



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DIEGO FRANKIN DE SOUZA VERAS

ABORDAGENS NUMÉRICAS NO ESTUDO DE LOCALIZAÇÃO DE
CAMPOS EM BRANAS

FORTALEZA

2016

DIEGO FRANKIN DE SOUZA VERAS

ABORDAGENS NUMÉRICAS NO ESTUDO DE LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS EM
BRANAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA
2016

DIEGO FRANKIN DE SOUZA VERAS

ABORDAGENS NUMÉRICAS NO ESTUDO DE LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS EM
BRANAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 01/08/2016.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Gastão Inacio Krein
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dr. Dionísio Bazeia Filho
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Veras, D. F. S. .
Abordagens numéricas no estudo de localização de campos em branas / Diego
Franklin de Souza Veras. – Fortaleza, 2016.
127.:il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Depar-
tamento de Física, Fortaleza, 2016.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Modelos de mundo-brana. 2. Localização de campos. 3. Metodos
numéricos. 4. Ressonâncias 5. Fenomenologia de branas. I. Título.

CDD:000.0

*À minha família
Klaus e Soraya*

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Soraya pelo encorajamento e apoio nos inúmeros momentos difíceis neste doutorado.

Ao meu filho Klaus pelo inestimável incentivo.

Ao professor Carlos Alberto pela orientação e amizade.

Aos professores do Departamento de Física pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

À todos os demais membros do Grupo de Teoria Quântica de Campos

Aos membros da banca.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, bem como a Universidade Federal do Ceará.

RESUMO

Esta tese apresenta o estudo de localização de campos em cenários de branas em cinco e em seis dimensões. Utilizamos métodos numéricos adequados para estudarmos os modos massivos dos campos gravitacional, vetorial e espinorial sobre vários modelos de mundo-brana. A proposita dos modelos de branas é solucionar alguns dos problemas fundamentais em aberto na Física de Partículas e na Cosmologia, tais como a imensa discrepância entre as escalas de Planck e da teoria eletrofraca, a origem da matéria escura, a aceleração cósmica e o valor da constante cosmológica. Basicamente, a hipótese de mundo-branas propõe que o nosso universo é um defeito topológico possuindo as quatro dimensões espaço-temporais usuais imerso em um espaço de dimensão maior, chamado de *bulk*. Para que as leis físicas quadridimensionais sejam restabelecidas, é necessário que os campos tenham seu modo zero localizado. Isto significa dizer que a solução para massa nula seja finita. Ademais, as soluções com massa diferente de zero, chamadas de modos massivos de Kaluza-Klein (KK), merecem atenção especial. Tais modos possuem implicações fenomenológicas importantes. Por exemplo, para o campo gravitacional, a torre de estados massivos de KK fornece uma correção na lei de Newton para curtas distâncias. Apenas os modelos singulares possuem soluções exatas, os conhecidos modelos de Randall-Sundrum (RS) em cinco dimensões e de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) em seis dimensões. No entanto, tais modelos receberam várias extensões onde a brana deixou de ser singular, passando a ter uma espessura e, conseqüentemente, uma estrutura interna rica. As equações dos modos massivos, de maneira geral, são descritas por problemas de Sturm-Liouville e não possuem solução analítica sendo necessária a utilização de métodos numéricos para se obter uma solução aproximada. A resolução direta da equação de Sturm-Liouville era até então evitada na literatura. Nesta tese, obtemos o espectro e as autofunções dos campos utilizando métodos de discretização em vários modelos de branas espessas. Com isso, pudemos calcular de forma direta a correção na lei de Newton da gravitação devido à torre de estados de Kaluza-Klein para vários modelos de mundo-brana. A abordagem desenvolvida aqui é de grande proveito, podendo ser utilizada como uma ferramenta de seleção para modelos de branas, determinando quais modelos possuem implicações fenomenológicas que concordem com futuras medidas experimentais de desvios no potencial gravitacional.

Palavras-chave: Modelos de mundo-brana. Localização de campos. Métodos numéricos. Ressonâncias Fenomenologia de branas.

ABSTRACT

This thesis presents the use of numerical analysis in the study of field localization in braneworld scenarios in five and six dimensions. We discuss the importance of a model supporting massive states, which carry phenomenology implications. We use suitable numerical methods to attain the spectra and eigenfunctions for the gravitational, gauge and fermionic field in several braneworld models. The braneworld concept proposes to solve some of the most fundamental problems in Particle Physics and Cosmology such as the huge discrepancy between the Planck and electroweak scales, the dark matter origin, the cosmic acceleration and the value of the cosmological constant. In the braneworld hypothesis, our Universe is considered a hypersurface having the usual four space-time dimensions embedded in a bulk space with higher dimension. To guarantee that the four-dimensional laws of Physics is recovered in a dimensional reduction, the massless mode (also called zero-mode, eigenstates with zero energy), must be localized, i.e., finite. Moreover, the massive solutions, called Kaluza-Klein (KK) modes needs special attention. Such modes carry important phenomenological implications. For the gravitational field, for instance, the tower of KK massive states for the graviton implies in small correction in the Newton's law at short distances. Only two models have exact solution to the correction: the Randall-Sundrum and Gherghetta-Shaposhnikov models, respectively in five and six dimensions. In the thick braneworld scenarios, whose brane has a richer internal structure, the calculation to the correction is not possible in an analytical way. The differential equations governing the massive modes in a Sturm-Liouville problem has no analytical solution. We, therefore, present the enforcement of numerical method to solve Sturm-Liouville problems in the context of braneworld models. Such approach allowed us to compute the correction in the Newton's law in several thick braneworld models in five dimensions. The calculation of slight deviations in the gravitational potential may be used as a selection tool for braneworld scenarios match with future experimental measurements in high energy collisions.

Keywords: Braneworld models. Field localization. Numerical methods. Resonance Brane phenomenology.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Desenvolvimento histórico da literatura de dimensões extras	10
1.2	As teorias de Kaluza e Klein	11
1.3	Teorias de Antoniadis, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali	12
1.4	Implicações Fenomenológicas	13
1.5	Nosso intuito e contribuições	14
1.6	Organização da obra	15
2	BRANAS ESPESSAS EM 5 DIMENSÕES	16
2.1	Formalismo geral para construção de branas e localização de gravidade	16
2.1.1	Espectro do gráviton	20
2.1.2	Correções na Lei de Newton	22
2.2	Brana Híbrida Simétrica	23
2.2.1	Motivações	23
2.2.2	O modelo	24
2.3	Brana Híbrida Assimétrica	31
2.3.1	Motivações	31
2.3.2	O modelo	32
2.4	Brana Compacta	34
2.4.1	Motivações	35
2.4.2	O modelo	36
3	RESULTADOS NUMÉRICOS EM 5 DIMENSÕES	41
3.1	Resumo	41
3.2	Aplicação ao modelo de Randall-Sundrum	43
3.3	Resultados para a brana híbrida simétrica	44
3.4	Resultados para as branas híbrida assimétrica e compacta	46
4	BRANAS ESPESSAS EM 6 DIMENSÕES	50
4.1	Introdução	50
4.2	Mundo-branas do tipo-corda e localização de gravidade	53
4.2.1	O modelo de Gherghetta-Shaposhnikov	58
4.2.2	O modelo String-Cigar	61
4.3	Localização do campo de calibre	66

4.3.1	Introdução	66
4.3.2	Localização do campo de spin 1	67
4.4	Localização do campo fermiônico	72
4.4.1	Introdução	72
4.4.2	Localização do campo de spin 1/2	74
4.4.3	Localização do campo de spin 3/2	85
5	RESULTADOS NUMÉRICOS EM 6 DIMENSÕES	90
5.1	Campo gravitacional	90
5.1.1	Modos Ressonantes	92
5.2	Campo vetorial	96
5.3	Campo Fermiônico	98
5.3.1	Modos ressonantes	99
6	CONCLUSÕES	103
6.1	Localização de gravidade em branas híbridas simétricas	103
6.2	Correções na lei de Newton no contexto de mundo branas não-fatorizáveis com codimensão-1	104
6.3	Modos gravitacionais de Kaluza-Klein em um modelo de mundo-brana do tipo <i>string-cigar</i>	105
6.4	Campos de calibre em um modelo de mundo-brana do tipo <i>string-cigar</i>	107
6.5	Modos fermiônicos de Kaluza-Klein em um modelo de mundo-brana do tipo <i>string-cigar</i>	108
	APÊNDICE A – MÉTODO DA MATRIZ PARA PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE	111
	APÊNDICE B – MÉTODO DE NUMEROV	114
	REFERÊNCIAS	118

1 INTRODUÇÃO

1.1 Desenvolvimento histórico da literatura de dimensões extras

Na teoria da relatividade geral, a *gravidade é geométrica* e por isso é muito sensível ao número de dimensões, bem como à forma destas. Devido a essa propriedade, a inclusão de dimensões extras tornou-se um método para solução de problemas relacionados à gravitação. Além disso, o fato de a teoria das cordas ser consistente apenas em 11 dimensões também contribuiu para a ideia de se assumir dimensões extras como tentativa de solução de problemas em Física.

Há dois principais direcionamentos: dimensões compactas e não-compactas. A primeira alega que tais dimensões são muito pequenas para terem influência experimental diretamente. Dentre elas, tem-se a teoria das cordas e a teoria- M . Esses modelos indicam que somente experimentos de altas energias (da ordem da energia de Planck, 10^{19}GeV) seriam capazes de detectar tais dimensões. Experimentos cotidianos não possuem resolução suficiente. A teoria de cordas, por exemplo, descreve as partículas elementares como modos de vibrações de cordas unidimensionais fechadas, também chamadas de membranas bidimensionais. Já os modelos com dimensões extras não compactas assumem que essas dimensões são curvas (não confundir com compactas) e que esta curvatura aprisiona os campos conhecidos nas dimensões usuais. Esses modelos exigem o estudo da **localização** dos campos sobre a brana e tem sido alvo de intensos estudos nas últimas décadas.

A ideia de que nosso Universo pode ser tratado como uma hiper-superfície mergulhada em um espaço-tempo de dimensão maior tem sua origem nos modelos de Kaluza-Klein [1, 2] entre os anos de 1921 e 1926. Após um grande período de recesso, a teoria de Kaluza-Klein entrou novamente em cena com o advento da teoria das cordas na década de 1970. Posteriormente, estudos em dimensões extras voltados a modelos de brana tornou-se novamente assunto entre pesquisadores em 1982 com o intrincado trabalho de K. Akama [3]. Logo em seguida foram propostas idéias bastante semelhantes nos trabalhos de Rubakov, Shaposhnikov e Visser [4–6]. A partir de então, iniciou-se um crescente interesse em modelos alternativos à compactificação de Kaluza-Klein culminando com objetivos voltados à solução do problema da hierarquia via introdução de dimensões extras com os trabalhos seminais de Lisa Randall e Randall Sundrum [7, 8]. Desde então, diversos estudos foram realizados no que se refere à modificações da estrutura da brana, à localização de campos, à extensões para mais dimensões, etc...

A implicação fenomenológica da hipótese de mundo-branas reside em correções

nas leis de Newton da gravitação devido à presença de dimensões extras. Recentemente, a descoberta de um excesso de aproximadamente 750 GeV na massa de um experimento di-fóton observado nos colaboradores do LHC a 13 TeV, o ATLAS [9] e o CMS [10], possui explicação no contexto de mundo-branas não fatorizáveis [11–17].

1.2 As teorias de Kaluza e Klein

Depois de formular a teoria da relatividade geral, Einstein dedicou praticamente suas últimas três décadas de vida à tentativa de unificar, numa só teoria, a força eletromagnética e a força gravitacional. Tal proposta foi idealizada, independentemente, pelos físicos Theodor Kaluza e Oskar Klein. Em 1919, Kaluza propôs que o Universo poderia ter mais do que 4 dimensões, assumindo uma quinta dimensão [1]. Em 1926 o matemático sueco Oskar Klein propôs que o nosso Universo poderia ter dimensões estendidas e enroladas (dobradas sobre si mesmo) [2]. Adicionando uma dimensão extra à Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, Kaluza mostrou que as equações extra eram similares às de Maxwell, unificando a teoria gravitacional de Einstein com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, porém mais tarde as constantes de acoplamento entre as teorias entraram em conflito com as observações experimentais.

Em um espaço-tempo D -dimensional, a teoria da gravitação de Einstein (onde a gravidade é descrita por um campo tensorial de ordem 2) possui $D(D + 1)/2$ graus de liberdade. Já o eletromagnetismo é completamente determinado, devido à simetria de calibre, por um campo vetorial com D graus de liberdade. Dessa forma, Kaluza e Klein perceberam que se partissem de uma teoria D dimensional somente com gravidade poderiam obter uma teoria $(D - 1)$ dimensional que possuísse gravidade e eletromagnetismo. Desta forma, sobra um grau de liberdade que está associado a um campo escalar. Quando feita a redução dimensional, através da compactificação das dimensões extras, este campo escalar acopla-se ao eletromagnetismo de forma a não realizar completamente a unificação desejada. Este campo recebe o nome de *dilaton* e a tentativa de eliminá-lo não se mostrou consistente com as equações de Maxwell.

Para que a teoria seja coerente com as observações astronômicas, a dimensão adicional deve ser compacta e de raio da ordem do comprimento de Planck $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-35} m$, considerado o menor comprimento físico possível. Dada a impossibilidade atual de se fazer experimentos nesta escala, a teoria Kaluza-Klein tornou-se apenas foco de especulações como teoria de unificação.

1.3 Teorias de Antoniadis, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali

Apesar da formulação de Einstein ser completamente diferente da de Newton, ambas indicam a mesma intensidade para a interação gravitacional, já que a constante de acoplamento é a mesma (a constante gravitacional G). Dessa forma, a gravidade continuava a ser dezenas de ordens de grandeza mais fraca que o eletromagnetismo. Essa grande diferença fornece dois níveis distintos de energia: enquanto o eletromagnetismo está no nível eletrofraco ($\sim 10^3$ GeV), a gravidade se encontra no nível de Planck ($\sim 10^{18}$ GeV). A falta de uma explicação para essa diferença intrigou os físicos e motivou pesquisas na direção de entendê-las. Este problema ficou conhecido como o **problema da hierarquia** e foi abordado por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali nos trabalhos [18, 19]. Como a gravidade é geométrica, os autores fizeram uso de dimensões extras compactas para argumentar que a gravidade parece fraca pois está diluída nas demais dimensões. Utilizando o teorema de Gauss, eles concluíram que, se acrescentarmos N dimensões extras com raio de compactificação R , o potencial gravitacional teria o seguinte comportamento

$$V(r) = \frac{G_D m_1 m_2}{r^{1+N}}, \quad r \ll R, \quad (1.1)$$

pois essa escala é de $D = 4 + N$ dimensões planas e

$$V(r) = \frac{G_D}{R^N} \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r \gg R, \quad (1.2)$$

pois nesta escala as dimensões extras já estão saturada e a gravidade cai somente com as dimensões distendidas. Como podemos observar, o efeito dessas dimensões extras em larga escala é o enfraquecimento da constante de acoplamento gravitacional gerando uma constante efetiva $G_4 = G_D/R^N$.

Os modelos ADD [18] e AADD [19], solucionam o problema da hierarquia assumindo que a gravidade em D dimensões está na escala eletrofraca, enquanto que a gravidade efetiva em 4 dimensões se encontra na escala de Planck. No caso $N = 1$, para igualar essas escalas, é necessário que $R \sim 10^{13}$ cm o que está em desacordo com os experimentos, pois a gravidade deve ter o comportamento descrito pela Eq. (1.1) em situações cotidianas. Porém para $N \geq 2$, os experimentos não são capazes de descartar essa possibilidade (por exemplo, para $N = 2$, o raio de compactificação deveria ser de $R \simeq 10^{-1}$ mm).

1.4 Implicações Fenomenológicas

A idéia de que o nosso Universo observável pode ser pensado como uma superfície de $(3 + 1)$ dimensões (chamada de *brana* ou *membrana*) imersa em um espaço-tempo ambiente de dimensão maior tem recebido muita atenção nos últimos anos por fornecer boas explicações para vários fenômenos intrincados em Física de Altas Energias, como a hierarquia entre as escalas eletrofraca e de Planck [7, 20], a origem da matéria escura [21], o pequeno valor da constante cosmológica [22] e a aceleração cósmica [23]. O conceito de mundo-brana surgiu na teoria de cordas [24] e em modelos de unificação [18, 19] e portanto, testes da existência de branas, ou apenas dimensões extras, é um desafio fundamental. Evidências da hipótese de mundo-branas são esperadas de serem encontradas em processos de colisões em altas energias (por exemplo, no Grande Colisor de Hádrons – LHC), onde novos graus de liberdade das partículas surgiriam, como as excitações de Kaluza-Klein (KK) nas dimensões extras [25, 26].

Recentemente, um excesso no espectro de massa do di-fóton foi reportado pelos colaboradores ATLAS e CMS no LHC a 13 TeV [9, 10]. Este resultado singular deu início a um grande número de trabalhos em diversas áreas da Física de Altas Energias propondo interpretações para tal fenômeno. A possibilidade de que um gráviton de KK devido à uma geometria não fatorizável, poderia ser a fonte do excesso de 750 GeV na massa do di-fóton foi discutida na Ref. [11].

Além da busca por comprovações das dimensões extras em colisores de partículas de alta energia, seus efeitos também poderiam ser observados em experimentos de baixa energia utilizando nêutrons, se uma segunda brana existir suficientemente próxima de nós [27]. Nêutron são mais adequados do que elétrons, prótons ou átomos para tais propósitos [28]. De fato, Dubovsky e co-autores mostraram que as partículas do modelo padrão poderiam ser capazes de escaparem para o bulk através de um efeito de tunelamento [29, 30]. Sarrazin and Petit mostraram que para um bulk contendo pelo menos duas 3-branas paralelas invisíveis entre si, a troca de matéria poderia ocorrer entre estes dois mundos devido ao uso de potenciais vetores magnéticos adequados [28, 31–33]. Mais importante, este novo efeito poderia ser detectado e controlado com a tecnologia atual como uma possível confirmação da hipótese de mundo-branas. Recentemente, foi proposto na literatura um experimento para se analisar troca de matéria entre branas observando-se o aparecimento de nêutrons em um conceito similar ao de *luz através da parede* [34]. Nêutrons ultra-resfriados armazenados em um reservatório teriam uma probabilidade não-nula de escapar de nossa brana em direção à brana invisível durante colisões. Tal processo seria notado pelo desaparecimento de nêutrons do ponto vista de um observador na brana

visível [27].

1.5 Nosso intuito e contribuições

O estudo da localização de campos em branas tem como foco obter uma solução sem massa normalizada. À esta solução dá-se o nome de **modo-zero**, que é responsável por recuperar as teorias físicas quadridimensionais após redução dimensional. No entanto, o estudo dos modos massivos (soluções para massas maiores do zero) são igualmente importantes, pois carregam informações sobre a fenomenologia nos modelos de mundo-brana por meio de pequenos desvios no potencial gravitacional de Newton [7, 8]. De maneira geral, os modos massivos são regidos por problemas de Sturm-Liouville os quais não possuem soluções analíticas para modelos de branas espessas. Nesta tese, foi desenvolvida técnicas numéricas adequadas para obter soluções aproximadas para o espectro de massa e as autofunções correspondentes dos campos gravitacional, vetorial e fermiônico em diferentes modelo de branas em cinco e em seis dimensões. Esta abordagem é inédita na literatura de mundo branas. A análise direta das equações diferenciais dos modos massivos era evitada até então.

O trabalho é dividido em duas partes, uma em cinco dimensões e outra em seis dimensões. Na primeira, estudamos os modos massivos gravitacionais nos modelos de branas espessas mais atuais na literatura, as branas híbridas simétrica e assimétrica e a brana compacta. De posse das autosoluções, fomos capazes de calcular a correção na lei gravitacional de Newton nos diferentes modelos e comparar as diferentes contribuições de cada modelo na correção do potencial gravitacional de Newton. Estes resultados foram publicados no periódico *Physics Letters B*:

- **D.F.S. Veras**, W.T. Cruz, R.V. Maluf and C.A.S. Almeida, “*Gravity localization on hybrid branes*”, *Phys. Lett. B* **754** (2016) 201.

Em seis dimensões, fomos mais além, estudando os modos massivos dos campos gravitacional, vetorial e fermiônico no modelo de brana espessa do tipo-corda *string-cigar*. Os campos gravitacional e fermiônico apresentaram um fenômeno muito importante em teorias de branas: modos massivos ressonantes. Tais modos são intensamente estudados em modelos de cinco dimensões. Nesta tese, é encontrada pela primeira vez na literatura, modos massivos ressonantes em seis dimensões. Os resultados apresentados aqui foram publicados nos periódicos *Physics Letters B* e *Physical Review D*:

- **D.F.S. Veras**, J.E.G. Silva, W.T. Cruz and C.A.S. Almeida, “*Gravitational Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld*”, *Phys. Rev. D*, **91** (2015) 065031.

- D.M. Dantas, **D.F.S. Veras**, J.E.G. Silva and C.A.S. Almeida, “*Fermionic Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld*”, Phys. Rev. D, **92** (2015) 104007.
- F.W.V. Costa, J.E.G. Silva, **D.F.S. Veras** and C.A.S. Almeida, “*Gauge fields in a string-cigar braneworld*”, Phys. Lett. B, **747** (2015) 517.

1.6 Organização da obra

Esta tese apresenta seis capítulos. Nos capítulo 2, estudamos o formalismo geral para construção branas e localização de gravidade em cinco dimensões. Discutiremos a respeito da correção no potencial Newtoniano e calcularemos o espectro de massa para o caso de uma brana infinitamente fina (modelos de Randall-Sundrum). Abordaremos em detalhes os modelos de branas espessas mais novos na literatura, as branas híbridas simétrica e assimétrica e brana compacta. No capítulo 3 apresentaremos nossos resultados numéricos do cálculo do espectro de massa e das autofunções do gráviton nos modelos citados. Como teste de nossas rotinas, aplicamos nossos métodos numéricos no modelo de Randall-Sundrum, onde obtemos boas aproximações. Calculamos explicitamente a correção para o potencial gravitacional e comparamos a contribuição de cada modelo.

Em seguida, no Capítulo 6 entramos no estudo de modelos de branas em seis dimensões. Fazemos uma breve revisão dos modelos do tipo corda fina de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) e de corda espessa *string-cigar*, bem como a localização de gravidade. Estudamos ainda a localização do campo de calibre e do campo fermiônico de spin 1/2 (Dirac) e 3/2 (Rarita-Schwinger). No capítulo seguinte apresentaremos nossos resultados numéricos do cálculo do espectro de massa e das autofunções dos quatro campos abordados tanto no modelo de corda fina quanto no modelo de corda espessa. Frequentemente estaremos chamando atenção para a comparação do comportamento dos campos nos dois modelos distintos. Novamente, a fim de testar nossas rotinas aplicamos os métodos numérico no modelo GS, o qual possui solução analítica. Encontramos modos ressonantes para os campos gravitacional e fermiônico. O cálculo de ressonâncias em modelos de seis dimensões era inédito na literatura até então.

Por fim, nossas conclusões e perspectivas estão apresentadas no Capítulo 6. Optamos por separar as conclusões por artigos publicados por razões pedagógicas.

Detalhes sobre o método numérico são apresentados nos Apêndice A e B.

2 BRANAS ESPESSAS EM 5 DIMENSÕES

2.1 Formalismo geral para construção de branas e localização de gravidade

Neste capítulo descreveremos o procedimento usual da construção de um cenário de mundo-brana não fatorizável espesso com codimensão-1 a partir de um defeito topológico. Considere um campo escalar ϕ acoplado à gravidade em um espaço-tempo de cinco dimensões não-fatorizáveis, onde a coordenada extra y tenha extensão infinita. A geometria é descrita pela métrica [8]

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (2.1)$$

onde $A(y)$ é a *função de warp*¹ e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. A função $A(y)$ é quem define o modelo. A ação geral de Einstein-Hilbert com matéria em D dimensões é dada por [35]

$$S_D = -\frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} R + \int d^D x \sqrt{g} \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

onde κ_D é a constante gravitacional em D dimensões, que é relacionada com a constante de Newton G_N e a escala de massa de Planck M_* em D dimensões pela equação:

$$\kappa_D^2 = 8\pi G_N = \frac{8\pi}{M_*^{D-2}}. \quad (2.3)$$

Além disso, R é o escalar de Ricci e $\mathcal{L}(\phi, \partial_M \phi)$ é densidade lagrangeana que descreve o campo escalar,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_M \phi) = \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi), \quad (2.4)$$

onde $M = 0, 1, \dots, D-1$. A função $V(\phi)$ é o potencial que define o modelo, pois a partir dele, determina-se o fator de warp. Os potenciais de auto-interação usuais ϕ^4 e sine-Gordon que possuem soluções do tipo *kink* conduzem à branas modeladas por defeito do tipo *parede de domínio* [36, 37]. Além disso, após o processo de deformação de defeitos topológicos desenvolvido na Ref. [38], diferentes cenários de mundo-brana puderam ser construídos utilizando diversos defeitos topológicos distintos, gerando branas com estruturas internas mais ricas [39–42].

Daqui em diante, trabalharemos em $D = 5$ e na notação $4\pi G_5 = 1$ das Refs. [43–45]. Supondo que o campo escalar dependa apenas da dimensão extra, as equações

¹Nesta tese, nos referiremos à $\sigma = e^{-A(y)}$ como *fator de warp*

de movimento, juntamente com as equações de Einstein, fornecem o sistema de equações diferenciais [36]

$$\phi'' + 4\phi'A' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.5)$$

$$A'' = -\frac{2}{3}(\phi')^2, \quad (2.6)$$

$$(A')^2 = \frac{1}{6}\phi' - \frac{1}{3}V(\phi), \quad (2.7)$$

onde as linhas (\prime) denotam derivadas com respeito a y . Note que a escolha do defeito topológico ϕ determina diretamente o fator de warp, conseqüentemente, define o modelo. É comum denominar um determinado modelo de brana por termos oriundos do defeito topológico, por exemplo, parede de domínio, corda, sine-Gordon, etc.

O tratamento geral das flutuações de forma direta é bastante difícil, por exigir que seja resolvido um complicado sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas [46]. Por outro lado, a abordagem do super-potencial desenvolvido por Bazeia e co-autores na Ref. [39], é um mecanismo bastante útil que transforma as equações de movimento de segunda ordem em equações de primeira ordem. Para este fim, o **superpotencial** $W(\phi)$ é definido, a partir de $V(\phi)$, como [39]

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2. \quad (2.8)$$

Com isto, as equações de primeira ordem

$$\phi' = \frac{dW}{d\phi}, \quad \text{e} \quad A' = -\frac{2}{3}W(\phi) \quad (2.9)$$

solucionam as equações de movimento (2.5), (2.6) e (2.7). Portanto, o potencial no espaço-tempo curvo $\mathcal{V}(\phi)$ é dado por:

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{4}{3}W^2(\phi). \quad (2.10)$$

A estabilidade de um modelo de brana é explorada por meio da **localização de gravidade**. Ela é feita através de pequenas flutuações na métrica (2.16) efetuando a seguinte perturbação $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, y)$ [36]:

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu\nu}dx_{\mu\nu} + dy^2. \quad (2.11)$$

A quantidade $h_{\mu\nu}$ é um campo tensorial que descreve o *gráviton*, partícula hipotética mediadora da força gravitacional. É importante ressaltar que a perturbação

é feita apenas na brana. Além disso é importante fixar determinados calibres. Sabe-se da teoria da relatividade geral que o campo $g_{\mu\nu}$ deve ser sem massa e ter spin-2. A perturbação $h_{\mu\nu}$ dá origem a excitações escalares e vetoriais no tensor $g_{\mu\nu}$. Portanto, deve-se impor o calibre traço-nulo, i.e., $h^\mu{}_\mu = 0$, para eliminar as componentes escalares (spin-0), e o calibre transversal $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ que elimina componentes vetoriais (spin-1).

Em relatividade geral, é importante que o campo tensorial $h_{\mu\nu}$ obedeça a certos vínculos, que são os calibres transversal e de traço nulo. Para o leitor interessado, sugerimos os livros de relatividade geral nas Refs. [47–49] para uma leitura mais aprofundada. Outro calibre de grande importância é o que faça garantir que toda a perturbação seja feita apenas na brana: $h_{5N} = 0$. Essas 10 considerações restringem o número de graus de liberdade do tensor simétrico 5×5 h_{MN} de 15 para 5, como desejável para partículas de spin-2 em cinco dimensões (ver seção 10.6 da Ref. [50]).

Com todas essas considerações, a equação de movimento do gráviton fica dada por [36]

$$h''_{\mu\nu} + \frac{2\sigma'}{\sigma} h'_{\mu\nu} = \sigma^{-1} \square h_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde \square é o operador de d'Alembert em $(3 + 1)$ dimensões e $\sigma(y) = e^{2A(y)}$. Considere agora a decomposição de Kaluza-Klein, que essencialmente é uma técnica de separação de variáveis:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, y) = \sum_n h_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{x}) \varphi_n(y), \quad (2.13)$$

onde $\eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(0)} = -m_n^2 h_{\mu\nu}^{(0)}$, com m_n sendo as massas de Kaluza-Klein da flutuação. Com isso, os modos gravitacionais de Kaluza-Klein na dimensão extra, $\varphi(y)$ são descritos pela seguinte equação de Sturm-Liouville

$$\varphi_n''(y) + \frac{2\sigma'}{\sigma} \varphi_n'(y) = -m_n^2 \sigma^{-1} \varphi_n(y). \quad (2.14)$$

Logo, os modos massivos são descritos por um problema de Sturm-Liouville. Suas auto-soluções formam a chamada *torre de estados de Kaluza-Klein*. É necessário que todas as autofunções diverjam assintoticamente, caso contrário, teria-se modos massivos localizados na brana, o que não é observado no nosso Universo; a gravidade quadridimensional é descrita por um campo sem massa. Dependendo da forma do fator de warp, a Eq. (2.14) não possui solução analítica. No capítulo 3 mostraremos as soluções para alguns modelos mais sofisticados obtidas numericamente pelo método da matriz.

As soluções do problema de Sturm-Liouville para os modos massivos fornecem informações a respeito da localização (ou não) dos modos. Porém, uma outra abordagem é bastante seguida na literatura. Nela, efetua-se a seguinte mudança de coordenadas [51]:

$$dz = \sigma^{-1/2} dy, \quad (2.15)$$

o que leva a métrica (2.16) à uma forma conforme

$$ds^2 = \sigma(z) \left[\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2 \right]. \quad (2.16)$$

Além disso, efetuando-se a seguinte mudança na variável dependente:

$$\varphi_n(z) = \sigma^{-3/4} \psi_n(z), \quad (2.17)$$

a equação de Sturm-Liouville (2.14) é reduzida a uma equação do tipo Schrödinger [51]

$$-\ddot{\psi}_n(z) + U(z)\psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z), \quad (2.18)$$

onde

$$U(z) = \frac{3}{4} \left[\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} - \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

é o *potencial quântico análogo* e os pontos representam derivadas com respeito a z . Neste outro formalismo, é obtido informações a respeito da fenomenologia do modelo de brana. As autofunções do problema de Schrödinger, juntamente com seus autovalores (que são os mesmos para o problema de Sturm-Liouville) contribuem diretamente na correção para o potencial gravitacional de Newton. Além disso, apesar do problema ser inteiramente clássico, interpretações de mecânica quântica são bem utilizáveis. Detalhes a respeito disso, serão apresentados no decorrer desta tese. Novamente, a transformação de coordenadas (2.15) não possui solução analítica para um fator de warp mais complexo. É necessária, portanto uma integração numérica que pode ser feita pelo método de Simpson ou Monte Carlo, por exemplo.

Uma condição necessária para se manter a estabilidade do setor gravitacional é a ausência de estados taquiônicos (modos com massas imaginárias). Isto é assegurado pelo Hamiltoniano poder ser expresso na forma [52]

$$H = \left\{ -\frac{d}{dz} + \frac{3\dot{\sigma}}{4\sigma} \right\} \left\{ \frac{d}{dz} + \frac{3\dot{\sigma}}{4\sigma} \right\}, \quad (2.20)$$

que possui uma forma análoga à mecânica quântica supersimétrica:

$$Q^\dagger Q \psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z), \quad \text{com} \quad Q \equiv \frac{d}{dz} + \frac{3\dot{\sigma}}{4\sigma}. \quad (2.21)$$

A solução para o modo zero ($m = 0$) da Eq. (2.18) para uma forma genérica do fator de warp é dada por [51]:

$$\psi_0(z) = \sigma^{3/2}(z), \quad (2.22)$$

que é finita e normalizada. Esta solução deve ser localizada pois, na redução dimensional, esta autofunção deve reproduzir a gravidade quadridimensional [8, 51].

Uma outra quantidade geométrica importante é o escalar de curvatura $R(y)$ dado em termos do fator de warp como

$$R(y) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + 19 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (2.23)$$

O limite anti-de Sitter AdS_5 do *bulk* é caracterizado pelo comportamento assintótico da curvatura escalar tendendo à uma constante negativa. Além disso, a presença de regiões com escalar de Ricci positivo pode, em princípio, estar relacionada com a capacidade de suportar modos como estados ressonantes [53], que são modos massivos quasi-localizados fortemente acoplados com a brana [54, 55].

2.1.1 Espectro do gráviton

As massas da torre de Kaluza-Klein são as quantidades físicas de maior interesse no estudo da fenomenologia de um cenário de brana. Mostraremos na próxima seção sua influência direta na correção da lei de Newton. Oriundas do problema de Sturm-Liouville (2.14), as massas de Kaluza-Klein não possuem uma solução analítica para formas mais sofisticadas do fator de warp $\sigma(y)$. Apenas nos modelos de Randall-Sundrum (RS) [7, 8], cujo fator de warp é dado por

$$\sigma_{RS}(y) = e^{-2k|y|}, \quad (2.24)$$

o espectro possui uma forma fechada. A seguir apresentaremos detalhes da derivação do espectro para o caso de um brana infinitamente fina.

A solução da Eq. (2.18) no cenário RS, é uma combinação linear de funções de Bessel [8]:

$$\psi_n(z) = \sqrt{|z| + 1/k} \left[a_n J_2 \left(m_n (|z| + 1/k) \right) + b_n Y_2 \left(m_n (|z| + 1/k) \right) \right], \quad (2.25)$$

onde J e Y são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, e a_n e b_n são constantes.

Assim como no “problema da caixa em mecânica quântica”, a presença de

duas branas no modelo RS-1, que corresponde a um *cut-off* na dimensão extra, induz a quantização das massas dos estados de Kaluza-Klein. O espectro é obtido impondo-se as condições de contorno [8]:

$$\psi'_n(L_z) = -\frac{3k^2}{2(kL_z + 1)}\psi_n(L_z), \quad (2.26)$$

onde L_z é posição da brana na escala de TeV na coordenada z . $L_z = 0$ corresponde à brana de Planck. A transformação de coordenadas $z(y)$ tem a seguinte solução analítica para o fator de warp dada na Eq. (2.24):

$$|z| = (e^{k|y|} - 1)/k. \quad (2.27)$$

Logo, retornando para a coordenada y , que efetivamente representa a distância ao longo da dimensão extra, o *cut-off* torna-se $L_z = e^{kL}/k$. Portanto, impondo a condição de contorno (2.26) na solução geral (2.25), temos

$$\begin{aligned} a_n J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) + b_n Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) &= 0, \\ a_n J_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right) + b_n Y_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

que possui solução somente se seu determinante se anular, isto é:

$$\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{J_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right)} = \frac{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right)}. \quad (2.29)$$

Na aproximação de pequenas massas, onde $m_n/k \ll 1$, temos

$$J_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right) = 0. \quad (2.30)$$

Portanto, as massas da torre de Kaluza-Klein são dadas por

$$m_n \approx k e^{-kL} j_n, \quad (2.31)$$

onde j_n são as raízes da função de Bessel de ordem um, $J_1(j_n) = 0$, e são tabeladas. O espectro é discreto e monotonicamente crescente, mas não igualmente espaçado. Além disso, no modelo RS-1, o espectro reduz à $m_n = k j_n e^{-kr_c \pi}$ [56], onde r_c é o **raio de compactificação** da dimensão extra. Note que há um gap exponencialmente suprimido entre o modo sem massa e o primeiro modo massivo. É importante notar que o *cut-off* influencia diretamente o espectro. Se $L \rightarrow \infty$, o gap de massa vai à zero. Ademais, futuras observações de desvios na lei gravitacional de Newton podem ser utilizadas para se ajustar os parâmetros L e k adequadamente.

2.1.2 Correções na Lei de Newton

Com o objetivo de se recuperar a gravidade quadridimensional na brana, além do modo zero localizado, também é exigido que as outras soluções da equação de Schrödinger, não conduzam à grandes correções na lei de Newton da teoria quadridimensional. Para calculá-los, uma autofunção discreta do operador de Schrödinger com energia m^2 atua em quatro dimensões como um campo de massa m [52] e, conseqüentemente, contribui com uma correção do tipo Yukawa no potencial gravitacional em quatro dimensões entre duas massas de prova M_1 e M_2 na brana em $z = 0$ como [52]

$$\mathcal{U}(r) \approx G_N \frac{M_1 M_2}{r} + M_*^{-3} \frac{M_1 M_2 e^{-mr}}{r} \psi_m^2(0), \quad (2.32)$$

onde a autofunção é normalizada a $\int dz \psi_m^2(0) = 1$ e M_* é a escala fundamental de Planck em $5D$. Há medida em que m cresce, a correção se torna exponencialmente menor. No modelo de Randall-Sundrum, o potencial estático gerado pela troca do modo-zero e de um propagador do modo contínuo de Kaluza-Klein é [8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r) &\approx G_N \frac{M_1 M_2}{r} + \int_0^\infty \frac{dm}{k} G_N \frac{M_1 M_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{k} \\ &= G_N \frac{M_1 M_2}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

O termo líder, devido ao estado ligado (estado de energia-zero) é o potencial Newtoniano usual. Além disso, os modos Kaluza-Klein geram um termo de correção extremamente suprimido.

É importante notar que as quantidades necessárias para calcular a correção no potencial gravitacional são as massas da torre de Kaluza-Klein e os valores das autofunções de Schrödinger correspondentes na origem. Como mencionando anteriormente, tais quantidades não podem ser obtidas analiticamente. É portanto, necessário métodos numéricos para resolver as equações (2.14) e (2.18). No capítulo 3 mostraremos os resultados numéricos da correção no potencial gravitacional para os modelos de branas mais atuais na literatura: brana de sine-Gordon [37], a brana híbrida simétrica [43], a brana híbrida assimétrica [44] e a brana compacta [45].

2.2 Brana Híbrida Simétrica

Nesta seção abordaremos um modelo de brana bastante sofisticado, construído por Bazeia e co-autores em 2014 [43]. Estudaremos ainda nesta seção a localização de gravidade. Os resultados que serão aqui apresentados foram publicados, já neste ano, na revista *Physics Letters B*. Sua referência completa está na Ref. [57]. Fizemos ainda neste artigo a correção na lei de Newton devido aos modos massivos gravitacionais de Kaluza-Klein. Os resultados numéricos, mostramos no capítulo 3.

2.2.1 Motivações

Sólitons são estruturas encontradas como soluções de certas classes de equações diferenciais que surgem de efeitos não-lineares e dispersivos do meio [58, 59]. Estas *estruturas coerentes* estão presentes em diversos contextos físicos, tais como fibra ótica [60], cadeias de proteínas e de polietilenos [61–63], macromolécula de DNA [64], plasmas [65], junções de Josephson [66] e muitos outros. Em teoria de campos, os defeitos topológicos (soluções que são estáveis contra decaimento para a soluções trivial) normalmente aparecem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria. Os exemplos mais conhecidos são os kinks e as paredes de domínio, vórtices, cordas e monopólos [67].

Uma solução solitônica interessante é o *compacton* encontradas por Rosenau e Hyman [68] como soluções de uma classe especial da equação de Korteweg-de Vries (KdV). Tais estruturas possuem perfil compacto. Elas diferem da solução trivial apenas em uma região finita do espaço. Compactons são encontradas em uma grande variedade de sistemas físicos, onde a dispersão não-linear surge naturalmente. Por exemplo, a equação que governa o movimento de uma densa cadeia é um protótipo de sistemas que suportam compactons [69, 70]. Além disso, um modelo dinâmico não-linear da macromolécula de DNA também pode suportar sólitons topológicos [71]. Recentemente, foi observada a existências de ondas de matéria do tipo compacton em condensados de Bose-Einstein em redes óticas profundas [72].

Investigação da presença de compactons teorias de campos escalares relativísticos também foram feitas [43, 73–75]. O modelo ϕ^4 com acoplamento não-linear pode exibir uma solução estática compacta [73]. Ademais, dispersão não-linear pode dar origem à estruturas compactas em modelos descritos por um campo escalar real em um espaço-tempo de duas dimensões [43, 74, 75].

O interesse físico em compactons, reside no fato de serem soluções de ondas solitárias cuja energia é estritamente localizada. Ademais, diferentemente das ondas solitônicas ordinárias que se tendem a se anular assintoticamente no infinito, duas soluções

do tipo *compacton* so interagiriam entre si após o momento de colisão [68].

