



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ARILO PINHEIRO ARAÚJO

ASSINATURAS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA  
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

FORTALEZA

2016

ARILO PINHEIRO ARAÚJO

ASSINATURAS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA RADIAÇÃO  
CÓSMICA DE FUNDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Dr. Carlos Alberto de Santos Almeida.

Coorientador: Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos.

FORTALEZA  
2016

ARILO PINHEIRO ARAÚJO

ASSINATURAS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA RADIAÇÃO  
CÓSMICA DE FUNDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 02/08/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Dr. Carlos Alberto de Santos Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Dionisio Bazeia Filho  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

A687a Araújo, Arilo Pinheiro.  
Assinaturas da violação da simetria de Lorentz na radiação cósmica de fundo  
/ Arilo Pinheiro Araújo. – Fortaleza, 2016.  
59.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Física, Fortaleza, 2016.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Dr. Carlos Alberto de Santos Almeida.

1. Radiação cósmica de fundo. 2. Violação de Lorentz. 3. Modelo Bumble-  
bee. 4. Anisotropia. 5. Cosmologia. I. Título.

CDD:530

---

*À minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e por me conceder mais essa vitória.

Aos meus pais, Manoel Murilo de Araújo e Maria Eliene Pinheiro de Araújo, por sempre me incentivarem à seguir os bons caminhos e por também sempre me darem todo o apoio à vida acadêmica.

À minha irmã, Anarda Pinheiro Araújo, por ser um dos maiores exemplos de uma pessoa honesta, inteligente e caridosa. E também por ser sempre minha conselheira não só na vida acadêmica, mas em todos os setores da minha vida.

À minha amada, Beatriz Pinheiro Bezerra, por todo o carinho e dedicação e que por muitas vezes teve que escutar os meus pedidos de desculpas por não poder estar presente para desenvolver o presente trabalho.

Ao meu orientador, Dr. Carlos Alberto de Santos Almeida, por todo o apoio e confiança dedicados a esse trabalho.

Devo agradecer de forma especial ao meu co-orientador, Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos, por me ajudar em absolutamente todos os passos da minha vida de pós-graduação. Ensinando-me relatividade geral, tirando dúvidas de madrugada e me ajudando em todas as partes desse trabalho.

Ao Dr. Dionisio Bazeia Filho, por aceitar o convite à banca examinadora e se prontificar a analisar esse trabalho.

Aos meus primos, que são todos irmãos que não tive, por sempre me apoiarem e me ajudarem muito em todos os momentos difíceis e em especial no período de desenvolvimento desse trabalho.

Aos familiares e amigos em geral que sempre me apoiaram e me aconselharam em todas as decisões importantes ou não da minha vida.

Aos integrantes do grupo de pesquisa de Teoria Quântica de Campos e Gravitacão da Universidade Federal do Ceará do laboratório LASSCO que me ajudaram muito em todas as partes desse trabalho, desde cálculos até detalhes de formataçãõ. E também por conversas de grande valia para meu desenvolvimento intelectual.

Devo agradecer ainda de forma especial a alguns amigos que me acompanham desde de a graduaçãõ e que demonstraram ser grandes irmão na vida acadêmica: Daniel Linhares, Victor Nocrato, Wagner Sena, Ícaro Rodrigues, Ermando Alencar, Nicolás Carvalho, Levi Félix. Espero que me perdoem os que não se encontram nesta lista, pois não só não caberia na dissertaçãõ, mas como minha memória não me permiti lembrar de todos.

Ao grupo de Jovens Iesus, minha família na fé.

À todos os funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por todo o auxílio financeiro durante o mestrado.

## RESUMO

Neste trabalho investigaremos a relação da violação da simetria de Lorentz com a anisotropia da radiação cósmica de fundo. Exporemos o desenrolar da compreensão do *Big Bang* e também da radiação em questão e mostraremos o seu significado e a sua natureza. Mostraremos as definições de simetria de Lorentz e de violação da simetria de Lorentz. Usaremos o modelo *Bumblebee* para lidar com os termos que violam essa simetria e mostraremos quais termos serão utilizados. Desenvolveremos uma equação de Einstein modificada através da variação, com respeito à métrica, da ação de Einstein-Hilbert com os termos de *Bumblebee* adicionados, pois são os termos que violam a simetria de Lorentz. Usaremos essa equação desenvolvida para fazer uma análise perturbativa. Usaremos a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, por ser uma métrica isotrópica, e introduziremos uma perturbação em cada direção da parte espacial da métrica em questão para torná-la anisotrópica. Por fim, apresentaremos um conjunto de quatro equações diferenciais lineares acopladas (com as perturbações como variáveis) que relacionam as perturbações propostas com o campo de *Bumblebee*.

**Palavras-chave:** Radiação cósmica de fundo. Violação de Lorentz. Modelo *Bumblebee*. Anisotropia. Cosmologia.

## ABSTRACT

In this paper we investigate the relationship of violation of Lorentz symmetry with the anisotropy of the cosmic microwave background. We shall set out the development of the understanding of the *Big Bang* and also radiation in question and show its meaning and its nature. We show the symmetry settings Lorentz and violation of Lorentz symmetry. We will use the *Bumblebee* model to deal with terms that violate this symmetry and show which terms are used. We develop a Einstein's equation modified by varying with respect to the metric of the Einstein-Hilbert action with the terms of added *Bumblebee*, as are the terms that violate Lorentz symmetry. We will use this equation developed to make a perturbation analysis. We will use the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric, being an isotropic metric, and introduce a disturbance in each direction of the spatial part of the metric in question to make it anisotropic. Finally, we present a set of four coupled linear differential equations (with disorders such as variables) which relate to proposals disorders *Bumblebee* field.

**Keywords:** Cosmic background radiation. Lorentz violation. Bumblebee model. Anisotropy. Cosmology.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Brilho típico de fontes astronômicas selecionadas quando vistas da Terra [1]	18
Tabela 2 – Densidades de energia e densidades de fótons em diferentes regiões do espectro eletromagnético [2] . . . . .	19

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Arno Penzias (à direita da foto) e Robert Wilson (à esquerda da foto) em frente ao radiotelescópio de Holmeel [3] . . . . .	18
Figura 2 – Espectro do fundo de microondas medido pelo satélite COBE indicando que essa radiação apresenta uma temperatura de $2,726 \pm 0,01$ K como descrito em [4] . . . . .	20
Figura 3 – Flutuações da radiação cósmica de fundo com relação a descrição do corpo negro, melhor mostrado em [5] . . . . .	21
Figura 4 – Dados do DMR no comprimento de onda de 5,7 mm numa escala de 0-4 K. A primeira (acima) mostra a quase uniformidade do brilho da CMB, a segunda (no meio) mostra uma melhora no contraste devido ao dipolo e na terceira (abaixo) mostra a subtração da componente de dipolo [6] . .	22
Figura 5 – Dados do DMR para os três comprimentos de onda (3,3 mm 5,7 mm e 9,5 mm) com a subtração do efeito de dipolo . . . . .	23
Figura 6 – Mapa resultante da combinação ponderada de cinco outros mapas (presentes em [7]) cada um com uma frequência diferente do WMAP. . . . .	23

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mu, \nu, \rho, \dots$	Letras gregas representarão índices que variam de 0 a 3
$i, j, k, \dots$	Letras latinas representarão índices que variam de 1 a 3
$\gamma_{\mu\nu}$	Perturbação na métrica
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo perturbado
${}^{\circ}g_{\mu\nu}$	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Símbolo de Christoffel do espaço curvo perturbado
${}^{\circ}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Símbolo de Christoffel relacionado à métrica de FLRW
$\nabla_{\mu}$	Derivada covariante do espaço curvo perturbado
${}^{\circ}\nabla_{\mu}$	Derivada covariante relacionada à métrica de FLRW

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	UMA BREVE HISTÓRIA... . . . .	15
2.1	Do <i>Big Bang</i> . . . . .	15
2.2	Da Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	17
2.2.1	<i>Entendendo melhor a CMB</i> . . . . .	19
3	FORMULAÇÃO LAGRANGIANA . . . . .	24
4	MODELO GRAVITACIONAL BUMBLEBEE . . . . .	28
4.1	Simetria de Lorentz . . . . .	28
4.2	Violação da simetria de Lorentz . . . . .	29
4.3	Bumblebee . . . . .	30
5	RESULTADOS . . . . .	32
5.1	Da ação gravitacional à equação de Einstein . . . . .	32
5.2	Linearização da equação de Einstein . . . . .	34
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	42
	REFERÊNCIAS . . . . .	43
	APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN . . . . .	46
	APÊNDICE B - LINEARIZAÇÃO DO TENSOR MOMENTO- ENERGIA DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN . . . . .	53
	APÊNDICE C - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA AÇÃO GRAVITACIONAL . . . . .	59

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade a investigação da *quebra da simetria de Lorentz* como forma de gerar uma *anisotropia* do espaço-tempo primordial.

O conceito de simetria é uma poderosa ferramenta na construção e interpretação das leis físicas da natureza. Por exemplo, as leis de conservação da energia e momento são associadas a simetrias, sendo a primeira associada à simetria pela passagem do tempo e a última por translações espaciais. A relatividade especial de Albert Einstein (1879-1955), proposta para conciliar a mecânica de Isaac Newton (1642-1726) com o eletromagnetismo de James Clerk Maxwell (1831-1879), também possui uma simetria fundamental: a simetria de Lorentz, que relaciona dois referenciais inerciais que concordam a respeito do valor da velocidade da luz no vácuo. Essa simetria tem sido confirmada experimentalmente com grande sucesso, e é uma das bases formais para a relatividade geral (RG) e a teoria quântica de campos (TQC), que constitui o arcabouço do chamado *modelo padrão* (MP).

O modelo padrão classifica as partículas básicas conhecidas e especifica como elas interagem entre si. Uma de suas limitações é que ele não descreve os efeitos da gravidade, que se encontra no âmbito da relatividade geral. A dificuldade em se obter uma descrição comum, num paradigma denominado *gravitação quântica*, levou ao surgimento de diversas propostas, como a teoria de cordas [8], gravitação quântica a laços [9], etc. Dentro dessa miríade de abordagens, uma semelhança entre elas é que todas as teorias mencionadas acomodam uma possível violação da simetria de Lorentz.

Por outro lado, a suspeita de uma quebra da simetria de paridade (reversão espacial, como se um objeto fosse visto através de um espelho) em 1957 [10] nos mostrou que mesmo uma simetria amplamente aceita como exata pode ser na verdade uma aproximação. De fato, a festejada e comprovada teoria eletrofraca nos ensina que uma simetria pode estar escondida na condensação do vácuo, ou seja, ela pode ser realizada apenas através de um mecanismo de quebra espontânea, o *mecanismo de Higgs*.

De forma análoga, existem razões para se pensar que a simetria de Lorentz também não é exata, devendo ser quebrada em algum regime [11]. Por exemplo, através de observações astronômicas do espectro de estrelas, surgiram evidências de que a constante de estrutura fina esteja variando ao longo do tempo. Isto pode implicar em uma mudança na velocidade da luz [12]. Outra indicação consiste na descoberta de raios cósmicos (prótons altamente energéticos) com energia além do chamado limite GZK (Greisen-Zatsepin-Kuzmin) ( $\sim 4 \times 10^{19}$  eV) . A violação desse limite também pode indicar uma

variação na velocidade da luz [13, 14].

No contexto da teoria de campos de cordas (*string field theory*), foi mostrado por Kostelecky e Samuel [8] que a simetria de Lorentz podia ser quebrada espontaneamente quebrada por um campo vetorial de fundo. Isso levou a um mecanismo geral para a violação de Lorentz dentro de teoria de cordas que, ao considerar-se a teoria efetiva, culminou no chamado *modelo padrão estendido* (MPE) [15].

O modelo padrão estendido foi concebido inicialmente como uma forma de facilitar investigações experimentais da violação da simetria de Lorentz dentro do modelo padrão, que é construído sobre um cenário não-gravitacional. Posteriormente, o modelo foi estendido para incorporar também o caso gravitacional [16]. Espera-se que esses efeitos sejam mais significativos em regimes onde não se pode negligenciar efeitos gravitacionais em detrimento das outras interações, como na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro ou em cenários cosmológicos.

Uma das predições fundamentais em cosmologia é a da *radiação cósmica de fundo* (CMB, de *Cosmic Microwave Background*), que é a radiação térmica residual do período de recombinação após o *Big bang*. Na região de grandes ângulos, o espectro dessa radiação apresenta um comportamento para as flutuações de temperatura que é anômalo sob a hipótese de que estas sejam estatisticamente isotrópicas [17]. Isso levou a suspeita de que pequenas anisotropias no universo primordial pudessem ser a causa desse fenômeno [18, 19]. Uma vez que o universo primordial é uma época em que a interação gravitacional era dominante, essas anisotropias podem estar relacionadas a violações da simetria de Lorentz.

No Capítulo 2 é dada uma explanação sobre o método variacional, mostrando os pormenores do desenvolvimento matemático desse método e mostrando alguns exemplos para o seu melhor entendimento. Também é mostrado com clareza o desenvolvimento da *Equação de Einstein* através da *Ação de Einstein-Hilbert* usando esse método.

Para melhor entender o desenvolvimento desse estudo, organizamos essa dissertação de tal modo que no Capítulo 3 é discutida a história do desenvolvimento do estudo do *Big Bang* com uma ênfase na radiação cósmica de fundo. Depois é apresentada a natureza física da CMB e sua relação com a radiação de corpo negro e finalmente é discutido um pouco sobre a anisotropia descoberta experimentalmente para darmos um suporte histórico e técnico a esse estudo.

No Capítulo 4 apresentamos o modelo gravitacional que será usado no decorrer desse trabalho. O modelo usado será o de *Bumblebee* [8]. Será apresentada também, de uma forma mais objetiva, a ideia da violação da simetria de Lorentz mostrando os termos que violam tal simetria e que conseqüentemente serão usados para o cálculo da equação

de Einstein.

No Capítulo 5 é montada a equação semi-clássica de Einstein (desenvolvida no Apêndice A do presente trabalho), desenvolvida a equação linearizada de Einstein.

Finalmente no Capítulo 6 mostramos as conclusões obtidas através das equações fornecidas do capítulo anterior, mostrando perspectivas para a continuação dessa pesquisa.

## 2 UMA BREVE HISTÓRIA...

### 2.1 Do *Big Bang*

Há perguntas que sempre importunaram não só a comunidade científica, mas toda a humanidade desde os primórdios do desenvolvimento do pensamento humano. “Quem somos?”, “De onde viemos?” e “Para onde vamos?” são exemplos de alguns desses questionamentos que direta e/ou indiretamente fizeram com que a ciência, como um todo, se desenvolvesse a tal ponto em que estamos.

Em meio a todo esse desenvolvimento, a filosofia (talvez a mãe das ciências, como afirma o filósofo contemporâneo Mario Sérgio Cortella [20]) foi sempre uma impulsionadora, levantando grandes questões que indiretamente fizeram com que muitos cientistas desenvolvessem teorias acerca do fenômenos naturais, como por exemplo fizeram: Aristóteles (384 a.C - 322 a.C), Tales de Mileto (623 a.C./624 a.C - 556 a.C./558 a.C) entre outros em [21].

