



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GERALDO HERBERT BELTRÃO DE SOUZA

INTEGRAL LINKING PARA O ESPAÇO HIPERBÓLICO

FORTALEZA

2016

GERALDO HERBERT BELTRÃO DE SOUZA

INTEGRAL LINKING PARA O ESPAÇO HIPERBÓLICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

S715i Souza, Geraldo Herbert Beltrão de  
Integral Linking para o espaço hiperbólico / Geraldo Herbert Beltrão de Souza. – 2016.  
35 f. il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.  
Área de Concentração: Geometria Diferencial.  
Orientação: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

1. Geometria diferencial. 2. Linking number. 3. Aplicação de Gauss. I. Título.

---

CDD 516.36

GERALDO HERBERT BELTRÃO DE SOUZA

INTEGRAL LINKING PARA O ESPAÇO HIPERBÓLICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 12 / 08 / 2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Darlan Rabelo Girão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Frederico Vale Girão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a meus pais Geraldo Linhares e Ivany Belrão, pois são extremamente importantes em minha vida, além de sempre terem acreditado em mim e torcido durante todo esse período para que eu alcançasse meus objetivos, o seu apoio através de palavras de encorajamento, financeiro bem como a preocupação deles com meu bem-estar foram indispensáveis. Dedico, também, essa dissertação aos meus irmãos Natanael, Ana Gláucia, Sarha, David Hudson e Maxuell. Também aos meus sobrinhos Júlia Roberts, Allan, João Marcos e Annalu.

## AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru, pela excelente orientação, pelo tempo dedicado a mim para explicar vários conceitos da dissertação, pela paciência e pela disponibilidade em me atender quando eu precisava

Aos professores participantes da banca examinadora Darlan Rabelo Girão e Frederico Vale Girão pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

À minha família pelo incondicional apoio, encorajamento e motivação.

Aos colegas de mestrado Felipe Fernandes, Hamilton Araújo e Diego Silva pelo companheirismo e pelas longas conversas no café depois do almoço.

Aos meus colegas de apartamento Kelson, Davi, Wanderley e Eddigledson por terem suportado minhas várias mudanças de humor durante esses dois anos.

“Uma grande mudança requer um grande sacrifício.” (Geraldo Herbert)

## RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo encontrar uma fórmula integral que calcula o linking number entre duas subvariedades de uma hipersuperfície visível do espaço hiperbólico, que será definida no texto. A motivação para isso foi o artigo “HIGHER-DIMENSIONAL LINKING INTEGRALS”, cujos autores são Clayton Shonkwiler e David Shea Vela-Vick. Em tal artigo Shonkwiler e Vela-Vick derivam uma fórmula integral para duas subvariedades de uma hipersuperfície visível do espaço euclidiano. Tentando adaptar a ideia deles, fomos atrás de uma fórmula integral para o caso hiperbólico, seguindo o mesmo roteiro, porém utilizando a estrutura geométrica do espaço hiperbólico. Além disso, vale ressaltar que o artigo de Shonkwiler e Vela-Vick é bastante sucinto, deixando vários argumentos e passagens inexplicados, o que também nos levou a ir atrás de explicar com maiores detalhes toda a argumentação deles e assim, um conceito “novo” e bastante importante teve que ser apresentado, tal conceito denominamos “variedade cônica”, que não é uma variedade diferenciável de fato e por isso tivemos de desenvolver um pouco a teoria do grau para tais conjuntos. Por fim, nos demos a trabalho de expressar a “aplicação de Gauss hiperbólica”, com a finalidade de que ela desempenhasse o mesmo papel que a aplicação de Gauss euclidiana desempenhou no artigo de Shonkwiler e Vela-Vick.

**Palavras-chave:** Linking number. Aplicação de Gauss. Grau.



## ABSTRACT

This research aimed to find a comprehensive formula that calculates the linking number between two submanifolds of a visible hypersurface of hyperbolic space, which will be defined in the text. The motivation for this was the article “ HIGHER-DIMENSIONAL LINKING INTEGRALS ” whose authors are Clayton Shonkwiler and David Shea Candle-Vick. Which article Shonkwiler and Vela-Vick derive an integral formula for two submanifolds of a visible hypersurfaces of Euclidean space. Trying to adapt the idea of them, we were behind a full formula for the hyperbolic case, following the same script, but using the geometric structure of the hyperbolic space. Moreover, it is noteworthy that the Shonkwiler article and Vela-Vick is quite succinct, leaving several arguments and unexplained passages, which also led us to go back to explain in more detail all the arguments of them and thus a “ concept new ” and very important had to be made, such a concept we call ‘ conical variety, ’ which is not a deferenciável variety of apparel and so we had to develop a little degree theory for such sets. Finally, we gave work to express “ application of hyperbolic Gauss ”, in order that it desempenhasse the same role that the application of Euclidean Gauss played in article Shonkwiler and Vela-Vick.

**Keywords:** Linking number. Gauss map. Degree.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Nenhuma volta. . . . .	12
Figura 2 – Uma volta. . . . .	12
Figura 3 – Duas voltas. . . . .	12
Figura 4 – Circunferência. . . . .	13
Figura 5 – Círculo. . . . .	13
Figura 6 – Exterior da circunferência. . . . .	13
Figura 7 – Superfície de Seifert em azul. . . . .	14
Figura 8 – Variedade de Seifert de uma subvariedade de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	14
Figura 9 – $Lk(K, L) = 0$ . . . . .	16
Figura 10 – $Lk(K, L) = 1$ . . . . .	16
Figura 11 – $Lk(K, L) = 2$ . . . . .	16
Figura 12 – $Lk(K, L) = -1$ . . . . .	16
Figura 13 – $Lk(K, L) = -2$ . . . . .	16
Figura 14 – $Lk(K, L) = 0$ . . . . .	16
Figura 15 – Motivação para construção de $N$ . . . . .	18
Figura 16 – Esfera $\mathbb{S}^2$ . . . . .	20
Figura 17 – Cilindro. . . . .	20
Figura 18 – Toro. . . . .	21
Figura 19 – $CK_R$ obtida de $CyK_R$ . . . . .	22
Figura 20 – $Lk_{\mathbb{S}^2}(K, L)$ . . . . .	24
Figura 21 – $Lk_{\mathbb{R}^3}(K, L)$ . . . . .	24
Figura 22 – Representação de $F^n$ em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	28
Figura 23 – Representação de $H^n$ em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	28
Figura 24 – Interseção da reta orientada $\overline{pq}$ com a esfera $\mathbb{S}^2(R)$ . . . . .	29
Figura 25 – Imagem de $T(R)$ por $\lambda_R$ . . . . .	30
Figura 26 – Representação de $\Gamma_R(p, q)$ e $\Gamma_{R'}(p, q)$ em $\mathbb{S}^2$ , com $R < R'$ . . . . .	30

## LISTA DE SÍMBOLOS

\$	Dólar
%	Porcentagem
£	Libra
¥	Ilene
€	Euro
§	Seção
©	Copyright
®	Marca Registrada

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	PRELIMINARES . . . . .	13
2.1	Variedades de Seifert . . . . .	13
2.2	Linking Number . . . . .	15
2.3	O linking number e o grau da aplicação de Gauss . . . . .	17
3	A INTEGRAL LINKING PARA O ESPAÇO EUCLIDIANO .	20
3.1	Hipersuperfícies Visíveis . . . . .	20
3.2	Variedades Cônicas . . . . .	21
3.3	A Integral Linking para o espaço euclidiano . . . . .	24
4	EXTENSÃO PARA O CASO HIPERBÓLICO . . . . .	27
4.1	Breve introdução à geometria do espaço hiperbólico . . . . .	27
4.2	A aplicação de Gauss hiperbólica . . . . .	28
4.3	Extensão do teorema de Shonkwiler e Vela-Vick para o caso hiperbólico . . . . .	33
5	CONCLUSÃO . . . . .	35
	REFERÊNCIAS . . . . .	36

## 1 INTRODUÇÃO

O nome Integral Linking é bastante conveniente, pois neste trabalho significará a fórmula integral que calcula o linking number entre duas subvariedades de uma hipersuperfície visível do espaço euclidiano ou hiperbólico. Mas, antes de tratarmos de integrais linking temos que falar sobre linking number.