Recentemente, Bazeia e co-autores desenvolveram um mecanismo que interpola suavemente entre kinks e compactons no contexto de uma teoria de campo [43]. Tal mecanismo tornou possível a construção de um cenário de mundo-brana gerado por um defeito do tipo *compacton*. A resultante brana espessa possui um comportamento híbrido (e, portanto, chamada de *brana híbrida*): enquanto que branas espessas usuais comportam-se como branas finas assintoticamente, a brana híbrida comporta-se como uma brana fina quando a dimensão extra estiver fora de um determinado domínio finito, onde a densidade de energia é não-trivial.

Uma razão importante de se incluir estruturas topológicas do tipo *compacton* para se gerar um cenário de brana espessa, é o fato de que sua espessura pode ser controlada, ao contrário dos modelos de parede domínio ordinários [76].

2.2.2 O modelo

Nesta seção, apresentaremos o formalismo para se construir um cenário de mundo-brana em um espaço-tempo de cinco dimensões não fatorizáveis gerada por um defeito do tipo *compacton*. Partiremos da densidade lagrangeana \mathcal{L} para um campo escalar real $\phi(x)$ com quebra espontânea de simetria em sua forma adimensional:

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_k(\phi), \quad (2.34)$$

onde

$$V_k(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (2.35)$$

A solução topológica que conecta os dois mínimos $\phi_0 = \pm 1$ é a bem conhecida solução do tipo *kink* dada explicitamente por

$$\phi_k(x) = \tanh x. \quad (2.36)$$

Sua densidade de energia é²

$$\rho_k(x) = \text{sech}^4 x. \quad (2.37)$$

Nas figuras 1 e 2 plotamos os gráficos das Eqs. (2.36) e (2.37), respectivamente. A densidade de energia do defeito possui a forma conhecida por sino³. Soluções do tipo *kink* são bastante comuns em Física por estarem relacionados à fenômenos de transição de fase.

Defeitos do tipo *compacton* surgem em teoria de campos relativística do la-

²Sobreavisamos o leitor a não confundir com as notações do Capítulo 4, onde ρ designará a coordenada radial extra.

³do inglês “bell-shaped”.

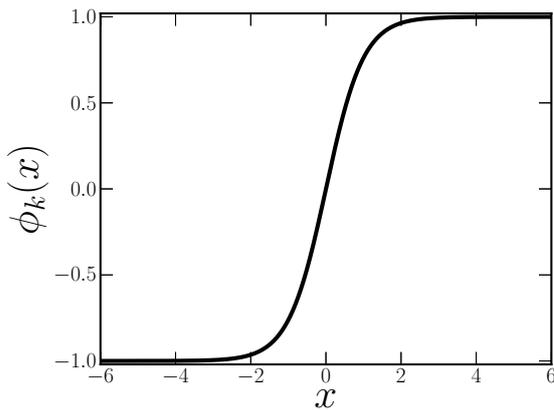


Figura 1: Gráfico da solução tipo *kink* dada pela Eq. (2.36). Esta solução atinge seu estado de vácuo (mínimos do potencial) assintoticamente.

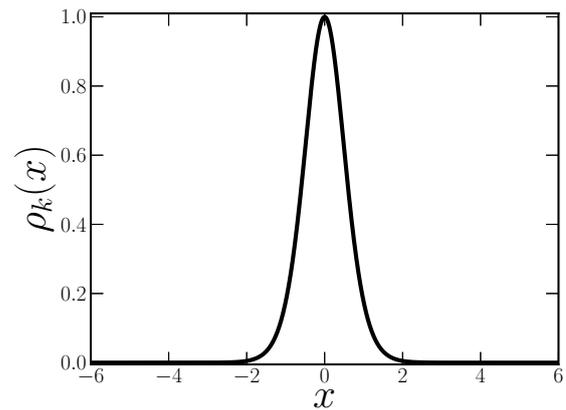


Figura 2: Gráfico da densidade de energia do defeito tipo-*kink* dada pela Eq. (2.37). Está localizada em todo espaço e tende à zero assintoticamente.

grangeano

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2 - \frac{3}{2} V_k(\phi), \quad (2.38)$$

cuja equação de movimento é

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\phi(1 - \phi^2). \quad (2.39)$$

Neste modelo, a não-linearidade surge do potencial é a cinemática generalizada introduz dispersão não-linear [43]. A solução topológica da Eq. (2.39) é dada por

$$\phi_c(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < \pi/2, \\ \sin x & \text{se } |x| \leq \pi/2, \\ 1 & \text{se } x > \pi/2. \end{cases} \quad (2.40)$$

Esta solução é estável e sua densidade de energia é dada por [43]

$$\rho_c(x) = \begin{cases} \cos^4 x & \text{se } |x| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases} \quad (2.41)$$

Plotamos nas figuras 3 e 4 os gráficos das Eqs (2.40) e (2.41), respectivamente. Note que a solução ϕ_c e sua densidade de energia têm um suporte bem localizado exibindo a estrutura do tipo *compacton* do modelo. A solução *compacton* atinge seus mínimos exatamente a partir dos limites do domínio compacto $[-\pi/2, \pi/2]$. A densidade de energia se anula para $x < -\pi/2$ e para $x > 2\pi/2$, o que leva a entender que o defeito topológico está inteiramente localizado dentro do domínio compacto $[-\pi/2, \pi/2]$.

Embora os dois cenários sejam bastante distintos, um método que interpola

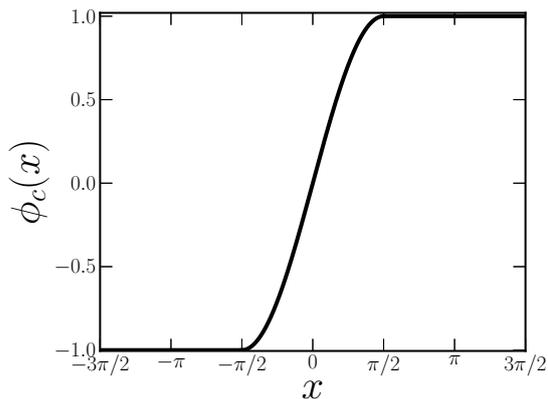


Figura 3: Gráfico da solução do tipo *compacton* dada pela Eq. (2.40). A solução atinge seu vácuo exatamente para $x = \pm\pi/2$.

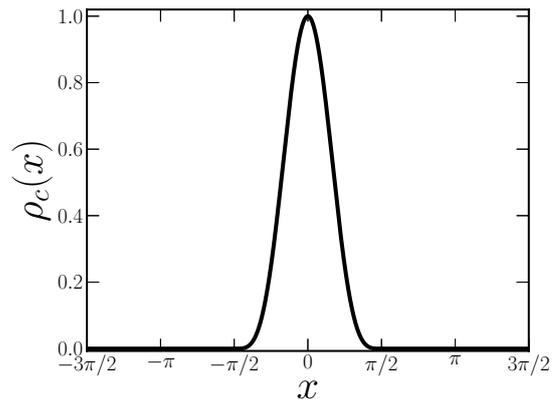


Figura 4: Gráfico da densidade de energia do defeito do tipo *compacton* dada pela Eq. (2.41). A energia se anula para $x < -\pi/2$ e para $x > \pi/2$.

suavemente de kinks à compactons foi proposto na Ref. [43] através dos potenciais

$$V_\alpha(\phi) = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + 4\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) V_k(\phi) - 1} \right) \quad (2.42)$$

e

$$V_n(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^{2n})^2, \quad (2.43)$$

com α sendo um parâmetro real não-negativo e $n \geq 1$ um parâmetro inteiro. Plotamos nas Figs. 5 e 6 os potenciais V_α e V_n , respectivamente, para diferentes valores dos parâmetros α e n . Note que, para $n = 1$ e no limite $\alpha \rightarrow 0$, o potencial ϕ^4 usual é recuperado. Os máximos e mínimos são inalterados. Além disso, a deformação em V_α é muito lenta se comparada com V_n . Note ainda que, tanto para $\alpha = 100$ quanto para $\alpha = 10\,000$, V_α é apenas muito levemente modificado designando uma saturação no modelo com o parâmetro. Além disso, V_n adquire uma forma compacta para grandes valores de n .

Os potenciais descritos acima possuem soluções do tipo *compacton*, que mostraremos ainda nesta seção. Tais soluções são capazes de gerar um cenário de branas com codimensão-1 conhecidos como *branas híbridas*: enquanto que branas espessas usuais comportam-se como branas finas assintoticamente, a brana híbrida se comporta como bran fina quando a dimensão extra estiver fora de um domínio compacto, onde a densidade de energia é não trivial [43].

Na Ref. [43] é construído um cenário de brana gerada por um defeito do tipo compacton apenas para o modelo V_n . Nós, no entanto, construímos através de métodos numéricos adequados a brana híbrida tanto para V_n quanto para V_α , onde pudemos comparar os dois modelos no estudo da localização da gravidade que será discutido no capítulo

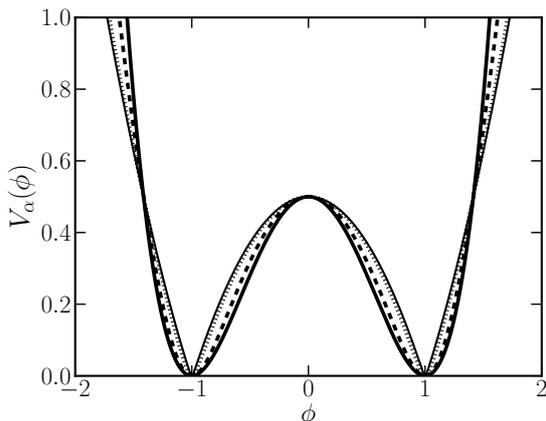


Figura 5: Gráfico do potencial de deformação V_α dado pela Eq. (2.42). Os valores dos parâmetros utilizados foram $\alpha = 0,001$ (linha cheia), $\alpha = 1,0$ (linha tracejada), $\alpha = 100,0$ (linha pontilhada) e $\alpha = 10.000,0$ (linha fina).

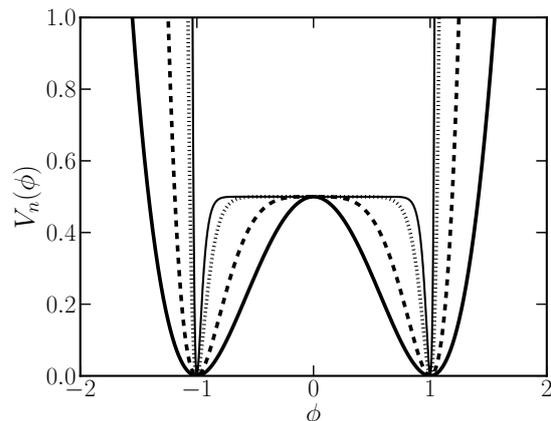


Figura 6: Gráfico do potencial de deformação V_n dado pela Eq. (2.43). Os valores dos parâmetros utilizados foram $n = 1$ (linha cheia), $n = 2$ (linha tracejada), $n = 3$ (traço e ponto), $n = 15$ (linha pontilhada) e $n = 100$ (linha fina).

3.

A fim de obtermos os superpotenciais $W_\alpha(\phi)$ e $W_n(\phi)$, nós efetuamos a integração numérica da Eq. (2.8) utilizando o método de Simpson que foi detalhado na seção ???. Isto nos torna capazes de construir o potencial que gera a brana $\mathcal{V}_\alpha(\phi)$ e $\mathcal{V}_n(\phi)$ dados pela Eq. (2.10). Plotamos na figura 7 a aproximação numérica do potencial que gera a brana. Note que apenas V_n possui um comportamento compactado. O resultado para o modelo V_n concorda com a solução analítica para W_n e \mathcal{V}_n dadas, respectivamente, por [43]

$$W_n(\phi) = \phi - \frac{\phi^{2n+1}}{2n+1}, \quad (2.44)$$

e

$$\mathcal{V}_n(\phi) = \frac{1}{8}(1 - \phi^{2n})^2 - \frac{1}{3} \left(\phi - \frac{\phi^{1+2n}}{1+2n} \right)^2. \quad (2.45)$$

Com a aproximação numérica do superpotencial $W_{\alpha,n}$ em mãos, nós fomos capazes ainda de obtermos os campos escalares $\phi_{\alpha,n}(y)$ e os fatores de warp $\sigma_{\alpha,n}(y) = e^{A_{\alpha,n}(y)}$. Para isso, nós resolvemos as equações de movimento estáticas (2.9) usando algoritmos de Runge-Kutta de quarta ordem, detalhados na seção ??, impondo a condição inicial $\phi_{\alpha,n}(0) = 0$. Foi necessário resolver o problema em dois regimes separados: para $\phi < 0$ e para $\phi > 0$. Nós plotamos na Fig. 8 $\phi_{\alpha,n}(y)$ para diferentes valores dos parâmetros. Assim como para os potenciais, as soluções se comportam como *kinks* para $n = 1$ e $\alpha \rightarrow 0$. No entanto, para grandes valores dos parâmetros, as soluções se identificam com o defeito do tipo *compacton*. Ademais, note que $\phi_n(y)$ aproxima-se muito melhor do defeito do tipo

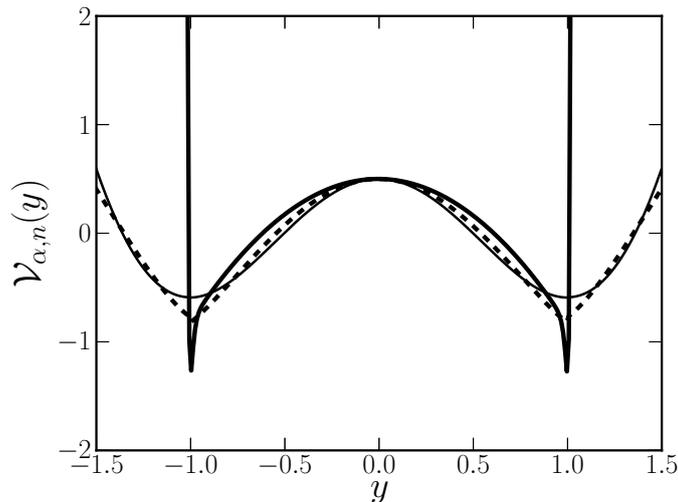


Figura 7: Potencial no espaço-tempo curvo. A linha fina corresponde à brana gerada pelo modelo ϕ^4 . A linha tracejada é o gráfico de \mathcal{V}_{α} e a linha cheia, o gráfico de \mathcal{V}_n .

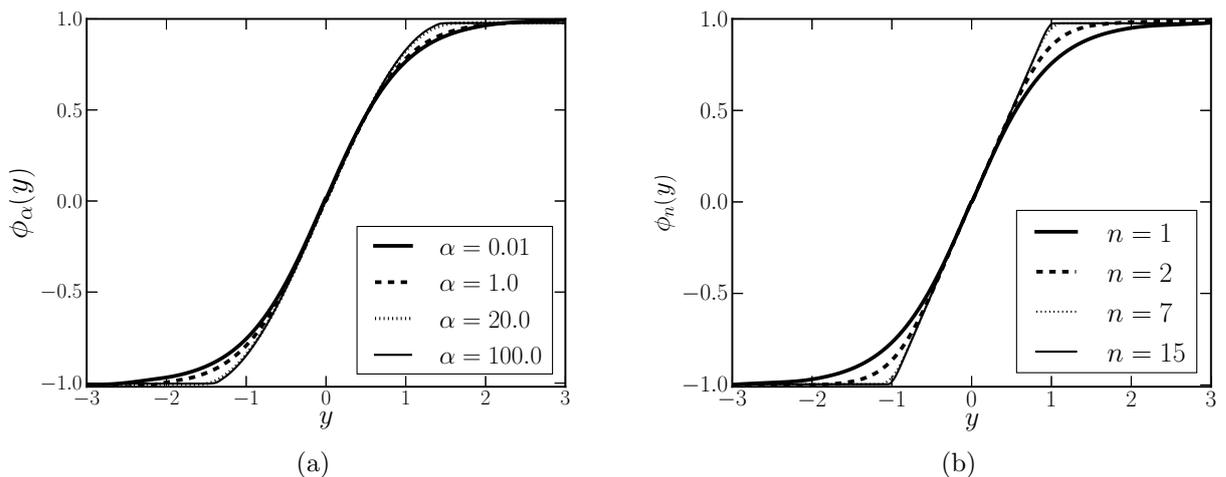


Figura 8: Solução numérica para o campo escalar $\phi_{\alpha}(y)$ em (a) e $\phi_n(y)$ em (b) que gera a brana. Note que a solução ϕ_n para grandes valores de n se aproxima do defeito tipo *compacton*.

compacton no domínio finito $[-1, 1]$ do que $\phi_{\alpha}(y)$.

Para obtermos as funções de warp, nós aplicamos o método de Shooting Linear, detalhado na seção ??, na Eq. (2.6) com rotinas de Runge-Kutta de quarta ordem. Os fatores de warp $\sigma_{\alpha,n}(y) \equiv e^{2A_{\alpha,n}(y)}$ estão plotados na Fig. 9. Note que σ_{α} evolui muito mais lentamente do que σ_n .

O caráter híbrido da brana é mais claramente observado no escalar de curvatura, dado pela Eq. (2.23). Nós plotamos nas Figs. 10 e 11 os escalares de curvatura R_{α} e R_n , respectivamente. Em ambos os casos, o limite AdS_5 do *bulk* está presente, caracterizado por R tender à uma constante negativa assintoticamente. Porém, note que R_n possui uma abrupta mudança para um valor constante negativo, evidenciando uma

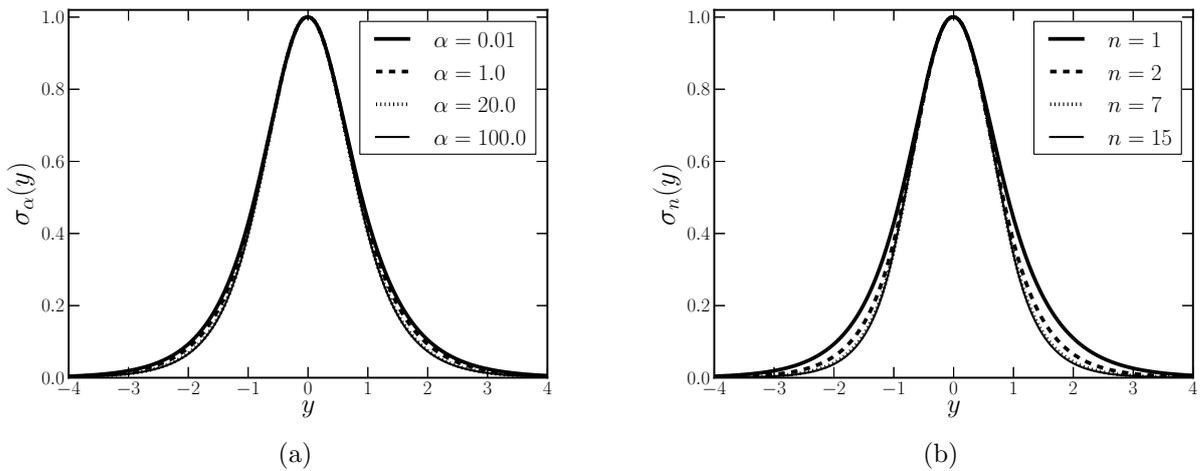


Figura 9: Fatores de warp $\sigma_\alpha(y) \equiv e^{2A_\alpha(y)}$ em (a) e $\sigma_n(y) \equiv e^{2A_n(y)}$ em (b). Note que σ_α evolui muito mais lentamente do que σ_n .

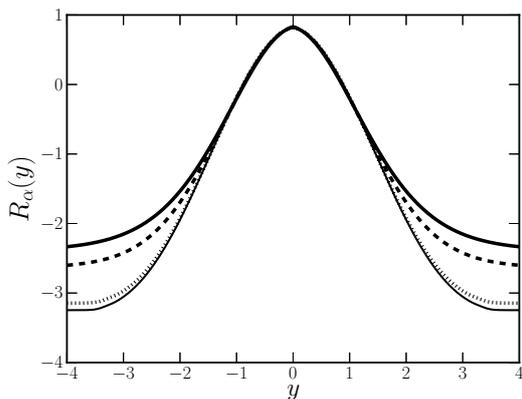


Figura 10: Escalar de curvatura $R_\alpha(y)$ para $\alpha = 0,01$ (linha cheia), $\alpha = 1,0$ (linha tracejada), $\alpha = 20,0$ (linha pontilhada) e $\alpha = 150,0$ (linha fina).

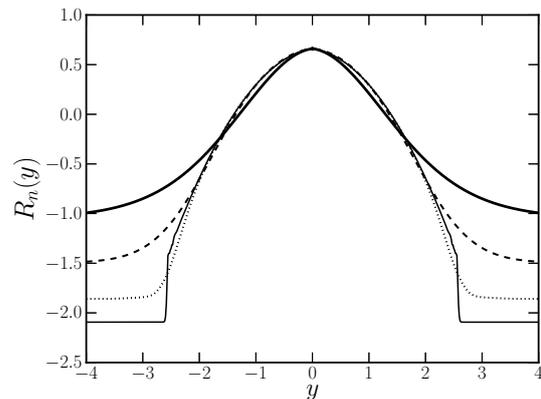


Figura 11: Escalar de curvatura $R_n(y)$ para $n = 1$ (linha cheia), $n = 2$ (linha tracejada), $n = 7$ (linha pontilhada) e $n = 100$ (linha fina). A mudança abrupta para uma constante negativa claramente caracteriza o comportamento híbrido da brana.

imediate mudança na curvatura do *bulk*. Isso evidencia mais claramente o caráter híbrido da brana, pois imediatamente após $|y| \approx 1.5$ a curvatura do *bulk* é constante o que caracteriza a brana fina. Portanto, o modelo V_n conduz melhor à uma brana híbrida do que o modelo V_α .

Por fim, calculamos o potencial quântico análogo utilizando as aproximações numéricas dos fatores de warp na coordenada z . Primeiramente é necessário ter a transformação $z(\rho)$. Para isto, discretizamos o intervalo $[-6, 6]$ em $N = 1200$ de modo a obtermos um passo de 0,01. Calculamos então, a integral numérica (2.15) pela regra de

Simpson em cada sítio da rede. Plotamos o resultado na Figura 12 para diferentes valores dos parâmetros n . Para o primeiro modelo, V_α , não houveram alterações significativas com a variação do parâmetro α . Por este motivo, omitimos seu gráfico. Note o comportamento exponencial, o que é esperado, pois para a brana fina de Randall-Sundrum esta transformação é dada pela Eq. (2.27).

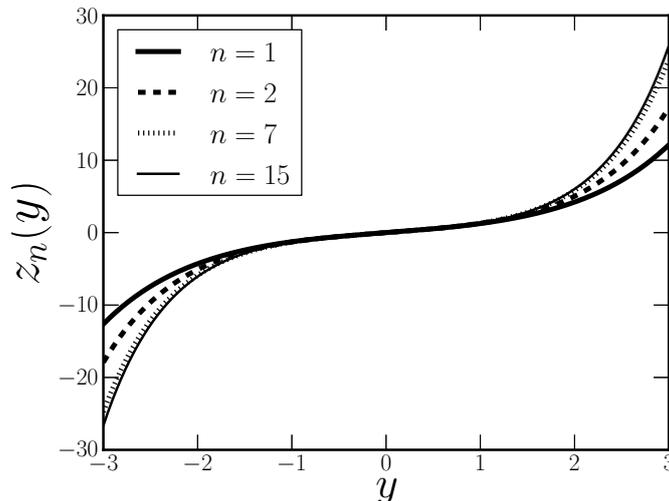


Figura 12: Transformação de coordenadas $z_n(y)$ para a brana híbrida simétrica modelada pelo potencial V_n .

De posse da transformação $z(\rho)$ fomos capazes de construir os fatores de warp na nova coordenada z . Para isso, utilizamos uma interpolação polinomial por *splines* cúbicos fixados. As condições de contorno fixadas foram obtidas determinando as derivadas de $z(y)$ através de diferenças finitas progressivas em $y = -6$ e regressivas em $y = 6$.

Tendo em mãos as listas com as aproximações numéricas de $\sigma(z)$, calculamos suas derivadas utilizando diferenças finitas centradas. Com isso, foi possível construir o potencial quântico análogo. Nós plotamos nas Figs. 13 e 14 os potenciais U_α e U_n , respectivamente. Ambos possuem o usual comportamento vulcão [36], que pode suportar estados ligados. Porém, apenas o potencial U_n possui um comportamento híbrido. Note que o padrão brana fina ($\sim |z|^{-2}$) [8] está presente imediatamente após o domínio compacto ($\approx |z| \leq 3$), ao invés de assintoticamente. O modelo \mathcal{L}_α não propicia mudanças significativas no usual cenário de brana espessa modelada por uma parede de domínio.

As soluções numéricas das Eqs. (2.14) e (2.18) para o fator de warp da brana híbrida serão apresentadas no capítulo 3.

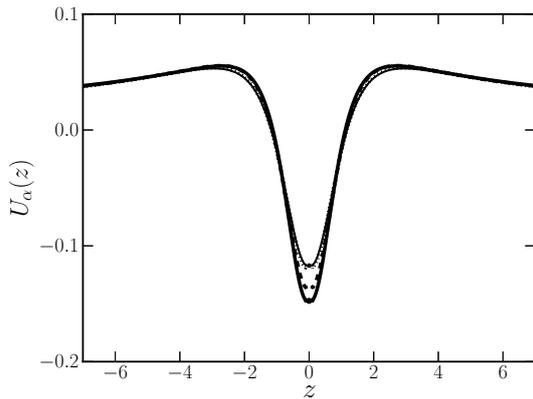


Figura 13: Potencial quântico análogo $U_\alpha(z)$ para $\alpha = 0,01$ (linha cheia), $\alpha = 1,0$ (linha tracejada), $\alpha = 20,0$ (linha pontilhada) e $\alpha = 150,0$ (linha fina). Não há mudanças significativas com respeito à α .

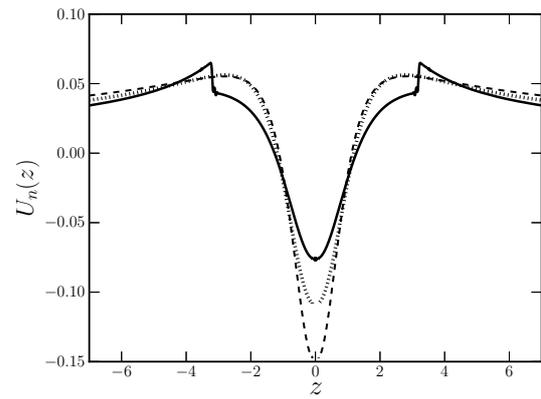


Figura 14: Potencial quântico análogo $U_n(z)$ para $n = 1$ (linha tracejada), $n = 2$ (linha pontilhada) e $n = 100$ (linha cheia). A característica do tipo compacton do campo escalar proporciona a mudança abrupta no potencial evidenciando o caráter da brana híbrida.

2.3 Brana Híbrida Assimétrica

Nesta seção estudaremos uma modificação do modelo de brana híbrida simétrica proposto em 2015 na Ref. [44], a brana híbrida assimétrica. Diferentemente do caso simétrico, apresentado na seção anterior, este modelo de brana apresenta uma característica híbrida apenas em um dos setores da solução. No presente caso, apenas o setor negativo da solução para o campo escalar é do tipo *compacton*. O estudo acerca dos modos massivos, inédito na literatura até então, será apresentado no capítulo 3, onde fazemos também a correção no potencial newtoniano.

2.3.1 Motivações

Em geral, cenários de branas espessas geram branas simétricas pelo fato de os campos de fonte possuírem simetria Z_2 . Isto significa que o perfil da brana ao longo da dimensão extra é o mesmo tanto para o “lado direito” quanto para o “lado esquerdo”. No entanto, pode-se também considerar uma brana assimétrica se o campo escalar suportar estruturas assimétricas. Isto implica dizer que o perfil da brana será diferente dependendo da porção do domínio ser positiva ou negativa.

As características assimétricas da brana são de grande interesse e têm sido estudadas por diversos autores com motivações distintas. Termos de gravidade induzida na ação estendem o cenário de Randall-Sundrum para o caso em que a simetria Z_2 é quebrada [77]. Além disso, na Ref. [78] é mostrado que um espaço-tempo do tipo parede

de domínio com quebra de simetria de reflexão é estático. Branas assimétricas também são de grande interesse em cosmologia, cuja contribuição está na aceleração cósmica [79–81], além de também conduzirem à outras abordagens do problema da hierarquia, onde a assimetria pode ser pensada como uma consequência de diferentes constantes cosmológicas em cada setor do defeito [82–84].

2.3.2 O modelo

O seguinte potencial [44]

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi)^2(1 + \phi^p)^2, \quad (2.46)$$

conduz ao superpotencial

$$W_p(\phi) = \phi - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^{1+p}}{1+p} - \frac{\phi^{2+p}}{2+p}, \quad (2.47)$$

onde p é um inteiro ímpar. Note que o modelo ϕ^4 é recuperado para $p = 1$. O potencial $V_p(\phi)$ está ilustrado na figura 15 para diferentes valores de p . O parâmetro p induz uma assimetria especial: diferentemente da brana híbrida simétrica, o potencial adquire uma forma compacta apenas no setor de ϕ negativo.

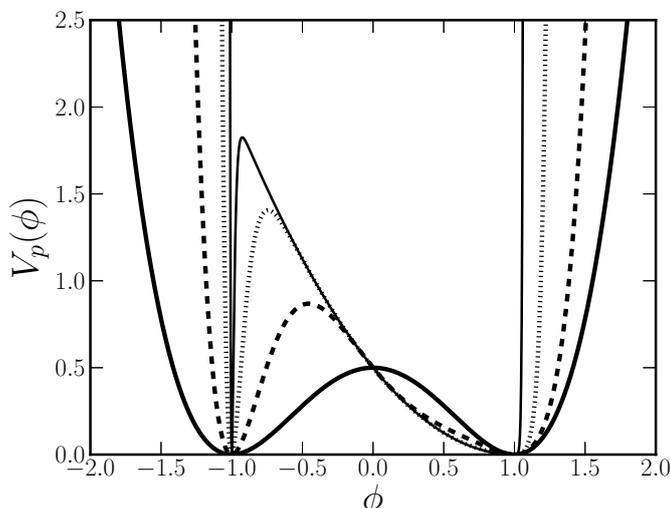


Figura 15: Gráfico do potencial $V_p(\phi)$ para $p = 1$ (linha cheia), $p = 3$ (linha tracejada), $p = 11$ (linha pontilhada) e $p = 63$ (linha fina). A função potencial adquire um perfil compacto no setor de ϕ - negativo.

A solução do campo e o fator de warp são obtidas da equação (2.9). Devido à complexidade da forma do superpotencial, foi preciso o mesmo tratamento numérico desenvolvido para a brana híbrida simétrica. Nós resolvemos a equação de campo usando algoritmos de Runge-Kutta de quarta ordem com a condição de contorno $\phi_p(0) = 0$ em

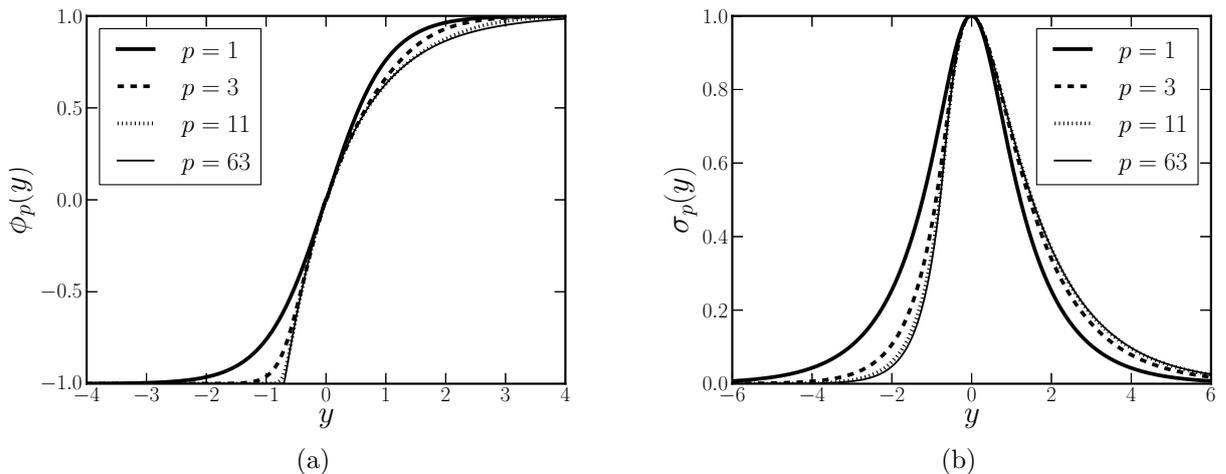


Figura 16: Solução do campo escalar $\phi_p(y)$ em (a) e solução para o fator de warp $\sigma_p(y)$ em (b) para diferentes valores de p . A brana híbrida assimétrica é gerada por um defeito topológico do tipo *half-compacton* que causa uma assimetria no fator de warp.

cada setor. Para a equação do fator de warp, nós usamos o método de *shooting* com a condição inicial $A_p(0) = 0$ em cada setor. Plotamos as soluções numéricas na Fig. 16. Note que a brana híbrida assimétrica é gerada por um defeito do tipo *half-compacton* e, conseqüentemente, o perfil híbrido está presente para $y < -1$. Entende-se por *half-compacton* uma solução, onde o defeito seja do tipo compacton apenas em um dos setores da solução, no presente caso, o setor negativo.

Nós ainda calculamos o escalar de curvatura dado pela Eq. (2.23), que plotamos na Fig. 17. A repentina mudança para uma constante negativa caracteriza o perfil híbrido da brana. Além disso, os diferentes valores assintóticos, isto é, $|R(-\infty)| \neq |R(+\infty)|$, evidencia os diferentes valores da constante cosmológica do *bulk* em cada “lado” da brana. Nós ainda plotamos o potencial no espaço-tempo curvo na Fig. 18. Note que ele adquire uma forma limitada na parte negativa do domínio devido à porção compacton do campo escalar.

Finalmente, calculamos o potencial quântico análogo $U_p(z)$ pelos mesmos métodos desenvolvidos para a brana híbrida simétrica. Plotamos na figura 19 a solução numérica para a mudança de coordenada $z(\rho)$. Note o comportamento assimétrico. Na figura 20 plotamos o potencial de Schrödinger. O caso para $p = 1$ coincide com a parede de domínio ordinária. Note novamente o perfil híbrido para z negativo, onde o potencial se comporta como uma brana fina ($\approx 1/|z|^2$). É importante mencionar que a pequena altura da barreira de potencial é capaz de afetar apenas pequenas massas. O fato de tanto o poço quanto a barreira de potencial diminuírem dificultam a interação dos modos massivos com a brana. Isto será discutido em detalhes no capítulo 3.

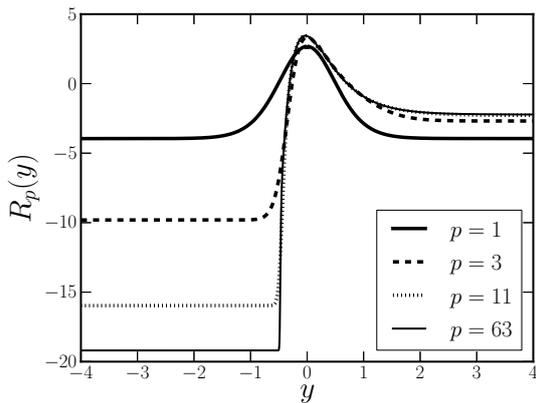


Figura 17: Escalar de curvatura para a brana híbrida assimétrica. A mudança abrupta para uma constante negativa para $y \approx -0.5$ caracteriza o perfil híbrido da brana.

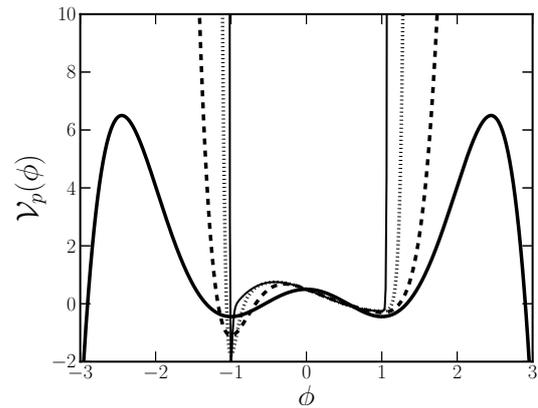


Figura 18: Gráfico do potencial no espaço-tempo curvo \mathcal{V}_p para os mesmo valores de p da Fig. 17. O potencial adquire um perfil compacto na parte negativa do domínio.

2.4 Brana Compacta

Nesta seção abordaremos o modelo de branas mais novo na literatura, a sofisticada brana compacta proposta por Bazeia e co-autores em 2015 na Ref. [45]. Diferentemente das branas híbridas, este cenário possui um **fator de warp compacto**⁴. O estudo acerca dos modos massivos, inédito na literatura até então, será apresentado no capítulo 3, onde fazemos também a correção no potencial newtoniano.

⁴Não confundir com o defeito do tipo *compacton*

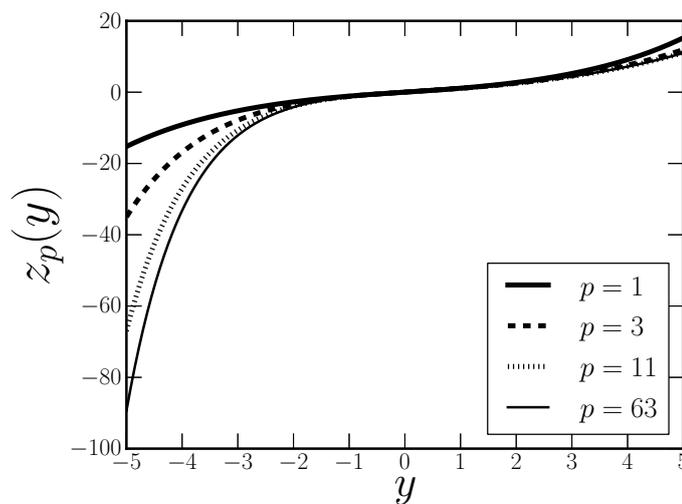


Figura 19: Transformação de coordenadas $z_p(y)$ para a brana híbrida assimétrica.

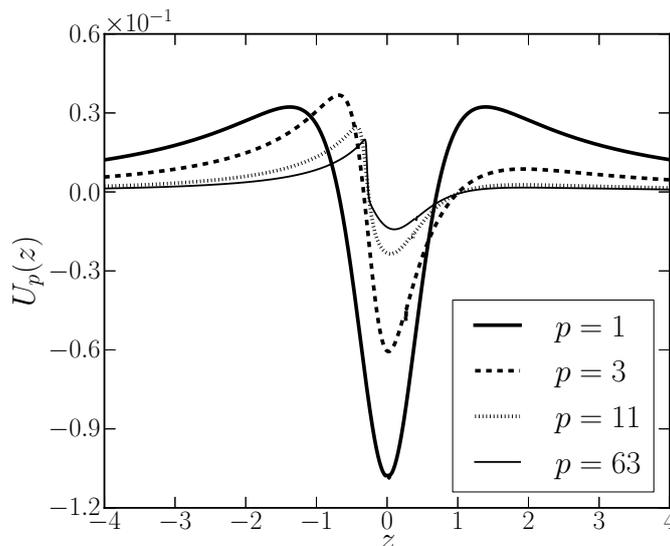


Figura 20: Potencial quântico análogo para a brana híbrida assimétrica. O caso para $p = 1$ coincide com o defeito topológico tipo-kink oriundo do modelo ϕ^4 . Há medida em que o caráter híbrido evolui, a barreira de potencial diminui.

2.4.1 Motivações

As estruturas topológicas do tipo *kink* podem ser descritas por um campo escalar com energia de auto-interação que pode ser descrita por potenciais polinomiais e não-polinomiais. No caso de potenciais polinomiais, considera-se normalmente polinômios de quarta ou sexta ordem. Ordens mais elevadas também podem ser consideradas, onde as soluções são conhecidas por *multi-kinks*. No caso não-polinomial, têm-se os potenciais de sine-Gordon e sinh-Gordon.

É comum na literatura de modelos de branas espessas deformações de potenciais polinomiais [38–44]. Ademais, com o intuito de se trabalhar com deformações de funções trigonométricas, Bazeia e co-autores propuseram um super-potencial bastante particular, descrito em termos das funções elípticas de Jacobi [45]. Essas funções especiais são conduzidas por um parâmetro real que conecta funções trigonométricas com hiperbólicas. Tal escolha trouxe como ganho um modelo de brana rebuscado, onde o fator de warp, responsável por descrever a geometria da brana, assume um caráter **compacto** [45].

Nesta subseção a seguir, discutiremos brevemente sobre a construção do modelo de brana compacta e suas principais quantidades físicas oriundas do estudo da localização de gravidade desenvolvida na Ref. [45]. No capítulo 3 apresentaremos a aplicação dos nossos métodos numéricos a fim de estudarmos a fenomenologia da brana compacta fazendo o cálculo da correção do potencial de Newton.

