



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DANILO DA SILVA BORGES

UM ESTUDO SOBRE A INJEÇÃO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES

FORTALEZA

2016

DANILO DA SILVA BORGES

UM ESTUDO SOBRE A INJEÇÃO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo

Coorientador: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona

FORTALEZA

2016

DANILO DA SILVA BORGES

UM ESTUDO SOBRE A INJEÇÃO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 02/08/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Geraldo de Melo Pinheiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

- B731e Borges, Danilo da Silva .
 Um Estudo Sobre a Injeção de Fios Magnéticos em Cavidades / Danilo da Silva
Borges. – Fortaleza, 2016.
 55 f.:il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2016.
 Área de Concentração: Física da Matéria Condensada
 Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo
1. esferas,. 2. magnéticas,. 3. empacotamento,. 4. neodímio. I. Título.

CDD 530

*A minha família
e
a todos que me
ajudaram.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pelas oportunidades que me foram ofertadas, pela paciência, força de vontade e perseverança que me foi dada durante essa trajetória. Agradeço aos meus pais Maria Luiza Barbosa da Silva e Hidelberto Luiz Gomes Lacerda de Freitas Veras por terem acreditado nas minhas escolhas e terem me apoiado e ajudado em todos os momentos. Além da minha família muitas pessoas contribuíram para que esse trabalho pudesse ser concretizado, sendo assim, não posso deixar de citar o nome dessas pessoas:

- Professor Ascânio Dias Araújo por ter sido um orientador paciente e atencioso, pelo qual tenho um profundo respeito por todo conhecimento por ele ensinado.
- Professor Humberto de Andrade Carmona pela coorientação e por ter dedicado grande parte do seu tempo no desenvolvimento desse projeto.
- Francisco Geraldo de Melo Pinheiro pela imensa ajuda na montagem do experimento.
- Wandemberg Paiva Ferreira por ter cedido um lugar para mim em sua sala de pós-graduandos.
- Aos Professores Nildo Loiola Dias e Marcos Antônio Araújo Silva que me ajudaram em pequenos detalhes na parte experimental, mas que ajudou bastante na construção desse trabalho.
- A Luciana Gonçalves Barroso Teixeira e ao Paulo Roberto Barroso Teixeira por terem sempre me acolhido como um filho, sendo um alicerce para meus estudos.
- Ao meu amor Palloma Gonçalves Barroso Teixeira por ter sido compreensiva durante as minhas ausências e pelas palavras que me mantinham na luta.
- Ao meu amigo Dr. Diego Rabelo da Costa pelas conversas produtivas na sala do GTMC.
- Ao CNPq

RESUMO

No presente trabalho realizamos uma série de experimentos acerca do processo de injeção de um fio magnético no interior de uma cavidade circular rígida com o objetivo de obter uma melhor compreensão sobre as características das morfologias geradas dependendo das condições iniciais. Nossos resultados indicam a possibilidade de formação de duas morfologias que apresentam características bastante distintas. Quando os dois fios injetados em posições diametralmente opostos na cavidade apresentam dipolos magnéticos que apontam na mesma direção, porém em sentidos opostos, observamos a formação do padrão tipo *Espiral*. Já no caso dos dois fios apresentarem dipolos que apontam na mesma direção e sentido, os padrões de empacotamentos são do tipo *Loop*. Em seguida, realizamos uma série de análises estatísticas com bases nas imagens das estruturas formadas durante a injeção do fio na cavidade. Como resultados destas análises observamos que a morfologia da estrutura no caso do empacotamento tipo *Loop* apresentava uma distribuição de tamanhos de laços que exibe um comportamento em lei de potência quanto a quantidade de laços formados em função da fração de ocupação da cavidade ϕ do tipo $N_l \propto \phi^\alpha$. O expoente α que governa o comportamento em lei de potência é bastante diferente dos expoentes encontrados para o caso de empacotamento de fios. Acreditamos que esta diferença se deve a presença de forças de longo alcance que estão presentes em sistemas magnéticos.

Palavras-chave: esferas, magnéticas, empacotamento, neodímio

ABSTRACT

In this work we created some experiments concerning about injection process of magnetic wire into a rigid circular cavity in order to get a better understanding about characteristics of the morphologies generate under certain initial conditions. Our results implies the possibility of formation of two morphologies that have different characteristics. When the two wires injected diametrically opposite, but have magnetic dipoles in opposite direction we achieve spiral morphology. In the case of the two wires injected diametrically opposite, but have magnetic dipoles in same direction we achieve loop morphology. So we make a series of statistical analysis based on the image structures, form during the injection of the wire in the cavity. As a result these analyzes we found that the loop morphology showed a size ties distribution like power law in function of the packing fraction ϕ , behaving as $N_l \propto \phi^\alpha$. The exponent α rules the behavior of a power law is quite different from those found in other works about packing wires. We believe the difference comes from to the presence of long-range forces present in magnetic systems.

Keywords: sphere. magnetic. packing. neodymium. .

Lista de Figuras

- 1 Foto do aparato experimental. (a) Mesa com as duas chapas de acrílico com as várias cavidades dispostas de forma concêntricas. (b) Visão frontal do desenho da cavidade com a indicação dos vários raios possíveis para a cavidade. Marcação dos parafusos que fixam as paredes da cavidade por meio de parafusos de aço inox. Localizadas em posições diametralmente opostas podemos verificar as duas catracas que exercem a força necessária para a injeção dos fios no interior da cavidade. 17
- 2 Detalhes do experimento. (a) Suporte da câmera, garantindo um posicionamento frontal da cavidade cilíndrica. (a) – (b) O aparato em perspectiva, mostrando que há uma tampa retangular de acrílico confinando as esferas dentro das cavidades. (c) Mostra os dois motores acoplados na mesa, a fim de injetar as esferas. (d) Duas fontes independentes da PHYWE, alimentando os motores com 4V, gerando uma velocidade angular de $\omega \approx 0.23rad/s$. (e) Usamos duas polias dentadas, desenhadas para que seus dentes encaixasse na metade das esferas. (f) Imagem ampliada do motor, destacada em um círculo preto em (c). 18
- 3 Sequência de imagens durante o processo de injeção das esferas magnéticas no interior da cavidade cilíndrica caso dipolos desalinhados (sentidos contrários). As diferentes imagens *a – f* correspondem aos diferentes estágios da injeção. Podemos observar que a medida que os imãs adentram na cavidade, estes vão se organizando formando um padrão de empacotamento. Para uma melhor clareza quanto a direção e sentido dos momentos magnéticos das esferas, optamos por pintar as esferas para indicar a direção e o sentido do dipolo. A cor indica a direção do dipolo da respectiva esfera, sendo o vermelho relativo ao polo Norte e azul ao polo Sul. Esta sequência de imagens corresponde ao processo de injeção cuja a condição inicial foi para o caso onde as duas filas posicionadas para a injeção estão com os momentos de dipolos desalinhados gerando inicialmente uma força de repulsão entre as duas filas 19

4	Sequência de imagens durante o processo de injeção das esferas magnéticas no interior da cavidade cilíndrica caso dipolos alinhados (mesmo sentido). As diferentes imagens $a - f$ correspondem aos diferentes estágios da injeção. Podemos observar que a medida que os imãs adentram na cavidade, estes vão organizando-se formando um padrão de empacotamento. Esta sequência corresponde ao processo de injeção na condição inicial onde as duas filas estão com os momentos de dipolos alinhados ocorrendo uma atração entre as duas filas.	21
5	Representação das duas possíveis configurações iniciais para o empacotamento de fios magnéticos. Em (a), os momentos de dipolo dos imãs são alinhados na mesma direção e sentido. Em (b) os momentos tem a mesma direção mas o lado direito da fila tem os momentos em sentido contrário. Observe que em ambos os casos foi feita uma translação de duas unidades de diâmetro para direita para estabelecer uma quebra na simetria no problema. Este procedimento apenas evita que o ponto de encontro dos dois lados opostos (fios) não ocorra no centro da cavidade mas ligeiramente deslocado.	22
6	A figura ilustra como uma mudança nas condições iniciais de entrada pode conduzir o sistema a diferentes configurações de empacotamento. A figura (a) apresenta como condição inicial um alinhamento entre os dois fios formados no início do processo de injeção. No caso da figura (b) temos uma condição inicial diferente onde as duas extremidades do fio estão com os dipolos apontando em sentidos opostos. Ao lado de cada figura ilustrando a condição inicial, temos os respectivos padrões formados ao final do processo de empacotamento considerando cada uma destas condições iniciais. O dois padrões obtidos foram nomeados neste trabalho levando em conta alguns aspectos presentes em cada um deles. Assim denominamos estes pelos nomes de padrão <i>Loop</i> (a) e <i>Espiral</i> (b). Em detalhe temos uma linha preta compostas por setas que indica a direção dos dipolos de cada uma das esferas que formam o fio magnético.	23
7	Figura mostrando que uma imagem pode ser interpretada como uma matrix de dimensão $I_{x \times y \times 3}$, onde cada elemento I_{xyz} contém valores inteiros que vão de 0 a 255. Na figura o pixel de coordenada $x = 357$ e $y = 307$ tem intensidades iguais a $I_{357,307,1} = 95$, $I_{357,307,2} = 93$ e $I_{357,307,3} = 212$, correspondendo as intensidades de vermelho, verde e azul respectivamente.	24

8	Passo a passo da estimativa do centro de massa das esferas. (a) Transformamos o vídeo em quadros. (b) Seleccionamos a região de interesse. (c) Convertemos a imagem para preto e branco (binarizamos), dessa maneira aumentamos a visualização do contorno das esferas. (d) Usando a transformação de Hough [18, 14, 13] na imagem binarizada, conseguimos fazer uma estimativa das coordenadas do centro de massa das esferas.	25
9	Passo a passo da estimativa da orientação dos dipolos. (a) As esferas tiveram um de seus hemisférios pintados, a fim de dar uma estimativa para a direção dos dipolos. (b) Usando a transformação de Hough fazemos a estimativa dos centros das esferas. (c) – (d) Usando a segmentação de imagens por cor extraímos as regiões dos hemisférios e calculamos os seus respectivos centros de massa. As regiões estão destacadas em cores azul e vermelho. (e) – (f) Dado os centros de massa dos centros e dos hemisférios podemos estimar a direção dos dipolos. . . .	26
10	Representação dos vetores nas equações.	29
11	Gráfico em escala logarítmica do número de laços N_l obtidos em função da fração de empacotamento ϕ . Os laços foram contabilizados pela análise direta das imagens, ou seja, por inspeção. Esse resultado corresponde à condição inicial onde as duas filas de esferas apresentavam os dipolos alinhados. Os pontos representam os resultados experimentais enquanto que a linha sólida corresponde ao melhor ajuste linear obtido para a curva. Considerando que o comportamento é do tipo $N_l \propto \phi^\alpha$ e com base no ajuste podemos inferir que $\alpha \approx 1.52$	40
12	Figura Ilustrando como é realizado o cálculo utilizando a função $g(r)$	42
13	Gráficos da função $g(r)$ em função da distância r do centro de cada esfera normalizada pelo diâmetro da esfera. O gráfico superior corresponde ao caso do empacotamento tipo <i>Loop</i> enquanto que o inferior ao empacotamento tipo <i>Espiral</i> . Os resultados para $g(r)$ no tipo <i>Loop</i> e <i>Espiral</i> , apresentam características típicas de redes quadradas e triangulares, respectivamente. Sendo os valores de r nos picos P_1 (gráfico <i>Loop</i> e <i>Espiral</i>), distâncias características presentes em redes que apresentam uma estrutura do tipo quadrada e triangular.	43
14	Grafos associados aos dois padrões de empacotamento observados após a injeção de esferas no interior da cavidade. O grafo da esquerda (a) representa um padrão <i>Espiral</i> enquanto que o grafo da direita (b) representa o padrão <i>Loop</i> . Os vértices no grafo representam as posições das esferas enquanto que as ligações representam contato entre esferas vizinhas.	44

15	Gráfico em escala $\log - \log$ para o número de contatos das esferas N_c em função da fração de ocupação ϕ da cavidade. O número de contatos foi obtido por meio da contagem direta do número de vizinhos, tendo como base os grafos obtidos para cada um dos empacotamentos analisados. Os resultados apresentados foram obtidos através da análise dos grafos de 9 experimentos realizados para cada um dos empacotamentos do tipo <i>Loop</i> e <i>Espiral</i>	45
16	Gráfico da energia magnética E_m acumulada no sistema em função do parâmetro ϕ . Média realizada em 9 experimentos. A energia E_m é expressa em Joules. Os resultados foram obtidos considerando nove configurações distintas de empacotamento para os dois casos analisado. Em detalhe na figura é mostrado exemplos de dois empacotamentos ao final do processo de injeção para os dois tipos: (a) <i>Loop</i> e (b) <i>Espiral</i> . Podemos perceber por meio do detalhe na figura que não existe frustração quanto ao emparelhamento dos dipolos na condição de contato.	47
17	Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade obtida ao final do processo de injeção considerando os dois casos investigados (a) <i>Espiral</i> e (c) <i>Loop</i> . Em (b) e (d) são mostrados os respectivos padrões das linhas de campo obtidos por meio do uso de limalhas de ferro.	48
18	Padrão do campo magnético gerado pelo empacotamento tipo <i>Loop</i> . Em (a) podemos verificar as linhas de campo magnético B e suas direções. No gráfico (b) mostramos a superfície gerada para a intensidade do campo magnético e em (c) a sua projeção no plano xy . O padrão das cores está distribuído em escala logarítmica para a intensidade do campo B calculado em G (Gauss), sendo o vermelho relacionado ao um campo mais intenso e o azul ao campo mais fraco.	49
19	Padrão do campo magnético gerado pelo empacotamento tipo <i>Espiral</i> . Em (a) podemos verificar as linhas de campo magnético e suas direções. No gráfico (b) mostramos a superfície gerada para a intensidade do campo magnético B e em (c) a sua projeção no plano xy . O padrão das cores está distribuído em escala logarítmica para a intensidade do campo B calculado em G (Gauss), sendo o vermelho relacionado ao um campo mais intenso e o azul ao campo mais fraco.	50
20	Gráfico da velocidade de rotação ω_z durante o processo de injeção do fio para o caso de um empacotamento do tipo <i>Espiral</i> . A medida que o fio vai sendo injetado no interior da cavidade aumenta a fração de ocupação ϕ a estrutura formada vai girando com uma velocidade cada vez maior. A velocidade angular calculada com relação a um eixo que passa pelo centro de massa do sistema.	52

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	EXPERIMENTOS	16
2.1	Introdução	16
2.2	Aparato Experimental	16
2.3	O Experimento	20
2.4	O Tratamento das Imagens	24
2.5	Propriedades do Neodímio	27
3	TEORIA SOBRE DIPOLOS MAGNÉTICOS	28
3.1	Introdução	28
3.2	Campo Magnético de um Dipolo Pontual	28
3.3	Equivalência ente Esfera Magnetizada e Dipolo Pontual	34
3.4	Energia entre Dipolos	35
3.5	Módulo do Momento de Dipolo da Esfera	36
4	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	37
4.1	Introdução	37
4.2	Caracterização de laços	38
4.3	Padrão do Empacotamento	41
4.4	Grafo Associado	44
4.5	Número de Contatos	45
4.6	Energia Magnética do Sistema	46
4.7	Padrão do Campo Magnético	48
4.8	Velocidade Angular do Sistema	51

5 CONCLUSÕES E PESPECTIVAS	53
-----------------------------------	-----------

REFERÊNCIAS	55
--------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

As estruturas formadas em empacotamento de esferas indênticas é um tema de relevância reconhecida em vários ramos da ciência e da indústria e investigações, tanto do ponto de vista teórico como experimental têm atraído grande interesse nas últimas décadas [1, 2, 3]. Nesta perspectiva, o entendimento sobre o processo de empacotamento de esferas rígidas se estabelece como de fundamental importância, quando o interesse reside em determinar aspectos da estrutura macroscópica de meios porosos e/ou materiais com uma estrutura essencialmente granular. Este tipo de empacotamento é atualmente estudado em física e em matemática do ponto de vista de simulações computacionais e também através de experimentos simples e inovativos.

