(k^\mu) = \pm \begin{pmatrix} -i\Theta \chi_\mp^* \\ \chi_\mp \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

sendo  $\varsigma_\pm$  chamado de espinor auto-conjugado ( $C\varsigma_\pm = +\varsigma_\pm$ ) (associado ao espinor de Majorana [192]), enquanto  $\tau_\pm$  chamado de anti auto-conjugado ( $C\tau_\pm = -\tau_\pm$ ) (negligenciado) [192].

Além disso o espinor  $\chi_\pm$  é escrito como

$$\chi_+ = \sqrt{m} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \sqrt{m} e^{\frac{+i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Sob aspectos fenomenológicos, a radiação Hawking e outros mecanismos do Elko foram exploradas na Ref. [198], já a referência [195] mostra como este campo pode ser obtido a partir do mecanismo de Higgs. Devido à existência de direção privilegiada em sua formulação, o Elko tem aplicações em Relatividade Muito Especial (Very Special Relativity-VSR) [199]. O mecanismo de geração de massa para este espinor foi estudado sob ponto de vista de teorias  $\lambda\phi^4$  na Ref. [200]. Perspectivas de detecção do Elko no LHC foram apontadas na Ref. [195], como também aplicações promissoras em Cosmologia [201–204].

Como os espinores conferem as características do tipo de matéria de que estamos tratando, a estrutura espinorial influirá em nossos campos fermiônicos. A chamada estrutura exótica espinorial ocorre em casos onde há topologia não trivial envolvida. Por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm gerado por um fio condutor de corrente pode, sob o ponto de vista do elétron, ser correlacionado topologicamente à geração de um “genus” no espaço-tempo (um furo em uma superfície orientada conexa). Estruturas espinoriais não triviais podem ser observadas em



variedades multiconexas estudadas em integrais de caminho de Feynman nas Refs. [205–207]. Além disso, estruturas espinoriais exóticas desempenham papel importante em teorias de supercondutividade, como na descrição do fenômeno de pareamento do Cobre em supercondutores [208], na análise de confinamento de t’Hooft [208], como também na dependência de carga do fluxo quantizado em correntes de Joseph [208].

A equação de Dirac e de outros campos de dimensão de massa  $3/2$  percebem uma estrutura de um espaço não trivial como uma adição ao seu termo de calibre [205, 206, 208, 209], assim a estrutura exótica se torna indistinguível ao calibre de fundo para espinores de  $dim[\psi] = 3/2$ . Entretanto, quando consideramos espinores que possuem dimensão de massa 1, por não interagirem com campos de calibre, estes percebem diretamente uma estrutura não trivial no espaço-tempo [200, 201]. Esta característica será utilizada para confinarmos o Elko em 6D, uma vez que sua forma livre é divergente, assim como para os campos de dimensão de massa  $3/2$  em 6D.

## 5.1 Elko livre em modelos tipo corda em 6D

Nesta seção estudaremos o confinamento do Elko sem a presença de termos de acoplamentos externos. Concluiremos que não será possível localizar o modo zero deste campo, os modos massivos também não serão localizados [155]. Este resultado nos motivará a propor o acoplamento exótico apresentado na seção 5.2.

Tomaremos por base a ação para o Elko em 5D da Ref. [194]. Através desta apresentamos a ação para o Elko sem massa no “Bulk” em 6D [155]

$$S_{6_{Elko}} = - \int dx^6 \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} g^{MN} (D_M \tilde{\Upsilon} D_N \Upsilon + D_N \tilde{\Upsilon} D_M \Upsilon) \right]. \quad (5.6)$$

onde  $D_M$  é a derivada covariante e  $\Upsilon$  representa o espinor do Elko  $8 \times 1$ . Observamos que esta ação é similar ao do campo escalar apresentado na Eq. (3.3), observamos que  $dim[\Upsilon] = 2$ , ao invés da  $dim[\Psi] = 5/2$  verificada para os espinores das seções 4.1 e 4.2. Na decomposição de Kaluza-Klein, observaremos que o Elko em 4D terá  $dim[\lambda_n(x)] = 1$ , diferentemente do observado como  $dim[\psi(x)] = 3/2$  nos espinores das seções 4.1 e 4.2.

Extraímos a seguinte equação de movimento da ação acima:

$$\mathcal{D}_{MN}^2 \Upsilon := \frac{1}{\sqrt{-g}} D_M (\sqrt{-g} g^{MN} D_N \Upsilon) = 0, \quad (5.7)$$

na ausência do termo exótico que será tratado na seção 5.2 teremos a derivada covariante como

$$D_M \Upsilon = [\partial_M + \Omega_M(r)] \Upsilon, \quad (5.8)$$

os termos não nulos da conexão de spin  $\Omega_M$  com a métrica dD da Eq. (2.3) será

$$\Omega_\mu(r) = \frac{1}{4} \frac{F'}{\sqrt{F}} \Gamma_{\bar{\mu}} \Gamma_{\bar{r}}, \quad \Omega_\theta(r) = \frac{1}{4} \frac{H'}{\sqrt{H}} \Gamma_{\bar{\theta}} \Gamma_{\bar{r}}. \quad (5.9)$$

novamente os  $\Gamma_{\bar{M}}$  são as matrizes 6D ( $8 \times 8$ ) no espaço plano.

Utilizando a decomposição de Weyl e as representação das matrizes como nas Ref. [128, 133, 134, 151–153, 177]

$$\Upsilon(x, r, \theta) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

e

$$\Gamma^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\bar{\mu}} \\ \gamma^{\bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{r}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{\theta}} = i \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^\theta \\ \gamma^\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Com a assinatura métrica  $(-, +, +, +; +, +)$  as matrizes na representação de Weyl serão dadas pela forma

$$\gamma^{\bar{0}} = -i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\bar{j}} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\bar{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

onde  $\sigma^j$  são as matrizes de Pauli expressas na Eq. (4.13) e  $\mathbb{1}$  a matriz identidade.

Devido à propriedades do Ansatz métrico e da equação de movimento, escolhemos a seguinte decomposição KK para o Elko [155]:

$$\lambda(x^\mu, r, \theta) = \sum_{n,l} \lambda_n(x^\mu) \varepsilon_n(r) \lambda_l(\theta), \quad (5.13)$$

onde  $\lambda_{n\pm}(x) = \varsigma_{\pm}^{(n)}(x^\mu) + \tau_{\pm}^{(n)}(x)$  representam os 4 diferentes tipos de Elko em 4D [194, 210, 211], estes tem dimensão de massa 1 ao invés da usual  $3/2$ . O  $\varepsilon_n(r)$  representa a componente radial, enquanto o  $\lambda_l(\theta) = e^{il\theta}$  a componente angular, onde  $l$  denota o número orbital [119, 128, 129, 133, 134, 136]. O índice  $n$  rotula os valores de  $m_n$ . Foi mostrado na referência [194] que os modos KK para os diferentes tipos de Elko  $\varsigma$  e  $\tau$  são indistinguíveis, não havendo as diferenças como as quiralidades direita ou esquerda presentes nos espinores tipo Dirac/Rarita-Schwinger do Capítulo 4.

De acordo com essa decomposição da Eq. (5.13), teremos a seguinte atuação das matrizes da Eq. (5.11) sobre a porção 4D dos espinores  $\lambda_n(x)$  as [194, 210]:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \varsigma_\pm(x) = \mp im \varsigma_\mp(x); \quad \gamma^\mu \partial_\mu \tau_\pm(x) = \pm im \tau_\mp(x). \quad (5.14)$$

$$\gamma^5 \varsigma_\pm(x) = \pm \tau_\mp(x); \quad \gamma^5 \tau_\pm(x) = \mp \varsigma_\mp(x). \quad (5.15)$$

$$\gamma^\theta \varsigma_\pm(x) = \mp i \varsigma_\mp(x); \quad \gamma^\theta \tau_\pm(x) = \pm i \tau_\mp(x). \quad (5.16)$$

É conveniente enfatizar que o espinor Elko não obedece à uma equação de Dirac, uma vez que para o espinor de Dirac  $\psi$  satisfaz  $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$  [194, 210].

Retornando à Eq. (5.7) a parcela 4D gerará:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^2 \lambda &= \sum_{n,l} \varepsilon_n(r) \lambda_l(\theta) \frac{1}{F} \eta^{\mu\nu} [(\partial_\mu + \Omega_\mu) \{(\partial_\nu + \Omega_\nu) \lambda_n(x)\}] \\ &= \sum_{n,l} \lambda_n(x) \lambda_l(\theta) \frac{1}{F} \left[ m_n^2 - \frac{im_n F'}{2\sqrt{F}} - \frac{1}{4} \left( \frac{F'}{\sqrt{F}} \right)^2 \right] \varepsilon_n(r). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Seguindo, a porção radial apresentará a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{rr}^2 \lambda &= \sum_{n,l} \lambda_n(x) \lambda_l(\theta) \left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} \partial_r \varepsilon_n(r)) \right] \\ &= \sum_{n,l} \lambda_n(x) \lambda_l(\theta) \left[ \partial_r^2 - 2 \left( \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{H'}{H} \right) \partial_r \right] \varepsilon_n(r). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Finalmente, a porção angular nos mostrará que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\theta\theta}^2 \lambda &= \sum_{n,l} \frac{1}{H} \varepsilon_n(r) [(\partial_\theta + \Omega_\theta) (\partial_\theta + \Omega_\theta) \lambda_n(x) \lambda_l(\theta)] \\ &= \sum_{n,l} \lambda_n(x) \lambda_l(\theta) \frac{1}{H} \left[ -l^2 + \frac{l}{2} \frac{H'}{\sqrt{H}} - \frac{1}{16} \left( \frac{H'}{\sqrt{H}} \right)^2 \right] \varepsilon_n(r). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Somando as Eqs. (5.17), (5.18) e (5.19) teremos a equação de movimento completa da Eq. (5.7), onde a condição de anulamento recairá sobre a parcela radial  $\varepsilon_n(r)$ . Para as ondas- $s$  ( $l = 0$ ), teremos a seguinte equação diferencial de segunda ordem.

$$[\partial_r^2 + 2\mathcal{P}(r)\partial_r + \mathcal{Q}(r)] \varepsilon_n(r) = 0 \quad (5.20)$$

sendo os coeficientes destas equação dados por

$$2\mathcal{P}(r) = 2 \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{2} \frac{H'(r)}{H(r)} \quad (5.21)$$

$$\mathcal{Q}_n(r) = \frac{m_n^2}{F(r)} - \frac{im_n}{2\sqrt{F(r)}} \frac{F'(r)}{F(r)} - \left[ \left( \frac{F'(r)}{2F(r)} \right)^2 + \left( \frac{H'(r)}{4H(r)} \right)^2 \right]. \quad (5.22)$$

Consideramos que uma solução da Eq. (5.20) é um modo confinado se este obedecer à duas condições, como já bem discutido nos capítulos anteriores para outros campos. As *condições de contorno* [119, 128, 129, 136, 139, 140, 147–150, 153] dadas por

$$\varepsilon'_n(0) = \varepsilon'_n(\infty) = 0. \quad (5.23)$$

Além da *condição de ortonormalidade* para o Elko:

$$\int_0^\infty F(r) \sqrt{H(r)} \varepsilon_n^*(r) \varepsilon_s(r) dr = \delta_{ns} \quad (5.24)$$

Na próxima seção aplicaremos os resultados desta seção para os modelos GS, HC e TA, já detalhados na seção 2.2.

### 5.1.1 Elko livre no modelo GS

Iniciaremos com o estudo do campo de matéria Elko no defeito tipo corda fina, GS. A Eq. (5.20) com os fatores do GS da Eq. (2.17) será [155]

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \varepsilon_n'(r) + \left( m_n^2 e^{cr} - \frac{im_n c}{2} e^{\frac{cr}{2}} - \frac{5c^2}{16} \right) \varepsilon_n(r) = 0. \quad (5.25)$$

Para os modos sem massa esta equação diferencial possui coeficientes constantes os quais levam a uma solução geral do tipo

$$\varepsilon_0(r) = N_1 e^{\left(\frac{5-\sqrt{30}}{4}\right)cr} + N_2 e^{\left(\frac{5+\sqrt{30}}{4}\right)cr}, \quad (5.26)$$

onde  $N_1, N_2$  são constantes de normalização reais. Para checarmos as condições de contorno devemos calcular sua derivada por:

$$\varepsilon_0'(r) = c \left( \frac{5-\sqrt{30}}{4} N_1 e^{\left(\frac{5-\sqrt{30}}{4}\right)cr} + \frac{5+\sqrt{30}}{4} N_2 e^{\left(\frac{5+\sqrt{30}}{4}\right)cr} \right) \quad (5.27)$$

calculamos das condições de contorno da Eq. (5.23) a relação entre as constantes que torna válida esta condição na origem quando

$$N_2 = -\frac{5-\sqrt{30}}{5+\sqrt{30}} N_1, \quad (5.28)$$

entretanto a única possibilidade de que essa condição seja obedecida também quando  $r \rightarrow \infty$  é fazer para a Eq. (5.27) o valor  $N_2 = 0$ , o que implica que  $N_1 = 0$ , devido a (5.28). Esta solução nula não obedece a condição de normalização da Eq. (5.24).

Por outro lado, se buscarmos atender à Eq. (5.24) normalizando a expressão, é necessário que  $N_1 = \left(\frac{\sqrt{30}-2}{2R_0}c\right)^{1/2}$  e obrigaremos que  $N_2 = 0$ . Entretanto, a condição (5.23) não tem derivada nula na origem. Concluímos assim que não é possível encontrar uma solução que obedeça simultaneamente as Eq. (5.23) e Eq. (5.24). Logo, não há modo zero do Elko confinado no GS [155].

Para os modos massivos no GS, ao tentarmos colocar nossa Eq. (5.25) numa forma de Bessel da (5.57) observaremos que a forma mais próxima que conseguimos encontrar será através das transformações já apresentadas no Capítulo (3) em sua equação (3.49):

$$u(r) = m \int_0^r dr' e^{\frac{cr'}{2}} = \frac{2m}{c} (e^{cr/2} - 1), \quad (5.29)$$

isolando a variável  $r$  e a substituindo no fator de “warp” para obtermos o  $F(r(u))$  como

$$r(u) = \frac{2}{c} \ln \left[ \frac{uc}{2m} + 1 \right] \Rightarrow F(u) = e^{-c r(u)} = \left( \frac{uc}{2m} + 1 \right)^{-2},$$

modificando  $u$  em termos da variável  $x$

$$x := u + \frac{2m}{c} \Rightarrow F(x) = \left( \frac{2m}{c} \right)^2 x^{-2}.$$

Com esta modificação as derivadas se alteram na forma:

$$\phi'(r) \mapsto \frac{m}{\sqrt{F}} \dot{\phi}(x), \quad \phi''(r) \mapsto \frac{m^2}{F} \left( \ddot{\phi}(x) - \frac{\dot{F}}{2F} \dot{\phi}(x) \right) \quad (5.30)$$

Então a equação (5.25) se transforma em:

$$\frac{m^2}{F} \ddot{\phi}(x) - \dot{\phi}(x) \left[ \frac{5cm}{2\sqrt{F}} + \frac{m^2}{2F} \left( \frac{\dot{F}}{F} \right) \right] + \left( \frac{m^2}{F} + \frac{imc}{2\sqrt{F}} - \frac{5}{16}c^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (5.31)$$

Multiplicando por  $\frac{F}{m^2}$  teremos

$$\ddot{\phi}(x) - \dot{\phi}(x) \left[ \frac{5c\sqrt{F}}{2m} + \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right) \right] + \left( 1 + \frac{i\sqrt{F}c}{2m} - \frac{3F}{16m^2}c^2 \right) \phi(x) = 0, \quad (5.32)$$

Como  $\sqrt{F} = \frac{2m}{cx}$  e  $\frac{\dot{F}}{F} = -\frac{2}{x}$  temos

$$\ddot{\phi}(x) - \frac{4}{x} \dot{\phi}(x) + \left( 1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{i}{x} \right) \phi(x) = 0, \quad (5.33)$$

propomos agora a seguinte mudança na variável dependente

$$\phi(x) = v(x)y(x), \quad \dot{\phi} = \dot{v}y + \dot{y}v, \quad \ddot{\phi} = \ddot{v}y + 2\dot{v}\dot{y} + \dot{y}\dot{v}; \quad (5.34)$$

Com isso teremos (3.54) como:

$$\ddot{y}(x) + \dot{y}(x) \left[ \frac{2\dot{v}}{v} - \frac{4}{x} \right] + y(x) \left[ \frac{\ddot{v}}{v} - \frac{4\dot{v}}{xv} + 1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{i}{x} \right] = 0 \quad (5.35)$$

Para que obtenhamos a Eq. (5.35) na forma da equação de Bessel (5.57), temos que fazer  $\frac{2\dot{v}}{v} - \frac{4}{x} = \frac{1}{x}$ , assim:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{5}{2x} \Rightarrow \frac{\ddot{v}}{v} = \frac{15}{4x^2}; \quad (5.36)$$

Por fim, substituindo (3.57) em (5.35) teremos:

$$\ddot{y}(x) + \frac{1}{x}\dot{y}(x) + y(x) \left[ 1 - \frac{30}{4x^2} + \frac{i}{x} \right] = 0 \quad (5.37)$$

esta solução não é uma equação de Bessel e apresenta a seguinte forma que possui valores complexos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(r) = & e^{\frac{1}{4}(5+2\sqrt{15})cr} \times \\ & \times \left\{ e^{-\frac{1}{2}\mathcal{X}_n(r)} \left[ \aleph_1 U \left( \sqrt{\frac{15}{2}}, 1 + \sqrt{30}, \mathcal{X}_n(r) \right) + \aleph_2 L_{-\sqrt{\frac{15}{2}}}^{\sqrt{30}}(\mathcal{X}_n(r)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde  $\mathcal{X}_n(r) = 4\frac{im_n}{c}e^{\frac{cr}{2}}$ , e  $U(a_1, a_2, \mathcal{X})$  é a função hipergeométrica confluyente de segundo tipo e  $L_{-a_1}^{a_3}(\mathcal{X})$  os polinômios de Laguerre generalizados. Os  $\aleph_1, \aleph_2$  são constantes de normalização. É interessante apontar que para o caso do modelo fino de Randall Sundrum em 5D, as Refs. [194, 210] encontraram soluções massivas para o Elko livre baseadas nas funções de Whittaker, as quais também apresentam valores complexos. Este resultado difere das soluções puramente reais encontradas para gravidade (3.60), campo de calibre (3.97) e férmions de spin 1/2 (4.46).