2.4.2 O modelo

O mais novo modelo de mundo-brana, proposto na Ref. [45], é a chamada *brana compacta*, cujo super-potencial é dado por

$$W_\lambda(\phi) = -\frac{1}{(1-\lambda)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(\phi, \lambda)}{\operatorname{dn}(\phi, \lambda)} \right), \quad (2.48)$$

onde $\operatorname{sn}(\phi, \lambda)$ e $\operatorname{dn}(\phi, \lambda)$ são as funções elípticas de Jacobi introduzidas pelo matemático prussiano Carl Gustav Jakob Jacobi por volta de 1830. As funções elípticas de Jacobi básicas são denotadas por $\operatorname{sn}(\phi, \lambda)$, $\operatorname{cn}(\phi, \lambda)$ e $\operatorname{dn}(\phi, \lambda)$, onde λ é um parâmetro no domínio $[0, 1]$ chamado módulo elíptico. Além disso, $\operatorname{cd}(\phi, \lambda) = \operatorname{cn}(\phi, \lambda) / \operatorname{dn}(\phi, \lambda)$. Elas surgem da inversão da integral elíptica de primeira espécie. Ao leitor interessado, a Ref. [85] apresenta um texto introdutório sobre as funções elípticas de Jacobi e algumas aplicações. Para uma leitura mais aprofundada, sugerimos os livros [86] e [87].

As funções elípticas de Jacobi satisfazem as duas relações algébricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2(\phi, \lambda) + \operatorname{sn}^2(\phi, \lambda) &= 1, \\ \operatorname{dn}^2(\phi, \lambda) + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(\phi, \lambda) &= 1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Além disso, as derivadas das três funções elípticas de Jacobi básicas são

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \operatorname{sn}(\phi, \lambda) &= \operatorname{cn}(\phi, \lambda) \operatorname{dn}(\phi, \lambda), \\ \frac{d}{d\phi} \operatorname{cn}(\phi, \lambda) &= -\operatorname{sn}(\phi, \lambda) \operatorname{dn}(\phi, \lambda), \\ \frac{d}{d\phi} \operatorname{dn}(\phi, \lambda) &= -\lambda^2 \operatorname{sn}(\phi, \lambda) \operatorname{cn}(\phi, \lambda). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Tais funções são interessantes, pois englobam tanto as funções trigonométricas quanto as hiperbólicas. Para $\lambda = 0$, tem-se as funções trigonométricas usuais, enquanto que para $\lambda = 1$, tem-se as funções hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\phi, 0) &= \sin \phi, & \operatorname{cn}(\phi, 0) &= \cos \phi, \\ \operatorname{sn}(\phi, 1) &= \tanh \phi, & \operatorname{cn}(\phi, 1) &= \operatorname{dn}(\phi, 0) = \operatorname{sech} \phi. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Com isso, o potencial do defeito tipo-kink torna-se

$$V(\phi) = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[\frac{1}{8} \frac{\operatorname{cn}(\phi, \lambda)^2}{\operatorname{dn}(\phi, \lambda)^2} - \frac{1}{3\lambda} \ln^2 \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(\phi, \lambda)}{\operatorname{dn}(\phi, \lambda)} \right) \right]. \quad (2.52)$$

Seu gráfico está plotado na Fig. 21 para diferentes valores de λ . O potencial evolui rapidamente com a variação do parâmetro λ . Além disso, seu mínimo também muda.

Note que para $\lambda = 0$, o potencial de sine-Gordon é recuperado.

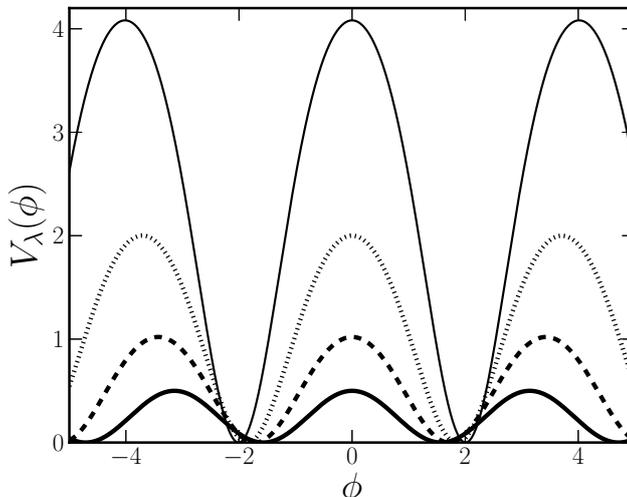


Figura 21: Potencial $V_\lambda(\phi)$ para $\lambda = 0.0$ (linha cheia), $\lambda = 0.30$ (linha tracejada), $\lambda = 0.50$ (linha pontilhada) e $\lambda = 0.65$ (linha fina).

Portanto, a equação para o campo escalar fica

$$\phi'_\lambda(y) = \frac{dW_\lambda}{d\phi} = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{\text{cn}(\phi, \lambda)}{\text{dn}(\phi, \lambda)}, \quad (2.53)$$

que possui solução analítica [45]

$$\phi_\lambda(y) = \text{sn}^{-1} \left[\tanh \left(\frac{y}{2(1 - \lambda)} \right), \lambda \right]. \quad (2.54)$$

A solução para o fator de warp foi obtida numericamente utilizando o mesmo método das branas híbridas. Plotamos nas Figs. 22 e 23 o campo escalar e o fator de warp, respectivamente.

A solução para o campo escalar de fundo torna-se compacta (não confunda com o defeito *compacton*) e seus valores assintóticos crescem com λ , o que está de acordo com o deslocamento dos mínimos de $V_\lambda(\phi)$. Note que, quando $\lambda \rightarrow 1$ a largura do fator de warp diminui significativamente tornando a dimensão extra compacta. No sub-gráfico da Fig. 23, plotamos, junto com o caso da brana compacta, o fator de warp do modelo de Randall-Sundrum com $k = 30, 5$, isto é, $\sigma_{RS} = e^{-70,0|y|}$. Logo, pode-se concluir que a brana compacta corresponde a um cenário de mundo-brana com alta curvatura. Esta característica previne o suporte a estados massivos, como mostraremos no capítulo 3.

O caráter compacto da brana é reforçado no escalar de curvatura, que plotamos na Fig. 24. Há medida em que o parâmetro λ aumenta, a brana apresenta-se cada vez mais comprimida em torno da origem.

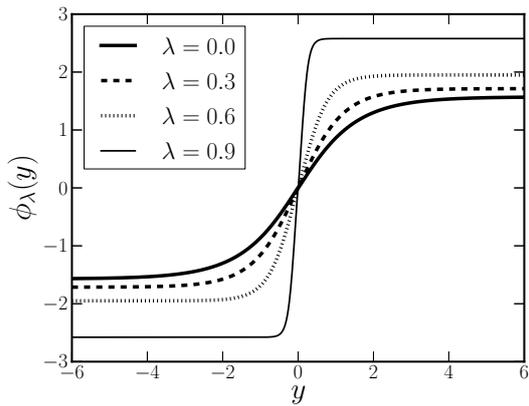


Figura 22: Solução para o campo escalar $\phi_\lambda(y)$ para diferentes valores de λ .

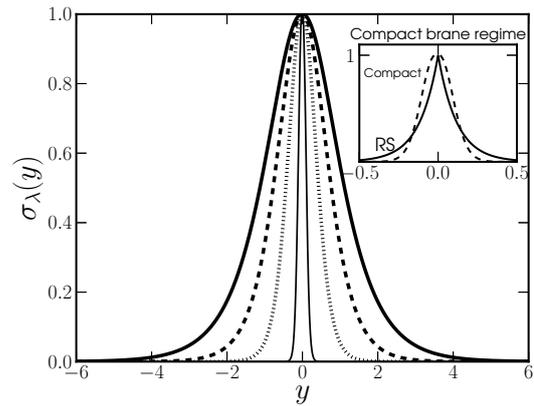


Figura 23: Solução para o fator de warp $\sigma_\lambda(y)$ para os mesmos valores de λ da figura 22. No subgráfico, plotamos o fator de warp da brana no regime compacto ($\lambda = 0.95$) e da brana do modelo de Randall-Sundrum com $k = 30, 5$.

O potencial no espaço-tempo curva torna-se

$$\mathcal{V}_\lambda(\phi) = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[\frac{1}{8} \frac{\text{cn}^2(\phi, \lambda)}{\text{dn}^2(\phi, \lambda)} - \frac{1}{3\lambda} \ln^2 \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda} \text{sn}(\phi, \lambda)}{\text{dn}(\phi, \lambda)} \right) \right], \quad (2.55)$$

cujo gráfico está apresentado na Fig. 25. O uso das funções elípticas de Jacobi na definição do super-potencial é bastante interessante, pois permite que o modelo interpole entre o modelo de sine-Gordon e o modelo de brana compacta. Note que o limite $\lambda \rightarrow 0$, conduz

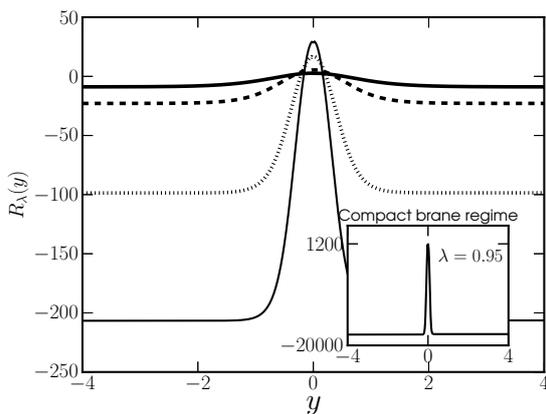


Figura 24: Escalar de Curvatura $R(y)$. Com o aumento do parâmetro λ , a brana apresenta-se cada vez mais comprimida em torno da origem. O sub-gráfico mostra a brana no regime compacto

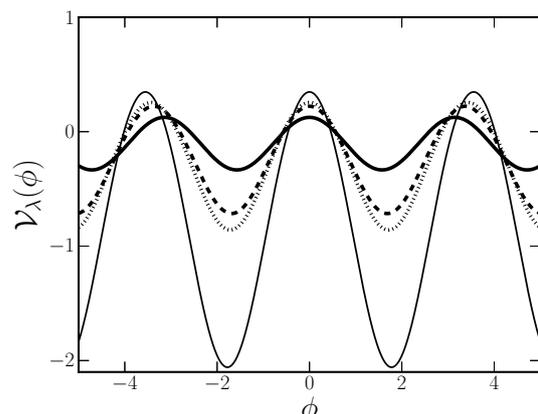


Figura 25: Gráfico do potencial no espaço-tempo curvo $\mathcal{V}_\lambda(\phi)$. Para $\lambda \rightarrow 0$, o potencial coincide com o modelo de sine-Gordon [37].

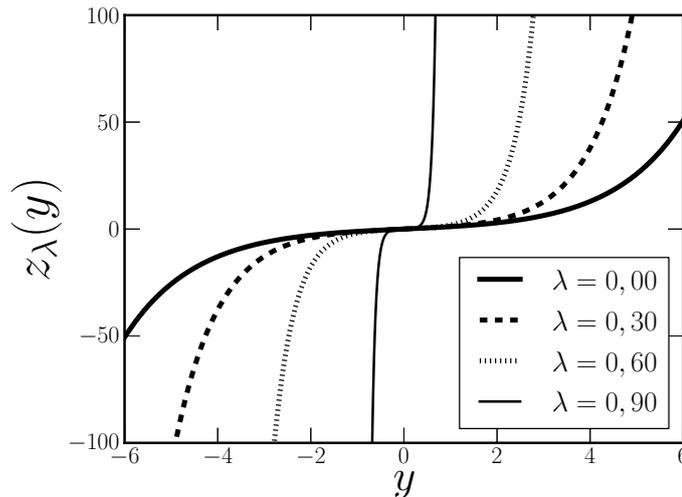


Figura 26: Transformação de coordenadas $z_\lambda(y)$ para a brana compacta.

ao caso particular do modelo de sine-Gordon estudado na Ref. [36] e recentemente na Ref. [37].

Finalmente, calculamos o potencial quântico análogo dado pela Eq. (2.19). Para chegarmos calcularmos $U_\lambda(z)$, utilizamos os mesmos procedimentos numéricos que aplicamos nas branas híbridas para o domínio $[-6.06.0]$ com tamanho de passo igual a 0.01. Na figura 26 plotamos a aproximação numérica da transformação de coordenadas $z_\lambda(y)$. Note que a função $z_\lambda(y)$ varia muito mais rapidamente do que nos casos das branas híbridas. No limite em que $\lambda \rightarrow 1$, a transformação $z_\lambda(y)$ passa a não ser mais definida.

Na Fig. 27 plotamos a solução aproximada do potencial quântico análogo para diferentes valores de λ . O caso $\lambda = 0.0$ coincide com o modelo de sine-Gordon [37]. Vale ressaltar que o potencial é muito sensível ao parâmetro λ e a barreira de potencial cresce rapidamente evidenciando o perfil compacto e a alta curvatura da brana. No limite compacto, que está indicado no sub-gráfico da Fig. 27 a barreira é três ordens de magnitude maior do que o caso sine-Gordon. Esta característica, onde a altura da barreira é muito elevada e a largura do poço muito pequena, previne a presença de estados ligados inviabilizando a busca por estados ressonantes. No capítulo 3 discutiremos a respeito dos modos ressonantes.

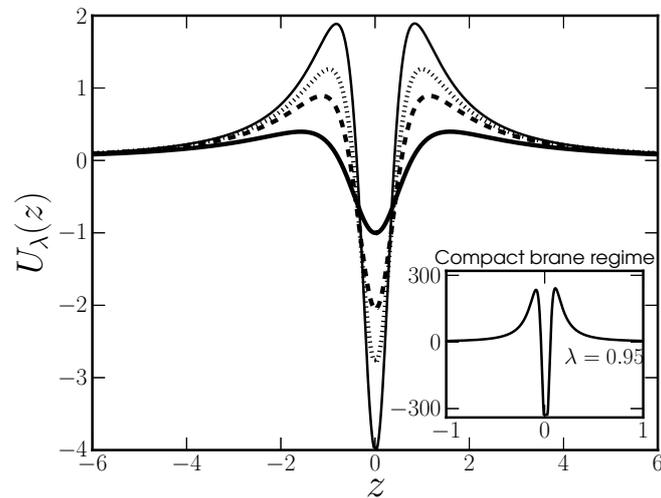


Figura 27: Potencial quântico análogo $U_\lambda(\phi)$ para $\lambda = 0.00$ (linha cheia), $\lambda = 0.30$ (linha tracejada), $\lambda = 0.40$ (linha pontilhada) e $\lambda = 0.50$ (linha fina). O sub-gráfico corresponde ao ajuste de escala para o caso $\lambda = 0.95$.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS EM 5 DIMENSÕES

Neste capítulo, apresentaremos os nossos resultados numéricos nos modelos de cinco dimensões apresentados nas seções 2.2, 2.3 e 2.4. Respectivamente, as branas Híbrida Simétrica, Híbrida Assimétrica e Compacta. O objetivo das análises numéricas dos modelos citados é estudar suas fenomenologias calculando a correção na lei gravitacional de Newton devido aos modos massivos gravitacionais de Kaluza-Klein. A escolha desses modelos advém do fato de serem os mais novos apresentados na literatura. Um fato interessante a respeito desses modelos mais novos, é o fato de terem contidos os modelos mais simples. No caso das branas híbridas, o modelo semente¹ é o ϕ^4 . Já o modelo de brana compacta, o modelo semente é o de sine-Gordon. Ambos possuem soluções topológicas do tipo parede de domínio.

Os resultados para a brana híbrida simétrica (e, conseqüentemente para a brana ϕ^4) foram publicadas no periódico *Physics Letters B* **754**, 210 (2016) sob o título “Gravity localization on hybrid branes”². Já os resultados para as branas híbrida assimétrica e compacta estão submetidos para publicação no periódico *Physical Review D*.

3.1 Resumo

A utilização de métodos numéricos na obtenção do espectro de massa e do conjunto de autofunções da torre de Kaluza-Klein para se calcular a correção na lei gravitacional de Newton é inédita na literatura. A abordagem apresentada nesta tese é de elevado interesse tendo como aplicação, ser utilizada como ferramenta de filtragem de modelos de branas. Primeiramente, mostrando se um determinado modelo de brana suporta estados massivos, o que implica dizer que possui uma fenomenologia envolvida, pois as correções na lei gravitacional de Newton são devidas diretamente dos modos massivos gravitacionais. Tendo a correção, esta pode ser utilizada para verificar se o modelo em análise concordará com futuras medições experimentais dos desvios da lei gravitacional de Newton em aceleradores de partículas de altas energias.

Obtenção do espectro

¹Os modelos em cinco dimensões mais sofisticados são construídos a partir de deformações de modelos mais simples, os quais chamamos aqui de modelo semente.

²Localização de gravidade em branas híbridas

Para estudarmos a correção na lei de Newton da gravitação apresentada na Eq. (2.32) é necessário obter o espectro de massa $\{m_n\}$. Para isto, um procedimento numérico é necessário para se resolver a equação dos modos massivos, posta como um problema de Sturm-Liouville (2.14). Felizmente, o método da matriz [168] é perfeitamente aplicável aos nossos problemas de mundo-branas, pois este aproxima muito bem os primeiros autovalores, que são os de interesse físico. Lembre dos capítulos anteriores que a massa de Kaluza-Klein deve ser pequena. Para isso, nós discretizamos a Eq. (2.14) e as condições de contorno de Neumann homogêneas no domínio $[-a, a]$ com um tamanho de passo uniforme igual a 0.01. Nós utilizamos aproximações de diferenças finitas com erro de truncamento de segunda ordem. Os detalhes do método, foram mostrados na seção ???. Os domínios variam para cada modelo, pois deve-se analisar o comportamento do fator de warp. Os limites do domínio devem ser escolhidos de forma que o fator de warp esteja suficientemente próximo de zero.

Note que as entradas no algoritmo do método da matriz são os valores dos coeficientes da equação diferencial nos pontos de malha. No entanto, para os modelos em estudo nesta tese, não se tem uma expressão fechada para os fatores de warp. As soluções dos fatores de warp são aproximações numéricas nos pontos de malha. Logo, para calcularmos a derivada dos fatores de warp que são uma das entradas no problema de Sturm-Liouville (2.14), nós utilizamos uma discretização por diferenças finitas centradas com erro de truncamento de segunda ordem.

Solução da equação do tipo-Schrödinger

Lembrando da Eq. (2.32), percebe-se que a autofunção que deve ser utilizada para calcular a correção na lei de Newton da gravitação é uma solução da equação do tipo-Schrödinger (2.18) para o potencial (2.19). Novamente, note que a entrada no algoritmo é o fator de warp σ e suas derivadas. Como descrito nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, os fatores de warp $\sigma(z)$ foram obtidos por interpolação polinomial utilizando o método *spline* cúbico fixado com a função $z(y)$. A coordenada z foi encontrada por integração numérica da Eq. (2.15) pelo método de Simpson composto. As derivadas primeira e segunda dos fatores de warp foram obtidas por aproximação de diferenças finitas centradas. Através do método de Numerov, nós resolvemos a Eq. (2.18) para os três modelos de cinco dimensões estudados nessa tese para os autovalores de massa obtidos pelo método da matriz aplicado ao problema de Sturm-Liouville correspondente. O método de Numerov é bastante utilizado na literatura de modelos de mundo-branas [53, 142, 150, 151, 169, 170].

No modelo de Martin Gremm [36] é adotada uma condição de contorno **não-física** dada por $\psi(0) = 1$. Entretanto, note que na correção da lei gravitacional de

Newton, a quantidade física necessária é o valor da função de onda na origem. Logo, seguindo a proposta de Gremm, todas as autofunções teriam iguais contribuições. Nós, no entanto, deixamos os valores das autofunções livres na origem adotando apenas as condição de contorno homogêneas de Neumann $\psi'(z(-a)) = \psi'(z(a)) = 0$. Esta condição permite que os autoestados contribuam para a correção na lei gravitacional de Newton diferentemente entre si, o que favorece os estados ressonantes.

3.2 Aplicação ao modelo de Randall-Sundrum

Como teste de nossas rotinas, aplicamos o método da matriz no modelo de Randall-Sundrum, onde o espectro é conhecido exatamente – confira Eq. (2.31). Para termos uma aproximação eficiente para os vinte primeiro autovalores nós discretizamos a equação diferencial (2.14) para o fator de warp dado na Eq. (2.24) no domínio $[-6, 6]$ com $N = 4300$. Note que as condições de contorno de Neumann homogêneas conduzem ao mesmo espectro da Eq. (2.31). Além do mais, essas condições de contorno em $y = \pm L$ concordam com o fato de que as soluções da equação do tipo Schrödinger, $\psi(z)$, devem possuir comportamento de onda plana longe da brana.

Na tabela 1 apresentamos a solução exata (2.31) e nossa aproximação numérica para $k = 0.70$ e $L = 6.0$ com seis algarismos significativos. Note que o erro é predominantemente menor do que 0.05% chegando a ser menor ainda do que 0.02%. Além do mais, a aproximação se deteriora com o aumento de n . Este é um atributo natural de métodos de discretização em problemas de Sturm-Liouville [168]. No entanto, esta característica não interfere na nossa análise, pois apenas as pequenas massas são de interesse físico, lembre $m_n \ll k$.

É muito importante ressaltarmos que esta boa aproximação foi obtida devido ao elevado número N de divisões do domínio. Neste caso, o tamanho de passo passa a ser $h = (6 - (-6))/4300 = 0.002790$. Para mostrarmos a estabilidade do método, fizemos um gráfico do erro relativo da aproximação do primeiro autovalor do gráviton de Randall-Sundrum em função do número de divisões. Veja a Fig. 28. Neste gráfico, variamos N de 1000 à 4300 com passo igual a 100. Note que o erro reduz monotonicamente com a diminuição do tamanho de passo.

Logo, concluímos que o método numérico é robusto e estável. No restante da tese procuraremos sempre manter a o tamanho do passo da discretização do domínio neste patamar.

j	Autovalor Exato	Aprox. Numérica	Erro Relativo (%)
1	0.0402209	0.0402442	0.0578
2	0.0740640	0.0740264	0.0508
3	0.106790	0.106849	0.0557
4	0.139857	0.139917	0.0430
6	0.172890	0.172951	0.0352
7	0.205906	0.205966	0.0293
8	0.238910	0.238971	0.0256
9	0.271908	0.271970	0.0228
10	0.304901	0.304966	0.0211
11	0.337892	0.337959	0.0198
12	0.370879	0.370951	0.0192
13	0.403866	0.403942	0.0188
14	0.436850	0.436933	0.0190
15	0.469834	0.469925	0.0194
16	0.502817	0.502917	0.0199

Tabela 1: Espectro de massa do gráviton do modelo de Randall-Sundrum.

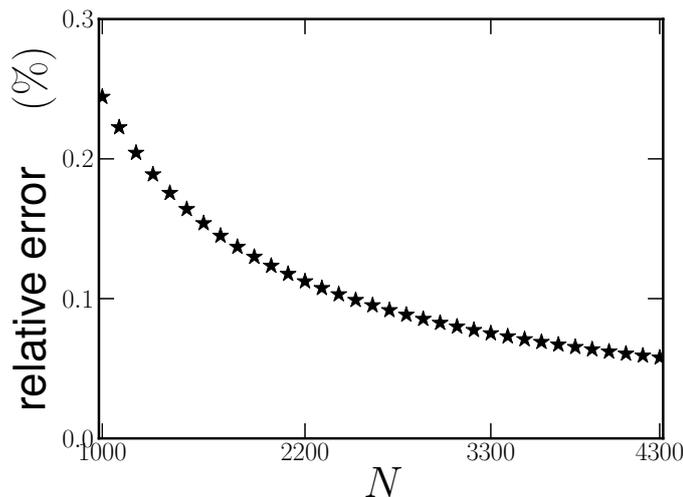


Figura 28: Erro relativo da aproximação do primeiro gráviton de Kaluza-Klein em função do número de divisões do domínio discretizado.

3.3 Resultados para a brana híbrida simétrica

Nós discretizamos a equação diferencial (2.14) e as condições de contorno $\phi'(0) = \phi'(\infty) = 0$ no domínio $[-10, 10]$ com um tamanho de passo uniforme igual a 0,01 com erro de truncamento de segunda ordem. Efetuamos a análise numérica apenas para o modelo \mathcal{L}_α nos casos $n = 1$ (brana espessa do tipo parede de domínio) e $n = 100$ (brana híbrida assimétrica), pois, como mostrado nos resultados das figuras 8(a) e 13, o modelo \mathcal{L}_α não apresentou diferenças significativas do caso parede-de-domínio usual.

Nós resolvemos as equação do tipo Schrödinger para a brana híbrida simétrica

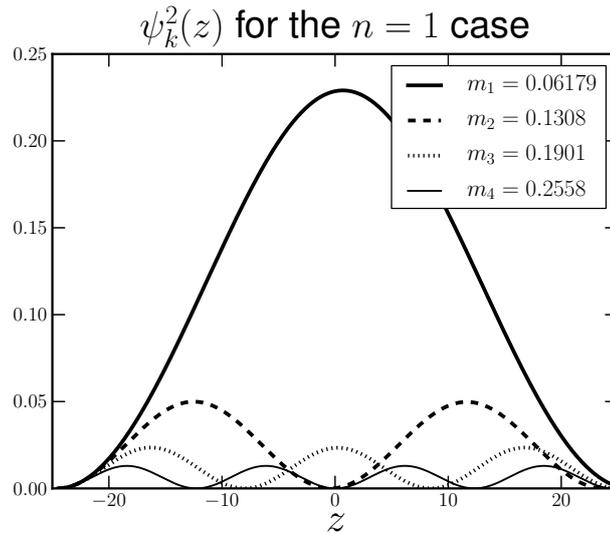


Figura 29: Soluções numéricas normalizadas da equação do tipo Schrödinger para os quatro primeiros autovalores para $n = 1$.

utilizando os autovalores contidos no resultado apresentado na Fig. ???. É importante mencionar que estados ressonantes podem ocorrer para algumas energias particulares, onde ondas planas incidentes pode entrar em ressonância com o potencial $U(z)$ e consequentemente terem um valor para $\psi(0)$ muito maior do que para os demais autoestados [55]. No entanto, o parâmetro n não regula satisfatoriamente o potencial $U(z)$. Note que, por construção a brana híbrida não possui um parâmetro relacionado com sua espessura, que seria responsável por controlar a altura da barreira e a largura do poço de potencial. Esta característica dificulta a procura por estados ressonantes. Nós não encontramos ressonâncias através do bem sucedido *método das ressonâncias* [55, 141].

Nós mostramos as soluções da equação de Schrödinger para os primeiro autovalores de massa na Fig. 29. Um resultado importante é o de que o primeiro autoestado proporcionará a maior contribuição para a correção na lei de Newton da gravitacional. As autofunções normalizadas subsequentes têm amplitudes cada vez menores. Além disso, as autofunções pares darão contribuições triviais, pois $\psi^2(0) = 0$. O espectro e as autofunções não apresentaram mudanças notáveis ao variar o parâmetro n . Isto está de acordo com o fato de os estados ligados podem existir para massas m^2 iguais até o máximo da barreira de potencial [52, 54]. Note os máximos de $U_n(z)$ na Fig. 14 são bem próximos para $n = 1$ e $n = 100$. Por esta razão, mostramos apenas os gráficos para $n = 1$.

Com estes resultados, nós fomos capazes de calcular a correção na lei gravitacional de Newton dada pela Eq. (2.32). Nós simplificamos a massa de Planck a $G = M_* = 1$. Nós plotamos na Fig. 30 o leve desvio da lei gravitacional devido à torre de Kaluza-Klein. Concluimos que a força gravitacional é levemente aumentada em curtas distâncias. Além disso, a fenomenologia não se mostrou diferente se a brana for gerada

por um defeito do tipo *kink* ou *compacton*.

3.4 Resultados para as branas híbrida assimétrica e compacta

Ainda com o objetivo de calcular a correção na lei de Newton da gravitação devido aos modos massivos de Kaluza-Klein, nós aplicamos o método da matriz para obtermos o espectro de Kaluza-Klein para as branas híbrida assimétrica e compacta. Nós estudamos os casos $p = 1$ (modelo ϕ^4), $p = 63$ (brana híbrida assimétrica), $\lambda = 0,0$ (brana sine-Gordon) e $\lambda = 0,95$ (brana compacta). Nós plotamos na Fig. 31.

Note que as massas dependem do modelo em questão e o todo o conjunto $\{m_n\}$ decresce com os parâmetros. Para o regime de brana compacta ($\lambda = 0.96$), o espectro é trivial. De fato, isto é consistente com o caso de uma brana fina com alta curvatura, cujo primeiro autovalor para $k = 30.5$ é $m_1^{RS} = 3.90 \times 10^{-78}$ (veja Eq. (2.31)). Logo, concluímos que a brana compacta não possui contribuições para a correção da lei de Newton. Para $p = 1$ no modelo de brana híbrida, que corresponde à parede de domínio ordinária o espectro concorda com o resultado para a brana híbrida simétrica. Os primeiros autovalores são $m_1 = 0.0738777$, $m_2 = 0.135154$, $m_3 = 0.195893$ e $m_4 = 0.256381$. Além disso, no regime de brana híbrida, o espectro se torna uma ordem de grandeza menor do que no regime de parede de domínio. Logo, este cenário terá uma menor contribuição no potencial Newtoniano.

Finalmente, resolvemos a equação do tipo Schödinger para os casos $p = 63$ e $\lambda = 0.0$. Nós excluimos a brana compacta por suportar apenas o modo zero. Nós utilizamos o método de Numerov [?,?] para os autovalores obtidos pelo método da matriz.

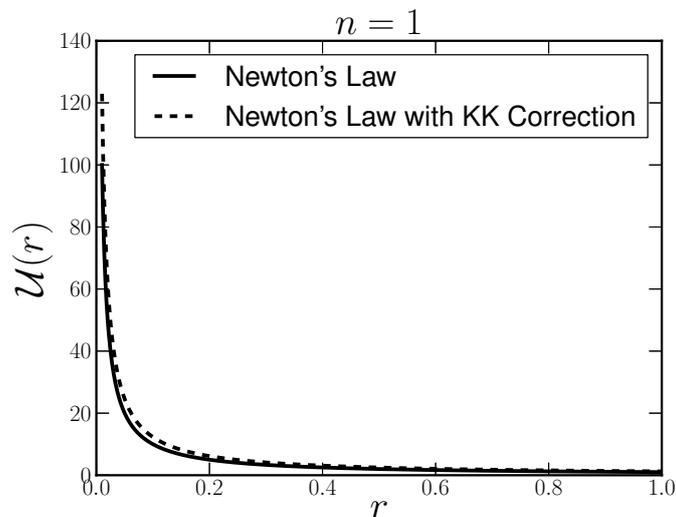


Figura 30: Potencial Newtoniano com a correção devido aos modos massivos de Kaluza-Klein para $n = 1$ para duas massas unitárias na brana.

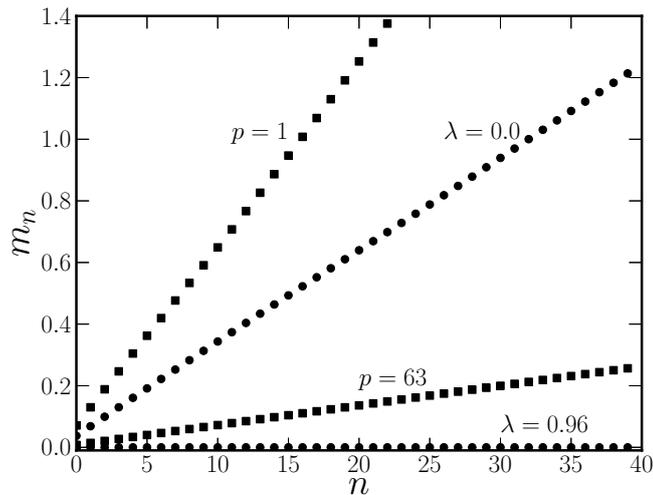


Figura 31: Espectro de massa do gráviton para a brana híbrida assimétrica (quadrados) e para a brana compacta (círculos).

Nós plotamos nas Figs. 32 e 33 as soluções normalizadas para as três primeiras autofunções ímpares. Todas as autofunções pares se anulam em $z = 0$, logo não contribuem para a correção do potencial gravitacional (veja Eq. (2.32)).

As soluções para a brana híbrida assimétrica são puramente ondas planas. Como todos os valores em $z = 0$ são ≈ 0.0050 , todas as autofunções ímpares contribuirão igualmente. Note que este é um caso onde a condição de contorno não-física seria satisfeita. No entanto, esta condição esconderia resultados valiosos, como o fato de a primeira autofunção da brana híbrida simétrica ter a maior contribuição para a correção na lei de Newton.

Para a brana de sine-Gordon, cada autofunção contribui com valores diferentes, portanto, todas as autofunções devem ser levadas em conta no somatório. Note ainda que o primeiro autoestado massivo possui a maior contribuição. Portanto, possíveis efeitos da torre de Kaluza-Klein em colisões de altas energias podem ser um resultado da primeira massa de Kaluza-Klein.

Nós agora somos capazes de calcular as correções na lei de Newton devido a cada modelo. O procedimento pode ser feito para todos os valores dos parâmetros p e λ , mas nós nos concentramos nos casos mostrados na Fig. 31 apenas. Além disso, da equação (2.3), temos que $G_5 = M_*^{-3}$. Perceba que o valor da massa de Planck determinará a distância de efeito da interação corrigida. Nós plotamos a lei de Newton com as correções na Fig. 34. A correção devido à brana compacta é trivial. Além disso, a brana híbrida assimétrica possui contribuição muito pequena, podendo ser desprezada. Já a brana de sine-Gordon suporta um espectro de maior magnitude oferecendo uma correção maior do que a brana do tipo parede de domínio ϕ^4 . Portanto, os cenários mais sofisticados não

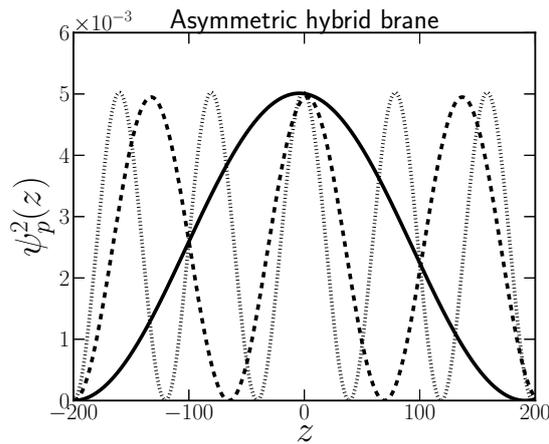


Figura 32: Funções de onda ímpares normalizadas para a brana híbrida assimétrica ($p = 63$). Como as funções de onda pares se anulam na origem, nós omitimos seus gráficos aqui. Os autovalores de massa são $m_1 = 0.00804991$ (linha cheia), $m_3 = 0.0213199$ (linha tracejada) a $m_5 = 0.0344917$ (linha pontilhada).

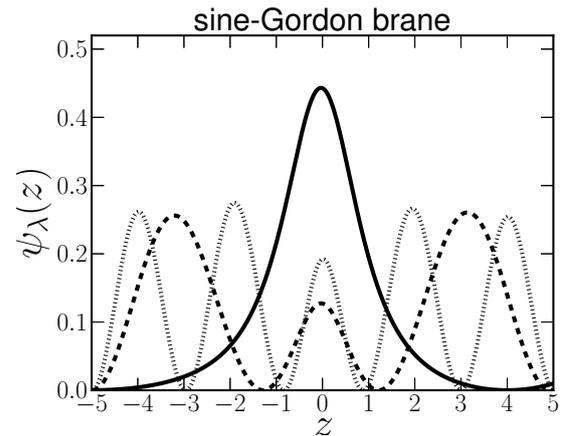


Figura 33: Funções de onda ímpares normalizadas para a brana de sine-Gordon ($\lambda = 0.0$). Como as funções de onda pares se anulam na origem, nós omitimos seus gráficos aqui. Os autovalores de massas são $m_1 = 0.0725202$ (linha cheia), $m_3 = 0.192295$ (linha tracejada) and $m_5 = 0.310824$ (linha pontilhada).

possuem implicações fenomenológicas, deixando aos modelos mais simples a confiança de possíveis modelos mais realistas.

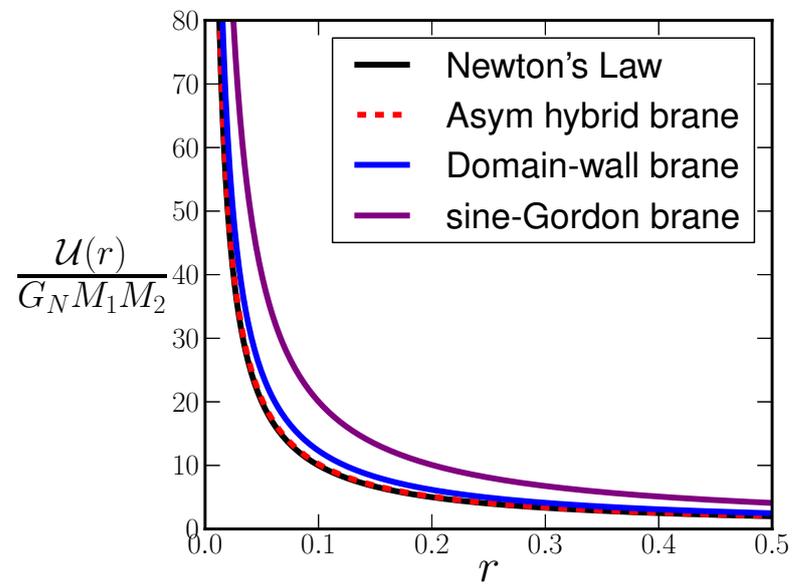


Figura 34: Correção na lei gravitacional de Newton devido aos modos massivos de Kaluza-Klein.

4 BRANAS ESPESSAS EM 6 DIMENSÕES

Neste capítulo abordaremos branas espessas em seis dimensões do tipo corda (quando a brana possui simetria axial). Branas do tipo corda são uma extensão direta dos modelos de Randall-Sundrum para duas dimensões extras. Esta segunda dimensão extra atribui uma estrutura mais rica para brana. Neste capítulo apresentaremos brevemente as principais características e resultados de dois modelos do tipo corda em particular: o modelo de corda fina proposto por Tony Gherghetta e Mikhail Shaposhnikov na Ref. [88] e o modelo *string-cigar*¹ proposto por Euclides Silva e co-autores na Ref. [89]. Este segundo modelo corresponde à uma brana do tipo corda espessa em seis dimensões considerada como uma suavização do modelo de corda-fina.

Nesta tese, nós trabalhamos com a localização dos campos gravitacional, vetorial e fermiônico no modelo *string-cigar*, com foco nos modos massivos de Kaluza-Klein, reportados em três artigos nas revistas Physics Letters B [?] e Physical Review D [?, ?]. Os casos de brana fina também foram considerados em todos os trabalhos. Os resultados serão apresentados no capítulo 5.

4.1 Introdução

Em cinco dimensões, paredes de domínio têm sido utilizadas para representar a brana (ver Capítulo 2). Já em seis dimensões, assumindo-se uma simetria axial, o cenário é conhecido como brana do **tipo corda**. Suas origens têm bases no estudo de linhas de fonte em Relatividade Geral [90–94]. Objetos topológicos do tipo corda, tais como vórtices e cordas cósmicas, são geralmente descritos como sistemas compostos por um campo escalar complexo (global) e um campo de calibre (local) [95–98]. Além disso, o espaço-tempo de uma corda global é singular [99]. Esta singularidade não é uma singularidade de coordenadas, mas sim, física.

Independentemente do modelo do tipo corda em particular para compor o núcleo da brana, a solução exterior com constante cosmológica possui um comportamento conformalmente plano que estende o modelo de Randall-Sundrum [100] para duas dimensões extras. No limite de uma brana infinitamente fina, o cenário resultante é o chamado modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [88]. Este modelo fornece uma correção

¹A tradução direta deste termo seria “Corda-Charuto” ou “Corda-Cigarro”. Nesta obra, optamos por manter o nome em inglês.

menor para o potencial de Newton do que no modelo de Randall-Sundrum.

Uma das vantagens dos modelos de seis dimensões sobre os de cinco, é a de que o modo-zero do campo vetorial de calibre é naturalmente localizado na brana GS [35,101], sem a necessidade de um campo externo, como o dÍlaton em cinco dimensões [102]. O campo fermiônico, por sua vez, requer um acoplamento mínimo do tipo Yukawa com um campo vetorial de calibre para ter modo-zero localizado [103]. Outra vantagem concerne sobre a energia e o momento da brana serem sempre conservados, independentemente de qualquer tensor energia-momento do *bulk* [104]. Além disso, foi também proposto que a espessura da brana exerça o papel da energia escura e da matéria escura do nosso universo [105].