Um empacotamento formado por meio de um material granular é constituído na maioria dos casos por partículas sólidas, macroscópicas e discretas. Os constituintes que compõem o material granular devem ser grande o suficiente para que eles não estejam sujeitos a flutuações de movimento térmicos, assim, o limite de tamanho inferior para grãos de um material granular é de cerca de $0.1\mu\text{m}$ [1, 2, 3]. Uma característica marcante presente nos materiais granulares é a perda de energia sempre que as suas partículas constituintes interagem entre si por meio de colisões ou arrasto.

Existem materiais granulares não coesivos, onde só há interação de contato e os coesivos, como grãos molhados, eletrizados ou magnetizados, que compartilham outras formas de interação além do contato. Quando os grãos que formam o material apresentam algum tipo de interação que possibilita a formação de ligações entre as suas partes constituintes, o problema do empacotamento destes materiais ganha um ingrediente a mais na sua complexidade. Nesta categoria de materiais coesivos, podemos incluir a esferas confeccionadas a partir de materiais que apresentam propriedades magnéticas, como por exemplo, as esferas fabricadas a partir de neodímio. Estas esferas apresentam um forte dipolo magnético que permitem que estas possam se agrupar na forma de fios ou mantas [4, 5]. No caso do agrupamento na forma de um fio estes, quando deformados, apresentam um comportamento muito semelhante ao observado na deformação de fios elásticos feitos de metal ou outros constituintes que exibem alguma flexibilidade. Estes resistem a uma deformação tentando manter a integridade da estrutura.

Trabalhos recentes da literatura que abordam este tema, do ponto de vista de simulação

computacional e experimental, mostram que quando fios feitos de materiais elásticos são introduzidos em cavidades, a morfologia da estrutura formada exibe uma série de características bastante peculiares que dependem essencialmente, da elasticidade do material, da forma da cavidade e das forças de atrito presentes no processo de injeção [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Como resultados mais relevantes nestes trabalhos podemos destacar, a construção de um diagrama de fase sobre a morfologia de fios introduzidos, usando o atrito fio-fio e a plasticidade do material, como também a relação da força injetada pela fração de empacotamento. Resultados obtidos por meio de experimentos e simulações computacionais, atestam para a existência de leis de escalas e dimensões fractais nas estruturas formadas durante o empacotamento destes fios.

Motivados por esta variedade de propriedades presentes neste processo e pela importância do mesmo em vários ramos da ciência que envolvem empacotamento de objetos em cavidades, especialmente empacotamentos de fios em cavidades, resolvemos estudar por meio de experimentos o processo de injeção de esferas magnéticas agrupadas na forma de fio magnético em cavidades circulares rígidas. Diferente de trabalhos anteriores [11, 8, 7, 6] onde foi tratado o empacotamento de fios flexíveis contínuos em cavidades circulares rígidas, optamos por investigar nesta dissertação o empacotamento de fios que possuem propriedades magnéticas. Este fio além das forças de contatos existentes entre as esferas magnéticas (grãos), apresenta interação de longo alcance devido a presença de magnetização em suas partes constituintes, fato que acrescenta um ingrediente a mais no processo de formação das estruturas durante a injeção do fio.

Os resultados apresentados neste trabalho foram todos obtidos por meio de experimentos. A partir das imagens capturadas durante os experimentos, foram feitas uma variedade de análises, utilizando ferramentas amplamente difundidas na área de Mecânica Estatística, sobre as estruturas de empacotamentos resultantes do processo de injeção deste fio magnético em cavidades.

Esta dissertação está estruturada na seguinte forma. No primeiro Capítulo apresentamos todo o material experimental utilizado e descrevemos como os experimentos foram realizados incluindo detalhes sobre o mesmo. Em seguida, no segundo Capítulo, introduzimos alguns conceitos teóricos pertinentes que serão úteis no entendimento das interações do tipo magnéticas. Introduzimos o conceito de dipolo e as formas de interação entre estes, as forças magnéticas e a energia acumulada em um sistema magnético. Em seguida, com base em algumas simplificações explicamos como estes conceitos teóricos podem ser aplicados para o caso de uma esfera magnética. No terceiro Capítulo, temos toda a parte de resultados e discussões. Neste capítulo apresentaremos algumas comparações com o empacotamento de fios elásticos e destacamos quais foram as características fundamentais encontradas. Finalmente apresentamos no último Capítulo as conclusões e as possibilidades de trabalhos futuros.

2 EXPERIMENTOS

2.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma descrição minuciosa do experimento realizado. Descreveremos todos os passos utilizados durante a realização dos experimentos e obtenção dos resultados. Apresentaremos em detalhes o material que compõe o fio magnético e os equipamentos empregados na realização dos experimentos. Finalizaremos mostrando alguns resultados dos empacotamentos obtidos.

2.2 Aparato Experimental

Para realizar os experimentos de empacotamento, utilizamos como objetos a serem empacotados, esferas de neodímio com 5 mm de diâmetro, magnetizada axialmente. Devido a presença de um alto campo magnético as esferas podem se unir formando um fio magnético que apresenta resistência a deformação. Uma vez formado o fio por meio do contato destas esferas, estes foram injetados no interior de uma cavidade que apresenta uma estrutura muito similar a uma célula de Helle Shaw. A cavidade é basicamente formada pela disposição de duas placas de acrílico de 6 mm de espessura dispostas face a face. Entretanto, a placa inferior apresenta uma cavidade circular rígida que pode ser ajustada por meio da mudança de partes circulares internas (conforme a Fig.1). Estas partes internas podem ser perfeitamente encaixadas de forma concêntrica e fixadas na placa superior por meio de parafusos de aço inox. Este ajuste permitir uma variação no raio da cavidade com os valores a seguir: $R_0 = 50$ mm, $R_1 = 100$ mm, $R_2 = 150$ mm e $R_3 = 200$ mm. Esta cavidade tem altura de 6 mm, formando uma região cilíndrica onde as esferas podem entrar sem resistência, até que o empacotamento máximo seja atingido.

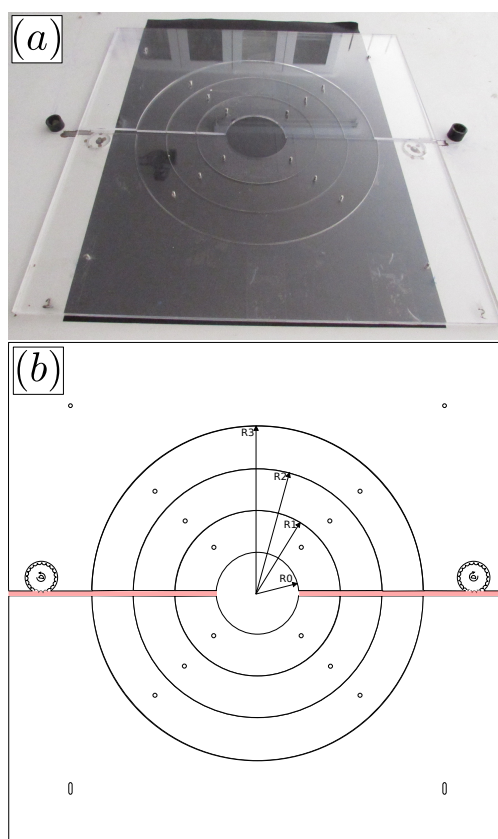


Figura 1: Foto do aparato experimental. (a) Mesa com as duas chapas de acrílico com as várias cavidades dispostas de forma concêntricas. (b) Visão frontal do desenho da cavidade com a indicação dos vários raios possíveis para a cavidade. Marcação dos parafusos que fixam as paredes da cavidade por meio de parafusos de aço inox. Localizadas em posições diametralmente opostas podemos verificar as duas catracas que exercem a força necessária para a injeção dos fios no interior da cavidade.

A injeção dos fios é feita através de um canal de aproximadamente 6 mm de espessura localizado na região central ao longo do diâmetro da cavidade que comunica a região externa com a interna. As esferas são inicialmente agrupadas na forma de um fio e este fio conectado a uma polia dentada localizada na extremidade do canal. Por questão de simetria, existem duas catracas posicionadas diametralmente opostas nas extremidades do canal, permitindo que o fio seja injetado na cavidade através de lados opostos. Cada uma destas polias está conectada a motores idênticos alimentados por meio de uma fonte de corrente controlável. Este ajuste da corrente fornecida aos motores, permite um controle da velocidade de rotação dos motores, estabelecendo desta forma um controle preciso sobre a velocidade de injeção das esferas na cavidade. Um fundo preto opaco e liso é colocado em baixo do aparato, a fim de dar um maior contraste nos imãs e reduzir ao máximo a força de atrito entre as esferas e o fundo da cavidade.

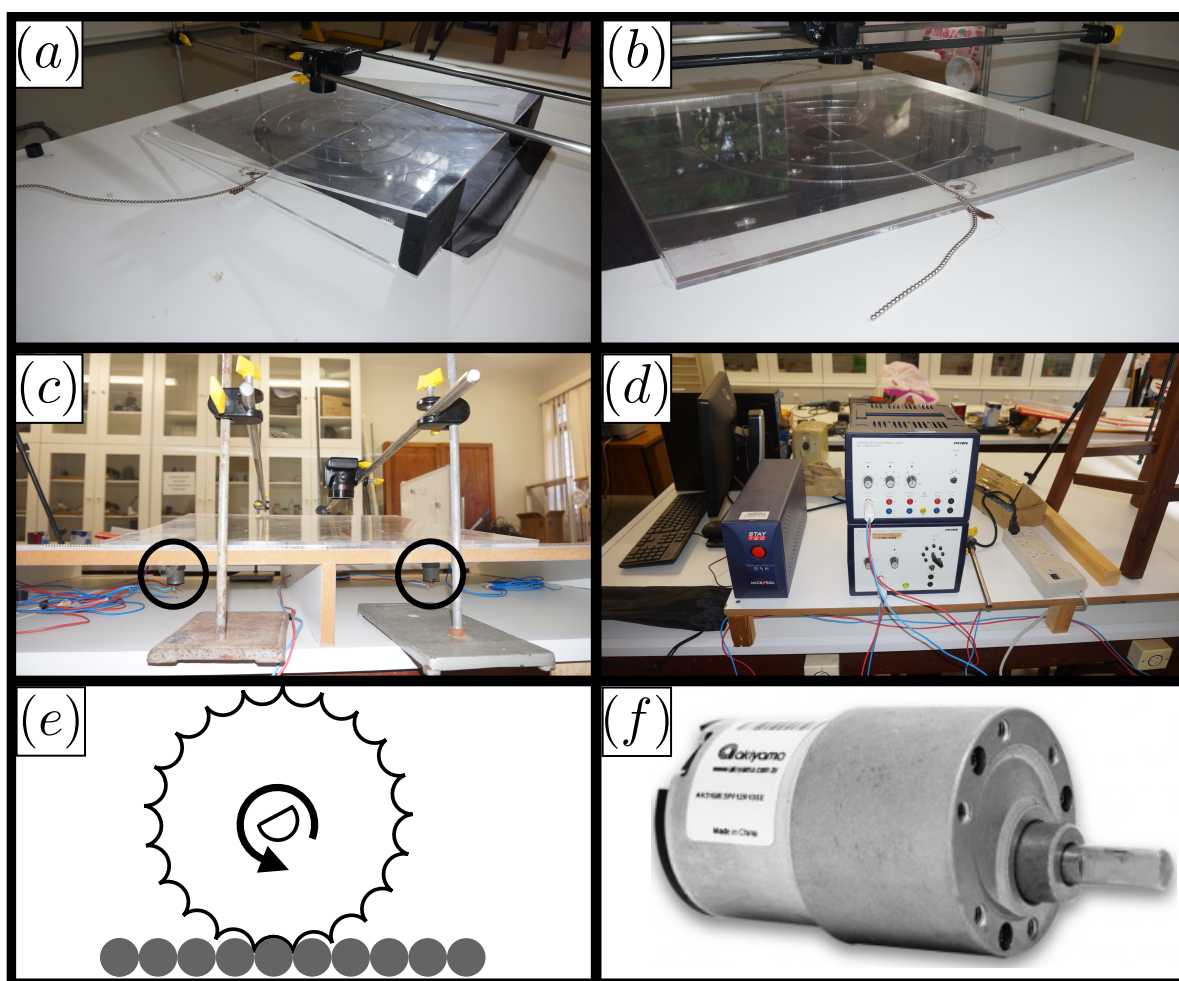


Figura 2: Detalhes do experimento. (a) Suporte da câmera, garantindo um posicionamento frontal da cavidade cilíndrica. (a) – (b) O aparato em perspectiva, mostrando que há uma tampa retangular de acrílico confinando as esferas dentro das cavidades. (c) Mostra os dois motores acoplados na mesa, a fim de injetar as esferas. (d) Duas fontes independentes da PHYWE, alimentando os motores com $4V$, gerando uma velocidade angular de $\omega \approx 0.23rad/s$. (e) Usamos duas polias dentadas, desenhadas para que seus dentes encaixasse na metade das esferas. (f) Imagem ampliada do motor, destacada em um círculo preto em (c).

A aquisição das imagens durante o processo de empacotamento é feito por meio de uma câmera Canon PowerShot SX510 HS posicionada na região central da cavidade fixada 23 cm acima do plano da cavidade, filmando a 30 quadros por segundo. Para a injeção das esferas magnéticas no interior da cavidade, utilizamos dois motores MICRO MOTOR DC C/ CX RED com torque máximo de $8,50\text{ kgf.cm}$. O eixo destes motores estão conectados a duas polias individuais não sincronizadas e estas exercerem sobre as esferas uma força possibilitando que a injeção das esferas seja feita continuamente na forma de um fio. Em todos os experimentos realizados a velocidade de injeção das esferas foi mantida constante e o anteparo utilizado no fundo da cavidade também foi mantido o mesmo para todos os experimentos. Mantendo o mesmo anteparo evitamos efeitos adicionais relacionados com valores da força de atrito entre as esferas e o fundo da cavidade.