Não se pode negar que um dos estudos da natureza que mais fascina o homem é a origem, o desenvolvimento e o provável fim do universo. Na era moderna, uma das principais figuras que reinava no meio científico era a de Newton que possuía concepções bem definidas sobre a origem do universo. Entre outras coisas, acreditava que o tempo era uma espécie de um fluido que escoava sempre na mesma direção e numa linha reta, ou seja, não havia fim para ambos os lados (era infinito tanto para frente quanto para trás) [22]. Acreditava, também, que o universo teria tido um início há alguns milhares de anos, muito provavelmente devido a sua fé na *Teoria Criacionista*. Tal teoria afirma que a existência de todas as coisas se deve a um criador, no caso da crença Judaico-Cristã esse criador vem a ser *Deus*. Mas já no século XVIII grandes pensadores como o filósofo prussiano Immanuel Kant (1724-1804) trouxeram questões à tona como: “Se o universo sempre tinha existido, por que tudo o que iria acontecer já não tinha acontecido?” ou “Se o universo realmente foi criado, por que tinha havido uma espera infinita antes da criação?” [22].

Há uma separação da filosofia com a ciência por volta do século XVI com Galileu Galilei (1564-1642) com o desenvolvimento do *Método Científico* [23]. A partir desse momento a ciência vai construir seu alicerce em fatos experimentados e a filosofia em teses. Outro modo de pensar nisso é lidar com a ideia de que a ciência é o estudo dos “*comos*” e a filosofia é o estudo dos “*porquês*” [24]. Não cabendo mais uma intervenção direta de uma área na outra, porém há muitas inspirações indiretas envolvendo essas duas

áreas de estudo.

Avançando um pouco mais na história, já no século XX, o desenvolvimento do estudo sobre a origem do universo deu um grande salto, porém sob muitas divergências. Em 1923, Edwin Hubble (1889-1953) percebeu que a galáxia de Andrômeda (M31) era na realidade um conjunto de estrelas fora dos entornos da *Via Láctea*, mudando a noção do tamanho do universo na época [25]. Imagina-se que todo o universo era do tamanho da nossa galáxia. O padre católico Lemaître (1894-1966), nascido na Bélgica, foi talvez primeiro a formular, em 1927, uma teoria chamada “*átomo primordial*” ou “*ovo cósmico*” que veio a se tornar a base da teoria do *Big Bang*. Essa teoria afirmava, basicamente, que toda a matéria estava agrupada em um único ponto e depois se expandiu em todas as direções [26]. Dois anos após a proposta dessa teoria, Hubble anunciou uma descoberta que consistia na proporcionalidade do desvio espectral das galáxias para o vermelho (*redshift*) e a sua distância da Terra, ou seja, Hubble descobriu que as galáxias se afastavam umas das outras, com algumas poucas exceções (como no caso da *Via Láctea* e a M31), com uma velocidade que crescia de acordo com o aumento da distância entre elas [25]. Essa relação veio a ser conhecida como *Lei de Hubble*, explicitada a seguir, matematicamente:

$$v = H_0 d, \quad (2.1)$$

onde  $v$  é a velocidade de separação entre as galáxias,  $H_0$  é a *constante de Hubble* e  $d$  é a separação entre as galáxias em questão.

Em 1922, Alexander Friedmann (1888-1925), previu, através de sua solução da equação de Einstein, que o universo seria dinâmico (Expansão ou contração). Havia três configurações possíveis [27, 28]:

- (i) Na primeira o universo se expande tão lentamente que a atração gravitacional entre as galáxias provoca o retardamento da expansão e, eventualmente, sua interrupção gerando um movimento de contração do universo ( $k = 1$ , espaço esférico tridimensional);
- (ii) No segundo modelo, o universo se expande tão rapidamente que a atração gravitacional não poderá jamais pará-lo, ainda que possa retardá-lo um pouco ( $k = 0$ , espaço flat);
- (iii) No terceiro modelo o universo se expande numa velocidade exata e suficiente para evitar nova explosão ( $k = -1$ , espaço hiperbólico).

Todas essas ideias juntas constituíram uma sólida base para a teoria do *Big Bang*, desenvolvida mais tarde por George Gamow (1904-1968), Ralph Alpher (1921-

2007) e Robert Herman (1914-1997). Porém, um dos maiores adversários à essa teoria era Fred Hoyle (1915-2001), o responsável pelo nome *Big Bang*. Dado de uma forma irônica numa entrevista de rádio à BBC em 1950 [29]. Hoyle era defensor da *Teoria do Estado Estacionário* no qual considerava que o universo nunca tinha tido um período mais denso do que realmente o é. Em [30] Fred Hoyle Comenta sobre a síntese dos elementos no interior das estrelas. O próprio Albert Einstein (1879-1955), criador da RG também foi um dos adversários do *Big Bang*.

Já na década de 1960 Gamow e seus colaboradores reformularam a teoria antiga e propuseram uma *Radiação Cósmica de Fundo*, que constituía um resquício do *Big Bang*, procurando entender a formação primordial do Hélio [31].

## 2.2 Da Radiação Cósmica de Fundo

Em 1965, o físico teórico James Peebles (1935-) ministrava uma palestra em John Hopkins, onde falava sobre um possível fundo de radiação proveniente dos primórdios do universo que possuía uma temperatura de aproximadamente 10 K [25]. Cerca de um ano antes, de forma independente, dois físicos especialistas em radiotelescópios, Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1941-), realizaram um experimento que, junto com a teoria de Peebles, se tornaria uma peça chave para o entendimento do Big Bang.

Penzias e Wilson construíram um radiotelescópio para tentar detectar microondas oriundas da nossa própria galáxia. Porém, desde o início era detectada uma quantidade de ruído maior do que o esperado. E de várias formas possíveis tentaram tirar ou identificar esses ruídos extras. Penzias chegou até a pensar que o motivo dessa interferência fosse “um material dielétrico branco” – fazendo referência as fezes de pombos que tinham feito um ninho no aparelho. [25]

Essa radiação era independente do tempo e da direção de observação, não variava com o dia e nem com o movimento planetário em torno do Sol. Toda essa homogeneidade e isotropia revelava que esse ruído não provinha da nossa galáxia, mas sim de um “recipiente” muito maior.

Essa teoria proposta por Peebles foi uma sugestão de Robert Dicke (1916-1997) feita também para Peter Roll e David Wilkinson (1935-2002). Então os dois grupos de pesquisa publicaram artigos simultaneamente citando-os entre si. Toda essa história é contada em mais detalhes em [25].

Naquela época, graças à abundante interação entre matéria e radiação, todo o meio devia, certamente, se encontrar em um estado muito próximo do equilíbrio termodinâmico com os fótons. Portanto a temperatura do gás de fótons devia ser exatamente a mesma da matéria. Com a expansão violenta a que este meio estava sendo submetido,



Figura 1: Arno Penzias (à direita da foto) e Robert Wilson (à esquerda da foto) em frente ao radiotelescópio de Holmeel [3]

o gás de fótons se resfriou, a densidade diminuiu e possibilitou que os prótons e elétrons se recombinassem. Com isso, o gás e fótons desacoplou-se da matéria, escoou livremente, e originou o fundo de fótons de baixa energia que permeia o *Universo local*. Sendo assim, podemos entender que o *Big Bang* é uma previsão teórica da gravitação proposta por Einstein, que recebeu uma extraordinária confirmação experimental com a descoberta da radiação do fundo na faixa de microondas [31].

Alguém pode se questionar do porquê da CMB ser observada na faixa das microondas. E a resposta é bem simples! Ao observar o céu noturno, por exemplo a olho nu, verificamos que há contribuições de vários objetos astronômicos (lua, estrelas etc), gerando uma grande interferência visual para a detecção cósmica. A Tabela 1 nos mostra a contribuição de diversos fatores que afetam a luz do céu noturno. Assim, pode-se ter uma noção do quão essa faixa de frequência é inadequada para a observação da CMB e que conseqüentemente deve-se procurar outra faixa de frequência para essa observação.

Tabela 1: Brilho típico de fontes astronômicas selecionadas quando vistas da Terra [1]

Componente	Brilho típico ( $10^{-12} \text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1} \text{sr}^{-1}$ )
Lua cheia	$10^{12}$
Airglow	600
Luz zodiacal (na eclíptica)	2500
Luz zodiacal (fora da eclíptica)	1000
Estrelas brilhantes ( $m_V < 6$ )	250
Estrelas integradas (no plano galáctico)	2500
Estrelas integradas (fora do plano galáctico)	600
Luz difusa galáctica	250
Luz difusa cósmica	10

Agora a Tabela 2 mostra as contribuições de várias faixas espectrais. Pode-se facilmente perceber que a melhor faixa de observação é a de microondas, pois entre todos

os intervalos de frequência é o que apresenta maior densidade de energia e de fótons. No entanto, deve ficar claro que essas estimativas não são muito precisas, mas afim de perceber qual a melhor faixa espectral, esse estudo já basta.

Tabela 2: Densidades de energia e densidades de fótons em diferentes regiões do espectro eletromagnético [2]

Faixa espectral	Densidade de energia ( $\text{eV m}^{-3}$ )	Densidade de fótons ( $\text{m}^{-3}$ )
Rádio	$\simeq 5 \cdot 10^{-2}$	$\simeq 10^6$
Microondas	$\simeq 3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^8$
Infravermelho	?	?
Óptico	$\simeq 2 \cdot 10^3$	$10^3$
Ultravioleta	?	?
Raios X	75	$3 \cdot 10^{-3}$
Raios $\gamma$	25	$3 \cdot 10^{-6}$

Somando todos esses fatores ao *Princípio cosmológico*, princípio desenvolvido em 1935 pelo astrofísico britânico Edward A. Milne (1896-1950) que afirma a homogeneidade e isotropia espaço-temporais do universo, ou seja, o *Universo* parece o mesmo em qualquer posição (homogêneo) e em qualquer direção (isotrópico), temos uma bela teoria para a origem de tudo.

### 2.2.1 Entendendo melhor a CMB

Primeiramente deve-se entender que a radiação cósmica de fundo é um resquício do instante em que a matéria e a radiação deixaram de interagir e que conseqüentemente também fornece explicação para a nucleossíntese primordial.

A teoria do *Big Bang* afirma que o universo já foi muito mais denso e muito menor do que agora e o estudo da física estatística nos mostra que quanto mais um fluido é comprimido tanto maior será sua temperatura. E por volta dos primeiros 700.000 mil anos a temperatura do universo era tão alta que as partículas não conseguiam compor átomos e conseqüentemente estruturas complexas [25].

Nesse estágio evolucionário do universo, os fótons caminhavam em um percurso livre médio muito pequeno, devido a uma grande densidade de matéria existente na época, pois os fótons se colidiam com elétrons cedendo ou ganhando energia. Para outras partículas mais pesadas, ocorrerá o mesmo, mas com o percurso livre médio menor [31].

Graças à essa alta densidade de interação entre matéria e radiação já comentada, o universo deveria se encontrar em um estado de equilíbrio estatístico com os fótons, o que implica numa mesma temperatura dos fótons e da matéria. Com a expansão a qual o universo se submetia, o gás de fótons se resfriou e a densidade de energia diminuiu possibilitando a recombinação dos prótons e elétrons. Com isso, o gás de fótons desacoplou-se

da matéria e escoou livremente originando o fundo de fótons de baixa energia [31], que é exatamente o que chamamos hoje de radiação cósmica de fundo.

Nessa situação de grande interação entre as partículas, pode-se destacar o equilíbrio térmico atingido, pois a velocidade de contato entre as partículas era muito maior do que a velocidade de expansão do universo. Através da mecânica estatística, pode-se determinar o estado de um tal fluido em equilíbrio com apenas uma dependência térmica, pois a quantidade de energia por unidade de volume contida num intervalo qualquer de comprimento de onda depende apenas de comprimentos de ondas e temperatura [21].

Assim, a relação acima citada dá a quantidade de radiação emitida por segundo e por centímetro quadrado a um comprimento de onda qualquer por uma superfície absorvente ideal. Essa característica permitiu-nos dizer que essa radiação gerada do equilíbrio térmico primordial é a mesma radiação de corpo negro estudada por Max Planck (1858-1947).

Podemos expressar o espectro de corpo negro de Planck matematicamente da seguinte forma:

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (2.2)$$

onde  $h$  é a constante de Planck,  $c$  é a velocidade da luz e  $k$  é a constante de Boltzmann [32].

A Figura 2 mostra uma relação feita em [4] que mostra a precisão e exatidão da CMB e da radiação de corpo negro, mostrando ser quase o impossível detectar qualquer desvio.

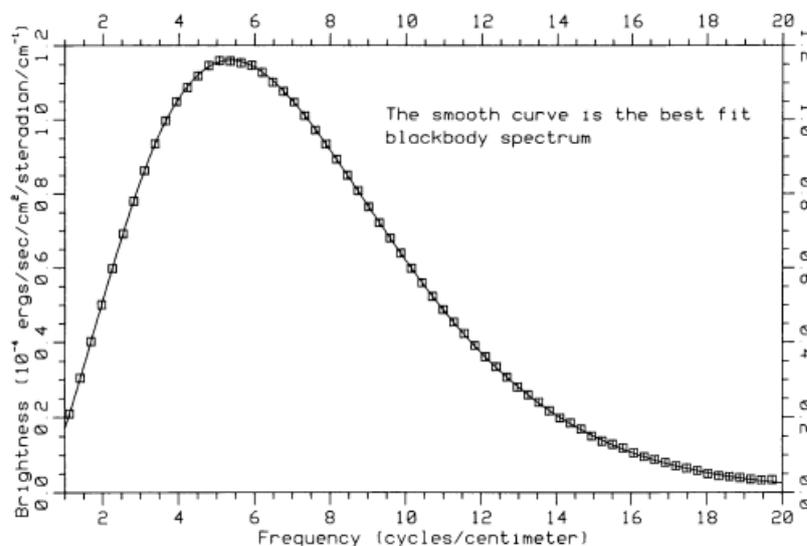


Figura 2: Espectro do fundo de microondas medido pelo satélite COBE indicando que essa radiação apresenta uma temperatura de  $2,726 \pm 0,01$  K como descrito em [4]

E em [5] foi necessário ampliar a escala em milésimos de grau para ser notado algum erro experimental, devido a grande concordância já mostrada, como mostrado na Figura 3.

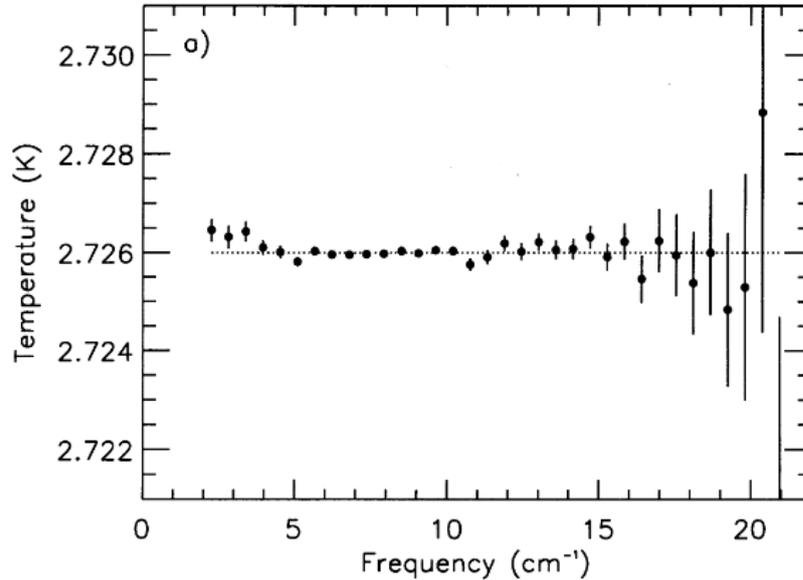


Figura 3: Flutuações da radiação cósmica de fundo com relação a descrição do corpo negro, melhor mostrado em [5]

Sendo assim, após essa verificação de dados do satélite COBE (Cosmic Background Explorer) podemos afirmar que a CMB pode ser entendida como uma radiação de corpo negro com uma temperatura de  $2,726 \pm 0,010$  K [5], um resultado melhor do que o usado no mesmo grupo de pesquisa em [4] para obter a concordância de corpo negro e radiação cósmica de fundo.