Podemos pensar no linking number do seguinte modo. Imagine duas curvas fechadas em  $\mathbb{R}^3$ , podemos pensar no linking number entre elas como sendo o número de voltas que uma dá ao redor da outra. Veja as figuras abaixo:

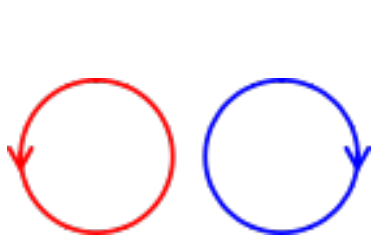


Figura 1: Nenhuma volta.

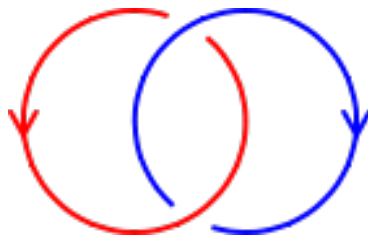


Figura 2: Uma volta.

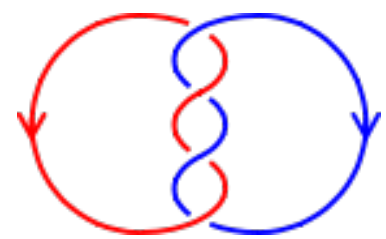


Figura 3: Duas voltas.

Shonkwiler e Vela-Vick (?) conseguiram derivar uma Integral Linking entre duas variedades no espaço euclidiano, com algumas hipóteses que serão esclarecidas no decorrer da dissertação, por causa disso fomos motivados a encontrar uma Integral Linking para duas variedades no espaço hiperbólico, com hipóteses semelhantes.

Tentamos seguir os mesmos passos que Shonkwiler e Vela-Vick (?), fazendo todas as adaptações necessárias e explicando com maiores detalhes alguns argumentos que eles utilizam, o capítulo 2 foi dedicado somente a estas explicações.

## 2 PRELIMINARES

Tendo em mente uma noção intuitiva do que é linking number, trataremos neste capítulo sobre a definição rigorosa dele. Não somente considerando curvas em  $\mathbb{R}^3$ , mas também espaços mais gerais como variedades diferenciáveis.

### 2.1 Variedades de Seifert

A seguir enunciaremos, contudo sem demonstração um teorema creditado a Frankl, Pontriagin e Seifert.

**Teorema 2.1.1** (Frankl-Pontriagin-Seifert). *Se  $K \subset \mathbb{R}^3$  é uma curva fechada e orientada, então existe  $S \subset \mathbb{R}^3$ , uma superfície orientada tal que  $\partial S = K$ . Uma superfície com essas propriedades é chamada de superfície de Seifert e será denotada por  $\overline{K}$ .*

**Observação 2.1.1.** *A superfície de Seifert não é única.*

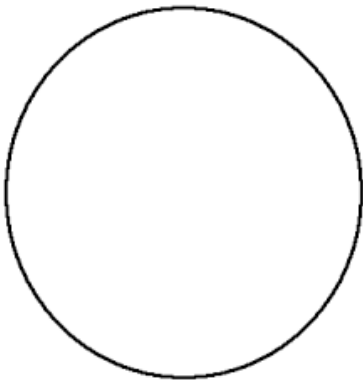


Figura 4: Circunferência.

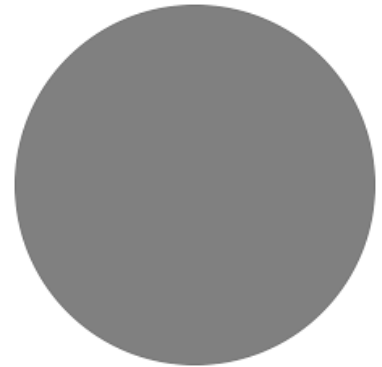


Figura 5: Círculo.

Na figura ?? temos o círculo, que é uma superfície de Seifert da circunferência na figura ??. Uma outra superfície de Seifert da circunferência é o seu exterior, veja a figura ?? abaixo:

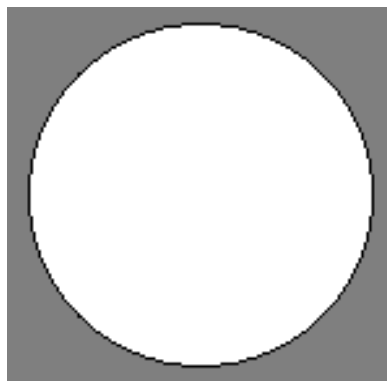


Figura 6: Exterior da circunferência.

De forma mais geral, podemos definir algo similar para o caso de variedades diferenciáveis.

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $N \subset M$  uma subvariedade orientada. Se existir uma variedade orientada  $P$  tal que  $\partial P = N$ , então  $P$  será chamada de variedade de Seifert de  $N$  e será denotada por  $\bar{N}$ .*

**Exemplo 1.** *Tome  $M = \mathbb{S}^2$  e  $N$  como sendo a curva do equador  $C$  com uma orientação dada. A variedade de Seifert  $\bar{N}$  de  $N$  pode ser qualquer uma das “calotas” determinadas por  $N$ . Veja a figura abaixo:*

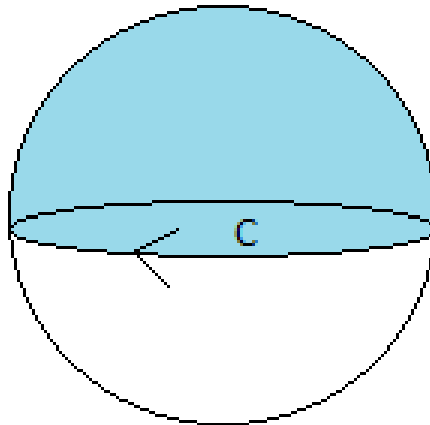


Figura 7: Superfície de Seifert em azul.

**Exemplo 2.** *Sejam  $M = \mathbb{S}^1$  e  $N = \{p, q\}$ . Podemos tomar como variedade de Seifert de  $N$  qualquer arco “ligando”  $p$  e  $q$ . Veja a figura abaixo:*

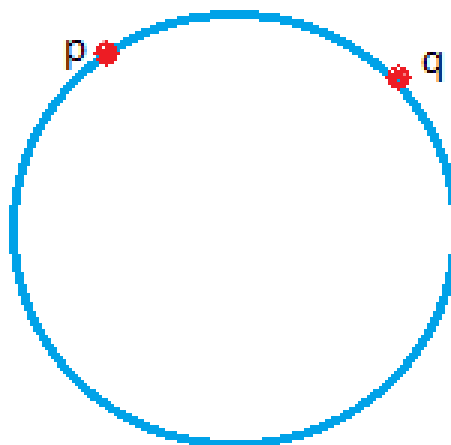


Figura 8: Variedade de Seifert de uma subvariedade de  $\mathbb{S}^1$ .