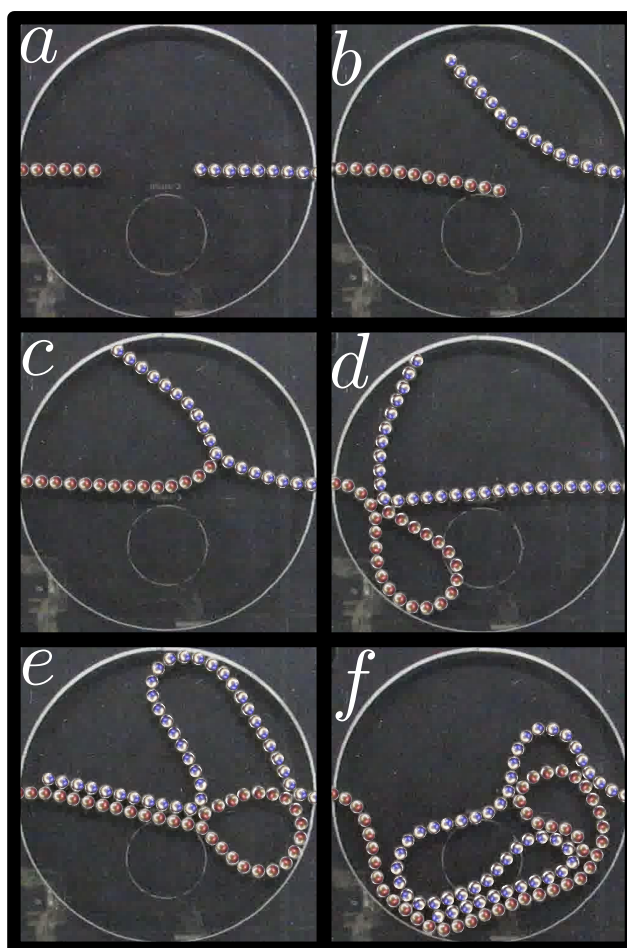


Figura 3: Sequência de imagens durante o processo de injeção das esferas magnéticas no interior da cavidade cilíndrica caso dipolos desalinhados (sentidos contrários). As diferentes imagens *a – f* correspondem aos diferentes estágios da injeção. Podemos observar que a medida que os ímãs adentram na cavidade, estes vão se organizando formando um padrão de empacotamento. Para uma melhor clareza quanto a direção e sentido dos momentos magnéticos das esferas, optamos por pintar as esferas para indicar a direção e o sentido do dipolo. A cor indica a direção do dipolo da respectiva esfera, sendo o vermelho relativo ao polo Norte e azul ao polo Sul. Esta sequência de imagens corresponde ao processo de injeção cuja a condição inicial foi para o caso onde as duas filas posicionadas para a injeção estão com os momentos de dipolos desalinhados gerando inicialmente uma força de repulsão entre as duas filas .

2.3 O Experimento

Os experimentos foram realizados sobre uma mesa horizontal fixa e totalmente nivelada. Dois fios compostos de esferas magnéticas, foram posicionados de forma alinhada com a entrada do caminho que dá acesso a cavidade de forma que o início do fio, ou seja, a primeira esfera pertencente ao fio esteja localizada na borda da entrada da cavidade. Após estabelecida a condição inicial, os motores são ligados simultaneamente e o fio começa a ser injetado no interior da cavidade através das duas entradas. Conforme dito anteriormente, a taxa de injeção é constante de aproximadamente 0.40 cm/s nas duas entradas. Os fios vão enrolando-se no interior da cavidade (ver Fig. 3 e Fig. 4 etapas da injeção) até o momento em que o processo de injeção é interrompido, quando a taxa de ocupação no interior da cavidade atinge o seu valor máximo. Neste momento não há como introduzir mais esferas na cavidade. Após o processo de injeção ser finalizado passamos para a etapa que trata da análise das imagens. As imagens são analisadas passo a passo para uma completa caracterização do empacotamento resultante. Como exemplo do passo a passo no processo de injeção mostramos nas Fig. 3 e Fig. 4 seis momentos que caracterizam o processo de injeção para as duas condições iniciais propostas. Podemos perceber que as diferenças entre os dois tipos de empacotamentos ficam evidente após poucos passos no processo de injeção. As duas estruturas formadas já exibem particularidades que confirmam uma tendência de que estas apresentarão características distintas. Cada experimento foi realizado 9 vezes e todas as grandezas calculadas, foram obtidas por meio de médias sobre esses vários experimentos. Com as imagens, conseguimos fazer uma estimativa do centro de massa das esferas usando a transformação de Hough [12, 13]. Usando a segmentação de imagem [14] conseguimos fazer estimativas da orientação do momento de dipolo associado as esferas magnetizadas.

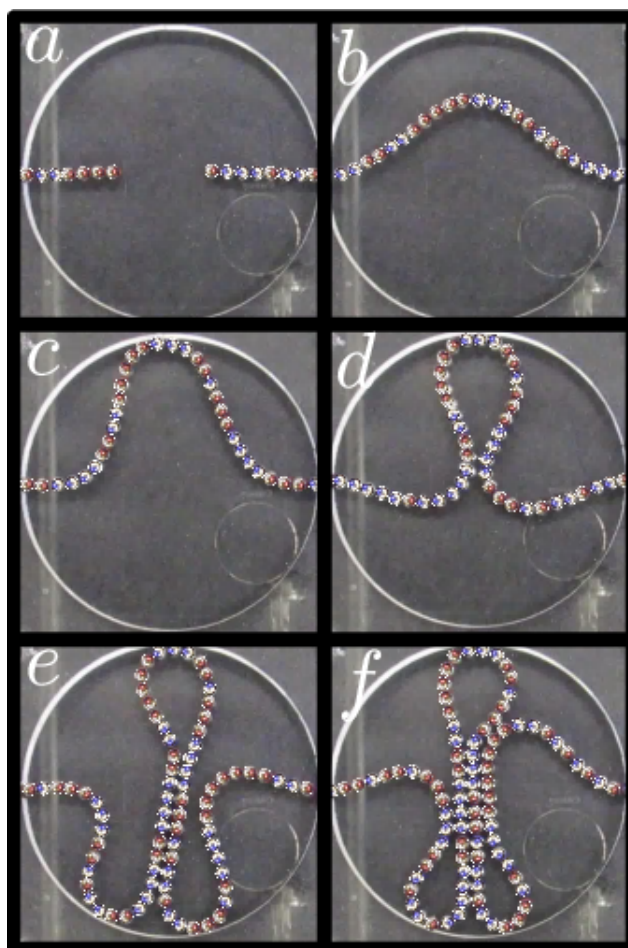


Figura 4: Sequência de imagens durante o processo de injeção das esferas magnéticas no interior da cavidade cilíndrica caso dipolos alinhados (mesmo sentido). As diferentes imagens *a – f* correspondem aos diferentes estágios da injeção. Podemos observar que a medida que os imãs adentram na cavidade, estes vão organizando-se formando um padrão de empacotamento. Esta sequência corresponde ao processo de injeção na condição inicial onde as duas filas estão com os momentos de dipolos alinhados ocorrendo uma atração entre as duas filas.

Com base na Lei de Gauss para o magnetismo sabemos que um objeto magnético sempre apresenta dois polos magnéticos opostos (norte e sul), não havendo a possibilidade de existir monopolos magnéticos. A partir desta lei, podemos estabelecer duas condições iniciais naturais para o problema em estudo. Estas se configuram quando os lados opostos dos fios que penetram na cavidade apresentam esferas que estão com os dipolos magnéticos apontando na mesma direção e sentido, ou na mesma direção e sentidos contrários. Em outras palavras, quando os imãs (esferas) que estão localizados nas extremidades do fio estão com os seus polos alinhados ou desalinhados, conforme indicado na Fig. 5. Para que possamos definir com clareza a direção dos dipolos magnéticos individuais de cada esfera, optamos por pintar as esferas de forma a indicar qual a orientação do dipolo magnético. Nas cores vermelhas estão as esferas que estão com a direção do dipolo magnético, no instante inicial da injeção, apontando para a direita enquanto que, as esferas pintadas em azul estão com o momento de dipolo magnético apontando para

esquerda (Fig. 3(a)).

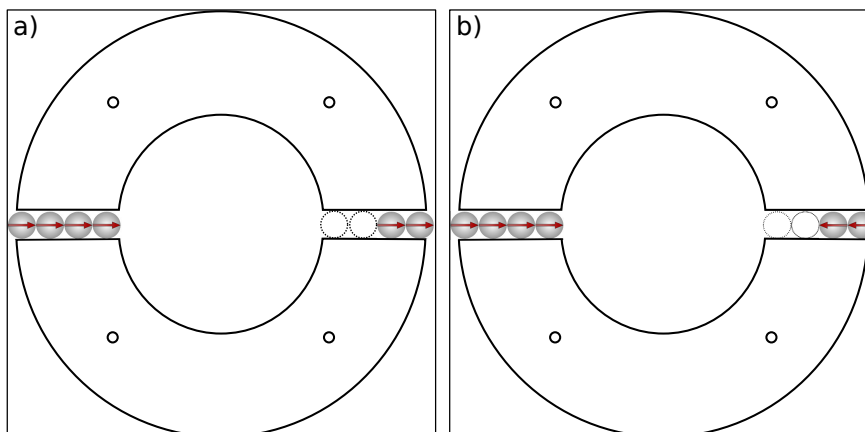


Figura 5: Representação das duas possíveis configurações iniciais para o empacotamento de fios magnéticos. Em (a), os momentos de dipolo dos imãs são alinhados na mesma direção e sentido. Em (b) os momentos tem a mesma direção mas o lado direito da fila tem os momentos em sentido contrário. Observe que em ambos os casos foi feita uma translação de duas unidades de diâmetro para direita para estabelecer uma quebra na simetria no problema. Este procedimento apenas evita que o ponto de encontro dos dois lados opostos (fios) não ocorra no centro da cavidade mas ligeiramente deslocado.

Como veremos no próximo capítulo em detalhes, estas são condições iniciais importantes para a formação de empacotamentos com padrões diferentes no interior da cavidade. O que se observa é que quando os imãs em lados opostos estiverem com os momentos de dipolos alinhados, ao entrarem na cavidade estes interagem por meio de uma força de atração e tendem a se unirem, enquanto que na outra situação, quando os imãs possuem dipolos magnéticos desalinhados estes interagem por meio de uma força de repulsão que impede a união imediata de lados opostos. Estes tendem se agrupar em uma configuração ligeiramente diferente, acabando por gerar uma série de efeitos que resultam em padrões distintos. Estes dois padrões observados conforme ilustrado na Fig. 6 durante os experimentos foram classificados em acordo com as respectivas morfologias. Os dois padrões obtidos foram nomeados aqui levando em consideração aspectos peculiares a cada um, pelos nomes de padrão *Loop* (a) e *Espiral* (b). A diferença qualitativa observada no empacotamento de fios formado pelas esferas magnéticas é notória, sugerindo que o efeito da interação entre os dipolos durante a injeção do fio e o confinamento imposto pela cavidade possa ser suficiente para explicar a origem dos efeitos observados. Diferente do caso de um fio elástico, onde durante o processo de injeção as forças envolvidas no processo são de curto alcance, no experimento com esferas magnéticas existem interações de curto alcance, tal como a força de atrito entre partes, também estão presentes forças de maior alcance por conta das interações de dipolos magnéticos. Este ingrediente acrescenta uma complexidade adicional no problema em estudo.

Uma vez definida as estruturas formadas ao final do processo de injeção, precisamos de uma descrição mais fundamentada para estabelecer quais os fatores que contribuíram para formar

os padrões de empacotamentos obtidos. Precisamos definir quantidades, algumas já definidas na literatura [11, 6, 7, 8] sobre o tema e mostrar quais as correlações que existem entre estas grandezas e como elas evoluem à medida que o fio é introduzido na cavidade. Também devemos verificar as diferenças e semelhanças presente nas estruturas com base nesta abordagem e procurar contextualizar qual são os fatores que contribuem para a origem dessas diferenças.

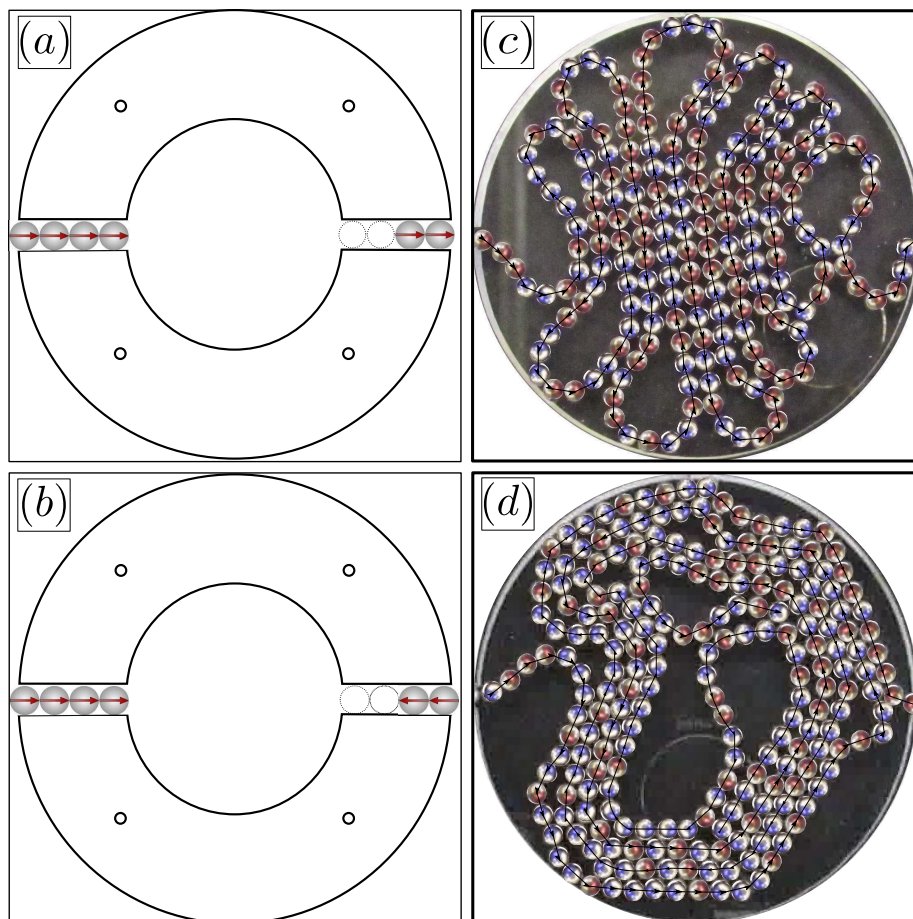


Figura 6: A figura ilustra como uma mudança nas condições iniciais de entrada pode conduzir o sistema a diferentes configurações de empacotamento. A figura (a) apresenta como condição inicial um alinhamento entre os dois fios formados no início do processo de injeção. No caso da figura (b) temos uma condição inicial diferente onde as duas extremidades do fio estão com os dipolos apontando em sentidos opostos. Ao lado de cada figura ilustrando a condição inicial, temos os respectivos padrões formados ao final do processo de empacotamento considerando cada uma destas condições iniciais. Os dois padrões obtidos foram nomeados neste trabalho levando em conta alguns aspectos presentes em cada um deles. Assim denominamos estes pelos nomes de padrão *Loop* (a) e *Spiral* (b). Em detalhe temos uma linha preta composta por setas que indica a direção dos dipolos de cada uma das esferas que formam o fio magnético.

2.4 O Tratamento das Imagens

Nessa seção temos como objetivo explicar como foi feito a análise das imagens para obter posições e orientações das esferas. Uma imagem pode ser interpretada como uma matriz, em que cada elemento dessa matrix guarda um valor que diz quão intenso é a intensidade luminosa em um ponto qualquer da imagem. Esse ponto luminoso é chamado pixel. A Teoria das Cores diz que é possível construir qualquer cor do espectro visível usando combinações do vermelho, verde e azul [15]. Dessa maneira, a cor emitida em cada pixel é uma composição dessa três cores primárias. Quantitativamente essas três cores podem possuir valores inteiros positivos ou valores fracionários, que vão de 0 a 1. Considerando que uma imagem é um objeto bidimensional, podemos organizar esses valores em uma matriz $I_{x \times y \times 3}$, como mostra a Figura 7, onde os elementos I_{xy1} representam as intensidades do canal vermelho, os elementos I_{xy2} representam as intensidades do canal verde e os elementos I_{xy3} representam as intensidades do canal azul.