Além das características interessantes dos campos, as branas do tipo corda também exibem uma estrutura geométrica mais rica do que modelos em cinco dimensões. De fato, as duas dimensões extras formam uma variedade transversa com simetrias internas e propriedades que refletem na sua tensão [106]. A variedade transversa usada no modelo GS, por exemplo, é um disco [88]. Por outro lado, Kehagias propôs um espaço cônico para explicar o problema da constante cosmológica [107]. Papantonopoulos e co-autores regularizaram o comportamento cônico próximo à brana adicionando uma estrutura do tipo anel na brana [108]. Garriga e Porrati estudaram os efeitos gerados por uma variedade com a forma de uma bola de futebol americano [109]. Gogberashvili e co-autores discutiram o problema das gerações dos férmions em um espaço com a forma de uma maçã [110]. Em um modelo supersimétrico, de-Carlos e Moreno encontraram uma solução de gravidade localizada sem constante cosmológica [111]. Por este modelo considerar uma geometria que assintoticamente possui um raio transverso constante, o modelo é chamado de universo do tipo *cigar-like*.

É importante ressaltar que, ao contrário das paredes de domínio, não há uma solução completa (interior e exterior) do tipo corda conhecida analiticamente, mesmo em um espaço-tempo plano. Em modelos de mundo-branas não-fatorizáveis, Cohen-Kaplan [112], Gregory [113] e Olaganesi-Vilenkin [114] estudaram a solução exterior de uma brana do tipo corda global com e sem constante cosmológica do *bulk*. O caso local foi estudado numericamente por Giovaninni e co-autores, onde foi obtida uma geometria suave satisfazendo a condição de energia dominante [115].

Na Ref. [89] a chamada solução sÓlton cigar é utilizada para se construir uma geometria interior e exterior do tipo corda suave. Este recebeu o nome de modelo *string-cigar*. O sÓlton cigar é uma solução bi-dimensional auto-similar do fluxo de Ricci, um fluxo geométrico determinado pelo tensor de Ricci [116,117]. Há importantes aplicações do fluxo de Ricci em diferentes ramos das Física, como nos grupos de renormalização e

modelos-sigma [118–122], buracos negros Euclidianos [123], gravidade massiva topológica [124], massa ADM [125] e, mais recentemente, no modelo de Heisenberg da Mecânica Estatística [126].

O fluxo de Ricci define uma família de geometrias sob o domínio de um parâmetro de evolução. Fornece ainda informações a estabilidade de uma variedade, como a formação ou eliminação de singularidades. Aplicado à cenários de mundo-branas, o fluxo de Ricci pode ser utilizado para se estudar a estabilidade da geometria do *bulk*. Nesta direção, dois importante modelos do tipo corda suavizado foram construídos com uma secção do conifold resolvido, um importante orbifold na teoria de cordas [127], e com o espaço transversal sendo um sóliton-cigar de Hamilton [89]. Os modelos *string-cigar* e o conifold resolvido fornecem geometrias regulares que assintoticamente recuperam o modelo GS. No modelo do conifold resolvido, o parâmetro de resolução tem o papel do raio de uma quinta dimensão compacta que viola o comportamento cônico próximo à origem [127]. Além disso, o parâmetro de resolução da singularidade cônica da brana fornece um fluxo geométrico que suaviza os modos sem massa para o campos escalar [127], vetorial [128] e fermiônico [129].

Como apontado por Tinyakov and Zuleta na Ref. [130], a fonte do modelo GS não satisfaz a condição de energia dominante. Por outro lado, a fonte do *string-cigar* é submetida à uma transição de fase sobre o qual algumas configurações completam todas as condições de energia [89]. O modelo *string-cigar* satisfaz ainda todas as condições de regularidade, exigidas para se garantir uma brana bem comportada na origem.

O cenário *string-cigar* permite a existência de um modo-zero localizado que efetivamente descreve a gravidade na brana. O modo zero neste cenário possui o mesmo comportamento exponencial do modelo GS. Ademais, próximo ao núcleo da brana, possui uma forma de sino suave. Portanto, o cenário *string-cigar* suaviza a geometria e o modo-zero próximo à origem. Enquanto a geometria é submetida à um fluxo de Ricci no espaço transversal, o modo-zero tem sua altura e largura alteradas. Nesta tese, nós encontramos um novo modo-zero para o modelos GS e *string-cigar* por meio de uma abordagem via equação de Schrödinger. Este novo modo-zero possui um comportamento “mais localizado”.

Outra característica digna do modelo *string-cigar* é a sua fonte não-homogênea. Naturalmente, os máximos das componentes do tensor momento-energia são deslocados da origem o que sugere que o núcleo da brana está afastado da origem. Giovaninni e co-autores encontraram comportamento semelhante para um vórtice Abelian com elevado número de voltas [115]. No modelo *string-cigar*, o modo-zero gravitacional e a densidade de energia compartilham de comportamento similar. Tal perfil mostra a influência da

variações geométricas proporcionadas pelo fluxo de Ricci na Física da brana.

Não obstante, a complexidade das equações diferenciais dos modos de Kaluza-Klein torna a análise numérica a abordagem mais adequada para se obter o espectro de massa e as autofunções correspondentes. Assim, a principal proposta desta parte da tese é obter o espectro massivo de Kaluza-Klein e analisar como ele se comporta com respeito ao fluxo de Ricci.

Embora Gherghetta and Shaposhnikov tenham encontrado um conjunto completo de autovalores e autofunções para a brana do tipo corda-fina, as expressões dessas autosoluções são desconhecidas para branas espessas em seis dimensões. Através de métodos numéricos adequados, encontramos o espectro e as autofunções do modelo string-cigar. Como teste de nossas rotinas aplicamos os métodos no modelo GS e obtivemos boa aproximação dos primeiros autovalores de massa (aqueles de relevância física). Um resultado interessante, diz respeito à um modo massivo com massa e amplitude extremamente pequenas que não está presente no modelo string-cigar. À este autoestado particular, chamamos de estado transiente.

A análise numérica desses dois modelos, fornece mais informação de como os campos se comportam nos cenários singular e suavizado em seis dimensões. Giovaninni e co-autores estudaram numericamente a geometria interior e exterior de um mundo-brana do tipo corda na Ref. [115]. No entanto, não se interessaram nas propriedades Físicas do campo gravitacional. Nós ainda encontramos e estudamos os modos massivos ressonantes, autoestados importantes, pois são os responsáveis pela fenomenologia de um modelo de brana exposto como uma correção na lei gravitacional de Newton.

4.2 Mundo-branas do tipo-corda e localização de gravidade

Nesta seção, apresentaremos as definições básicas e principais características dos modelos de branas do tipo corda gerais. Nas duas próximas subseções, abordaremos os modelos GS e *string-cigar*.

Considere um espaço-tempo de seis dimensões \mathcal{M}_6 construído a partir do *produto warped*² entre uma variedade Lorentziana 4D, \mathcal{M}_4 , e uma variedade Riemanniana 2D, \mathcal{M}_2 . Nos referimos à \mathcal{M}_4 como uma 3-brana enquanto que à \mathcal{M}_2 , o espaço transversal.

²Em geometria diferencial e relatividade geral, uma geometria entortada (do inglês “warped”) é uma variedade de Riemann ou de Lorentz cujo tensor métrico pode ser descrito da seguinte forma:

$$ds^2 = f(y)g_{ij}(x)dx^i dx^j + g_{ab}dy^a dy^b.$$

Observe que a geometria quase se decompõe em um produto cartesiano da geometria x e da geometria y , exceto pela parte de x ser reescalada por uma função escalar de coordenadas da geometria y . Devido à esta razão, a métrica de uma geometria entortada é geralmente denominada “métrica de produto entortado”, do inglês “warped product”. Nesta tese, optaremos por utilizar o termo em inglês.

Um mundo-brana do tipo corda é uma \mathcal{M}_6 6D estática com uma simetria axial no espaço transversal. Uma métrica adequada para este modelo é dada por [35, 88, 104–106, 112–115]

$$\begin{aligned} ds_6^2 &= g_{AB}(x, \rho, \theta) dx^A dx^B \\ &= \sigma(\rho) g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - d\rho^2 - \gamma(\rho) d\theta^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde x são as coordenadas na brana, $\rho \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ são as dimensões extras e σ e γ são os chamados fatores de warp.

As condições de regularidade

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 1 \quad , \quad \sigma'(0) = 0, \\ \gamma(0) &= 0 \quad , \quad \left(\sqrt{\gamma(0)}\right)' = 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

são impostas com o objetivo de se evitar singularidades [106], onde (') refere-se às derivadas ∂_ρ . As condições para σ na Eq. (4.2) já são presentes nos modelos de Randall-Sundrum [7, 8], onde as suposições na função γ refletem o comportamento suave próximo à origem [88, 104–106, 115, 130].

Independentemente do modelo em particular para a fonte, o tensor momento-energia pode ser escrito na forma geral [88, 104–106, 115]:

$$T_B^A = \text{diag}(t_0, t_0, t_0, t_0, t_\rho, t_\theta). \quad (4.3)$$

Para uma corda global, por exemplo, $t_\rho = -t_\theta$ [112–114]. Na presença de uma constante cosmológica no *bulk* Λ e para uma brana plana \mathcal{M}_4 , a equação de Einstein fica [47–49]

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = -\kappa_6 (\Lambda g_{ab} + T_{ab}), \quad (4.4)$$

que, para o ansatz da métrica (4.1), conduz a [88, 89, 127]

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{3}{4} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' = -\kappa_6 (\Lambda + t_0(\rho)), \quad (4.5)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\gamma'}{\gamma} = -\kappa_6 (\Lambda + t_\rho(\rho)), \quad (4.6)$$

$$2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + \frac{5}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = -\kappa_6 (\Lambda + t_\theta(\rho)), \quad (4.7)$$

onde κ_6 é a constante gravitacional em seis dimensões relacionada com a escala de energia em seis dimensões pela relação [88, 89]

$$\kappa_6 = \frac{8\pi}{M_6^4} \quad (4.8)$$

Vamos agora analisar a configuração de vácuo do modelo, ou seja, sem fontes. A terceira equação de Einstein (4.7) fornece:

$$2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + \frac{5}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 = -\kappa_6 \Lambda. \quad (4.9)$$

Definindo

$$y(\rho) = \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad (4.10)$$

a Eq. (4.9) torna-se

$$y' + \frac{5}{4} y^2 - \frac{\kappa_6 |\Lambda|}{2} = 0, \quad (4.11)$$

cuja solução é

$$y(\rho) = c \tanh \left[\frac{5c}{4} (\rho + \rho_0) \right], \quad (4.12)$$

onde

$$c = \sqrt{-\frac{2\kappa_6}{5} \Lambda}, \quad (4.13)$$

e ρ_0 é uma constante de integração. Integrando a Eq. (4.12), obtemos o fator de warp

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 \cosh^{\frac{4}{5}} \left(\frac{5c}{4} \rho \right), \quad (4.14)$$

com uma constante de integração σ_0 . Substituindo o fator de warp (4.14) nas equações de Einstein e impondo as condições de regularidade (4.2), nós obtemos a componente angular da métrica γ como sendo

$$\gamma(\rho) = \left(\frac{4}{5c} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{5c}{4} \rho \right) \sigma^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.15)$$

O fator de warp na Eq. (4.14) e a componente angular da métrica na Eq. (4.15) fornece um volume infinito para o espaço transversal que conduz à uma teoria efetiva da gravitação não-quadrídimesional.

A relação entre a massa de Planck no *bulk* M_6 e a massa de Planck na brana M_4 é dada por [88, 89]

$$M_4^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty \sigma(\rho) \sqrt{\gamma(\rho)} d\rho. \quad (4.16)$$

Logo, para um modelo de branas do tipo corda descrita pela função de warp (4.14) e componente angular da métrica (4.15), a escala de Planck na brana diverge.

Outra característica importante dos modelos do tipo corda são as tensões μ_i definidas por [88, 89, 115]

$$\mu_i(c) = \int_0^\epsilon t_i(\rho, c) \sigma^2(\rho, c) \sqrt{\gamma(\rho, c)} d\rho, \quad (4.17)$$

que determinam as correspondências entre as soluções geométricas interna e externa, onde ϵ é a largura do núcleo [88, 104–106, 115].

Uma vez apresentado os aspectos gerais dos cenários do tipo corda, estudaremos o comportamento da métrica sob pequenas perturbações, que corresponde ao estudo da localização de gravidade. Efetuando a seguinte perturbação conforme invariante, $h_{\mu\nu}(x, \rho)$, [8, 36, 52, 88, 89, 115]

$$ds_6^2 = \sigma(\rho)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, \rho))dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho)d\theta^2, \quad (4.18)$$

as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem (4.4) levam à [8, 36, 52, 88, 89, 115]

$$\square_6 h_{\mu\nu} = \partial_A(\sqrt{-g_6}\eta^{AB}\partial_B h_{\mu\nu}) = 0, \quad (4.19)$$

onde onde \square_6 é o operado de d'Alembert em seis dimensões. Logo, as perturbações tensoriais $h_{\mu\nu}$ podem ser tratadas como um campo tensorial de *rank* 2 (gráviton) propagando-se no *bulk*.

Assumindo a decomposição de Kaluza-Klein³ [35, 88, 89]

$$h_{\mu\nu}(x, \rho, \theta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \phi_{m,l}(\rho) e^{il\theta} \hat{h}_{\mu\nu}(x), \quad (4.20)$$

e uma dependência do como onda-livre na 3-brana

$$\square_4 \hat{h}_{\mu\nu}(x^\xi) = m_0^2 \hat{h}_{\mu\nu}(x^\xi), \quad (4.21)$$

a equação de movimento para o gráviton (4.19), para um cenário conforme onde

$$\gamma(\rho) = \sigma(\rho)\beta(\rho) \quad (4.22)$$

fica [88, 89]

$$\left(\sigma^{\frac{5}{2}}\sqrt{\beta}\phi'_{m,l}(\rho)\right)' + \sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta}\left(m_0^2 - \frac{l^2}{\beta^2}\right)\phi_{m,l}(\rho) = 0, \quad (4.23)$$

ou

$$\phi_n''(\rho) + \left(\frac{5}{2}\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)\phi_n'(\rho) + \frac{m_n^2}{\sigma}\phi_n(\rho) = 0, \quad (4.24)$$

A função β é responsável pelo comportamento cônico [89, 127]. A Eq. (4.23) descreve o comportamento radial do gráviton nos cenários do tipo corda. A presença do número angular l torna o espectro degenerado [88]. Além disso, devido à simetria axial, as condições de contorno são [88, 89, 115]

$$\phi'(0) = \phi'(\infty) = 0. \quad (4.25)$$

³o símbolo ϕ não possui nenhuma relação com o campo escalar do capítulo 2.

A equação radial (4.23) e as condições de contorno (4.25) fornecem um conjunto de soluções cuja relação de ortogonalidade é dada por

$$\int_0^\infty \sigma^{\frac{3}{4}} \sqrt{\beta} \phi_{m,l} \phi_{n,l'} d\rho = \delta_{mn} \delta_{ll'}. \quad (4.26)$$

Os autovalores da Eq. (4.23) que satisfazem as condições de contorno (4.25) compõem o chamado espectro de Kaluza-Klein e as autofunções correspondentes são chamados de modos de Kaluza-Klein. Dentre os estados de Kaluza-Klein há um de massa nula, chamado modo-zero. Da Eq. (4.23), o modo-zero tem a forma

$$\phi_0(\rho) = A_1 \int_0^\rho \sigma^{-\frac{5}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} d\rho' + A_2, \quad (4.27)$$

onde A_1 e A_2 são constantes. Uma solução similar foi encontrada por Csaba Csáki e co-autores para espaço-tempos não coformalmente planos [52].

Uma outra forma adequada para se estudar os modos de Kaluza-Klein consiste em transformar a equação do tipo Sturm-Liouville (4.23) em uma equação do tipo Schrödinger. Efetuando a mudança de variável independente [6,36,51,52,54,88,89,102,112]

$$z(\rho) = \int_0^\rho \sigma^{-1/2} d\rho' \quad (4.28)$$

e da variável dependente

$$\phi_m(z) = u(z) \Psi_m(z), \quad (4.29)$$

onde

$$\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\beta}}{\beta} = 0, \quad (4.30)$$

com os pontos denotando derivadas com respeito à coordenada z , a equação radial (4.23) fica

$$-\ddot{\Psi}_m(z) + U(z) \Psi_m(z) = m^2 \Psi_m(z), \quad (4.31)$$

onde

$$U(z) = \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{16} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{l^2}{\beta} \quad (4.32)$$

é o potencial quântico análogo.

As condições de contorno (4.25) implicam nas seguintes condições de contorno para $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} u'(0) \Psi(0) + u(0) \Psi'(0) &= 0, \\ u'(\infty) \Psi(\infty) + u(\infty) \Psi'(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entre a relação bijetiva entre os formalismos via Sturm-Liouville e Schrödinger,

a última fornece informações sobre modos ressonantes que consideraremos no capítulo 5.

4.2.1 O modelo de Gherghetta-Shaposhnikov

Gherghetta e Shaposhnikov (GS) encontraram uma solução de vácuo das equações de Einstein que localiza a gravidade em uma brana do tipo corda infinitamente fina ao assumirem que [88]

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -c = cte, \quad (4.34)$$

que pode ser obtido da função tangente hiperbólica na Eq. (4.12) em qualquer um de seus valores assintóticos. Além disso, a Eq. (4.9) conduz ao seguinte fator de warp:

$$\sigma(\rho) = e^{-c\rho}. \quad (4.35)$$

Ademais, para [88]

$$\beta(\rho) = R_0^2 = cte, \quad (4.36)$$

o modelo GS descreve um espaço-tempo Anti-de Sitter AdS_6 . Como o modelo GS é construído a partir de uma solução de vácuo ele pode ser tratado como um espaço-tempo devido à uma linha de fonte infinitamente fina [115, 130]. Somado a isto, a solução GS não satisfaz as condições de regularidade na origem, como pode ser verificado na Eq (4.2). Esta questão é resolvido com o advento do modelo string-cigar que abordaremos na próxima subseção.

Substituindo os fatores de warp (4.35) e (4.36) na Eq. (4.23) encontramos que, no modelo GS, o gráviton obedece à seguinte equação radial:

$$\phi_m'' - \frac{5}{2}c\phi_m' + (m_0^2 - l^2/R_0^2) e^{c\rho} \phi_m = 0. \quad (4.37)$$

Mudando a variável independente para $u = \frac{2m}{c} e^{\frac{c}{2}\rho}$ e a variável dependente para $\phi_m = e^{\frac{5}{4}c\rho} \chi_m$, a função χ_m satisfaz a equação diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2\chi_m}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{d\chi_m}{du} + \left[1 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \frac{1}{u^2} \right] \chi_m = 0. \quad (4.38)$$

Portanto, a solução geral da Eq. (4.37), pode ser escrita como [88]

$$\phi_m(\rho) = e^{\frac{5}{4}c\rho} \left[B_1 J_{5/2} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{1}{2}c\rho} \right) + B_2 Y_{5/2} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{1}{2}c\rho} \right) \right], \quad (4.39)$$

onde B_1 e B_2 são constantes arbitrárias e $m = m_0^2 - l^2/R_0^2$. Esta solução cresce exponencialmente mostrando que modos massivos não localizados na brana, como esperado.

Da Eq. (4.27), o modo-zero geral do modelo GS tem a forma

$$\phi_0(\rho) = A_1 e^{\frac{5}{2}c\rho} + A_2, \quad (4.40)$$

para A_1 e A_2 constantes. Dentre as duas soluções na Eq. (4.40), apenas a $\phi_0 = A_2$ satisfaz a relação de ortogonalidade dada na Eq. (4.26). Logo, Gherghetta e Shaposhnikov definiram uma solução ortonormal por [88]

$$\psi_m(\rho) = e^{-\frac{3}{4}c\rho} \phi_m(\rho), \quad (4.41)$$

tal que, o modo-zero se torna

$$\psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{3c}{2R_0}} e^{-\frac{3}{4}c\rho}. \quad (4.42)$$

O modo-zero na Eq. (4.42) é finito, logo, localizado na brana fina. No entanto, esta solução não satisfaz as condições de contorno (4.25) em $\rho = 0$, pois o fator de warp (4.35) não obedece as condições de regularidade.

Por outro lado, por meio de uma abordagem via equação de Schrödinger, nós encontramos um novo modo-zero localizado. Realmente, a equação de Schrödinger (4.31) para o modelo GS torna-se

$$-\ddot{\Psi}_m + \frac{6}{z^2} \Psi_m = m^2 \Psi_m, \quad (4.43)$$

onde

$$z = \frac{2}{c} e^{\frac{c}{2}\rho}. \quad (4.44)$$

Pela Eq. (4.30), a relação entre ϕ_m e Ψ_m fica dada por

$$\phi_m = C_0 e^{c\rho} \Psi_m. \quad (4.45)$$

Para $m = 0$, a Eq. (4.43) tem a solução

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_1 z^3 + C_2 z^{-2} \\ &= C_1 e^{\frac{3}{2}c\rho} + C_2 e^{-c\rho}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

que, usando a Eq. (4.45), fornece o modo-zero (4.40). Para que Ψ_0 seja normalizada, nós fazemos $C_1 = 0$. Com isso, nós encontramos um modo-zero satisfazendo a equação do tipo Schrödinger no modelo GS dado por

$$\Psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{7c}{2R_0}} e^{-c\rho}. \quad (4.47)$$

É importante notar que, na origem, o modo-zero Ψ_0 na Eq. (4.47) é mais intenso do que

o modo-zero ψ_0 proposto na Ref. [88]. Além disso, Ψ_0 vai mais rapidamente à zero que ψ_0 . Ademais, o modo-zero (4.47) satisfaz as condições de contorno para as autofunções de Schrödinger (4.33). Isto é facilmente verificado, notando que, pela Eq. (4.45), a função u é expressa por

$$u(\rho) = C_0 e^{c\rho}. \quad (4.48)$$

A solução da equação do tipo Schrödinger do modelo GS para $m \neq 0$ é

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \left(\frac{1}{mz}\right)^2 \left[(m^2 z^2 - 3mz - 3)(\cos(mz) - \sin(mz)) \right]. \quad (4.49)$$

Como $\Psi_m(z)$ não é definida para $m = 0$, nós **não** podemos obter o modo sem massa (4.47) a partir da equação para o modos massivos dada em (4.49). Este fato trás à tona o gap entre o modo-zero e o primeiro modo massivo do gráviton que nós exploraremos com mais detalhes no capítulo 5. Além disso, no limite assintótico, Ψ_m assume um comportamento de onda plana dada por

$$\Psi_m(z \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \left(\cos(mx) - \sin(mx) \right). \quad (4.50)$$

Assim como em problemas em mecânica quântica, o espectro pode ser obtido inserindo-se uma distância de cut-off radial ρ_{\max} e impondo as condições de contorno (4.25) nas autofunções massivas (4.37). Assim como fizemos para o modelo de Randall-Sundrum na seção 2.1.1, o espectro será determinado pelos zeros da função de Bessel, agora de ordem 3/2:

$$J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2m_n}{2} e^{\frac{c}{2}\rho_{\max}} \right) = 0. \quad (4.51)$$

Os zeros da função de Bessel de ordem 3/2 são tabelados e obedecem à [131]

$$m_n = \frac{c}{2} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{1}{4 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right]} + \dots \right] e^{-\frac{c\rho}{2}}. \quad (4.52)$$

Frisamos aqui, no trabalho de Gheghetta e Shaposhnikov, o termo em $1/n$, responsável por um crescimento diferente de linear para os primeiro autovalores é desprezado. A expressão dada na Ref. [88], levando em conta apenas os grandes valores de n é

$$m_n \simeq c \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} e^{-\frac{c}{2}\rho_{\max}}. \quad (4.53)$$

A expressão que deve ser levada em conta para o espectro de massa é a dada pela Eq. (4.52). Daremos mais detalhes a respeito deste comportamento do espectro no Capítulo 5, onde mostraremos a eficiência do nosso método numérico.

Novamente, assim como discutido na seção 2.1.1, observamos que o espectro de massa é fortemente dependente da distância de corte ρ_{\max} . Para um modelo com coordenada radial finita, $0 \leq \rho \leq R$, a distância de corte é $\rho_{\max} = R$. Note que quando a distância de corte ρ_{\max} aumenta, a magnitude das massas de Kaluza-Klein, dadas pela expressão (4.53), é reduzida. Para uma coordenada radial infinita $\rho \rightarrow \infty$, o espectro de Kaluza-Klein m_n se anula para todo n . Portanto, $m_0^2 = \left(\frac{l}{R_0}\right)^2$, isto é, as massas de Kaluza-Klein dependem apenas do número angular l , que é similar à expressão para o espectro massivo do modelo de Kaluza-Klein fatorizável.

Assim como em $5D$, a relação do espectro de massa é bastante importante na correção do potencial Newtoniano. No modelo GS, a correção na lei de Newton devido aos modos massivos de Kaluza-Klein é calculada, particularmente, para o caso de uma corda infinitamente fina. Gherghetta e Shaposhnikov encontram, a partir da expressão discreta para o espectro que no limite de massas muito pequenas, [88]

$$\phi_{m_n}^2(\rho = 0) = \frac{4}{cR_0} m_n^2 e^{-(c/2)\rho_{\max}}. \quad (4.54)$$

Com isto, é apresentado no modelo GS sem detalhes que na 3-brana o potencial gravitacional entre duas massas pontuais M_1 e M_2 recebem uma contribuição dos modos massivos discretos dada por

$$\Delta\mathcal{U}(r) \simeq G_N \frac{M_1 M_2}{r} \sum_n e^{-m_n r} \frac{8}{3c^2} m_n^2 e^{-(c/2)\rho_{\max}}, \quad (4.55)$$

onde G_N é a constante de Newton. Além disso, no modelo GS é tomado o limite de espectro contínuo, onde a expressão acima é convertida em

$$\Delta\mathcal{U}(r) \simeq \frac{16G_N}{3\pi c^3} \frac{M_1 M_2}{r} \int_0^\infty dm m^2 e^{-mr} = \frac{32G_N}{3\pi c^3} \frac{M_1 M_2}{r^4}. \quad (4.56)$$

Portanto, conclui-se que no modelo GS a correção na lei de Newton devido à um contínuo de estados massivos é da forma $1/r^3$. Esta correção é mais suprimida do que em cinco dimensões, onde conhece-se como sendo da forma $1/r^2$

A expressão para a correção na lei de Newton devido à torre de estados de Kaluza-Klein, oriunda de um cenário de mundo-brana do tipo corda espessa não é trivial. Nesta tese esta ideia é deixada como uma perspectiva.

4.2.2 O modelo String-Cigar

Uma extensão do modelo GS, o chamado modelo string-cigar [89], é construído a partir de um produto warped entre a 3-brana e o espaço sóliton-cigar de Hamilton

[116, 117]. O s3l3iton-cigar 3 uma solu33o estacion3ria bi-dimensional do fluxo de Ricci

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{ab}(\lambda) = -2R_{ab}(\lambda), \quad (4.57)$$

onde λ 3 um par3metro da m3trica e R_{ab} 3 o tensor de Ricci [116]. Uma m3trica com simetria axial para o s3l3iton de Hamilton pode ser escrita como [117]

$$ds_\lambda^2 = d\rho^2 + \frac{1}{\lambda^2} \tanh^2(\lambda\rho) d\theta^2. \quad (4.58)$$

A ideia-base do modelo string-cigar 3 utilizar o s3l3iton-cigar como o espa3o transversal no 3mbito de se suavizar o modelo GS. O fluxo de Ricci define uma fam3lia de branas do tipo corda onde a evolu33o do espa3o transversal causa varia33es nas propriedades f3sicas da brana [89]. Como o valor assint3tico do escalar de curvatura depende do par3metro de evolu33o, o fluxo geom3trico representa uma varia33o na constante cosmol3gica do *bulk*. Portanto, λ e c podem ser tratados como par3metros de evolu33o equivalentes. O cen3rio string-cigar 3 assintoticamente plano, como o disco de raio $1/\lambda = R_0$ utilizado no modelo GS. Por3m, pr3ximo 3 origem, o termo $\tanh^2 \rho$ suaviza a geometria e atribui uma espessura 3 brana [89].

O *ansatz* para o fator de warp e a componente angular da m3trica, propostos no modelo string-cigar [89] s3o, respectivamente,

$$\sigma(\rho, c) = e^{-(c\rho - \tanh(c\rho))} \quad (4.59)$$

e

$$\gamma(\rho, c) = \frac{1}{c^2} \tanh^2(c\rho) \sigma(\rho, c). \quad (4.60)$$

Plotamos seus gr3ficos nas Figs. 35 e 36, respectivamente. Os casos para o modelo GS est3o inclusos. Note que agora todas as condi33es de regularidade passam a ser satisfeitas. Al3m disso, o fator de warp $\sigma(\rho)$ suaviza o modelo de corda-fina de Gherghetta-Shaposhnikov na origem. Outra caracter3stica importante dos *ansatz* adotados por Silva-Almeida para os fatores de warp 3 o fato de γ se anular na origem, o que caracteriza o comportamento c3nico do modelo [89, 127].

A m3trica (4.1), juntamente com as equa33es (4.59) e (4.60) representa um espa3o-tempo interior e exterior ao defeito do tipo corda. Al3m disso, todas as condi33es de regularidade s3o satisfeitas [89].

As equa33es de Einstein fornecem as componentes do tensor momento-energia

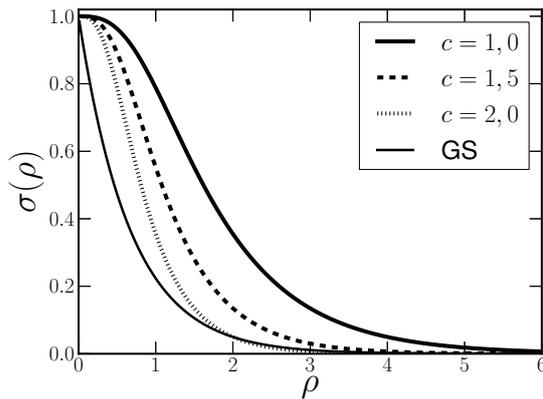


Figura 35: Fator de warp $\sigma(\rho)$ para diferentes valores de c . As condições de regularidade agora passam a ser satisfeitas. O modelo string-cigar suaviza o modelo GS na origem.

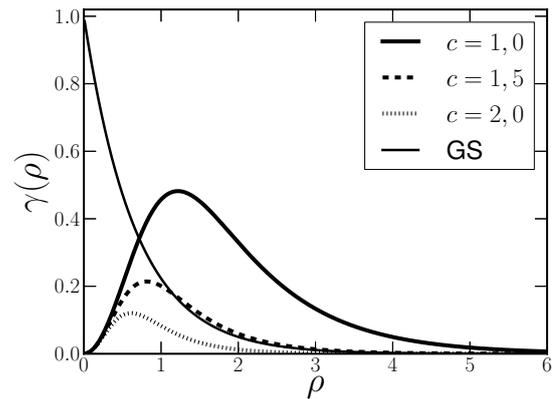


Figura 36: Fator de warp angular $\gamma(\rho)$ para diferentes valores de c . As condições de regularidade agora passam a ser satisfeitas. O fato de γ se anular na origem caracteriza o comportamento cônico do modelo. No caso do modelo GS, usamos $R_0 = 1, 0$.

expressas explicitamente por [89]:

$$t_0(\rho, c) = \frac{c^2}{\kappa_6} \left(7\text{sech}^2 c\rho + \frac{13}{2}\text{sech}^2 c\rho \tanh k\rho - \frac{5}{2}\text{sech}^4 c\rho \right), \quad (4.61)$$

$$t_\rho(\rho, c) = \frac{c^2}{\kappa_6} \left(5\text{sech}^2 c\rho + 2\text{sech}^2 c\rho \tanh c\rho - \frac{5}{2}\text{sech}^4 c\rho \right), \quad (4.62)$$

$$t_\theta(\rho, c) = \frac{c^2}{\kappa_6} \left(5\text{sech}^2 c\rho + 4\text{sech}^2 c\rho \tanh c\rho - \frac{5}{2}\text{sech}^4 c\rho \right). \quad (4.63)$$

As componentes são todas não-negativas e dependem diretamente do parâmetro c . Na Ref. [89], uma análise detalhada mostra que, há medida em que a geometria passa por um fluxo de Ricci, a fonte atravessa diferentes fases, todas elas satisfazendo as condições de energia fraca, forte e dominante. Por c ser relacionado com a constante cosmológica, o fluxo de Ricci determina como uma variação da constante cosmológica do *bulk* altera a fonte da brana do tipo string-cigar [89].

Para se perceber mais claramente que as condições de energia são satisfeitas, plotamos as componentes do tensor momento-energia dadas pelas Eqs. (4.61) nas figuras 37 e 38 para $c = 1, 0$ e $c = 3, 0$, respectivamente. Sabe-se da Relatividade Geral [47–49] que as condições de energia são: Para $i \equiv \rho, \theta$,

$$t_0(\rho) + t_i(\rho) \geq 0,$$

$$t_0(\rho) \geq 0 \quad (\text{condição de energia fraca}), \quad (4.64)$$

$$t_0(\rho) + \sum_i t_i(\rho) \geq 0 \quad (\text{condi\c{c}ao de energia forte}), \quad (4.65)$$

e

$$t_0(\rho) \geq |t_i(\rho)| \quad (\text{condi\c{c}ao de energia dominante}). \quad (4.66)$$

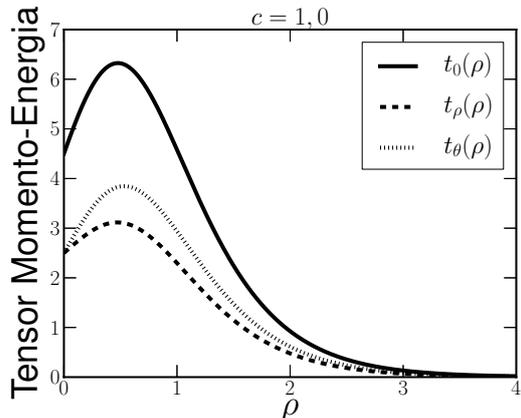


Figura 37: Componentes do tensor momento-energia para $c = 1.0$.

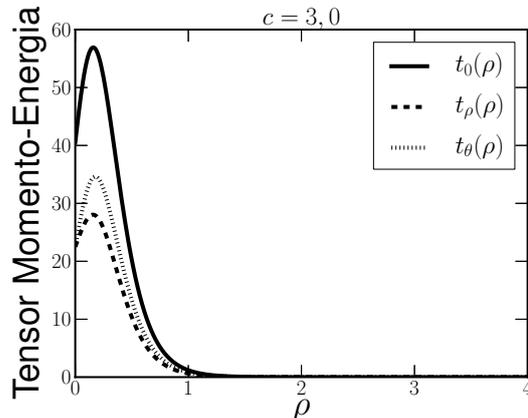


Figura 38: Componentes do tensor momento-energia para $c = 3.0$.

Na figura 39 mostramos apenas a densidade de energia $t_0(\rho, c)$ para diferentes valores do parâmetro de evolução no intuito de mostrar o comportamento do núcleo da brana com relação às variações do fluxo geométrico. É importante mencionar que o núcleo da brana está afastado da origem. Um comportamento semelhante foi encontrado por Giovannini e co-autores [115] para uma brana gerada por um vórtice Abelian com elevado número de voltas. Foi considerado um vórtice gerado por um potencial de auto-interação do tipo $\lambda\phi^4$. A largura do núcleo da brana ϵ pode ser estimado como $\epsilon = \bar{\rho}$, onde $\bar{\rho}$ refere-se à posição da metade do máximo do tensor momento-energia t_0 . Além disso, quando maior o valor de c , menor é a largura ϵ do núcleo. Portanto, para $c \rightarrow \infty$ a solução string-cigar se aproxima da solução do modelo GS.

Na geometria string-cigar, a equação radial assume a forma explícita

$$\phi_m'' + c \left[-\frac{5}{2} \tanh^2(c\rho) + \frac{\text{sech}^2(c\rho)}{\tanh(c\rho)} \right] \phi_m' + e^{(c\rho - \tanh(c\rho))} \left(m_0^2 - \frac{l^2 c^2}{\tanh^2(c\rho)} \right) \phi_m = 0. \quad (4.67)$$

Note que o termo de massa tem uma dependência que diverge na origem e converge assintoticamente para o modelo GS. Para $\rho \rightarrow \infty$, a Eq. (4.67) tem a mesma forma da Eq. (4.37), com uma massa re-escalada $m \rightarrow e^{-1/2} m$. Portanto, as soluções assintóticas da Eq. (4.67) tem o mesmo comportamento da Eq. (4.39).

Seguindo o formalismo via equação de Schrödinger, nós podemos redefinir as

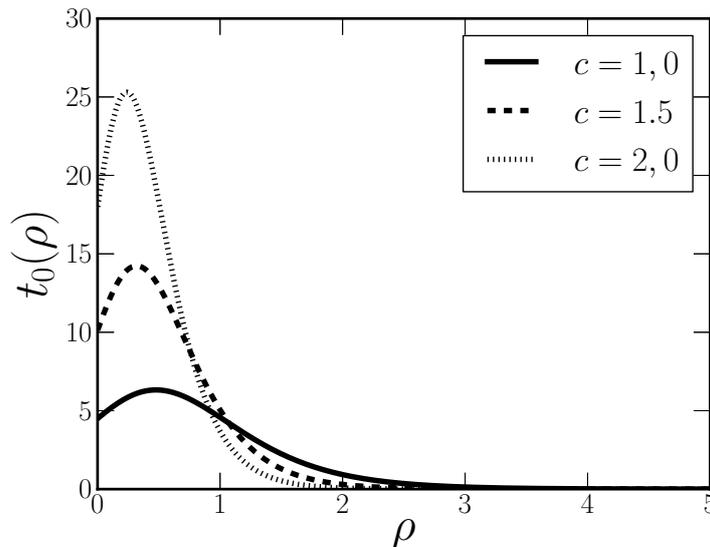


Figura 39: Densidade de Energia para o modelo string-cigar. Seu máximo é deslocado da origem, e sua largura evidencia a espessura da 3-brana.

autofunções de Kaluza-Klein como

$$\phi_m = \sigma(\rho, c) \left(\frac{\tanh c\rho}{c} \right)^{1/4} \Psi_m, \quad (4.68)$$

e a variável independente como

$$z = z(\rho) = \int^\rho e^{\frac{1}{2}(c\rho' - \tanh c\rho')} d\rho'. \quad (4.69)$$

A transformação (4.69) não pode ser escrita explicitamente. No entanto, nota-se que, para $m = 0$, a solução da equação do tipo Schrödinger é dada por [89]

$$\Psi_0(\rho, c) = N\sigma(\rho, c) \left(\frac{\tanh c\rho}{c} \right)^{1/4}, \quad (4.70)$$

onde N é um fator de normalização. Seu gráfico está apresentado na Fig. 40. A solução (4.70) pode ser considerada como um modo-zero GS suavizado (4.40). De fato, no modelo string-cigar, o modo sem massa tem o mesmo comportamento assintótico do modelo GS. Por outro lado, em contraste com o modelo GS, o modo-zero do modelo string-cigar se anula na origem por conta do comportamento cônico ganho do fator $\tanh c\rho$. Este comportamento concorda com o deslocamento do núcleo da brana.

A complexidade da equação radial (4.67) torna necessário o uso de métodos numéricos para se obter o espectro e as autofunções. As soluções numéricas, serão mostradas no capítulo 5. Além disso, a equação do tipo Schrödinger (4.31) para o cenário string-cigar deve ser resolvida na coordenada z que não possui forma analítica exata.

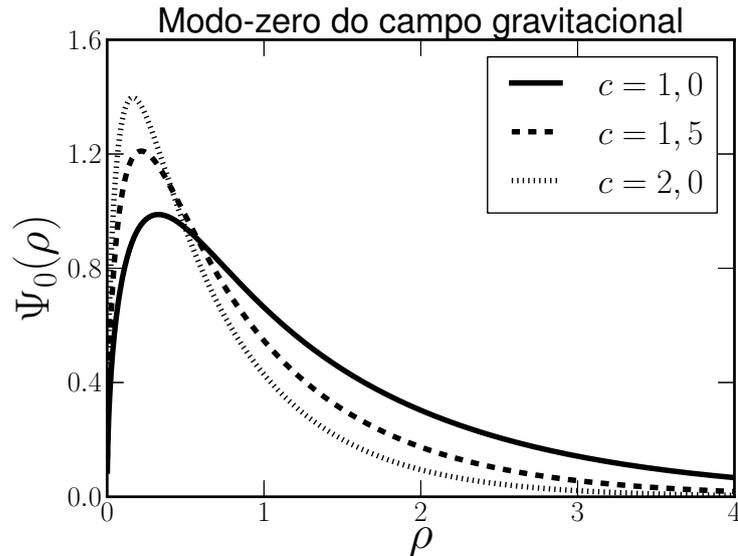


Figura 40: Modo-zero gravitacional para o modelo do tipo string-cigar.

4.3 Localização do campo de calibre

4.3.1 Introdução

Apesar de os modelos do tipo corda fina terem a vantagem de localizar os campos vetoriais livres [?, 101] sem a necessidade de um campo externo e os férmions de Dirac minimamente [103], eles ainda apresentam os problemas com respeito às fontes do núcleo. Lembremos que nem as condições de regularidade da métrica não são satisfeitas na brana e nem a condição de energia dominante, como discutido na seção anterior. Além disso, as mesmas soluções que localizam gravidade em uma brana construída a partir de um vórtice Abelian [115] também levam à localização do modo-zero do campo de calibre [132, 133].