Agora, estamos prontos para dar uma definição mais rigorosa de linking number.

## 2.2 Linking Number

Daremos abaixo uma definição mais rigorosa para o linking number entre duas curvas de  $\mathbb{R}^3$ . Para definições alternativas do linking number veja Ricca e Nipoti (?).

**Definição 2.2.1.** *Dadas duas curvas fechadas e orientadas  $K$  e  $L$  em  $\mathbb{R}^3$ , o linking number  $Lk(K, L)$  é o número da interseção  $\overline{K} \cap L$ . Mais especificamente*

$$Lk(K, L) = \sum_{p \in \overline{K} \cap L} \epsilon_p$$

onde  $\epsilon_p \in \{-1, 1\}$  é determinado comparando as orientações  $T_p \overline{K} \oplus T_p L$  com a orientação canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

De forma mais geral, podemos definir o linking number entre duas variedades da seguinte forma.

**Definição 2.2.2.** *Dadas duas variedades compactas, conexas, orientadas e disjuntas  $K^k$  e  $L^l$  em  $M$ , uma variedade orientada de dimensão  $n = k + l + 1$  e tais que tanto  $K$  quanto  $L$  admite uma variedade de Seifert. Então,*

$$Lk(K, L) = \sum_{p \in \overline{K} \cap L} \epsilon_p,$$

onde  $\epsilon_p$  é obtido comparando as orientações, como anteriormente.

O linking number está bem-definido, ou seja, não depende da variedade de Seifert escolhida. Provemos essa afirmação.

*Demonstração.* Se  $\overline{K}_1$  e  $\overline{K}_2$  são variedades de Seifert para  $K$ , então  $\tilde{K} = \overline{K}_1 \cup \overline{K}_2$  é uma variedade compacta orientada em  $M$ , e assim ela representa uma classe de homologia em  $M$ . Então, o número de interseção (a nível de homologia)  $I(\tilde{K}, L) = 0$ , pois  $L$  é fronteira de  $\overline{L}$ , portanto  $L$  representa a classe de homologia nula assim

$$I(\tilde{K}, L) = [\tilde{K}] \cdot [L] = 0,$$

onde “ $\cdot$ ” representa o produto da interseção da homologia, para a variedade  $M$ . □

A seguir daremos vários exemplos de linking number. Muitos deles serão curvas em  $\mathbb{R}^3$ , pois exemplos desse tipo são bastante comuns e além disso várias observações importantes podem ser feitas, como por exemplo, a influência da orientação quando se soma os sinais dos pontos de interseção. É isso que é interessante, porque apesar de duas curvas em  $\mathbb{R}^3$  darem “voltas” ao redor uma da outra o linking number pode ser zero, pelo fato do sistema coordenado nos pontos de interseção terem orientações distintas quando comparados com o sistema canônico de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 3.** *Veja abaixo exemplos de linking numbers cujos sistemas coordenados são*



positivamente orientados com relação a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , sendo  $K$  a curva vermelha e  $L$  a curva azul:

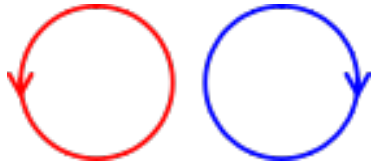


Figura 9:  $Lk(K, L) = 0$ .

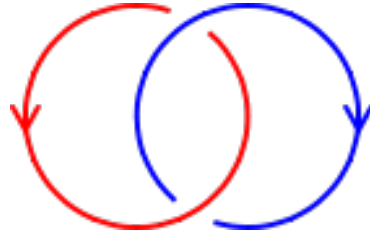


Figura 10:  $Lk(K, L) = 1$ .

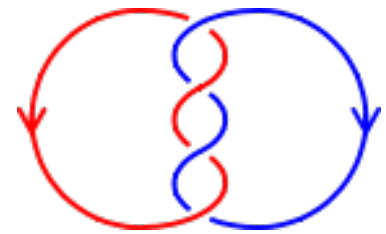


Figura 11:  $Lk(K, L) = 2$ .

**Exemplo 4.** Veja, também, alguns exemplos de linking numbers cujos sistemas coordenados são negativamente orientados:

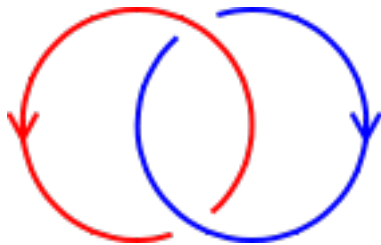


Figura 12:  $Lk(K, L) = -1$ .

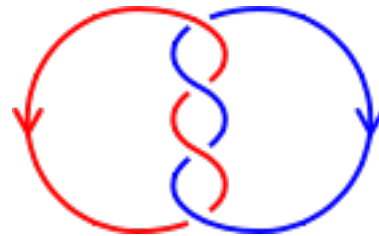


Figura 13:  $Lk(K, L) = -2$ .

Pode ocorrer do linking number entre duas curvas ser zero mesmo que uma dê voltas ao redor da outra, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 5.** Imagine duas curvas  $K$  e  $L$  em  $\mathbb{R}^3$ , em que uma dá duas voltas ao redor da outra, contudo os sistemas de coordenadas nesses pontos tem orientações opostas quando comparados com a orientação da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , portanto o linking number entre elas é zero. Veja a figura abaixo, onde  $K$  é a curva em vermelho e  $L$  é a curva em azul:

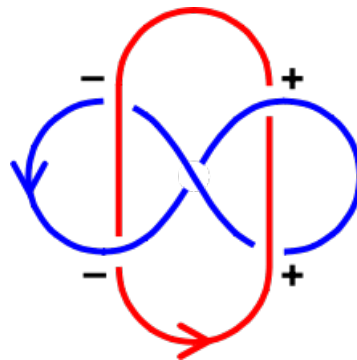


Figura 14:  $Lk(K, L) = 0$ .

O linking number da figura ?? é conhecido como Link de Whitehead. Para uma abordagem teoricamente mais profunda do linking number, com ferramentas mais sofisticadas de topologia algébrica veja Whitehead (?, p.509).

### 2.3 O linking number e o grau da aplicação de Gauss

Agora que temos uma definição rigorosa de linking number podemos nos concentrar em achar uma fórmula integral para calculá-lo. Mas, para tal iremos precisar de algumas “ferramentas” de Teoria do Grau. Claro, nos focaremos somente no necessário para nosso objetivo nessa dissertação, assim todos os teoremas de Teoria do Grau que enunciarmos não terão demonstração. Se o leitor quiser maiores detalhes sugerimos Ruiz e Outerelo (? , cap.3).

Seja  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável, sendo  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis compactas e orientadas, sendo ainda  $N^n$  conexa. O grau de  $f$  será denotado por  $\deg(f)$ .

Segue, abaixo, a definição de grau de uma aplicação diferenciável.