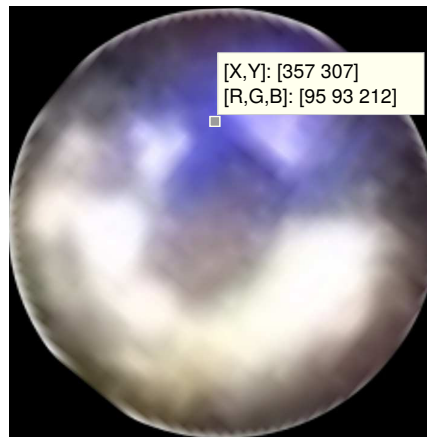


Figura 7: Figura mostrando que uma imagem pode ser interpretada como uma matrix de dimensão $I_{x \times y \times 3}$, onde cada elemento I_{xyz} contém valores inteiros que vão de 0 a 255. Na figura o pixel de coordenada $x = 357$ e $y = 307$ tem intensidades iguais a $I_{357,307,1} = 95$, $I_{357,307,2} = 93$ e $I_{357,307,3} = 212$, correspondendo as intensidades de vermelho, verde e azul respectivamente.

Uma vez definida de forma quantitativa uma imagem, podemos usar operações matemáticas ou transformações na imagem, e estimar grandezas como área, perímetro ou centro de massa de algum objeto na imagem [16, 17]. Das várias quantidades que podem ser medidas precisamos apenas das transformações que nos dão os centros de massa das regiões de interesse.

Antes de usar as transformações nas imagens foi necessário realizar algumas operações, a fim de dar um polimento nas imagens, e conseqüentemente ter uma precisão melhor na obtenção dos centros. O primeiro passo foi tirar os frames da filmagem. Em cada frame selecionamos a região da cavidade onde as esferas são empacotadas, depois convertemos a imagem para preto e branco e por fim aplicamos a transformação de Hough [18, 14, 13], como mostrado na Figura 8. Essa transformação realça as características peculiares de uma imagem e mapea essas características em pontos. Como entrada essa transformação recebe uma imagem binarizada I_{xy} e como saída as coordenadas do centros.

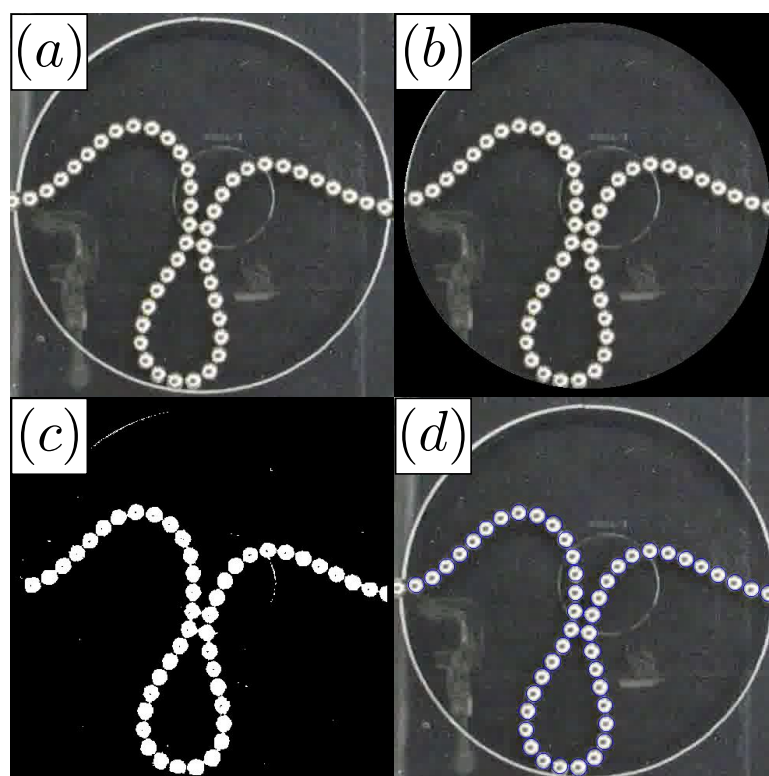


Figura 8: Passo a passo da estimativa do centro de massa das esferas. (a) Transformamos o vídeo em quadros. (b) Selecionamos a região de interesse. (c) Convertemos a imagem para preto e branco (binarizamos), dessa maneira aumentamos a visualização do contorno das esferas. (d) Usando a transformação de Hough [18, 14, 13] na imagem binarizada, conseguimos fazer uma estimativa das coordenadas do centro de massa das esferas.

Como o nosso objeto de estudo são esferas magnetizadas decidimos fazer uma estimativa da orientação desses dipolos. Uma esfera magnetizada apresenta dois polos, correspondendo aos hemisférios da esfera. Podemos associar um dipolo como um vetor no centro da esfera e jogar toda a contribuição do campo magnético da esfera magnetizada nesse vetor. Por simetria, esse vetor deve estar paralelo a linha que uni o centro da esfera e o centro do hemisfério norte da esfera magnetizada. Usando o processo de segmentação de imagem por cor [14], conseguimos destacar as regiões dos hemisférios, calcular o centro de massa e de modo consequente estimar a orientação do dipolo associado a esfera magnetizada.

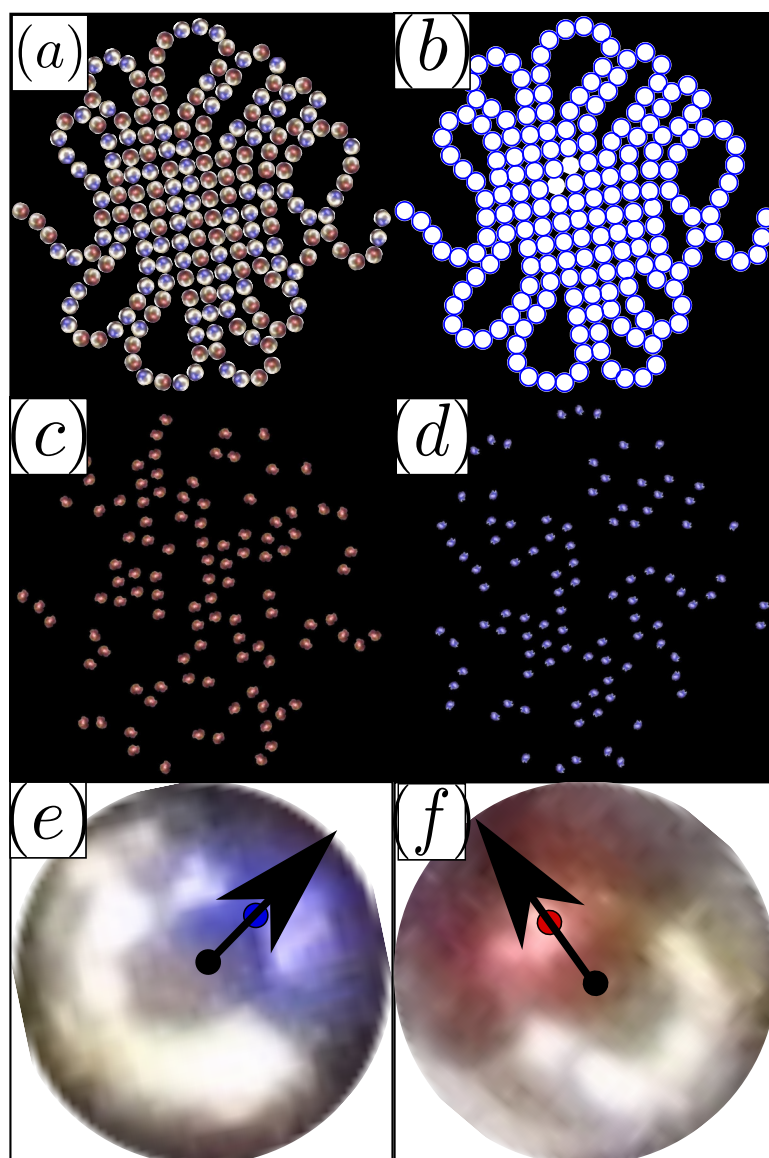


Figura 9: Passo a passo da estimativa da orientação dos dipolos. (a) As esferas tiveram um de seus hemisférios pintados, a fim de dar uma estimativa para a direção dos dipolos. (b) Usando a transformação de Hough fazemos a estimativa dos centros das esferas. (c) – (d) Usando a segmentação de imagens por cor extraímos as regiões dos hemisférios e calculamos os seus respectivos centros de massa. As regiões estão destacadas em cores azul e vermelho. (e) – (f) Dado os centros de massa dos centros e dos hemisférios podemos estimar a direção dos dipolos.

2.5 Propriedades do Neodímio

A peça fundamental do nosso trabalho são as esferas de neodímio. Algumas propriedades físicas desse material como a magnetização remanecente será usada mais adiante para fazer uma estimativa do momento de dipolo magnético associado aos ímãs. Outras propriedades podem ser úteis tanto no nível experimental como no nível de simulação, nesse sentido, decidimos listar algumas propriedades físicas acerca do neodímio. Na tabela abaixo fornecemos algumas informações pertinentes ao neodímio [23, 24, 19].

Propriedade	Símbolo	Unidade	Valor
Composição Química	$Nd_2Fe_{14}B$	-	-
Densidade	D	g/cm^3	7.5
Força de Compressão	$C.S$	N/mm^2	780
Coefficiente de Expansão Termica	C	$10^{-6}/^{\circ}C$	3.4
Resistividade Elétrica	r	$m.\Omega.cm$	150
Condutividade Elétrica	s	$10^{-6}S/m$	0.667
Condutividade Termica	k	$kCal/(m.h.^{\circ}C)$	7.7
Capacidade de Calor Específico	c	$kCal/(kg.^{\circ}C)$	0.12
Resistência a Tensão	SU	kg/mm^2	8
Resistência a Flexão	b	$10^{-12}m^2/N$	9.8
Compressibilidade	K	$10^{-12}m^2/N$	9.8
Rigidez	$E.I$	N/m^2	0.64
Razão de Poisson	n	<i>Adimensional</i>	0.24
Temperatura de Curie	T_c	$^{\circ}C$	310
Magnetização Remanecente	$ \vec{B}_{dentro} $	T	1.3

Além dessas propriedades é interessante comentar outros fatos interessantes sobre o neodímio. O campo magnético intrínseco diminui com o tempo, isso se deve ao fato de que é mais energeticamente favorável ter o material subdividido em vários domínios magnéticos, levando o campo resultante a zero. Segundo o fabricante o decaimento é entorno de 1% a cada 10 anos [24].

Um problema bastante corrente quando se usa ímãs com um campo muito intenso é que esse campo pode danificar dispositivos ao seu redor, sendo assim, é necessário algum tipo de blindagem. Essa blindagem é feita cobrindo o material magnetizado com uma cavidade metálica, desta maneira a cavidade atua como uma gaiola de Faraday. Normalmente usa-se ligas da família do Nikel para essa blindagem.

3 TEORIA SOBRE DIPOLOS MAGNÉTICOS

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos teóricos pertinentes ao tema em estudo neste trabalho. Cálculos básicos serão apresentados na tentativa de melhorar o entendimento sobre como ocorre a interação magnética entre dois dipolos. Os conceitos desenvolvidos neste capítulo serão utilizados como base para algumas medidas realizadas sobre o sistema em estudo. Finalmente faremos uma análise dimensional sobre as grandezas presentes no nosso estudo. Apresentaremos algumas informações técnicas relacionadas com as esferas

3.2 Campo Magnético de um Dipolo Pontual

Inicialmente iremos mostrar que partindo de uma das equações de Maxwell podemos obter o campo magnético de um dipolo pontual.

A partir da equação que afirma a não existência de monopolo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.1)$$

podemos escrever que

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0. \quad (3.2)$$

Desta última podemos reescrever o campo magnético \vec{B} como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.3)$$

Agora partindo da lei de

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (3.4)$$

e utilizando a relação envolvendo o gradiente

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.5)$$

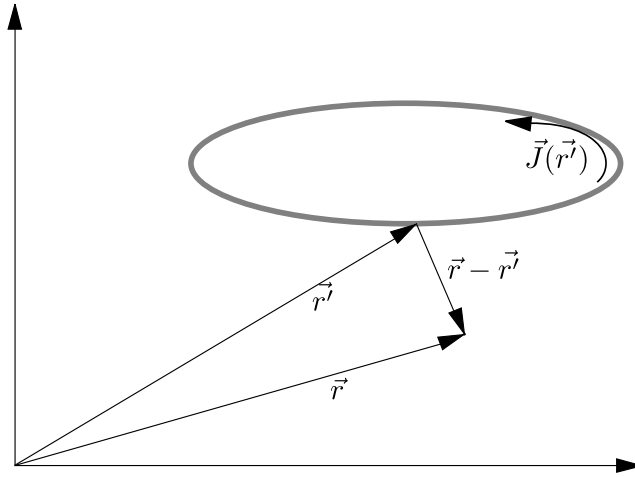


Figura 10: Representação dos vetores nas equações.

podemos escrever o campo magnético

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV. \quad (3.6)$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A}) \quad (3.7)$$

teremos

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{J} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\nabla \times \vec{J}]. \quad (3.8)$$

Como $\vec{J}(\vec{r}')$ depende das coordenadas com linha e o operador ∇ atua apenas nas coordenadas sem linha, o segundo termo da expressão 3.1 é nulo. Usando o fato que o produto vetorial é anticomutativo podemos escrever que

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{J} \times \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (3.9)$$

Substituindo esse resultado na equação para o campo magnético temos que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV. \quad (3.10)$$

O operador ∇ não atua em \vec{r}' , portanto podemos remove-lo da integral, de modo que ficamos com

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]. \quad (3.11)$$

Por analogia direta tiramos facilmente que o potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} dV. \quad (3.12)$$

Finalmente, sabendo a distribuição de corrente podemos obter o potencial vetor resolvendo esta integral. Para o caso de pontos muito afastados da região onde estão localizadas as correntes, é possível escrever o termo $|\vec{r}' - \vec{r}'|^{-1}$ como

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r'} \left[1 - 2\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r'^2} + \frac{r'^2}{r'^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Expandindo o último termo da equação 3.13 em uma série de Maclaurin, com $r' \ll r$ e considerando apenas os dois primeiros termos da série chegamos a

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r'} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r'^3}. \quad (3.14)$$

Definindo o potencial vetor de um dipolo como o símbolo $\vec{\mathcal{A}}$ e substituindo o resultado 3.14 em 3.12 resulta em

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J} \left[\frac{1}{r'} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right] dV \quad (3.15)$$

Abrindo os termos da integral ficamos com

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int_V \vec{J} dV + \frac{\mu_0}{4\pi r'^3} \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{J} dV. \quad (3.16)$$

Para a primeira integral, é possível demonstrar que seu resultado é nulo. Primeiro devemos mostrar que a seguinte relação é verdadeira

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0 \quad (3.17)$$

e a partir da equação 3.17 é possível mostrar que

$$\int_V J_i dV = 0. \quad (3.18)$$

Ou seja, esta relação é válida para cada componente da densidade de corrente e esse resultado está ligado com o fato de que não existem monopolos magnéticos. Uma outra relação útil é

$$\vec{\mathcal{A}} \cdot \int_V \vec{r}' J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j \int_V (\vec{r}' \times \vec{J})_k dV. \quad (3.19)$$

Por meio de algumas manipulações na equação 3.16 é possível usar a relação 3.19. Vamos

considerar somente uma componente da equação 3.16 na forma

$$\mathcal{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') J_i dV = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^3} \cdot \int_V \vec{r}' J_i dV \quad (3.20)$$