Uma vez apresentado como o fluxo de Ricci altera as propriedades do núcleo da brana no modelo *string-cigar*, é importante analisar o comportamento dos campos do Modelo Padrão neste cenário. Nesta parte da tese, estudaremos a localização do campo de calibre nos modelos de branas do tipo corda-fina (GS) e *string-cigar* investigando os efeitos geométricos sobre o campo vetorial Abelian minimamente acoplado à geometria. Mostraremos que a componente radial tem uma estrutura mais rica comparada com a solução do tipo corda-fina apresentada na Ref. [?]. Além disso, assim como para campo gravitacional, a torre de Kaluza-Klein tem um estado de onda- s preso à brana, mas deslocado da origem. Apesar disso, assim como a fonte, o modo-zero se aproxima da origem com o aumento do parâmetro de evolução da geometria. O limite para grandes valores deste parâmetro concorda com os resultados para a corda-fina.

Assim como no caso gravitacional, a dinâmica para os modos massivos são

apresentados sob um problema de Sturm-Liouville, o qual é bastante difícil de ser estudado analiticamente. Por este motivo, nós utilizamos o método da matriz descrito na seção ???. Descobrimos que existe um gap entre o modo-zero e o primeiro modo massivo tanto para o modelo de corda fina quanto para o modelo de corda espessa. Ademais, como desejado, o comportamento linearmente crescente do espectro para ambos os modelos é encontrado. Porém, o núcleo da brana do tipo string-cigar eleva em magnitude o espectro do campo vetorial. Semelhantemente, as autofunções massivas têm suas amplitudes amplificadas sobre o núcleo da brana, em comparação com o caso de brana fina. Através da abordagem via equação de Schrödinger, mostraremos que o parâmetro geométrico modula o potencial quântico análogo.

Na seção seguinte, apresentaremos o procedimento da localização do campo de *gauge* e os resultados quanto ao modo-zero. A análise numérica dos modos massivos, será discutida no capítulo 5. Os resultados deste estudo foram publicados no periódico Physics Letters B **747**, 517 (2015).

4.3.2 Localização do campo de spin 1

Partiremos da seguinte ação para o campo vetorial de simetria $U(1)$ [35, 101]

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS}, \quad (4.71)$$

onde $F_{MN} = \nabla_M A_N - \nabla_N A_M$. Da ação (4.71), a equação de movimento é obtida diretamente como sendo [35, 101]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_R (\sqrt{-g} g^{RM} g^{LN} F_{MN}) = 0. \quad (4.72)$$

Vamos considerar o *gauge* de Lorentz na brana:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.73)$$

Como usual, considera-se ainda uma configuração de campo puramente radial, isto é [35, 101, 128],

$$A_\theta = 0. \quad (4.74)$$

Além disso, como a 3-brana é plana e possui uma simetria axial, a componente radial A_ρ não depende das coordenadas na brana, ou seja [128]:

$$A_\rho = A_\rho(\rho, \theta) \Rightarrow \partial_\lambda A_\rho(x^\mu) = 0. \quad (4.75)$$

Utilizando a métrica dos cenários do tipo corda dada pela Eq. (4.1) e as

escolhas de calibre acima, a equação de movimento (4.72) toma a forma

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{\sigma}{\gamma}\partial_\theta^2\right)A_\rho = 0, \quad (4.76)$$

$$\partial_\rho\left(\frac{\sigma^2\sqrt{\gamma}}{\gamma}\partial_\theta A_\rho\right) = 0 \quad (4.77)$$

e

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{\sigma}{\gamma}\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\rho\sigma\sqrt{\gamma}\partial_\rho\right)A_\lambda = 0. \quad (4.78)$$

Efetuada as decomposições de Kaluza-Klein [101]

$$A_\mu(x^M) = \sum_{n,l=0}^{\infty} A_\mu^{(n,l)}(x^\mu)\chi_n(\rho)Y_l(\theta) \quad (4.79)$$

e

$$A_r(x^M) = \sum_{l=0}^{\infty} A_r^{(l)}(x^\mu)\xi(\rho)Y_l(\theta), \quad (4.80)$$

a Eq. (4.76) conduz a

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{\sigma}{\gamma}l^2\right)A_r^{(l)}(x^\mu) = 0. \quad (4.81)$$

Logo, de modo a adequar a Eq. (4.76) com a Eq. (4.75), devemos nos restringir a apenas estados de onda- s , ou seja, $l = 0$. Além disso, a Eq. (4.77) leva à solução geral para $\xi(\rho)$ como sendo [128]

$$\xi(\rho) = k\gamma^{1/2}\sigma^{-2}, \quad (4.82)$$

onde k é uma simples constante de integração. É importante mencionar que a função $\xi(\rho)$ na Eq. (4.82) é uma extensão direta da apresentada por Ichiro Oda na Ref. [101]. Finalmente, utilizando a Eq. (4.82), a Eq. (4.78) torna-se

$$\chi_n''(\rho) + \left(\frac{3}{2}\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)\chi_n'(\rho) + \frac{m_n^2}{\sigma}\chi_n(\rho) = 0, \quad (4.83)$$

onde $\beta(\rho, c) = \gamma(\rho, c)/\sigma(\rho, c)$. A Eq. (4.83) descreve o comportamento do campo de *gauge* no *bulk*. É importante ressaltar que esta equação é bastante similar à equação radial para os grávitons (4.24), a menos da mudança do fator $\frac{3}{2}$ por $\frac{5}{2}$.

Nós agora vamos impor a condição de contorno de Neumann homogênea [35, 88, 89, 101, 115, 127, 128]

$$\chi_n'(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \chi_n'(\rho) = 0. \quad (4.84)$$

Isto fornece a relação de ortogonalidade entre χ_i e χ_j dada por [88, 89]

$$\int_0^\infty \sigma(\rho, c)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta(\rho, c)}\chi_i\chi_j d\rho = \delta_{ij}. \quad (4.85)$$

Outrossim, exatamente como no caso gravitacional, é possível de se transformar a equação de Kaluza-Klein (4.83) para a forma de Schrödinger. Considerando a mudança de variável independente [89]

$$z = z(r) = \int^r \sigma^{-1/2} dr' \quad (4.86)$$

e de variável dependente

$$\chi_n(z) = \Omega(z)\Psi_n(z), \quad (4.87)$$

onde

$$\Omega = C_1 \sigma^{-1/2} \beta^{-1/4} \quad (4.88)$$

com C_1 sendo uma constante. As mudanças de variáveis (4.86) e (4.87) transformam a Eq. (4.83) para a forma de Schrödinger com $\Psi_n(z)$ obedecendo a

$$-\ddot{\Psi}_n(z) + U(z)\Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z), \quad (4.89)$$

onde $U(z)$ é o potencial quântico análogo, dado por

$$U(z) = \frac{1}{4} \left[2 \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} - \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + \frac{\dot{\sigma} \dot{\beta}}{\sigma \beta} \right]. \quad (4.90)$$

Novamente, os pontos denotam derivadas com respeito à coordenada z .

Para $m = 0$, correspondente ao modo-zero, a solução da Eq. (4.83) é a seguinte combinação linear:

$$\chi_0(\rho) = C + \tilde{C} \int^r \sigma^{-\frac{3}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} d\rho', \quad (4.91)$$

onde C e \tilde{C} são constantes de integração. Devido a segunda função não satisfazer a condição de ortogonalidade (4.85), escolhe-se a função constante $\chi_0 = C$ como solução da Eq. (4.83).

Para o cenário de brana fina, [101], a equação de Schrödinger análoga fica expressa por:

$$-\ddot{\Psi}_n + \frac{2}{\left(z + \frac{2}{c}\right)^2} \Psi_n = m_n^2 \Psi_n, \quad (4.92)$$

onde

$$z = \frac{2}{c} (e^{\frac{\epsilon}{2} r} - 1). \quad (4.93)$$

Note que a origem na coordenada r é mapeada na origem da coordenada z . A solução da Eq. (4.92) para $m = 0$ é dada por

$$\Psi_0(z) = A_1 \left(z + \frac{2}{c}\right)^{-1} + A_2 \left(z + \frac{2}{c}\right)^2. \quad (4.94)$$

Fazendo $A_2 = 0$ na Eq. (4.94), obtém-se um modo-zero normalizado

$$\Psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{5c}{2R_0}} e^{-\frac{c}{2}\rho}. \quad (4.95)$$

Estes estados de Kaluza-Klein sem massa estão presos à brana por conta do fator exponencial. Além disso, a amplitude é maior para o campo de *gauge* do que para os grávitons – compare com a Eq. (4.42).

Da equação geral de Schrödinger (4.89) para $m = 0$, a solução satisfazendo a condição de ortogonalidade (4.85) é dada por

$$\psi_0(\rho, c) = N\sigma(\rho, c)^{\frac{1}{2}}\beta(\rho, c)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.96)$$

onde

$$N^2 = \frac{1}{\int_0^\infty \sigma(\rho, c)^{\frac{5}{2}}\beta(\rho, c)d\rho} \quad (4.97)$$

é uma constante de normalização.

Nós plotamos na figura 41 o modo-zero do campo de calibre para os cenários de corda-fina e *string-cigar*. Tais modos localizados são responsáveis pelo campo de *gauge* quadridimensional efetivo na 3-brana. Comparando com o caso gravitacional, o modo-zero do campo de *gauge* é mais concentrado na origem do que o modo-zero do gráviton para ambos os cenários. Uma característica importante é o afastamento do modo-zero da origem no cenário *string-cigar*. Este comportamento também está presente na densidade de energia do modelo como mostramos na seção 4.2.2. Fora do núcleo, o comportamento da brana fina predomina, enquanto que na origem, as correções no núcleo da brana anulam o modo. Interpolando esses dois regimes, há um suave pico cujo máximo situa-se em torno da posição do máximo da densidade de energia da brana. Note que para grandes valores do parâmetro geométrico c (e, conseqüentemente, da constante cosmológica do *bulk* Λ), o modo-zero do campo de *gauge* no cenário *string-cigar* tende ao caso de brana fina.

Utilizando as expressões para os fatores métricos (4.59) e (4.60), obtemos a equação de Kaluza-Klein para o modelo *string-cigar*

$$\chi_n'' + c \left[-\frac{3}{2} \tanh^2 c\rho + \frac{\operatorname{sech}^2 c\rho}{\tanh c\rho} \right] \chi_n' + e^{(c\rho - \tanh c\rho)} m_n^2 \chi_n = 0. \quad (4.98)$$

Note novamente a semelhança com a equação para o campo gravitacional (4.67) a menos da mudança dos fatores $\frac{3}{2}$ por $\frac{5}{2}$. Assintoticamente, a Eq. (4.98) recupera o caso do modelo de corda-fina mostrado na Ref. [101] como sendo

$$\chi_n''(r) - \frac{3}{2}c\chi_n'(r) + e^{cr} m_n\chi_n(r) = 0, \quad (4.99)$$

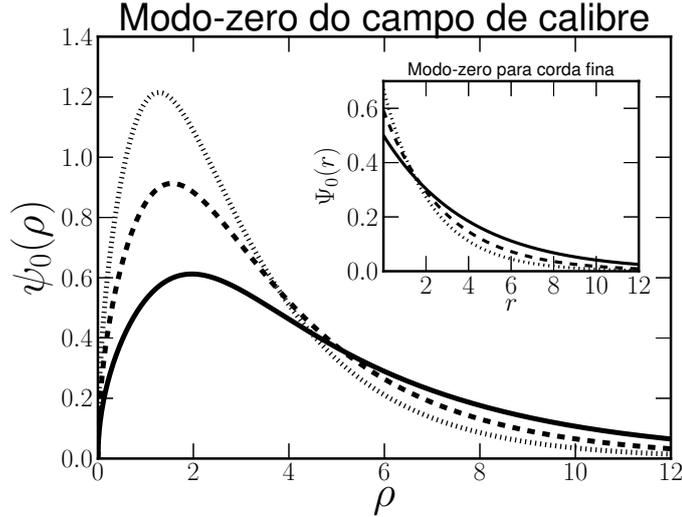


Figura 41: Modo-zero do campo de calibre para os cenários de brana do tipo corda-fina e do tipo string-cigar.

cuja solução geral é [101]

$$\chi_n(r) = \frac{1}{N_n} e^{\frac{3}{4}cr} \left[J_{3/2} \left(\frac{2m_n}{c} e^{\frac{c}{2}r} \right) + \alpha_n Y_{3/2} \left(\frac{2m_n}{c} e^{\frac{c}{2}r} \right) \right], \quad (4.100)$$

onde N_n são constantes de normalização e α_n são coeficientes constantes determinados a partir das condições de contorno. Observando o caso gravitacional da seção anterior, as flutuações ϕ tem a solução radial

$$\phi_n(r) = e^{\frac{5}{4}cr} \left[B_1 J_{5/2} \left(\frac{2m_n}{c} e^{\frac{1}{2}cr} \right) + B_2 Y_{5/2} \left(\frac{2m_n}{c} e^{\frac{1}{2}cr} \right) \right], \quad (4.101)$$

onde B_1 e B_2 são constantes arbitrárias. Logo, os modos massivos do campo de *gauge* possuem uma amplitude maior próximo à brana e se espalham menos no *bulk*, em comparação com o caso dos grávitons.

Para o modelo de corda-fina, há uma descontinuidade entre os modos massivos e o modo-zero. De fato, no limite $m_n \rightarrow 0$ os estados massivos convergem para $\phi_n(r) = 0$ e não para $\phi_0(r)$. Ademais, transformando a Eq. (4.99) em uma equação de Schrödinger, encontra-se que as soluções são da forma

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{(A - mB\bar{z}) \sin(m\bar{z}) - (mA\bar{z} + B) \cos(m\bar{z})}{m\bar{z}} \right], \quad (4.102)$$

onde A e B são constantes de integração e $\bar{z} = z + \frac{2}{c}$. Como as soluções de Kaluza-Klein na Eq. (4.102) não são definidas para $m = 0$, então, nós não podemos obter o modo-zero continuamente a partir da solução dos modos massivos. A existência deste gap de massa também foi encontrado em cenários de mundo-brana em cinco dimensões com

tensão negativa [134].

Aplicando as condições de contorno (4.84) em uma distância de corte ρ_{\max} , é possível obter o espectro discreto de Kaluza-Klein. De fato, as condições de contorno levam ao sistema de equações

$$J_{\frac{1}{2}}\left(2\frac{m_n}{c}\right) + \alpha_n Y_{\frac{1}{2}}\left(2\frac{m_n}{c}\right) = 0 \quad (4.103)$$

$$J_{\frac{1}{2}}\left(2\frac{m_n e^{\frac{c}{2}\rho_{\max}}}{c}\right) + \alpha_n Y_{\frac{1}{2}}\left(2\frac{m_n e^{\frac{c}{2}\rho_{\max}}}{c}\right) = 0. \quad (4.104)$$

O sistema acima é difícil de ser tratado analiticamente. No entanto para o regime de pequenas massas $m_n \ll c$, a divergência na função de Bessel de segundo tipo permite que se faça $\alpha_n = 0$. Portanto, o espectro de massa pode ser obtido da equação [101]

$$J_{\frac{1}{2}}\left(2\frac{m_n e^{\frac{c}{2}\rho_{\max}}}{c}\right) = 0. \quad (4.105)$$

Logo, das raízes da função de Bessel $J_{\frac{1}{2}}(x_n)$, onde $x_n = \frac{2m_n}{c} e^{\frac{c}{2}\rho_{\max}}$, nós obtemos o espectro de massa como [131]

$$m_n = \frac{c}{2} n \pi e^{-\frac{c}{2}\rho_{\max}}. \quad (4.106)$$

Note que as massas crescem **linearmente** com o índice discreto das raízes da função de Bessel $n \in \mathbb{N}$, como no modelo fatorizável de Kaluza-Klein [101]. Portanto, para ($m_n \ll c$), o espectro é discreto e há um gap entre o modo-zero e o primeiro modo massivo dado por

$$\Delta = m_1 - m_0 = \frac{c}{2} \pi e^{-\frac{c}{2}\rho_{\max}}. \quad (4.107)$$

Note que o espectro do campo de calibre possui o mesmo caráter exponencialmente suprimido do campo gravitacional. Este espectro contribuiria para uma fenomenologia do modelo como uma correção na lei de Coulomb [135–137]. Nesta tese, essa linha de pesquisa é deixada como perspectiva.

4.4 Localização do campo fermiônico

4.4.1 Introdução

Diferentemente dos campos escalar e gravitacional, o campo de calibre não possui modo-zero localizado em branas em cinco dimensões [102], sendo necessário um acoplamento com um campo escalar auxiliar conhecido por *dilaton* [102, 138–140]. Além disso, para os campos fermiônicos de spin 1/2 e 3/2, a localização do modo-zero requer uma coplamento adicional, normalmente um acoplamento de Yukawa [55, 141–149]. A dinâmica do *bulk* e o acoplamento adicional também proporcionam a existência de modos de Kaluza-

Klein ressonantes, que carregam consequências fenomenológicas [52, 54, 55, 141, 142, 150–152]. Outra abordagem para se obter um modo-zero normalizado para os campos de calibre e fermiônico em modelos de branas com tensão positiva é efetuada com mudanças na estrutura geométrica para uma estrutura de Weyl [136, 153, 154].

Uma questão relevante a se levantar é a de como se incluir campos de matéria (férmions) nas branas do tipo corda fina e espessa. Ichiro Oda foi o pioneiro nesta área, onde estudou a localização de campos de vários spins em uma brana do tipo-corda fina [35, 101]. Sete anos depois, o grupo de Yu-Xiao Liu estudou a localização de férmions em um defeito do tipo-corda fina [103]. No contexto de branas do tipo-corda espessa submetida à fluxos geométricos, Davi Dantas e co-autores obtiveram um modo-zero fermiônico normalizado uma brana do tipo-corda espessa com um conifold resolvido transversal [129].

Além do espinor de spin $1/2$ que descreve a matéria usual do Modelo Padrão, outro campo fermiônico interessante a se estudar é o de spin $3/2$ (gravitino, superparceiro do gráviton) que surge no contexto de supergravidade e é um dos candidatos à matéria escura [155].

Assim como o campo vetorial em $5D$, os férmions livres de spin $1/2$ e $3/2$ só podem ser localizado (sem interações adicionais) em uma brana do tipo-corda fina com fator de warp exponencialmente decrescente (tensão negativa) [35]. Xiao Liu e co-autores propuseram acoplar férmions com um campo de fundo de calibre com simetria $U(1)$, onde neste caso, o modo-zero é confinado na brana com tensão positiva [103]. Além disso, Parameswaran e co-autores analisaram o modo-zero e o espectro de massa fermiônico em um modelo de supergravidade $6D$ que permite um gap de massa finito, mesmo para uma dimensão extra infinita [156].

Nesta parte da tese, nós estudamos a localização de campos fermiônicos de spin- $1/2$ e spin- $3/2$ no modelo string-cigar. Nós propomos um novo acoplamento entre os férmions e um campo vetorial de fundo que localiza o modo-zero fermiônico na brana do tipo string-cigar. O limite de corda fina também é levado em conta. Impondo condições de contorno adequadas para garantir que os operadores de spin sejam auto-adjuntos, obtemos um modo-zero normalizado e bem definido em todo o espaço é obtido. Assim como para os campos vetorial e gravitacional, estudados nas seções anteriores, o modo-zero fermiônico é afastado da origem. Por análises numéricas obtemos os autoestados de Kaluza-Klein. O espectro de massa é real, monotonicamente crescente, e indistinguível quanto à quiralidade direita ou esquerda. Para o campo de Rarita-Scwinger (spin- $3/2$), o modo-zero e o espectro massivo têm diferenças mínimas em comparação com o campo de Dirac (spin- $1/2$). No entanto, as amplitudes de suas autofunções massivas são maiores.

Analisando o potencial quântico análogo, concluímos ainda que os campos de Dirac e de Rarita-Schwinger possuem comportamentos idênticos. Além disso, o acoplamento também possibilita a presença de estados ressonantes. Este é o primeiro trabalho na literatura, onde ressonância de férmions são encontradas em branas de seis dimensões. Comparando os resultados entre os modelos string-cigar e corda-fina, o núcleo da brana espessa amplifica os modos massivos próximos à origem para ambos os spins. Assintoticamente, os comportamentos são iguais.

Já apresentados os modelos GS e string-cigar nas seções 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente, iniciaremos o estudo da localização do modo-zero fermiônico na seção a seguir. Os resultados numéricos dos autoestados massivos serão discutidos no capítulo 5. Os resultados deste estudo foram publicados no periódico *Physical Review D* **92**, 104007 (2015).

4.4.2 Localização do campo de spin 1/2

Considere a ação em um espaço-tempo curvo para férmions de spin $\frac{1}{2}$ no *bulk* [35, 103, 156, 157]:

$$S_{6_{1/2}} = \int \sqrt{-g} \bar{\Psi} i \Gamma^M D_M \Psi d^6 x, \quad (4.108)$$

onde

$$\Gamma^M = \xi_M^{\bar{M}} \Gamma^{\bar{M}} \quad (4.109)$$

são as matrizes de Dirac curvas definidas a partir das matrizes de Dirac planas $\Gamma^{\bar{M}}$ através das *vielbeins*⁴

$$g_{MN} = \xi_M^{\bar{M}} \xi_N^{\bar{N}} \eta_{\bar{M}\bar{N}}. \quad (4.110)$$

Estas matrizes obedecem à álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = +2g^{MN} \mathbb{1}_8. \quad (4.111)$$

Aqui, D_M é a derivada covariante dada por [103, 156, 157]

$$D_M = \partial_M + \Omega_M - iqA_M, \quad (4.112)$$

⁴A teoria das *vierbein* (ou tétrades) é um caso especial da aplicação à variedades quadridimensionais da conexão de Cartan, generalização da noção de uma conexão afim. Em geometria diferencial, uma conexão afim é um objeto geométrico em uma variedade suave que conecta espaços tangentes permitindo que campos de vetores tangentes sejam diferenciáveis. Este ramo da matemática possui muita expressividade em Relatividade Geral, onde define-se uma estrutura de campos (“*frame fields*”, em inglês, também chamada um *tétrade* ou “*vierbein*”) que consiste de um conjunto ortonormal de quatro campos vetoriais, um do tipo-tempo e três do tipo espaço. Em outras dimensões, palavras como *triade*, *pentade*, *zweibein*, *fünfbein* e *elfbein* têm sido utilizadas. *Vielbein* abrange todas as dimensões. Em alemão, *vier* significa quatro e *viel* significa “muitos”.

onde

$$\Omega_M = \frac{1}{4} \eta^{\bar{P}\bar{N}} \xi_{\bar{N}}^{\bar{M}} \left[\partial_M \xi_{\bar{P}}^N + \Gamma_{MQ}^N \xi_{\bar{P}}^Q \right] \Gamma_{\bar{M}} \Gamma_{\bar{N}} \quad (4.113)$$

é a conexão de spin e

$$A_M = A_\mu(x) \hat{x} + A_\theta(\rho) \hat{\theta} \quad (4.114)$$

é um campo de calibre de fundo cilíndricamente simétrico. É importante ressaltar que A_M não tem nenhuma relação com o campo dinâmico de calibre da seção 4.3.

Trabalhando sobre a métrica do tipo corda 4.1, os termos não-nulos da conexão de spin são [35, 103, 156, 157]

$$\Omega_\mu = \frac{1}{4} \frac{\sigma'(\rho)}{\sqrt{\sigma(\rho)}} \Gamma_{\bar{\mu}} \Gamma_{\bar{\rho}} \quad \text{and} \quad \Omega_\theta = \frac{1}{4} \frac{\gamma'(\rho)}{\sqrt{\gamma(\rho)}} \Gamma_{\bar{\theta}} \Gamma_{\bar{\rho}}. \quad (4.115)$$

Substituindo as Eqs. (4.112) e (4.115) na ação (4.108) sob a métrica do tipo corda dada pela Eq. (4.1), nós obtemos a equação de Dirac:

$$\begin{aligned} \Gamma^M D_M \Psi = & \left[\sigma^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{\bar{\mu}} \left(\partial_\mu - iq A_\mu(x) \right) + \Gamma^{\bar{r}} \left(\partial_r + \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\gamma'}{4\gamma} \right) + \right. \\ & \left. + \gamma^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{\bar{\theta}} \left(\partial_\theta - iq A_\theta(\rho) \right) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Em modelos de seis dimensões escolhe-se o espinor usual de Weyl e as seguintes representações das matrizes gamma [35, 103, 129, 156–158]:

$$\Psi(x, \rho, \theta) = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.117)$$

$$\Gamma^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\bar{\mu}} \\ \gamma^{\bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{\rho}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^\theta \\ \gamma^\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

Devido à convenção no sinal da métrica $(-, +, +, +, +, +)$, as matrizes γ^μ na representação de Weyl tornam-se:

$$\gamma^0 = -i\sigma^1 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \gamma^i = -\sigma^2 \otimes \sigma^i, \quad \gamma^5 = \sigma^3 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \gamma^\theta = i\mathbb{1}_4, \quad (4.119)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli e $\mathbb{1}$ é a matriz identidade. Nesta convenção, a matriz γ^0 é anti-hermitiana, enquanto que as demais são hermitianas. A matriz γ^5 é tal que $\gamma^5 \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$. O operador de Dirac atua como $\gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu) \psi = m\psi$. Outras representações podem ser deduzidas diretamente das formas gerais da Ref. [159] para assinatura $(+, -, -, -, -, -)$.

Agora, efetua-se uma decomposição de Kaluza-Klein em ψ_4 na forma

$$\psi_4(x, \rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} \left[\psi_{R_{n,l}}(x) \alpha_{R_{n,l}}(\rho) + \psi_{L_{n,l}}(x) \alpha_{L_{n,l}}(\rho) \right] e^{il\theta}, \quad (4.120)$$

onde os índices R e L denotam as quiralidades quanto à direita ou esquerda, respectivamente. Usando as equações (4.117), (4.118) e (4.120) para soluções do tipo onda- s , ou seja, $l = 0$, [35, 103, 157], a equação de Dirac (4.116) reduz-se às seguintes equações quirais acopladas:

$$\begin{cases} [\partial_\rho + \mathcal{P}(\rho) + \mathcal{W}(\rho)] \alpha_{R_n}(\rho) = -\frac{m_n}{\sqrt{\sigma(\rho)}} \alpha_{L_n}(\rho) \\ [\partial_\rho + \mathcal{P}(\rho) - \mathcal{W}(\rho)] \alpha_{L_n}(\rho) = \frac{m_n}{\sqrt{\sigma(\rho)}} \alpha_{R_n}(\rho), \end{cases} \quad (4.121)$$

onde

$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} + \frac{\gamma'(\rho)}{4\gamma(\rho)} \quad (4.122)$$

e

$$\mathcal{W}(\rho) = q \frac{A_\theta(\rho)}{\sqrt{\gamma(\rho)}}. \quad (4.123)$$

Explicitamente para o modelo string-cigar, ou seja, para os fatores de warp (4.59) e (4.60), temos

$$\mathcal{P}(\rho) = -c \left[\frac{5}{4} \tanh^2(c\rho) - 2 \operatorname{sech}^2(c\rho) \coth(c\rho) \right] \quad (4.124)$$

e

$$\mathcal{W}(\rho) = cq \frac{A_\theta(\rho)}{\tanh(c\rho)} e^{\frac{1}{2}[c\rho - \tanh(c\rho)]}. \quad (4.125)$$

Para $m = 0$, as expressões (4.121) desacoplam em duas equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções são:

$$\alpha_{R_n, L_n}^0(\rho) = C_0 \exp \left[- \int_\rho^\infty (\mathcal{P} \pm \mathcal{W}) d\rho' \right], \quad (4.126)$$

onde C_0 é uma constante de normalização.

Com o intuito de se ter um modo-zero localizado e livre de singularidades na origem, impõe-se a condição de ortonormalidade

$$\int_0^\infty |\alpha_{R_n, L_n}^0(\rho)|^2 d\rho' = \delta_{R_n, L_n}. \quad (4.127)$$

Esta condição implica que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \alpha_{R, L}^0(\rho) = 0, \quad (4.128)$$

de modo que o argumento da função exponencial na Eq. (4.126) deva assumir valores

infinitamente negativos quando ρ tende para o infinito. No entanto, como

$$-\int_{\rho'} \mathcal{P}(r) d\rho' = \frac{5}{4} \left[c\rho - \tanh(c\rho) + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{\tanh(c\rho)}{c} \right) \right] \quad (4.129)$$

é não-convergente, a função $A_\theta(\rho)$ apresentada na Eq. (4.125) deve ser ajustada de modo a se evitar este problema. Assumindo que

$$\mathcal{W}(\rho) = -\lambda \mathcal{P}(\rho), \quad (4.130)$$

onde λ é uma constante de acoplamento adimensional, o modo-zero direito fica dado por

$$\alpha_R^0(\rho) = C_0 \exp \left[\int_{\rho'} dr' (\lambda - 1) \mathcal{P} \right] = C_0 \sigma^{(\lambda-1)}(\rho) \gamma^{\frac{1}{4}(\lambda-1)}(\rho). \quad (4.131)$$

Para $\lambda = 0$ esta expressão é a mesma obtida na Ref. [35] que é não-normalizada. Utilizando as expressões explícitas do fator de warp nas Eqs. (4.59) e (4.60) para o modelo *string-cigar*, o modo-zero e a componente angular do campo de calibre de fundo ficam dadas, respectivamente por:

$$\alpha_R^0(\rho) = C_0 \left(\frac{\tanh(c\rho)}{c} \right)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} \exp \left(\frac{5}{4} (1 - \lambda) [c\rho + \tanh(c\rho)] \right) \quad (4.132)$$

e

$$A_\theta(\rho) = \frac{\lambda}{q} \left[\frac{5}{4} \tanh^3(c\rho) - 2 \operatorname{sech}^2(c\rho) \right] e^{-\frac{1}{2}[c\rho - \tanh(c\rho)]}. \quad (4.133)$$

Na ausência de acoplamento ($\lambda = 0$), o modo-zero não é localizado na brana. Para $\lambda > 1$, o modo-zero é normalizado, mas apenas para $\lambda > 3$ sua derivada é contínua e nula na origem. Para estas restrições sobre λ , encontra-se as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \alpha_{R,L}^0(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \alpha_{R,L}^0(\rho) = 0 \\ \partial_\rho [\alpha_{R,L}^0(\rho)]_{\rho=0} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \partial_\rho [\alpha_{R,L}^0(\rho)] = 0. \end{cases} \quad (4.134)$$

Nós plotamos o modo-zero fermiônico e a componente angular do campo de calibre de fundo nas figuras 42 e 43, respectivamente. Em ambos os casos, a constante de acoplamento λ controla a amplitude, enquanto que o parâmetro geométrico regula sua distribuição sobre a coordenada extra radial. O deslocamento do modo-zero da origem é um resultado importante apresentado na expressão (4.132). Esta característica está intimamente relacionada com o fato de que o núcleo da brana encontra-se fora da origem $r = 0$ [89]. Assim como para os campos gravitacional e vetorial, este modo-zero tem perfil

semelhante ao da densidade de energia do modelo string-cigar. [89]. Note na figura 42 que o modo-zero satisfaz as condições de contorno homogêneas (4.134) para $\lambda > 3$.

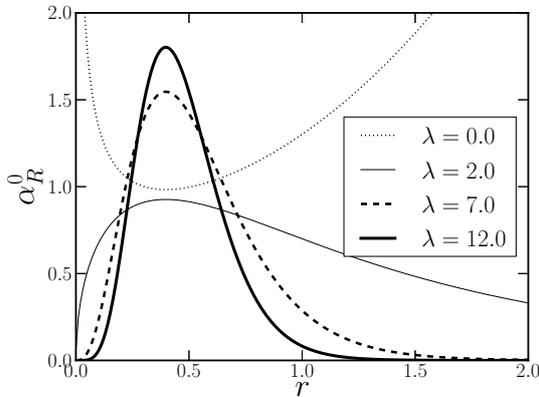


Figura 42: Gráfico do modo-zero fermiônico direito para $c = 0.5$ no modelo String-Cigar.

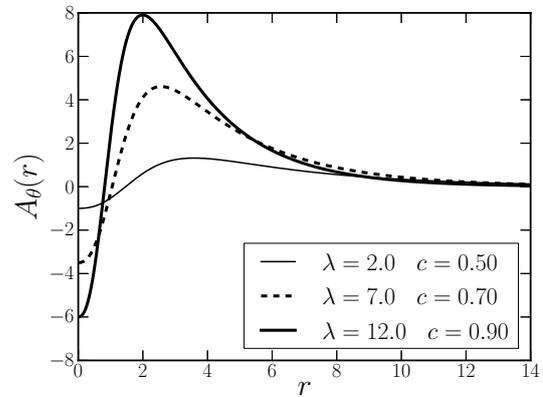


Figura 43: Gráfico da componente angular do campo de *gauge* para o modelo String-Cigar.

Para se ter o modo-zero esquerdo confinado na brana, deve-se fazer $\lambda \rightarrow -\lambda$ na Eq. (4.130) com a mesma restrição $|\lambda| > 3$. Portanto, apenas um dos modos quirais sem massa pode ser localizados na brana. Este é um resultado bem conhecido em modelos de cinco dimensões warped [55, 141–143, 146, 147].

É interessante notar neste ponto que as referências [35, 103] utilizam uma imposição menos restritiva na componente radial $\alpha_{R,L}^0(\rho)$ na forma

$$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \hat{I}_{\frac{1}{2}}(\rho) d\rho' = \int_0^\infty \sqrt{-g} \sigma^{-\frac{1}{2}}(\rho) |\alpha_{R_n, L_s}^0(\rho)|^2 dr' = \delta_{R_s, L_n}, \quad (4.135)$$

que provém da ação efetiva $S_{eff}^0(x, \rho, \theta)$ [35, 103] usando as equações (4.108) e (4.120)

$$S_{eff}^0 = \int_{-\infty}^\infty \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu [\partial_\mu + iqA_\mu(x)] \psi(x) d^4x' \int_0^\infty \hat{I}_{\frac{1}{2}}(\rho) dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (4.136)$$

No entanto, se adotarmos apenas a condição acima, o espinor no cenário string-cigar terá singularidades, enquanto que para as condições (4.127), estas singularidades desaparecem. Ademais, a Eq. (4.135) também é satisfeita.

Espectro de massa

No âmbito de estudar os modos massivos, desacoplemos o sistema de equações de primeira ordem (4.121) efetuando a mudança de variável conforme $z(\rho)$ dada por

$$z(\rho) = \int_0^\rho \sigma^{-\frac{1}{2}}(\rho') d\rho'. \quad (4.137)$$

Com isso, somos levados à

$$\left(\partial_z^2 + 2\tilde{\mathcal{P}}\partial_z + \left[\tilde{\mathcal{P}}^2 - \tilde{\mathcal{W}}^2 + \left(\dot{\tilde{\mathcal{P}}} \pm \dot{\tilde{\mathcal{W}}} \right) \right] \right) \alpha_{R_n, L_n}(z) = -m_n^2 \alpha_{R_n, L_n}(z), \quad (4.138)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(z)\sqrt{\sigma(z)} \quad , \quad \tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}(z)\sqrt{\sigma(z)}. \quad (4.139)$$

Aqui, os pontos denotam derivadas com respeito à z e os sinais $+$, $-$ denotam quiralidade direita e equerda, respectivamente.

O sistema de duas equações de segunda ordem (4.138) é composto de problemas de Sturm-Liouville independentes para cada quiralidade. Portanto, nós iremos analisar a dinâmica em cada quiralidade independentemente. Devido à complexidade das equações por conta das expressões oriundas dos fatores de warp do modelo string-cigar, e ainda pelo fato de a transformação de conforme $z(\rho)$ não possuir solução exata, o espectro e as autofunções dos férmions não podem ser obtidas analiticamente. sendo necessária um estudo numérico do problema. As soluções numéricas serão apresentadas no capítulo 5. De modo a se evitar erros de arredondamento cumulativos, estudaremos os modos massivos na coordenada original ρ . Portanto, a Eq. (4.138) permanece desacoplada podendo ser escrita como

$$\begin{aligned} \alpha''_{R_n, L_n}(\rho) + \left[3f + \frac{1}{2}g \right] \alpha'_{R_n, L_n}(\rho) + \left\{ \frac{(1 \mp \lambda)}{8} [5f^2 + fg + 10f' + 2g'] + \right. \\ \left. + (1 - \lambda^2) \left[\frac{5}{4}f + \frac{g}{4} \right]^2 \right\} \alpha_{R_n, L_n} = -\frac{m_n^2}{F} \alpha_{R_n, L_n}(\rho) \end{aligned} \quad (4.140)$$

onde

$$f(\rho) = \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} \quad \text{and} \quad g(\rho) = \frac{\beta'(\rho)}{\beta(\rho)}, \quad (4.141)$$

lembrando que $\beta = \sigma/\gamma$.

Para o caso da corda fina, $f = -c$ e $g = 0$. Logo, o problema de Sturm-Liouville (4.140) se reduz à

$$\alpha''_{R_n, L_n}(\rho) - 3c\alpha'_{R, L}(\rho) + \frac{5c^2}{8} \left[(1 \mp \lambda) + \frac{5}{2}(1 - \lambda^2) \right] \alpha_{R_n, L_n}(\rho) = -m_n e^{cr} \alpha_{R_n, L_n}(\rho). \quad (4.142)$$

Para $\lambda = 0$ (ausência de acoplamento), a equação de Sturm-Liouville (4.142) torna-se

$$\alpha''_{R, L}(\rho) - 3c\alpha'_{R, L}(\rho) + \frac{35}{16}c^2 \alpha_{R, L}(\rho) = -m_n e^{cr} \alpha_{R_n, L_n}(\rho), \quad (4.143)$$

cujas soluções são da forma

$$\alpha_{R,L} = A_{R,L}^1 e^{\frac{3c\rho}{2}} \left[J_{\pm\frac{1}{2}} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) + B_{R,L}^1 Y_{\pm\frac{1}{2}} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) \right], \quad (4.144)$$

onde $A_{R,L}^1$ e $B_{R,L}^1$ são constantes de integração. É importante ressaltar que os modos massivos dependem das funções de Bessel de ordem $\mu_{R,L} = \pm\frac{1}{2}$, enquanto que para os gráviton, ordem $5/2$ [88] e para o campo vetorial, ordem $3/2$ [35, 101].

Note que, assim como na Ref. [35], o modo-zero fermiônico na ausência de acoplamento com o campo de calibre de fundo não é localizado na brana. De fato, para $m = 0$ na Eq. (4.143), a solução sem massa tem a forma

$$\alpha_{R,L}^0 = A_{R,L}^0 e^{p_1 c\rho} + B_{R,L}^0 e^{p_2 c\rho}, \quad (4.145)$$

onde $p_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{109}}{8}$ e $A_{R,L}^0, B_{R,L}^0$ são constantes de interação.

Para $\lambda \neq 0$, podemos escrever as soluções como

$$\alpha_{R,L} = A_{R,L} e^{\frac{3c\rho}{2}} \left[J_{\mu_{R,L}} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) + B_{R,L} Y_{\mu_{R,L}} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) \right], \quad (4.146)$$

onde

$$\mu_{R,L} = (5\lambda \pm 1)/2 \quad (4.147)$$

são as ordens das funções de Bessel. Os modos massivos dados pela Eq. (4.146) assemelham-se bastante com as encontradas em cinco dimensões [160–163], onde a massa, assim como o acoplamento λ aqui, controla a ordem das funções de Bessel. Plotamos na Fig. ?? a solução analítica (4.146) de quiralidade direita para diferentes valores de λ . Note que a constante de acoplamento distancia os modos massivos da brana.

Diferentemente do modo-zero, o modo massivo não é localizado na brana, devido ao crescimento exponencial, o que é desejado. Todavia, para que as condições de contorno sejam satisfeitas, as ordens da função de Bessel devem ser $\mu_R > 7$ e $\mu_L > 8$. O acoplamento permite que as ordens das funções de Bessel sejam inteiras ou semi-inteiras. Para λ par, a ordem $\mu_{R,L}$ é semi-inteira, enquanto que para λ ímpar, $\mu_{R,L}$ é um inteiro. Embora a constante de acoplamento λ pode ser qualquer número real, as funções de Bessel de ordem irracional sofrem de problemas com ramos, e portanto, trabalharemos apenas com ordem racionais apenas. Uma característica interessante é a de que os modos massivo são relacionados por $\mu_R = \mu_L + 1$. Uma razão interessante para esta simetria será exposta mais adiante na abordagem por equações de Schrödinger.