**Definição 2.3.1.** *Sejam  $M^n, N^n$  e  $f : M^n \rightarrow N^n$  como acima. Então, para cada valor regular  $a \in N^n$  de  $f$  temos que*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_x(f),$$

ou seja, o somatório do lado direito da igualdade acima não depende da escolha do valor regular de  $f$ . Onde  $\text{sign}_x(f)$  denota o sinal do determinante jacobiano de  $f$  no ponto  $x$ .

Enunciaremos, abaixo, dois teoremas bastante conhecidos de Teoria do Grau. São eles:

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável entre variedades compactas, conexas e orientadas. Então,*

$$\int_{M^n} f^* \omega = \int_{N^n} \omega,$$

para toda  $n$ -forma  $\omega$  sobre  $N^n$ .

**Teorema 2.3.2** (Teorema da Fronteira). *Seja  $X^{n+1}$  uma variedade compacta, orientada com fronteira  $\partial X^{n+1} = Y$ , e seja  $N$  uma variedade compacta, conexa e orientada. Seja  $H : X^{n+1} \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Então,*

$$\deg(H|_Y) = 0.$$

Para maiores detalhes da definição bem como as demonstrações dos dois teoremas acima veja Ruiz e Outerelo (? , cap.3), e para a definição de grau para uma aplicação contínua veja Bredon (? , p.186).

Agora, estamos prontos para demonstrar um dos teoremas mais importantes dessa dissertação.

**Teorema 2.3.3.** *Se  $K$  e  $L$  são curvas fechadas e orientadas em  $\mathbb{R}^3$ , então  $Lk(K, L)$  é*

igual ao grau da aplicação de Gauss  $\psi : K \times L \rightarrow \mathbb{S}^2$ :

$$\psi(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|},$$

portanto,

$$\deg(\psi) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^2} \int_{K \times L} \psi^* \omega,$$

sendo  $\omega$  uma forma volume sobre  $\mathbb{S}^2$ . Assim,

$$Lk(K, L) = \deg(\psi) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^2} \int_{K \times L} \psi^* \omega.$$

*Demonstração.* Note que  $K \cap L = \emptyset$ , daí,  $\overline{K} \cap L \subset \text{int}(\overline{K})$ . Assim, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(m; \epsilon) \subset \text{int}(\overline{K})$  para cada  $m \in \overline{K} \cap L$  e portanto, podemos definir o seguinte conjunto

$$N = (\overline{K} \times L) \setminus \bigcup_{m \in \overline{K} \cap L} B(m; \epsilon).$$

Veja a figura ??:

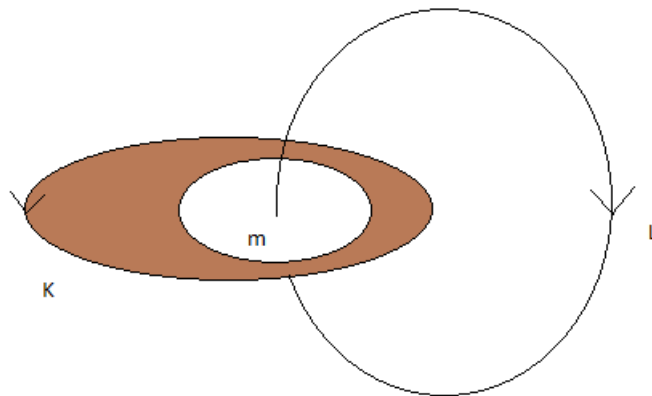


Figura 15: Motivação para construção de N.

Definamos uma aplicação  $\tilde{\psi} : N \rightarrow \mathbb{S}^2$  por

$$\tilde{\psi}(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|},$$

observe que  $\tilde{\psi}$  está bem-definida. Note ainda que  $\partial N = (K \times L) \cup \bigcup_{m \in \overline{K} \cap L} \mathbb{S}^2(m; \epsilon)$ . Então,

$$\deg(\tilde{\psi}|_{\partial N}) = \deg(\psi) + \deg(\tilde{\psi}|_{\bigcup_{m \in \overline{K} \cap L} \mathbb{S}^2(m; \epsilon)}) = 0,$$

logo,

$$\deg(\psi) = -\deg(\tilde{\psi}|_{\bigcup_{m \in \overline{K} \cap L} \mathbb{S}^2(m; \epsilon)}).$$

Coloquemos sobre cada  $\mathbb{S}^2(m; \epsilon)$  a orientação oposta a orientação de  $N$ . Segue que ,

$$\deg(\tilde{\psi}|_{\bigcup_{m \in \bar{K} \cap L} \mathbb{S}^2(m; \epsilon)}) = -Lk(K, L).$$

E portanto,

$$\deg(\psi) = Lk(K, L).$$

□

### 3 A INTEGRAL LINKING PARA O ESPAÇO EUCLIDIANO

Essa dissertação se baseou no artigo “HIGHER-DIMENSIONAL LINKING INTEGRALS”, dos autores Clayton Shonkwiler e David Shea Vela-Vick. Lá Shonkwiler e Vela-Vick derivaram uma fórmula integral para o linking number entre duas subvariedades  $K^k$  e  $L^l$  nulo-homólogas, orientadas, fechadas e disjuntas de uma hipersuperfície visível  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tais que  $k + l = n - 1$ .

Dizer que uma variedade é nulo-homóloga significa que ela é fronteira de uma “cadeia” (veja Hatcher (?) para maiores detalhes sobre). Porém, aqui nos concentraremos nas variedades que admitem variedade de Seifert, para não entrar muito profundamente em topologia algébrica.

#### 3.1 Hipersuperfícies Visíveis

Primeiro, comecemos dando a definição de hipersuperfície visível, que é um dos conceitos mais importantes desse trabalho.

**Definição 3.1.1.** Dizemos que uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é visível de um ponto  $p$  se todo raio que sai de  $p$  ou intersecta  $M^n$  transversalmente ou não a intersecta.

**Observação 3.1.1.** A menos de uma translação, podemos considerar  $p = 0$  e chamaremos uma hipersuperfície visível do ponto  $p$  apenas de hipersuperfície visível.

**Exemplo 6.** Veja, abaixo, alguns exemplos de hipersuperfícies visíveis:

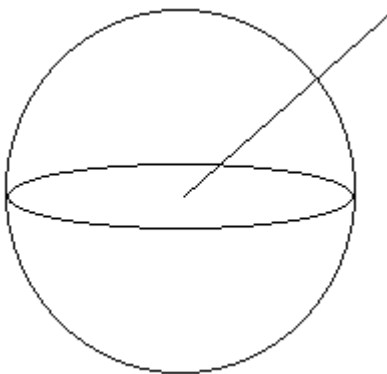


Figura 16: Esfera  $\mathbb{S}^2$ .

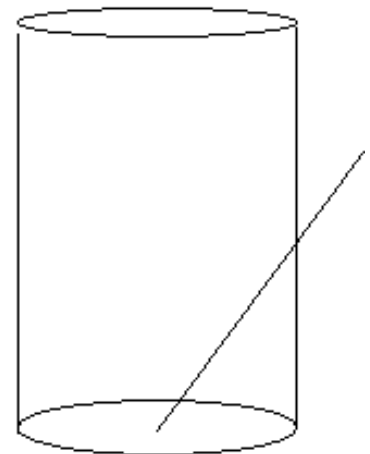


Figura 17: Cilindro.

Interessante notar que uma hipersuperfície ser visível de um ponto não significa que será visível de outro, por exemplo, se tomássemos um ponto exterior a esfera na figura ?? com raio maior que 1 então existiriam pontos que teriam raios tangenciando a esfera. E o mesmo vale para o cilindro.