O termo  $e^{\frac{1}{4}(5+2\sqrt{15})cr}$  da Eq. (5.38) faz esta expressão crescer exponencialmente, e os termos entre chaves são oscilantes e linearmente independentes. Assim a condição (5.23) não é obedecida para  $r \rightarrow \infty$ , como podemos ver na Fig. 5.1. Embora o crescimento de  $|\varepsilon_n(r)|^2$  seja reduzido por  $F\sqrt{H} = R_0 e^{-\frac{3}{4}cr}$  na Eq. (5.24), este integrando continua a crescer, como observado na Fig. 5.2.

Verificamos assim que nenhum modo massivo pode ser confinado no GS. Logo, concluímos desta subseção que nem o modo zero nem modos massivos são confinados para o Elko livre no modelo fino GS [155].

### 5.1.2 Elko livre no modelo TA

Para os fatores de “warp” do modelo TA presentes na equação (2.58), com a seguinte mudança de notação da equação (2.59) obteremos  $F_{TA}(r) = R_0^2 F_{TA}(r) = \text{sech}^{2p} \left( \frac{cr}{2p} \right)$ , assim a

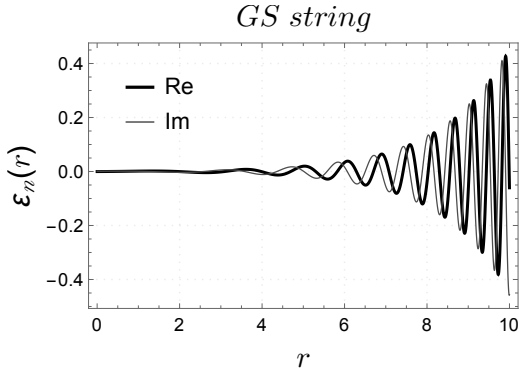


Figura 5.1: Soluções da parte real (linha espessa) e parte imaginária (linha fina) da autofunção massiva para o GS da Eq. (5.20). Fixamos  $c = 0.5$ ,  $m_n = 1.50$ ,  $R_0 = 1.00$  e as constantes  $\aleph_1 = \aleph_2 = 1.00$ .

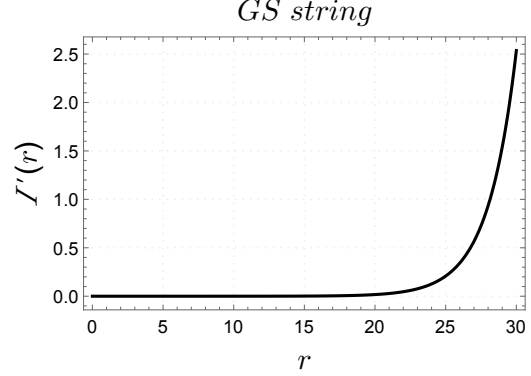


Figura 5.2:  $I'(r)$  integrando da Eq. (5.24) com  $c = 0.5$ ,  $m_n = 1.50$ ,  $R_0 = 1.00$  e as constantes  $\aleph_1 = \aleph_2 = 1.00$ .

equação diferencial (5.20) será [155]

$$\begin{aligned} & \varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \tanh\left(\frac{cr}{2p}\right) \varepsilon_n'(r) + \\ & + \left( \frac{m^2}{\operatorname{sech}^{2p}\left(\frac{cr}{2p}\right)} + \frac{icm \tanh\left(\frac{cr}{2p}\right)}{\operatorname{sech}^p\left(\frac{cr}{2p}\right)} - \frac{5c^2}{16} \tanh^2\left(\frac{cr}{2p}\right) \right) \varepsilon_n(r) = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Mesmo o modo zero para esta equação não apresenta solução exata em termos de funções fundamentais. Então, estudaremos as propriedades dessa equação em pontos extremos (próximo da origem e no infinito) para a resolvermos numericamente:

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5cr}{2} \varepsilon_n'(r) + m_n^2 \varepsilon_n(r) = 0, \quad \text{se } r \approx 0, \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2p} \varepsilon_n'(r) + \left( m_n^2 e^{cr} - \frac{im_n c}{2} e^{\frac{cr}{2}} - \frac{5c^2}{16} \right) \varepsilon_n(r) = 0, \quad \text{se } r \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Concluimos que quando  $r \rightarrow \infty$  os modos massivos tem mesmo comportamento da Eq. (5.25). Logo, independente do seu comportamento na origem, as condições das equações (5.23) e Eq. (5.24) não são satisfeitas no infinito. Assim, também não há modos massivos confinado no modelo TA.

Para o modo zero, duas condições iniciais são necessárias para resolvermos a Eq. (5.39) numericamente. Obteremos da Eq. (5.41) para  $m = 0$  quando  $r \approx 0$  a expressão:

$$\varepsilon_0(r) = N_1 + N_2 \sqrt{\frac{2\pi p}{5c}} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{5c}{2p}} r\right), \quad \text{quando } r \approx 0, \quad (5.42)$$

a função Erro imaginária é nula na origem. Com isso, podemos utilizar a condição inicial  $\varepsilon_0(0) = N_1$  e  $\varepsilon'_0(0) = 0$ .

Assim, buscando uma solução sem massa da Eq. (5.39) que obedeça as condições (5.23), adotamos como condições iniciais  $\varepsilon_0(0) = 1$  e  $\varepsilon'_0(0) = 0$ . Apesar disso, semelhante ao observado no GS, se impusermos que as condições de contorno sejam válidas na origem, a expressão cresce exponencialmente como visto na Fig. 5.3. Assim, também não há modo zero localizado para o Elko no modelo TA [155].

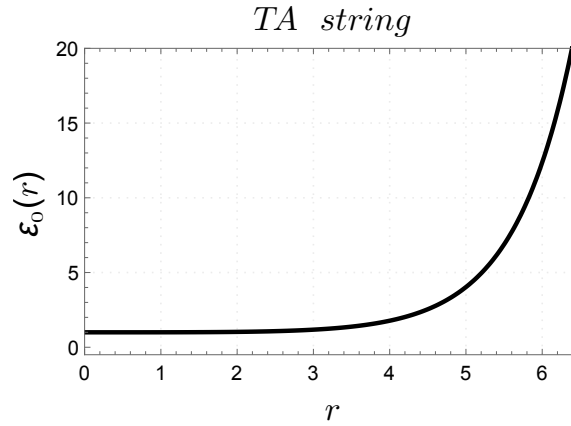


Figura 5.3:  $\varepsilon_0$ : modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais  $\varepsilon_0(0) = 1$  e  $\varepsilon'_0(0) = 0$ . Adotamos o intervalo  $r \in [0, 80]$  com  $c = 0.5$  e  $p = 1.0$ , mas exibimos a figura apenas no intervalo de  $r \in [0, 6]$  para denotarmos o valor  $\varepsilon_0(0) = 1$ .

Em contrapartida, apenas a título de verificação, se utilizarmos as condições de contorno  $\varepsilon_0(0) = 1$  e  $\varepsilon'_0(\infty) = 0$ , obteremos o seguinte perfil normalizável que viola a condição de derivada nula na origem presente nas Fig. 5.4 e Fig. 5.5. Por fim, se utilizarmos as condições originais  $\varepsilon'_0(0) = \varepsilon'_0(\infty) = 0$  termos como resultado  $\varepsilon_0(r) = 0$  para todos os pontos, indicando que apenas a solução nula atende a este requisito, porém esta solução não será normalizável. Este resultado, demonstrado analiticamente para o GS apartir da equação (5.26) também foi observado no TA, embora as condições de regularidade para este modelo sejam diferente. Para o HC notaremos o mesmo resultado, comprovando que o Elko livre (sem acoplamento) não será confinado em 6D [155].



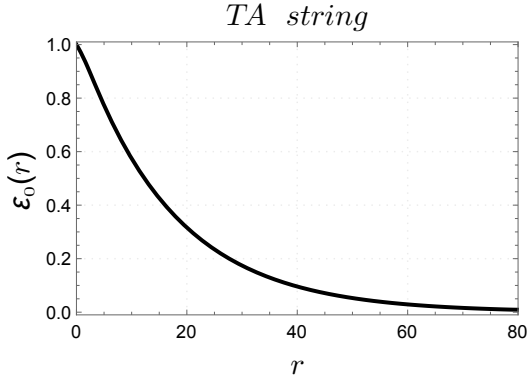


Figura 5.4:  $\varepsilon_0$ : modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais  $\varepsilon_0(0) = 1$  e  $\varepsilon'_0(80) = 0$ . Adotamos o intervalo  $r \in [0, 80]$  com  $c = 0.5$  e  $p = 1.0$ . A derivada na origem vale  $\varepsilon'_0(0) \approx -0.035$

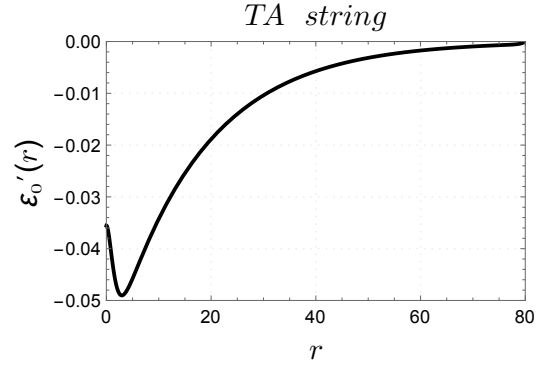


Figura 5.5:  $\varepsilon'_0$ : derivada do modo sem massa da Eq. (5.39) com condições iniciais  $\varepsilon_0(0) = 1$  e  $\varepsilon'_0(80) = 0$ . Adotamos o intervalo  $r \in [0, 80]$  com  $c = 0.5$  e  $p = 1.0$ . A derivada não é nula na origem.

### 5.1.3 Elko livre no modelo HC

Para o modelo HC descrito pela métrica (2.25), nossa equação diferencial (5.20) se torna [155]:

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \left( \tanh^2(cr) - \frac{2 \operatorname{sech}^2(cr)}{5 \tanh(cr)} \right) \varepsilon_n'(r) + \left( \frac{m_n^2}{e^{-(cr+\tanh cr)}} + \frac{im_n c \tanh^2(cr)}{2 e^{-\frac{1}{2}(cr+\tanh cr)}} - \frac{5c^2}{16} \left[ \tanh^4(cr) + \frac{4}{5} \left( \frac{\operatorname{sech}^4(cr)}{\tanh^2(cr)} - \frac{\operatorname{sech}^2(cr)}{\coth(cr)} \right) \right] \right) \varepsilon_n(r) = 0. \quad (5.43)$$

Novamente, é bastante difícil encontrar uma expressão exata para esta equação, mesmo que para o modo zero. Assim calcularemos o comportamento desta equação em seus extremos na variável  $r$  para tratarmos numericamente

$$\begin{cases} \varepsilon_n''(r) + \left( \frac{1}{r} - \frac{2c^2 r}{3} \right) \varepsilon_n' + \left( m_n^2 + c^2 \left[ cr + \frac{1}{3} - \frac{1}{(2cr)^2} \right] \right) \varepsilon_n(r) = 0, & \text{se } r \approx 0 \\ \varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \varepsilon_n'(r) + \left( m_n^2 e^{cr} - \frac{im_n c}{2} e^{\frac{cr}{2}} - \frac{5c^2}{16} \right) \varepsilon_n(r) = 0, & \text{se } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.44)$$

Concluimos que os coeficientes  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}_n$  exibem singularidades próximo à origem, enquanto para  $r \rightarrow \infty$  esta expressão também converge para o modelo fino GS da Eq. (5.25). Consequentemente, os modos massivos para o HC também oscilam com amplitude crescente no infinito, sendo não normalizáveis, e não confinados por isso.

Para analisar a possibilidade de um modo de massa zero confinado no HC, plotamos um comparativo entre os coeficientes  $2\mathcal{P}(r)$  e  $\mathcal{Q}_0(r)$  do HC com o GS na Fig. 5.6. Onde verificamos

graficamente que há divergência na origem, além de convergência para o modelo GS a medida que  $r$  cresce.

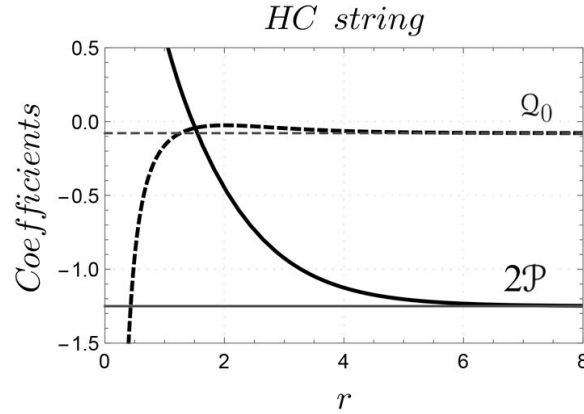


Figura 5.6: Comparativo entre os coeficientes  $2\mathcal{P}(r)$  (linhas cheias) e  $\mathcal{Q}_0(r)$  (linhas tracejadas) para o HC (linhas grossas) e GS (linhas finas). Utilizamos  $c = 0.5$ .

A Eq. (5.44) com  $r \approx 0$ , considerando apenas os termos dominantes, pode ter seus coeficientes simplificados como  $2\mathcal{P}(r) \approx \frac{1}{r}$  e  $\mathcal{Q}_0(r) \approx -\frac{1}{4r^2}$ , que levam a solução:

$$\varepsilon_0(r) = N_1 \cosh\left(\frac{\ln(r)}{2}\right) + iN_2 \sinh\left(\frac{\ln(r)}{2}\right). \quad (5.45)$$

A solução encontrada é também singular na origem, assim a única maneira da condição (5.23) ser atendida na origem é fixando  $N_1 = N_2 = 0$ . O que implicará numa condição inicial  $\varepsilon_0(0) = 0$  e  $\varepsilon'_0(0) = 0$  para o modelo HC. A representação deste modo zero no HC está na Fig. 5.7, onde adotamos a origem em  $r_{min} = 0.001$  para contornarmos a singularidade do coeficiente  $2\mathcal{P}(r)$ .

Mais uma vez, assim como no TA e GS, não é possível encontrar uma solução que atenda às Eqs. (5.23) e (5.24) simultaneamente. Assim, não existem modos massivos nem modo zero confinado para o Elko no HC [155].