Aplicando as condições de contorno (4.134) nos modos massivos (4.146) na origem e em uma determinada distância d corte $\rho = \rho_{\max}$, para $m \ll c$, nós obtemos as

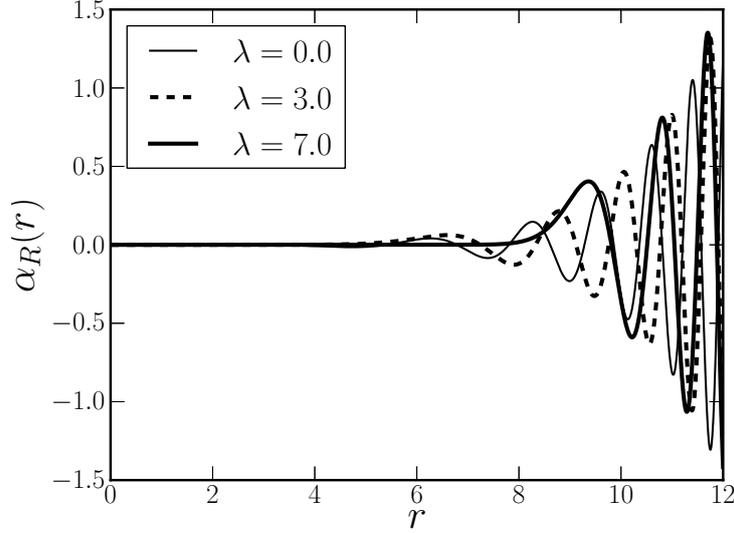


Figura 44: Modo massivo fermiônico no cenário de corda-fina (GS) para $m = 0, 50$. Os valores dos parâmetros foram $A_R = B_R = 1,5 \times 10^{-3}$, $\lambda = 5, 0$ e $c = 0, 5$.

condições $B_{R,L} = 0$ e

$$J_{\mu_{R,L}} \left(\frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho_{\max}}{2}} \right) = 0. \quad (4.148)$$

Das raízes da função de Bessel (4.148), nós encontramos que o espectro de Kaluza-Klein m_n é discreto e possui o comportamento [131]

$$m_n \approx \frac{c\pi}{2} e^{-\frac{c\rho_{\max}}{2}} \left[n + \frac{2\mu_{R,L} - 3}{4} + \frac{\mu_{R,L}}{2} \frac{(2 - \mu_{R,L})}{\left(n + \frac{2\mu_{R,L} - 3}{4}\right) \pi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \quad (4.149)$$

O espectro (4.149) exhibe um comportamento monotonicamente crescente, como esperado das teorias de Kaluza-Klein. Para grandes valores de n , o espectro tem comportamento linear, enquanto que para pequenos valores de n , os termos $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ na série (4.149) alteram a taxa de crescimento das massa. Note que este comportamento se assemelha com o caso gravitacional. O gap de massa entre o modo-zero e o primeiro modo massivo é dado por

$$\Delta = m_0 \approx \frac{c\pi}{2} e^{-\frac{c\rho_{\max}}{2}}, \quad (4.150)$$

que se anula para uma distância de corte infinita. Logo, para dimensões extras radiais infinitas, não há gap de massa entre o modo-zero e a torre de estados de Kaluza-Klein como já se conhece dos modelos de compactificação *warped* [7, 35, 88].

Para o modelo *string-cigar*, cujos fatores de warp são dadas pelas Eqs. (4.59) e (4.60), As funções f e g definidas pela Eq. (4.141) fica expressa como sendo

$$f(\rho) = -c \tanh^2(c\rho) \quad \text{and} \quad g(\rho) = 2c \frac{\text{sech}(c\rho)}{\tanh(c\rho)}. \quad (4.151)$$

Com isso, o problema de autovalores dado pela Eq. (4.140) fica intratável analiticamente. O tratamento numérico deste problema será discutido no capítulo 5.

Abordagem via equação de Schrödinger

Para chegarmos à uma equação do tipo Schrödinger para os modos massivos efetuamos a seguinte mudança de variável

$$\alpha_{R,L}(z) = \exp \left[- \int_{z'} \tilde{\mathcal{P}}(z) dz' \right] \tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad (4.152)$$

na Eq. (4.138). Com isso, obtemos

$$[-\partial_z^2 + V_{R,L}(z)] \tilde{\alpha}_{R,L}(z) = m^2 \tilde{\alpha}_{R,L}(z), \quad (4.153)$$

onde

$$V_{R,L}(z) = \tilde{\mathcal{W}}^2(z) \pm \partial_z \tilde{\mathcal{W}} \quad (4.154)$$

é o potencial quântico análogo.

Para o caso da corda-fina, $V_{R,L}(z)$ tem a forma explícita

$$V_{R,L}(z) = \frac{5\lambda}{2} \left[\frac{5\lambda}{2} \mp 1 \right] \frac{1}{\left(z + \frac{2}{c} \right)^2}. \quad (4.155)$$

para $\lambda > 0.4$, há uma barreira de potencial na origem para ambas as quiralidades. Como o potencial se anula assintoticamente, não há gap de massa para uma coordenada radial extra infinita (confira Ref. [52]), como já observando pelo estudo do problema de Sturm-Liouville. Definindo a variável

$$x := m \left(z + \frac{2}{c} \right), \quad (4.156)$$

a equação do tipo-Schrödinger para os férmions no modelo de corda fina torna-se

$$\left[-\partial_x^2 + \left\{ \frac{5\lambda}{2} \left[\frac{5\lambda}{2} \mp 1 \right] \frac{1}{x^2} \right\} - 1 \right] \tilde{\alpha}_{R,L}(x) = 0, \quad (4.157)$$

cujas soluções podem ser escritas como

$$\tilde{\alpha}_{R,L}(x) = N_{R,L} \sqrt{x} \left[J_{\mu_{R,L}}(x) + A_{R,L} Y_{\mu_{R,L}}(x) \right]. \quad (4.158)$$

A Eq. (4.158) é mais forma de expressar as autofunções massivas juntamente com a Eq. (4.146).

A estrutura do potencial (4.154) nos permite reescrever a equação do tipo Schrödinger como um sistema de equações

$$H_R \tilde{\alpha}_R(z) = m^2 \tilde{\alpha}_R(z), \quad H_L \tilde{\alpha}_L(z) = m^2 \tilde{\alpha}_L(z), \quad (4.159)$$

onde os operadores Hamiltonianos $H_{R,L}$ podem ser fatorizados em

$$H_R = A^\dagger A, \quad H_L = AA^\dagger \quad (4.160)$$

com

$$A(z) := \frac{d}{dz} + \tilde{\mathcal{W}}(z). \quad (4.161)$$

Para o caso de corda-fina, o operador diferencial de primeira ordem $A(z)$ é escrito como

$$A(z) = \frac{d}{dz} - 5\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(z + \frac{2}{c})}. \quad (4.162)$$

Os operadores do tipo Hamiltonianos nas Eqs (4.159) e (4.159) formam uma estrutura análoga à Mecânica Quântica Supersimétrica. De fato, definindo os operadores de carga análogos [164–166]

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.163)$$

que são operadores nilpotentes, isto é, $Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0$, e definindo também o Hamiltoniano do tipo supersimétrico [164–166]

$$H = \begin{pmatrix} H_R & 0 \\ 0 & H_L \end{pmatrix} \quad (4.164)$$

nós obtemos uma álgebra de mecânica quântica supersimétrica [164–166]

$$H = \{Q, Q^\dagger\}, \quad (4.165)$$

e

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0. \quad (4.166)$$

Os Hamiltonianos $H_{R,L}$ são relacionados por

$$H_L^\dagger = H_R \quad (4.167)$$

e são chamados superparceiros onde $\tilde{\mathcal{W}}$ é conhecido como o superpotencial [164–166]. Este superpotencial é bastante comum em localização de férmions em branas. Confira a Ref. [55], uma das pioneiras no assunto.

Uma característica bastante importante do sistema supersimétrico análogo (4.160) é o de que o espectro massivo para ambas as quiralidades é garantidamente real (ausente de táquions) [52, 54, 55]. A análise do espectro através do formalismo supersimétrico análogo é presente em grande parte da literatura de modelos de mundo-branas.

Considere agora a autofunção massiva $\tilde{\alpha}_R(z)$ do operador Hamiltoniano de quiralidade direita, H_R (4.159) com massa m_R . Defina a função

$$\tilde{\alpha}_L := \frac{1}{m_R} A \tilde{\alpha}_R. \quad (4.168)$$

Aplicando o operador Hamiltoniano de quiralidade esquerda H_L na função $\tilde{\alpha}_L$, encontramos que

$$H_L \tilde{\alpha}_L(z) = m_R^2 \tilde{\alpha}_L(z), \quad (4.169)$$

isto é, $\tilde{\alpha}_L$ é uma autofunção esquerda com massa igual a da autofunção direita $\tilde{\alpha}_R$. Definindo [164–166]

$$\tilde{\alpha}_R := \frac{1}{m_L} A^\dagger \tilde{\alpha}_L, \quad (4.170)$$

nós temos que

$$H_R \tilde{\alpha}_R(z) = m_L^2 \tilde{\alpha}_R(z), \quad (4.171)$$

isto é, $\tilde{\alpha}_R$ é uma autofunção de quiralidade esquerda com massa igual a da autofunção de quiralidade direita $\tilde{\alpha}_L$. Portanto, para cada autofunção direita $\tilde{\alpha}_R$ existe uma autofunção $\tilde{\alpha}_L$ com mesma massa e vice-versa.

A estrutura supersimétrica análoga dos Hamiltonianos $H_{R,L}$ também garantem que o espectro possui limite inferior. De fato, multiplicando qualquer dos Hamiltonianos $H_{R,L}$ pela autofunção dual $\tilde{\alpha}_{R,L}$, respectivamente, obtemos

$$\|A \tilde{\alpha}_{R,L}\|^2 = m^2 \|\tilde{\alpha}_{R,L}\|^2, \quad (4.172)$$

e portanto, $m \geq 0$. A ausência de táquions, (estados com norma negativa) garante a estabilidade do espectro. Além disso, isto nos possibilita uma interpretação probabilística análoga sobre os modos ressonantes. A mesma ideia é utilizada em cinco dimensões.

A fatorização do Hamiltoniano e a ausência de estados com norma negativa nos permite reduzir o problema de encontrar o estado fundamental de um operador diferencial de segunda ordem à um solução de uma equação diferencial de primeira ordem⁵. De fato, para o modo sem massa direito, temos que

$$H_R \tilde{\alpha}_R^0 = 0 \Rightarrow \|A \tilde{\alpha}_R^0\| = 0, \quad (4.173)$$

e desse modo,

$$A \tilde{\alpha}_R^0 = 0, \quad (4.174)$$

⁵Lembre do formalismo do superpotencial que discutimos no capítulo 2.

enquanto que para o modo sem massa esquerdo $\tilde{\alpha}_L^0$,

$$H_L \tilde{\alpha}_L^0 = 0 \Rightarrow A^\dagger \tilde{\alpha}_L^0 = 0. \quad (4.175)$$

Poranto, os modos sem massa $\tilde{\alpha}_{R,L}^0$ satisfazem a equação

$$\dot{\tilde{\alpha}}_{R,L}^0 \pm \tilde{\mathcal{W}}(z) \tilde{\alpha}_{R,L}^0 = 0, \quad (4.176)$$

cuja solução é dada por

$$\tilde{\alpha}_{R,L}^0 = e^{\mp \int_0^z \tilde{\mathcal{W}}(z') dz'}, \quad (4.177)$$

Pela Eq. (4.177), apenas um modo-zero quiral é normalizado, isto é, localizado na brana. Usando a mudança de variável dependente Eq. (4.152), nós obtemos a expressão (4.126) para o modo-zero. Portanto, para $\lambda > 0$, apenas o modo-zero direito é localizado na brana.

4.4.3 Localização do campo de spin 3/2

Nesta seção discutiremos a respeito a respeito do confinamento do campo de Rarita-Schwinger (spin-3/2).

Primeiramente, iniciaremos pela seguinte ação [35, 103]:

$$S_{6_{3/2}} = \int \sqrt{-g} \bar{\Psi}_M i \Gamma^{[M} \Gamma^N \Gamma^{P]} D_N \Psi_P d^6x, \quad (4.178)$$

onde os colchetes denotam anti-simetrização. A equação de movimento é [35, 103]

$$\Gamma^{[M} \Gamma^N \Gamma^{P]} D_N \Psi_P = 0. \quad (4.179)$$

Daqui em diante, reduziremos a notação para Γ^{MNP} para designar o produto de matrizes.

Para este campo de spin 3/2, a derivada covariante ganha um termo adicional da conexão afim quando comparado com o campo de spin 1/2 (4.112)

$$D_M \Psi_N = (\partial_M + \Omega_M - iqA_M) \Psi_N - \Gamma_{MN}^P \Psi_P. \quad (4.180)$$

Os termos não-nulos da Eq. (4.180) com a imposição do calibre $\Psi_\theta = \Psi_r = 0$ [103] são:

$$D_\mu \Psi_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \frac{\sigma'}{\sigma} \Gamma_\mu \Gamma_\rho - iqA_\mu \right) \Psi_\nu, \quad (4.181)$$

$$D_\mu \Psi_\rho = -\frac{1}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} \Psi_\mu, \quad (4.182)$$

$$D_\rho \Psi_\mu = \left(\partial_\rho - \frac{1}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} \right) \Psi_\mu, \quad (4.183)$$

$$D_\theta \Psi_\mu = \left(\partial_\theta + \frac{1}{4} \frac{\gamma'}{\gamma} \Gamma_\theta \Gamma_\rho - iqA_\theta \right) \Psi_\mu. \quad (4.184)$$

Analogamente à decomposição do spin-1/2 na Eq. (4.117), os autores da Ref. [35,103,157] apresentaram o espinor-vetor 4D de Rarita-Schwinger na forma

$$\Psi_\mu(x, \rho, \theta) = \begin{pmatrix} \psi_\mu^{(4)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.185)$$

Aqui, fazemos a decomposição de Kaluza-Klein no espinor 3/2 na seguinte forma:

$$\psi_\mu^{(4)}(x, \rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} \left[\psi_{\mu R_{n,l}}(x) u_{R_{n,l}}(\rho) + \psi_{\mu L_{n,l}}(x) u_{L_{n,l}}(\rho) \right] e^{il\theta}, \quad (4.186)$$

onde a seção 4D é vinculada por [35, 103]

$$\partial^\mu \psi_\mu = \gamma^\mu \psi_\mu = 0 \quad (4.187)$$

e [167]

$$\gamma^{\mu\nu\rho} (\partial_\nu - iqA_\nu) \psi_{\rho R,L} = m\gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu L,R}. \quad (4.188)$$

Logo, com essas restrições, os termos não-nulos de $\Gamma^{MNP} D_N \Psi_P$ são

$$\Gamma^{\epsilon\mu\nu} D_\mu \Psi_\nu = \Gamma^{\epsilon\mu\nu} (\partial_\mu - iqA_\mu) \Psi_\nu + \frac{\sigma'}{\sigma} \Gamma^{\nu\epsilon} \Gamma_\rho \Psi_\nu, \quad (4.189)$$

$$\Gamma^{\epsilon\mu\rho} D_\mu \Psi_\rho = -\frac{1}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} \Gamma^{\epsilon\mu\rho} \Psi_\mu, \quad (4.190)$$

$$\Gamma^{\epsilon\rho\mu} D_\rho \Psi_\mu = \Gamma^{\epsilon\rho\mu} \left(\partial_\rho - \frac{1}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} \right) \Psi_\mu, \quad (4.191)$$

$$\Gamma^{\epsilon\theta\mu} D_\theta \Psi_\mu = \Gamma^{\epsilon\theta\mu} (\partial_\theta - iqA_\theta) \Psi_\mu + \frac{\gamma'}{4\gamma} \Gamma^{\mu\epsilon} \Gamma_\rho \Psi_\mu. \quad (4.192)$$

Portanto, escrevendo as matrizes gamma na forma plana ($\Gamma^M = \xi_M^M \Gamma^{\bar{M}}$) e ignorando alguns índices, para o autovalor angular $l = 0$, a equação de movimento (4.179), junto com as Eq. (4.189)-(4.192) torna-se

$$\begin{cases} [\partial_\rho + (\mathcal{P}(\rho) - \frac{\sigma'}{2\sigma}) + \mathcal{W}(\rho)] u_{R_n}(\rho) = -\frac{m_n}{\sqrt{\sigma(\rho)}} u_{L_n}(\rho), \\ [\partial_\rho + (\mathcal{P}(\rho) - \frac{\sigma'}{2\sigma}) - \mathcal{W}(\rho)] u_{L_n}(\rho) = \frac{m_n}{\sqrt{\sigma(\rho)}} u_{R_n}(\rho), \end{cases} \quad (4.193)$$

com $\mathcal{P}(r)$ definido na Eq. (4.124) e $\mathcal{W}(\rho)$ na Eq. (4.125). Nós concluímos que a Eq. (4.193) é similar ao caso de spin 1/2 apresentado na Eq. (4.121) com o termo adicional $-\frac{F'}{2F}$.

Agora, nós usamos a mesma escolha para A_θ na Eq. (4.133), que implica dizer que o caso

$$\mathcal{W}(\rho) = -\lambda\mathcal{P}(\rho) \quad (4.194)$$

da Eq. é assegurado (4.130). Portanto, para se obter uma solução de módulo quadrado

normalizado, o modo-zero *esquerdo* do campo de spin 3/2 deve ter a forma

$$u_R^0(\rho) = \mathcal{C}_0 \exp \left[\int_{\rho'} d\rho' \left((\lambda - 1) \mathcal{P} - \frac{\sigma'}{2\sigma} \right) \right] = \mathcal{C}_0 \sigma^{(\lambda - \frac{1}{2})}(\rho) \gamma^{\frac{1}{4}(\lambda - 1)}(\rho). \quad (4.195)$$

onde \mathcal{C}_0 é uma constante de normalização. Novamente, para $\lambda = 0$, a expressão (4.195) é a mesma obtida na Ref. [35] que é não-normalizada. Além disso, a ação efetiva radial para o campo de spin-3/2 é a mesma do campo de spin-1/2 mostrado na Eq. (4.135). Note que há uma correlação entre os modos sem massa nas equações (4.195) e (4.132) da forma

$$u_{R,L}^0(\rho) = \sigma^{-\frac{1}{2}} \alpha_{R,L}^0(\rho). \quad (4.196)$$

Esta mudança proporciona um pequeno aumento da amplitude do modo-zero para o campo de spin 3/2. Nós plotamos na figura 45 o modo-zero para o campo de Rarita-Schwinger dado pela Eq. (4.195) e comparamos com a Eq. (4.132).

Utilizado as expressões explícitas dos fatores de warp do modelo string-cigar, (4.59) e (4.60), o modo-zero do campo de spin 3/2 fica expresso como

$$u_R^0(\rho) = \mathcal{C}_0 \left(\frac{\tanh(c\rho)}{c} \right)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} \exp \left(\frac{1}{4}(3 - 5\lambda)[c\rho + \tanh(c\rho)] \right). \quad (4.197)$$

Assim como para o caso de spin 1/2, para que exista um modo-zero é exigido que $\lambda > 1$, mas apenas para $\lambda > 3$ há um modo-zero normalizado com derivada nula na origem. Além disso, para os modos sem massa esquerdos deve fazer $\lambda \rightarrow -\lambda$. Portanto, novamente, apenas uma das quiralidades é localizado na brana.

Nesta fase do trabalho, nós já temos as expressões dos modos se massa para os campos gravitacionais 4.70, vetorial 4.96 e espinoriais – de spin 1/2 (4.132) e 3/2 (4.195). Nós verificamos que para $\lambda = 2$ o modo-zero fermiônico possui comportamento similar ao dos campos bosônicos. Na figura 46, plotamos os modos sem massa de todos os campos desta tese a fim de compará-los.

Modos massivos

Utilizando a coordenada conforme z , dada pela Eq. (4.137), nós podemos desacoplar a Eq. (4.193) na seguinte equações diferenciais de segunda ordem

$$\left[\partial_z^2 + 2 \left(\tilde{\mathcal{P}}(z) - \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} \right) \partial_z + \left\{ (1 \mp \lambda) \dot{\tilde{\mathcal{P}}}(z) - \partial_z \left(\frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \lambda^2) \tilde{\mathcal{P}}^2(z) - \frac{\tilde{\mathcal{P}}(z) \dot{\sigma}}{\sigma} + \left(\frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} \right)^2 \right\} \right] u_{R,L} = -m^2 u_{R,L}(z), \quad (4.198)$$

onde $\tilde{\mathcal{P}}(z) = \sqrt{\sigma}P(z)$.

Retornando para a variável original r , a equação (4.198) torna-se

$$\left[\partial_\rho^2 + \left(2f + \frac{g}{2}\right) \partial_\rho + \left\{ \frac{(1 \mp \lambda)}{8} [5f^2 + fg + 10f' + 2g'] + (1 - \lambda^2) \left[\frac{5}{4}f + \frac{g}{4} \right]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\frac{5}{4}f^2 + \frac{fg}{4} + \frac{f'}{2} \right] \right\} \right] u_{R,L}(r) = -\frac{m^2}{\sigma} u_{R,L}(\rho). \quad (4.199)$$

As equações (4.199) e (4.140) possuem diferenças mínimas entre si. No capítulo 5 mostraremos as soluções numéricas das equações destas equações. Mostraremos que o espectro do campo de spin 3/2 é idêntico ao do campo de spin 1/2. No entanto, as autofunções se mostrarão diferentes. As autofunções do campo de spin 3/2 possuem maior amplitude quando comparado com o campo de spin 1/2. A análise analítica do campo de Rarita-Schwinger (expressão exata do espectro) é deixada como perspectiva nessa tese. Analisaremos a seguir os modos massivos da campo de spin 3/2 na abordagem via equação de Schödinger.

Efetuando a mudança de variável dependente

$$u_{R,L}(z) = \exp \left[- \int_{z'} \left(\tilde{\mathcal{P}}(z) - \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} \right) dz' \right] \tilde{u}_{R,L}(z), \quad (4.200)$$

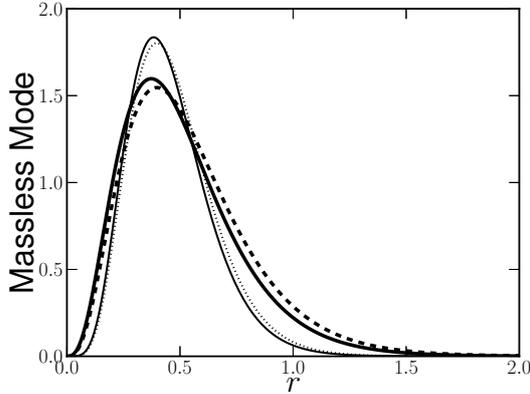


Figura 45: Gráficos dos modos sem massa dos campos espinoriais de quiralidade direita no modelo *string-cigar*. As linhas cheias correspondem ao campo de spin-3/2, enquanto que linhas tracejadas ao de spin-1/2. O parâmetro geométrico foi fixado em $c = 0.5$. Os valores do acoplamento foram usados como sendo $\lambda = 7$ nas linhas espessas e $\lambda = 12$ nas linhas finas.

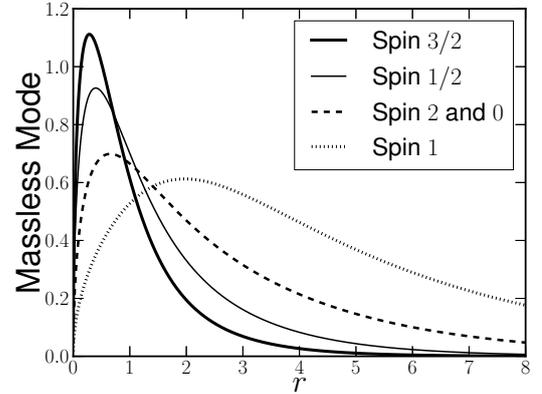


Figura 46: Gráficos dos modos sem massa dos campos bosônicos e fermiônicos no modelo *string-cigar* para $c = 0.50$ e $\lambda = 2.0$ (pro caso fermiônico).

na Eq. (4.198), nós obtemos uma equação do tipo Schrödinger:

$$\left[-\partial_z^2 + V_{R,L}^{3/2}(z)\right] \tilde{u}_{R,L}(z) = m^2 \tilde{u}_{R,L}(z), \quad (4.201)$$

onde

$$V_{R,L}^{3/2}(z) = \lambda^2 \tilde{\mathcal{P}}^2(z) \mp \lambda \partial_z \tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{W}}^2(z) \pm \partial_z \tilde{\mathcal{W}}. \quad (4.202)$$

é o potencial quântico análogo para o campo de spin 3/2. Note que esta possui a mesma forma do campo de spin 1/2, dada pela Eq. (4.154), pois a mudança de variáveis elimina o fator multiplicativo do termo de derivada primeira da função $u_{R,L}$ na Eq. (4.198). Toda a discussão a respeito das propriedades supersimétricas análoga do potencial quântico análogo na seção anterior continua válida para o campo de spin 3/2.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS EM 6 DIMENSÕES

Neste capítulo mostraremos nossos resultados numéricos nos modelos de seis dimensões descritos nas seções 4.2.1 e 4.2.2, os modelos GS e string-cigar, respectivamente. Separaremos em subseções com respeito ao campo a ser localizado.

5.1 Campo gravitacional

Nós resolvemos as equações (4.37) e (4.67) pelo método da matriz [168] seguindo o mesmo procedimento desenvolvido nos modelos em cinco dimensões do capítulo 5. Com isso obtivemos o espectro de massa e as autofunções do gráviton no modelos GS e string-cigar.

Como o autovalor angular gera uma degenerescência, nós focamos no caso de ondas- s , isto é, $l = 0$. Autoestados de onda- s representam o gráviton físico. Para o modelo GS, discretizamos o domínio $\rho = [0, 00, 10, 0]$ uniformemente com $N = 3000$ divisões. Com isso, o tamanho de passo é igual a 0,00333. Já para o modelo string-cigar, por ser singular na origem, escolhemos o domínio $\rho = [0, 01, 10, 01]$. A razão da escolha o domínio é devido ao comportamento dos coeficientes da equação diferencial (4.67). O termo de derivada primeira é fortemente ativo para pequenos valores de ρ , enquanto que o termo sem derivada, para grandes valores de ρ . Logo, para que todos os coeficientes tenham mesma ordem de grandeza, encontramos que o *domínio ótimo* é $\rho = [0, 00, 5, 70]$.

Os problemas de Sturm-Liouville mostraram-se bastante sensíveis com o parâmetro c devido aos termos exponenciais dos coeficientes da equação diferencial. Portanto, para prevenir erros de *overflow*¹, nós fixamos $\max(c) = 1, 0$.

Mostramos na Fig. 47 o espectro para os modelos GS e string-cigar. Fixamos $c = 0, 8$. Os espectros são todos reais, logo, os modelos não possuem táquions. Note que a correção próxima à origem do modelo string-cigar eleva a magnitude do espectro.

Trabalhar numericamente sobre o modelo GS é de grande serventia pois nele, podemos fazer o teste das nossas rotinas numéricas em modelos de seis dimensões. Lembre da seção 4.2.1, onde obtemos uma expressão analítica para o espectro do gráviton, na Eq. (4.52). No modelo GS, o termo $1/n$ foi desprezado, sendo o espectro dado pela Eq. (4.53). No entanto, mostraremos que a contribuição $1/n$ influencia nos dois primeiros autovalores

¹O termo *overflow* (em português, conhecido por erros de estouro), refere-se quando um número torna-se demasiadamente grande de modo a extrapolar a precisão de máquina.

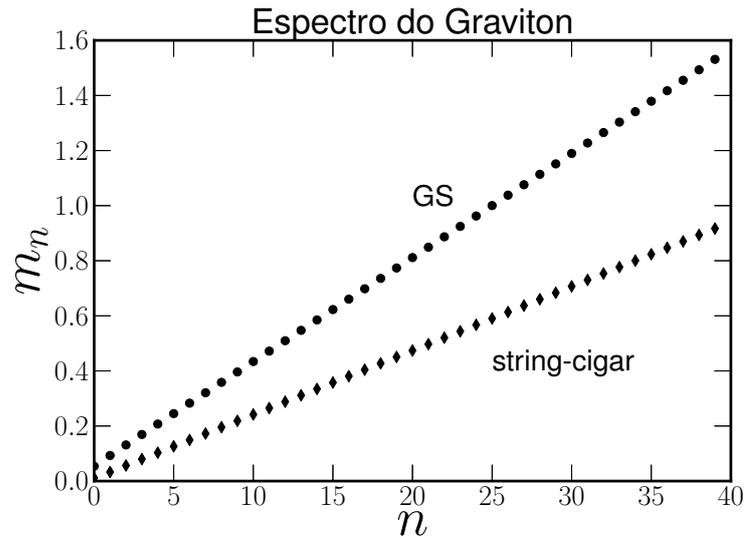


Figura 47: Espectro do gráviton para os modelos GS e string-cigar para $c = 0.8$.

res de massa com correção em segunda ordem. Na tabela 2, mostramos os resultados numéricos dos vinte primeiros autovalores de massa, bem como os valores exatos com e sem a correção em $1/n$ com precisão de seis algarismos significativos. Note que nossos resultados aproximam muito bem os autovalores com erros predominantemente abaixo de 0,5%.

n	Exato GS (4.53)	Exato com o termo $1/n$ (4.52)	Numérico	Erro relativo (%)
1	0.0115080	0.0126740	0.0126156	0.460
2	0.0345241	0.0349128	0.0349212	0.024
3	0.0575402	0.0577734	0.0576039	0.293
4	0.0805563	0.0807229	0.0809050	0.225
6	0.103572	0.103702	0.103092	0.588
7	0.126588	0.126694	0.126235	0.362
8	0.149604	0.149694	0.149361	0.222
9	0.172620	0.172698	0.172483	0.124
10	0.195636	0.195705	0.195609	0.049
11	0.218653	0.218714	0.218742	0.012
12	0.241669	0.241724	0.2418856	0.012
13	0.264685	0.264735	0.265040	0.115
14	0.287701	0.287748	0.288207	0.159
15	0.310717	0.310760	0.311387	0.201
16	0.333733	0.333773	0.334579	0.241
17	0.356749	0.356787	0.357784	0.279
18	0.379765	0.379801	0.381000	0.315
19	0.402781	0.402815	0.404228	0.350
20	0.425798	0.425829	0.427467	0.384

Tabela 2: Espectro de massa do gráviton do modelo de Gherghetta-Shaposhnikov.

Na Fig. 48 mostramos as autofunções para dois autovalores de massa diferente. Já na Fig. ??, temos autofunções para o modelo *string-cigar*. Como esperado, para ambos os modelos, as autofunções têm o mesmo comportamento assintótico. Porém, próximo à origem, temos resultados interessantes. As autofunções no modelo *string-cigar* têm amplitudes maiores do que no modelo GS. Além disso, as funções são suaves sobre o núcleo da brana. Este comportamento concorda com o apontado na Ref. [89] de que as autofunções devem ter um comportamento de funções de Bessel de primeiro tipo $J_0(m\rho)$. De fato, a expansão em primeira ordem dos coeficientes da Eq. (4.67) próximo à origem fornece

$$\phi_m'' + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2}{3}c^2\rho \right) \phi_m' + m^2\phi_m = 0. \quad (5.1)$$

Para $\rho \approx 0$, o termo $\frac{1}{\rho}$ prevalece sobre o termo $-\frac{2}{3}c^2\rho$. Portanto, a Eq. (5.1) se torna uma equação de Bessel, cuja solução é

$$\phi_{\rho \rightarrow 0}(\rho) = E_1 J_0(m\rho) + E_2 Y_0(m\rho), \quad (5.2)$$

onde E_1 e E_2 são constantes de integração. Como Y_0 diverge na origem, devemos fazer $E_2 = 0$. Portanto, o comportamento apresentado na Fig. 49 concorda com a solução acima.

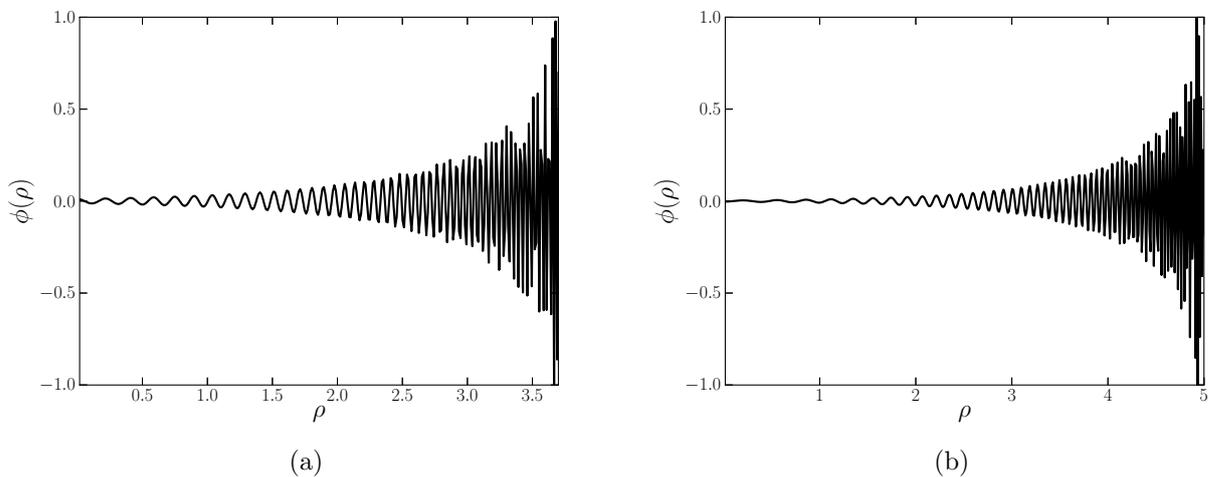


Figura 48: Autofunções numéricas para o modelo GS com (a) $m = 37.156$ e (b) $m = 22.729$.

5.1.1 Modos Ressonantes

Apesar de os modos massivos gravitacionais não serem localizados na brana, alguns desses modos podem apresentar um caráter ressonante [36, 51, 52, 54]. Os estados ressonantes podem ser encontrados através do **método da ressonância** [55, 141] que

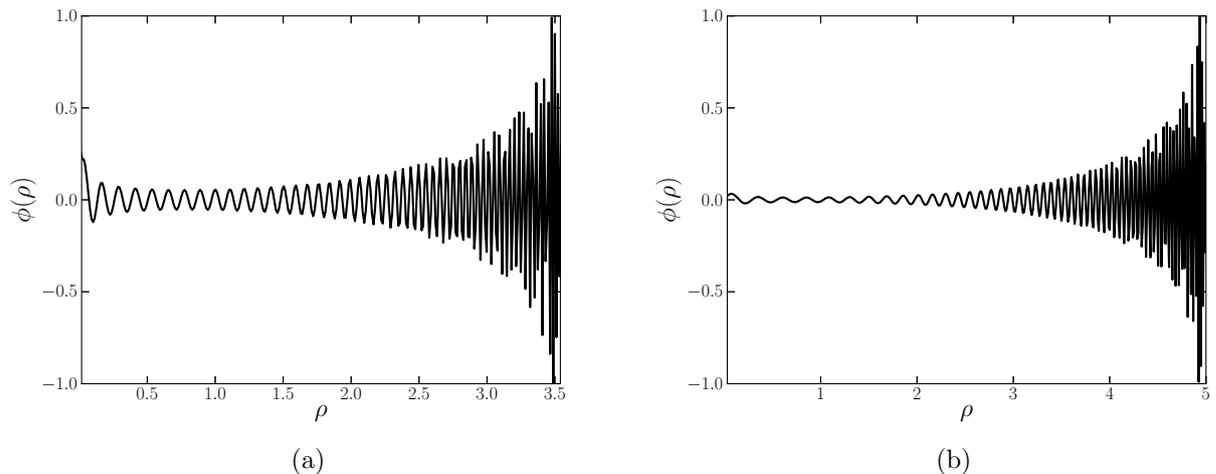


Figura 49: Autofunções numéricas para o modelo GS com (a) $m = 37.156$ e (b) $m = 22.729$.

consiste em encontrar soluções de uma equação do tipo Schrödinger que possua grandes amplitudes próximo à brana. Largos picos na distribuição de probabilidade da função de onda em termos das massas de Kaluza-Klein revelam a existência de modos ressonantes [55, 141]. Partículas massivas confinadas no poço podem ser interpretadas como modos gravitacionais ressonantes (gravitons massivos quasi-localizados fortemente acoplados à brana) [36, 51, 52, 54].

O método da ressonâncias consiste em definir a probabilidade $P(m)$ de se encontrar uma partícula com massa m na posição z_0 como

$$P(m) = \frac{|\Psi_m(z_0)|^2}{\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |\Psi_m(z)|^2 dz}, \quad (5.3)$$

onde z_{\min} e z_{\max} referem-se aos limites do domínio. Uma extensão dessa ideia foi proposta na Ref. [141], onde uma *probabilidade relativa* é definida como

$$P(m) = \frac{\int_{z_a}^{z_b} |\Psi_m(z)|^2 dz}{\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |\Psi_m(z)|^2 dz}, \quad (5.4)$$

calculada dentro de um estreito intervalo $[z_a, z_b]$.

Interpretações probabilísticas são possíveis para autofunções de Sturm-Liouville, definindo-se o produto interno com a função peso incluída. Porém, como mencionado anteriormente, o caráter fortemente crescente dos coeficientes de Sturm-Liouville dificultam o estudo sob variações do parâmetro geométrico c . Contudo, a mudança de variáveis $z(\rho)$ utilizada para transformar a equação do tipo Sturm-Liouville em uma equação do tipo-Schrödinger aprimora o tratamento numérico do problema para maiores valores de c . Por integração numérica da Eq. (4.28) foi possível encontrar $z(\rho)$. Plotamos o resultado

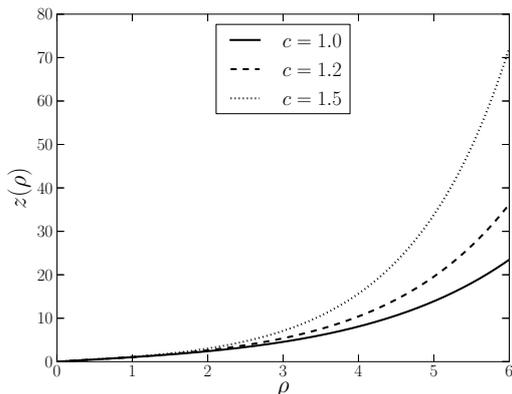


Figura 50: Solução da integração numérica da transformação $z(\rho)$.

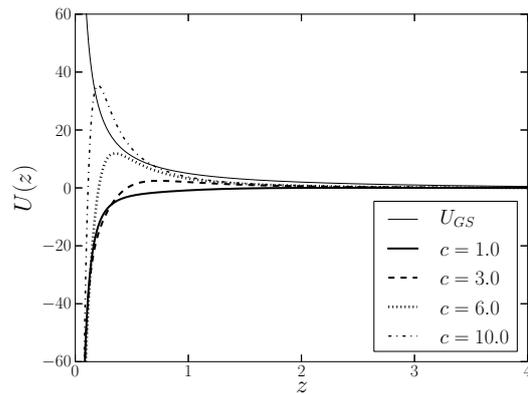


Figura 51: Potencial quântico análogo para os grávitons no modelo *string-cigar* $U(z)$.

na Fig 50.

De posse da transformação $z(\rho)$, assim como nos casos em 5D, construímos os fatores de warp $\sigma(z)$ e $\gamma(z)$ por interpolação polinomial pelo método *spline* cúbico fixado. Como temos um número de divisões suficientemente elevado, pudemos obter o valor das derivadas de $z(\rho)$ por diferenças finitas regressivas em $z(\rho = 0.01)$ e progressivas em $z(\rho = 5.7)$. Para as derivadas dos fatores de warp, que são as entradas na construção do potencial quântico análogo, utilizamos diferenças finitas centradas. O resultado está na Fig. 51. O potencial apresenta um poço, o que sugere o suporte a estados ligados. Perceba que há o poço é infinitamente profundo. Isto é conseqüência do comportamento cônico do modelo *string-cigar* [89]. Além disso, para $c = 1, 0$, tem-se um comportamento do tipo-Coulomb. Há medida em que o parâmetro de geométrico (fluxo de Ricci) aumenta, surge uma barreira e o potencial assume uma forma vulcão. Note ainda que para $c \rightarrow \infty$, $U(z)$ tende para o potencial do modelo GS

$$U_{GS}(z) = 6z^{-2}, \quad (5.5)$$

a qual não suporta estados ligados, não tendo, portanto, modos ressonantes.

Nós resolvemos a equação do tipo Schrödinger (4.31) através do método de Numerov [?, ?]. Como mostrado na Ref. [174], a função probabilidade relativa (5.4) é mais adequada para se detectar ressonâncias estreitas. De acordo com a distribuição da densidade de energia dada na Eq. (4.61), o núcleo da brana está dentro do intervalo $[z_a, z_b] = [0.01, 0.50]$. O domínio foi escolhido como sendo $[z_{\min}, z_{\max}] = [0, 01, 5, 00]$ (10 vezes a região de integração), para o qual a probabilidade de onda plana seja $P(m) = 0, 1$ [141]. A posição do pico de ressonância, onde a informação física está armazenada, não

depende de z_{\max} , desde que este seja escolhido suficientemente grande [174].

Mostramos na Fig. 52 a solução numérica da probabilidade relativa $P(m)$. Nós encontramos para $c = 2, 9$, o primeiro modo ressonante. É importante mencionar que há medida em que c aumenta, a amplitude do pico de ressonância decresce enquanto que a largura da distribuição de probabilidade aumenta.

Podemos interpretar o comportamento dos modos ressonantes através do seu tempo de vida. O tempo de vida de um estado ressonante pode ser estimado como $\tau \sim (\Delta m)^{-1}$, onde $\Delta m = m_2 - m_1$, tal que $P(m_2) = P(m_1) = \frac{1}{2}P_{\max}$ [55, 171], isto é, em torno do máximo de $P(m)$, cujos limites são as meia-alturas do pico. Portanto, para o modelo string-cigar, o tempo de vida dos modos ressonantes decresce quando o valor da constante cosmológica aumenta.