**Exemplo 7.** Veja agora um exemplo de hipersuperfície que não é visível:

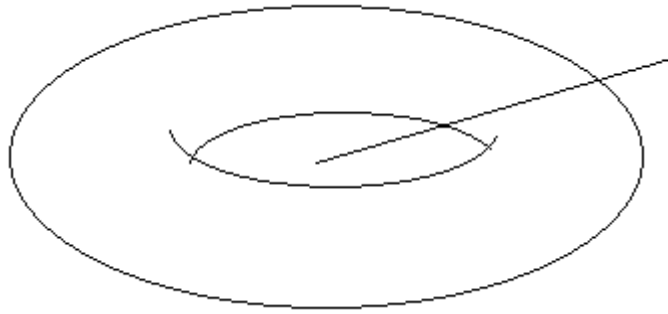


Figura 18: Toro.

### 3.2 Variedades Cônicas

Shonkwiler e Vela-Vick (?) são bastante sucintos, explicando seus argumentos de forma muito vaga. Portanto, na busca pelo bom entendimento e de uma forma mais completa de explicar os principais teoremas de Shonkwiler e Vela-Vick (?) fomos levados a estender o conceito de diferenciabilidade e um pouco de teoria do grau para uma classe de conjuntos com uma característica peculiar. Tais conjuntos denominamos de “Variedades Cônicas” e sua definição segue abaixo.

**Observação 3.2.1.** *Em toda essa subseção  $K$  e  $L$  denotarão variedades diferenciáveis, compactas, conexas, orientadas e disjuntas.*

**Definição 3.2.1.** *Considere o cone  $\{\tau x : x \in K, 0 \leq \tau \leq R\}$  sobre  $K$  e o conjunto  $R \cdot \bar{K} = \{Rx : x \in \bar{K}\}$ . Então, definamos o seguinte conjunto*

$$CK_R = \{\tau x : x \in K, 0 \leq \tau \leq R\} \cup R \cdot \bar{K}.$$

*Chamaremos o conjunto  $CK_R$  de variedade cônica.*

Repare que uma variedade cônica não é uma variedade diferenciável, contudo ainda precisamos de diferenciabilidade. Então, para contornar essa deficiência, adotamos um novo conceito de diferenciabilidade, que nos permite “diferenciar” em variedades cônicas. Vale ressaltar agora que esse é um dos passos mais importantes nessa dissertação, pois Shonkwiler e Vela-Vick não o fazem, e é justamente os resultados que conseguiremos aqui para variedades cônicas que tornam possível expressar uma fórmula integral que calcula o linking number entre duas variedades sob as hipóteses de Shonkwiler e Vela-Vick (?). A seguir daremos a nova definição de diferenciabilidade e estenderemos algumas propriedades do grau de uma aplicação diferenciável no sentido usual para o nosso sentido.

**Definição 3.2.2.** *Uma aplicação  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  é diferenciável se  $f$  é contínua e  $f \circ \pi$  é diferenciável, onde  $\pi : CyK_R \times L \rightarrow CK_R \times L$  é uma aplicação definida numa variedade com fronteira  $CyK_R \times L$ . Onde  $CyK_R$  é obtida do cilindro  $[0, R] \times K$  “tampado” em  $\{R\} \times K$  por uma variedade  $\tilde{K}$  cuja fronteira é  $\{R\} \times K$ . Em outras palavras,  $CK_R$  é obtida de  $CyK_R$  pelo colapso da fronteira  $\{0\} \times K$ .*

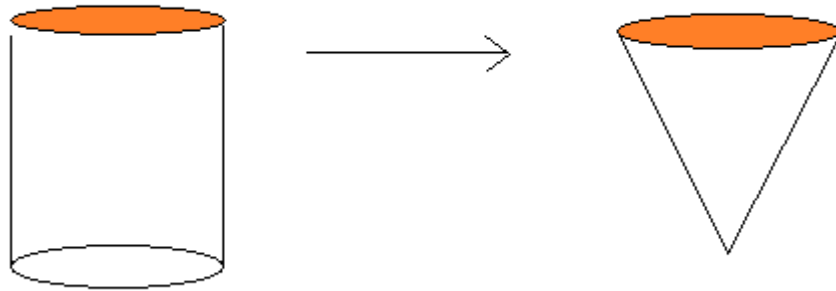


Figura 19:  $CK_R$  obtida de  $CyK_R$ .

**Lema 3.2.1.** *Uma aplicação  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  é diferenciável no sentido acima, então  $\mathcal{H}^n(f(\{v\} \times L)) = 0$ , onde  $v$  é o vértice da variedade cônica e  $\mathcal{H}$  é a medida de Hausdorff.*

O lema acima é importante, porque através dele faz sentido falar de valor regular, no sentido que demos acima. Entretanto, não o demonstraremos aqui. Veja Folland (?, cap.11) para relembrar das propriedades de medida de Hausdorff.

A seguir daremos a definição de valor regular para aplicações diferenciáveis no sentido que demos anteriormente.

**Definição 3.2.3.** *Dizemos que  $y$  é um valor regular de uma aplicação  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciável no sentido acima, se  $y \in \mathbb{S}^n \setminus f(\{v\} \times L)$  e  $y$  é um valor regular de  $f|_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L}$  no sentido usual.*

Podemos, então, enunciar a seguinte proposição

**Proposição 3.2.1.** *Se  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  é uma aplicação diferenciável no sentido que definimos. Então, existe  $y \in \mathbb{S}^n \setminus f(\{v\} \times L)$  um valor regular para  $f$  e além disso temos*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x(f),$$

como no caso de variedades.

Não demonstraremos a proposição acima, porque é bastante técnica e usa muitas ferramentas de topologia algébrica, tornando o texto mais longo e enfadonho, o que é desnecessário.

A proposição que enunciaremos a seguir é uma adaptação do Teorema 17.35 de Lee (?, p.457) para aplicações  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciáveis no sentido que definimos anteriormente. Com ela poderemos expressar numa forma integral o grau de aplicações como  $f$ .

**Observação 3.2.2.** *Note que  $(CK_R \setminus \{v\}) \times L$  é uma variedade diferenciável e que  $\pi : (CyK_R \setminus \partial CyK_R) \times L \rightarrow (CK_R \setminus \{v\}) \times L$  é um difeomorfismo de fato, então  $f|_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L}$  é diferenciável no sentido usual, e portanto, usaremos a seguinte igualdade como definição daqui por diante*

$$\int_{CK_R \times L} f^* \omega = \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega.$$

**Proposição 3.2.2.** *Se  $f : CK_R \times L \rightarrow \mathbb{S}^n$  é diferenciável no sentido acima, então para toda forma  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$  tal que  $\int_{\mathbb{S}^n} \omega \neq 0$  temos*

1.  $\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega = k \cdot \int_{\mathbb{S}^n} \omega$ ;
2. *Se  $y \in \mathbb{S}^n \setminus f(\{v\} \times L)$  é um valor regular de  $f$ , então  $k = \deg(f)$ .*

*Demonstração.* (1) Verifiquemos que  $\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega < \infty$ . Observe que  $\pi : CyK_R \rightarrow CK_R$  é um difeomorfismo no complementar de  $\{0\} \times K \times L$ , então

$$\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega = \int_{(CyK_R \setminus \partial CyK_R) \times L} (f \circ \pi)^* \omega = \int_{CyK_R \times L} (f \circ \pi)^* \omega.$$