O já citado COBE é um satélite lançado em órbita no dia 18 de Novembro de 1989 pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) para que não houvesse erro experimental devido a absorção da atmosfera da CMB. O físico John Mather (1946-), laureado juntamente com George Smoot (1945-) com o prêmio nobel de física de 2006, foi o principal investigador da missão COBE onde foi detectado uma temperatura de 2,725 K com flutuações da ordem de  $10^{-5}$ . O COBE possui outros três instrumentos que o constituem: o DIRBE (Diffuse InfraRed Background Experiment), o DMR (Differential Microwave Radiometer) onde quem estava a frente desse instrumento era George Smoot e o FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrophotometer). Smoot foi o principal cientista do DMR como melhor falado em [33], que é o instrumento do COBE mais importante para a presente dissertação.

Antes de prosseguirmos no detalhamento da detecção da anisotropia do espectro CMB, precisamos apresentar melhor a definição dessa anisotropia. A formação de galáxias, aglomerados e quaisquer tipos de estruturas cosmológicas se deu devido a

anisotropias da CMB. De fato, essa anisotropia é um excesso ou defeito de temperatura relacionadas com as flutuações de densidade que estavam congeladas no espectro primordial desde a época em que matéria e radiação flutuavam juntas [34].

Essas flutuações são vistas como manchas mais escuras nas Figuras 5 e 6.

O DMR mediu anisotropias da ordem de  $10^{-5}$  da CMB em três comprimentos de onda diferentes: 3,3 mm 5,7 mm e 9,5 mm com uma resolução angular de  $7^\circ$  [6]. Logo abaixo é mostrado, na Figura 4, dados do DMR para a anisotropia da CMB. Antes de prosseguir deve ser salientado a noção de dipolo para esse caso, que é uma variação suave entre áreas relativamente quentes e relativamente frias de uma região superior direita para uma região inferior esquerda que é devido ao movimento do sistema solar em relação matéria distante no universo. Esses sinais, atribuídos a esta variação, são muito pequenas, apenas um milésimo da claridade do céu [6].

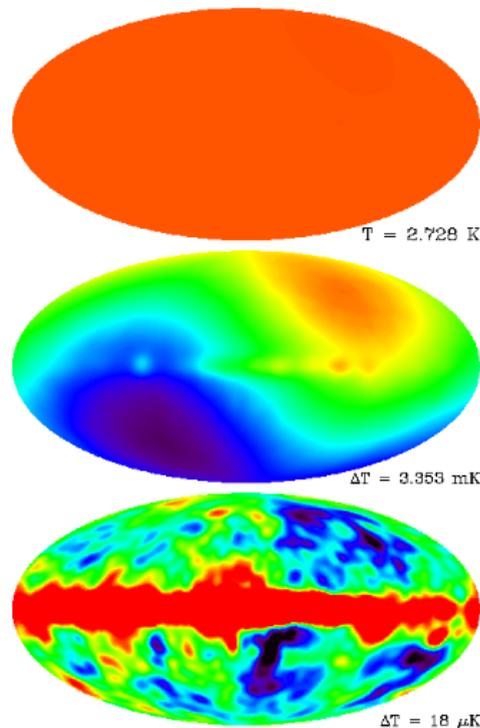


Figura 4: Dados do DMR no comprimento de onda de 5,7 mm numa escala de 0-4 K. A primeira (acima) mostra a quase uniformidade do brilho da CMB, a segunda (no meio) mostra uma melhora no contraste devido ao dipolo e na terceira (abaixo) mostra a subtração da componente de dipolo [6]

Logo abaixo, na Figura 5, temos uma visão mais completa dos dados do DMR para os três comprimentos de onda sem o efeito do dipolo.

Resultados de [35] do WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), um outro telescópio da NASA, mostram com melhor qualidade a anisotropia da radiação cósmica de fundo com baixa contaminação de dipolo e do plano galáctico, como mostrado

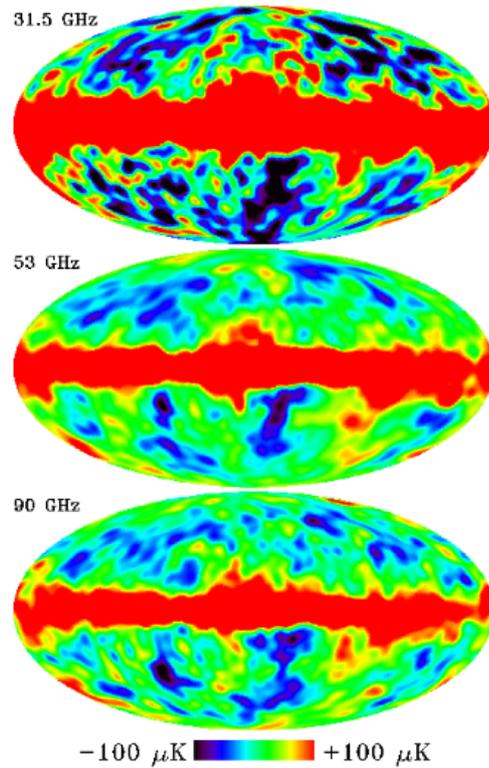


Figura 5: Dados do DMR para os três comprimentos de onda (3,3 mm 5,7 mm e 9,5 mm) com a subtração do efeito de dipolo

na Figura 6 [7].

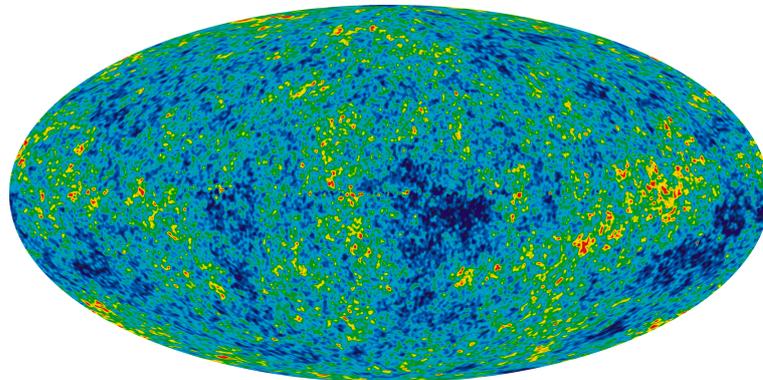


Figura 6: Mapa resultante da combinação ponderada de cinco outros mapas (presentes em [7]) cada um com uma frequência diferente do WMAP.

### 3 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

Como será utilizado o método variacional na ação que também será desenvolvida no Capítulo 5, é interessante, nesse momento, fazer uma breve revisão sobre como aplicar esse método.

A lagrangiana de um sistema contínuo deve ser expressa em termos de uma integral espacial de uma função conhecida como *Densidade lagrangiana*. No nosso contexto, chamaremos essa *Densidade lagrangiana* apenas de lagrangiana.

É necessário que essa lagrangiana contenha um termo cinético, um termo que dependa da derivada espacial (para garantir a exclusão da ideia de ação a distância) e possivelmente do espaço e do tempo. Assim, podemos escrever a ação mais geral (para um campo unidimensional) da seguinte forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, x, t \right) \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a lagrangiana e  $\varphi$  é o campo em questão.

Para chegarmos a equação de  $\varphi$  utilizaremos o método variacional:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} = 0 \quad (3.2)$$

O *Princípio de Hamilton* exige que essa variação seja nula e inclusive que a variação do campo nos extremos espaciais e temporais também seja nula:

$$\delta \varphi(x, t_1) = \delta \varphi(x, t_2) = 0 \quad (3.3)$$

$$\delta \varphi(x_1, t) = \delta \varphi(x_2, t) = 0 \quad (3.4)$$

Procedendo com a variação da ação (3.1), temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta \varphi' \right) \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta \dot{\varphi} &= \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial t} \\ \delta \varphi' &= \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \end{aligned}$$

Agora serão feitas integrações por parte para chegarmos à equação de La-

grange.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta \varphi' &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta \varphi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta \varphi \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta \varphi
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando as Equações 3.6 e 3.7 na Equação 3.5, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \right] \right\} \delta \varphi = 0 \tag{3.8}$$

Pela arbitrariedade de  $\delta \varphi$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.9}$$

onde essa é a *Equação de Lagrange* para campos.

Para campos em três dimensões espaciais, temos:

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi, \mathbf{x}, t \right) = 0 \tag{3.10}$$

onde  $d^4 x \equiv dt dx dy dz$ .

De forma análoga ao processo anterior e utilizando o *Teorema da Divergência*, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_n / \partial t)} \right] + \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_n)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} = 0 \tag{3.11}$$

onde  $n = 1, \dots, N$  para um sistema de  $N$  campos.

Para analisarmos campos em quatro dimensões (no Espaço de Minkowski) é necessário fazer a seguinte mudança de notação:

$$x^0 = ct \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_n)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} = 0, \quad n = 1, \dots, N \tag{3.13}$$

onde

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

Como exemplo, podemos tomar o caso particular do *Campo de Klein-Gordon*. A sua lagrangiana é dada da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.14)$$

onde  $m$  representa a massa da partícula, em unidade naturais ( $\hbar = c = 1$ ) que serão utilizadas neste capítulo e  $\phi$  representa o campo em questão.

Usando agora a *Equação de Lagrange*, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left( \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \partial_\nu \phi \partial_\rho \phi \right) = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \delta^\mu_\nu \partial_\rho \phi + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \partial_\nu \phi \delta^\mu_\rho \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \partial_\rho \phi + g^{\nu\mu} \partial_\nu \phi) = \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = m^2 \phi \quad (3.16)$$

Aplicando as Equações 3.15 e 3.16 na Equação 3.13, temos:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (3.17)$$

onde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  é o operador d'Alembertiano. Na teoria quântica de campos esta equação descreve mésons escalares, que são partículas de massa  $m$  sem spin [36].

Agora usaremos esse método para chegar a *Equação de Einstein* partindo da *Ação de Einstein-Hilbert*. Essa ação é dada da seguinte forma:

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (3.18)$$

onde  $R$  é o *Escalar de Ricci* (Escalar de curvatura).

Exigindo que a variação na ação deve ser nula, temos:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \delta S = \delta \int R \sqrt{-g} d^4x = \int \delta(R \sqrt{-g}) d^4x \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int (\delta R \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int \left( \delta R \sqrt{-g} - \frac{R}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} \right) d^4x \end{aligned} \quad (3.20)$$

Os termos  $\delta R \sqrt{-g}$  e  $\delta \sqrt{-g}$  são desenvolvidos no Apêndice A (Equação A.4 e

Equação A.14). Sendo assim, aplicando essas equações na Equação A.28, temos:

$$0 = \int \left[ \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} - \frac{R}{2} \frac{g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \right] d^4 x \quad (3.21)$$

Os dois termos centrais irão se anular quando integarmos, devido a variações nos extremos. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4 x \\ &\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad \forall \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ .

As Equações 3.22 são as Equações de Einstein derivadas do método variacional. Será usado esse método para obter equações de Einstein modificadas.

## 4 MODELO GRAVITACIONAL BUMBLEBEE

O modelo utilizado na presente dissertação será o famoso modelo Bumblebee, proposto em [37] para tentar explicar a anomalia da ultrapassagem do limite GZK como sendo devido a violação da simetria de Lorentz.

Esse é um modelo que envolve um campo vetorial  $B_\mu$  que viola espontaneamente a simetria de Lorentz induzido por um potencial que será melhor descrito adiante [38].

Porém, antes de desenvolver mais esse modelo, discutiremos um pouco mais sobre a simetria de Lorentz e da violação da simetria de Lorentz (VSL).

### 4.1 Simetria de Lorentz

Na introdução do presente trabalho foi comentado um pouco sobre simetrias em geral. Nesse ponto é necessário entender um pouco melhor a simetria de Lorentz.

Essa é a simetria fundamental da *Relatividade Especial* proposta por Einstein em 1905. Para formular a relatividade especial, Einstein propôs o *princípio da relatividade*:

- (i) As leis da física são idênticas em quaisquer referências inerciais;
- (ii) A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial.

A simetria de Lorentz é um conjunto de transformações que provocam mudanças no conceito de espaço e tempo gerando uma nova ideia de um novo conceito: *espaço-tempo*. Desde que se mantenha um limite superior para a velocidade da luz [11].

Essas transformações também são conhecidas como *boosts de Lorentz*. Pode-se ver matematicamente que os *eventos* antes e depois desses *boosts* se conectam da seguinte forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.1)$$

$$y' = y \quad (4.2)$$

$$z' = z \quad (4.3)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.4)$$

onde as transformações inversas também são válidas [39] e a assinatura utilizada aqui é

do tipo  $(-+++)$ . Essas equações são soluções da seguinte relação:

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad (4.5)$$

Que é uma equação que mostra a universalidade da velocidade da luz. Para dois observadores inerciais, a luz deve se propagar de forma esférica.

## 4.2 Violação da simetria de Lorentz

Como já mencionado, a VSL foi proposta para tentar explicar alguns fenômenos como, por exemplo, a descoberta de raios cósmicos com uma energia além do limite GZK ( $\sim 4 \times 10^{19}$  eV) [13, 14] ou até quando há duas décadas, através de observações astronômicas do espectro de estrelas [12], surgiram evidências de que a constante de estrutura fina estaria variando lentamente com o passar do tempo, pois como essa constante depende da velocidade da luz, da constante de Planck normalizada e da carga do elétron ( $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ ), pode ser a luz a responsável.

No estudo da *Mecânica Analítica* são separadas duas visões distintas, porém equivalentes entre si, para a transformação de referências inerciais:

- (i) *Transformação Passiva*: Transformação onde o sistema de coordenadas gira enquanto o espaço-tempo permanece inalterado;
- (ii) *Transformação Ativa*: Transformação onde o espaço-tempo gira enquanto o sistema de coordenadas permanece inalterado.

Porém o problema da violação da simetria de Lorentz pode ocorrer pela presença de campos vetoriais e tensoriais de fundo resultantes de processos de transição de fase, que causam uma anisotropia no espaço-tempo [11]. E essas transformações também mudam um pouco suas definições e seus nomes:

- (i) *Transformação de observador*: Transformação onde o sistema de coordenadas gira enquanto o espaço-tempo permanece inalterado na presença de um campo de fundo;
- (ii) *Transformação de partícula*: Transformação onde o espaço-tempo gira enquanto o sistema de coordenadas permanece inalterado na presença de um campo de fundo.

Estas definições são melhor trabalhadas em [11]. E desse mesmo artigo podemos concluir que a violação espontânea da simetria de Lorentz ocorre na *transformação de partícula*. E no presente trabalho, faremos uso do *Campo de Bumblebee* como campo vetorial de fundo para que ocorra tal quebra de simetria.

### 4.3 Bumblebee

O modelo *Bumblebee* estende o formalismo da relatividade geral, permitindo assim a inclusão da quebra da simetria de Lorentz. Essa violação é dirigida por um potencial suave com um campo vetorial que exibe um valor esperado de vácuo (VEV) não nulo, de modo que o campo de *Bumblebee*,  $B_\mu$ , adquira uma orientação quadridimensional específica [40].