## 5.2 Elko exótico em modelos em 6D

Na seção 5.1 verificamos que o modo zero do Elko livre (sem acoplamento) não foi confinado em nenhum dos três modelos 6D propostos. Algo semelhante foi observado para os espiniores 1/2 de Dirac (ou Weyl) e 3/2 de Rarita-Schwinger em 6D (resultados do capítulo 4, onde um acoplamento mínimo com um campo de fundo vetorial eletromagnético  $U(1)$  foi necessário

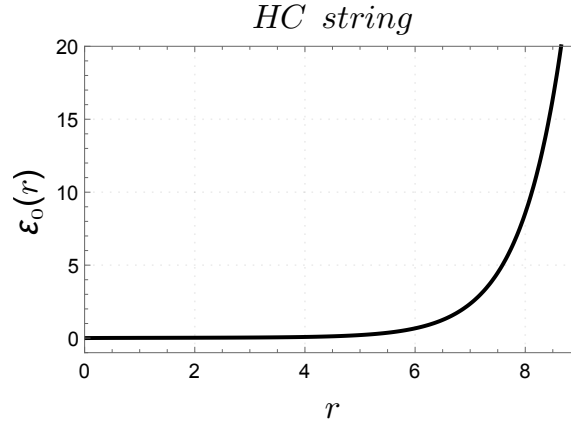


Figura 5.7:  $\varepsilon_0$ : modo zero para o HC da Eq. (5.43) com condições iniciais  $\varepsilon_0(r_{min}) = 0$  and  $\varepsilon_0'(r_{min}) = 0$ , onde o domínio de  $r \in [0.001, 80]$ .

para confinar estes espinores [128, 133, 151–153]. Porém, um acoplamento com um campo eletromagnético não é permitido ao Elko devido às suas características de matéria escura.

Entretanto, a derivada covariante para um espinor exótico, ou de um espinor que se encontra em um espaço de topologia não trivial, tem sua forma modificada pela adição de campo associado a um inteiro na classe de cohomologia de Čech (representado por uma 1-forma) [205, 206, 208, 209]. Neste contexto, ao se trabalhar com uma equação tipo Dirac exótica, o potencial eletromagnético,  $A$ , é afetado pela transformação  $A \mapsto A + \frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi$ . Para espinores de dimensão de massa  $3/2$ , este termo exótico é absorvido como um  $A$  efetivo, não distinguindo o termo exótico de um campo de calibre de fundo [201, 206, 208, 209]. Porém, espinores com dimensão de massa um conseguem distinguir este termo através de sua própria estrutura, uma vez que não se acoplam com o potencial  $A$  [196], e assim percebendo diretamente as influências do termo  $\frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi$ .

Logo, a derivada covariante  $D_M$  da equação (5.8) pode ser representada exclusivamente para um espinor de dimensão de massa um, como o Elko, na forma

$$D_M \lambda(x^\mu, r, \theta) = [\partial_M + \Omega_M(r) + a_M(r)] \lambda(x^\mu, r, \theta), \quad (5.46)$$

onde o termo exótico  $a_M(r) = \frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi$  tem restrição de ser normalizável. Nas referências [200, 201] esta adição de calibre é na forma  $a_M(x) = \partial_\mu \vartheta(x)$ , sendo  $\vartheta(x)$  um campo escalar. Nestas referências foi demonstrado algebricamente como esta contribuição se torna imperceptível para um espinor do tipo Dirac, mas perceptível para um espinor tipo o Elko [200, 201].

Para se resolver o problema do confinamento do modo zero do Elko, como também o de suas autofunções complexas, uma interessante escolha para a fixação deste “calibre” exótico é aquela

que elimina a contribuição da conexão de spin [155]:

$$a_M(r)\lambda(x^\mu, r, \theta) = -\Omega_M(r)\lambda(x^\mu, r, \theta). \quad (5.47)$$

esta igualdade de operadores não possui dinâmica fundamental, uma vez que foi adotada para simplificarmos o termo da Eq. (5.46). Além disso, essa transformação para o termo exótico é consistente com as transformações apresentadas no trabalho [212].

Com isto a derivada covariante se reduz a derivada parcial,  $D_M \mapsto \partial_M$  e a equação de movimento (5.7) se tornará a mesma do campo escalar Eq. (3.8) e da gravidade Eq. (3.14) em modelos tipo corda em 6D [119, 128, 147, 149]. Com as conexões de spin da equação Eq.(5.9) e com as métricas do GS (2.17), TA (2.58) e (2.25), teremos os seguintes termos exóticos da Eq. (5.47):

$$a_{\mu_{GS}}(r)\lambda = -\frac{1}{R_0}a_{\theta_{GS}}(r)\lambda = -\frac{ic}{4}e^{-\frac{cr}{2}}\lambda, \quad (5.48)$$

$$a_{\mu_{TA}}(r)\lambda = -\frac{1}{R_0}a_{\theta_{TA}}(r)\lambda = -\frac{ic}{4}\tanh\left(\frac{cr}{2p}\right)\operatorname{sech}^p\left(\frac{cr}{2p}\right)\lambda, \quad (5.49)$$

$$a_{\mu_{HC}}(r)\lambda = -\frac{ic}{4}\tanh^2(cr)e^{-\frac{1}{2}(cr-\tanh(cr))}\lambda, \quad (5.50)$$

$$a_{\theta_{HC}}(r)\lambda = \frac{i}{4}[\tanh^3(cr) + 2\operatorname{sech}^2(cr)]e^{-\frac{1}{2}(cr-\tanh(cr))}\lambda. \quad (5.51)$$

observamos que para todos os modelos as componentes de  $a_\mu(r)$  e  $a_\theta(r)$  são funções imaginárias puras que decaem com  $r$ . Logo, esta escolha obedece a restrição que nosso termo exótico possa ser normalizável.

Como dito anteriormente, esta mudança na derivada covariante torna a equação diferencial do Elko (5.20) idêntica aquela do campo escalar Eq. (3.8) e da gravidade Eq. (3.14) em modelos tipo corda em 6D [119, 128, 147, 149] [119, 128, 145, 147, 149, 150]:

$$\left[\partial_r^2 + \left(2\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{2}\frac{H'(r)}{H(r)}\right)\partial_r + \frac{m_n^2}{F(r)}\right]\varepsilon_n(r) = 0. \quad (5.52)$$

### 5.2.1 Modo zero para o Elko exótico

Assim os modos sem massa da Eq.(5.52) tem a mesma solução geral da equação (3.16) [147, 149, 150]:

$$\varepsilon_0(r) = N + N_2 \int_0^r F^{-\frac{5}{2}}(r')H^{-\frac{1}{2}}(r')dr'. \quad (5.53)$$

a única maneira deste modo zero (5.53) obedecer as condições (5.23) e (5.24) é fazendo  $N_2 = 0$ .

Assim

$$N = \left( \int_0^\infty F(r') H^{\frac{1}{2}}(r') dr' \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.54)$$

Uma solução constante para cada modelo garante o confinamento do modo zero do Elko. Por exemplo, fixando  $c = 0.5$ ,  $R_0 = 1$  e  $p = 0.5$ , teremos os valores numéricos constantes para cada modelo GS, TA e HC como:

$$N_{GS} = 0.866, \quad N_{TA} = 0.646, \quad N_{HC} = 0.530, \quad (5.55)$$

uma vez que essas constantes tem relação de proporcionalidade inversa ao volume 6D, quando maior o volume do modelo, menor será o valor dessa constante de normalização.

## 5.2.2 Modos massivos para o Elko exótico

Para os modos massivos a Eq. (5.52) no GS se torna a esperada equação de Bessel na forma

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \varepsilon_n'(r) + m_n^2 e^{cr} \varepsilon_n(r) = 0, \quad (5.56)$$

as quais tem seus valores sempre reais [119].

$$\varepsilon_n(r) = e^{\frac{5c}{4}r} \left\{ \mathfrak{N}_1 J_{\frac{5}{2}} \left( \frac{2m_n}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) + \mathfrak{N}_2 Y_{\frac{5}{2}} \left( \frac{2m_n}{c} e^{\frac{cr}{2}} \right) \right\}, \quad (5.57)$$

as oscilações dessas soluções crescem exponencialmente em  $r$ . Nenhum modo massivo é localizado no modelo GS. Este resultado para o Elko exótico é diferente do encontrado em 5D, onde as soluções massivas para o Elko acoplado com um termo de massa, ou via acoplamento Yukawa com um termo geométrico, possuem valores complexos em termos de funções de Whittaker [210]. Através de nossa escolha para o acoplamento exótico obtivemos sempre funções massivas reais para os modelos em 6D.

Seguindo, nós teremos a equação diferencial na forma:

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \tanh \left( \frac{cr}{\delta} \right) \varepsilon_n'(r) + m_n^2 \cosh^\delta \left( \frac{cr}{\delta} \right) \varepsilon_n(r) = 0. \quad (5.58)$$

Essa solução converge assintoticamente para o GS da Eq. (5.56). Assim nenhum modo massivo é localizado. Próximo à origem a solução é escrita em termos dos polinômios de Hermite  $\mathcal{H}$  e das funções de Kummer de segunda espécie, as quais garantem como condição inicial  $\varepsilon_n(0) = 1.00$  and  $\varepsilon_n'(0) = -1.01$ . Uma solução para a Eq. (5.58) é representada na Fig. 5.8.

Finalmente, para o modelo HC a Eq. (5.52) será:

$$\varepsilon_n''(r) - \frac{5c}{2} \left( \tanh^2(cr) - \frac{2 \operatorname{sech}^2(cr)}{5 \tanh(cr)} \right) \varepsilon_n'(r) + m_n^2 e^{cr - \tanh(cr)} \varepsilon_n(r) = 0. \quad (5.59)$$

essa solução também converge assintoticamente para a Eq. (5.56), não permitindo confinamento dos modos massivos. Nas proximidades da origem as soluções são descritas por funções de Kummer de primeira espécie, as quais nos permitem fixar  $\varepsilon_n(0) = 1.00$  e  $\varepsilon_n'(0) = 0$ . Esta solução para o HC da (5.59) é representada na Fig. 5.9. Verificamos não haver diferenças significativas nas soluções massivas do modelo HC comparados ao do modelo TA. Finalizamos a seção apontando que a análise completa para a equação (5.52), por ser idêntica a da gravidade, já foi bem estudada para o modelo GS na Ref. [119], para o modelo TA nas Ref. [139] e na Ref. [149] para o modelo HC.

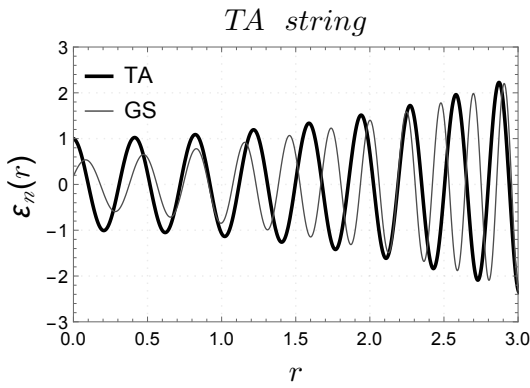


Figura 5.8: Autofunções massivas para o modelo TA (linha espessa) e no GS (linha fina). Fizemos  $c = 0.5$ ,  $R_0 = 1.0$ ,  $m = 15.0$  e para o GS fizemos  $\aleph_1 = \aleph_2 = 5.0$ .

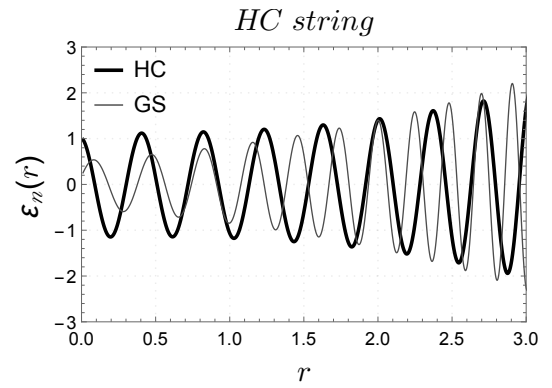


Figura 5.9: Autofunções massivas para o modelo HC (linha espessa) e no GS (linha fina). Fizemos  $c = 0.5$ ,  $R_0 = 1.0$ ,  $m = 15.0$  e para o GS fizemos  $\aleph_1 = \aleph_2 = 5.0$ .

## 5.3 Conclusões do capítulo 5

Como resumo do capítulo:

- Apresentamos um espinor que possui dimensão de massa 1 em 4D (dimensão de massa dois em 6D). Esta característica o concede ser um candidato à matéria escura e também distinguir propriedades exóticas do espaço-tempo. A densidade de lagrangiana deste campo espinorial possui a forma daquela do campo escalar, mas com derivada covariante de espinor.

- Tratando o espinor em 6D, notamos que este campo apresenta características mistas das encontradas em campos bosônicos no Capítulo 3 e para férmions do Capítulo 4. Seu modo zero não é confinado em nenhum dos modelos apresentados, suas expressões para os modos massivos são também não localizadas, porém assumem valores complexos. Desta problemática, apresentamos a possibilidade de utilizar um acoplamento próprio deste tipo de espinor como solução.
- Concluímos da seção 5.2 que o Elko pode ter seu modo zero confinado através de um acoplamento com um termo exótico (característico da estrutura espinorial exótica deste campo). Propusemos uma escolha para este termos que torna a equação diferencial do Elko igual ao do campo escalar e gravidade em 6D. Esta escolha permitiu uma solução constante para o modo zero, a qual é válida para todo modelo 6D cuja os fatores de “*warp*” sejam exponencialmente decrescentes. Além disso, observamos que os modos massivos são divergentes em todos os modelos estudados, entretanto são todos reais.
- Como perspectiva para os conceitos expostos neste capítulo, pretendemos estudar outras formas de acoplamento que não necessariamente o que anula a conexão de spin para o Elko, ou mesmo a modificação da derivada covariante ao se inserir termos de Relatividade Muito Especial (VSR). Como também estudar formas de se utilizar o Elko como fonte para geração de novas geometrias. Além de estudar modificações na lagrangiana que descreve este campo.

## 6 Outros temas relacionados à tese

Neste capítulo apresentaremos em duas seções os trabalhos desenvolvidos no último ano do doutorado [154, 215–217]. A base para a seção 6.1 será nossa publicação da Ref. [154], relativa ao conceito de Entropia Configuracional (“*Configurational/ Informational Entropy*” - CE). Esta CE permite analisar a configuração dos parâmetros de modelos físicos. Aplicaremos o conceito da CE no estudo dos parâmetros de modelos 6D do capítulo 2, como os modelos HC (da seção 2.2.2) e TA (seção 2.2.4). Além disso, comentaremos o trabalho submetido que consta na referência [215] estudando a CE em geometrias de Weyl em 5D. A seção 6.2 está vinculada ao nosso outro trabalho submetido presente na referência [216], onde a localização do campo de calibre e a correção de Coulomb é efetuada nos modelos 5D de sine Gordon e double sine Gordon. Exporemos qualitativamente a perspectiva de se calcular a correção na lei de Coulomb em 4D através dos modos massivos do campo de calibre em 6D, estudados na seção 3.2, interagindo com o modo zero de férmions, detalhado no capítulo 4. Para a correção de Newton em modelos 6D, nosso trabalho a ser submetido na Ref. [217] efetua estes cálculos de maneira numérica através dos modos massivos da gravidade aplicados ao ponto de máximo do tensor energia momento no modelo RC.

### 6.1 Introdução à Entropia Configuracional (CE)

A chamada Teoria da Informação foi introduzida por Shannon em 1948 [218]. Nesta temática, a entropia da informação é definida como uma medida do grau de “aleatoriedade” de um sistema [218]. Em 2012, inspirados por Shannon, Gleiser e Stamatopoulos introduziram um formalismo que permitiu quantificar esta medida de complexidade em sistemas físicos que possuem densidade de energia localizada [219]. A chamada Entropia Configuracional (CE) é calculada com base em operações nas transformadas de Fourier de uma função de quadrado integrável localizada, e assim esta definição é empregada como uma medida de informação [219].

O conceito de CE foi aplicado em diversos ramos da Física, citamos o estudo da estabilidade em objetos compactos como  $Q$ -balls na Ref. [220], na investigação de dinâmicas fora do equilíbrio em sistemas com quebra espontânea de simetria na Ref. [221], no estudo do surgimento



de objetos localizados durante o pré-aquecimento inflacionário em [222] e nas diferentes configurações com perfis espaciais de energia degenerada do artigo [223]. Além disso, é utilizada na análise de estabilidade de vários objetos astrofísicos autogravitantes [224] e em sólitons em cenários de violação de Lorentz (LV) [225–228]. Neste contexto, a CE associada à sólitons viajantes em cenários de LV contribuem não apenas para a fixação de parâmetros arbitrários, como também identificando pontos críticos em transições de fase [229].