Fazendo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (3.21)$$

e mediante a substituição

$$\mathcal{A}_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\mu_0 r_j}{4\pi r^3} \int_V (\vec{r}' \times \vec{J})_k dV \quad (3.22)$$

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j \left[\frac{1}{2} \int_V (\vec{r}' \times \vec{J})_k dV \right] \quad (3.23)$$

O momento de dipolo magnético é definido como

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J} dV. \quad (3.24)$$

Substituindo 3.24 em 3.23, temos

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j m_k. \quad (3.25)$$

Como o produto vetorial pode ser escrito em termos do tensor de Levi-Cevita

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j} \epsilon_{i,j,k} a_i b_j \quad (3.26)$$

o potencial vetor para um dipolo magnético pode ser expresso por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.27)$$

Da equação 3.3 podemos obter o campo magnético \vec{B} de um dipolo.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\vec{m} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \quad (3.28)$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (3.29)$$

e fazendo $\vec{A} = \vec{m}$ e $\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, podemos substituir estes em (3.29) e obter que

$$\nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{m} - (\nabla \cdot \vec{m}) \frac{\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3.30)$$

Sabendo que $\vec{m} = m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}$, onde m_i são constantes, temos que

$$\nabla \times \left[\vec{m} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right). \quad (3.31)$$

Uma outra identidade que devemos usar é a

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.32)$$

Como o nosso dipolo magnético está localizado em $\vec{r}' = 0$, conseqüentemente $\vec{r} \neq \vec{r}'$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 0 \quad (3.33)$$

A equação 3.31 se torna

$$\nabla \times \left[\vec{m} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = -(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (3.34)$$

Agora vamos resolver o lado direito da equação (3.34). O operador ∇ em coordenadas cartesianas é

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.35)$$

onde

$$\vec{m} \cdot \nabla = (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.36)$$

encontramos que

$$\vec{m} \cdot \nabla = m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.37)$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.38)$$

O lado direito da equação 3.34 pode ser escrito na seguinte forma

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (3.39)$$

Resolvendo somente para a componente em x resulta em

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (3.40)$$

Calculando as derivadas em x , y e z ficamos com

$$\left(m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_x x)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.41)$$

$$\left(m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{3(m_y y)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.42)$$

$$\left(m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.43)$$

Utilizando esses resultados em 3.40 obtemos

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_x x)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(m_y y)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.44)$$

Agrupando os termos resulta em

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3x \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.45)$$

Podemos simplificar a expressão mediante as seguintes substituições:

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = m_x x + m_y y + m_z z \quad (3.46)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.47)$$

Dessa maneira teremos a expressão

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \frac{m_x}{r^3} - 3 \frac{x (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \quad (3.48)$$

Em analogia direta para as outras componentes obtemos

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_y = \frac{m_y}{r^3} - 3 \frac{y (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \quad (3.49)$$

$$\left[(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_z = \frac{m_z}{r^3} - 3 \frac{z (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \quad (3.50)$$

Agrupando esses resultados na equação 3.39 resulta em

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{m_x \hat{i}}{r^3} - 3 \frac{x (\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{i}}{r^5} + \frac{m_y \hat{j}}{r^3} - 3 \frac{y (\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{j}}{r^5} + \frac{m_z \hat{k}}{r^3} - 3 \frac{z (\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{k}}{r^5} \quad (3.51)$$

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}}{r^3} - 3 \frac{(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \quad (3.52)$$

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{m}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \quad (3.53)$$

Substituindo na equação 3.34 e conseqüentemente em 3.28, vamos ter o de um dipolo pontual situado na origem

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] \quad (3.54)$$

Caso o dipolo estiver localizado em uma posição \vec{r}' qualquer a relação assume a forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{[\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (3.55)$$

3.3 Equivalência ente Esfera Magnetizada e Dipolo Pontual

Para uma esfera com magnetização uniforme $\vec{M} = M \hat{k}$ podemos obter seu campo magnético dentro e fora pelo abordagem do modelo de corrente elétrica ou pela método de carga magnética de Gilbert. O momento de dipolo magnético para uma esfera magnetizada é

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{M} \quad (3.56)$$

Substituindo na equação 3.55

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M R^3}{3r^3} \left[2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right], \quad r > R \quad (3.57)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \vec{M}}{3} \hat{k}, \quad r < R \quad (3.58)$$

Para um dipolo pontual, com $m = |\vec{m}|$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{3r^3} \left[2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right] \quad (3.59)$$

O campo magnético da esfera fica

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 R^3}{3} \left[\frac{3 (\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right], \quad r > R \quad (3.60)$$

3.4 Energia entre Dipolos

A vem do trabalho da [19]. Dada duas distribuições de corrente, a energia magnética associada a esse sistema é dado por

$$W = E_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (3.61)$$

Dessa fórmula, podemos obter a energia para qualquer distribuição de corrente mediante a expansão do termo

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}}_{\text{dipolo}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{r}')}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^5}}_{\text{quadrupolo}}$$

Tomando somente o termo de dipolo, juntamente com a sua definição temos

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} dV \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV.$$

Usando algumas identidades vetoriais é possível mostrar que a energia entre dois dipolos pode ser escrita como

$$E_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})(\vec{m}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^3} \right). \quad (3.62)$$

Para uma coleção de n dipolos a energia total do sistema será dada por

$$E_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \left(\frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^5} - \frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r_{ij}^3} \right), \quad (3.63)$$

onde \vec{r}_{ij} é o vetor posição que liga os dipolos, ou seja, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

3.5 Módulo do Momento de Dipolo da Esfera

Nessa seção apresentaremos alguns calculos mostrando o valor do módulo do momento de dipolo magnético associado a esfera magnetizada de neodímio. Apresentaremos também as dimensões de algumas grandezas de interesse desse trabalho. Esta análise é necessária, pois para calcular a energia e o campo magnetico em unidades do *SI* entre duas ou mais esferas de neodímio, temos que definir o vetor posição em metros e o momento de dipolo magnético em $A.m^2$ que são a unidades adequadas para este sistema. Apresentamos na tabela uma síntese das unidades utilizadas e suas respectivas grandezas.

Parâmetro	Símbolo	Dimensão	Unidade
Raio da Esfera	R	L	Metro
Magnetização	M	$A.L^{-1}$	Ampere por Metro
Campo magnético	\vec{B}	$M.T^{-2}.A^{-1}$	Tesla
Permeabilidade Magnética	μ	$M.L.T^{-2}.A^{-2}$	Newton por Ampere ao quadrado
Energia Magnética	E_m	$M.L^2.T^{-2}$	Joule
Momento Magnético	\vec{m}	$A.L^2$	Ampere vezes Metro ao quadrado

De acordo com o fabricante [20, 21] e referências técnicas sobre os imãs de neodímio [22], a permeabilidade magnética relativa do neodímio é $\mu_{neo}/\mu_0 = 1.05$, ou seja, este apresenta um valor aproximadamente igual ao da permeabilidade magnética do vácuo.

Para uma esfera magnetizada, o campo magnético interno é

$$\vec{B}_{dentro} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \quad (3.64)$$

onde \vec{M} é a magnetização. Fora da esfera o campo magnético é o mesmo que um dipolo puro

$$\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{M}. \quad (3.65)$$

O fabricante [20, 21] informa que o campo magnético interno nas esferas de é aproximadamente um Tesla ($1T$), com um raio de $R = 0.0025$ metros. Desta maneira podemos obter o valor do momento de dipolo magnético associado a esfera de neodímio, usando $|\vec{B}_{dentro}| = 1$.

$$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \implies |\vec{B}| = \frac{2}{3}\mu_0|\vec{M}| \implies \frac{2}{3}\mu_0|\vec{M}| = 1 \quad (3.66)$$

Usando a equação 3.65 temos

$$|\vec{m}| = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} = 0.078 \text{ A.m}^2. \quad (3.67)$$

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

4.1 Introdução

Neste capítulo faremos um análise detalhada sobre os aspectos geométricos presentes nos dois tipos de empacotamentos observados através dos experimentos. Nosso objetivo é caracterizar a morfologia dos empacotamentos encontrados com base em parâmetros físicos presentes durante a injeção do fio magnético na cavidade. Resultados encontrados [6, 11] para a injeção de fios metálicos e plásticos em cavidades rígidas, atestam que a morfologia do empacotamento destes fios é determinada basicamente pela elasticidade do material e pela força de atrito cinético e estático existente durante a injeção.

Quando tratamos com fios magnéticos os elementos que formam este fio são esferas magnetizadas, portanto tratam-se de objetos discretos o que carece de uma definição similar a elasticidade, normalmente definida para objetos contínuos. No entanto, as forças de interação magnética entre as partes que compõem o fio magnético podem estabelecer um papel semelhante ao da tração entre as partes de um material contínuo, e propiciar ao material magnético formado por esferas uma propriedade que pode ser considerada como o análogo ao que definimos no modelo contínuo como elasticidade [5]. Ambas as forças têm como papel fundamental tentar restaurar a estrutura original do fio, seja ele um fio normal feito de material qualquer contínuo ou um fio formado por esferas com propriedades magnéticas. Neste contexto tentaremos conduzir nossas análises tendo como base este comparativo entre os dois sistemas citados.

Uma quantidade normalmente observada em empacotamento de fios em cavidades rígidas é a fração de ocupação. Esta grandeza estabelece qual é o volume ocupado pela estrutura injetada em relação ao volume total da cavidade. Para o caso onde esferas são injetadas na cavidade, iremos tratar apenas com a projeção da esfera na base da cavidade, assim teremos uma área e não um volume. Representamos essa quantidade na forma

$$\phi = \frac{nA_{circ}}{A_{cav}} \quad (4.1)$$

onde n é o número de partículas, A_{circ} é a área da projeção da esfera e A_{cav} é a área da cavidade.

4.2 Caracterização de laços

A morfologia das estruturas encontradas no empacotamento de fios em cavidades rígidas pode ser quantificada por meio do número de laços, distribuição dos tamanhos de laços e dimensão fractal da estrutura. Os laços possuem uma propriedade interessante, dependendo da curvatura do laço estes podem em alguns casos estarem relacionados com retenção de energia durante à deformação do material.

A forma como um fio se curva [25] depende essencialmente da constante elástica do material do qual o fio é formado. Este também tem uma forte dependência quanto ao formato da cavidade no qual o material está sendo introduzido. Comparando os resultados obtidos em trabalhos anteriores que abordam empacotamento de fios em cavidades rígidas [6, 7, 8, 11] com os resultados obtidos em nossos experimentos, percebemos que a estrutura de empacotamento do fio magnético dentro da cavidade apresenta uma estrutura interna que se assemelha ao observado no empacotamento de fios elásticos. Seguindo essa semelhança entre os dois sistemas, acreditamos que deve haver algum tipo de elasticidade efetiva que emerge das interações entre os dipolos magnéticos, que possa dar origem a um comportamento similar encontrado em empacotamento de fios elásticos. Nesta perspectiva, descreveremos inicialmente os passos seguidos por Dominic e autores [26] na direção de estabelecer uma formulação teórica que nos possibilite fazer uma analogia entre, os laços observados em fios elásticos e os que aparecem no empacotamento de fios magnéticos. Embora os sistemas apresentem forças com origens completamente distintas, ambas em conexão com a forma da cavidade contribuem de forma análoga para a formação de laços durante o empacotamento destes fios em cavidades.

Considerando uma barra unidimensional inextensível e flexível, a razão entre a força aplicada F e a curvatura obtida κ (deformação) é definido como K (*bending stiffness*), ou seja, rigidez a flexão. Garantindo que o raio de curvatura é muito maior do que as dimensões da seção transversal do fio, K é constante e para uma fio ou barra de raio a e módulo de Young Y é conhecido que

$$K = \frac{\pi}{4} Y a^4 \quad (4.2)$$

Com base apenas em uma análise dimensional Dominic [26] constatou que, uma cadeia de dipolos magnéticos existe uma rigidez efetiva K_{ef} (*bending stiffness*) dada pela equação

$$K_{ef} = \frac{B^2 r_i^4}{\mu_0} f(N), \quad (4.3)$$

onde B é o campo magnético no interior da esfera magnetizada, r_i é o raio do imã (esfera), μ_0 é o coeficiente de permissividade no vácuo e $f(N)$ é uma função que depende do número de partículas presentes na cadeia. No limite em que o raio é muito pequeno e o número N de dipolos que compõem a cadeia tende para infinito, mantendo o comprimento da cadeia constante,

K_{ef} não depende mais da função $f(N)$. Este limite é válido considerando somente a interação entre os primeiros vizinhos na cadeia ¹. Nesse caso particular, a nossa cadeia composta de esferas magnéticas tem um K_{ef} que se comporta de forma similar a uma barra unidimensional inextensível e flexível.

Além da semelhança entre as relações para rigidez dos fios elásticos e magnéticos, a similaridade entre os comportamentos destes possui uma explicação fisicamente simples. Considerando por simplicidade, que a cadeia de esferas magnéticas pode ser tratada como sendo uma cadeia de dipolos, na situação de equilíbrio, uma cadeia reta (sem curvas) trata-se de uma coleção de dipolos perfeitamente alinhados. Quando aplicamos uma força tentando deformar a cadeia os dipolos não podem permanecer alinhados. Esta nova configuração quebra o alinhamento entre os dipolos e o campo magnético de cada dipolo exerce um torque sobre todos os outros dipolos que estão fora do alinhamento. Este torque tende a reduzir a curvatura procurando manter o sistema o mais alinhado possível. Comportamento similar é observado em uma barra ou fio, quando uma tensão interna tende a manter o fio alinhado.

Fica claro então que em ambos os casos citados anteriormente, existe uma força interna que trabalha no sentido de estabelecer um alinhamento no sistema. Durante o empacotamento existe além desta, a presença de forças externas, tais como a força do motor injetando o fio e as reações normais devido o contato com as paredes da cavidade, esta última depende essencialmente da forma da cavidade.

O balanço entre forças externas e internas ao fio define a curvatura e o tamanho dos laços durante o empacotamento. Inicialmente conduziremos nossa análise sobre o número de laços. O tamanho de um laço é definido por meio da área cercada pelo fio quando este apresenta um único contato interno. Nos experimentos, o tamanho e o número de laços foram medidos com base na análise de imagens, capturadas durante a realização dos mesmos. Para cada quadro extraído do filme capturado, foi realizada uma contagem do número de laços. Os resultados foram agrupados considerando os vários experimentos realizados assumindo a condição inicial onde as duas filas apresentavam a mesma direção para os dipolos, como mostra a figura 6. Para a condição de dipolos alinhados, os resultados obtidos para o número de laços N_l em função da fração de empacotamento ϕ são mostrados na figura 11.