Em [41] é ensinado a se construir uma ação funcional com esses termos característicos da violação de Lorentz, mas de uma forma básica é necessário que a ação deva possuir algumas características relevantes do modelo *Bumblebee*, como o acoplamento entre o campo *Bumblebee* e a geometria, a inclusão do termo cinético e a existência de um potencial geral [40].

A inclusão simultânea dos termos cinético e  $(\nabla_\mu B^\mu)^2$  conduz ao aparecimento de problemas que desaparecem com a escolha de apenas um desses termos, esses problemas são melhores discutidos em [40]. Já o acoplamento do tipo  $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$  e  $B_\mu B^\mu R$  é discutido em [42].

O efeito dinâmico do termo de acoplamento  $\xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$  que será usado, por nós, na ação gravitacional, pode ser interpretado como um termo de atrito que segura a evolução do campo *Bumblebee*, com a energia dissipada agindo para neutralizar a atração gravitacional da matéria e conduzir a uma expansão acelerada do universo [40].

Visando o intuito dessa dissertação, que é analisar o fator de escala da métrica de FLRW no caso de anisotropia, é interessante comentar que também em [40] se faz uma análise para o caso em que não há acoplamento com a geometria ( $\xi = 0$ ) e obtêm-se a solução de de Sitter para  $a(t)$ :

$$a(t) = a_0 e^{H_0(t-t_0)}. \quad (4.6)$$

Usaremos o modelo mais simples para construir a ação (3+1)-dimensional envolvendo os termos que violam Lorentz, que é dado da seguinte forma:

$$S = S_{EH} + S_{VL} \quad (4.7)$$

onde  $S_{EH}$  é a *Ação de Einstein-Hilbert* que será melhor descrita no capítulo seguinte e o segundo termo é a ação que viola Lorentz e o objeto do nosso trabalho.

O termo  $S_{VL}$  da Equação 4.7 representa o setor gravitacional para o MPE mínimo e contém os coeficientes para quebra de Lorentz acoplados com os tensores de Riemann e Ricci e o escalar de curvatura, da mesma forma que em [43] (usaremos as

unidades naturais,  $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$ ):

$$S_{VL} = \int \frac{1}{2\kappa} \left( uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (4.8)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$  e  $u$ ,  $s^{\mu\nu}$  e  $t^{\mu\nu\alpha\beta}$  são campos tensoriais com dimensão de massa zero e possuindo as mesmas simetrias das quantidades geométricas às quais estão associadas [43].

É considerado, nesse trabalho,  $t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ . Os coeficientes  $u$  e  $s^{\mu\nu}$  possuem 10 graus de liberdade que podem ser descritos no modelo *Bumblebee*, cuja dinâmica é determinada pela seguinte ação de *Bumblebee*:

$$S_B = \int \left[ -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \pm b^2) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (4.9)$$

onde  $B_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} B_{\nu]}$  e  $b^2$  é o valor positivo de ajuste para o VEV para  $B_\mu$ .

Fazendo uma equivalência entre a ação da violação de Lorentz com a ação, temos:

$$u = \frac{1}{4} \xi B_\alpha B^\alpha \quad (4.10)$$

$$s^{\mu\nu} = \xi B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} \xi g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha \quad (4.11)$$

$$t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (4.12)$$

E assim temos a ação que será usada nesta dissertação para a violação de Lorentz:

$$S_{VL} = \int \left[ \frac{1}{2\kappa} (\xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (4.13)$$

Um ponto a ser comentado é que será usado uma aproximação do campo de *Bumblebee* onde consideraremos apenas a sua componente temporal (apenas por conveniência). E essa componente temporal dependerá do tempo no presente trabalho, pois como mostrado em [40] se essa componente for constante teremos o caso particular de um universo sem matéria dominado apenas pelo campo de *Bumblebee* fazendo o papel da energia escura. Então teremos:  $B_\mu = (B_0(t), \vec{0})$ .

Uma consequência importante dessa escolha é que  $B_{\mu\nu} = 0$ , que é um resultado que será mostrado no Apêndice C com mais detalhes e que implica em outro resultado interessante.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Da ação gravitacional à equação de Einstein

Antes mesmo de desenvolver qualquer cálculo, vamos entender um pouco sobre a construção da *Lagrangiana Gravitacional*. Devido o estudo mostrado no Capítulo 4, há agora, termos que violam a simetria de Lorentz e que podem ser acrescentados à Lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{gravitacional} = \mathcal{L}_{IL} + \mathcal{L}_{VL} \quad (5.1)$$

onde  $\mathcal{L}_{gravitacional}$  será simplificado somente para  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}_{IL}$  são os termos da Lagrangiana que são invariantes de Lorentz e  $\mathcal{L}_{VL}$  são os termos que violam Lorentz.

A parte da lagrangiana que é invariante de Lorentz, pode ser escrita como uma série de potências da Curvatura, Torção e das Derivadas Covariantes e também pode apresentar a Constante Cosmológica, proposta por Einstein:

$$\mathcal{L}_{IL} = R - 2\Lambda \quad (5.2)$$

Esse primeiro termo constitui a famosa *Ação de Einstein-Hilbert* no espaço-tempo de Riemann-Cartan. No presente trabalho não faremos uso da constante cosmológica. Essa Lagrangiana acoplada com matéria gera a seguinte equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

Para os termos que violam Lorentz, a Lagrangiana é construída de tal forma que quando combinados com campos gravitacionais produzem uma quantidade que é tanto invariante de Lorentz local quanto global. Normalmente se usa a Curvatura, a Torção e as Derivadas Covariantes para expressar esses termos:

$$\mathcal{L}_{VL} = (\xi_T)^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + (\xi_R)^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \dots \quad (5.4)$$

Nesta dissertação, não usaremos o espaço-tempo de Riemann-Cartan, pois a teoria que provém dessa geometria (teoria de Einstein-Cartan) considera torções. Será usado o espaço-tempo de Riemann ou o *Limite de Riemann* onde torções são desconsideradas.

Outro ponto importante a ser citado é que os campos da Equação (5.4) serão exatamente os que foram comentados no Capítulo 4 e que serão melhor descritos adiante.

Uma discussão bem mais aprofundada sobre a construção da lagrangiana gravitacional se encontra em [41].

Para chegarmos à Equação de Einstein na presença de matéria relacionada ao *Campo de Bumblebee*, vamos primeiramente partir da Ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (5.5)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$  e  $R$  é o *Escalar de Ricci* (ou *Escalar de curvatura*).

Como mencionado no Capítulo 4 introduziremos, na ação, o termo cinético, o potencial quadrático e um acoplamento com o Tensor de Ricci:

$$S = \int \left[ \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (5.6)$$

onde  $\xi$  é a constante de acoplamento,  $B_\mu$  é o Campo de Bumblebee,  $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  é o tensor campo de força,  $b^2 \equiv \langle B_\mu B^\mu \rangle_0 \neq 0$  é o valor esperado de vácuo (VEV) do Campo de Bumblebee e  $V$  é um potencial quadrático.

Agora, variando a Equação (5.6) com respeito à métrica, obteremos:

$$0 = \delta S \quad (5.7)$$

$$0 = \int d^4x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\nu \pm b^2) \right] \right\} \quad (5.8)$$

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} \right\} \quad (5.9)$$

onde  $\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\nu \pm b^2)$ .

Usando o cálculo variacional desenvolvido no Apêndice A, teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_{\mu\nu} = & \kappa \left[ 2V' B_\mu B_\nu - B_{\mu\alpha} B_\nu^\alpha - \left( V - \frac{1}{4} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right) g_{\mu\nu} \right] \\ & + \xi \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\mu\alpha} \right. \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \\ & \left. - \frac{1}{2} \square (B_\mu B_\nu) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $\nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) = (B^\alpha B_\nu)_{;\mu;\alpha}$  e  $\square(B_\mu B_\nu) = g^{\rho\kappa} (B_\mu B_\nu)_{;\rho;\kappa}$ .

Deixando de uma forma mais compacta, temos:

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

onde, temos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \left[ 2V' B_\mu B_\nu - B_{\mu\alpha} B^\alpha{}_\nu - \left( V - \frac{1}{4} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right) g_{\mu\nu} \right] \\ & + \frac{\xi}{\kappa} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\mu\alpha} \right. \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \\ & \left. - \frac{1}{2} \square(B_\mu B_\nu) \right] \quad (5.12) \end{aligned}$$

Finalmente esse é a Equação de Einstein quando introduzido os termos que violam Lorentz. Esse mesmo resultado aparece em [40] com uma análise mais detalhada sobre a evolução dinâmica do universo.

Usaremos a Equação (5.10) para encontrarmos o tensor momentum-energia e chegarmos na Equação Linearizada de Einstein.

## 5.2 Linearização da equação de Einstein

Será usado o *método perturbativo* para encontrarmos uma anisotropia no espaço-tempo, que é um modelo bastante poderoso para se obter soluções aproximadas. Esse método consiste em introduzirmos uma pequena perturbação em uma métrica, substituir esse nova métrica na equação de Einstein e então linearizá-la para obtermos a perturbação em função de algum parâmetro ou família de parâmetros, dependendo do problema em questão.

No presente trabalho, trabalharemos com a métrica de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Essa é uma métrica que respeita as condições de homogeneidade (não há posição privilegiada) e isotropia (não há direção privilegiada) do universo em larga escala.

A condição de isotropia da métrica nos garante que não haverá termos fora da diagonal principal, ou seja, todos os termos do tipo  $g_{0i}$  serão nulos. Para que a coordenada temporal esteja de acordo com o tempo próprio, é feito  $g_{00} = -1$ . Assim, a priori a métrica de Friedmann pode ser escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ii} dx^i dx^i \quad (5.13)$$

Usando agora a mesma condição de isotropia que implica numa geometria esférica, a condição de homogeneidade que implica que todas as propriedades geométricas não dependem do raio mais alguns passos algébricos juntamente com a condição de singularidade quando o raio for nulo teremos a métrica de Friedmann na sua forma geral:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (5.14)$$

onde  $a(t)$  é parâmetro conhecido como fator de escala. Os valores de  $k$  podem variar do número -1, do número 0 e do número 1 (como citado no Capítulo 4).

Assim, podemos perceber que essa métrica descreve um universo espacialmente homogêneo e isotrópico em cada instante de tempo, como era de se esperar. É notável que toda a forma da métrica é determinada apenas por considerações de simetrias, sem nenhuma menção à fonte de matéria da equação de Einstein. No entanto, essas considerações geométricas, não nos permiti determinar o valor de  $k$  e a forma da função  $a(t)$ . Eles são determinados usando as equações de Einstein uma vez que a distribuição de matéria é especificada [44].

Para  $k = 0$  temos o espaço flat (espaço Euclidiano tridimensional), onde as condições de homogeneidade e isotropia são óbvias. Para  $k = 1$ , temos uma esfera tridimensional de raio  $a(t)$  dentro de um espaço abstrato Euclidiano quadrimensional flat. E no caso de  $k = -1$ , temos uma geometria hiperbólica dentro de um espaço abstrato quadrimensional com a assinatura de Lorentz.

No caso dessa dissertação, usaremos  $k = 0$  (espaço flat), pois medidas mostraram que o universo é flat com uma margem de erro de 0,4% [45]. Usaremos também coordenadas cartesianas, por conveniência:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)dx^2 + a(t)dy^2 + a(t)dz^2. \quad (5.15)$$

E a tornaremos anisotrópica, da seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1(t)dx^2 + a_2(t)dy^2 + a_3(t)dz^2, \quad (5.16)$$

onde buscaremos uma relação do tipo:

$$a_i(t) = a(t) + \lambda \gamma_i(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

onde as perturbações  $\gamma_i(t)$  são provenientes dos termos que violam a simetria de Lorentz.

Para encontrarmos estas correções iremos utilizar o método proposto por York [46] para considerar a influência dos campos de matéria na geometria, sendo o campo de matéria especificado pelo campo vetorial  $B$  que quebra a simetria de Lorentz, o *campo de*

*Bumblebee*. Este método busca resolver a equação de Einstein semiclássica

$$G_{\mu\nu}[\circ g + \lambda\gamma] = T_{\mu\nu}[B, \circ g + \lambda\gamma] + \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (5.17)$$

Assim, tomando uma métrica de fundo,  $\circ g_{\mu\nu}$ , introduziremos a perturbação  $\gamma_{\mu\nu}$  da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \circ g_{\mu\nu} + \lambda\gamma_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica perturbada e  $\lambda$  é um parâmetro que mede o *tamanho* da perturbação.

Assumindo que a Equação de Einstein seja válida para essa métrica de fundo, temos:

$$\mathcal{E}(g) = T(g) \quad (5.19)$$

onde  $\mathcal{E}(g)$  é a equação de Einstein, na sua forma geral, dependendo de uma métrica desconhecida e  $T(g)$  é o tensor momentum-energia representando a fonte de matéria, também dependendo de uma métrica qualquer.

Agora, é desejável que essa mesma equação seja válida para uma família de soluções que dependem de um parâmetro, ou multiparâmetros, tal que:

$$\mathcal{E}[g(\lambda)] = T[g(\lambda)] \quad (5.20)$$

onde  $g(\lambda)$  depende diferencialmente de  $\lambda$  e  $g(0) = \circ g$ .

Como descrito acima, iremos linearizar a Equação (5.20) diferenciando-a com respeito a  $\lambda$  e fazendo  $\lambda = 0$ , de acordo com o método ensinado em [28].

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{E}[g(\lambda)] \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} T[g(\lambda)] \right|_{\lambda=0} \quad (5.21)$$

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dg} \frac{dg}{d\lambda} - \frac{dT}{dg} \frac{dg}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad (5.22)$$

onde essa Equação (5.22) é linear para

$$\gamma = \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (5.23)$$

$$\mathcal{L}(\lambda) = 0 \quad (5.24)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um *operador linear*.

**Nota:** A Equação (5.24) é a linearização da Equação (5.19) sobre  $\circ g$ .

Deve-se notar dois pontos importantes nesse método:

- (i) Geralmente é muito difícil estimar o quão pequeno deve ser  $\lambda$  na troca de  $g(\lambda)$  pela métrica perturbada  ${}^{\circ}g + \lambda\gamma$  para que a solução aproximada tenha a precisão necessária;
- (ii) A existência de uma família de um único parâmetro de soluções  $g(\lambda)$  implica a existência de uma solução da Equação (5.24).

Vamos agora chegar à equação de Einstein linearizada na presença de matéria ( $R_{\mu\nu} \neq 0$ ) com uma perturbação na métrica,  $\gamma_{\mu\nu}$ , em uma solução exata,  ${}^{\circ}g_{\mu\nu}$ . Para realizarmos esse objetivo, precisamos calcular o tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}(\lambda)$ , para a métrica perturbada  $g_{\mu\nu}(\lambda)$  em termos da métrica de fundo  ${}^{\circ}g_{\mu\nu}$ .

Para que não haja confusão, é necessário que se identifique as derivadas covariantes de acordo com a métrica que se está trabalhando, então será feita a seguinte distinção:

$$\begin{aligned}\lambda\nabla_{\mu} &\rightarrow g_{\mu\nu}(\lambda) \\ {}^{\circ}\nabla_{\mu} &\rightarrow {}^{\circ}g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Podemos associar esses dois operadores de derivada da seguinte forma:

$$C^{\sigma}_{\mu\nu}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\lambda)[{}^{\circ}\nabla_{\mu}g_{\nu\rho}(\lambda) + {}^{\circ}\nabla_{\nu}g_{\mu\rho}(\lambda) - {}^{\circ}\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}(\lambda)] \quad (5.25)$$

O *tensor de Riemann*,  ${}^{\circ}R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}(\lambda)$ , associado com  $g_{\mu\nu}(\lambda)$  pode ser calculado em termos de  ${}^{\circ}R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$  (associado com a métrica de fundo  ${}^{\circ}g_{\mu\nu}$ ) e  $C^{\sigma}_{\mu\nu}(\lambda)$  pela substituição de  $\lambda\nabla_{\mu}$ , na definição do tensor de Riemann, por sua expressão em termos de  ${}^{\circ}\nabla_{\mu}$  e  $C^{\sigma}_{\mu\nu}$ .