A CE foi aplicada em alguns modelos de mundobrana em 5D. Como em cenários espessos de the CE sine-Gordon [230], em modelos de mundobrana de teorias de gravidade  $f(R)$  [231] e  $f(R, T)$  [232], o estudo da CE em cenários de geometrias de Weyl [233] foi elaborado em nosso artigo submetido [215]. Nesta seção, utilizaremos a CE em cenários espessos 6D apresentada em nossa publicação [154]. Cabe a ressalva que há alguns trabalhos em aberto estudando questões sobre a validade da entropia de Shanon para estes modelos contínuos, onde se deseja demonstrar uma definição formal para que esta CE represente de fato uma medida formalmente adequada [234]. Faremos uma breve abordagem introdutória da técnica da CE e sua aplicação em alguns modelos 6D a seguir.

A Entropia Configuracional está relacionada à energia de uma configuração, quanto mais baixa é a energia de um sistema, menor será sua medida de CE [219]. Para calcularmos a CE de um sistema, primeiro devemos fazer a seguinte transformada de Fourier de uma densidade de energia localizada,  $t_0$  [219]:

$$\mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t_0(r) e^{i\omega r} dr,$$

Definimos a fração normalizada desta transformada de Fourier como [219–221, 223]

$$f(\omega) = |\mathcal{F}(\omega)|^2 / \int_0^{\infty} d\omega |\mathcal{F}(\omega)|^2$$

isto nos garante que está quantidade é sempre real e não negativa.

Seguindo, definimos a fração modal normalizada como a razão ao dividirmos a fração normalizada pelo seu valor máximo

$$\tilde{f}(\omega) = f(\omega) / f_{max},$$

este procedimento é adotado apenas para limitar a imagem desta grandeza entre zero e um.

Finalmente, a CE é obtida pela seguinte integração :

$$S(\tilde{f}) = - \int_0^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \ln [\tilde{f}(\omega)]. \quad (6.1)$$

### 6.1.1 Entropia Configuracional nos modelos TA e HC

Aplicaremos a CE na “*Topological Abelian string vortex*” (TA) das Refs. [139, 140]. Para este modelo a densidade de energia pode ser reescrita da Eq. (2.2.4) como

$$t_0(r) = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{b} \right) \left[ 2b \operatorname{sech} \left( \frac{br}{p} \right) \right]^2. \quad (6.2)$$

como verificada na Fig. 2.16, esta quantidade é localizada. A transformada de Fourier desta quantidade gera

$$\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{2\pi p \omega} (5p + 2) \operatorname{csch} \left( \frac{\pi p \omega}{2b} \right), \quad (6.3)$$

e a fração modal normalizada será

$$\tilde{f}(\omega) = \left[ \frac{\pi p \omega}{2b} \operatorname{csch} \left( \frac{\pi p \omega}{2b} \right) \right]^2. \quad (6.4)$$

O perfil da Eq. (6.1) para a configuração da Eq. (6.4) é apresentado nas Fig. 6.1, para  $S(p)$ , e na Fig. 6.2, para  $S(b)$ . [154]

É verificado da Fig. 6.1 que ocorre um máximo na CE  $S(p)$  para  $p_{crit} \approx 0.09b$ . Este resultado delimita a espessura para os modelo TA em duas regiões: o primeiro para  $p \rightarrow 0$ , o que endossa o modelo fino de Gergheta-Shaposhnikov (GS) da Eq. (2.17), e em uma segunda região onde  $p > p_{crit}$  o modelo teria espessura ilimitada. Entretanto, por questões externas aos conceitos apresentados aqui, o modelo TA tem sua espessura limitada pela localização do campo de calibre como  $\frac{5b}{4\pi} q^2 v^2$  [140]. Assim, para  $p \neq 0$  (e fazendo  $q = 1$ ), o intervalo para espessura do modelo TA está restrito à região:

$$0.09b < p < 0.40b. \quad (6.5)$$

Além disso, outro resultado importante está presente na Fig. 6.2, onde o mínimo para CE ocorre quando  $b$  tende a zero. Utilizando a relação da hierarquia da equação (2.4) do capítulo 2,

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty dr F(r) \sqrt{H(r)},$$

ela é exibida no modelo TA com os fatores da Eq. (2.58) ( $F(r) = \operatorname{sech}^{2p}(br/p)$ ,  $H(r) = R_0^2 F(r)$ ) como

$$M_P^2 = \frac{2\pi R_0}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \frac{\Gamma\left(\frac{3p}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3p}{2} + \frac{1}{2}\right)} M_6^4. \quad (6.6)$$

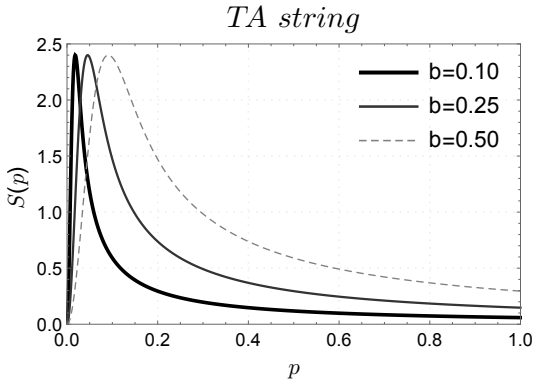


Figura 6.1:  $S(p)$  CE como função do parâmetro de espessura  $p$ , para diferentes valores do parâmetro geométrico  $b$ . Ocorre um ponto crítico em  $p_{crit} \approx 0.09b$ .

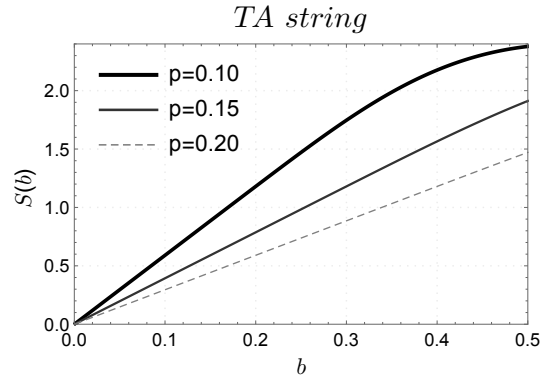


Figura 6.2:  $S(b)$  CE como função do parâmetro geométrico  $b$ , para diferentes espessuras  $p$ . Este resultado concorda com a relação para o problema da hierarquia no TA. Limitamos aqui  $b = 0.5$ , pois faremos  $c = 1.0$  no HC. Esta imposição impede valores de massa maiores do que a massa de Planck.

o caso onde  $M_P \gg M_6$ , é obtido quando  $b$  tende a zero, uma vez que  $p$  é limitado por razões inerentes na localização do campo de calibre. Assim, a CE exhibe o comportamento estável da Fig. 6.2 quando  $b \rightarrow 0$ .

Para a métrica do modelo HC da Eq. (2.25):

$$F(r) = e^{-cr + \tanh(cr)} \quad , \quad H(r) = \left( \frac{\tanh(cr)}{c} \right)^2 e^{-cr + \tanh(cr)} \quad ,$$

onde existe apenas o parâmetro  $c$ . Utilizando a densidade de energia da Eq. (2.15a) teremos

$$t_0(r) = \frac{c^2}{\kappa} \operatorname{sech}^2(cr) \left[ 7 + \frac{13}{2} \tanh(cr) - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^2(cr) \right] \quad . \quad (6.7)$$

Para o HC, notamos da Fig. 2.6 que esta quantidade é localizada. A transformada de Fourier do  $t_0(r)$  para o HC se torna

$$\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{12c^2} (64c^2 + 39ic\omega - 5\omega^2) \operatorname{csch} \left( \frac{\pi\omega}{2c} \right) \quad , \quad (6.8)$$

e sua fração modal normalizada será

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\pi^2 \omega^2 (4096c^4 + 881c^2 \omega^2 + 25\omega^4)}{16384c^6} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\pi\omega}{2c} \right) \quad , \quad (6.9)$$

o gráfico da CE  $S(c)$  obtida pela Eq. (6.9) para o HC é encontrado na Fig. 6.3. Considerando mais uma vez a relação das massas da hierarquia da Eq. (2.4), o HC não apresenta valor analítico

para a integração, entretanto tem seu valor aproximado pelo mesmo resultado do GS da Eq. (2.23) [147]

$$M_P^2 \approx \frac{4\pi R_0}{3} \frac{1}{c} M_6^4, \quad (6.10)$$

o resultado para  $M_P \gg M_6$  é verificado quando  $c$  tende a zero, e a CE concorda com este limite.

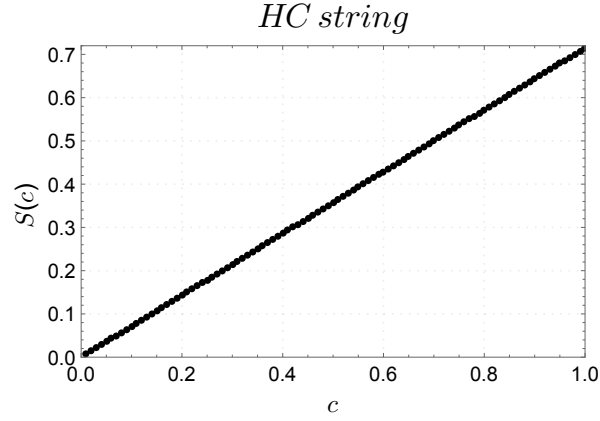


Figura 6.3:  $S(c)$ : Entropia Configuracional para o HC.

Finalizamos a seção comentando que resultados semelhantes foram encontrados no cálculo da CE para modelos espessos de sine-Gordon em 5D [230], onde a espessura foi limitada em função do parâmetro associado à curvatura  $AdS_5$ .

## 6.2 Correção na Lei de Coulomb em 6D

Nesta seção faremos uma análise qualitativa da correção do potencial de Coulomb através do confinamento de campos em 6D. Este procedimento em 5D está presente para os modelos de sine-Gordon (SG) e double sine-Gordon (DSG) no trabalho submetido da Ref. [216]. Entretanto não discutiremos a estrutura dos modelos SG e DSG nesta tese, apresentaremos apenas o resultado desta correção em 5D nas figuras 6.4 e 6.5. Foi verificado que a constante de acoplamento do dÍlaton,  $\lambda$ , (necessária para confinar o modo zero do campo de calibre [216]) regula as correções do potencial de Coulomb em 4D. Nosso  $V_c(x) \sim \hat{q}^2 x^{-1} [1 + \Delta V_c(x)]$ , sendo  $\hat{q}^2$  a carga 4D dos férmions utilizado para esta correção e  $x$  o módulo das distâncias em 4D entre estes férmions.

Apenas a título de informação, citamos que o campo dÍlaton utilizado neste trabalho [215] também está em análise como candidato a explicar partícula de 750 GeV em análise no LHC [239–241].

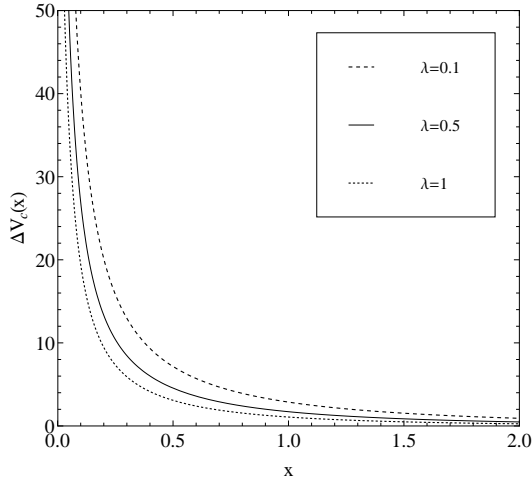


Figura 6.4:  $\Delta V_c(x)$  no modelo SG em função da constante de acoplamento do dilaton  $\lambda$ .

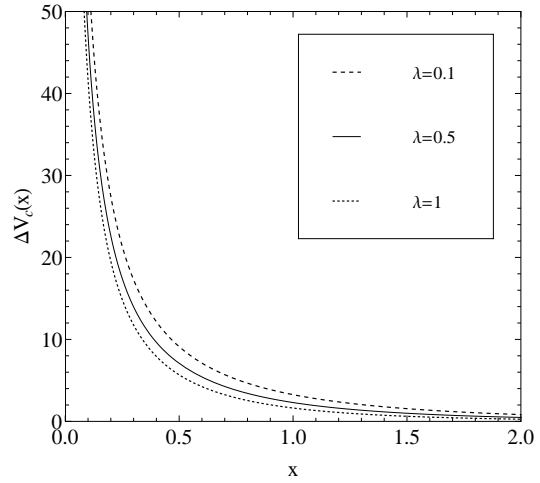


Figura 6.5:  $\Delta V_c(x)$  no modelo DSG em função da constante de acoplamento do dilaton  $\lambda$ .

Para tratarmos desta correção em 6D utilizaremos a ação proposta nas Refs. [235–237] onde há interação entre férmions e o campo de calibre na forma

$$S_I = \int dx^5 \sqrt{-g} (-q_6) \bar{\Psi}(x, z, \theta) \Gamma^M \mathcal{A}_M(x, z, \theta) \Psi(x, z, \theta) \quad (6.11)$$

a quantidade  $q_6$  é uma constante de acoplamento relacionada à carga dos férmions no “Bulk”.

Trataremos estes campos na variável conforme  $z$ . Para a variável  $r$  os campos estão descritos nos capítulos anteriores como para o campo de calibre  $\mathcal{A}_M(x, z, \theta)$  na ação da Eq. (3.74) e decomposto na Eq. (3.81), para férmions  $\Psi(x, r, \theta)$  da ação na Eq. (4.3), onde se reduz a  $\psi_4(x, r, \theta)$  e é decomposto na Eq. (4.15). Verificamos as abordagens de Schrödinger, para os respectivos campos nas seções 4.1.3 e 3.2.1, que devemos fazer duas transformações de variáveis. Na primeira delas modificamos  $r \mapsto z$  através da Eq. (2.71), além da segunda mudança (na variável dependente) que tornam:

$$\psi_4(x, z, \theta) = K_{\frac{1}{2}}(z) \sum_{n,l}^{\infty} \left[ \psi_{R,L}^{(n,l)}(x) \tilde{\alpha}_{R,L}^{(n,l)}(z) \right] e^{il\theta}, \quad (6.12)$$

$$\mathcal{A}_\mu(x^M, \theta) = K(z) \sum_{n,l=0}^{\infty} \mathcal{A}_\mu^{(n,l)}(x^\mu) \rho_n(z) e^{il\theta}, \quad (6.13)$$

onde para o spin 1/2 os  $\tilde{\alpha}_{R,L}(z)$  e sua a função transformadora  $K(z)$  (denotada aqui como  $K_{\frac{1}{2}}(z)$ ) são dados na Eq. (4.51), enquanto para o campo de calibre o valor de seu  $K(z)$  está explicito na Eq. (3.88), o qual apresenta a seguinte relação com seu modo zero pela equação (3.93):

$$K(z) = F^{-\frac{1}{2}}(z) \beta^{-\frac{1}{4}}(z) = \frac{C_0}{\rho_0(z)}, \quad (6.14)$$

sendo  $C_0$  a constante de normalização do modo zero do campo de calibre na variável  $z$  e aqui mudamos a notação do  $\Psi_n^{spin\ 1}(z)$  para  $\rho_n(z)$

Aplicando as decomposições em  $z$  dos campos nas Eq. (6.12) e Eq. (6.13) na ação da Eq. (6.11), onde somente o modo zero fermiônico sobreviverá, teremos para as ondas- $s$  destes campos o resultado

$$S_I = \sum_{n=0}^{\infty} (-q_6) \int dx^4 \left( \bar{\psi}_{R,L}^{(0)}(x) \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu^{(n)}(x) \psi_{R,L}^{(0)}(x) \right) \int dz |\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)|^2 [K(z) \rho_n(z)]. \quad (6.15)$$

podemos separar este somatório em termo dos modos zero e dos modos massivos

$$S_I = \int dx^4 \left[ -\hat{q} \bar{\psi}_{R,L}^{(0)}(x) \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu^{(0)}(x) \psi_{R,L}^{(0)}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n \bar{\psi}_{R,L}^{(0)}(x) \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu^{(n)}(x) \psi_{R,L}^{(0)}(x) \right], \quad (6.16)$$

onde as cargas  $\hat{q}$  e  $\hat{q}_n$  são

$$\hat{q} = q_6 \int dz |\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)|^2 [K(z) \rho_0(z)] = C_0 q_6, \quad (6.17)$$

$$\hat{q}_n = q_6 \int dz |\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)|^2 [K(z) \rho_n(z)]. \quad (6.18)$$

sendo  $\hat{q}$  a carga usual em 4D do férmion preso à brana. Para o resultado presente na Eq. (6.17) utilizamos a relação em Eq. (6.14), além da definição de modo zero fermiônico localizado pela condição (4.56). Concluimos que  $q_6 = \hat{q} C_0^{-1}$  e assim teremos a correção da lei de Coulomb, para o limite o somatório em  $n$  converge para uma integral, como

$$V_c(x) = \frac{\hat{q}^2}{x} + \int_{m_1}^{\infty} dm \frac{\hat{q}_n^2}{x} e^{-mx} = \frac{\hat{e}^2}{x} [1 + \Delta V_c(x)], \quad (6.19)$$

onde  $x$  é o módulo da distância entre as cargas em 4D,  $m_1$  é o primeiro modo massivo excitado (dado pelo primeiro valor quadrado de massa que supera a barreira do potencial quântico análogo para a equação massiva do campo de calibre) e o  $\Delta V_c(x)$  é dado por

$$\Delta V_c(x) = C_0^{-2} \int_{m_1}^{\infty} dm e^{-mx} \left( \int dz |\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)|^2 [K(z) \rho_n(z)] \right)^2. \quad (6.20)$$

Concluimos da Eq. (6.19) que o modo zero do campo de calibre é responsável pela lei de Coulomb em 4D (lembre que a constante de Coulomb  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 \equiv 1$  em nosso sistema de unidades). Já os modos massivos serão responsáveis por alterarem esta lei pelo termo  $\Delta V_c(x)$ .