¹Para uma demonstração rigorosa da definição para o K_{ef} consultar o artigo [19]

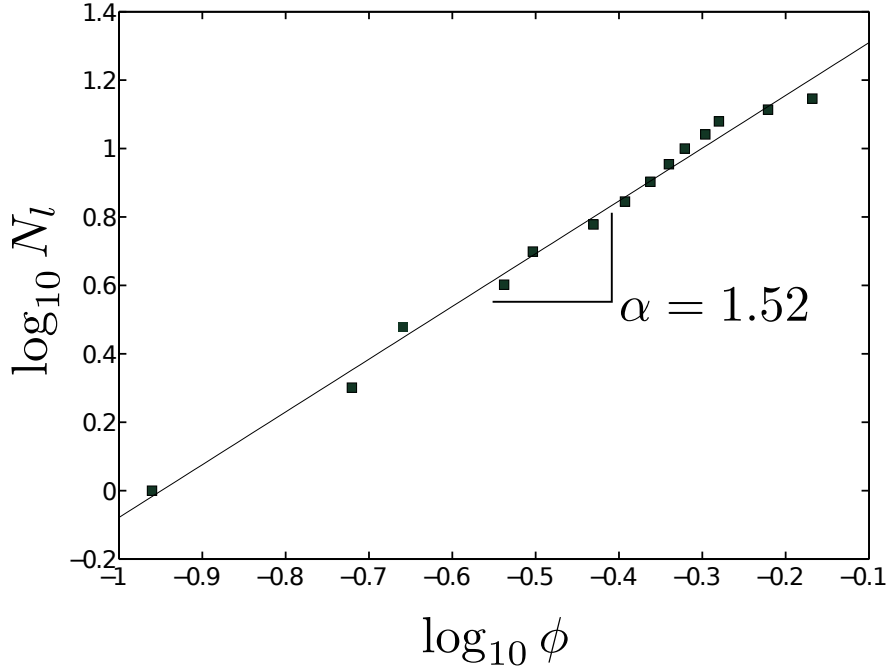


Figura 11: Gráfico em escala logarítmica do número de laços N_l obtidos em função da fração de empacotamento ϕ . Os laços foram contabilizados pela análise direta das imagens, ou seja, por inspeção. Esse resultado corresponde à condição inicial onde as duas filas de esferas apresentavam os dipolos alinhados. Os pontos representam os resultados experimentais enquanto que a linha sólida corresponde ao melhor ajuste linear obtido para a curva. Considerando que o comportamento é do tipo $N_l \propto \phi^\alpha$ e com base no ajuste podemos inferir que $\alpha \approx 1.52$.

Na condição onde as duas filas de injeção estão com os dipolos apontando no mesmo sentido, ocorre a formação de laços que se apresenta muito similar aos observados para os empacotamentos de fios elásticos não magnetizados em cavidades rígidas [11, 8, 7, 6]. Para quantificar a formação de laços na cavidade investiga-se a relação entre número de laços e a fração de ocupação do fio no interior da cavidade, ou seja, $N_l \propto \phi^\alpha$. Em trabalhos anteriores foram apresentadas variações nos valores para o expoente α que controla o comportamento entre o número de laços e o comprimento do fio injetado na cavidade. Para o padrão clássico de laços, $\alpha_{classic} = 1.75 \pm 0.03$ enquanto que para o padrão plástico de laços $\alpha_{plastic} = 1.85 \pm 0.04$. Os valores obtidos para α também apresentaram mudança quanto ao material usado no experimento. Podemos afirmar que há uma boa concordância na forma como o número de laços varia com a quantidade de esferas injetadas na cavidade, quando comparada ao caso de fios elásticos. No entanto, no caso estudado aqui existe um ingrediente a mais, a presença de uma interação de longa distância entre os dipolos magnéticos das esferas. Acreditamos que devido a este ingrediente adicional, observamos uma sensível mudança no valor do expoente $\alpha_{mag} = 1.52 \pm 0.02$ que controla o comportamento do número de laços N_l em função de ϕ . Vale salientar que na condição de dipolos desalinhados não foi observada a formação de laços, portanto não houve uma análise semelhante

para este caso.

O expoente mostra que o crescimento dos laços é menor em comparação do fio elástico [11]. Isso certamente, se deve ao fato de que a interação magnética pode ser de atração e neste caso limita a variedade de curvaturas permitidas e inibe a formação de grandes laços, aspecto diferente dos fios não magnéticos onde não existe força de atração entre as partes do fio.

4.3 Padrão do Empacotamento

Apesar da diferença qualitativa ser evidente aos olhos, é necessário extrair uma quantidade que possa estabelecer essa diferença quando analisamos a morfologia gerada durante o empacotamento. A função de distribuição radial $g(r)$ é capaz de informar sobre a disposição espacial das partículas ou átomos em uma estrutura que apresenta algum tipo de padrão bem estabelecido. Por meio desta ferramenta, iremos procurar descrever de forma quantitativa o arranjo das esferas (distância característica entre os vizinhos) durante o empacotamento do fio magnético. Tanto na condição de meio contínuo como discreto, a função $g(r)$ nos diz como a densidade do sistema varia em função da distância, tendo como referência uma partícula qualquer da amostra. Uma vez que a função foi devidamente normalizada, a função $g(r)$ nos diz qual é a probabilidade de encontrar uma partícula a uma distância r tendo como referência uma outra partícula qualquer. No caso do empacotamento dos fios magnéticos, as partes constituintes são as esferas e a distância entre os seus vizinhos são as distâncias características entre estas esferas. Implementar este cálculo exige alguns passos que optamos por descrever-los aqui:

- A partir do centro de cada esfera, fazemos variar a distância r na forma de cascas circulares que variam entre um r e $r + dr$ (ver ilustração figura 12).
- Para cada variação de r contamos o número de esferas que estão contidas nesta área.
- Repetimos este processo para todas as esferas dentro da cavidade e acumulamos dentro do intervalo para cada valor de r .

Com base na análise das imagens ao final do empacotamento do fio calculamos a função $g(r)$ sobre a estrutura formada. Os resultados são mostrados na Fig. 13. O gráfico da função $g(r)$ exibe picos em valores de r/d que são claramente distâncias características encontradas nos arranjos de esferas. O primeiro pico, está relacionado a presença da própria esfera, ou seja seu diâmetro. Já o pico indicado por P_1 , corresponde a distância entre os primeiros vizinhos, o pico P_2 para os segundos vizinhos e assim para a sequência de picos menores que se observa para vários valores de r . A função $g(r)$ fornece informação sobre a estrutura, se as esferas estão dispostos na forma de uma rede e qual é esta rede e suas propriedades geométricas básicas. Como por exemplo, em uma rede quadrada a distância característica entre os primeiros vizinhos

é $\sqrt{2}$, no caso de uma rede triangular temos $\sqrt{3}$. Estes dois valores correspondem precisamente ao pico indicado por P_1 no gráfico de $g(r)$ para os dois tipos de condição inicial para a injeção. O valor do pico P_2 por sua vez, está relacionado com a distância entre os terceiros vizinhos.

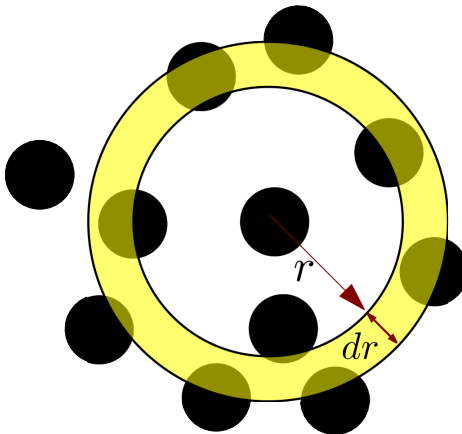


Figura 12: Figura Ilustrando como é realizado o cálculo utilizando a função $g(r)$.

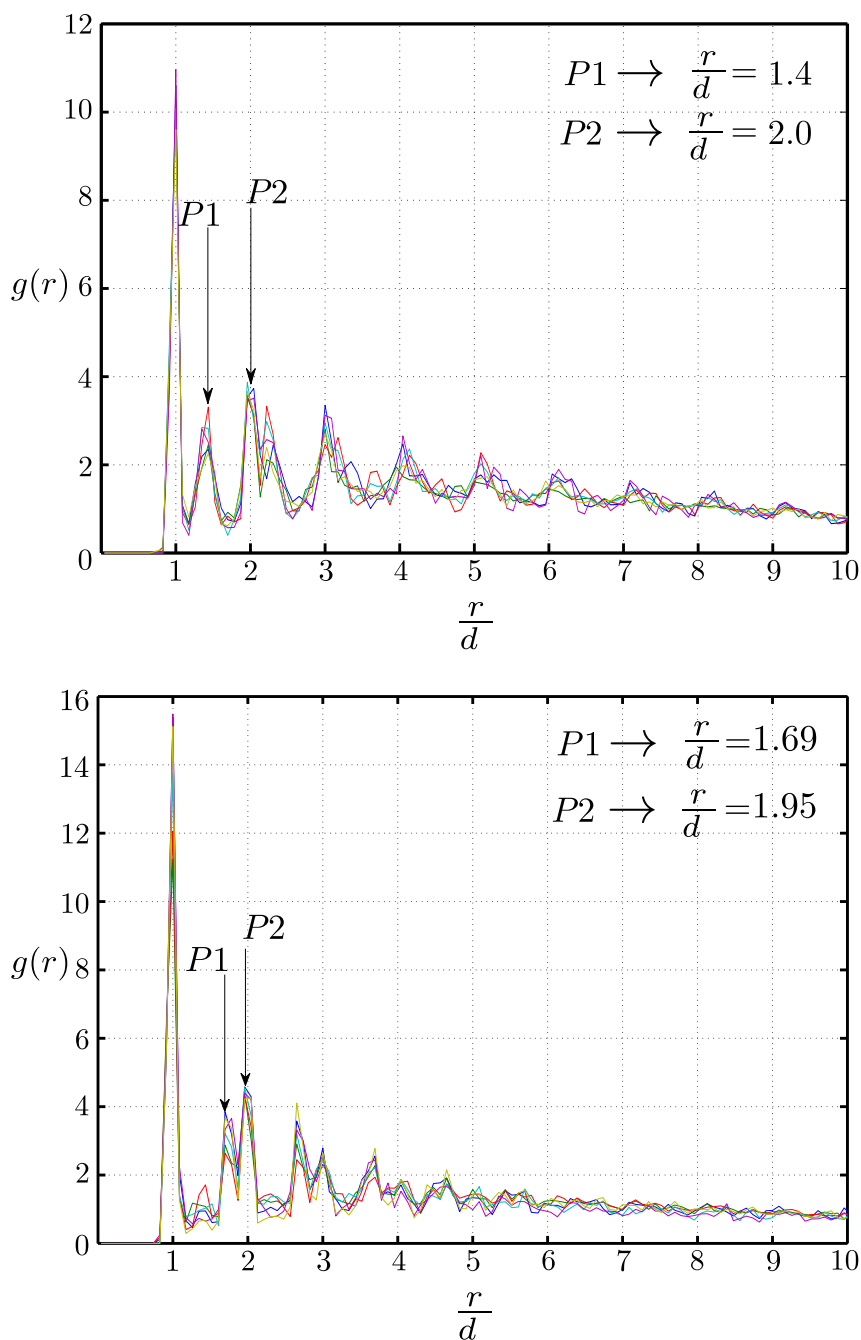


Figura 13: Gráficos da função $g(r)$ em função da distância r do centro de cada esfera normalizada pelo diâmetro da esfera. O gráfico superior corresponde ao caso do empacotamento tipo *Loop* enquanto que o inferior ao empacotamento tipo *Espiral*. Os resultados para $g(r)$ no tipo *Loop* e *Espiral*, apresentam características típicas de redes quadradas e triangulares, respectivamente. Sendo os valores de r nos picos P_1 (gráfico *Loop* e *Espiral*), distâncias características presentes em redes que apresentam uma estrutura do tipo quadrada e triangular.

4.4 Grafo Associado

Um grafo é uma estrutura matemática denotada por $G(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ onde \mathbb{V} é um conjunto de vértices e \mathbb{E} é um conjunto de arestas ou ligações conectando esses vértices segundo algum critério previamente estabelecido. Para construir os grafos que represente os empacotamentos encontrados após a injeção do fio magnético, iremos utilizar os seguintes critérios: os vértices representam as posições dos centros de massa das esferas e das arestas representam as conexões entre duas esferas. A conexão será representada por meio de uma ligação quando duas esferas se tocarem. O nosso grafo gerado é um grafo planar, não direcionado, totalmente conectado, onde cada vértice apresenta no mínimo uma aresta e no máximo seis. Os dois grafos obtidos, correspondente aos dois tipos de empacotamentos observados são mostrados na Fig. 14.

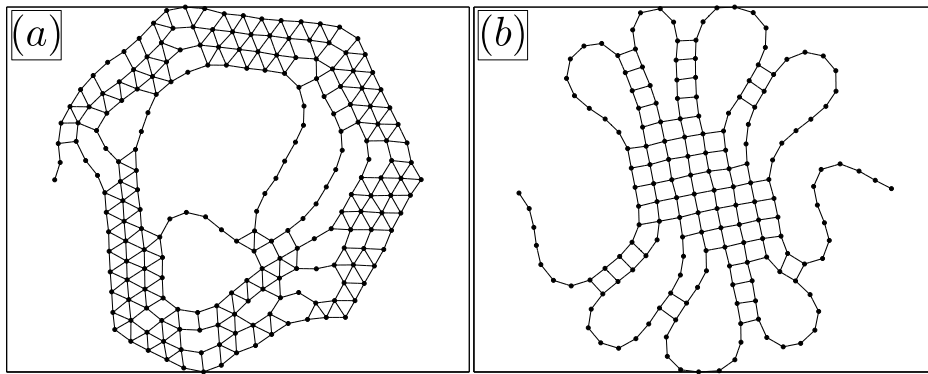


Figura 14: Grafos associados aos dois padrões de empacotamento observados após a injeção de esferas no interior da cavidade. O grafo da esquerda (a) representa um padrão *Espiral* enquanto que o grafo da direita (b) representa o padrão *Loop*. Os vértices no grafo representam as posições das esferas enquanto que as ligações representam contato entre esferas vizinhas.

Como o grafo é planar, vale a relação de Euler $\mathbb{V} - \mathbb{E} + \mathbb{F} = 2$, onde \mathbb{V} é o número de vértices, \mathbb{E} é o número de arestas e \mathbb{F} é o número de faces, que são regiões do plano, delimitadas por uma sequência de arestas.

Quando analisamos os grafos associados aos empacotamentos do tipo *Espiral* e *Loop*, fica claro que as estruturas são do tipo rede triangular e quadrada, respectivamente. A análise por meio do grafo confirma a conjectura estabelecida a partir dos resultados para a função $g(r)$, que o processo de injeção pode gerar estruturas distintas do tipo quadrada e triangular, dependendo da condição inicial para a injeção dos fios, alinhados ou desalinhados. Existe um limite de esferas que o motor consegue injetar, quando esse limite é alcançado o motor patina sobre as esferas sem conseguir injetar, nesse limite calculamos a fração crítica, para o padrão do tipo *Loop* é $\phi_c^{Loop} = 0.67 \pm 0.03$, enquanto que para o tipo *Espiral* é $\phi_c^{Espiral} = 0.57 \pm 0.02$. Devido a sua organização estrutural o empacotamento com padrão tipo *Loop* permite que mais esferas sejam introduzidas na cavidade. Esse valor crítico depende exclusivamente da forma estrutural estabelecida pelas esferas magnéticas durante o empacotamento e não da força externa exercida

sobre as esferas.

4.5 Número de Contatos

Com base no grafo formado, podemos facilmente definir o número de contatos como sendo igual ao número total de arestas pertencente do grafo. Similar ao caso do número de laços, também podemos estabelecer um comportamento de escala na forma $N_c \propto \phi^\gamma$, onde o expoente γ controla a forma como o número de laços crescem a medida que o fio vai sendo introduzido na cavidade. Os resultados obtidos são mostrados no gráfico da Fig. 15, onde apresentamos em escala logarítmica o número de contatos N_c em função da taxa de ocupação ϕ considerando os dois grafos formados.