A Fig. 53 apresenta as soluções da equação do tipo Schrödinger para as massas indicadas nos picos da função probabilidade. A primeira solução mostra que este graviton massivo particular tem a maior probabilidade de ser encontrado na brana. Note que esta solução tem comportamento similar ao modo-zero calculado na seção 4.2.2, próximo à origem, com a exceção de que esta oscila assintoticamente.

Os efeitos da estrutura interna da brana sobre os modos ressonantes também estão mostrados na 53. Quando se aumenta o valor de c , a largura do modo ressonante é ampliada. Portanto, o tempo-de-vida do modo ressonante decresce com o estreitamento da brana. Este fato reduz a possibilidade de se encontrar estados ressonantes. Este resultado está de acordo com o fato de que para $c \rightarrow \infty$, o potencial quântico análogo tende para o caso GS, onde não se tem modos ressonantes.

Assim como em cinco dimensões, as autosoluções da torre de Kaluza-Klein induzem uma pequena correção na lei de Newton. A única fórmula explícita na literatura é a apresentada por Gherghetta e Shaposhnikov exclusivamente para a brana do tipo corda infinitamente fina. Como a quantidade relevante para a correção da lei de Newton é, além do autovalor de massa, o valor da autofunção massiva sobre o núcleo da brana ($z = 0$, no caso da brana fina), espera-se que um modo ressonante seja o estado massivo com maior contribuição para a correção. Ressaltamos que este é o primeiro na literatura a encontrar modos ressonantes em modelos de branas em seis dimensões. É, portanto, natural a busca por uma fórmula geral da correção da lei de Newton para modelos de espessos em seis dimensões. Esta questão é deixada como perspectiva nesta tese.

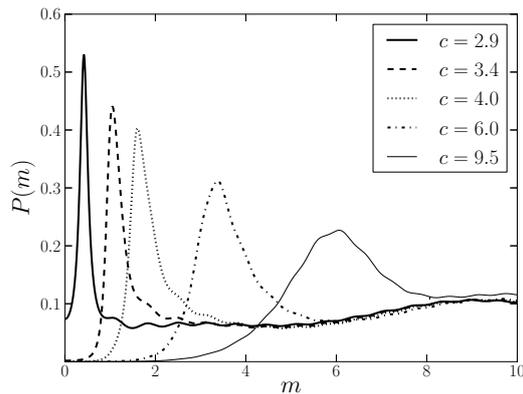


Figura 52: Probabilidade relativa $P(m)$. Os picos revelam os estados massivos ressonantes. Para $m^2 \gg U_{\max}$, um platô é forma a $P = 0, 1$ correspondendo ao regime de ondas planas.

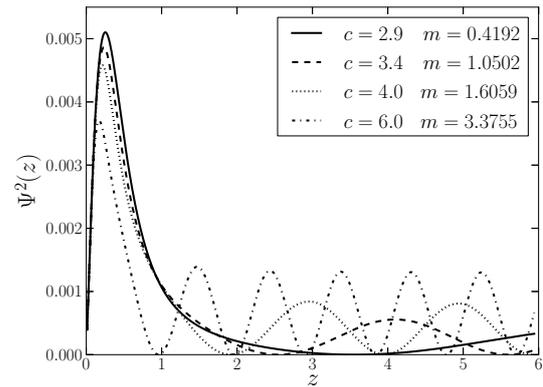


Figura 53: Soluções da equação do tipo Schrödinger para as massas correspondentes aos picos de ressonância. A primeira solução possui a maior probabilidade de interagir com a brana.

5.2 Campo vetorial

A equação geral de Kaluza-Klein (4.98) junto com as condições de contorno (4.103) é bastante difícil de ser tratada analiticamente. Nesta tese, nós procuramos por soluções aproximadas através do método da matriz [168] com erro de truncamento de segunda ordem. Com isso, obtivemos o espectro e as autofunções do campo de calibre $U(1)$ nos modelos GS e string-cigar. Utilizamos o mesmo domínio discretizado no caso do campo gravitacional.

Nós plotamos na Fig. 54 os vinte primeiros autovalores para ambos os modelos. Note que o comportamento linear esperado das teorias de Kaluza-Klein é recuperado, onde o índice k é o número de Kaluza-Klein. Além disso, para o caso da brana fina, os valores numéricos para a massa concordam com o previsto pela Eq. (4.106). Um atributo dos métodos baseados em diferenças finitas na solução de problemas de Sturm-Liouville é o de que os primeiro autovalores são bem aproximados, porém a aproximação gradualmente se deteriora com o aumento de k . No entanto, como estamos interessados apenas nos autovalores de massa mais baixos (pertencentes ao limite $m_k \ll c$), o método é perfeitamente aplicável. Diferentemente do caso da brana fina, no modelo string-cigar, o espectro não pode ser obtido analiticamente. Lembre que as correções próximas à brana advindas da fonte do modelo string-cigar amplificam as amplitudes dos modos massivos e do modo zero em relação à brana fina. Logo, é esperado que o mesmo comportamento venha a ocorrer no espectro

Plotamos as autofunções para autovalores próximos na Fig. ?? para $c =$

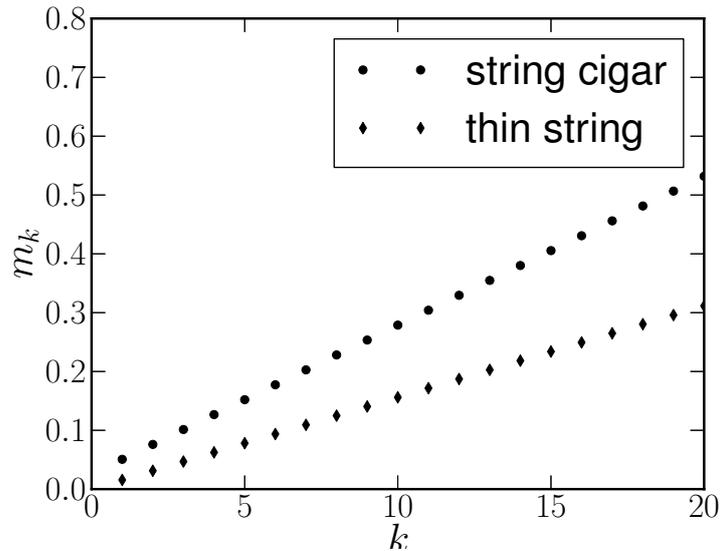


Figura 54: Espectro do campo de calibre para os modelos GS e string-cigar para $c = 0.8$.

0,8. Assintoticamente, todas as soluções têm o comportamento esperado da Eq. (4.100), enquanto que próximo à origem, as amplitudes dos modos de Kaluza-Klein no cenário suave string-cigar são maiores do que no cenário de corda fina. Além disso, as soluções comportam-se como funções de Bessel de primeiro tipo próximo à origem.

Os modos massivos também foram estudados pela abordagem via equação de Schrödinger. O potencial quântico análogo foi construído pelo mesmo procedimento utilizado pelo campo gravitacional, descrito na seção anterior. Nós plotamos a solução numérica do potencial quântico análogo pro campo de calibre na Fig. 57 para alguns valores do parâmetro de evolução c . O potencial tem a forma vulcão, cuja barreira aumenta e se aproxima da origem com o aumento de c . A equação do tipo Schrödinger (4.89) foi resolvida pelo algoritmo de Numerov [?, ?]. Nós plotamos na Fig. 58 duas autofunções para $c = 0,7$. A barreira de potencial influencia o primeiro ciclo das funções de onda e, para massas moderadas as soluções oscilam rapidamente. Modos com autovalores intermediários de massa interpolam suavemente entre as soluções apresentadas na Fig. 58. Chamamos a atenção para o fato de que não foram encontrados estados ressonantes pelo método da ressonância.

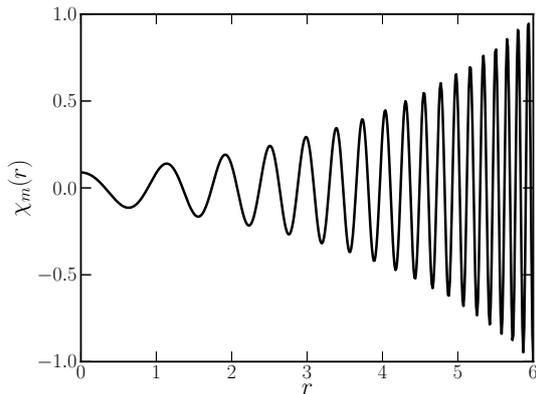


Figura 55: Aproximação numérica das autofunções massivas do campo de calibre no modelo de corda fina para $m = 0.259$ e $c = 0,7$.

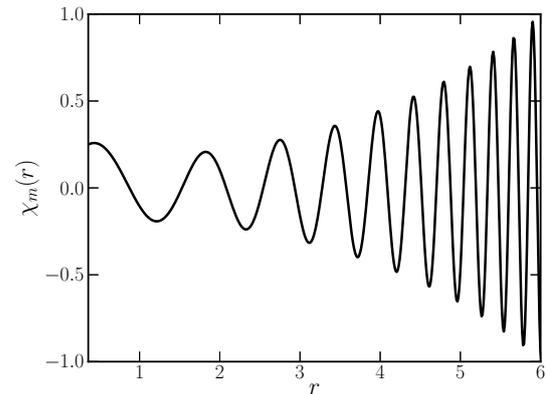


Figura 56: Aproximação numérica das autofunções massivas do campo de calibre no modelo string-cigar para $m = 0.253$.

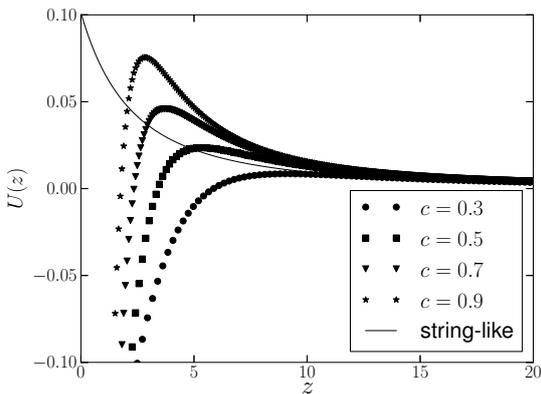


Figura 57: Aproximação numérica do potencial quântico análogo $U(z)$ para diferentes valores de c . A linha fina corresponde ao potencial para o caso da brana fina para $c = 0.45$.

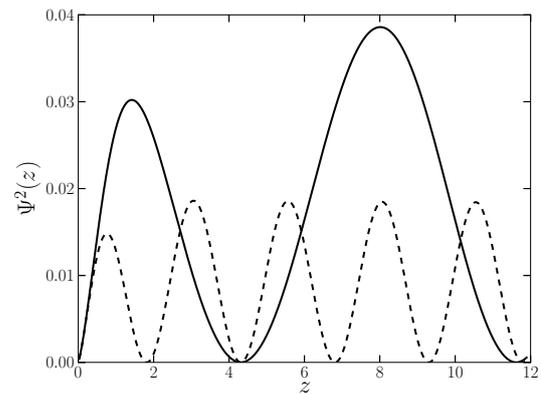


Figura 58: Soluções numéricas da equação do tipo Schrödinger para $c = 0.7$ e para os valores de massa $m = 0.45$ (linha tracejada) e $m = 1.27$ (linha cheia).

5.3 Campo Fermiônico

Para obtermos o espectro e as autofunções para o campo fermiônico de spin $1/2$, resolvemos o problema de autovalores (4.140) pelo método da matriz com erro de truncamento de segunda ordem. Nós trabalhamos no domínio $[0.01, 13.0]$. Plotamos na Fig. 59 os primeiros autovalores para $\lambda = 7.0$ e diferentes valores do parâmetro c , que é relacionado com a massa de Planck. Note que o espectro é monotonicamente crescente no regime $m \ll c$ como esperado das teorias de Kaluza-Klein. Além disso, férmions mais massivos serão aceitos com o aumento de c . Note que a taxa de crescimento do m_n é

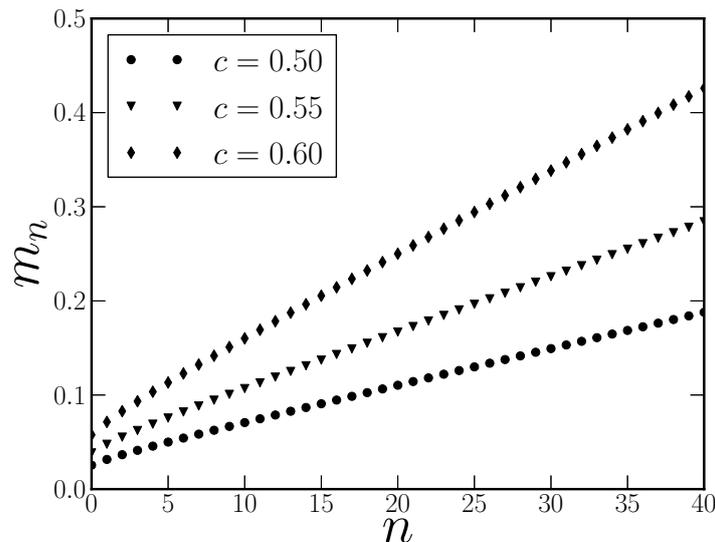


Figura 59: Espectro de massa do campo fermiônico de spin $1/2$ para $\lambda = 7.0$ no modelo string-cigar.

levemente menor para os primeiros índices n o que está de acordo com a Eq (4.149). É importante mencionar que, embora nas nossas retinas nós tratamos as quiralidades direita e esquerda na Eq. (4.140) de forma independente, a relação com os autoestados revela que, independentemente do modo-zero, o espectro direito e esquerdo são iguais.

Nas Figs. 60 e 61, nós mostramos os resultados numéricos para as autofunções para $c = 0,5$ quando $\lambda = 5,0$ e $9,0$, respectivamente. Próximo à brana, as soluções se comportam como funções de Bessel de ordem inteira (> 2). Esta ordem aumenta com λ . Como o modelo string-cigar recupera o modelo GS assintoticamente, é esperado que as autofunções tenham o mesmo comportamento para grandes valores de ρ . Note que isto ocorre quando comparado com a Fig. 44. Ademais, o núcleo da brana string-cigar amplifica os modos massivos próximo à origem. O mesmo comportamento ocorre para o campo gravitacional e vetorial como mostrado nas seções anteriores deste capítulo. Isto nos estimulou à procura por estados ressonantes. Apresentaremos esses resultados na subseção a seguir.

5.3.1 Modos ressonantes

Apesar de os modos massivos fermiônicos não serem localizados na brana, alguns autoestados em particular podem apresentar características ressonantes. Assim como nos casos anteriores, resolvermos a equação do tipo Schrödinger pelo método de Numerov [?,?]. Seguimos os mesmos procedimentos feitos para o campo gravitacional e vetorial. Plotamos o potencial quântico análogo nas Figs. 62 e 62. Note que os potenciais têm a forma vulcão e o poço de potencial favorece o suporte a estados ligados.

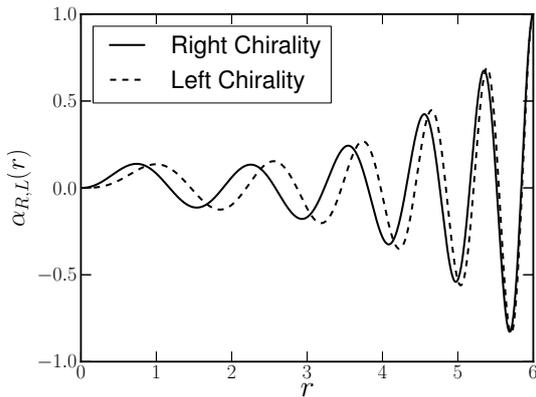


Figura 60: Autofunções do campo fermiônico de spin 1/2 para $c = 0.5$ e $\lambda = 5.0$ no modelo string-cigar. Os autovalores de massa são $m_R = 0.4024$ e $m_L = 0.4025$.

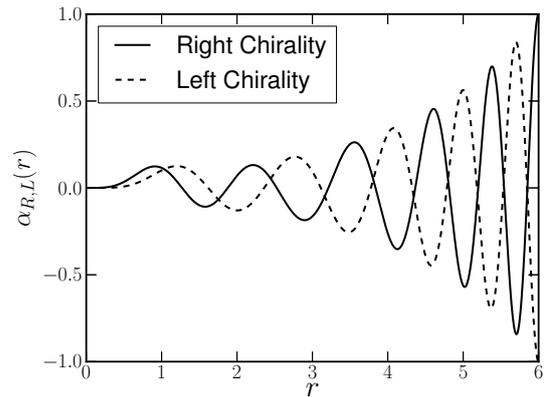


Figura 61: Autofunções do campo fermiônico de spin 1/2 para $c = 0.5$ e $\lambda = 9.0$ no modelo string-cigar. os autovalores de massa são $m_R = 0.4593$ e $m_L = 0.4586$.

Para encontrarmos as soluções da equação do tipo Schrödinger (4.157) com a amplitude máxima possível próxima à brana (em comparação com seus valores longe do defeito) nós utilizamos o método da ressonância assim como para o campo gravitacional. Lembramos que a probabilidade relativa $P_{R,L}(m)$ de se encontrar uma partícula com massa m em um estreito intervalo 2ϵ em torno da posição \bar{z} do mínimo do poço de potencial pode ser definida como [55, 141]

$$P_{R,L}(m) = \frac{1}{\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |\tilde{\alpha}_{R,L}(z)|^2 dz} \int_{\bar{z}-\epsilon}^{\bar{z}+\epsilon} |\tilde{\alpha}_{R,L}(z)|^2 dz, \quad (5.6)$$

onde z_{\min} e z_{\max} denotam os limites do domínio. Para efetuarmos os cálculos próximo ao mínimo do poço de potencial ajustamos $\epsilon = 0.1$.

Nós resolvemos a equação do tipo Schrödinger (4.157) utilizando o método de Numerov [?, ?] para as funções potenciais (4.154) dentro da fórmula da Probabilidade Eq. (5.6) para uma série de valores dos parâmetros c e λ . A distribuição $P_{R,L}(m)$ apresentou picos bastante estreitos que revelam a presença de estados ressonantes [55]. Nas figuras 64 e 65, nós plotamos a função $P_{R,L}(m)$ para $c = 0,5$. Para o caso de quiralidade esquerda, há pico bastante estreitos quando $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 5,0$, enquanto que para o caso de quiralidade direita, os picos surgem quando $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 6,0$. No entanto, apenas o primeiro pico em P_L representa de fato uma ressonância. Isto é verificado quando se resolve a equação de Schrödinger para as massas correspondentes a cada pico na distribuição $P_{R,L}(m)$. Plotamos a função de onda nas Figs. 66 e 67. Perceba que a solução $\tilde{\alpha}_L(z)$ para $\lambda = 4,0$ é a que possui a menor amplitude de oscilação longe da

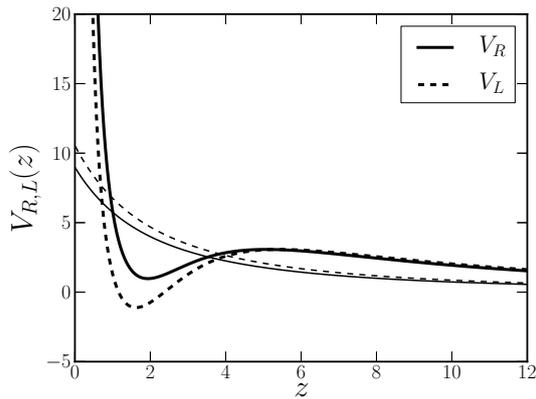


Figura 62: Potencial quântico análogo do campo fermiônico de spin 1/2 para ambas as quiralidades com $c = 0.5$ e $\lambda = 5.0$. A linha cheia corresponde ao modelo string-cigar, enquanto que a linha fina, ao modelo GS.

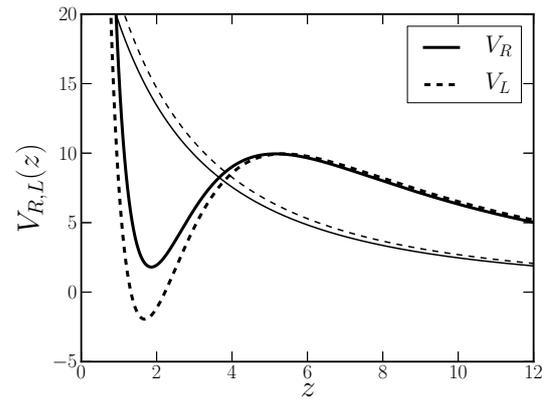


Figura 63: Potencial quântico análogo do campo fermiônico de spin 1/2 para ambas as quiralidades com $c = 0.5$ e $\lambda = 9.0$. A linha cheia corresponde ao modelo string-cigar, enquanto que a linha fina, ao modelo GS.

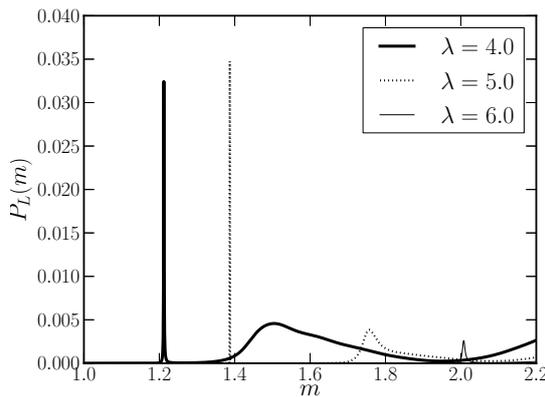


Figura 64: Distribuição de probabilidade $P_L(m)$ para $c = 0.5$ (quiralidade esquerda) no modelo string-cigar.

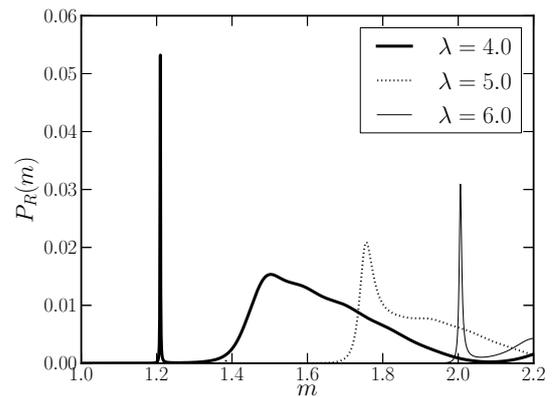


Figura 65: Distribuição de probabilidade $P_R(m)$ para $c = 0.5$ (quiralidade direita) no modelo string-cigar.

brana, o que caracteriza verdadeiramente um modo ressonante [55]. Embora os picos nas distribuições $P_R(m)$ e $P_L(m)$ para massas bem próximas (para $\lambda = 4, 0$ quando $c = 0, 5$), apenas o modo esquerdo possui um caráter ressonante.

Resultados similares foram obtidos para outros valores de c . De maneira geral, a constante de acoplamento λ determina a existência, ou não, de um modo ressonante, enquanto que o parâmetro geométrico c controla a “posição” do pico ressonante (i.e. a massa ressonante). Este é um resultado esperado para um valor fixo de λ , pois, variar o parâmetro geométrico c corresponde a alterar o “cut-off” da escala de Planck. Portanto, o parâmetro c atua como uma escala de energia para o problema.

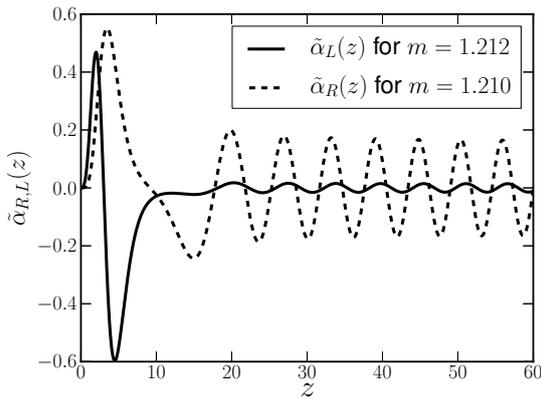


Figura 66: Soluções normalizadas da equação do tipo Schrödinger no modelo string-cigar para as massas correspondentes aos picos de na distribuição de probabilidade. Soluções esquerda e direita para $\lambda = 4.0$.

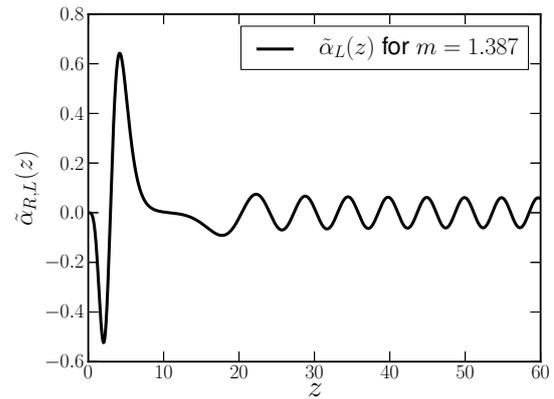


Figura 67: Solução normalizada da equação do tipo Schrödinger no modelo string-cigar para a massa correspondente ao segundo pico na distribuição de probabilidade da Fig. 64. Esta é a solução com quiralidade esquerda para $\lambda = 5.0$ e $m = 1.387$.

Ressonância de férmions é um assunto bastante presente na literatura de modelos de branas majoritariamente em modelos espessos de cinco dimensões. Teve seu início em 2009 na Ref. [55] com a definição da probabilidade pontual, dada pela Eq. (5.3), e mais tarde na Ref. [141] com a definição da probabilidade relativa, dada pela Eq. (5.4). Desde então, diversos trabalhos foram feitos buscando por ressonância de férmions em diversos modelos de branas [142, 149–152]. Ressaltamos que este trabalho, assim como para o campo gravitacional, é o primeiro a apresentar a existência de modos ressonantes de férmions em modelos de branas espesso em seis dimensões. A busca por ressonâncias de férmions em outros modelos de branas espessas, como por exemplo, o Conifold Resolvido [127].

6 CONCLUSÕES

Apresentaremos a seguir as conclusões e as perspectivas. Subdividimos em seções, onde cada uma refere-se à um dos artigos publicados. Os métodos numéricos mostraram-se robustos e estáveis. Aplicando ao modelo de Randall-Sundrum o erro mostrou-se predominantemente menor do que 0,05% chegando a ser ainda menor do que 0,02%.

6.1 Localização de gravidade em branas híbridas simétricas

Nesta parte da tese, nós estudamos a localização de gravidade em modelos de mundo-brana com co-dimensão-1 (uma dimensão extra) geradas por defeitos do tipo *compacton*, as chamadas branas híbridas. Em tais cenários, o comportamento de brana fina está presente quando a dimensão extra estiver fora de um domínio compacto, onde a densidade de energia é não-trivial, ao invés de assintoticamente como nos modelos de brana espessas usuais. Na literatura, um mecanismo que transforma suavemente *kinks* em *compactons* foi proposto na Ref. [43] utilizando dois modelos específicos, \mathcal{L}_α e \mathcal{L}_n . Nesta referência, a brana híbrida é construída usando apenas o segundo modelo. Nesta tese, nós utilizamos métodos numéricos adequados para construir branas a partir de defeitos do tipo *compacton* usando ambos os modelos e estudamos ainda a localização de gravidade a correção no potencial Newtoniano devido aos modos massivos. Nós mostramos que apenas o modelo \mathcal{L}_n conduz à um cenário de brana híbrida de forma evidente. Primeiramente, o campo escalar no espaço-tempo curvo ϕ_n gera o comportamento do tipo *compacton* muito mais claramente. Além disso, o escalar de curvatura R_n possui uma mudança abrupta para um valor constante negativo (o que caracteriza o limite AdS do *bulk*) revelando claramente o comportamento híbrido da brana.

O estudo das flutuações gravitacionais mostrou que o modo-zero está preso à brana, como desejado. Além disso, o potencial quântico análogo mostrou que o modelo \mathcal{L}_α não apresenta mudanças significativas com respeito à brana espessa usual modelada por um defeito do tipo *kink*. O parâmetro utilizado no modelo não proporciona grandes variações na altura da barreira e na largura do poço do potencial. Não foi encontrado estados ressonantes utilizando o método das ressonâncias. Este método consiste em procurar por soluções de uma equação do tipo Schrödinger em que a amplitude seja a máxima possível em uma determinada região de interesse. Em uma interpretação de mecânica quântica, o método apresentaria a autosolução que possui a maior probabilidade de ser

encontrada nesta dada região.

Os resultados mais importantes residem nas implicações fenomenológicas dos modos massivos. Nós calculamos as correções no potencial gravitacional entre duas partículas pontuais. Utilizando o método da matriz, nós obtivemos o espectro de massa do gráviton. O comportamento monotonicamente crescente foi obtido para os primeiros autovalores de massa, que são os de interesse físico. Nós utilizamos o espectro discreto para resolver numericamente a equação do tipo Schrödinger através do método de Numerov. Nós mostramos que os primeiros autoestados são os que têm maior contribuição para a correção na lei de Newton. As soluções subsequentes têm amplitudes cada vez menores. Além disso, autofunções ímpares dão contribuições triviais, pois seus valores na origem do espaço transversal (i.e. $z = 0$), onde o núcleo da brana se encontra, são nulos. Com esses resultados, nós fomos capazes de calcular a correção na lei de Newton devido à torre de Kaluza-Klein. Nós concluímos que a força gravitacional é levemente aumentada para curtas distâncias, segundo a contribuição do tipo $1/r^2$. Estes resultados podem ser utilizados para adequar o modelo com medidas fenomenológicas da lei gravitacional em colisores de partículas como um possível teste da hipótese de mundo-branas.

O comportamento do escalar de curvatura nos estimulou a ir mais além neste questão e investigar outros cenários de branas, como a brana híbrida assimétrica e, em particular, para o caso em que a brana em si tende a se tornar compacta ao longo da dimensão extra, como mostrado na Ref. [45].

6.2 Correções na lei de Newton no contexto de mundo branas não-fatorizáveis com codimensão-1

Durante toda a tese, nós procuramos chamar a atenção para a análise dos modos massivos dos campos em modelos de branas. Nesta parte do trabalho focamos nos estados massivos do gráviton em cenários de branas não-fatorizáveis com codimensão-1. Juntamente com o modo-zero localizado, é importante estudar a torre de Kaluza-Klein, que conduz à correções na lei de Newton, a implicação fenomenológica primária da hipótese de mundo-brana [8]. Nós estudamos as correções no potencial gravitacional para os modelos de branas mais novos na literatura, as chamadas brana híbrida assimétrica [44] e brana compacta [45]. Como esses modelos advêm de deformações nos defeitos topológicos ϕ^4 e sine-Gordon, respectivamente, nós também calculamos as correções no contexto de branas geradas por esses defeitos.

A brana híbrida assimétrica possui um comportamento de brana híbrida apenas em um dos setores do campo escalar, no presente caso, na parte negativa. O defeito

topológico que gera a brana é do tipo *half-compacton*, isto é, *compacton* em um setor e *kink* em outro. Já no modelo de brana compacta, a brana em si tende a se tornar compacta ao longo da dimensão extra.

Nós utilizamos o método da matriz para obtermos o espectro de massa e suas autofunções correspondentes. Como esperado, os espectros são todos reais e monotonicamente crescentes. Para testar nossas rotinas, nós aplicamos o método da matriz no modelo de Randall-Sundrum do tipo 2 e obtivemos ótimas aproximações para os primeiros autovalores de massa, que são as de interesse físico. Além disso, nós reforçamos as características híbrida e compacta dos modelos analisando o escalar de curvatura e o potencial quântico análogo.

Nós mostramos que a brana compacta suporta apenas estados sem massa, conseqüentemente, não possui contribuições para correção na lei de Newton. Este modelo peculiar corresponde à um cenário de brana com alta curvatura. Além disso, a brana híbrida assimétrica tem contribuição desprezível para a correção potencial newtoniano. Portanto, os cenários de brana mais simples carregam a responsabilidade de serem os modelos mais realistas. A brana de sine-Gordon tem uma contribuição maior do que a brana do tipo parede-de-domínio ordinária. Nós encontramos que apenas as autofunções ímpares contribuem para a correção pois os valores das funções de onda pares na origem $z = 0$ (onde o núcleo da brana se encontra) são zero. Portanto, embora todo o espectro deva ser levado em conta na correção exponencialmente suprimida, o conjunto de autofunções seleciona as soluções massivas ímpares apenas. Outro resultado importante do estudo numérico dos autoestados massivos é o de que a primeira autofunção normalizada tem a maior contribuição na origem, logo, efeitos da torre de Kaluza-Klein em colisores de alta energia podem ser resultantes do primeiro estado excitado.

O procedimento descrito nesta parte da tese é bastante útil para se determinar se um modelo de branas possui implicações fenomenológicas. Pode ainda ser utilizado como uma ferramenta de seleção de modelos que se adequem com futuras medidas experimentais de desvios na força gravitacional.

6.3 Modos gravitacionais de Kaluza-Klein em um modelo de mundo-brana do tipo *string-cigar*

Nós estudamos os modos gravitacionais de Kaluza-Klein em dois cenários de mundo-brana do tipo corda, o modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) e o modelo *string-cigar*. Nos cenários de branas do tipo corda, o espaço-tempo possui seis dimensões com simetria cilíndrica. Pela análise da densidade de energia, o modelo GS corresponde

a um cenário de corda-fina. Por outro lado, o modelo *string-cigar* pode ser considerado como uma suavização do modelo GS com soluções interior e exterior. Este modelo está sujeito à um fluxo geométrico (fluxo de Ricci) que define uma família de branas do tipo corda cujo parâmetro de evolução do espaço transversal c , relacionado com a constante cosmológica, causa variações nas propriedades físicas da brana. Uma outra qualidade do modelo *string-cigar* é o fato de este satisfazer todas as condições de regularidade, o que não ocorre no modelo de corda-fina de Gherghetta-Shaposhnikov.

Obtivemos um novo modo-zero para o modelo GS analisando a equação radial na abordagem de Schrödinger. Descobriu-se que a amplitude e a taxa de decaimento deste modo sem massa é maior do que o apresentado no modelo GS. O modo-zero gravitacional para o modelo *string-cigar* mostrou-se deslocado da origem e seu máximo situa-se próximo do núcleo da brana, onde a densidade de energia é máxima. Assintoticamente, o comportamento exponencial característico do cenário de brana fina é recuperado. Além disso, encontramos um gap de massa entre o modo-zero e o primeiro modo massivo em ambos os modelos. Para o modelo *string-cigar*, este gap não sofre alterações devido ao fluxo de Ricci. A existência deste gap é requerida, pois caso não existisse, grávitons massivos seria observáveis no nosso universo.

Através de métodos numéricos adequados, obtivemos o espectro de massa e as autofunções correspondentes em ambos os modelos. Os modos massivos são descritos por um problema de Sturm-Liouville, o qual foi resolvido pelo método da matriz. O comportamento linearmente crescente do modelo GS foi recuperado. Para o modelo *string-cigar*, encontramos um comportamento monotonicamente crescente seguindo uma lei $m_n \sim n + 1/n$, que mostramos ser um resultado esperado analiticamente após o estudo das raízes da função de Bessel de ordem $3/2$. Concluimos então este novo comportamento do espectro como consequência do fluxo de Ricci.

As autofunções para o modelo *string-cigar* possuem comportamento semelhante ao do modelo GS, como esperado. Porém, na região próxima à origem, em torno do núcleo da brana, a amplitude dos modos massivos no modelo *string-cigar* são maiores do que no modelo GS. Portanto, concluimos que a fonte da brana eleva os modos massivos próximo ao seu núcleo. Isto nos motivou a estudar os modos massivos ressonantes através do método numérico das ressonâncias. Este foi o primeiro trabalho a estudar ressonâncias de modos massivos em seis dimensões. O modelo *string-cigar* permite a existência de estados ressonantes. De fato, a correção próxima à origem fornece um poço de potencial, o que não ocorre no modelo GS, o qual consta de uma barreira do tipo $1/z^2$. Nós encontramos estados ressonantes em que o maior deles ocorre para $c = 2.9$ e $m = 0.4192$. Há medida em que o parâmetro c aumenta o tempo de vida da ressonância decresce.

Estes resultados conduzem à uma perspectiva interessante, que seria analisar os efeitos dos modos gravitacionais de Kaluza-Klein na correção do potencial de Newton. Em particular avaliar a contribuição dos modos ressonantes na correção. Para isto, uma fórmula geral para a correção na lei de Newton sera deduzida. Atualmente na literatura, apenas a fórmula particular para a corda fina (modelo GS) é conhecida. Outra perspectiva refere-se à análise da fonte da brana. O perfil da densidade de energia do modelo *string-cigar* é bastante similar ao modelo de vórtice abeliano estudado numericamente por Giovannini e co-autores na Ref. [115]. Esta semelhança sugere que a geometria do tipo corda-charuto pode ser gerada por um vórtice com um potencial deformado.

6.4 Campos de calibre em um modelo de mundo-brana do tipo *string-cigar*

Além do campo gravitacional, estudamos ainda a localização do campo vetorial Abelian $U(1)$ no modelo *string-cigar*. Nossa análise foi em torno das soluções do tipo ondas- s , isto é, estados com autovalor angular l nulo. O modo zero do campo de calibre é localizado na brana, porém suave se comparado com o caso da brana fina. Assim como no caso gravitacional, o máximo do modo-zero é deslocado da origem. Assintoticamente, o comportamento exponencial característico do cenário de brana fina é recuperado.

Nós obtivemos o espectro de KK do campo de gauge e suas autofunções tanto para o caso de brana fina quanto para o modelo *string-cigar* pelo método da matriz. Em ambos os casos, o comportamento linear para o espectro foi obtido na escala de energia fisicamente aceitável, isto é, $m_n \ll c$. O gap de massa entre o modo-zero e o primeiro modo massivo também foi encontrado para ambos os modelos. As autofunções massivas apresentam uma amplitude maior no modelo *string-cigar* em comparação com o modelo de corda fina, enquanto que, assintoticamente, o comportamento usual da corda fina é recuperado. Logo, concluímos que, assim como para o campo gravitacional, a correção próxima da brana, conduzida pelo fluxo de Ricci, amplifica os modos massivos sobre o núcleo da brana.

Comparando com o caso gravitacional, vimos que as autofunções do campo de calibre têm uma amplitude maior próximo à brana porém se dispersam menos no *bulk*, em comparação com o gráviton. Além disso, a equação radial para os modos massivos do campo de spin-1 é muito semelhante a equação radial para o gráviton a menos de uma mudança de um fator $\frac{3}{5}$ para $\frac{5}{2}$. Esta pequena mudança, no entanto, conduz à espectros distintos, de modo que para o campo de calibre, não se tem o termo de $1/n$ no espectro.

Ao encontrarmos a relação de que a constante cosmológica deve ser muito menor do que a tensão angular na brana, vimos que, pela condição de energia dominante e pela solução do problema da hierarquia, o parâmetro geométrico c deve ser pequeno, assim como no modelo de Randall-Sundrum.

Nós estudamos ainda os modos massivos do campo de calibre na abordagem via equação de Schrödinger, onde obtivemos numericamente o potencial quântico análogo. Este possui a forma vulcão usual e a altura da barreira de potencial aumenta e se aproxima da origem, tendendo ao comportamento da brana fina, com o aumento do parâmetro geométrico. Para o caso de brana fina, o potencial tem a forma $1/z^2$ usual. Resolvemos a equação do tipo Schrödinger através do método numérico de Numerov para vários valores de massa distintos. O poço de potencial influencia o primeiro ciclo das funções de onda e, para massas moderadas as soluções oscilam rapidamente. Aplicamos o método das ressonâncias para vários valores de c , porém não foi encontrado estados ressonantes.

6.5 Modos fermiônicos de Kaluza-Klein em um modelo de mundo-brana do tipo *string-cigar*

Além dos campos de spin-1 e spin-2, nós estudamos o campo de Dirac no modelo *string-cigar*. O caso de brana fina também foi analisado. Nós consideramos os campos de spin-1/2 e 3/2 (Rarita-Schwinger). Focamos nossa atenção no caso de ondas- s , ou seja, $l = 0$.

Uma característica bem conhecida de férmions em branas do tipo corda é a de que, diferentemente dos campos gravitacional, de calibre e escalar, não é possível de ser aprisionar férmions livres com um fator de warp decrescente. Por conta disso. propusemos um acoplamento específico para os férmions com um campo de calibre de fundo para confinar os modos zeros dos férmions tanto de spin-1/2 quanto de spin-3/2 em uma brana do tipo corda com tensão positiva.

Impondo condições de contorno convenientes para garantir que os operadores fermiônicos sejam auto-adjuntos, encontramos um modo zero normalizado e bem definido ao longo de toda a dimensão extra tanto para a corda fina, quanto para o modelo *string-cigar* dependendo da intensidade da constante de acoplamento λ . Este resultado é válido para ambos os casos de spin-1/2 e spin-3/2. As soluções de modo-zero têm forma similar à densidade de energia da fonte do brana do tipo *string-cigar*, cujo núcleo está afastado da origem. Este afastamento do núcleo da brana é uma característica de modelos de branas do tipo-corda cuja fonte é um vórtice Abelian com alto número de voltas [115]. Além disso, há um leve aumento da amplitude do modo-zero de Rarita-Schwinger em

comparação com o campo de spin-1/2.