Trataremos qualitativamente sobre as correções apresentadas na Eq. (6.20). O único termo convergente nesta expressão é o modo zero fermiônico  $\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)$  dado pela equação (4.54) (repetido abaixo):

$$\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z) = C_{0,R,L} \left( F(z)^{\frac{5}{4}} \beta^{\frac{1}{4}}(z) \right)^{\pm\lambda}, \quad (6.21)$$

a forma de  $K(z)$  da equação (6.14) cresce exponencialmente e os modos massivos  $\rho_n(z)$  são funções de Bessel oscilantes (conferir Eq. (3.103)). Assim devemos analisar com cuidado estes termos para que esta correção seja finita. Para isto, ilustrações de maneira genérica estes termos nas figuras Fig.6.6, Fig. 6.7 e Fig. 6.8.

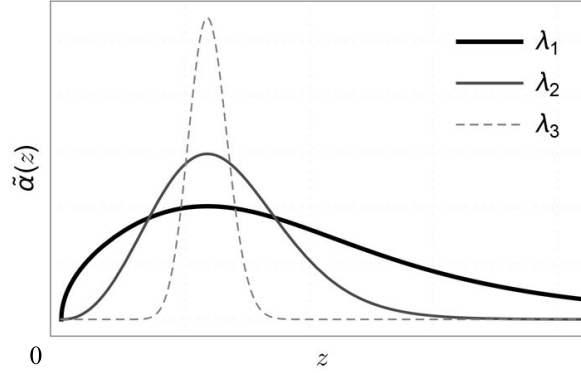


Figura 6.6:  $\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)$ : perfil qualitativo para o modo zero fermiônico com  $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$  em modelos tipo HC ou RC. Verificamos que o comportamento na variável  $z$  é semelhante ao presente na variável  $r$  da Fig. 4.1. Esta expressão para  $\lambda \rightarrow \infty$  representará uma delta de Dirac do tipo  $\delta(z - z_*)$ . Para modelos como o GS ou TA estes modos zeros e a delta de Dirac estarão centralizados na origem  $z_* = 0$ .

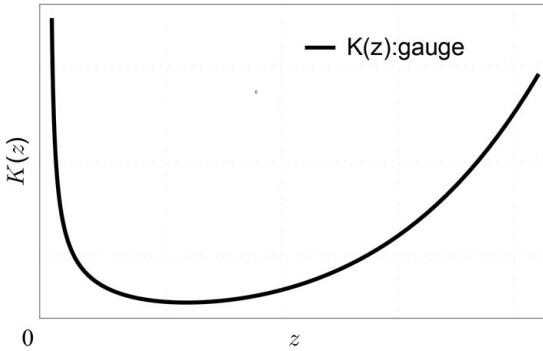


Figura 6.7:  $K(z)$ : função transformadora para o campo de calibre da equação (6.14) para modelos tipo HC ou RC. Ela é proporcional ao inverso do modo zero, logo apresenta divergências na origem (para o caso do HC ou RC, mas não do GS ou TA) e tem crescimento ilimitado independente do modelo.

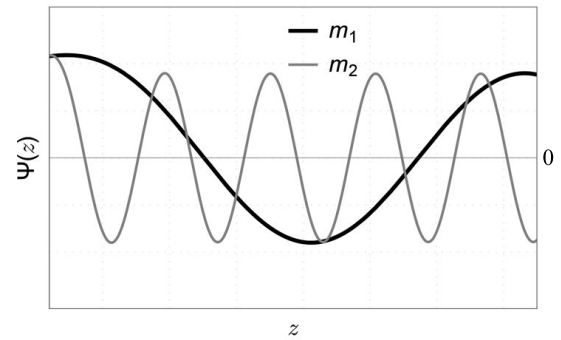


Figura 6.8:  $\rho_n(z)$ : autofunções massivas para o campo de calibre com  $m_2 > m_1$ . O comportamento oscilante faz com estas funções não sejam normalizadas em todo domínio quando  $z \rightarrow \infty$ , sendo assim não localizadas. Os valores fixados em  $z = z_*$  serão fundamentais para o estudo da correção de Coulomb ou de Newton.

Tratando do termo entre parênteses ao quadrado na correção na equação (6.20), com a forma explícita da Eq. (6.21) e da Eq. (6.14), observando que ele será convergente a partir de um determinado valor de  $\lambda$ :

$$\int dz |\tilde{\alpha}_{R,L}^{(0)}(z)| [K(z)\rho_n(z)] = \hat{q} \frac{C_{0L}^2}{C_0} \int dz F^{\frac{5\lambda-1}{2}} \beta^{\frac{2\lambda-1}{4}} \rho_n(z), \quad (6.22)$$

se  $\beta$  for nulo na origem, basta que  $\lambda > 1/2$  para que este termo seja integrável. Para os outros casos basta que  $\lambda > 1/5$ .

Concluimos dos gráficos Fig. 6.6, Fig. 6.7 e Fig. 6.8 que o modo zero fermiônico será o responsável por fixar o valor do ponto  $z = z_*$  onde as funções massivas de gauge serão analisadas. Diferente da correção do potencial de Newton, onde os modos massivos da gravidade no “*Bulk*” são sempre aplicados no ponto onde a brana está centralizada (comumente na origem  $z_* = 0$ ) [90, 173]. Outra diferença para a desvios na lei de Newton e que a lei de Coulomb tem sua validade atestada até ordens de  $10^{-18}$  m [238]. O resultado esperado para esta correção está plotado na figura 6.9.

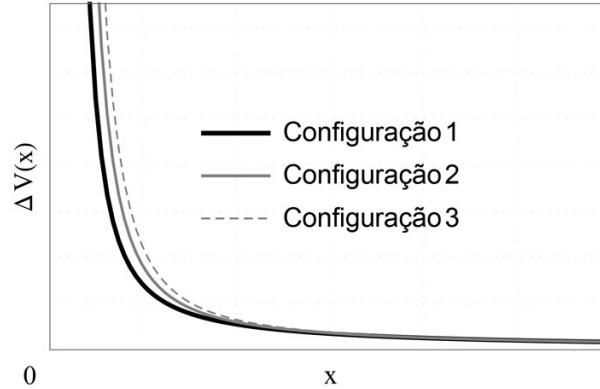


Figura 6.9:  $\Delta V_c(x)$ : resultado esperado para as correções na lei de Coulomb devido à interação do modo zero fermiônico com os modos massivos do campo de calibre em 6D. Este resultado deve ocorrer para grandes valores da constante de acoplamento  $\lambda$  dos férmions.

## 6.3 Conclusões do capítulo 6

Neste capítulo concluímos que:

- A chamada Entropia Configuracional (CE) pode ser utilizada para delimitar parâmetros livres de alguns modelos físicos;



- Analisamos a CE em modelos 6D, onde verificamos que a espessura de modelos é delimitada em termos dos parâmetros geométricos. Verificamos que a CE concorda com os limites impostos pelos parâmetros para a resolução da relação da hierarquia das massas de Planck em modelos 6D [154];
- Resultados semelhantes aos mencionados nos itens anteriores foram obtidos na brana espessa de Weyl [215];
- Apresentamos a perspectiva de se calcular a correção do potencial de Coulomb gerada pela interação do campo eletromagnético e fermiônico em 6D. Concluimos que o modo zero fermiônico desempenha papel fundamental na demarcação do ponto  $z_*$ , o qual filtrará os valores das funções massivas oscilantes que gerarão a correção para a correção na lei de Coulomb em 4D.

$0 \approx ???$

## 7 Conclusões e Perspectivas

Nesta tese apresentamos aspectos gerais de campos em mundobrana não fatorizáveis de seis dimensões. Nossa contribuição se iniciou no capítulo 4. Então faremos uma revisão dos capítulos iniciais, até chegarmos em nossas conclusões.

Introduzimos no capítulo 1 alguns problemas em aberto em Física para motivar a hipótese de dimensões extras. Escolhemos tratar do problema da Hierarquia de Física de Partículas (que consiste na diferença da intensidade da gravidade para a força eletromagnética, a força fraca e a força forte) [1–3], da matéria escura (atribuída a fenômenos que contrariam as leis da gravitação universal) [10, 11] e uma suposta partícula descoberta nos últimos dias de 2015 no LHC [29–33]. Abordamos o problema da hierarquia como um problema de escalas, apresentamos as unidades de Planck e a dimensão canônica de massa. Seguimos apresentando os modelos de Randall-Sundrum (RS) [44, 45] e exibimos como este modelo resolve o problema da hierarquia através de um decaimento exponencial que depende tanto da distância entre as branas como da constante do modelo (função da constante cosmológica e da massa de Planck no “*Bulk*”). Comentamos também sobre o processo de localização de campos em mundobrana, que o modo zero de todos os campos devem ser localizados, mas nenhum modo massivo deve ser confinado. Para a gravidade e o campo de calibre, o modo zero representa o conhecido potencial de Newton e Coulomb em quatro dimensões, respectivamente. Enquanto os modos massivos desempenham correções nestes potenciais [45, 235]. Introduzimos os modelos espessos em 5D [80, 85–91, 91, 92, 92–103, 103–108], como justificativa para corrigir alguns problemas de singularidade e confinamento de campos fermiônicos e campo de calibre em modelos finos em 5D [78]. Citamos várias referências que utilizam dimensões extras para a explicação de matéria e energia escura [49–66], além de outras publicações de 2016 explicando a partícula de massa 750 GeV no contexto de mundobrana [68, 69, 71–73, 73, 74, 74–76].

No capítulo 2 apresentamos modelos em 6D, os quais possuem algumas vantagens sobre os modelos 5D [128, 129, 133–155]. Mesmo em modelos finos 6D, o campo de calibre (dinâmico) é confinado, não há singularidades na curvatura, menos ajustes finos e correção na lei de Newton de menor ordem que em modelos 5D [119, 128, 129]. Comentamos sobre a resolução da hierarquia da massa de neutrinos e sobre a explicação da nova partícula em modelos compactos

6D [130, 156–158]. Ilustramos de maneira geral todos os tensores da equação de Einstein para modelos axiais em 6D. Estudamos o modelo tipo de corda fina de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [119]. Demonstramos que este modelo não atende as condições de regularidade e é um caso de solução de vácuo. Comentamos modelos desenvolvidos em nosso grupo para corrigir o problema de não regularidade e expor geometrias que atendam às condições de energia dominante [142–155]. Entre estes modelos explicitamos, assim como feito para o GS, todos os tensores da equação de Einstein para os modelos “stringcigar” (HC) [147–149, 153–155], “resolved conifold” (RC) [145, 146, 151] e “Torrealba’s topological abelian string-vortex” (TA) [139, 140], além de comentarmos o modelo “brane bounce-type configuration” (BC) [143, 152]. Desenvolvemos termos comparativos, detalhes, vantagens e desvantagens destes modelos quanto ao atendimento das condições de regularidade, resolução da hierarquia e tensor energia momento foram calculados e vários gráficos plotados. Observamos que todos os modelos espessos convergem assintoticamente para o modelo GS. Ao final da seção expusemos a transformação conforme plana para métricas 6D, a qual é útil para tratarmos os campos na abordagem de Schrödinger [37, 173, 174].

Confinamos os campos bosônicos (campo escalar, gravidade e campo vetorial de calibre) no capítulo 3. Verificamos que todos estes campos são espontaneamente localizados em 6D [119, 128, 135, 136]. Observamos que a gravidade e o campo escalar possuem as mesmas equações de movimento em 6D [119, 128, 153], o que também foi verificado em 5D [78]. Os modos zeros localizados destes campo são dados por expressões constantes na variável original [145–150, 152–154], as funções massivas são funções não localizadas de Bessel de ordem  $5/2$  [119, 153]. Apresentamos todos os cálculos de maneira analítica para o GS. Em seguida, o campo de calibre foi localizado de maneira semelhante, comentamos que esta é uma vantagem para modelos em 6D [128, 129]. O modo zero do campo de gauge é também uma constante, enquanto as funções massivas não localizadas são funções de Bessel de ordem  $3/2$  [129, 146, 148, 153]. Para os três campos apresentamos a abordagem de Schrödinger, demonstramos que os potenciais quânticos análogos apresentam forma superssimétrica [153, 185]. Ao final da seção, exibimos os gráficos dos potenciais e modos zeros em todos os modelos axiais tratados no capítulo 2.

Os resultados originais da tese se iniciaram no capítulo (4), onde abordamos o confinamento de férmions de spin  $1/2$  e  $3/2$  em 6D [128, 133, 134, 151–153]. Demonstramos que o modo zero fermiônico não é confinado sem acoplamentos em 6D [128, 133, 134, 151–153]. Propusemos para solução deste problema um acoplamento mínimo com um campo de calibre de fundo [133, 134, 151–153]. Observamos que a componente angular deste gauge foi fundamen-

tal à localização. Utilizamos o modelo HC para tratarmos tanto do confinamento do modo zero de férmions como para o estudo dos modos massivos ressonantes [153]. Para a escolha adotada, verificamos que o modo zero é localizado e suave dependendo do valor da constante de acoplamento [151–153]. Foi concluído também que não é possível normalizar modos de mão direita e esquerda simultaneamente [151–153]. Para os modos massivos, as ordens das funções de Bessel dependem do valor da constante de acoplamento [153]. Obtivemos o espectro de massa para este campo, verificamos que para nossa escolha de calibre não existe *gap* físico de massa (o *gap* foi tratado apenas como consequência de nossa discretização numérica). Detalhamos a forma superssimétrica dos potenciais direito e esquerdo e suas correlações com os campos bosônicos em 6D e em 5D. Obtivemos modos massivos ressonantes para o HC [153]. Ao fim do capítulo, apresentamos resultados de nossos primeiros trabalhos, onde outras escolhas de calibre em outros modelos como o RC [151] e o BC [152] foram abordados. Como perspectiva dos capítulos anteriores, pretendemos estudar a localização de campos em modelos 6D, especialmente do campo fermiônico como explicação para a nova partícula de massa 750 GeV [75, 76].

Um espinor candidato à matéria escura foi o foco do capítulo 5. Apresentamos o Elko e concluímos que em sua localização ele apresenta características comuns tanto aos campos escalar quando aos campos fermiônicos em 6D [155, 194]. Demonstramos que seu modo zero não é naturalmente confinado em seis dimensões e que suas funções massivas são equações diferenciais que assumem valores complexos [155]. Corrigimos estes problemas ao utilizarmos a estrutura não trivial deste espinor e propormos um acoplamento exótico que transforma sua equação diferencial na variável radial nas mesmas equações para campo escalar e gravidade em 6D [153, 155]. O Elko agrega várias aplicações nas áreas de matéria escura [191, 193–196], Cosmologia [201–204] e Relatividade Muito Especial [199]. Comentamos entre nossas perspectivas a de se estudar modelos gerados por este campo espinorial de dimensão de massa um, além de procurarmos modificações interessantes em sua lagrangiana.