O último termo é finito, pois estamos integrando sobre uma variedade compacta. A fim de provar que

$$\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega = k \cdot \int_{\mathbb{S}^n} \omega,$$

onde  $k$  não depende de  $\omega$  façamos o seguinte. Primeiro, tome  $\theta$  tal que  $\int_{\mathbb{S}^n} \theta = 1$  e chame  $\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \theta = k$ . Então, para toda forma  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$  temos que  $\omega$  é cohomóloga a  $a\theta$  onde  $a = \int_{\mathbb{S}^n} \omega$ . Portanto,

$$\omega - a\theta = d\eta.$$

Sobre  $(CK_R \setminus \{v\}) \times L$  (que é uma variedade diferenciável) temos que

$$f^* \omega - a f^* \theta = d f^* \eta$$

e de fato

$$\int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \omega - \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} a f^* \theta = \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} d f^* \eta.$$

Mas, usando novamente o fato de  $\pi$  ser um difeomorfismo no complementar da fronteira segue que

$$\int_{CyK_R \times L} (f \circ \pi)^* \omega - a \cdot \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \theta = \int_{CyK_R \times L} d(f \circ \pi)^* \eta.$$

Segue do Teorema de Stokes que

$$\int_{CyK_R \times L} d(f \circ \pi)^* \eta = \int_{\partial CyK_R \times L} (f \circ \pi)^* \eta = 0$$

A razão para a integral acima se anular é que  $\partial CyK_R \times L = \{0\} \times K \times L$  e  $\pi$  colapsa  $\{0\} \times K$  em um ponto, portanto, quando calculamos o pull-back  $(f \circ \pi)^* \eta$  de qualquer forma  $\eta$  decompos o espaço veorial tangente num ponto  $(p, q)$  sobre a fronteira de  $CyK_R \times L$  numa soma direta  $T_p K \oplus T_q L$  e tomamos a base formada a partir de uma base de  $T_p K$  e  $T_q L$ . Contudo, a diferencial de  $f \circ \pi$  toma a base de  $T_p K$  em zero e isto é suficiente para concluir que o pull-back é zero.



Isto prova que

$$\int_{CyK_R \times L} (f \circ \pi)^* \omega = a \cdot \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} f^* \theta$$

e portanto,

$$\int_{CK_R \times L} f^* \omega = a \cdot k = k \cdot \int_{S^n} \omega.$$

(2) Veja Lee (?, p.457) Teorema 17.35 item (b). □

### 3.3 A Integral Linking para o espaço euclidiano

Sejam  $K^k$  e  $L^l$  duas subvariedades orientadas, compactas, conexas e disjuntas de uma hipersuperfície visível  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tais que  $k + l = n - 1$ . Segue da definição de hipersuperfície visível e do modo como definimos variedades cônicas que vale as seguintes igualdades

$$Lk_{\mathbb{R}^{n+1}}(CK_R, L) = Lk_{M^n}(K, L),$$

para cada  $R > 1$ .

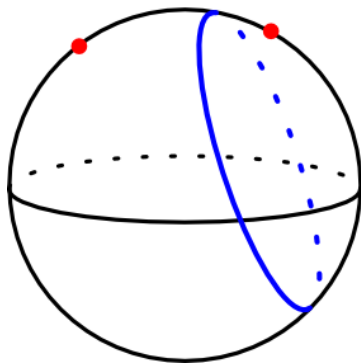


Figura 20:  $Lk_{\mathbb{S}^2}(K, L)$

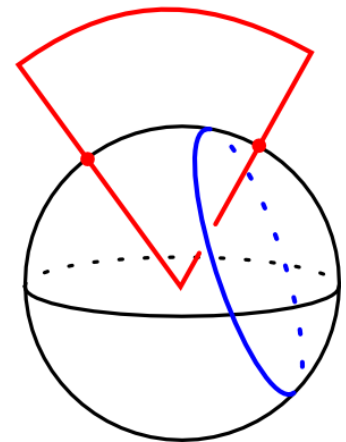


Figura 21:  $Lk_{\mathbb{R}^3}(K, L)$

Podemos nos convencer disso observando um caso simples onde  $M = \mathbb{S}^2$ ,  $K = \{p, q\}$  e  $L$  uma curva em  $\mathbb{S}^2$ , veja a figura ???. Para qualquer segmento  $\{\tau x : x \in \overline{K}\}$  temos que  $\tau x$  não pertence a  $M^n$  se  $\tau \neq 1$ , daí  $L$  intersecta  $\overline{CK_R}$  (veja a figura ??) somente em  $\overline{K}$ . Assim, segue a igualdade acima.

Uma adaptação do Teorema 2.3.3. nos dá que

$$Lk_{\mathbb{R}^{n+1}}(CK_R, L) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} \psi^* \omega,$$

Mas, por definição temos que

$$\int_{CK_R \times L} \psi^* \omega = \int_{(CK_R \setminus \{v\}) \times L} \psi^* \omega.$$

Logo,

$$Lk_{\mathbb{R}^{n+1}}(CK_R, L) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{CK_R \times L} \psi^* \omega.$$

Encerraremos este capítulo com a Integral Linking que Shonkwiler e Vela-Vick (? , p.2) encontraram. Mas, antes enunciaremos o seguinte teorema

**Teorema 3.3.1.** *Sejam  $K^k, L^l \subset \mathbb{R}^N$  subvariedades compactas, conexas, orientadas e disjuntas tais que  $k + l = N - 1$ . Sejam ainda  $x : \mathbb{R}^k \rightarrow K$  e  $y : \mathbb{R}^l \rightarrow L$  coordenadas locais orientadas para  $K$  e  $L$ , onde  $s = (s_1, \dots, s_k)$  e  $t = (t_1, \dots, t_l)$  dão as coordenadas sobre  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^l$ , respectivamente. Então,*

$$Lk(K, L) = \frac{(-1)^{k+1}}{\text{vol } \mathbb{S}^{N-1}} \int_{K \times L} \frac{1}{|x - y|^N} [x - y, dx, dy],$$

onde

$$[x - y, dx, dy] = \det \left( x - y, \frac{\partial x}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial s_k}, \frac{\partial y}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial t_l} \right) ds dt.$$

Para demonstração do teorema acima veja Shonkwiler e Vela-Vick (? , p.3).

**Teorema 3.3.2** (Shonkwiler-(Vela-Vick)). *Sejam  $K$  e  $L$  como no início desta subseção. Então, o limite*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{CK_R \times L} \psi^* \omega$$

existe e é igual a  $Lk(K, L)$ . Onde  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ .

*Demonstração.* Do teorema 3.3.1. temos que

$$Lk(CK_R, L) = \frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{CK_R \times L} \frac{1}{|\xi - y|^{n+1}} [\xi - y, d\xi, dy]$$

Segue que

$$\begin{aligned} Lk(CK_R, L) &= \frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{\{\tau x : x \in K, \tau \in [0, R]\} \times L} \frac{1}{|\tau x - y|^{n+1}} [\tau x - y, d(\tau x), dy] \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{\bar{K} \times L} \frac{1}{|Rz - y|^{n+1}} [Rz - y, d(Rz), dy]. \end{aligned}$$

Podemos supor que  $k \leq l$  e  $n > 1$ , assim  $k + 2 < n + 1$ , logo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{\bar{K} \times L} \frac{1}{|Rz - y|^{n+1}} [Rz - y, d(Rz), dy] \rightarrow 0.$$

Portanto, podemos considerar o limite  $\lim_{R \rightarrow \infty} Lk(\overline{CK}_R, L)$  como sendo a integral

$$\frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{CK \times L} \frac{1}{|\tau x - y|^{n+1}} [\tau x - y, d(\tau x), dy].$$

Onde  $CK = \{\tau x : x \in K, 0 \leq \tau < \infty\}$ . Como  $Lk(K, L) = Lk(\overline{CK}_R, L)$  para todo  $R > 1$ , segue que

$$Lk(K, L) = \frac{(-1)^k}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{CK \times L} \frac{1}{|\tau x - y|^{n+1}} [\tau x - y, d(\tau x), dy].$$

Note que

$$\begin{aligned} [\tau x - y, d(\tau x), dy] &= d\tau \wedge \left[ \det \left( \tau x - y, x, \tau \frac{\partial x}{\partial s_1}, \dots, \tau \frac{\partial x}{\partial s_k}, \frac{\partial y}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial t_l} \right) ds dt \right] \\ &= (-1)^k \tau^k d\tau \wedge [x, dx, y, dy]. \end{aligned}$$

Onde

$$[x, dx, y, dy] = \det \left( x, \frac{\partial x}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial s_k}, \frac{\partial y}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial t_l} \right) ds dt.$$

Resulta que

$$Lk(K, L) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{K \times L} \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{|\tau x - y|^{n+1}} d\tau \wedge [x, dx, y, dy].$$

Observe que

$$|\tau x - y|^{n+1} = (|y|^2 + \tau^2|x|^2 - 2\tau|x||y|\cos\alpha)^{\frac{n+1}{2}},$$

onde  $\alpha = \alpha(x, y)$  é o ângulo (em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) entre  $x$  e  $y$ .

Agora, façamos a substituição  $u = \tau - \frac{|y|}{|x|} \cos\alpha$  donde

$$\int_{\tau=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{|\tau x - y|^{n+1}} d\tau = \frac{1}{|x|^{n+1}} \int_{-\frac{|y|}{|x|} \cos\alpha}^{\infty} \frac{\left(u + \frac{|y|}{|x|} \cos\alpha\right)^k}{\left(u^2 + \frac{|y|^2}{|x|^2} \sin^2\alpha\right)^{\frac{n+1}{2}}} du.$$

Substituindo  $u$  por  $-\frac{|y|}{|x|} \sin\alpha \cot\theta$  obtemos, depois de alguns cálculos enfadonhos,

$$\int_{\tau=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{|\tau x - y|^{n+1}} d\tau = \frac{1}{|x|^{k+1}|y|^{l+1} \sin^n\alpha} \int_{\theta=\alpha}^{\pi} \sin^k(\theta - \alpha) \sin^l\theta d\theta.$$

Portanto,

$$Lk(K, L) = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^n} \int_{K \times L} \frac{\Omega_{k,l}(\alpha)}{|x|^{k+1}|y|^{l+1} \sin^n\alpha} [x, dx, y, dy]$$

onde

$$\Omega_{k,l}(\alpha) = \int_{\theta=\alpha}^{\pi} \sin^k(\theta - \alpha) \sin^l\theta d\theta.$$

□

## 4 EXTENSÃO PARA O CASO HIPERBÓLICO

Neste capítulo, antes de tratar sobre a Integral Linking para o espaço hiperbólico, vamos comentar alguns conceitos básicos, para lembrar a geometria do espaço hiperbólico, bem como o modelo (já que há mais de um) que iremos adotar nessa dissertação. Para uma abordagem muito mais completa sobre o espaço hiperbólico, do que a que faremos aqui, recomendamos Ratcliffe (? , cap.3).

### 4.1 Breve introdução à geometria do espaço hiperbólico

Quando se fala da geometria de qualquer espaço, o conceito mais importante para se começar é talvez o produto interno sobre ele definido. Pensando dessa forma, começaremos definindo o produto interno Lorentziano.

**Definição 4.1.1.** *Seja a aplicação bilinear  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

*A aplicação assim definida é chamada de produto interno Lorentziano.*

Assim, tomando  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ . A norma Lorentziana é definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

É interessante notar que, diferente do produto interno euclidiano, podemos ter  $\|x\| < 0$ .

**Observação 4.1.1.** *Se  $\|x\|$  for imaginário positivo denotaremos o seu valor absoluto por  $|||x|||$ .*

**Definição 4.1.2.** *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  quaisquer. O número real  $\eta(x, y)$  com a propriedade*

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

*é chamado de ângulo hiperbólico entre  $x$  e  $y$ .*

Para mais detalhes sobre ele recomendamos Ratcliffe (? , cap.3).

O conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = -1\}$  é chamado de esfera de raio imaginário unitário e será denotado por  $F^n$ . É importante notar que  $F^n$  tem duas componentes conexas, para ver isto basta observar que  $x_{n+1}^2 = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$ , daí teremos dois conjuntos, um tal que  $x_{n+1} > 0$  e o outro tal que  $x_{n+1} < 0$ . Veja a figura ?? abaixo:

**Definição 4.1.3.** *O conjunto  $\{x \in F^n : x_{n+1} > 0\}$  é chamado de espaço hiperbólico, e será denotado por  $H^n$ .*

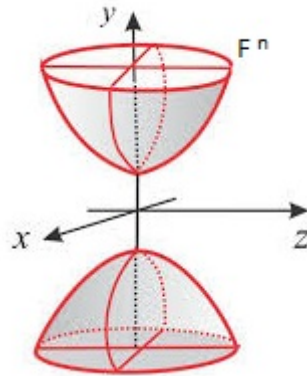


Figura 22: Representação de  $F^n$  em  $\mathbb{R}^3$ .

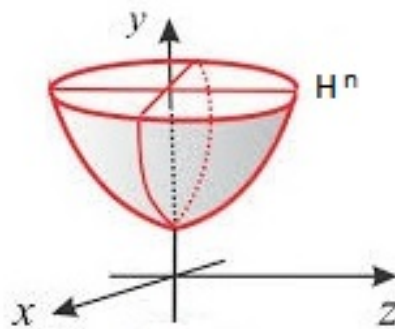


Figura 23: Representação de  $H^n$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 4.1.4.** *Uma reta hiperbólica de  $H^n$  é a interseção de  $H^n$  com um subespaço 2-dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

O disco aberto unitário em  $\mathbb{R}^n$  é definido como sendo o conjunto  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ .

**Definição 4.1.5.** *Seja a aplicação  $\mu : D^n \rightarrow H^n$  dada por*

$$\mu(x) = \frac{x + e_{n+1}}{\|x + e_{n+1}\|}.$$

*Tal aplicação é chamada de projeção gnomônica.*

**Definição 4.1.6.** *A métrica  $d_D : D^n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}$  sobre  $D^n$  é dada por*

$$d_D(x, y) = \eta(\mu(x), \mu(y)).$$

**Observação 4.1.2.** *O espaço métrico consistindo de  $D^n$  junto com a métrica  $d_D$  é chamado de modelo do disco projetivo do  $n$ -espaço hiperbólico.*

## 4.2 A aplicação de Gauss hiperbólica

Relembre o Teorema 2.3.3. do qual temos que o grau da aplicação de Gauss calcula o linking number entre duas curvas fechadas e orientadas de  $\mathbb{R}^3$ . Agora, queremos saber se há algo semelhante para o espaço hiperbólico, ou seja, se podemos definir uma

“aplicação de Gauss hiperbólica” e se com ela poderemos conseguir um resultado semelhante, isto é, se o grau de tal aplicação calcula o linking number entre subvariedades no espaço hiperbólico.