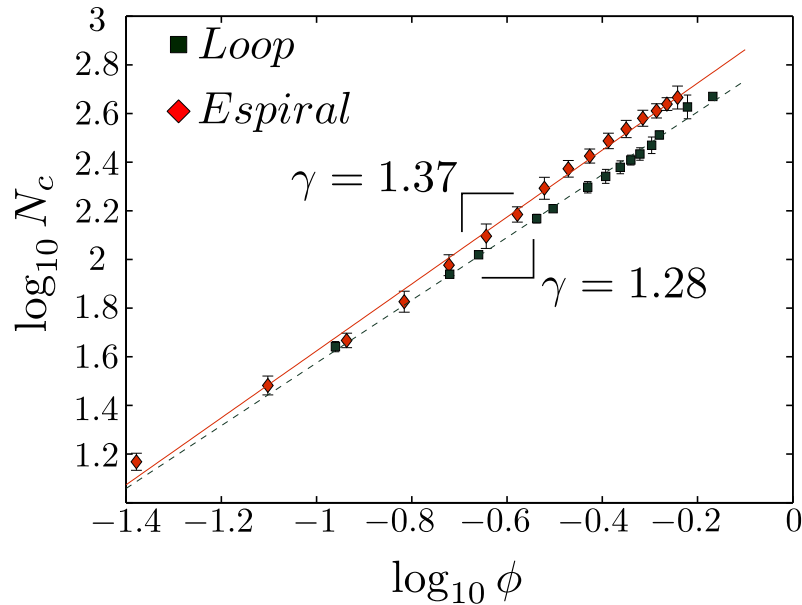


Figura 15: Gráfico em escala $\log - \log$ para o número de contatos das esferas N_c em função da fração de ocupação ϕ da cavidade. O número de contatos foi obtido por meio da contagem direta do número de vizinhos, tendo como base os grafos obtidos para cada um dos empacotamentos analisados. Os resultados apresentados foram obtidos através da análise dos grafos de 9 experimentos realizados para cada um dos empacotamentos do tipo *Loop* e *Espiral*.

A razão para o valor do expoente γ ser inferior no caso de fios magnéticos, deve-se a uma característica peculiar presente no fio magnético que o diferencia dos demais fios. O fio magnético é composto de esferas rígidas, portanto, por maior que seja a fração de ocupação ϕ do sistema este não permitirá formar uma estrutura de empacotamento com um número de vizinhos maior que seis. Este seria o número máximo de vizinhos encontrado para uma configuração de rede triangular, que se forma na condição de seis vizinhos. No caso de um fio elástico, este número de vizinhos pode ser bem superior fazendo com que o número de contatos possa atingir valores mais elevados para uma mesma fração de ocupação na cavidade. Este aspecto é evidenciado através de um valor mais elevado para o expoente γ . Agora, quando comparamos os dois tipos de morfologia

a explicação se confirma no número de vizinhos para cada morfologia. Na configuração *Espiral* o padrão que se estabelece para a maioria das esferas é do tipo triangular, salvo algumas poucas linhas de esferas deslocada da estrutura principal, o que acaba por contribuir com um número maior de contatos em função de ϕ reproduzindo um valor mais elevado para o expoente γ . Já no caso do padrão *Loop*, o empacotamento das esferas são predominantemente do tipo rede quadrada, estes acabam por contribuírem apenas com quatro vizinhos para o número de contatos, além do fato desta estrutura apresentar uma grande variedade de laços que na maioria das vezes são formados por filas de esferas que contribuem apenas com dois vizinhos. Estes fatores certamente contribuem para um menor valor para o expoente γ , conforme observado para o padrão tipo *Loop*.

4.6 Energia Magnética do Sistema

Estudos relacionados com matéria condensada [27] atestam que a forma como a estrutura se organiza tem uma relação direta com o nível de energia no qual encontra-se o sistema. Por exemplo, os dois tipos de vidro um chamado de vidro normal e o outro de vidro temperado são construídos por meio do mesmo material, mas diferenciam-se pelo processo de fabricação que no caso do vidro temperado pode estabilizar em uma configuração estrutural que demanda mais energia. O vidro do tipo temperado apresenta uma estrutura que se estabiliza em um mínimo local do sistema em vez de atingir o mínimo global com a menor energia como no caso do vidro normal. Portanto, podemos afirmar que o arranjo dos constituintes básicos do sistema define a energia armazenada.

Quando lidamos com partículas carregadas por exemplo, a energia da configuração final das partículas é medida por meio do somatório das energias potenciais elétricas individuais do pares de partículas que constituem o sistema. No caso do sistema magnético a soma é realizada sobre as energias de interação entre os dipolos magnéticos que compõem o sistema levando em conta além da distância entre as esferas, a direção do dipolo de cada esfera, aspecto que está implicitamente ligada ao caráter vetorial do momento de dipolo magnético e da natureza de sua interação.

Através desta análise entre as energias de interação das partes constituintes do fio magnético, ou seja, das esferas magnetizadas e por meio de tratamento de imagens fizemos uma estimativa razoável sobre a energia acumulada no sistema considerando os dois tipos de morfologia observados. Para isto, as esferas tiveram a orientação dos seus dipolos magnéticos identificadas por meio da pintura de uma de suas calotas esféricas. Utilizamos as cores azul e vermelho para indicar a direção do dipolo magnético, norte e sul, respectivamente. A outra calota esférica deixamos a cor natural da esfera (prateado), de forma que sempre era possível identificar qual o polo norte e o sul de cada esfera em particular. Com base na orientação dos dipolos em função

da cor e utilizando a energia de interação entre dois dipolos, consideramos uma coleção de n dipolos tendo a energia total do sistema dada por:

$$E_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \left(\frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r})(\vec{m}_j \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r^3} \right) \quad (4.4)$$

onde o vetor $\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ define a distância entre duas esferas i e j , \vec{m} é o momento de dipolo magnético e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. O resultado desta soma determina a energia magnética E_m acumulada no sistema. Realizamos o cálculo de E_m para os dois padrões estudados *Loop* e *Espiral*. Os resultados são mostrados na Fig. 16 onde a energia magnética calculada E_m aparece em função da fração de ocupação ϕ . Em ambos os padrões a energia magnética E_m apresenta comportamento aproximadamente linear em função de ϕ , sendo que o padrão *Loop* exibe um coeficiente angular ligeiramente superior ao caso do padrão *Espiral*. A estrutura formada no padrão *Loop* acumula mais energia do que a formada no padrão *Espiral*. Uma possível justificativa para esta variação está na predominância das estruturas de laços observadas com maior frequência no padrão *Loop*, conforme podemos verificar no detalhe da Fig. 16 onde os dois padrões são mostrados. Podemos perceber por meio do detalhe na figura que não existe frustração quanto ao emparelhamento dos dipolos, em todas as configurações de vizinhanças temos sempre em contato a orientação norte em contato com a orientação sul.

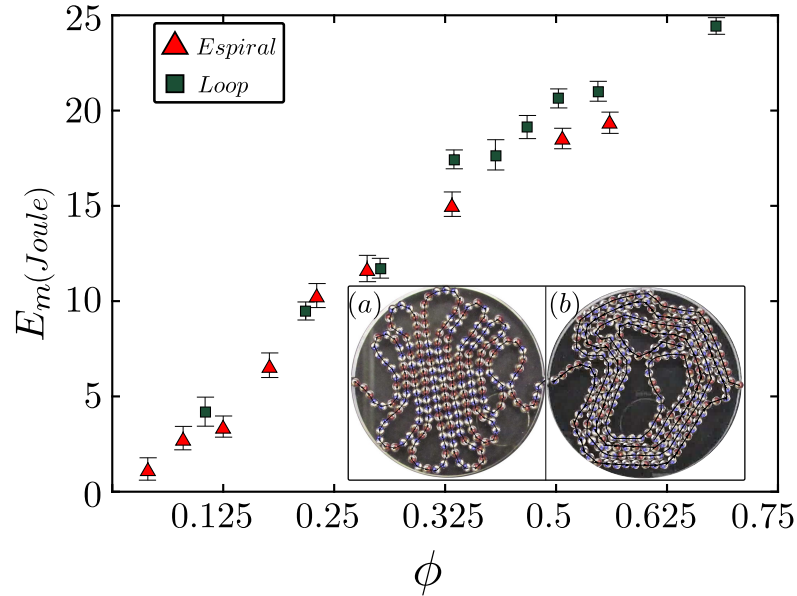


Figura 16: Gráfico da energia magnética E_m acumulada no sistema em função do parâmetro ϕ . Média realizada em 9 experimentos. A energia E_m é expressa em Joules. Os resultados foram obtidos considerando nove configurações distintas de empacotamento para os dois casos analisado. Em detalhe na figura é mostrado exemplos de dois empacotamentos ao final do processo de injeção para os dois tipos: (a) *Loop* e (b) *Espiral*. Podemos perceber por meio do detalhe na figura que não existe frustração quanto ao emparelhamento dos dipolos na condição de contato.

4.7 Padrão do Campo Magnético

Apesar de ser desafiador representar um campo magnético em três dimensões de uma coleção de dipolos magnéticos, podemos ter uma pequena noção desse campo quando olhamos para o mesmo em uma representação no espaço bidimensional. Utilizamos aqui uma idéia bastante difundida nos laboratórios de magnetismo quando se pretende investigar linhas de campo, colocamos uma folha de papel em branco sobre a superfície do acrílico que fica na parte superior da cavidade e sobre esta folha de papel despejamos vagarosamente limalhas de ferro. Com pequenos movimentos oscilatórios aplicados ao papel, aos poucos as limalhas foram alinhando-se ao campo e destacando as linhas de campo. Como resultado deste experimento ilustramos na Fig. 17 o resultado para as duas configurações de empacotamento.

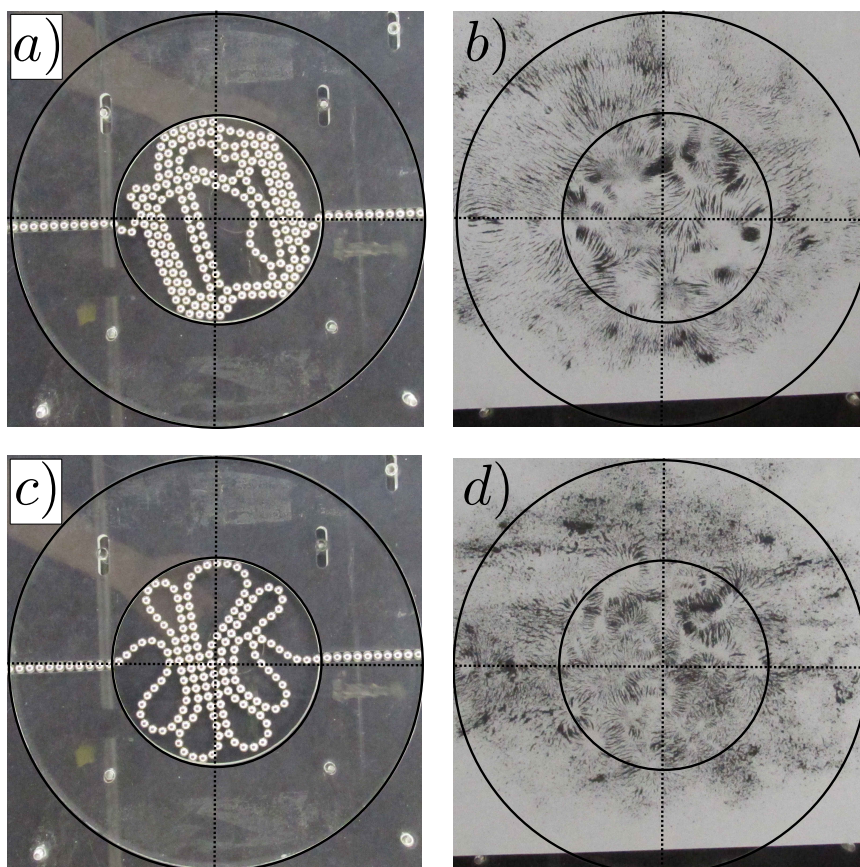


Figura 17: Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade obtida ao final do processo de injeção considerando os dois casos investigados (a) *Espiral* e (c) *Loop*. Em (b) e (d) são mostrados os respectivos padrões das linhas de campo obtidos por meio do uso de limalhas de ferro.

Considerando apenas a região definida pelo círculo menor, podemos observar que a distribuição das limalhas (densidade de limalhas) aparecem mais localizadas em algumas regiões. Levando em consideração a falta de acuracidade do experimento e o caráter apenas qualitativo

do mesmo, podemos em uma boa aproximação afirmar que a presença de regiões com maior adensamento de limalhas ocorre frequentemente para o padrão tipo *Espiral*. Fato que confirma o aspecto mais denso observado neste empacotamento. Outro aspecto interessante, diz respeito a região de atuação do campo magnético das esferas que se estende em ambos os casos, à distâncias superiores ao raio da cavidade. Aspecto mais pronunciado quando observamos o padrão de empacotamento *Espiral*.

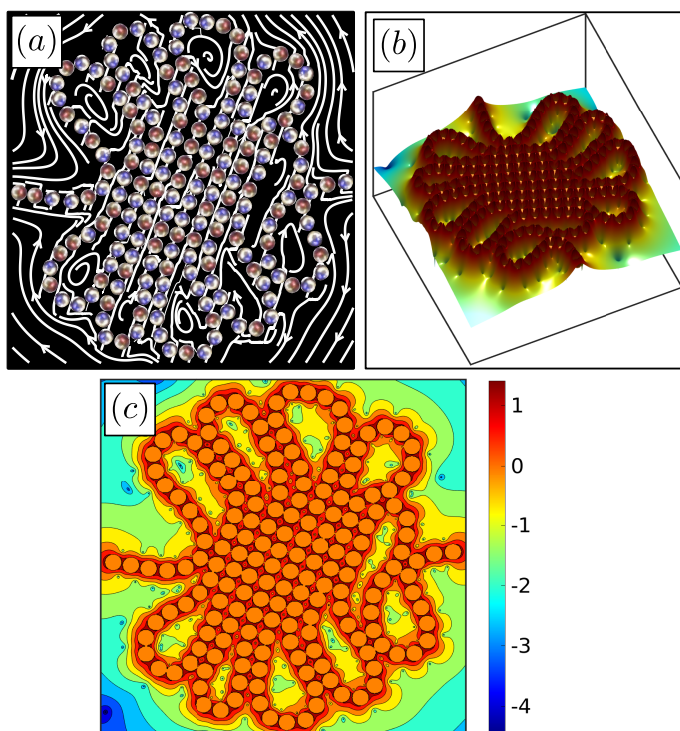


Figura 18: Padrão do campo magnético gerado pelo empacotamento tipo *Loop*. Em (a) podemos verificar as linhas de campo magético B e suas direções. No gráfico (b) mostramos a superfície gerada para a intensidade do campo magnético e em (c) a sua projeção no plano xy . O padrão das cores está distribuído em escala logarítmica para a intensidade do campo B calculado em G (Gauss), sendo o vermelho relacionado ao um campo mais intenso e o azul ao campo mais fraco.