No capítulo 6 discutimos sobre o conceito de Entropia Configuracional (CE) [219], e utilizamos as transformadas de Fourier presentes nesta abordagem para encontrar limites para parâmetros de modelos 6D [154]. No modelo TA encontramos um ponto crítico que vincula o parâmetro regulador da espessura e do parâmetro geométrico associado à tensão, constante cosmológica e curvatura do modelo. Concluímos que os modelos finos são endossados por este método, além da CE concordar com o limite onde estes parâmetros explicam o problema da hierarquia das escalas [154]. Apresentamos qualitativamente a correção da lei de Coulomb em 6D. Verificamos que esta correção depende além dos modos massivos do campo de calibre e

do modo zero fermiônico. Quanto consideramos um modo zero de spin  $1/2$  fortemente ligado à brana, verificamos que a expressão para a correção de Coulomb coincide com a da correção de Newton, entretanto não efetuamos o cálculo do valor das autofunções massivas em seu ponto específico da brana, assim não conseguimos discorrer qual será a ordem da correção no potencial Coulomb em 6D em comparação com as correção do potencial de Newton em 6D.

Como perspectivas, pretendemos aplicar os conceitos em modelos 6D desenvolvidos nesta tese para a explicação da massa da suposta nova da partícula de 750 GeV, como brevemente comentado na seção 1.2.1. Além de outras propostas com objetivo de enriquecer o tratamento fenomenológico desta área, como os exemplos apontados ao final da seção 1.2, envolvendo matéria e energia escura e a descrição de neutrinos e outras partículas fundamentais comentadas na seção 2.2.5. A construção de novos modelos através de vórtices exóticos (como apontado nas conclusões do capítulo 5.3 e o cálculo numérico dos resultados qualitativos sobre a correção da lei de Coulomb em modelos 6D apresentados na seção 6.2.

## Referências Bibliográficas

- [1] Randall, Lisa (2006). “Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe’s Hidden Dimensions. Harper Perennial”. ISBN 978-0-06-053109-6. Capítulo 20, p. 385-386.
- [2] Huang, Kerson (2007). “Fundamental Forces Of Nature: the story of gauge fields”. World Scientific Publishing Company. ISBN 9789812706447,9812706445.
- [3] Salam, Abdus (1993). “A Unificação Das Forças Fundamentais”. Ed. Zahar. ISBN 9788571102705.
- [4] David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker (2012). “Fundamentos de Física Vol. 3: Eletromagnetismo”. LTC. ISBN 978-85-216-1905-5.
- [5] Rick Groleau, “Elementary particles”, Nova (2003).<http://www.pbs.org/wgbh/nova/elegant/part-flash.html>; Space Math Group, “The Elementary Particle,” Nasa (2012). <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/universe/6Page85.pdf>
- [6] Barrow, John D. (2002). “The Constants of Nature; From Alpha to Omega-The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe”. New York: Pantheon Books. ISBN 0-375-42221-8.
- [7] Weinberg, Steven (2005). “The Quantum Theory of Fields - Volume 1. Foundations”. University of Texas, Austin. ISBN 9780521670531.
- [8] Arjuna C. Panzera (2012), “Planetas e estrelas - Um guia prático de carta celeste”, Ed. UFMG. ISBN 9788570419422.
- [9] André de Castro Milone, Carlos Alexandre Wuensche, Cláudia Vilega Rodrigues, Francisco José Jablonski Hugo Vicente Capelato, José Williams Vilas-Boas, José Roberto Cecatto, Thyrso Villela Neto (2003). “Introdução à Astronomia e Astrofísica - Observatório Nacional”, Observatório Nacional, INPE-7177-PUD/38.
- [10] M. Drees and G. Gerbier, “Mini-Review of Dark Matter: 2012,” arXiv:1204.2373 [hep-ph].
- [11] Katherine Garrett, Gintaras Duda, “Dark Matter: A Primer”, Adv. Astron. **2011** (2011)

- 968283, arXiv:1006.2483 [hep-ph].
- [12] V. Rubin and W.K. Ford Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions” *Astrophys. J.* **159**, 379 (1970). doi:0.1086/150317
- [13] K. Huang, “Dark Energy and Dark Matter in a Superfluid Universe,” *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1330049 (2013) doi:10.1142/S0217751X13300494
- [14] Jonathan L. Feng, “Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection”, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **48** (2010) 495, arXiv:1003.0904 [astro-ph.CO]. doi:10.1146/annurev-astro-082708-101659
- [15] Zwicky, F. “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helvetica Physica Acta*, Vol. **6**, p. 110-127, 1933, Bibcode:1933AcHPh...6..110Z.
- [16] Babcock, Horace W. “The rotation of the Andromeda Nebula” *Lick Observatory bulletin* ; no. **498** (1939). doi:10.5479/ADS/bib/1939LicOB.19.41B
- [17] R. Narayan and M. Bartelmann, “Lectures on gravitational lensing,” astro-ph/9606001.
- [18] B. Patel *et al.*, “Three Gravitationally Lensed Supernovae Behind CLASH Galaxy Clusters,” *Astrophys. J.* **786**, 9 (2014) doi:10.1088/0004-637X/786/1/9
- [19] R. Massey, T. Kitching and J. Richard, “The dark matter of gravitational lensing,” *Rept. Prog. Phys.* **73**, 086901 (2010) [arXiv:1001.1739 [astro-ph.CO]].
- [20] L. V. E. Koopmans, M. Auger, M. Barnabe, A. Bolton, M. Bradac, L. Ciotti, A. Congdon and O. Czoske *et al.*, “Strong Gravitational Lensing as a Probe of Gravity, Dark-Matter and Super-Massive Black Holes,” arXiv:0902.3186 [astro-ph.CO].
- [21] M. Markevitch, “Chandra observation of the most interesting cluster in the universe,” astro-ph/0511345.
- [22] O. Wantz and E. P. S. Shellard, “Axion Cosmology Revisited,” *Phys. Rev. D* **82**, 123508 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.123508, [arXiv:0910.1066 [astro-ph.CO]].
- [23] I. Papadimitriou, “Holographic Renormalization of general dilaton-axion gravity,” *JHEP* **1108**, 119 (2011) doi:10.1007/JHEP08(2011)119 [arXiv:1106.4826 [hep-th]].
- [24] J. Khoury and A. Weltman, “Chameleon cosmology,” *Phys. Rev. D* **69**, 044026 (2004)

- doi:10.1103/PhysRevD.69.044026 [astro-ph/0309411].
- [25] K. Freese, M. Lisanti and C. Savage, “Annual Modulation of Dark Matter: A Review,” *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1561 (2013) [arXiv:1209.3339 [astro-ph.CO]].
- [26] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints,” *Phys. Rept.* **405**, 279 (2005) [hep-ph/0404175]. doi: 10.1016/j.physrep.2004.08.031
- [27] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results,” *Astron. Astrophys.* **571**, A1 (2014) doi:10.1051/0004-6361/201321529 arXiv:1303.5062 [astro-ph].
- [28] J. Frieman, M. Turner and D. Huterer, “Dark Energy and the Accelerating Universe,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **46**, 385 (2008) doi:10.1146/annurev.astro.46.060407.145243 [arXiv:0803.0982 [astro-ph]].
- [29] The ATLAS collaboration, “Search for resonances decaying to photon pairs in  $3.2 \text{ fb}^{-1}$  of  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$  with the ATLAS detector,” ATLAS-CONF-2015-081.
- [30] CMS Collaboration [CMS Collaboration], “Search for new physics in high mass diphoton events in proton-proton collisions at 13TeV,” CMS-PAS-EXO-15-004.
- [31] Nature News, “*LHC sees hint of boson heavier than Higgs*,” (15 December 2015) | doi:10.1038/nature.2015.19036.
- [32] Marco Delmastro. “*Diphoton searches at ATLAS*”. Mar-2016, ATL-PHYS-SLIDE-2016-135, <http://cds.cern.ch/record/2142098>.
- [33] Pasquale Musella. “Search for high mass diphoton resonances at CMS”. Mar-2016, 51st Rencontres de Moriond, <https://indico.in2p3.fr/event/12279/session/12/contribution/218/material/slides/0.pdf>
- [34] Robert M. Wald, University of Chicago Press, “General Relativity,” 506 pag. ISBN:0226870375, 9780226870373 (2010).
- [35] T. Kaluza, “On the Problem of Unity in Physics,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921**, 966 (1921).
- [36] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and



- English),” *Z. Phys.* **37**, 895 (1926) [*Surveys High Energ. Phys.* **5**, 241 (1986)].
- [37] Gabella, Maxime. “The Randall-Sundrum Model.”, EPFL (2006) <https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf>.
- [38] K. Akama, “An Early Proposal of ‘Brane World’”, *Lect. Notes Phys.* **176**, 267 (1982).
- [39] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem,” *Phys. Lett. B* **125**, 139 (1983). doi: 10.1016/0370-2693(83)91254-6
- [40] C. Wetterich, “The Cosmological Constant And Noncompact Internal Spaces In Kaluza-Klein Theories,” *Nucl. Phys. B* **255**, 480 (1985). doi: 10.1016/0550-3213(85)90148-8
- [41] M. Visser, “An Exotic Class of Kaluza-Klein Models,” *Phys. Lett. B* **159**, 22 (1985) doi:10.1016/0370-2693(85)90112-1 [hep-th/9910093].
- [42] M. Gell-Mann and B. Zwiebach, “Dimensional Reduction Of Space-time Induced By Nonlinear Scalar Dynamics And Noncompact Extra Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **260**, 569 (1985). doi: 10.1016/0550-3213(85)90051-3.
- [43] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315]. doi: 10.1016/S0370-2693(98)00466-3.
- [44] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999). doi: 10.1103/PhysRevLett.83.3370.
- [45] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999). doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4690.
- [46] J. Murata and S. Tanaka, “A review of short-range gravity experiments in the LHC era,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 3, 033001 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/3/033001 [arXiv:1408.3588 [hep-ex]].
- [47] T. A. Wagner, S. Schlamminger, J. H. Gundlach and E. G. Adelberger, “Torsion-balance tests of the weak equivalence principle,” *Class. Quant. Grav.* **29**, 184002 (2012) doi:10.1088/0264-9381/29/18/184002 [arXiv:1207.2442 [gr-qc]].
- [48] S. Baessler, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, U. Schmidt, and H.E. Swanson,

- “Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3585 (1999). doi:10.1103/PhysRevLett.83.003585.
- [49] M. E. Kahil and T. Harko, “Is dark matter an extra-dimensional effect?,” *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 667 (2009) doi:10.1142/S0217732309028667 [arXiv:0809.1915 [gr-qc]].
- [50] T. Matos, M. G. Aspeitia, “Scalar Field Dark Matter from Two Concentric Spherical Branes Universe” *J. Phys.: Conf. Ser.* **315** 012025 (2011)
- [51] P. Nath, “Dark matter in SUGRA, strings and branes,” hep-ph/0610414.
- [52] R. Maartens, “Dark energy from brane-world gravity,” *J. Phys. Conf. Ser.* **68**, 012046 (2007) [*Lect. Notes Phys.* **720**, 323 (2007)], doi:10.1007/978-3-540-71013-4-11 [astro-ph/0602415].
- [53] V. Sahni and Y. Shtanov, “Brane world models of dark energy,” *JCAP* **0311**, 014 (2003). doi: 10.1088/1475-7516/2003/11/014 [astro-ph/0202346].
- [54] V. Sahni, “Cosmological surprises from braneworld models of dark energy,” astro-ph/0502032.
- [55] C. H. Coimbra-Araujo and R. da Rocha, “Gravity with extra dimensions and dark matter interpretation: A straightforward approach,” *ISRN High Energy Phys.* **2013**, 713508 (2013) [arXiv:1203.5736 [gr-qc]].
- [56] C. H. Coimbra-Araujo and P. S. Letelier, “On the stability of universal extradimensional disks,” *Class. Quant. Grav.* **25**, 015001 (2008). doi: 10.1088/0264-9381/25/1/015001.
- [57] K. Saaidi and A. Mohammadi, “Brane Cosmology with the Chameleon Scalar Field in Bulk,” *Phys. Rev. D* **85**, 023526 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.023526 [arXiv:1201.0371 [gr-qc]].
- [58] G. Panotopoulos, “Gravitino dark matter in brane-world cosmology,” *JCAP* **0705**, 016 (2007) doi:10.1088/1475-7516/2007/05/016 [hep-ph/0701233].
- [59] N. M. C. Santos, “Gravitino production in the Randall-Sundrum II braneworld cosmology,” hep-ph/0702200.
- [60] G. Panico, E. Ponton, J. Santiago and M. Serone, “Dark Matter and Electroweak Symmetry Breaking in Models with warped Extra Dimensions,” *Phys. Rev. D* **77**, 115012 (2008),

doi: 10.1103/PhysRevD.77.115012.

- [61] T. Gherghetta and B. von Harling, “A warped Model of Dark Matter,” *JHEP* **1004**, 039 (2010), doi: 10.1007/JHEP04(2010)039.[arXiv:1002.2967[hep-ph]].
- [62] A. D. Medina and E. Ponton, “Warped Radion Dark Matter,” *JHEP* **1109**, 016 (2011), doi: 10.1007/JHEP09(2011)016.
- [63] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper and R. Sundrum, “A Small cosmological constant from a large extra dimension,” *Phys. Lett. B* **480**, 193 (2000), doi: 10.1016/S0370-2693(00)00359-2.
- [64] J. -W. Chen, M. A. Luty and E. Ponton, “A Critical cosmological constant from millimeter extra dimensions,” *JHEP* **0009**, 012 (2000), doi: 10.1088/1126-6708/2000/09/012.
- [65] T. Koivisto, D. Wills and I. Zavala, “Dark D-brane Cosmology,” *JCAP* **1406**, 036 (2014), doi: 10.1088/1475-7516/2014/06/036
- [66] H. M. Lee and A. Papazoglou, “Codimension-2 brane inflation,” *Phys. Rev. D* **80**, 043506 (2009), doi: 10.1103/PhysRevD.80.043506
- [67] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, “Phenomenology of the Randall-Sundrum Gauge Hierarchy Model,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2080 (2000) doi:10.1103/PhysRevLett.84.2080, doi:10.1103/PhysRevLett.84.2080 [hep-ph/9909255].
- [68] S. B. Giddings and H. Zhang, “Kaluza-Klein graviton phenomenology for warped compactifications, and the 750 GeV diphoton excess,” arXiv:1602.02793 [hep-ph].
- [69] A. Falkowski and J. F. Kamenik, “Di-photon portal to warped gravity,” *Phys. Rev. D* **94**, no. 1, 015008 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.015008 arXiv:1603.06980 [hep-ph].
- [70] W. D. Goldberger and M. B. Wise, “Modulus stabilization with bulk fields,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4922 (1999), doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4922
- [71] H. Davoudiasl and C. Zhang, “750 GeV messenger of dark conformal symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 5, 055006 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.055006 [arXiv:1512.07672 [hep-ph]].
- [72] A. Ahmed, B. M. Dillon, B. Grzadkowski, J. F. Gunion and Y. Jiang, “Higgs-radion interpretation of 750 GeV di-photon excess at the LHC,” arXiv:1512.05771 [hep-ph].

- [73] C. Han, H. M. Lee, M. Park and V. Sanz, “The diphoton resonance as a gravity mediator of dark matter,” *Phys. Lett. B* **755**, 371 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.02.040 [arXiv:1512.06376 [hep-ph]].
- [74] Y. Mambrini, G. Arcadi and A. Djouadi, “The LHC diphoton resonance and dark matter,” *Phys. Lett. B* **755**, 426 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.02.049 [arXiv:1512.04913 [hep-ph]].
- [75] C. Cai, Z. H. Yu and H. H. Zhang, “The 750 GeV diphoton resonance as a singlet scalar in an extra dimensional model,” arXiv:1512.08440 [hep-ph].
- [76] C. Csaki and L. Randall, “A Diphoton Resonance from Bulk RS,” arXiv:1603.07303 [hep-ph].
- [77] Flip Tanedo (USLHC), “Drawing the penguin diagram”, Quantum Diaries (blog).  
<http://www.quantumdiaries.org/2012/03/19/dissecting-the-penguin/>
- [78] B. Bajc and G. Gabadadze, “Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de Sitter space,” *Phys. Lett. B* **474**, 282 (2000). [hep-th/9912232].
- [79] M. Gremm, “Four-dimensional gravity on a thick domain wall,” *Phys. Lett. B* **478**, 434 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00303-8 [hep-th/9912060].
- [80] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev and M. Minamitsuji, “Thick brane solutions,” *Rept. Prog. Phys.* **73**, 066901 (2010). [arXiv:0904.1775 [gr-qc]].
- [81] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Do We Live Inside a Domain Wall?,” *Phys. Lett. B* **125**, 136 (1983). doi:10.1016/0370-2693(83)91253-4
- [82] V. A. Rubakov, “Large and infinite extra dimensions: An Introduction,” *Phys. Usp.* **44**, 871 (2001) [*Usp. Fiz. Nauk* **171**, 913 (2001)] [hep-ph/0104152].
- [83] G. Gabadadze, “ICTP lectures on large extra dimensions,” hep-ph/0308112.
- [84] A. Kehagias and K. Tamvakis, “Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce,” *Phys. Lett. B* **504**, 38 (2001).
- [85] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, “Results in Kalb-Ramond field localization and resonances on deformed branes,” *Europhys. Lett.* **88**, 41001 (2009) doi:10.1209/0295-5075/88/41001 [arXiv:0912.1029 [hep-th]].