Primeiramente, vamos lembrar da definição do tensor de Riemann:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\omega_{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\omega_{\rho} = R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}\omega_{\sigma} \quad (5.26)$$

Sabemos que:

$$\nabla_{\nu}\omega_{\rho} = \partial_{\nu}\omega_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\omega_{\sigma}$$

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\omega_{\rho} = \partial_{\mu}(\partial_{\nu}\omega_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\omega_{\sigma}) - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu}(\partial_{\delta}\omega_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\delta\rho}\omega_{\sigma}) - \Gamma^{\delta}_{\mu\rho}(\partial_{\nu}\omega_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\delta}\omega_{\sigma})$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}\omega_{\sigma} = (-2\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^{\delta}_{\rho[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\delta})\omega_{\sigma}$$

Para o nosso caso, temos:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = {}^\circ R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma - 2\partial_{[\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^\delta{}_{\rho[\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu]\delta} \quad (5.27)$$

Assim, o *tensor de Ricci* será:

$$R_{\mu\rho} = {}^\circ R_{\mu\rho} - 2\partial_{[\mu}\Gamma^\nu{}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^\delta{}_{\rho[\mu}\Gamma^\nu{}_{\nu]\delta} \quad (5.28)$$

onde  ${}^\circ R_{\mu\rho} \neq 0$ .

A Equação (5.28) expressa  $R_{\mu\rho}(\lambda)$  numa forma conveniente pela determinação de sua derivada  $\dot{R}_{\mu\rho}(\lambda) = (dR_{\mu\rho}/d\lambda)|_{\lambda=0}$ . Da definição de  $C_{\mu\nu}^\rho(\lambda)$ , temos que quando  $\lambda = 0$  ele desaparece, logo, teremos:

$$\dot{R}_{\mu\rho} = -2{}^\circ\nabla_{[\mu}\dot{C}^\nu{}_{\nu]\rho} \quad (5.29)$$

onde  $\dot{C}^\rho{}_{\mu\nu} = (dC^\rho{}_{\mu\nu}/d\lambda)|_{\lambda=0}$ .

Partindo da Equação (5.25), temos:

$$\dot{C}^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}{}^\circ g^{\rho\sigma}({}^\circ\nabla_\mu\gamma_{\nu\sigma} + {}^\circ\nabla_\nu\gamma_{\mu\sigma} - {}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\mu\nu}) \quad (5.30)$$

onde  $\gamma_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu}/d\lambda|_{\lambda=0}$  e  ${}^\circ\nabla_\mu({}^\circ g_{\nu\rho}) = 0$ .

$$\Rightarrow \dot{R}_{\mu\rho} = -{}^\circ\nabla_\mu\dot{C}^\nu{}_{\nu\rho} + {}^\circ\nabla_\nu\dot{C}^\nu{}_{\mu\rho} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\mu\rho} = & -{}^\circ\nabla_\mu \left[ \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}({}^\circ\nabla_\nu\gamma_{\rho\sigma} + {}^\circ\nabla_\rho\gamma_{\nu\sigma} - {}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\nu\rho}) \right] \\ & + {}^\circ\nabla_\nu \left[ \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}({}^\circ\nabla_\mu\gamma_{\rho\sigma} + {}^\circ\nabla_\rho\gamma_{\mu\sigma} - {}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\mu\rho}) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\mu\rho} = & -\frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\mu{}^\circ\nabla_\nu\gamma_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\mu{}^\circ\nabla_\rho\gamma_{\nu\sigma} \\ & + \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\mu{}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\nu\rho} + \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\nu{}^\circ\nabla_\mu\gamma_{\rho\sigma} \\ & + \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\nu{}^\circ\nabla_\rho\gamma_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\nu{}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\mu\rho} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow \dot{R}_{\mu\rho} = -\frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\mu{}^\circ\nabla_\rho\gamma_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}{}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\nu{}^\circ\nabla_\sigma\gamma_{\mu\rho} + {}^\circ g^{\nu\sigma}{}^\circ\nabla_\nu{}^\circ\nabla_{(\rho}\gamma_{\mu)\sigma} \quad (5.34)$$

Fazendo uma simplificação, temos:

$$\dot{R}_{\mu\rho} = -\frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla_{\mu}{}^{\circ}\nabla_{\rho}\gamma - \frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla^{\nu\circ}\nabla_{\nu}\gamma_{\mu\rho} + {}^{\circ}\nabla^{\nu\circ}\nabla_{(\rho}\gamma_{\mu)\nu} \quad (5.35)$$

onde  $\gamma = \gamma^{\mu}_{\mu} = {}^{\circ}g^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$

Agora estabeleceremos a *Equação de Einstein* nessa nova métrica e logo depois usaremos esse resultado para chegarmos a *equação linearizada*.

$$G_{\mu\nu}(g) = \kappa T_{\mu\nu}(g) \quad (5.36)$$

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) = \kappa T_{\mu\nu}(g) \quad (5.37)$$

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}({}^{\circ}g_{\mu\nu} + \lambda\gamma)R(g) = \kappa T_{\mu\nu}(g) \quad (5.38)$$

Tomando a Equação (5.38) e derivando-a com respeito a  $\lambda$  e fazendo  $\lambda = 0$ , teremos:

$$\dot{R}_{\mu\rho}(g) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\rho}R({}^{\circ}g) - \frac{1}{2}{}^{\circ}g_{\mu\rho}\dot{R}(g) = \kappa\dot{T}_{\mu\rho}(g) \quad (5.39)$$

Aplicando agora a Equação (5.35) na Equação (5.39), teremos:

$$-\frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla_{\mu}{}^{\circ}\nabla_{\rho}\gamma - \frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla^{\nu\circ}\nabla_{\nu}\gamma_{\mu\rho} + {}^{\circ}\nabla^{\nu\circ}\nabla_{(\rho}\gamma_{\mu)\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\rho}R({}^{\circ}g) - \frac{1}{2}{}^{\circ}g_{\mu\rho}\dot{R}(g) = \kappa\dot{T}_{\mu\rho}(g) \quad (5.40)$$

Primeiramente vamos resolver o último termo do lado esquerdo da Equação 5.40:

$$\begin{aligned} R(g) &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(g) \\ &= (g^{\alpha\beta} - \lambda\gamma^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta}(g) \\ \Rightarrow \dot{R}(g) &= -\gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}({}^{\circ}g) + {}^{\circ}g^{\alpha\beta}\dot{R}_{\alpha\beta}(g) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Aplicaremos agora a Equação 5.35 na Equação 5.41 e o resultado disso aplicaremos na Equação 5.40.

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla_{\mu}{}^{\circ}\nabla_{\nu}\gamma - \frac{1}{2}{}^{\circ}\nabla^{\sigma\circ}\nabla_{\sigma}\gamma_{\mu\nu} + {}^{\circ}\nabla^{\sigma\circ}\nabla_{(\nu}\gamma_{\mu)\sigma} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R({}^{\circ}g) + \frac{1}{2}{}^{\circ}g_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}({}^{\circ}g) \\ &+ \frac{1}{4}{}^{\circ}g_{\mu\nu}{}^{\circ}g^{\alpha\beta\circ}\nabla_{\alpha}{}^{\circ}\nabla_{\beta}\gamma + \frac{1}{4}{}^{\circ}g_{\mu\nu}{}^{\circ}g^{\alpha\beta\circ}\nabla^{\sigma\circ}\nabla_{\sigma}\gamma_{\alpha\beta} \\ &- \frac{1}{2}{}^{\circ}g_{\mu\nu}{}^{\circ}g^{\alpha\beta\circ}\nabla^{\sigma\circ}\nabla_{(\beta}\gamma_{\alpha)\sigma} = \kappa\dot{T}_{\mu\nu}(g) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Agora precisamos fazer o processo da linearização em cada termo da Equação

5.12. Como esse cálculo é muito extenso e os seus pormenores não precisam ser mostrados detalhadamente nesse texto, apresentamos esse desenvolvimento no Apêndice B.

Assim, temos nossas quatro equações linearizadas aplicando cada um dos termos calculados do tensor momento-energia na Equação 5.42 e depois substituindo os termos da métrica de FLRW (Equação 5.15).

A equação temporal fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{4}(1 + 2\xi\gamma^{00}B_0^2)^\circ\nabla_0^\circ\nabla_0\gamma + \frac{3a^2}{4}^\circ\nabla_i^\circ\nabla_i\gamma - \frac{1}{4}[1 + \xi B_0^2(\gamma^{00} + 2)]^\circ\nabla^{\sigma^\circ}\nabla_\sigma\gamma_{00} \\
& + \frac{1}{2}[1 + \xi B_0^2(\gamma^{00} + 4)]^\circ\nabla^{0^\circ}\nabla_0\gamma_{00} - \frac{3a^2}{4}^\circ\nabla^{\sigma^\circ}\nabla_\sigma\gamma_{ii} - \frac{3a^2}{2}^\circ\nabla^{j^\circ}\nabla_j\gamma_{ii} - \frac{5}{4}\xi B_0^2\partial_0\partial_0\gamma_{00} \\
& - \frac{1}{4}\xi B_0^2\left(16\dot{B}_0 + \frac{a}{\dot{a}} - 18\dot{a}a^3\right)\partial_0\gamma_{00} + \frac{1}{2}\xi a\dot{a}B_0^2(B_0 - 4\dot{B}_0)\partial_0\gamma^{ii} + 3\xi\frac{\dot{a}}{a}B_0^2\partial_0\gamma^{00} \\
& + \frac{3}{2}\xi aB_0(3\dot{a}B_0 - a\dot{B}_0)\partial_0\gamma_{ii} - \left[3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{\kappa\sigma}{2}(-B_0^2 \pm b^2)^2 + \frac{3}{2}\xi(\dot{B}_0^2 + B_0\ddot{B}_0)\right. \\
& \left. - 3\xi\frac{\dot{a}^2}{a^2}B_0^2 - 6\xi\frac{\dot{a}}{a}B_0\dot{B}_0\right]\gamma_{00} + \left[\frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\xi(B_0^2 + 1) - 2\kappa\sigma B_0^4 - \kappa\sigma(-B_0^2 \pm b^2)B_0^2 + 6\xi\frac{\dot{a}^2}{a^2}B_0^2\right. \\
& \left. + 6\xi\frac{\dot{a}}{a}B_0\dot{B}_0 - \xi(\dot{B}_0^2 + B_0\ddot{B}_0) + 9\xi a^2\dot{a}B_0(3\dot{a}B_0 - a\dot{B}_0)\right]\gamma^{00} + \left[\frac{1}{2}\xi a\ddot{a}(B_0^2 - 4B_0\dot{B}_0)\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}(3a\ddot{a} + 6\dot{a}^2) - \frac{23}{2}\xi\dot{a}^2B_0^2 + 27\xi\dot{a}a^5B_0^2 - 2\xi a\dot{a}(\dot{B}_0^2 + B_0\ddot{B}_0 - 3B_0\dot{B}_0)\right]\gamma^{ii} \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Para as equações espaciais, desenvolveremos o caso específico da direção  $x$  para a notação não ficar tão carregada, mas é análogo para os casos  $y$  e  $z$ . Sendo assim, as equações ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{4}^\circ\nabla_x^\circ\nabla_x\gamma - \frac{a^2}{4}(1 + \xi\gamma^{00}B_0^2)^\circ\nabla_0^\circ\nabla_0\gamma + \frac{3a^2}{4}^\circ\nabla_j^\circ\nabla_j\gamma - \frac{1}{2}^\circ\nabla^{0^\circ}\nabla_0\gamma_{xx} \\
& - \frac{3a^4}{4}^\circ\nabla^{\sigma^\circ}\nabla_\sigma\gamma_{ii} - \frac{1}{4}a^{2^\circ}\nabla^{\sigma^\circ}\nabla_\sigma\gamma_{00} + \frac{1}{4}\xi a^2\gamma^{00}B_0^2(2^\circ\nabla^{0^\circ}\nabla_0\gamma_{00} - ^\circ\nabla^{j^\circ}\nabla_j\gamma_{00}) \\
& + \frac{1}{4}\xi(B_0^2 - a^2)\partial_0\partial_0\gamma_{00} + \xi a^2\partial_0\partial_0\gamma^{00} + \frac{1}{2}(2B_0\dot{B}_0 - B_0\dot{B}_0^2a^2 + 3a\dot{a}B_0^2)\partial_0\gamma_{00} \\
& + 3\dot{a}a^3B_0\partial_0\gamma^{ii} - 12\dot{a}aB_0^2\partial_0\gamma^{00} + 2\frac{a^3}{\dot{a}}B_0^2\partial_0\gamma_{xx} + \left\{\frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a}[\xi B_0^2 - 2(1 + B_0^2)] + \frac{\kappa\sigma}{2}(-B_0^2 \pm b^2)^2\right. \\
& \left. - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}(1 + 2B_0^2) + \xi(\dot{B}_0^2 + B_0\ddot{B}_0) - 12\frac{\dot{a}}{a}B_0\dot{B}_0\right\}\gamma_{xx} - 2B_0^2\frac{a^2}{\dot{a}^2}\gamma^{xx} + \left[2\xi a^2(\dot{B}_0^2 + B_0\ddot{B}_0)\right. \\
& \left. - 3a\ddot{a}B_0^2 - 24\dot{a}^2(B_0^2 + B_0\dot{B}_0) - \frac{3}{2}a\ddot{a} + 4a^4B_0^2 - \kappa\sigma(-B_0^2 \pm b^2)B_0^2a^2\right]\gamma^{00} \\
& + \left[\frac{1}{2}a^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 3a^3\ddot{a}B_0^2 + 21\dot{a}^2a^2B_0^2 + 12\dot{a}a^3B_0\dot{B}_0\right]\gamma^{ii} \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Com esse conjunto de quatro equações (três espaciais e uma temporal) diferenciais lineares acopladas com as perturbações como variáveis, podemos prever que as soluções dessas equações relacionarão essas perturbações com a violação da simetria de

Lorentz, através do modelo gravitacional de *Bumblebee*.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Fizemos uma revisão história sobre o desenvolver do estudo do *Big Bang* e consequentemente da radiação cósmica de fundo. Apresentamos o conceito da CMB como sendo um resquício da origem de um universo mais quente e denso, apresentando sua natureza e a sua formação. Também é apresentada a anisotropia do espectro CMB, descoberta experimentalmente pelos telescópios COBE e WMAP.

É dada uma explanação sobre a simetria de Lorentz, como sendo a simetria fundamental da relatividade restrita e logo após é explicada a sua violação, como sendo uma mudança na velocidade da luz. Assim, apresentamos também a definição do modelo de *Bumblebee*, como sendo um modelo gravitacional que incorpora termos da VSL.

Desenvolvemos a equação de Einstein através do método variacional, incluindo os termos de *Bumblebee*: cinético, de acoplamento com a geometria (com o tensor de Ricci) e o potencial quadrático. Usamos o método perturbativo para encontrar quatro equações diferenciais lineares acopladas que sugerem que a existencia de perturbações anisotrópicas no espectro CMB pode ser dada violação da simetria de Lorentz, representada nesse trabalho pelo modelo gravitacional de *Bumblebee*.