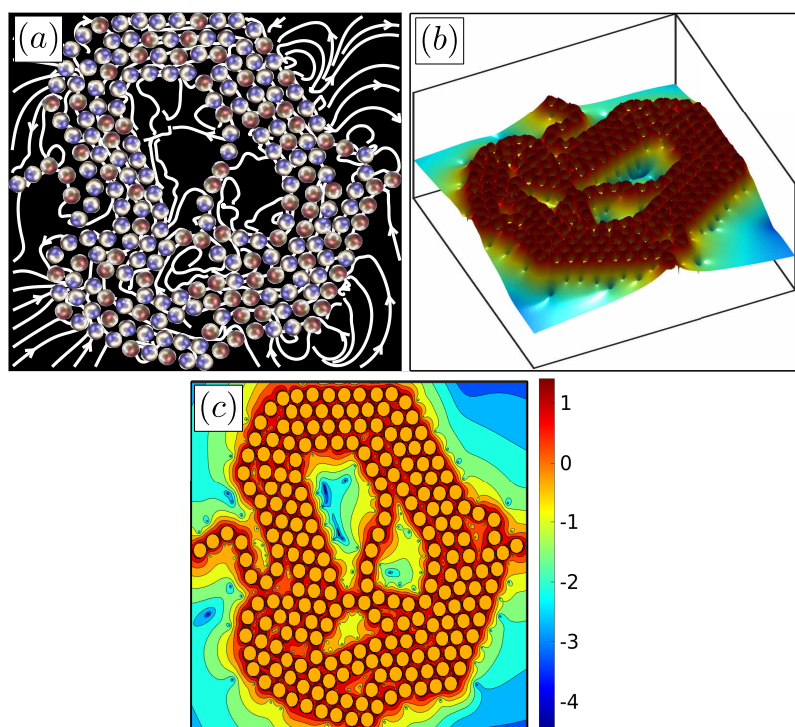


Figura 19: Padrão do campo magnético gerado pelo empacotamento tipo *Espiral*. Em (a) podemos verificar as linhas de campo magético e suas direções. No gráfico (b) mostramos a superfície gerada para a intensidade do campo magnético B e em (c) a sua projeção no plano xy . O padrão das cores está distribuído em escala logarítmica para a intensidade do campo B calculado em G (Gauss), sendo o vermelho relacionado ao um campo mais intenso e o azul ao campo mais fraco.

Ainda na direção de destacar as diferenças entre as duas morfologias optamos por investigar a intensidade do campo magnético B no interior da cavidade. A partir da imagem dos empacotamento com as esferas pintadas é possível obter a orientação de cada dipolo e sua posição. Com base nestas informações conseguimos produzir imagens com a intensidade do campo magnético \vec{B} no interior da cavidade para os dois padrões investigados. Os resultados são mostrados nas figuras 18 e 19. Nas Fig. 18 (a) e Fig. 19(a) mostramos a linhas de campo e suas direções. No padrão *Loop* aparecem vórtices de campo no interior dos laços e na borda externa o campo aparece como circulante a estrutura. As linhas de campo estão mais homogêneas quanto a suas direções. No caso do padrão *Espiral*, embora tenha uma região interna fechada não é possível identificar a presença de vórtices no seu interior. As linhas de campo no contorno externo parecem mais radiais, entrando e saindo na estrutura de empacotamento. Nas Fig. 18 (b) e Fig. 19(b) mostramos a superfície gerada pela intensidade do campo magnético. Identificamos claramente os vales e platôs que se assemelham com a forma geométrica de ambos os empacotamento analisados. As figuras Fig. 18 (c) e Fig. 19(c) exibem as projeções das superfícies de vales e platôs no plano xy , onde as cores indicam a magnitude do campo magnético calculado em G (Gauss). Desta figura com as projeções é fácil identificar a iso-linhas da intensidade do

campo B . Fica evidente que as duas estruturas tipo *Loop* e *Espiral* apresentam configurações de campo magnético completamente diferentes.

4.8 Velocidade Angular do Sistema

Diferentemente do padrão *Loop*, o padrão *Espiral* é considerado um estado dinâmico, pois durante todo o tempo em que esferas são introduzidas na cavidade a estrutura gira continuamente a medida que novas ligações entre os dipolos vão sendo estabelecidas. Este aspecto peculiar observado durante a formação do padrão *Espiral* possibilitou a realização de um cálculo a respeito da velocidade de rotação ω da estrutura como um todo. Com base nos quadros do vídeo realizado durante o experimento foi possível identificar as posições das esferas e calcular quais são as suas variações espaciais em função do tempo ou fração de empacotamento ϕ . Com base nesta estimativa calculamos a velocidade angular ω da estrutura com relação a um eixo localizado no centro de massa da estrutura. O resultado deste cálculo é mostrado na Fig. 20. Podemos observar uma transição bastante acentuada no valor da velocidade angular ω_z em função do parâmetro ϕ . Em destaque na figura 20 mostramos o valor de $\phi_c = 0.225$, o tempo em que a estrutura passa a ser um corpo rígido. As duas filas de esferas se tocam e formando um único corpo passam a girar com uma velocidade angular que vai aumentando de forma aproximadamente linear. Essa rotação permanece até um tempo em que a velocidade angular atinge um valor máximo de saturação $\omega_{max} = 0.23$ rad/s onde esta permanece aproximadamente constante até o instante final do proceso de injeção. Vale salientar que este mecanismo de rotação não é observado para o empacotamento tipo *Loop* sendo um aspecto exclusivo deste tipo de empacotamento. O fato de parte da energia cedida pelo motor ser deslocada para a rotação das esferas, certamente deve influenciar na forma da estrutura tendo em mente que a estrutura formada depende da energia disponível. Conforme citado anteriormente quando discutimos a energia magnética acumulada na estrutura formada durante a injeção, identificamos que para este padrão de empacotamento a energia magnética acumulada no sistema apresenta um valor inferior quando comparado com o padrão tipo *Loop* considerando o mesmo valor de ϕ . Claro que o sistema investigado tem força do tipo dissipativa mas, em uma boa aproximação podemos supor que a dissipação de energia por meio do atrito é praticamente constante nos dois casos. Haja visto que o número de esferas no interior da cavidade para cada valor de ϕ são iguais nos dois casos investigados. Com base nestes argumentos, podemos especular que parte da energia cedida ao sistema pode está sendo direcionada para executar a rotação da estrutura.

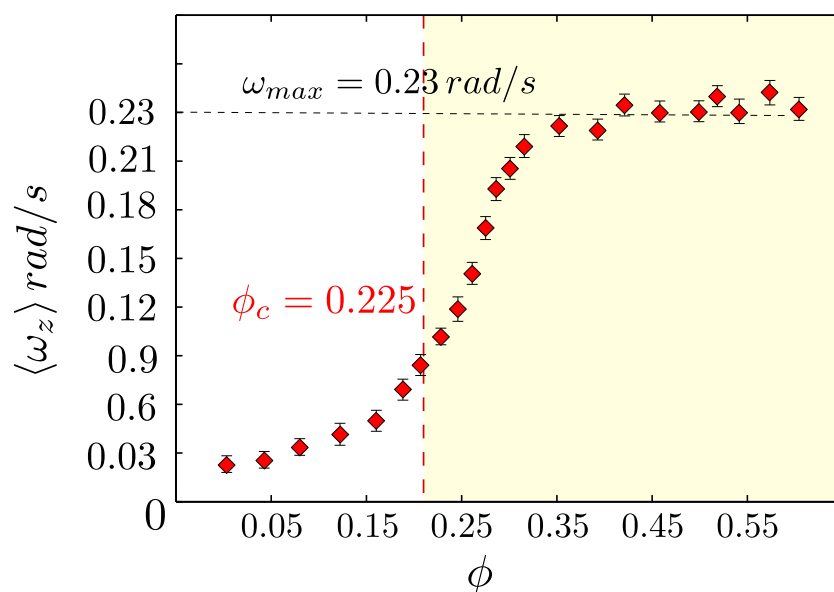


Figura 20: Gráfico da velocidade de rotação ω_z durante o processo de injeção do fio para o caso de um empacotamento do tipo *Espiral*. A medida que o fio vai sendo injetado no interior da cavidade aumenta a fração de ocupação ϕ a estrutura formada vai girando com uma velocidade cada vez maior. A velocidade angular calculada com relação a um eixo que passa pelo centro de massa do sistema.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho realizamos uma série de experimentos acerca do processo de injeção de um fio magnético no interior de uma cavidade circular rígida com o objetivo de obter uma melhor compreensão sobre as características das morfologias geradas dependendo das condições iniciais.

Inicialmente, foi realizado o experimento da injeção do fio formado por esferas que apresentam propriedades magnéticas. Nossos resultados indicaram a possibilidade de formação de duas morfologias que apresentam características bastante distintas. Quando os dois fios injetados em posições diametralmente opostos na cavidade apresentam dipolos magnéticos que apontam na mesma direção, porém em sentidos opostos, observamos a formação do padrão tipo *Espiral*. Já no caso dos dois fios apresentarem dipolos que apontam na mesma direção e sentido, os padrões de empacotamentos são do tipo *Loop*. A seguir, realizamos uma série de análises estatísticas com bases nas imagens das estruturas formadas durante a injeção do fio na cavidade. Como resultados destas análises observamos que a morfologia da estrutura no caso do empacotamento tipo *Loop* apresentava uma distribuição de tamanhos de laços que exibia um comportamento em lei de potência quanto a quantidade de laços formados em função da fração de ocupação da cavidade ϕ do tipo $N_l \propto \phi^\alpha$. Ainda mais, o expoente α que governa o comportamento em lei de potência era bastante diferente dos expoentes encontrados para o caso de empacotamento de fios. Acreditamos que esta diferença se deve a presença de forças de longo alcance que estão presentes em sistemas magnéticos. Outro aspecto que altera o expoente, ocorre devido ao fio magnético ter forças de atração e repulsão o que diferencia do caso de fios elásticos não magnéticos, onde não existe este tipo de força durante o empacotamento.

Em seguida investigamos a morfologia dos empacotamentos quanto a sua estrutura utilizando a função correlação $g(r)$ e constatamos que as duas morfologias formadas apresentavam estruturas do tipo rede quadrada e triangular para os caso dos tipo de empacotamentos tipo *Loop* e *Espiral*, respectivamente. Também realizamos uma medida acerca do número de contatos em função do parâmetro ϕ . Para os dois padrões o número de contatos cresce na forma de uma lei de potência, ou seja $N_c \propto \phi^\gamma$ porém com expoentes γ ligeiramente diferentes $\gamma = 1.37$ no padrão *Espiral* e $\gamma = 1.28$ no padrão *Loop*.

Por fim, tratamos com a energia magnética do sistema a medida que o fio era injetado na cavidade. A energia cresce para os dois padrões na forma linear, porém um pouco mais rápido para o padrão tipo *Loop*. Para melhor o entendimento sobre a energia, passamos para uma fase de análise do campo magnético da estrutura. Com base nas imagens e em cálculos analíticos sobre o campo produzido por dipolos magnéticos, foi possível estabelecer qual a configuração de campo magnético da estrutura formada. No padrão tipo *Loop* as linhas de campo apresentavam formação de vórtices em várias regiões do empacotamento, enquanto que no padrão tipo *Espiral* as linhas de campo eram do tipo radiais, não sendo observados formação de vórtices. E como última análise investigamos a velocidade de rotação da estrutura tipo *Espiral* durante a injeção do fio. Neste tipo de morfologia a medida que o fio era injetado na cavidade a estrutura que se formava apresentava uma rotação cuja velocidade seguia aumentando em função de ϕ , até atingir um valor de saturação. Interessante é que esta velocidade tem uma transição na forma como cresce que ocorre exatamente quando $\phi = 0.225$, que coincide com o momento em que os dois fios que estão sendo injetados em lados opostos se tocam e passam a formar o que podemos definir como um corpo rígido.

Como passos futuros para este trabalho pretendemos implementar simulações numéricas com base na técnica de Dinâmica Molecular. A ideia é simular os experimentos e tentar reproduzir com base em simulações numéricas os resultados encontrados. Também iremos tentar construir um diagrama de fase variando o atrito em que as esferas são submetidas na medida que alteramos a velocidade de injeção ou o campo magnético dos ímãs.

REFERÊNCIAS

- [1] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Science*, 255(5051):1523–1531, 1992.
- [2] Sidney R. Nagel Heinrich M. Jaeger and Robert P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68(1259):15, 1996.
- [3] Igor S. Aranson and Lev S. Tsimring. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. *Reviews of Modern Physics*, 78(641):52, 2006.
- [4] Cameron L Hall, Dominic Vella, and Alain Goriely. The mechanics of a chain or ring of spherical magnets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(6):2029–2054, 2013.
- [5] Dominic Vella, Emmanuel du Pontavice, Cameron L Hall, and Alain Goriely. The magneto-elasticity: from self-buckling to self-assembly. In *Proc. R. Soc. A*, volume 470, page 20130609. The Royal Society, 2014.
- [6] Cassia C Donato, Marcelo AF Gomes, and Ricardo E de Souza. Crumpled wires in two dimensions. *Physical Review E*, 66(1):015102, 2002.
- [7] CC Donato, MAF Gomes, and RE de Souza. Scaling properties in the packing of crumpled wires. *Physical Review E*, 67(2):026110, 2003.
- [8] MAF Gomes, VP Brito, MS Araújo, and CC Donato. Crumpled states of a wire in a two-dimensional cavity with pins. *Physical Review E*, 81(3):031127, 2010.
- [9] YC Lin, YW Lin, and TM Hong. Crumpling wires in two dimensions. *Physical Review E*, 78(6):067101, 2008.
- [10] Roman Vetter, Falk K Wittel, and Hans J Herrmann. Morphogenesis of filaments growing in flexible confinements. *Nature communications*, 5, 2014.
- [11] N Stoop, Falk K Wittel, and HJ Herrmann. Morphological phases of crumpled wire. *Physical review letters*, 101(9):094101, 2008.
- [12] Tim J Atherton and Darren J Kerbyson. Size invariant circle detection. *Image and Vision computing*, 17(11):795–803, 1999.
- [13] HK Yuen, John Princen, John Illingworth, and Josef Kittler. Comparative study of hough transform methods for circle finding. *Image and vision computing*, 8(1):71–77, 1990.
- [14] Ramesh Jain, Rangachar Kasturi, and Brian G Schunck. *Machine vision*, volume 5. McGraw-Hill New York, 1995.
- [15] George A Agoston. *Color theory and its application in art and design*, volume 19. Springer, 2013.
- [16] Region properties. <http://www.mathworks.com/help/images/ref/regionprops.html>. Accessed: 2016-08-13.
- [17] D r v. <https://www.danilorvieira.com/secoes/artigos/3/>. Accessed: 2016-08-13.

-
- [18] Transformação de hough. <http://www.mathworks.com/help/images/ref/imfindcircles.html>. Accessed: 2016-08-13.
- [19] Edward P. Furlani. *Permanent Magnet & Electromechanical Devices: Materials, Analysis, and Applications (Electromagnetism)*. 1st edition, 2001.
- [20] Magtek indústria. <http://www.magtek.com.br/wp-content/uploads/neocube-esferas.pdf>. Accessed: 2016-07-13.
- [21] Cy magnetics. <http://www.cy-magnetics.com/CY-Mag-NdFeB.pdf>. Accessed: 2016-07-13.
- [22] Juha Pyrhonen, Tapani Jokinen, and Valéria Hrabovcová. *Design of rotating electrical machines*. John Wiley & Sons, 2009.
- [23] Alliance LLC Industrial Permanente Magnets. *Fabricante de Neodímio*, 2009 (accessado Abril 07, 2016). http://www.allianceorg.com/pdfs/Magnet_Tutorial_v85_1.pdf.
- [24] Inc. KJ Magnetics. *Fabricante de Neodímio*, 2002 (accessado Abril 07, 2016). <http://www.kjmagnetics.com/FAQ.asp>.
- [25] C. Truesdell. *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788*. Opera mechanica et astronomica 2 / 11,2. Birkhauser Basel, 1960.
- [26] Dominic Vella, Emmanuel du Pontavice, Cameron L. Hall, and Alain Goriely. The magneto-elastica: from self-buckling to self-assembly. 470(2162), 2013.
- [27] N. David Mermin Neil W. Ashcroft. *Solid State Physics*. Brooks Cole, 1 edition, 1976.