Pelo método da matriz, nós obtivemos os espectros e as autofunções de Kaluza-Klein. Não foram encontrados estados taquiônicos e os espectros eram iguais para ambas as quiralidades esquerda e direita, o que é garantido pela estrutura de mecânica quântica supersimétrica do potencial quântico análogo. Para $m \ll c$, os espectros apresentaram o comportamento usual das teorias de Kaluza-Klein. Além disso, nós verificamos que o espectro de massa dos campos de spin-1/2 e 3/2 são indistinguíveis.

Assim como para os demais campos, as autofunções massivas possuem o mesmo comportamento do caso de brana-fina assintoticamente e suas amplitudes são amplificadas próximo ao núcleo da brana. Além disso, as amplitudes dos modos massivos para o campo de spin-3/2 são maiores do que para o campo de spin-1/2 em todo o domínio.

Embora os modos massivos de Kaluza-Klein não são localizados na brana, alguns estados massivos particulares exibiram um comportamento ressonante. A busca por esses estados foram feitas por meio do método das ressonâncias. Nós encontramos picos na distribuição de probabilidade, relacionando-os à estados em que a função de onda tem amplitudes muito elevadas na região interior à brana. Desassociada à esta característica, a oscilação da função de onda deve ser a menor possível para caracterizar uma ressonância. As soluções numéricas da equação de Schrödinger obtidas pelo método de Numerov mostraram que a ressonância ocorre para um modo esquerdo específico. Portanto, apenas férmions com uma quiralidade podem interagir com a brana como um estado ressonante. Um resultado interessante é o de que o acoplamento permite a existência de um pico de ressonância. O parâmetro geométrico c determina a magnitude da massa ressonante que é consistente com o fato de que c está relacionado ao cut-off da escala de Planck. Ademais, nós mostramos que, pela abordagem de Schrödinger, os campos de spin-1/2 e 3/2 têm estruturas idênticas.

Finalmente, nós fizemos um comparativo do modo-zero normalizado dos campos bosônicos e fermiônicos. Para um valor específico da constante de acoplamento com o campo de calibre, todos os campos possuem comportamento semelhante.

Como trabalhos futuros, temos o intuito de estudar numericamente os modos de KK, bem como estados ressonantes, para os campos fermiônicos de spin-1/2 e 3/2 em um cenário de branas do tipo *conifold resolvido* [?]. Este cenário proporciona um fluxo geométrico conduzido por um parâmetro de resolução que controla a singularidade na origem, consequentemente retirando a divergência do potencial quântico análogo. Temos ainda a ideia de estudar as propriedades dos termos de acoplamento com o campo de calibre para $l \neq 0$ e sua influência sobre os modos zero e massivos.

Ainda nesta parte do trabalho, estudamos o campo escalar e mostramos este

campo comporta-se de forma idêntica ao campo gravitacional.

APÊNDICE A – MÉTODO DA MATRIZ PARA PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

A determinação de autovalores de problemas de Sturm-Liouville é de grande interesse em Física. No entanto, em muitos casos, não é possível obtê-los de forma analítica, sendo necessária a utilização de métodos numéricos. A solução numérica de problemas de Sturm-Liouville não é trivial, no entanto, muitos métodos foram desenvolvidos para tal. Neste apêndice, apresentaremos rapidamente o método da matriz, o qual foi utilizado nas pesquisas desenvolvidas neste doutorado. O método da matriz (baseado em diferenças finitas ou elementos finitos) envolve extensos cálculos aritméticos e armazenamento de grandes matrizes. Além disso, a aproximação se deteriora rapidamente para grandes autovalores. No entanto, nos problemas abordados neste doutorado, o espectro de massa dos campos em cenários de branas são autovalores de um operador de Sturm-Liouville. Como estamos interessados apenas nos primeiros autovalores de massa, o quais são de relevância física, o método da matriz é perfeitamente aplicável e nos conduziu à boas aproximações.

O método da matriz consiste na aplicação de diferenças finitas em problemas de valor de contorno, o que conduz à um sistema de equações lineares podendo ser escrito na forma matricial. Em problemas de Sturm-Liouville, o método da matriz conduz à um problema de autovalores matricial generalizado.

Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad (\text{A.1})$$

sujeito às condições de contorno de Neumann homogêneas $y'(a) = y'(b) = 0$.

Discretize a Eq. (A.1) em uma rede com $N + 1$ divisões uniformes

$$(a = x_0) < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < (x_N = b),$$

onde $x_i = a + ih$ com tamanho de passo $h = (b - a)/(N + 1)$.

Utilize aproximações de diferenças finitas centradas para as derivadas

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

onde $y_i \equiv y(x_i)$. Com isso, a Eq. (A.1) torna-se

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{h}{2}p_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + h^2q_iy_i = \lambda h^2r_iy_i.$$

Deve-se analisar a EDO na fronteiras:

- em $i = 0$:

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_0\right)y_{-1} + (h^2q_0 - 2)y_0 + \left(1 + \frac{h}{2}p_0\right)y_1 = \lambda h^2r_0y_0;$$

- em $i = N$:

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_N\right)y_{N-1} + (h^2q_N - 2)y_N + \left(1 + \frac{h}{2}p_N\right)y_{N+1} = \lambda h^2r_Ny_N.$$

Note que há pontos fora da rede: y_{-1} e y_{N+1} . No entanto, tais pontos são eliminados pela discretização das condições de contorno:

$$y'(a) = 0 \quad \implies \quad \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{-1} = y_1}$$

$$y'(b) = 0 \quad \implies \quad \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{N+1} = y_{N-1}}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{cases} (h^2q_0 - 2)y_0 + 2y_1 = \lambda h^2r_0y_0 \\ (1 - \frac{h}{2}p_i)y_{i-1} + (h^2q_i - 2)y_i + (1 + \frac{h}{2}p_i)y_{i+1} = \lambda h^2r_iy_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ 2y_{N-1} + (h^2q_N - 2)y_N = \lambda h^2r_Ny_N \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Este sistema de equações lineares pode ser escrito como um *problema de autovalores generalizado* para uma matriz tridiagonal

$$\hat{\mathbf{A}}\vec{y} = \lambda\hat{\mathbf{B}}\vec{y}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} h^2q_0 - 2 & 2 & & & & \\ (1 - \frac{h}{2}p_1) & h^2q_1 - 2 & (1 + \frac{h}{2}p_1) & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & (1 - \frac{h}{2}p_{N-1}) & h^2q_{N-1} - 2 & (1 + \frac{h}{2}p_{N-1}) & \\ & & & 2 & h^2q_N - 2 & \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} h^2 r_0 & & & & \\ & h^2 r_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & h^2 r_{N-1} & \\ & & & & h^2 r_N \end{pmatrix}$$

Uma das vantagens dos métodos de diferenças finitas é que eles são bastante simples de se implementar, especialmente quando se trata com problemas regulares definidos em um intervalo finito e uma rede uniforme. No entanto este método tem seus limites. Ele substitui um problema de dimensão infinita por um problema matricial cuja dimensão está relacionada ao número de pontos da rede, no presente caso, uma matriz $(N + 1) \times (N + 1)$. Como consequência, apenas um certo número de autovalores λ_k , ($k = 1, 2, 3 \dots$) são bem aproximados. A aproximação rapidamente se deteriora com o aumento de k : o erro do k -ésimo autovalor numa rede com tamanho de passo h é tipicamente da ordem $O(h^p k^q)$ [175]. Portanto, para se calcular autovalores de grande magnitude, são necessários muito passos. Entretanto, como em Física os autovalores de Sturm-Liouville correspondem à energia do sistema, energias demasiadamente grandes não são de interesse. Isto justifica o amplo uso do método da matriz, na prática.

APÊNDICE B - MÉTODO DE NUMEROV

O método de Numerov [?, ?] é um método numérico para resolver equações diferenciais ordinária de segunda ordem que não contenham o termo de derivada de primeira ordem:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + f(x) \right) y(x) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Este método ganhou muita força e popularidade por tratar com equações do tipo Schrödinger.

Considera-se a expansão de $y(x)$ em torno de x_0 em série de Taylor até quinta ordem. Fazendo $h = x - x_0$, tem-se

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_0) + \mathcal{O}(h^6),$$

$$y(x_0 - h) = y(x_0) - hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_0) + \mathcal{O}(h^6).$$

Com isso, a equação discreta para (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_{i+1}, y_{i+1}) fica

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_i) + \mathcal{O}(h^6),$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i) - \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_i) + \mathcal{O}(h^6).$$

Somando as duas equações acima, obtém-se

$$y(x_{i-1}) + y(x_{i+1}) = 2y_i + h^2y_i'' + \frac{h^4}{12}y_i^{(4)} + \mathcal{O}(h^6).$$

Resolvendo para y_i'' e utilizando a expressão $y_i'' = -f_i y_i$ obtida da definição da equação diferencial, tem-se

$$h^2 f_i y_i = 2y_i - y(x_{i-1}) - y(x_{i+1}) + \frac{h^4}{12}y_i^{(4)} + \mathcal{O}(h^6).$$

Ainda da definição da equação diferencial, observa-se que $y_i^{(4)} = -[f_i y_i]''$. Fazendo a mesma aproximação de diferenças finitas como anteriormente, obtém-se:

$$h^2 f_i y_i = 2y_i - y_{i-1} - y_{i+1} - \frac{h^4}{12} \frac{f_{i-1}y_{i-1} - 2f_i y_i + f_{i+1}y_{i+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^6).$$

Finalmente, resolvendo para y_{i+1} , chega-se ao algoritmo de Numerov [?, ?]:

$$y_{i+1} = \frac{\left(2 - \frac{5h^2}{6}f_i\right)y_i - \left(1 + \frac{h^2}{12}f_{i-1}\right)y_{i-1}}{1 + \frac{h^2}{12}f_{i+1}}. \quad (\text{B.2})$$

O erro é da ordem de h^6 o que caracteriza o método como de quinta ordem. É importante ressaltar que o método exige dois valores iniciais, y_0 e y_1 . De fato, é exigido dois valores iniciais, já que a equação diferencial é de segunda ordem. na prática, o valor de y_0 é dado pela condição de contorno do problema. Já para y_1 deve ser atribuído um valor bem pequeno sendo condizente com o tamanho do passo da rede.

Equações de Schrödinger também podem ser resolvidas utilizando o algoritmo de Numerov para implementar o método da matriz substituindo a aproximação por diferenças finitas centradas simples. Como ilustração, resolveremos a seguinte equação de Schrödinger

$$-y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x), \quad (\text{B.3})$$

sujeita à condição de contorno $y(a) = y(b) = 0$. Utilizando a mesma discretização do domínio $[a, b]$ da seção anterior, o método de Numerov aplicado à equação (B.3) conduz a

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{12} \left[f_{i-1}y_{i-1} + 10f_iy_i + f_{i+1}y_{i+1} \right].$$

Como $f(x) = -[E - V(x)]$, tem-se

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{1}{12} \left[V_{i-1}y_{i-1} + 10V_iy_i + V_{i+1}y_{i+1} \right] = \frac{1}{12}E \left[y_{i-1} + 10y_i + y_{i+1} \right].$$

Como os valores de V_{-1} e V_{N+1} não podem ser eliminados pelas condições de contorno, o sistema de equações discretas deve existir para $1 \leq i \leq N - 1$:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_1 + y_2 + \frac{h^2}{12} \left[V_0y_0 + 10V_1y_1 + V_2y_2 \right] = \frac{h^2}{12}E \left[y_0 + 10y_1 + y_2 \right] \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{h^2}{12} \left[V_{i-1}y_{i-1} + 10V_iy_i + V_{i+1}y_{i+1} \right] = \frac{h^2}{12}E \left[y_{i-1} + 10y_i + y_{i+1} \right], \quad i = 2, \dots, N - 2 \\ y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N + \frac{h^2}{12} \left[V_{N-2}y_{N-2} + 10V_{N-1}y_{N-1} + V_Ny_N \right] = \frac{h^2}{12}E \left[y_{N-2} + 10y_{N-1} + y_N \right] \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Como dito anteriormente, não existe um método numérico geral. Cada tipo de equação diferencial possui um método mais adequado para determinadas condições de contorno.

- **Condições de contorno de Dirichlet homogêneas:**

Para $y(a) = y(b) = 0$, tem-se que $y_0 = y_N = 0$ e o sistema de equações (B.4) pode ser escrito como um problema de autovalores generalizado como

$$\hat{\mathbf{A}}\vec{y} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{V}}\vec{y} = E\hat{\mathbf{B}}\vec{y}, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} V_1 & & & & \\ & V_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & V_{N-2} & \\ & & & & V_{N-1} \end{pmatrix}$$

• **Condições de contorno de Neumann homogêneas:**

Neste caso, $y'(a) = y'(b) = 0$. Utilizando aproximação de diferenças finitas progressivas em $x = a$ e regressivas em $x = b$:

$$y' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (\text{B.6})$$

e

$$y' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (\text{B.7})$$

respectivamente, tem-se que

$$y'(a) = 0 \quad \implies \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_1 = y_0}$$

$$y'(b) = 0 \quad \implies \quad \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_N = y_{N-1}}$$

Logo, o sistema de equações (B.4) as matrizes da equação (B.5) passam a ser

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} V_0/10 + V_1 & & & & \\ & V_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & V_{N-2} & \\ & & & & V_{N-1} + V_N/10 \end{pmatrix}$$

• **Condições de contorno mistas homogêneas**

Considere as condições de contorno mistas homogêneas

$$\alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = 0,$$

$$\alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = 0.$$

Utilizando aproximação de diferenças finitas progressivas para a derivada em $x = a$, tem-se

$$\alpha_a y_0 + \beta_a \frac{y_1 - y_0}{h} = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{\alpha_a - \beta_a/h} y_1$$

e aproximação de diferenças finitas regressivas para a derivada em $x = b$, tem-se

$$\alpha_b y_N + \beta_b \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0 \quad \rightarrow \quad y_N = \frac{1}{\alpha_b - \beta_b/h} y_{N-1}.$$

Finalmente, o sistema de equações (B.4) as matrizes da equação (B.5) passam a ser

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\alpha_a - \beta_a/h} - 2 \right) & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 2 & \left(-2 + \frac{1}{\alpha_b - \beta_b/h} \right) \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & & & \\ & 1 & 10 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \left(\frac{V_0}{10(\alpha_a - \beta_a/h)} + V_1 \right) & & & & \\ & V_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & V_{N-2} & \\ & & & & V_{N-1} + \left(\frac{V_N}{10(\alpha_b - \beta_b/h)} \right) \end{pmatrix}$$

Para o caso especial em que $\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}/h = 1$, o problema de autovalores coincide com o caso para condições de contorno de Neumann homogêneas.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Kaluza, “*On the problem of unity in Physics*”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921**, 966.
- [2] O. Klein, “*Quantum field theory and five-dimensional theory of relativity*”, *Zeitschrift für Physik* **37**, 895 – (1926).
- [3] K. Akama, “*An early proposal of brane world*”, Proceedings of the symposium on gauge theory and gravitation, Nara, Japan, Springer-Verlag 267 (1982), Reprinted on [[arXiv:hep-th/0001113](https://arxiv.org/abs/hep-th/0001113)].
- [4] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “*Do we live inside a domain wall?*”, *Phys. Lett. B* **125**, 136 (1983).
- [5] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “*Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem*”, *Phys. Lett. B* **125**, 139 (1983).
- [6] M. Visser, “*An Exotic Class of Kaluza-Klein Models*”, *Phys. Lett. B* **159**, 22 (1985).
- [7] L. Randall and R. Sundrum, “*A large mass hierarchy from a small extra dimension*”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
- [8] L. Randall and R. Sundrum, “*An alternative to compactification*”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- [9] Tech. Rep. ATLAS-CONF-2015-081, CERN, Geneva (2015), “*Search for resonances decaying to photon pairs in 3.2 fb^{-1} of pp collisions at $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ with the ATLAS detector*”, URL: <https://cds.cern.ch/record/2114853>.
- [10] Tech. Rep. CMS-PAS-EXO-15-004, CERN, Geneva (2015), “*Search for new physics in high mass diphoton events in proton-proton collisions at 13TeV* ”, URL: <https://cds.cern.ch/record/2114808>.
- [11] S. B. Giddings and H. Zhang, “*Kaluza-Klein graviton phenomenology for warped compactifications, and the 750 GeV diphoton excess*”, arXiv:1602.02793v1 [hep-ph].
- [12] C. Han, H. M. Lee, M. Park and V. Sanz, “*The diphoton resonance as a gravity mediator of dark matter*”, *Phys. Lett. B* **755**, 371 (2016).
- [13] H. Davoudiasl and C. Zhang, “ *750 GeV messenger of dark conformal symmetry breaking*”, *Phys. Rev. D* **93**, 055006 (2016).
- [14] A. Ahmed, B. M. Dillon, B. Grzadkowski, J. F. Gunion and Y. Jiang, “*Higgs-radion interpretation of 750 GeV di-photon excess at the LHC*”, arXiv:1512.05771 [hep-ph].
- [15] C. Csaki and L. Randall, “*A Diphoton Resonance from Bulk RS*”, arXiv:1603.07303 [hep-ph].

- [16] M. T. Arun and P. Saha, “*Gravitons in multiply warped scenarios - at 750 GeV and beyond*”, arXiv:1512.06335 [hep-ph].
- [17] M. T. Arun and D. Choudhury, “*Bulk gauge and matter fields in nested warping: II. Symmetry Breaking and phenomenological consequences*”, J. High Energy Physics **1604**, 133 (2016).
- [18] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “*The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*”, Phys. Lett. B, **429**, 263 (1998).
- [19] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “*New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV*”, Phys. Lett. B, **436**, 257 (1998).
- [20] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and J. March-Russel, “*Stabilization of submillimeter dimensions: the new guise of the hierarchy problem*”, Phys. Rev. D **63**, 064020 (2001).
- [21] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper and G. Dvali, “*Manifold Universe*”, J. High Energy Phys. **012**, 010 (2000).
- [22] J. W. Chen, M. A. Luty and E. Ponton, “*A critical cosmological constant from milimeter extra dimensions*”, J. High Energy Phys. **09** (2000) 012.
- [23] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, “*Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang*”, Phys. Rev. D **64**, 123522 (2001);
S. Räsänen, “*On ekpyrotic brane collisions*”, Nucl. Phys. B **626**, 183 (2002).
- [24] P. Horava and E. Witten, “*Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions*”, Nucl. Phys. B **460**, 506 (1996).
- [25] D. Hooper and S. Profumo, “*Dark matter and collider phenomenology of universal extra dimension*”, Phys. Rep. **453**, 29 (2007).
- [26] J. A. R. Cembranos, R. L. Delgado and A. Dobado, “*Braneworlds at LHC: Branons and KK gravitons*”, Phys. Rev. D **88**, 075021 (2013).
- [27] M. Sarrazin, G. Pignol, F. Petit and V. V. Nesvizhevsky, “*Experimental limits on neutron disappearance into another braneworld*”, Phys. Lett. B **712**, 213 (2012).
- [28] M. Sarrazin and F. Petit, “*Matter localization and resonant deconfinement in a two-sheeted spacetime*”, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 2629 (2007).
- [29] S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, “*Brane world: Disappearing massive matter*”, Phys. Rev. D **62**, 105011 (2000).
- [30] S. L. Dubovsky, “*Tunneling into Extra Dimension and High-Energy Violation of Lorentz Invariance*”, J. High Energy Phys. **0201** (2002) 012.
- [31] M. Sarrazin and F. Petit, “*Equivalence between domain walls and noncommutative two-sheeted spacetimes: Model-independent matter swapping between branes*”, Phys. Rev. D **81**, 035014 (2010).
- [32] F. Petit and M. Sarrazin, “*Quantum dynamics of massive particles in a non-commutative two-sheeted space-time*”, Phys. Lett. B **612**, 105 (2005).

- [33] M. Sarrazin and F. Petit, “*Laser frequency combs and ultracold neutrons to probe braneworlds through induced matter swapping between branes*”, Phys. Rev. D **83**, 035009 (2011).
- [34] M. Sarrazin and F. Petit, “*Probing the braneworld hypothesis with a neutron-shining-through-a-wall experiment*”, Phys. Rev. D **91**, 075013 (2015).
- [35] I. Oda, “*Localization of matters on a string-like defect*”, Phys. Lett. B **496**, 113 (2000).
- [36] M. Gremm, “*Four-dimensional gravity on a thick domain wall*”, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000).
- [37] W. T. Cruz, R. V. Maluf, L. J. Sousa and C. A. S. Almeida, “*Gravity localization in sine-Gordon braneworlds*”, Ann. Phys. **364**, 25 (2016).
- [38] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, “*Deformed Defects*”, Phys. Rev. D **66**, 101701(R) (2002).
- [39] D. Bazeia, C. Furtado and A. R. Gomes, “*Brane structure from a scalar field in warped spacetime*”, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0402** (2004) 002.
- [40] D. Bazeia and A.R. Gomes, “*Bloch Brane*”, JHEP 05 (2004) 012.
- [41] G. P. de Brito and A. de Souza Dutra, “*Multikink solutions and deformed defects*”, Ann. Phys. **351**, 620 (2014).
- [42] A. de Souza Dutra, G. P de Brito and J. M. Hoff da Silva, “*Method for obtaining thick brane models*”, Phys. Rev. D **91**, 086016 (2015).
- [43] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, “*From kinks to compactons*”, Phys. Lett. B **736**, 515 (2014).
- [44] D. Baseia, M. A. Marques and R. Menezes, “*Models for asymmetric hybrid brane*”, Phys. Rev. D **92**, 084058 (2015).
- [45] D. Baseia and D. C. Moreira, “*How to build a compact brane*”, Phys. Lett. B **748**, 79 (2015).
- [46] A. Campos, “*Critical Phenomena of Thick Brane in Warped Spacetimes*”, Phy. Rev. Lett. **88**, 141602 (2002).
- [47] R. M. Wald, “*General Relativity*”, University Of Chicago Press, ISBN: 978-0226870335 (1984).
- [48] R. d’Inverno, “*Introducing Einstein’s Relativity*”, Clarendon Press, ISBN: 978-0198596868 (1992).
- [49] T. Padmanabhan, “*Gravitation: Foundations and Frontiers*”, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521882231 (2010).
- [50] B. Zwiebach, “*A first course in string-theory*”, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521880329 (2009).

- [51] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, “*Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions*”, Phys. Lett. B, **484** 112 (2000).
- [52] C. Csáki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, “*Universal aspects of gravity localized on thick branes*”, Nucl. Phys. D **581**, 309 (2000).
- [53] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, “*Graviton resonances on deformed branes*”, Europhys. Lett. **96**, 31001 (2011).
- [54] C. Csaki, J. Erlich, and T. J. Hollowood, “*Quasilocalization of Gravity on a Brane by Resonant Modes*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 5932 (2000).
- [55] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes and R. Casana, “*Fermion localization and resonances on two-field thick branes*”, Phys. Rev. D **79**, 125022 (2009).
- [56] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, “*Phenomenology of the Randall-Sundrum Gauge Hierarchy model*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 2080 (2000).
- [57] D. F. S. Veras, W. T. Cruz, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, “*Gravity localization on hybrid branes*”, Phys. Lett. B **754**, 201 (2016).
- [58] M. Ablowitz and P. Clarkson, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, Cambridge University Press., Cambridge, UK, 1991.
- [59] R. Rajaraman, “*Solitons and Instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*”, North-Holland Ed., Amsterdam, ISBN: 978-04448704761987 (1987).
- [60] A. Hasegawa and F. Tappert, “*Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*”, Appl. Phys. Lett. **23**, 142 (1973);
A. Hasegawa and F. Tappert, “*Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*”, Appl. Phys. Lett. **23**, 171 (1973).
- [61] A. S. Davydov, “*Solitons in Molecular Systems*”, Physica Scripta **20**, 387 (1979).
- [62] D. Bazeia and E. Ventura, “*Topological twistons in crystalline polyethylene*”, Chem. Phys. Lett. **303**, 341 (1999).
- [63] E. Ventura, A. M. Dimas and D. Bazeia, “*Exact topological twistons in crystalline polyethylene*”, Chem. Phys. Lett. **320**, 587 (2000).
- [64] L. V. Yakushevich, “*Nonlinear DNA dynamics: A new model*”, Phys. Lett. A **136**, 413 (1989).
- [65] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, “*Interaction of ”Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*”, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).
- [66] P. S. Lomdahl, “*Solitons in Josephson Junctions: An Overview*”, J. Stat. Phys. **39**, 551 (1985).
- [67] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, “*Cosmic strings and other topological defects*”, Cambridge University Press., Cambridge, UK, 1994.

- [68] P. Rosenau and J. M. Hyman, “*Compactons: Solitons with finite wavelength*”, Phys. Rev. Lett. **70**, 564 (1993).
- [69] P. Rosenau, “*Nonlinear Dispersion and Compact Structures*”, Phys. Rev. Lett. **73**, 1737 (1994).
- [70] G. Gaeta, T. Gramchev and S. Walcher, “*Compact solitary waves in linearly elastic chains with non-smooth on-site potential*”, J. Phys. A, **40**, 4493 (2007).
- [71] S. Takeno, “*Compacton-like modes in model DNA systems and their bearing on biological functioning*”, Phys. Lett. A **339**, 352 (2005).
- [72] F. Kh. Abdullaev, M. S. A. Hadi, M. Salerno, and B. Umarov, “*Compacton matter waves in binary Bose gases under strong nonlinear management*”, Phys. Rev. A **90**, 063637 (2014).
- [73] S. Dusuel, P. Michaux, and M. Remoissenet, “*From Kinks to compacton-like kinks*”, Phys. Rev. E, **57**, 2320 (1994).
- [74] D. Bazeia, L. Losano and R. Menezes, “*New results on compact structures*”, Phys. Lett. B, **731**, 293 (2014).
- [75] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, “*Compact structures in standard field theory*”, Europhysics. Lett. **107**, 61001 (2014).
- [76] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev and M. Minamitsuji, “*Thick Brane Solutions*”, Rep. Prog. Phys. **73**, 066901 (2010).
- [77] L. Á. Gergely and R. Maartens, “*Asymmetric brane-worlds with induced gravity*”, Phys. Rev D **71**, 024032 (2005).
- [78] A. Melfo, N. Pantoja, and A. Skirzewski, “*Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry*”, Phys. Rev. D **67**, 105003 (2003).
- [79] A. Padilla, “*Cosmic acceleration from asymmetric branes*”, Classical Quantum Gravity **22**, 681 (2005).
- [80] Kazuia Koyama and Kayoko Koyama, “*Brane-induced gravity from asymmetric warped compactification*”, Phys. Rev. D **71**, 024032 (2005).
- [81] Y. Shtanov, V. Sahni, A. Shafieloo and A. Toporensky, “*Induced cosmological constant and other features of asymmetric brane embedding*”, J. Comol. Astropart. Phys. **04**, 023 (2009).
- [82] A. Ahmed, L. Dulny and B. Grzadkowski, “*Generalized Randall-Sundrum model with a single thick brane*”, Eur. Phys. J. C **74**, 2862 (2014).
- [83] D. Bazeia, R. Menezes and R. da Rocha, “*A note on asymmetric thick brane*”, Adv. High Energy Phys. **2014**, 276729 (2014).
- [84] A. de Souza Dutra, G. P. de Brito and J. M. Hoff da Silva, “*Asymmetrical Bloch branes and the hierarchy problem*”, Europhys. Lett. **108**, 11001 (2014).

- [85] C. S. Simão, “*Uma introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi*”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá-Paraná-Brasil (2013).
- [86] D. F. Lawden, “*Elliptic Functions and Applications*”, Springer-Verlag New York Inc., ISBN: 978-0387969657 (1989).
- [87] J. V. Armitage and W. F. Eberlein, “*Elliptic Functions*”, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521785631 (2006).
- [88] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, “*Localizing gravity on a string-like defect in six dimensions*”, Phys. Rev. Lett. **85**, 240 (2000).
- [89] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, “*Gravity localization in a string-cigar braneworld*”, Class. Quant. Grav. **30**, 025005 (2013).
- [90] W. Israel, “*Line source in general relativity*”, Phys. Rev. D **15**, 935 (1977).
- [91] R. Geroch and J. Traschen, “*Strings and other distributional sources in general relativity*”, Phys. Rev. D **36** (1987).
- [92] A. Vilenkin, “*Cosmological density fluctuations produced by vacuum strings*”, Phys. Rev. Lett. **46**, 17 1169 (1981).
- [93] J. Gott III, “*Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions*”, Astrophysical Journal **288**, 422 (1985).
- [94] W. A. Hiscock, “*Exact gravitational field of a string*”, Phys. Rev. D **31**, 3288 (1985).
- [95] R. Gregory, “*Gravitational stability of local strings*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 740 (1987).
- [96] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, “*The exact metric about global cosmic strings*”, Phys. Lett. B **215**, 67 (1988).
- [97] R. Gregory, “*Nonsingular global strings*”, Phys. Rev. D **54**, 4955 (1996).
- [98] M. Christensen, A. L. Larsen and Y. Verbin, “*Complete classification of the string-like solutions of the gravitating Abelian Higgs model*”, Phys. Rev. D **60**, 125012 (1999).
- [99] R. Gregory, “*Global string singularities*”, Phys. Lett. B **215**, 663 (1988).
- [100] E. Ponton and E. Poppitz, “*Gravity localization on string-like defects in codimension two and the AdS/CFT correspondence*”, J. High Energy Phys. **0102**, 042 (2001).
- [101] I. Oda, “*Bosonic fields in the string*”, Phys. Rev. D **62**, 126009 (2000).
- [102] A. Kehagias and K. Tamvakis, “*Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce*”, Phys. Lett. B **504**, 38 (2001).
- [103] Y. X. Liu, L. Zhao and Y. S. L. Duan, “*Localization of Fermions on a String-Like Defect*”, J. High Energy Phys. **04**, 097 (2007).
- [104] G. Kofinas, “*Conservation equation on braneworlds in six dimensions*”, Class. Quant. Grav. **22**, L47 (2005).

- [105] S. Kanno and J. Soda, “*A quasi-thick codimension 2 braneworld*”, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0407**, 002 (2004).
- [106] I. Navarro, “*Codimension two compactifications and the cosmological constant problem*”, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0309**, 004 (2003).
- [107] A. Kehagias, “*A Conical tear drop as a vacuum-energy drain for the solution of the cosmological constant problem*”, Phys. Lett. B **600**, 133 (2004).
- [108] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, “*Induced cosmology on a regularized brane in six-dimensional flux compactification*”, Nucl. Phys. B **797**, 520 (2008).
- [109] J. Garriga and M. Porrati, “*Football shaped extra dimensions and the absence of self-tuning*”, J. High Energy Phys. **0408**, 028 (2004).
- [110] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and D. Singleton, “*Fermion Generations from ‘Apple-Shaped’ Extra Dimensions*”, J. High Energy Phys. **0708**, 033 (2007).
- [111] B. de Carlos and J. M. Moreno, “*A Cigar-like universe*”, J. High Energy Phys. **0311**, 040 (2003).
- [112] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, “*Solving the hierarchy problem with noncompact extra dimensions*”, Phys. Lett. B **470**, 52 (1999).
- [113] R. Gregory, “*Nonsingular Global String Compactifications*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 2564 (2000).
- [114] I. Olasagasti and A. Vilenkin, “*Gravity of higher dimensional global defects*”, Phys. Rev. D **62**, 044014 (2000).
- [115] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, “*Warped Compactification on Abelian Vortex in Six Dimensions*”, Nucl. Phys. B **619**, 615 (2001).
- [116] B. Chow, P. Lu and L. Ni, Hamilton’s Ricci flow, Science Press, 2006.
- [117] R. S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, Contemporary Mathematics 71 (1988), 237-261.
- [118] D. Friedan, “*Nonlinear Models in $2 + \epsilon$ dimensions*”, Phys. Rev. Lett. **45**, 1057 (1980).
- [119] T. Oliynyk, V. Suneeta and E. Woolgar, “*A gradient flow for worldsheet nonlinear sigma models*” Nucl. Phys. B **739**, 441 (2006).
- [120] T. Oliynyk, V. Suneeta and E. Woolgar, “*Metric for gradient renormalization group flow of the worldsheet sigma model beyond first order*”, Phys. Rev. D **76**, 045001 (2007).
- [121] A. A. Tseytlin, “*Sigma model renormalization group flow, central charge action, and Perelman’s entropy*”, Phys. Rev. D **75**, 064024 (2007).
- [122] E. Woolgar, “*Some Applications of Ricci Flow in Physics*” Can. J. Phys. **86**, 645 (2008).

- [123] M. Headrick and T. Wiseman, “*Ricci flow and black holes*”, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6683 (2006).
- [124] N. Lashkari and A. Maloney, “*Topologically Massive Gravity and Ricci-Cotton Flow*”, *Class. Quant. Grav.* **28**, 105007 (2011).
- [125] D. Xianzhe and L. Ma, “*Mass Under the Ricci Flow*”, *Comm. Math. Phys.* **274**, Number 1, 65-80 (2007).
- [126] P. P. Orth, P. Chandra, P. Coleman and J. Schmalian, “*Emergent Critical Phase and Ricci Flow in a 2D Frustrated Heisenberg Model*”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 237205 (2012).
- [127] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold*”, *Phys. Rev. D* **84**, 085027 (2011).
- [128] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Gauge vector field localization on 3-brane placed in a warped transverse resolved conifold*”, *Phys. Rev. D* **87**, 125010 (2013).
- [129] D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “*Fermions in a warped resolved conifold*”, *Phys. Lett. B* **725**, 425 (2013).
- [130] P. Tinyakov and K. Zuleta, “*On the Thin string limit of the 6D stringlike defect model*”, *Phys. Rev. D* **64**, 025022 (2001).
- [131] G. Watson, “*A treatise on the theory of the Bessel functions*”, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521483919 (1996).
- [132] M. Giovannini, “*Gauge field localization on Abelian vortices in six-dimensions*”, *Phys. Rev. D* **66**, 044016 (2002).
- [133] M. Giovannini, J. V. Le Be and S. Riederer, “*Zero modes of six-dimensional Abelian vortices*”, *Class. Quant. Grav.* **19**, 3357 (2002).
- [134] M. Giovannini, “*Vector field localization and negative tension branes*”, *Phys. Rev. D* **65**, 124019 (2002).
- [135] R. S. Torrealba, “*Localizing Gauge Fields on a Topological Abelian String and the Coulomb Law*”, *Phys. Rev. D* **82**, 024034 (2010).
- [136] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y. Liu, D. Malagon-Morejon and R. R. Mora-Luna, “*Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb’s law on a pure de Sitter thick braneworld*”, *Phys. Rev. D* **87**, 095011 (2013).
- [137] R. Cartas-Fuentevilla, A. Escalante, G. Germán, A. Herrera-Aguilar and R. R. Mora-Luna, “*Coulomb’s law corrections and fermion field localization in a tachyonic de Sitter thick braneworld*”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1605**, 026 (2016).
- [138] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim, C. R. Muniz, R. N. Costa Filho, “*Antisymmetric tensor fields in Randall-Sundrum thick branes*”, *Phys. Lett. B* **693**, 503 (2010).

- [139] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, “*Gauge field localization on a dilatonic deformed brane*”, Phys. Lett. B **686**, 259-263 (2010).
- [140] W. T. Cruz, A. R. P. Lima and C. A. S. Almeida, “*Gauge field localization on the Bloch brane*”, Phys. Rev. D **87**, 045018 (2013).
- [141] Y. Liu, J. Yang, Z. Zhao, C. Fu, and Y. Duan, “*Fermion localization and resonances on a de-Sitter thick brane*”, Phys. Rev. D **80**, 065019 (2009).
- [142] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, “*Fermions on deformed thick branes*”, Eur. Phys. J. C **71**, 1790 (2011).
- [143] R. A. C. Correa, A. de Souza Dutra and M. B. Hott, “*Fermion localization on degenerate and critical branes*”, Class. Quant. Grav. **28**, 155012 (2011).
- [144] L. B. Castro, “*Fermion localization on two-field thick branes*”, Phys. Rev. D **83**, 045002 (2011).
- [145] A. E. R. Chumbes, J. M. Hoff da Silva and M. B. Hott, “*A model to localize gauge and tensor fields on thick branes*”, Phys. Rev. D **85**, 085003 (2012).
- [146] G. German, A. Herrera-Aguilar, D. Malagon-Morejon, R. R. Mora-Luna and R. da Rocha, “*A de Sitter tachyon thick braneworld and gravity localization*”, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1302**, 035 (2013).
- [147] L. B. Castro and L. A. Meza, “*Fermion localization on branes with generalized dynamics*”, Europhys. Lett. **102**, 21001 (2013).
- [148] A. Tofighi and M. Moazzen, “*Temperature effects on the fermion localization in smooth space generated by a bounce*”, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450126 (2014).
- [149] H. Guo, Q. Y. Xie and C. E. Fu, “*Localization and quasilocalization of spin-1/2 fermion field on two-field thick braneworld*”, Phys. Rev. D **92**, 106007 (2015).
- [150] Y. Liu, H. Li, Z. Zhao, J. Li, and J. Ren, “*Fermion resonances on multi-field thick brane*”, J. High Energy Phys. **10**, 091 (2009).
- [151] H. Li, Y. Liu, Z. Zhao and H. Guo, “*Fermion resonances on a thick brane with a piecewise warp factor*”, Phys. Rev. D **83**, 045060 (2011).
- [152] Y. Zhang, Y. Du, W. Guo, Y. Liu, “*Resonance spectrum of a bulk fermion on branes*”, Phys. Rev. D **93**, 065042 (2016).
- [153] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, “*Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes*”, Phys. Rev. D **73**, 084022 (2006); Erratum: Phys. Rev. D **77**, 049901 (2008).
- [154] Y. Liu, X. Zhang, L. Zhang and Y. Duan, “*Localization of Matters on Pure Geometrical Thick Branes*”, J. High Energy Phys. **0802**, 067 (2008).
- [155] G. Panotopoulos, “*Gravitino dark matter in brane-world cosmology*”, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0705**, 016 (2007).

- [156] S. L. Parameswaran, S. Randjbar-Daemi and A. Salvio, “*Gauge Fields, Fermions and Mass Gaps in 6D Brane Worlds*”, Nucl. Phys. B **767**, 54 (2007).
- [157] Y. Liu, L. Zhao, X. Zhang and Y. Duan, “*Fermions in self-dual vortex background on a string-like defect*”, Nucl. Phys. B **785**, 234 (2007).
- [158] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “*Vector and fermion fields on a bouncing brane with a decreasing warp factor in a string-like defect*”, Phys. Lett. B **731**, 64 (2014).
- [159] P. Budinich, “*From the geometry of pure spinors with their division algebras to fermion’s physics*”, Found. Phys. **32**, 1347 (2002).
- [160] T. Gherghetta and A. Pomarol, “*Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS*”, Nucl. Phys. B **586**, 141 (2000).
- [161] T. Gherghetta and A. Pomarol, “*A Warped supersymmetric standard model*”, Nucl. Phys. B **602**, 3 (2001).
- [162] S. J. Huber and Q. Shafi, “*Fermion masses, mixings and proton decay in a Randall-Sundrum model*”, Phys. Lett. B **498**, 256 (2001).
- [163] Y. Grossman and M. Neubert, “*Neutrino masses and mixings in non-factorizable geometry*”, Phys. Lett. B **474**, 361 (2000).
- [164] F. Cooper and B. Freedman, “*Aspects of Supersymmetric Quantum Mechanics*”, Annals Phys. **146**, 262 (1983).
- [165] C. V. Sukumar, “*Supersymmetric Quantum Mechanics of One-Dimensional Systems*”, J. Phys. A **18**, 2917 (1985).
- [166] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, “*Supersymmetry and quantum mechanics*”, Physics Reports **251**, 267 (1995).
- [167] R. Rahman, “*Helicity-1/2 mode as a probe of interactions of a massive Rarita-Schwinger field*”, Phys. Rev. D **87**, 065030 (2013).
- [168] Pierluigi Amodio and Giuseppina Settanni, “*A Matrix Method for the solution of Sturm-Liouville Problems*”, J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math. **6**, 1 (2011).
- [169] D. Bazeia, A. R. Gomes, and L. Losano, “*Gravity localization on thick branes: a numerical approach*”, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1135 (2009).
- [170] A. E. R. Chumbes, A. E. O. Vasquez and M. B. Hott, “*Fermion localization on a split brane*”, Phys. Rev. D **83**, 105010 (2011).
- [171] R. Gregory, V. A. Rubakov, and S. M. Sibiryakov, “*Opening Up Extra Dimensions at Ultra-Large Scales*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 5928 (2000).
- [172] A. R. Gomes, arXiv:hep-th/0611291 (2006).
- [173] Yu-Xiao Liu, Jie Yang, Zhen-Hua Zhao, Chun-E Fu, and Yi-Shi Duan, Phys. Rev. D **80**, 065019 (2009).

- [174] W. T. Cruz, L. S. J. Sousa, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **730**, 314 (2014).
- [175] R. L. Burden e J. D. Faires, “*Análise Numérica*”, Editora Cengage Learning, ISBN: 8522106010 (2008).