- [86] W. T. Cruz, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, “Kalb-Ramond field localization on the Bloch brane,” *Eur. Phys. J. C* **73**, 2523 (2013) doi:10.1140/epjc/s10052-013-2523-6 [arXiv:1303.1096 [hep-th]].
- [87] W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Resonances in gravitational scenario given by deformed branes,” *Eur. Phys. J. C* **71**, 1709 (2011). doi:10.1140/epjc/s10052-011-1709-z
- [88] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, “Graviton resonances on deformed branes,” *Europhys. Lett.* **96**, 31001 (2011) doi:10.1209/0295-5075/96/31001 [arXiv:1110.3104 [hep-th]].
- [89] W. T. Cruz, L. J. S. Sousa, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, “Graviton resonances on two-field thick branes,” *Phys. Lett. B* **730**, 314 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.01.061 [arXiv:1310.4085 [hep-th]].
- [90] D. F. S. Veras, W. T. Cruz, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, “Gravity localization on hybrid branes,” *Phys. Lett. B* **754**, 201 (2016).
- [91] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, “Gauge field localization on a dilatonic deformed brane,” *Phys. Lett. B* **686**, 259 (2010). doi:10.1016/j.physletb.2010.02.064
- [92] W. T. Cruz, A. R. P. Lima and C. A. S. Almeida, “Gauge field localization on the Bloch Brane,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 4, 045018 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.045018 [arXiv:1211.7355 [hep-th]].
- [93] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, “Fermions on deformed thick branes,” *Eur. Phys. J. C* **71**, 1790 (2011) doi:10.1140/epjc/s10052-011-1790-3 [arXiv:1110.4651 [hep-th]].
- [94] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, “Fermion localization and resonances on two-field thick branes,” *Phys. Rev. D* **79**, 125022 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.125022 [arXiv:0901.3543 [hep-th]].
- [95] W. T. Cruz, R. V. Maluf, L. J. S. Sousa and C. A. S. Almeida, “Gravity localization in sine-Gordon braneworlds,” *Annals Phys.* **364**, 25 (2016) doi:10.1016/j.aop.2015.10.016 [arXiv:1412.8492 [hep-th]].
- [96] M. Dias, J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, “Thick Braneworlds and the Gibbons-Kallosh-Linde No-go Theorem in the Gauss-Bonnet Framework,” *Europhys. Lett.* **110**,

- 20004 (2015) doi:10.1209/0295-5075/110/20004 [arXiv:1504.04243 [gr-qc]].
- [97] R. Casadio, J. Ovalle and R. da Rocha, “Classical Tests of General Relativity: Brane-World Sun from Minimal Geometric Deformation,” *Europhys. Lett.* **110**, 40003 (2015) doi:10.1209/0295-5075/110/40003 [arXiv:1503.02316 [gr-qc]].
- [98] R. A. C. Correa and R. da Rocha, “Configurational entropy in brane-world models,” *Eur. Phys. J. C* **75**, no. 11, 522 (2015) doi:10.1140/epjc/s10052-015-3735-8 [arXiv:1502.02283 [hep-th]].
- [99] A. E. Bernardini, R. T. Cavalcanti and R. da Rocha, “Spherically Symmetric Thick Branes Cosmological Evolution,” *Gen. Rel. Grav.* **47**, no. 1, 1840 (2015) doi:10.1007/s10714-014-1840-x [arXiv:1411.3552 [gr-qc]].
- [100] D. Bazeia, J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, “Regular Bulk Solutions and Black Strings from Dynamical Braneworlds with Variable Tension,” *Phys. Rev. D* **90**, no. 4, 047902 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.047902 [arXiv:1401.6985 [hep-th]].
- [101] D. Bazeia, J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, “Black holes in realistic branes: black string-like objects?,” *Phys. Lett. B* **721**, 306 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.03.010 [arXiv:1303.2243 [gr-qc]].
- [102] G. German, A. Herrera–Aguilar, D. Malagon–Morejon, I. Quiros and R. da Rocha, “Study of field fluctuations and their localization in a thick braneworld generated by gravity nonminimally coupled to a scalar field with the Gauss-Bonnet term,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 2, 026004 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.026004 [arXiv:1301.6444 [hep-th]].
- [103] A. E. R. Chumbes, J. M. Hoff da Silva and M. B. Hott, “A model to localize gauge and tensor fields on thick branes,” *Phys. Rev. D* **85**, 085003 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.085003 [arXiv:1108.3821 [hep-th]].
- [104] R. A. C. Correa, A. de Souza Dutra and M. B. Hott, “Fermion localization on degenerate and critical branes,” *Class. Quant. Grav.* **28**, 155012 (2011) doi:10.1088/0264-9381/28/15/155012 [arXiv:1011.1849 [hep-th]].
- [105] L. B. Castro and L. A. Meza, “Fermion localization on branes with generalized dynamics,” *Europhys. Lett.* **102**, 21001 (2013) doi:10.1209/0295-5075/102/21001 [arXiv:1011.5872 [hep-th]].

- [106] D. Bazeia and A. R. Gomes, “Bloch brane,” *JHEP* **0405**, 012 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/05/012 [hep-th/0403141].
- [107] D. Bazeia, A. S. Lobão, L. Losano, R. Menezes and G. J. Olmo, “Braneworld solutions for modified theories of gravity with nonconstant curvature,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 12, 124006 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.124006 [arXiv:1505.06315 [hep-th]].
- [108] D. Bazeia, A. R. Gomes and L. Losano, “Gravity localization on thick branes: A Numerical approach,” *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 1135 (2009) [arXiv:0708.3530 [hep-th]].
- [109] Z. H. Zhao, Y. X. Liu and H. T. Li, “Fermion localization on asymmetric two-field thick branes,” *Class. Quant. Grav.* **27**, 185001 (2010) doi:10.1088/0264-9381/27/18/185001 [arXiv:0911.2572 [hep-th]].
- [110] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, C. E. Fu and Y. S. Duan, “Fermion Localization and Resonances on A de Sitter Thick Brane,” *Phys. Rev. D* **80**, 065019 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.80.065019 [arXiv:0904.1785 [hep-th]].
- [111] A. Tofighi and M. Moazzen, “Temperature effects on the fermion localization in smooth space generated by a bounce,” *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, no. 24, 1450126 (2014). doi:10.1142/S0217751X14501267
- [112] G. Alencar, R. R. Landim, C. R. Muniz and R. N. Costa Filho, “Nonminimal couplings in Randall-Sundrum scenarios,” *Phys. Rev. D* **92**, no. 6, 066006 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.066006 [arXiv:1502.02998 [hep-th]].
- [113] G. Alencar, C. R. Muniz, R. R. Landim, I. C. Jardim and R. N. Costa Filho, “Photon mass as a probe to extra dimensions,” *Phys. Lett. B* **759**, 138 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.05.062 [arXiv:1511.03608 [hep-th]].
- [114] da Silva, José Euclides Gomes. Título: “Sobre modificações na estrutura geométrica em cenários de branas”. Data da defesa: 16/10/2013. 131 folhas. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Ceará.
- [115] R. Gregory, “Nonsingular global string compactifications,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2564 (2000) doi:10.1103/PhysRevLett.84.2564 [hep-th/9911015].
- [116] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, “Solving the hierarchy problem with noncompact extra dimensions,” *Phys. Lett. B* **470**, 52 (1999) doi: 10.1016/S0370-2693(99)01331-3

- [117] I. Olasagasti and A. Vilenkin, “Gravity of higher dimensional global defects,” *Phys. Rev. D* **62**, 044014 (2000) doi: 10.1103/PhysRevD.62.044014
- [118] A. Chodos and E. Poppitz, “Warp factors and extended sources in two transverse dimensions,” *Phys. Lett. B* **471**, 119 (1999) doi: 10.1016/S0370-2693(99)01331-3
- [119] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, “Localizing gravity on a string-like defect in six dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 240 (2000) doi: 10.1103/PhysRevLett.85.240
- [120] “Gravity localization on string-like defects in codimension two and the AdS/CFT correspondence,” E. Ponton and E. Poppitz, *JHEP* **0102**, 042 (2001) doi: 10.1088/1126-6708/2001/02/042
- [121] I. Navarro and J. Santiago, “Gravity on codimension 2 brane worlds,” *JHEP* **0502**, 007 (2005) doi: 10.1088/1126-6708/2005/02/007
- [122] I. Navarro, “Codimension two compactifications and the cosmological constant problem,” *JCAP* **0309**, 004 (2003) doi: 10.1088/1475-7516/2003/09/004
- [123] I. Navarro and J. Santiago, “Unconventional cosmology on the (thick) brane,” *JCAP* **0603**, 015 (2006) doi: 10.1088/1475-7516/2006/03/015[hep-th/0505156]
- [124] I. Navarro and J. Santiago, “Higher codimension brane worlds from intersecting branes,” *JHEP* **0404**, 062 (2004) doi: 10.1088/1126-6708/2004/04/062
- [125] G. Kofinas, “On braneworld cosmologies from six dimensions, and absence thereof,” *Phys. Lett. B* **633**, 141 (2006) doi: 10.1016/j.physletb.2005.11.064[hep-th/0506035]
- [126] J. M. Cline, J. Descheneau, M. Giovannini and J. Vinet, “Cosmology of codimension two brane worlds,” *JHEP* **0306**, 048 (2003). doi: 10.1088/1126-6708/2003/06/048
- [127] J. Vinet and J. M. Cline, “Can codimension-two branes solve the cosmological constant problem?,” *Phys. Rev. D* **70**, 083514 (2004) doi: 10.1103/PhysRevD.70.083514
- [128] I. Oda, “Localization of matters on a string-like defect,” *Phys. Lett. B* **496**, 113 (2000) doi: 10.1016/S0370-2693(00)01284-3
- [129] I. Oda, “Bosonic fields in the string - like defect model,” *Phys. Rev. D* **62**, 126009 (2000) doi: 10.1103/PhysRevD.62.126009



- [130] J. M. Frère, M. Libanov, S. Mollet and S. Troitsky, “Neutrino hierarchy and fermion spectrum from a single family in six dimensions: realistic predictions,” *JHEP* **1308**, 078 (2013) doi: 10.1007/JHEP08(2013)078
- [131] M. T. Arun and P. Saha, “Gravitons in multiply *warped* scenarios - at 750 GeV and beyond,” arXiv:1512.06335 [hep-ph].
- [132] M. T. Arun and D. Choudhury, “Bulk gauge and matter fields in nested warping: I. the formalism,” *JHEP* **1509**, 202 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)202 [arXiv:1501.06118 [hep-th]].
- [133] Y. X. Liu, L. Zhao and Y. S. Duan, “Localization of Fermions on a String-like Defect,” *JHEP* **0704**, 097 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/04/097 [hep-th/0701010].
- [134] Y. X. Liu, L. Zhao, X. H. Zhang and Y. S. Duan, “Fermions in self-dual vortex background on a string-like defect,” *Nucl. Phys. B* **785**, 234 (2007) doi:10.1016/j.nuclphysb.2007.05.018 [arXiv:0704.2812 [hep-th]].
- [135] P. Tinyakov and K. Zuleta, “On the Thin string limit of the 6-D stringlike defect model,” *Phys. Rev. D* **64**, 025022 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.64.025022.
- [136] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, “Warped compactification on Abelian vortex in six-dimensions,” *Nucl. Phys. B* **619**, 615 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00520-X [hep-th/0104118].
- [137] M. Giovannini, “Gauge field localization on Abelian vortices in six-dimensions,” *Phys. Rev. D* **66**, 044016 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.66.044016 [hep-th/0205139].
- [138] M. Giovannini, J. V. Le Be and S. Riederer, “Zero modes of six-dimensional Abelian vortices,” *Class. Quant. Grav.* **19**, 3357 (2002) doi:10.1088/0264-9381/19/12/317 [hep-th/0205222].
- [139] R. S. Torrealba S., “Exact Abelian Higgs Vortices as 6D Brane Worlds,” arXiv:0803.0313 [hep-th].
- [140] R. S. Torrealba, “Localizing Gauge Fields on a Topological Abelian String and the Coulomb Law,” *Phys. Rev. D* **82**, 024034 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.024034 [arXiv:1003.4199 [hep-th]].

- [141] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, D. Singleton and S. Aguilar-Rudametkin, “6D thick branes from interacting scalar fields,” *Phys. Rev. D* **77**, 044006 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.044006 [hep-th/0703043].
- [142] L. J. S. Sousa, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Tensor gauge field localization on a string-like defect,” *Phys. Lett. B* **711** (2012) 97 doi:10.1016/j.physletb.2012.03.057 [arXiv:1203.5149 [hep-th]].
- [143] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva and C. A. S. Almeida, “Brane bounce-type configurations in a string-like scenario,” *Phys. Lett. B* **718**, 579 (2012) doi:10.1016/j.physletb.2012.09.070 [arXiv:1209.6016 [hep-th]].
- [144] L. J. S. Sousa, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Six-dimensional standing-wave braneworld with normal matter as source,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 6, 064006 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.064006 [arXiv:1311.5848 [hep-th]].
- [145] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Scalar field localization on 3-branes placed at a *warped* resolved conifold,” *Phys. Rev. D* **84**, 085027 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.84.085027 [arXiv:1110.1597 [hep-th]].
- [146] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Gauge vector field localization on a 3-brane placed in a *warped* transverse resolved conifold,” *Phys. Rev. D* **87**, 125010 (2013).
- [147] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, “Gravity localization in a string-cigar braneworld,” *Class. Quant. Grav.* **30**, 025005 (2013). doi: 10.1088/0264-9381/30/2/025005 e-Print: arXiv:1208.2364.
- [148] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, “Gauge fields in a string-cigar braneworld,” *Phys. Lett. B* **747**, 517 (2015). doi: 10.1016/j.physletb.2015.06.042 e-Print: arXiv:1501.00632 [hep-th].
- [149] D. F. S. Veras, J. E. G. Silva, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Gravitational Kaluza-Klein modes in the String-Cigar Braneworld,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 6, 065031 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.065031 [arXiv:1409.3180 [hep-th]].
- [150] J. C. B. Araujo, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, “A smoothed string-like braneworld in six dimensions,” *Eur. Phys. J. C* **75**, no. 3, 127 (2015)

- doi:10.1140/epjc/s10052-015-3350-8 [arXiv:1410.3164 [hep-th]]. Eur. Phys. J. C **75**, 127 (2015).
- [151] D. M. Dantas, D. F. S. Veras, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Fermionic Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld*,” Phys. Rev. D **92**, no. 10, 104007 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104007 [arXiv:1506.07228 [hep-th]].
- [152] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “*Vector and fermion fields on a bouncing brane with a decreasing warp factor in a string-like defect*,” Phys. Lett. B **731**, 64 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.02.010 [arXiv:1402.1855 [hep-th]].
- [153] D. M. Dantas, D. F. S. Veras, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Fermionic Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld*,” Phys. Rev. D **92**, no. 10, 104007 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104007 [arXiv:1506.07228 [hep-th]].
- [154] R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and R. da Rocha, “*Bounds on topological Abelian string-vortex and string-cigar from information-entropic measure*,” Phys. Lett. B **755**, 358 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.02.038 [arXiv:1601.00076 [hep-th]].
- [155] D. M. Dantas, R. da Rocha and C. A. S. Almeida, “*Exotic Elko on String-Like Defects in Six Dimensions*,” arXiv:1512.07888 [hep-th] (em análise no Classical and Quantum Gravity).
- [156] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and D. Singleton, “*Fermion Generations from ‘Apple-Shaped’ Extra Dimensions*,” JHEP **0708**, 033 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/08/033 [arXiv:0706.0676 [hep-th]].
- [157] S. Aguilar and D. Singleton, “*Fermion generations, masses and mixings in a 6D brane model*,” Phys. Rev. D **73**, 085007 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.085007 [hep-th/0602218].
- [158] J. Garriga and M. Porrati, “*Football shaped extra dimensions and the absence of self-tuning*,” JHEP **0408**, 028 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/08/028 [hep-th/0406158].
- [159] C. P. Burgess, C. de Rham, D. Hoover, D. Mason and A. J. Tolley, “*Kicking the rugby ball: Perturbations of 6D gauged chiral supergravity*,” JCAP **0702**, 009 (2007) doi:10.1088/1475-7516/2007/02/009 [hep-th/0610078].
- [160] A. Kehagias, “*A Conical tear drop as a vacuum-energy drain for the solu-*