É pensado, como perspectiva, resolver esse conjunto de equações afim de se obter uma relação matemática entre a anisotropia da radiação cósmica de fundo com a violação da simetria de Lorentz através do modelo gravitacional de *Bumblebee*. Logo após a interpretação desse resultado, esperamos modelar o comportamento anômalo do espectro da CMB através das anisotropia encontradas, possibilitando encontrar assinaturas observacionais da VSL.

## REFERÊNCIAS

- [1] Gary N. Toller. Optical observations of galactic and extragalactic light: Implications for galactic structure. *General Sciences Corporation*, 1990.
- [2] A.R. Sandage; R.G. Kron; M. S. Longair. *The Deep Universe*. Springer, New York, 1994.
- [3] NASA. Cosmic times. [http://cosmictimes.gsfc.nasa.gov/online\\_edition/1965Cosmic/murmur.html](http://cosmictimes.gsfc.nasa.gov/online_edition/1965Cosmic/murmur.html). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [4] J. C. Mather and et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (cobe) satellite. *Astrophys.J.*, 354(4):L37–L40, 1990.
- [5] J. C. Mather and et al. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cobe firas instrument. *Astrophys.J.*, 420(6):439–444, 1994.
- [6] NASA. Dmr images. [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr\\_image.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [7] NASA. Wmap data product images. [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/m\\_images.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/m_images.cfm). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [8] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Phys. Rev. D*, 39:683–685, Jan 1989.
- [9] N. Bodendorfer. An elementary introduction to loop quantum gravity. 2016.
- [10] T. D. Lee and C. N. Yang. Parity nonconservation and a two-component theory of the neutrino. *Phys. Rev.*, 105:1671–1675, Mar 1957.
- [11] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos, and M.T.D. Orlando. Violação da simetria de lorentz. *Revista brasileira de ensino de física*, 29, Aug 2007.
- [12] P. C. W. Davies, Tamara M. Davis, and Charles H. Lineweaver. Cosmology: Black holes constrain varying constants. *Nature*, 418(6898):602–603, Aug 2002.
- [13] J. W. MOFFAT. Spontaneous violation of lorentz invariance and ultra-high energy cosmic rays. *International Journal of Modern Physics D*, 12(07):1279–1287, 2003.
- [14] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Cosmological constraints on lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 87:251304, Nov 2001.
- [15] Don Colladay and V. Alan Kostelecký. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55:6760–6774, Jun 1997.
- [16] Robert Bluhm. Overview of the sme: Implications and phenomenology of lorentz violation. 2008.

- [17] Craig J. Copi, Dragan Huterer, Dominik J. Schwarz, and Glenn D. Starkman. Uncorrelated universe: Statistical anisotropy and the vanishing angular correlation function in wmap years 1~3. *Phys. Rev. D*, 75:023507, Jan 2007.
- [18] T. R. Jaffe, A. J. Banday, H. K. Eriksen, K. M. Górski, and F. K. Hansen. Evidence of vorticity and shear at large angular scales in the wmap data: A violation of cosmological isotropy? *The Astrophysical Journal Letters*, 629(1):L1, 2005.
- [19] T. R. Jaffe, A. J. Banday, H. K. Eriksen, K. M. Górski, and F. K. Hansen. Bianchi type vii<sub>h</sub> models and the wmap 3-year data. *Astronomy and Astrophysics*, 460(2):393–396, 2006.
- [20] Mário Sérgio Cortella. Filosofia é ciência? <http://cbn.globoradio.globo.com/comentaristas/mario-sergio-cortella/2013/04/03/FILOSOFIA-E-CIENCIA.htm>. Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [21] Francisco Caruso and Vitor Oguri. *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. Campus, Rio de Janeiro, 2006.
- [22] Stephen Hawking. *O universo numa casca de noz*. Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2009.
- [23] Pablo Rubens Mariconda and Júlio Vasconcelos. *Galileu e a nova Física*. Odysseus, São Paulo, 2006.
- [24] Mario Sérgio Cortella. *Pensar bem nos faz bem!* Vozes, São Paulo, 2014.
- [25] Steven Weinberg. *Os três primeiros minutos*. Gradiva, São Paulo, 2002.
- [26] Wikipédia. Georges lemaître. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Georges\\_Lema%C3%AAtre](https://pt.wikipedia.org/wiki/Georges_Lema%C3%AAtre). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [27] Stephen Hawking. *Uma breve história do tempo*. Círculo do livro, São Paulo, 1988.
- [28] Robert M. Wald. *General Relativity*. The university of Chicago press, 1984.
- [29] BBC News. 'big bang' astronomer dies. [http://news.bbc.co.uk/2/hi/uk\\_news/1503721.stm](http://news.bbc.co.uk/2/hi/uk_news/1503721.stm). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [30] Fred Hoyle and et al. Synthesis of the elements in stars. *Astrophys.J.*, 547(29), 1957.
- [31] Ronaldo E. de Souza. *Introdução À Cosmologia*. Edusp, 2004.
- [32] Eisberg and Resnick. *Física quântica*. Campus, Rio de Janeiro, 1979.
- [33] NASA. Cosmology and the cosmic microwave background. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2006/advanced-physicsprize2006.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/advanced-physicsprize2006.pdf). Acessado em 10 de Junho de 2016.
- [34] J. E. Horvath, G. Lugones, S. Scarano JR., R. Teixeira, and M. P. Allen. *Cosmologia física: Do micro ao macro cosmos e vice-versa*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [35] Hinshaw, G.F. and et. al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. *The Astrophysical Journal*, 208, Jun 2013.

- [36] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, São Paulo, 2007.
- [37] J. W. Moffat. Spontaneous violation of lorentz invariance and ultra-high energy cosmic rays. *International Journal of Modern Physics D*, 12:1279–1287, May 2007.
- [38] Quentin G. Bailey and V. Alan Kostelecký. Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Physical Review D*, 74, Aug 2006.
- [39] Albert Einstein. *A teoria da relatividade*. L and PM, 2013.
- [40] Diogo Capelo and Jorge Páramos. Cosmological implications of bumblebee vector models. *Phys. Rev.*, 91, May 2015.
- [41] Alan Kostelecky. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69, May 2004.
- [42] Cristian Armendariz-Picon and Alberto Diez-Tejedor. Aether unleashed. *JCAP*, 2, Apr 2009.
- [43] Victor Pereira do Nascimento Santos. *Aspectos da quebra da simetria de Lorentz e da não-comutatividade em modelos com gravitação*. PhD thesis, Universidade Federal do Ceará, 2014.
- [44] T. Padmanabhan. *Gravitation Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [45] NASA. Will the universe expand forever? [http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_shape.html](http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html). Acessado em 10 de Julho de 2016.
- [46] James W. York. Black hole in thermal equilibrium with a scalar field: The back-reaction. *Phys. Rev. D*, 31:775–784, Feb 1985.

## APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Devido o fato de o cálculo da derivação da equação de Einstein para esse problema específico ser muito grande e com muitos detalhes, esse apêndice foi criado para mostrar os pormenos desse desenvolvimento.

Partindo da Equação (5.9) faremos o cálculo de algumas identidades:

$$\begin{aligned}
 \delta g &= \delta \det g_{\mu\nu} \\
 &= tr(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \det g_{\mu\nu} \\
 &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

E lembrando que

$$\begin{aligned}
 4 = tr(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &\Rightarrow \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0 \\
 &\Rightarrow g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\Rightarrow \delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = -g g_{\mu\nu} \tag{A.3}$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2} \frac{(-1)}{\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{g_{\mu\nu}}{2} \tag{A.4}$$

Este último resultado nos mostra a variação do primeiro termo da Equação (5.9). Para calcular agora a variação do segundo termo da mesma equação, precisamos calcular mais alguma identidades:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 \delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} &= \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \\
 &\quad - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Mas sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma;\mu} &= \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} + \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \\
 \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma;\nu} &= \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma;\mu} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma;\nu} &= \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma,\mu} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu} + \delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \\
&\quad + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \\
\Rightarrow \delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} &= \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma;\mu} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma;\nu}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

E assim, a variação do tensor de Ricci, será:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\rho_{\mu\rho\nu} = \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu;\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho;\nu} \tag{A.8}$$

Agora podemos calcular a variação do Escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
\delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu;\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho;\nu})
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Precisamos usar um relação nesse momento:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu})_{;\rho} - (\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})_{;\nu}] \\
&= \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu})_{;\rho} - \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})_{;\nu} \\
&= (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu})_{;\rho} - (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})_{;\nu}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Para provar esta última passagem para a Equação (A.10), precisamos desenvolver o seguinte cálculo:

$$\Gamma^\rho_{\mu\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g_{\alpha\rho,\mu} \tag{A.11}$$

Porém, por outro lado, usando o resultado da Equação (A.1), teremos:

$$\begin{aligned}
g_{,\mu} &= (g^{\rho\alpha}g_{\alpha\rho,\mu})g \\
\Rightarrow (\sqrt{-g}\sqrt{-g})_{,\mu} &= (g^{\rho\alpha}g_{\alpha\rho,\mu})\sqrt{-g}\sqrt{-g} \\
\Rightarrow 2(\sqrt{-g})_{,\mu} &= (g^{\rho\alpha}g_{\alpha\rho,\mu})\sqrt{-g} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g_{\alpha\rho,\mu} &= (\ln\sqrt{-g})_{,\mu} \\
\Rightarrow \Gamma^\rho_{\mu\rho} &= (\ln\sqrt{-g})_{,\mu}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Agora usaremos a Equação (A.12) para finalizarmos esse resultado

$$\begin{aligned}
V^\mu_{;\mu} &= V^\mu_{,\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\rho} V^\mu \\
&= V^\mu_{,\mu} + (\ln \sqrt{-g})_{,\mu} V^\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} V^\mu_{,\mu} + (\sqrt{-g})_{,\mu} V^\mu] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^\mu)_{,\mu} \\
\Rightarrow \sqrt{-g} V^\mu_{;\mu} &= (\sqrt{-g} V^\mu)_{,\mu}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Mostrando exatamente a passagem para a Equação (A.10). Assim, os dois últimos termos da Equação (A.9) se anularão quando integrados (devido o *Teorema de Gauss*), ficando apenas o seguinte termo:

$$\sqrt{-g} \delta R = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \tag{A.14}$$

Podemos aplicar esse último resultado na variação do segundo termo da Equação (5.9):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\kappa} \left[ \delta R + \xi \delta (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} B_\kappa B_\lambda R_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \delta (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} B_{\kappa\lambda} B_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad \left. - V'(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \delta (g^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2\kappa} \left[ R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \xi \delta g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} B_\nu B_\lambda R_{\mu\kappa} + \xi \delta g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} B_\kappa B_\nu R_{\lambda\mu} \right. \\
&\quad + \xi \delta g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} B_\kappa B_\lambda \delta R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} (\delta g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} B_{\nu\lambda} B_{\mu\kappa} \\
&\quad \left. + \delta g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} B_{\lambda\nu} B_{\kappa\mu}) - V'(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) B_\mu B_\nu \delta g^{\mu\nu} \right]
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Aplicando agora a Equação (A.4) e a Equação (A.15) na Equação (5.9), teremos:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\lambda B^\sigma R_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{4} B^{\lambda\sigma} B_{\lambda\sigma} - V(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa} \left( R_{\mu\nu} + \xi B_\nu B^\kappa R_{\mu\kappa} + \xi B^\lambda B_\nu R_{\lambda\nu} + \xi B^\lambda B^\sigma \frac{\delta R_{\lambda\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_\mu{}^\lambda B_{\nu\lambda} - V'(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) B_\mu B_\nu
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Multiplicando a Equação acima por  $(-2\kappa)$ , temos:

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - \kappa g_{\mu\nu}V(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \\
&\quad - \xi B_\mu B^\alpha R_{\nu\alpha} - \xi B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} - \xi B^\alpha B^\beta \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} - \kappa B_\mu^\lambda B_{\nu\lambda} \\
&\quad + 2\kappa B_\mu B_\nu V'(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) + \frac{1}{4}\kappa B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G_{\mu\nu} &= \kappa \left[ 2V' B_\mu B_\nu - B_{\mu\alpha} B^\alpha_\nu - \left( V - \frac{1}{4} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right) g_{\mu\nu} \right] \\
&\quad + \xi \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\mu\alpha} \right. \\
&\quad \left. - B^\alpha B^\beta \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \right]
\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  e  $B_\mu^\lambda B_{\nu\lambda} = B_{\mu\lambda} B_\nu^\lambda = g^{\lambda\kappa} B_{\mu\lambda} B_{\nu\kappa} = -g^{\lambda\kappa} B_{\mu\lambda} B_{\kappa\nu} = -B_{\mu\lambda} B^\lambda_\nu$ .

Vamos desenvolver agora, o seguinte termo:

$$\begin{aligned}
B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} &= B^\alpha B^\beta (\delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta;\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho;\beta}) \\
&= B^\alpha B^\beta \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta;\rho} - B^\alpha B^\beta \delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho;\beta}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Fazendo o seguinte procedimento (de forma geral), temos:

$$\begin{aligned}
\int B^\alpha B^\beta \delta\Gamma^\sigma_{\eta\zeta;\gamma} \sqrt{-g} d^3x &= \int (B^\alpha B^\beta \delta\Gamma^\sigma_{\eta\zeta})_{;\gamma} \sqrt{-g} d^3x \\
&\quad - \int (B^\alpha B^\beta)_{;\gamma} \delta\Gamma^\sigma_{\eta\zeta} \sqrt{-g} d^3x \\
&= - \int (B^\alpha B^\beta)_{;\gamma} \delta\Gamma^\sigma_{\eta\zeta} \sqrt{-g} d^3x
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Pois o primeiro termo vai se anular devido o Teorema de Gauss.

$$\Rightarrow B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta} (B^\alpha B^\beta)_{;\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho} (B^\alpha B^\beta)_{;\beta} \tag{A.21}$$

Agora, vamos calcular o  $\delta\Gamma$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \\
\Rightarrow \Gamma_{\sigma\mu\nu} &= g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\
\Rightarrow \delta\Gamma_{\sigma\mu\nu} &= \delta(g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}) \\
&= \Gamma_{\sigma\mu\nu}\delta g^{\lambda\sigma} + g^{\lambda\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\mu\nu} \\
\Rightarrow \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \delta g^{\lambda\sigma}g_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\
&= -g^{\lambda\sigma}\delta g_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\sigma\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma} - 2\delta g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\begin{aligned}
\delta g_{\mu\sigma;\nu} &= \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \delta g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \delta g_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\
\delta g_{\nu\sigma;\mu} &= \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \delta g_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \\
\delta g_{\mu\nu;\sigma} &= \delta g_{\mu\nu,\sigma} - \delta g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta g_{\mu\sigma;\nu} + \delta g_{\nu\sigma;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\sigma\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma} - 2\delta g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{A.23}$$

Aplicando esse último resultado na Equação (A.22), temos:

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\alpha\lambda;\beta} + \delta g_{\beta\lambda;\alpha} - \delta g_{\alpha\beta;\lambda}) \tag{A.24}$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(-g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu})_{;\beta} + (-g_{\beta\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\nu})_{;\alpha} - (-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu})_{;\lambda}] \tag{A.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
\delta^\mu_{\nu} &= g^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu} \\
\Rightarrow \delta(\delta^\mu_{\nu}) &= \delta(g^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 = g_{\gamma\nu}\delta g^{\mu\gamma} + g^{\mu\gamma}\delta g_{\gamma\nu} \\
&\Rightarrow g_{\gamma\nu}\delta g^{\mu\gamma} = -g^{\mu\gamma}\delta g_{\gamma\nu} \\
&\Rightarrow g_{\lambda\mu}g^{\mu\gamma}\delta g_{\gamma\nu} = -g_{\lambda\mu}g_{\gamma\nu}\delta g^{\mu\gamma} \\
&\Rightarrow \delta^\gamma_\lambda\delta g_{\gamma\nu} = -g_{\lambda\mu}g_{\gamma\nu}\delta g^{\mu\gamma} \\
&\Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\gamma}g_{\nu\lambda}\delta g^{\gamma\lambda} \\
&\Rightarrow \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\beta} + \delta^\rho_\nu g_{\beta\mu}\delta g^{\mu\nu}_{;\alpha} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\rho\lambda}\delta g^{\mu\nu}_{;\lambda}) \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

Aplicando essa última equação no cálculo de  $B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta}$  [Equação (A.21)], temos:

$$\begin{aligned}
B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} &= \delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta}(B^\alpha B^\beta)_{;\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho}(B^\alpha B^\beta)_{;\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(B^\alpha B^\beta)_{;\rho}(\delta^\rho_\mu g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\beta} + \delta^\rho_\nu g_{\beta\mu}\delta g^{\mu\nu}_{;\alpha} \\
&\quad - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\rho\lambda}\delta g^{\mu\nu}_{;\lambda}) + \frac{1}{2}(B^\alpha B^\beta)_{;\beta}(\delta^\rho_\mu g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\rho} \\
&\quad + \delta^\rho_\nu g_{\rho\mu}\delta g^{\mu\nu}_{;\alpha} - g_{\alpha\mu}g_{\rho\nu}g^{\rho\lambda}\delta g^{\mu\nu}_{;\lambda}) \\
B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[-(B^\alpha B^\beta)_{;\mu}g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\beta} - (B^\alpha B^\beta)_{;\nu}g_{\beta\mu}\delta g^{\mu\nu}_{;\alpha} \\
&\quad + (B^\alpha B^\beta)_{;\rho}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\rho\kappa}_{;\kappa} + (B^\alpha B^\beta)_{;\beta}g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\mu} \\
&\quad + (B^\alpha B^\beta)_{;\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\alpha} - (B^\alpha B^\beta)_{;\beta}g_{\alpha\mu}\delta g^{\mu\nu}_{;\nu}] \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

Aplicando essa última equação na ação [Equação (5.9)], integrando-a por partes e usando o Teorema de Gauss, teremos:

$$\begin{aligned}
B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}[g_{\alpha\nu}(B^\alpha B^\beta)_{;\mu;\beta} + g_{\beta\mu}(B^\alpha B^\beta)_{;\nu;\alpha} \\
&\quad - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\rho\kappa}(B^\alpha B^\beta)_{;\rho;\kappa} - g_{\alpha\nu}(B^\alpha B^\beta)_{;\beta;\mu} \\
&\quad - g_{\mu\nu}(B^\alpha B^\beta)_{;\beta;\alpha} + g_{\alpha\mu}(B^\alpha B^\beta)_{;\beta;\nu}] \\
B^\alpha B^\beta \delta R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}[(B_\nu B^\beta)_{;\mu;\beta} + (B^\alpha B_\mu)_{;\nu;\alpha} - g^{\rho\kappa}(B_\mu B_\nu)_{;\rho;\kappa} \\
&\quad - (B_\nu B^\beta)_{;\beta;\mu} - (B^\alpha B^\beta)_{;\beta;\alpha}g_{\mu\nu} + (B_\mu B^\beta)_{;\beta;\nu}] \\
\Rightarrow B^\alpha B^\beta \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2}[\nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) + \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) \\
&\quad - \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta)g_{\mu\nu} - \square(B_\mu B_\nu)] \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando esse último resultado, Equação (A.28), na Equação (A.18), teremos:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G_{\mu\nu} = & \kappa \left[ 2V' B_\mu B_\nu - B_{\mu\alpha} B^\alpha{}_\nu - \left( V - \frac{1}{4} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right) g_{\mu\nu} \right] \\
& + \xi \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\mu\alpha} \right. \\
& + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \\
& \left. - \frac{1}{2} \square (B_\mu B_\nu) \right] \tag{A.29}
\end{aligned}$$

onde  $\nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) = (B^\alpha B_\nu)_{;\mu;\alpha}$  e  $\square (B_\mu B_\nu) = g^{\rho\kappa} (B_\mu B_\nu)_{;\rho;\kappa}$ .

## APÊNDICE B - LINEARIZAÇÃO DO TENSOR MOMENTO-ENERGIA DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Aqui são apresentados os desenvolvimentos detalhados do processo de linearização dos termos do tensor momento-energia da Equação 5.11.

**1º termo:**

$$\begin{aligned}
 2\kappa V' B_\mu B_\nu &= 2\kappa V'(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) B_\mu B_\nu \\
 &= 2\kappa V'(g^{\alpha\beta} B_\alpha B_\alpha \pm b^2) B_\mu B_\nu \\
 &= 2\kappa V'[({}^o g^{\alpha\beta} - \lambda\gamma^{\alpha\beta}) B_\alpha B_\alpha \pm b^2] B_\mu B_\nu
 \end{aligned}$$

Como já mencionado no Capítulo 4, o potencial utilizado será do tipo quadrático:

$$V(x) = \frac{1}{2}\sigma x^2 \Rightarrow V'(x) = \sigma x$$

Então, temos:

$$2\kappa V' B_\mu B_\nu = 2\kappa\sigma[({}^o g^{\alpha\beta} - \lambda\gamma^{\alpha\beta}) B_\alpha B_\alpha \pm b^2] B_\mu B_\nu$$

E finalmente, linearizando e realizando o somatório (com a métrica e a perturbação diagonais), teremos:

$$\Rightarrow -2\kappa\sigma\gamma^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta B_\mu B_\nu = -2\kappa\sigma\gamma^{00} B_0 B_0 B_\mu B_\nu \quad (\text{B.1})$$

onde consideramos  $B_\mu = (B_0(t), \vec{0})$ , como já foi explicado.

**2º termo:**

$$\begin{aligned}
 -\kappa B_{\mu\alpha} B^\alpha{}_\nu &= -\kappa g^{\alpha\beta} B_{\mu\alpha} B_{\beta\nu} \\
 &= -\kappa({}^o g^{\alpha\beta} - \lambda\gamma^{\alpha\beta}) B_{\mu\alpha} B_{\beta\nu}
 \end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned}
 \kappa\gamma^{\alpha\beta} B_{\mu\alpha} B_{\beta\nu} &= 4\kappa\gamma^{\alpha\beta} \partial_{[\mu} B_{\alpha]} \partial_{[\beta} B_{\nu]} \\
 &= 4\kappa\gamma^{00} \partial_{[\mu} B_{0]} \partial_{[\beta} B_{\nu]} \\
 &= 0
 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O que nos leva a concluir que todo termo do tipo  $B_{\mu\nu}$  irá zerar.

**3º termo:**

$$\begin{aligned}
-\kappa V g_{\mu\nu} &= -\kappa V (B^\alpha B_\alpha) g_{\mu\nu} \\
&= -\kappa V (g^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta) g_{\mu\nu} \\
&= -\kappa V [({}^\circ g^{\alpha\beta} - \lambda \gamma^{\alpha\beta}) B_\alpha B_\beta \pm b^2] ({}^\circ g_{\mu\nu} + \lambda \gamma_{\mu\nu}) \\
&= \frac{-\kappa \sigma}{2} [({}^\circ g^{\alpha\beta} - \lambda \gamma^{\alpha\beta}) B_\alpha B_\beta \pm b^2]^2 ({}^\circ g_{\mu\nu} + \lambda \gamma_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \kappa \sigma ({}^\circ g^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta \pm b^2) \gamma^{\rho\delta} B_\rho B_\delta {}^\circ g_{\mu\nu} - \frac{\kappa \sigma}{2} ({}^\circ g^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta \pm b^2)^2 \gamma_{\mu\nu} \\
&\Rightarrow \kappa \sigma ({}^\circ g^{00} B_0 B_0 \pm b^2) \gamma^{00} B_0 B_0 {}^\circ g_{\mu\nu} - \frac{\kappa \sigma}{2} ({}^\circ g^{00} B_0 B_0 \pm b^2)^2 \gamma_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

**4º termo:**

Esse termo se anulará no final do processo devido ao termo  $B_{\alpha\beta}$  presente nele.

**5º termo:**

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{2} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} &= \frac{\xi}{2} g^{\alpha\delta} g^{\beta\sigma} B_\delta B_\sigma R_{\alpha\beta}(g) g_{\mu\nu} \\
&= \frac{\xi}{2} ({}^\circ g^{\alpha\delta} - \lambda \gamma^{\alpha\delta}) ({}^\circ g^{\beta\sigma} - \lambda \gamma^{\beta\sigma}) B_\delta B_\sigma R_{\alpha\beta}(g) ({}^\circ g_{\mu\nu} + \lambda \gamma_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\frac{\xi}{2} \gamma^{\alpha\delta 0} g^{\beta\sigma} B_\delta B_\sigma R_{\alpha\beta}({}^\circ g) {}^\circ g_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} \gamma^{\beta\sigma 0} g^{\alpha\delta} B_\delta B_\sigma R_{\alpha\beta}({}^\circ g) {}^\circ g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\xi}{2} \gamma^{\alpha\delta 0} g^{\beta\sigma} B_\delta B_\sigma \dot{R}_{\alpha\beta}(g) {}^\circ g_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} {}^\circ g^{\alpha\delta 0} g^{\beta\sigma} B_\delta B_\sigma R_{\alpha\beta}({}^\circ g) \gamma_{\mu\nu} \\
&\Rightarrow -\frac{\xi}{2} \gamma^{00 0} g^{00} B_0 B_0 R_{00}({}^\circ g) {}^\circ g_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} \gamma^{00 0} g^{00} B_0 B_0 R_{00}({}^\circ g) {}^\circ g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\xi}{2} \gamma^{00 0} g^{00} B_0 B_0 \dot{R}_{00}(g) {}^\circ g_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} {}^\circ g^{00 0} g^{00} B_0 B_0 R_{00}({}^\circ g) \gamma_{\mu\nu} \\
&\Rightarrow -\xi \gamma^{00 0} g^{00} B_0 B_0 R_{00}({}^\circ g) {}^\circ g_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} \gamma^{00 0} g^{00} B_0 B_0 \dot{R}_{00}(g) {}^\circ g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\xi}{2} {}^\circ g^{00 0} g^{00} B_0 B_0 R_{00}({}^\circ g) \gamma_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

**6º termo:**

$$\begin{aligned}
-\xi B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} &= -\xi g^{\alpha\beta} B_\mu B_\alpha R_{\alpha\nu} \\
&= -\xi ({}^\circ g^{\alpha\beta} - \lambda \gamma^{\alpha\beta}) B_\mu B_\alpha R_{\alpha\nu}(g)
\end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \xi \gamma^{\alpha\beta} B_\mu B_\alpha R_{\alpha\nu}({}^\circ g) - \xi {}^\circ g^{\alpha\beta} B_\mu B_\alpha \dot{R}_{\alpha\nu}(g) \\ \Rightarrow & \xi \gamma^{00} B_\mu B_0 R_{0\nu}({}^\circ g) - \xi {}^\circ g^{00} B_\mu B_0 \dot{R}_{0\nu}(g) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

**7º termo:**

Análogo ao 6º termo

$$\Rightarrow \xi \gamma^{00} B_\nu B_0 R_{0\mu}({}^\circ g) - \xi {}^\circ g^{00} B_\nu B_0 \dot{R}_{0\mu}(g) \quad (\text{B.6})$$

**8º termo:**

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\nu) &= \frac{\xi}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) \\ &= \frac{\xi}{2} \nabla_\alpha \left[ \partial_\mu (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} (g^{\sigma\beta} B_\beta B_\nu) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\sigma) \right] \\ &= \frac{\xi}{2} \left\{ \partial_\alpha \partial_\mu (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) + \partial_\alpha \left[ \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} (g^{\sigma\beta} B_\beta B_\nu) \right] - \partial_\alpha \left[ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\sigma) \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial_\delta (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) \Gamma^\delta_{\mu\alpha} - \partial_\mu (g^{\alpha\beta} B_\beta B_\delta) \Gamma^\delta_{\nu\alpha} + \partial_\mu (g^{\delta\beta} B_\beta B_\nu) \Gamma^\alpha_{\delta\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{\xi}{2} \left\{ -\partial_\alpha \partial_\mu (\gamma^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) + \partial_\alpha \left[ \dot{\Gamma}^\alpha_{\mu\sigma} ({}^\circ g^{\sigma\beta} B_\beta B_\nu) - {}^\circ \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} (\gamma^{\sigma\beta} B_\beta B_\nu) \right] \right. \\ & - \partial_\alpha \left[ \dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} ({}^\circ g^{\alpha\beta} B_\beta B_\sigma) - {}^\circ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (\gamma^{\alpha\beta} B_\beta B_\sigma) \right] + \partial_\delta (\gamma^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) {}^\circ \Gamma^\delta_{\mu\alpha} \\ & - \partial_\delta ({}^\circ g^{\alpha\beta} B_\beta B_\nu) \dot{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha} + \partial_\mu (\gamma^{\alpha\beta} B_\beta B_\delta) {}^\circ \Gamma^\delta_{\nu\alpha} - \partial_\mu ({}^\circ g^{\alpha\beta} B_\beta B_\delta) \dot{\Gamma}^\delta_{\nu\alpha} \\ & \left. - \partial_\mu (\gamma^{\delta\beta} B_\beta B_\nu) {}^\circ \Gamma^\alpha_{\delta\alpha} + \partial_\mu ({}^\circ g^{\delta\beta} B_\beta B_\nu) \dot{\Gamma}^\alpha_{\delta\alpha} \right\} \\ \Rightarrow & \frac{\xi}{2} \left\{ -\partial_0 \partial_\mu (\gamma^{00} B_0 B_\nu) + \partial_\alpha \left[ \dot{\Gamma}^\alpha_{\mu 0} ({}^\circ g^{00} B_0 B_\nu) - {}^\circ \Gamma^\alpha_{\mu 0} (\gamma^{00} B_0 B_\nu) \right] \right. \\ & - \partial_0 \left[ \dot{\Gamma}^0_{\mu\nu} ({}^\circ g^{00} B_0 B_0) - {}^\circ \Gamma^0_{\mu\nu} (\gamma^{00} B_0 B_0) \right] + \partial_\delta (\gamma^{00} B_0 B_\nu) {}^\circ \Gamma^\delta_{\mu 0} \\ & - \partial_\delta ({}^\circ g^{00} B_0 B_\nu) \dot{\Gamma}^\delta_{\mu 0} + \partial_\mu (\gamma^{00} B_0 B_\delta) {}^\circ \Gamma^\delta_{\nu 0} - \partial_\mu ({}^\circ g^{00} B_0 B_\delta) \dot{\Gamma}^\delta_{\nu 0} \\ & \left. - \partial_\mu (\gamma^{00} B_0 B_\nu) {}^\circ \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \partial_\mu ({}^\circ g^{00} B_0 B_\nu) \dot{\Gamma}^\alpha_{0\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\sigma g_{\delta\mu} + \partial_\mu g_{\delta\sigma} - \partial_\delta g_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} ({}^\circ g^{\alpha\delta} - \lambda \gamma^{\alpha\delta}) \left[ \partial_\sigma ({}^\circ g_{\delta\mu} + \lambda \gamma^{\delta\mu}) + \partial_\mu ({}^\circ g_{\delta\sigma} + \lambda \gamma^{\delta\sigma}) \right. \\ &\quad \left. - \partial_\delta ({}^\circ g_{\mu\sigma} + \lambda \gamma^{\mu\sigma}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\alpha} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\delta}\left(\partial_{\sigma}{}^{\circ}g_{\delta\mu} + \partial_{\mu}{}^{\circ}g_{\delta\sigma} - \partial_{\delta}{}^{\circ}g_{\mu\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}{}^{\circ}g^{\alpha\delta}\left(\partial_{\sigma}\gamma_{\delta\mu} + \partial_{\mu}\gamma_{\delta\sigma} - \partial_{\delta}\gamma_{\mu\sigma}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

**9º termo:**

Análogo ao 8º termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\xi}{2} \left\{ -\partial_0\partial_{\nu}\left(\gamma^{00}B_0B_{\mu}\right) + \partial_{\alpha}\left[\dot{\Gamma}_{\nu 0}^{\alpha}\left({}^{\circ}g^{00}B_0B_{\mu}\right) - {}^{\circ}\Gamma_{\nu 0}^{\alpha}\left(\gamma^{00}B_0B_{\mu}\right)\right] \right. \\ -\partial_0\left[\dot{\Gamma}_{\nu\mu}^0\left({}^{\circ}g^{00}B_0B_0\right) - {}^{\circ}\Gamma_{\nu\mu}^0\left(\gamma^{00}B_0B_0\right)\right] + \partial_{\delta}\left(\gamma^{00}B_0B_{\mu}\right){}^{\circ}\Gamma_{\nu 0}^{\delta} \\ -\partial_{\delta}\left({}^{\circ}g^{00}B_0B_{\mu}\dot{\Gamma}_{\nu 0}^{\delta}\right) + \partial_{\nu}\left(\gamma^{00}B_0B_{\delta}\right){}^{\circ}\Gamma_{\mu 0}^{\delta} - \partial_{\nu}\left({}^{\circ}g^{00}B_0B_{\delta}\right)\dot{\Gamma}_{\mu 0}^{\delta} \\ \left. -\partial_{\nu}\left(\gamma^{00}B_0B_{\mu}\right){}^{\circ}\Gamma_{0\alpha}^{\alpha} + \partial_{\nu}\left({}^{\circ}g^{00}B_0B_{\mu}\right)\dot{\Gamma}_{0\alpha}^{\alpha}\right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

**10º termo:**

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\left(B^{\alpha}B^{\beta}\right)g_{\mu\nu} &= -\frac{\xi}{2}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\left(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{\xi}{2}\nabla_{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right) + \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\left(g^{\rho\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left(g^{\alpha\sigma}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right]g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{\xi}{2}\left\{\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\left(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right) + \partial_{\alpha}\left[\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\left(g^{\rho\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\alpha}\left[\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left(g^{\alpha\sigma}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + \Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left(g^{\phi\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\Gamma_{\beta\rho}^{\phi}\left(g^{\rho\sigma}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + \Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left(g^{\phi\sigma}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right]\right\}g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\xi}{2} \left\{ -\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\left(\gamma^{\alpha\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right) - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\left(\gamma^{\beta\delta\circ}g^{\alpha\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right) + \partial_{\alpha}\left[\dot{\Gamma}_{\beta\rho}^{\alpha}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \right. \\ -\partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\gamma^{\beta\delta\circ}g^{\rho\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right] - \partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\gamma^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right] + \partial_{\alpha}\left[\dot{\Gamma}_{\beta\rho}^{\beta}\left({}^{\circ}g^{\alpha\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ -\partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\gamma^{\alpha\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right] - \partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\gamma^{\rho\delta\circ}g^{\alpha\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right] + \dot{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left({}^{\circ}g^{\phi\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ -{}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left(\gamma^{\phi\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] - {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left(\gamma^{\beta\delta\circ}g^{\phi\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + \dot{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\phi}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ + {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\dot{\Gamma}_{\beta\rho}^{\phi}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] - {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\phi}\left(\gamma^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] - {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\phi}\left(\gamma^{\beta\delta\circ}g^{\rho\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ + \dot{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left({}^{\circ}g^{\phi\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\dot{\Gamma}_{\beta\rho}^{\phi}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] - {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left(\gamma^{\phi\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ - {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left(\gamma^{\rho\delta\circ}g^{\phi\sigma}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right]\left.\right\}{}^{\circ}g_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}\left\{\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\left({}^{\circ}g^{\alpha\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right) + \partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \right. \\ + \partial_{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left({}^{\circ}g^{\alpha\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[\partial_{\beta}\left({}^{\circ}g^{\phi\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] + {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\phi}\left({}^{\circ}g^{\rho\sigma\circ}g^{\beta\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right] \\ \left. + {}^{\circ}\Gamma_{\alpha\phi}^{\alpha}\left[{}^{\circ}\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\left({}^{\circ}g^{\phi\sigma\circ}g^{\rho\delta}B_{\sigma}B_{\delta}\right)\right]\right\}\gamma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & -\frac{\xi}{2} \left\{ -2\partial_0\partial_0(\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0) + \partial_\alpha \left[ \dot{\Gamma}^\alpha_{00}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] - 2\partial_\alpha \left[ \circ\Gamma^\alpha_{00}\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0 \right] \right. \\
& + \partial_0 \left[ \dot{\Gamma}^\beta_{\beta 0}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] - 2\partial_0 \left[ \circ\Gamma^\beta_{\beta 0}\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0 \right] + \dot{\Gamma}^\alpha_{\alpha 0} \left[ \partial_0(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \\
& - 2\circ\Gamma^\alpha_{\alpha 0} \left[ \partial_0(\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] + \dot{\Gamma}^\alpha_{\alpha\phi} \left[ \circ\Gamma^\phi_{00}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] + \circ\Gamma^\alpha_{\alpha\phi} \left[ \dot{\Gamma}^\phi_{00}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \\
& - 2\circ\Gamma^\alpha_{\phi\alpha} \left[ \circ\Gamma^\phi_{00}(\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] + 2\dot{\Gamma}^\alpha_{\alpha 0} \left[ \circ\Gamma^\beta_{\beta 0}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \\
& - 2\circ\Gamma^\alpha_{\alpha 0} \left[ \circ\Gamma^\beta_{\beta 0}(\gamma^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \left. \right\} \circ g_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} \left\{ \partial_0\partial_0(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) + \partial_\alpha \left[ \circ\Gamma^\alpha_{00}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \right. \\
& + \partial_0 \left[ \circ\Gamma^\beta_{\beta 0}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] + \circ\Gamma^\alpha_{\alpha 0} \left[ \partial_0(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] + \circ\Gamma^\alpha_{\alpha\phi} \left[ \circ\Gamma^\phi_{00}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \\
& \left. + \circ\Gamma^\alpha_{\alpha 0} \left[ \circ\Gamma^\beta_{\beta 0}(\circ g^{00\circ}g^{00}B_0B_0) \right] \right\} \gamma_{\mu\nu} \tag{B.10}
\end{aligned}$$

**11° termo:**

$$\begin{aligned}
-\frac{\xi}{2}\square(B_\mu B_\nu) &= -\frac{\xi}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(B_\mu B_\nu) = -\frac{\xi}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(B_\mu B_\nu) \\
&= -\frac{\xi}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha[\partial_\beta(B_\mu B_\nu) - B_\rho B_\nu\Gamma^\rho_{\mu\beta} - B_\mu B_\rho\Gamma^\rho_{\nu\beta}] \\
&= -\frac{\xi}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\alpha\partial_\beta(B_\mu B_\nu) - \partial_\alpha(B_\rho B_\nu\Gamma^\rho_{\mu\beta}) - \partial_\alpha B_\mu B_\rho\Gamma^\rho_{\nu\beta} - \partial_\sigma(B_\mu B_\nu)\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \\
&\quad - \partial_\beta(B_\sigma B_\nu)\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \partial_\beta(B_\mu B_\sigma)\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\rho B_\sigma\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\beta B_\nu\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \\
&\quad + B_\rho B_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_\sigma B_\rho\Gamma^\rho_{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + B_\mu B_\rho\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_\rho\Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}]
\end{aligned}$$

Linearizando e realizando o somatório, temos:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & -\frac{\xi}{2}\gamma^{\alpha\beta}[\partial_\alpha\partial_\beta(B_\mu B_\nu) - \partial_\alpha(B_\rho B_\nu\circ\Gamma^\rho_{\mu\beta}) - \partial_\alpha B_\mu B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\nu\beta} - \partial_\sigma(B_\mu B_\nu)\circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} - \partial_\beta(B_\sigma B_\nu)\circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \\
& - \partial_\beta(B_\mu B_\sigma)\circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\rho B_\sigma\circ\Gamma^\rho_{\mu\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\rho B_\nu\circ\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + B_\rho B_\nu\circ\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_\sigma B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\nu\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \\
& + B_\mu B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\nu\sigma}\circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}] + \frac{\xi}{2}\circ g^{\alpha\beta}[-\partial_\alpha(B_\rho B_\nu\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\beta}) - \partial_\alpha B_\mu B_\rho\dot{\Gamma}^\rho_{\nu\beta} \\
& - \partial_\sigma(B_\mu B_\nu)\dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha} - \partial_\beta(B_\sigma B_\nu)\dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\alpha} - \partial_\beta(B_\mu B_\sigma)\dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} + B_\rho B_\sigma\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\rho B_\sigma\circ\Gamma^\rho_{\mu\beta}\dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} \\
& + B_\rho B_\nu\dot{\Gamma}^\rho_{\sigma\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + B_\rho B_\nu\circ\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\alpha} + B_\rho B_\nu\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\sigma}\circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_\rho B_\nu\circ\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha} + B_\sigma B_\rho\dot{\Gamma}^\rho_{\nu\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \\
& + B_\sigma B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\nu\beta}\dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\alpha} + B_\mu B_\rho\dot{\Gamma}^\rho_{\sigma\beta}\circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_\rho\dot{\Gamma}^\rho_{\nu\sigma}\circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_\mu B_\rho\circ\Gamma^\rho_{\nu\sigma}\dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & -\frac{\xi}{2}\gamma^{\alpha\beta}[\partial_\alpha\partial_\beta(B_\mu B_\nu) - \partial_\alpha(B_0 B_\nu \circ\Gamma^0_{\mu\beta}) - \partial_\alpha B_\mu B_0 \circ\Gamma^0_{\nu\beta} - \partial_\sigma(B_\mu B_\nu) \circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} - \partial_\beta(B_0 B_\nu) \circ\Gamma^0_{\mu\alpha} \\
& - \partial_\beta(B_\mu B_0) \circ\Gamma^0_{\nu\alpha} + B_0 B_0 \circ\Gamma^0_{\mu\beta} \circ\Gamma^0_{\nu\alpha} + B_0 B_\nu \circ\Gamma^0_{\sigma\beta} \circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + B_0 B_\nu \circ\Gamma^0_{\mu\sigma} \circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_0 B_0 \circ\Gamma^0_{\nu\beta} \circ\Gamma^0_{\mu\alpha} \\
& + B_\mu B_0 \circ\Gamma^0_{\sigma\beta} \circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_0 \circ\Gamma^0_{\nu\sigma} \circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}] + \frac{\xi}{2}g^{\alpha\beta}[-\partial_\alpha(B_0 B_\nu \dot{\Gamma}^0_{\mu\beta}) - \partial_\alpha B_\mu B_0 \dot{\Gamma}^0_{\nu\beta} \\
& - \partial_\sigma(B_\mu B_\nu) \dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha} - \partial_\beta(B_0 B_\nu) \dot{\Gamma}^0_{\mu\alpha} - \partial_\beta(B_\mu B_0) \dot{\Gamma}^0_{\nu\alpha} + B_0 B_0 \dot{\Gamma}^0_{\mu\beta} \circ\Gamma^0_{\nu\alpha} + B_0 B_0 \circ\Gamma^0_{\mu\beta} \dot{\Gamma}^0_{\nu\alpha} \\
& + B_0 B_\nu \dot{\Gamma}^0_{\sigma\beta} \circ\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + B_0 B_\nu \circ\Gamma^0_{\sigma\beta} \dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\alpha} + B_0 B_\nu \dot{\Gamma}^0_{\mu\sigma} \circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + B_0 B_\nu \circ\Gamma^0_{\mu\sigma} \dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha} + B_0 B_0 \dot{\Gamma}^0_{\nu\beta} \circ\Gamma^0_{\mu\alpha} \\
& + B_0 B_0 \circ\Gamma^0_{\nu\beta} \dot{\Gamma}^0_{\mu\alpha} + B_\mu B_0 \dot{\Gamma}^0_{\sigma\beta} \circ\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_0 \circ\Gamma^0_{\sigma\beta} \dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} + B_\mu B_0 \dot{\Gamma}^0_{\nu\sigma} \circ\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \\
& + B_\mu B_0 \circ\Gamma^0_{\nu\sigma} \dot{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha}] \tag{B.11}
\end{aligned}$$

## APÊNDICE C - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA AÇÃO GRAVITACIONAL

Faremos agora uma variação da Equação 5.6 com respeito ao campo de *Bumblebee*:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} \xi R^{\mu\nu} \delta(B_\mu B_\nu) - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(B_{\alpha\beta} B_{\mu\nu}) - V' g^{\mu\alpha} \delta(B_\alpha B_\mu) \right] \\
&= \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{\xi}{\kappa} B_\nu \delta B_\mu R_{\mu\nu} - 2V' g^{\mu\alpha} B_\alpha \delta B_\mu - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta[(\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha) \right. \\
&\quad \left. \times (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)] \right\} \tag{C.1}
\end{aligned}$$

É necessário lembrar da seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\
&= \partial_\mu B_\nu - B_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu B_\mu + B_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\
&= B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu} \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Agora aplicaremos esse resultado no seguinte termo:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(B_{\alpha\beta} B_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} B_{\alpha\beta} \delta B_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} B^{\mu\nu} \delta(B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} B^{\mu\nu} [(\delta B_\nu)_{;\mu} - (B_\mu)_{;\nu}] \\
&= \frac{1}{2} (\delta B_\nu B^{\mu\nu}_{;\mu} - \delta B_\mu B^{\mu\nu}_{;\nu}) \\
&= -\delta B_\mu B^{\mu\nu}_{;\nu} \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Aplicando a Equação C.3 na Equação C.1 teremos:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} d^4x \delta B_\mu \left[ \frac{\xi}{\kappa} B_\nu B^{\mu\nu} - 2B^\mu V' (B^\lambda B_\lambda \pm b^2) + B^{\mu\nu}_{;\nu} \right] \tag{C.4}$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu B^{\mu\nu} = 2B^\nu V' (B^\lambda B_\lambda \pm b^2) - \frac{\xi}{\kappa} B_\mu B^{\mu\nu} \tag{C.5}$$

As Equações C.5 são as equações de movimento geradas pela variação, com respeito ao campo de *Bumblebee*, da ação 5.6.

Para a situação em questão, onde consideramos que  $B_\mu = (B_0(t), \vec{0})$ , temos:

$$\left(V' - \frac{3\xi}{2\kappa} \frac{\ddot{a}}{a}\right)B = 0 \quad (\text{C.6})$$

Para um campo de *Bumblebee* não nulo, a Equação C.6 estabelece uma relação entre a dinâmica do potencial e o fator de escala.