- tion of the cosmological constant problem,” *Phys. Lett. B* **600**, 133 (2004) doi:10.1016/j.physletb.2004.08.067 [hep-th/0406025].
- [161] D. Choudhury and S. SenGupta, “Living on the edge in a spacetime with multiple warping,” *Phys. Rev. D* **76**, 064030 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.064030[hep-th/0612246].
- [162] W. Israel, “Line sources in general relativity,” *Phys. Rev. D* **15**, 935 (1977). doi:10.1103/PhysRevD.15.935
- [163] R. Gregory, “Gravitational Stability of Local Strings,” *Phys. Rev. Lett.* **59**, 740 (1987). doi:10.1103/PhysRevLett.59.740.
- [164] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, “The Exact Metric About Global Cosmic Strings,” *Phys. Lett. B* **215**, 67 (1988). doi:10.1016/0370-2693(88)91072-6.
- [165] V. P. Frolov, W. Israel and W. G. Unruh, “Gravitational Fields of Straight and Circular Cosmic Strings: Relation Between Gravitational Mass, Angular Deficit, and Internal Structure,” *Phys. Rev. D* **39**, 1084 (1989). doi:10.1103/PhysRevD.39.1084.
- [166] M. Christensen, A. L. Larsen and Y. Verbin, “Complete classification of the string - like solutions of the gravitating Abelian Higgs model,” *Phys. Rev. D* **60**, 125012 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.60.125012 [gr-qc/9904049].
- [167] B. de Carlos and J. M. Moreno, “A Cigar - like universe,” *JHEP* **0311**, 040 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/11/040 [hep-th/0309259].
- [168] P. P. Orth, P. Chandra, P. Coleman and J. Schmalian, “Emergent Critical Phase and Ricci Flow in a 2D Frustrated Heisenberg Model,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 237205 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.109.237205 [arXiv:1206.5740 [cond-mat.str-el]].
- [169] N. Lashkari and A. Maloney, “Topologically Massive Gravity and Ricci-Cotton Flow,” *Class. Quant. Grav.* **28**, 105007 (2011). [arXiv:1007.1661 [hep-th]].
- [170] M. Headrick and T. Wiseman, “Ricci flow and black holes,” *Class. Quant. Grav.* **23**, 6683 (2006) doi:10.1088/0264-9381/23/23/006 [hep-th/0606086].
- [171] A. A. Abrikosov, “On the Magnetic properties of superconductors of the second group,” *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1442 (1957)].

- [172] H. B. Nielsen and P. Olesen, “Vortex Line Models for Dual Strings,” Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973). doi:10.1016/0550-3213(73)90350-7.
- [173] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, “Universal aspects of gravity localized on thick branes,” Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00271-6 [hep-th/0001033].
- [174] C. Csaki, J. Erlich, and T. J. Hollowood, “Quasilocalization of Gravity on a Brane by Resonant Modes”, Phys. Rev. Lett. **84**, 5932 (2000).
- [175] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1972. ISBN 0-486-61272-4.
- [176] Veras, Diego Franklin de Souza . Título: “Abordagens numéricas no estudo de localização de campos em branas”. Data da defesa: 01/08/2016. 172 folhas. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Ceará.
- [177] S. L. Parameswaran, S. Randjbar-Daemi and A. Salvio, “Gauge Fields, Fermions and Mass Gaps in 6D Brane Worlds,” Nucl. Phys. B **767**, 54 (2007) doi:10.1016/j.nuclphysb.2006.12.020 [hep-th/0608074].
- [178] C. Wetterich, “Chiral Fermion Generations From Higher Dimensional Gravity,” Nucl. Phys. B **244**, 359 (1984). doi:10.1016/0550-3213(84)90318-3.
- [179] P. Budinich, “From the geometry of pure spinors with their division algebras to fermion’s physics,” Found. Phys. **32**, 1347 (2002). [hep-th/0107158].
- [180] T. Gherghetta and A. Pomarol, “Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS,” Nucl. Phys. B **586**, 141 (2000).
- [181] T. Gherghetta and A. Pomarol, “A Warped supersymmetric standard model,” Nucl. Phys. B **602**, 3 (2001).
- [182] S. J. Huber and Q. Shafi, “Fermion masses, mixings and proton decay in a Randall-Sundrum model,” Phys. Lett. B **498**, 256 (2001).
- [183] Y. Grossman and M. Neubert, “Neutrino masses and mixings in nonfactorizable geometry,” Phys. Lett. B **474**, 361 (2000).
- [184] G. Watson, “A treatise on the theory of the Bessel functions,” Cambridge University

- Press, 1996.
- [185] F. Cooper and B. Freedman, “Aspects of Supersymmetric Quantum Mechanics,” *Annals Phys.* **146**, 262 (1983).
- [186] C. V. Sukumar, “Supersymmetric Quantum Mechanics of One-Dimensional Systems,” *J. Phys. A* **18**, 2917 (1985).
- [187] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” *Physics Reports* **251**, (1995) 267-385.
- [188] Pierluigi Amodio and Giuseppina Settanni, “A Matrix Method for the solution of Sturm-Liouville Problems”, *J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math* vol.6 no. 1-2, 2011, pp.1-13.
- [189] B.V. Numerov, “A method of extrapolation of perturbations”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. **84**, p.592-592 (1924);  
B.V. Numerov, “Note on the numerical integration of  $d^2x/dt^2 = f(x, t)$ ,” *Astronomische Nachrichten*, Vol. **230**, p.359 (1927).
- [190] R. Rahman, “Helicity-1/2 mode as a probe of interactions of a massive Rarita-Schwinger field,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 6, 065030 (2013)[arXiv:1111.3366 [hep-th]].
- [191] D. V. Ahluwalia and D. Grumiller, “Dark matter: A Spin one half fermion field with mass dimension one?,” *Phys. Rev. D* **72**, 067701 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.067701 [hep-th/0410192].
- [192] D. V. Ahluwalia, “On a local mass dimension one Fermi field of spin one-half and the theoretical crevice that allows it,” arXiv:1305.7509 [hep-th].
- [193] C. Y. Lee, “Self-interacting mass-dimension one fields for any spin,” *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, no. 11, 1550048 (2015).
- [194] Y. X. Liu, X. N. Zhou, K. Yang and F. W. Chen, “Localization of 5D Elko Spinors on Minkowski Branes,” *Phys. Rev. D* **86**, 064012 (2012).
- [195] M. Dias, F. de Campos, J. M. Hoff da Silva, “Exploring light Elkos signal at accelerators,” *Phys. Lett. B* **706**, 352 (2012)
- [196] D. V. Ahluwalia, C. Y. Lee, D. Schrittt and T. F. Watson, “Elko as self-interacting fermionic dark matter with axis of locality,” *Phys. Lett. B* **687**, 248 (2010).

- [197] B. Agarwal, P. Jain, S. Mitra, A. C. Nayak and R. K. Verma, “ELKO fermions as dark matter candidates,” *Phys. Rev. D* **92**, 075027 (2015).
- [198] R. da Rocha and J. M. Hoff da Silva, “Hawking Radiation from Elko Particles Tunnelling across Black Strings Horizon,” *Europhys. Lett.* **107**, 50001 (2014).
- [199] Andrew G. Cohen, and Sheldon L. Glashow, “Very Special Relativity,” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 021601 (2006).
- [200] A. E. Bernardini, R. da Rocha, “Dynamical dispersion relation for ELKO dark spinor fields,” *Phys. Lett. B* **717**, 238 (2012).
- [201] R. da Rocha, A. E. Bernardini, J. M. Hoff da Silva, “Exotic Dark Spinor Fields,” *JHEP* **04**, 110 (2011).
- [202] J. M. Hoff da Silva, S. H. Pereira, “Exact solutions to Elko spinors in spatially flat Friedmann-Robertson-Walker spacetimes,” *JCAP* **03**, 009 (2014).
- [203] A. Basak, J. R. Bhatt, S. Shankaranarayanan, K. V. Prasantha Varma, “Attractor behaviour in ELKO cosmology,” *JCAP* **04**, 025 (2013).
- [204] S. Kouwn, J. Lee, T. H. Lee, P. Oh, “ELKO spinor model with torsion and cosmology,” *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1350121 (2013).
- [205] S. J. Avis and C. J. Isham, “Lorentz gauge invariant vacuum functionals for quantized spinor fields in non-simply connected space-times,” *Nucl. Phys. B* **156**, 441 (1979).
- [206] C. J. Isham, “Twisted quantum fields in a curved space-time,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **362**, 383 (1978).
- [207] S. W. Hawking, “Spacetime foam,” *Nucl. Phys. B* **144**, 349 (1978).
- [208] H. R. Petry, “Exotic spinors in superconductivity,” *J. Math. Phys.* **20**, 231 (1979).
- [209] S. J. Avis and C. J. Isham, “Generalized Spin Structures on Four-Dimensional Space-times,” *Comm. Math. Phys.* **72**, 103 (1980).
- [210] I. C. Jardim, G. Alencar, R. R. Landim and R. N. Costa Filho, “Solutions to the problem of ELKO spinor localization in brane models,” *Phys. Rev. D* **91**, 085008 (2015).
- [211] I. C. Jardim, G. Alencar, R. R. Landim and R. N. Costa Filho, “Comment on ?Localiza-

- tion of 5D Elko Spinors on Minkowski Branes?,” *Phys. Rev. D* **91**, 048501 (2015).
- [212] T. Asselmeyer-Maluga and C. H. Brans, “How to include fermions into General relativity by exotic smoothness,” *Gen. Rel. Grav.* **47**, 30 (2015).
- [213] C. H. Coronado Villalobos, J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, “Questing mass dimension 1 spinor fields,” *Eur. Phys. J. C* **75**, 266 (2015).
- [214] J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, “Unfolding Physics from the Algebraic Classification of Spinor Fields,” *Europhys. Lett.*, **100**, 11001 (2012).
- [215] R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and P. H. R. S. Moraes, “*Information-entropic measure in the Weyl pure geometrical thick brane*, arXiv:1607.01710 [hep-th] (em análise no *Phys. Lett. B*).
- [216] W. T. Cruz, R. V. Maluf, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “*Multiresonance modes in sine-Gordon brane models*,” arXiv:1512.07890 [hep-th] (em análise no *Annals of Physics*).
- [217] J. C. B. Araújo, D.F.S. Veras (Ceara U.), D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “*Gravity fluctuations in a brane placed at a transverse warped resolved conifold and corrections to the Newtonian potential*, arXiv:[hep-th] (em análise no *Phys. Lett. B*).
- [218] C. E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communication,” *The Bell System Technical J.* **27**, 379 (1948).
- [219] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, “Entropic Measure for Localized Energy Configurations: Kinks, Bounces, and Bubbles,” *Phys. Lett. B* **713**, 304 (2012) doi:10.1016/j.physletb.2012.05.064 [arXiv:1111.5597 [hep-th]].
- [220] M. Gleiser and D. Sowiński, “Information-Entropic Stability Bound for Compact Objects: Application to Q-Balls and the Chandrasekhar Limit of Polytropes,” *Phys. Lett. B* **727**, 272 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.10.005 [arXiv:1307.0530 [hep-th]].
- [221] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, “Information Content of Spontaneous Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. D* **86**, 045004 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.045004
- [222] M. Gleiser and N. Graham, “Transition To Order After Hilltop Inflation,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 8, 083502 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.083502 [arXiv:1401.6225 [astro-



ph.CO]].

- [223] R. A. C. Correa, A. de Souza Dutra and M. Gleiser, “Information-Entropic Measure of Energy-Degenerate Kinks in Two-Field Models,” *Phys. Lett. B* **737**, 388 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.09.002 [arXiv:1409.0029 [hep-th]].
- [224] M. Gleiser and N. Jiang, “Stability Bounds on Compact Astrophysical Objects from Information-Entropic Measure,” *Phys. Rev. D* **92**, no. 4, 044046 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.044046 [arXiv:1506.05722 [gr-qc]].
- [225] R. A. C. Correa, R. da Rocha and A. de Souza Dutra, “Entropic information for travelling solitons in Lorentz and CPT breaking systems,” *Annals Phys.* **359**, 198 (2015) doi:10.1016/j.aop.2015.04.027 [arXiv:1501.02000 [hep-th]].
- [226] A. d. S. Dutra and R. A. C. Correa, “Traveling solitons in Lorentz and CPT breaking systems,” *Phys. Rev. D* **83**, 105007 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.83.105007 [arXiv:1012.0268 [hep-th]].
- [227] R. A. C. Correa and A. de Souza Dutra, “Coupled Scalar Fields Oscillons and Breathers in Some Lorentz Violating Scenarios,” *Adv. High Energy Phys.* **2015**, 673716 (2015) doi:10.1155/2015/673716 [arXiv:1212.4448 [hep-th]].
- [228] R. A. C. Correa, R. da Rocha and A. de Souza Dutra, “D-Oscillons in the Standard Model-Extension,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 12, 125021 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.125021 [arXiv:1504.04038 [hep-th]].
- [229] M. Gleiser and D. Sowinski, “Information-Entropic Signature of the Critical Point,” *Phys. Lett. B* **747**, 125 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.05.058 [arXiv:1501.06800 [cond-mat.stat-mech]].
- [230] R. A. C. Correa and R. da Rocha, “Configurational entropy in brane-world models,” *Eur. Phys. J. C* **75**, no. 11, 522 (2015) doi:10.1140/epjc/s10052-015-3735-8 [arXiv:1502.02283 [hep-th]].
- [231] R. A. C. Correa, P. H. R. S. Moraes, A. d. S. Dutra and R. da Rocha, “Information content in  $F(R)$  brane models with nonconstant curvature,” *Phys. Rev. D* **92**, no. 12, 126005 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.126005 [arXiv:1508.04493 [hep-th]].
- [232] R. A. C. Correa and P. H. R. S. Moraes, “Configurational entropy in  $f(R, T)$  brane

- models,” *Eur. Phys. J. C* **76**, no. 2, 100 (2016) doi:10.1140/epjc/s10052-016-3952-9.
- [233] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, “Localization of 4-D gravity on pure geometrical thick branes,” *Phys. Rev. D* **73**, 084022 (2006). [Erratum-ibid. *D* **77**, 049901 (2008)] [hep-th/0603184];  
Y. -X. Liu, X. -H. Zhang, L. -D. Zhang and Y. -S. Duan, “Localization of Matters on Pure Geometrical Thick Branes,” *JHEP* **0802**, 067 (2008).
- [234] A. E. Bernardini and R. da Rocha, “Entropic information of dynamical AdS/QCD holographic models,” arXiv:1605.00294 [hep-th].
- [235] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y. X. Liu, D. Malagon-Morejon and R. R. Mora-Luna, “Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb’s law on a pure de Sitter thick braneworld,” *Phys. Rev. D* **87** (2013) 9, 095011.
- [236] R. Cartas-Fuentevilla, A. Escalante, G. Germán, A. Herrera-Aguilar and R. R. Mora-Luna, “Coulomb’s law corrections and fermion field localization in a tachyonic de Sitter thick braneworld,” *JCAP* **1605**, no. 05, 026 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/05/026 [arXiv:1412.8710 [hep-th]].
- [237] P. Q. Hung and N. K. Tran, “Kaluza-Klein structure associated with fat brane,” *Phys. Rev. D* **69**, 064003 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.064003 [hep-ph/0309115].
- [238] K. Hagiwara *et al.* “Review of Particle Properties,” (Particle Data Group Collaboration), *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002).
- [239] E. Megias, O. Pujolas and M. Quiros, “On dilatons and the LHC diphoton excess,” *JHEP* **1605**, 137 (2016) doi:10.1007/JHEP05(2016)137 [arXiv:1512.06106 [hep-ph]].
- [240] J. Cao, L. Shang, W. Su, Y. Zhang and J. Zhu, “Interpreting the 750 GeV diphoton excess in the Minimal Dilaton Model,” *Eur. Phys. J. C* **76**, no. 5, 239 (2016) doi:10.1140/epjc/s10052-016-4098-5 [arXiv:1601.02570 [hep-ph]].
- [241] V. P. Goncalves and W. K. Sauter, “Probing the dilaton in central exclusive processes at the LHC,” *Phys. Rev. D* **91**, 035004 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.035004.