Antes, vamos relembrar os passos para se contruir a aplicação de Gauss euclidiana, pois os mesmos passos seguiremos para construir a aplicação de Gauss hiperbólica.

Primeiro, sejam  $K$  e  $L$  duas curvas fechadas e orientadas em  $\mathbb{R}^3$ , tome  $p \in K$  e  $q \in L$ . Intersecte o reta orientada  $\overline{pq}$  com a esfera  $\mathbb{S}^2(R)$ , onde  $R$  é tal que  $K, L \subset B_R(0)$ . Assim, temos uma aplicação  $K \times L \rightarrow \mathbb{S}^2(R)$ . Veja a figura ??.

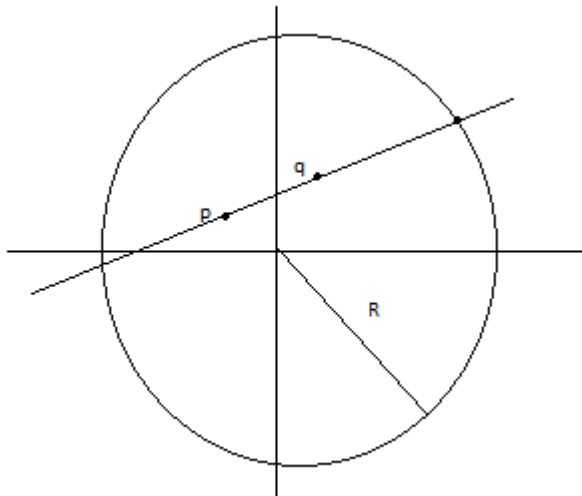


Figura 24: Interseção da reta orientada  $\overline{pq}$  com a esfera  $\mathbb{S}^2(R)$ .

Segundo, seja  $T(R) = \overline{pq} \cap \mathbb{S}^2(R)$ . Faz sentido em falar de  $T(R)$ , porque  $K, L \subset B_R(0)$ , logo a reta  $\overline{pq}$  intersecta de fato a esfera  $\mathbb{S}^2(R)$ . Lembre que a aplicação de Gauss é dada por

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{|x - y|},$$

claro que num conjunto onde essa expressão faça sentido. O importante a observar é que a sua imagem está contido em  $\mathbb{S}^2$ , então nosso próximo passo é tomar uma aplicação de  $\mathbb{S}^2(R)$  para  $\mathbb{S}^2$ . Assim, tome a aplicação  $\lambda_R : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por

$$\lambda_R(x) = \frac{x}{R}.$$

E então aplique  $\lambda_R$  em  $T(R)$ . Veja a figura ??.

Assim, temos uma aplicação  $\Gamma_R : K \times L \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Por fim, fazendo  $R \rightarrow \infty$  implica que  $T(R) \rightarrow T$ , onde  $T$  é o ponto de interseção do raio paralelo a  $\overline{pq}$ , com mesma orientação que inicia na origem, com a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Veja a figura ??.

Ou seja,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_R = \Gamma$  aplicação de Gauss euclidiana.

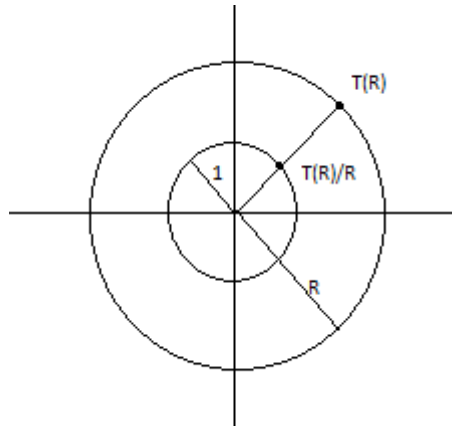


Figura 25: Imagem de  $T(R)$  por  $\lambda_R$ .

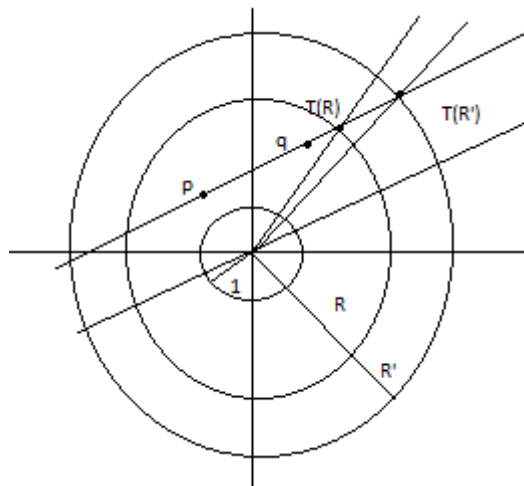


Figura 26: Representação de  $\Gamma_R(p, q)$  e  $\Gamma_{R'}(p, q)$  em  $\mathbb{S}^2$ , com  $R < R'$ .

Agora, usaremos os mesmos passos para o espaço hiperbólico  $H^3$ . Estamos usando  $n = 3$  por simplicidade já que para qualquer  $n > 1$  a argumentação seria a mesma, só que com mais coordenadas.

Sejam  $K^k, L^l \subset H^3$  subvariedades compactas, orientadas e disjuntas tais que  $k + l = 2$ . Tome  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in K$  e  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in L$ . Para não deixar a notação muito carregada denotaremos as três primeiras componentes de qualquer ponto  $p \in H^3$  por  $\bar{p}$ . Assim, temos  $p = (\bar{p}, p_4)$  e  $v = (\bar{v}, v_4)$ . Da definição de  $H^3$  temos que  $p_4 = \sqrt{1 + |\bar{p}|^2}$  e  $v_4 = \sqrt{1 + |\bar{v}|^2}$ .

Agora, iremos determinar a reta hiperbólica que passa através de  $p$  e  $v$ . Por definição, ela deve ser a interseção do plano  $\delta p + \gamma v$  com o espaço hiperbólico  $H^3$ . Segue que,

$$(\delta p_4 + \gamma v_4)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\delta p_i + \gamma v_i)^2.$$

Depois de algumas manipulações algébrica temos que

$$\delta^2 + \gamma^2 + 2\delta\gamma\langle p, v \rangle - 1 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau se olharmos  $\delta$  como a incógnita, daí, suas soluções são

$$\delta_{1,2} = -\gamma\langle p, v \rangle \pm \sqrt{\gamma^2(\langle p, v \rangle^2 - 1) + 1}.$$

A solução que temos que tomar deve satisfazer  $\gamma = 0 \Rightarrow \delta = 1$  e  $\gamma = 1 \Rightarrow \delta = 0$ . Logo, a expressão que devemos tomar é

$$\delta(\gamma) = -\gamma\langle p, v \rangle + \sqrt{\gamma^2(\langle p, v \rangle^2 - 1) + 1}.$$

Façamos a mudança de  $\gamma$  para  $-\gamma$  apenas para podermos trabalhar com  $\delta$  como uma função crescente de  $\gamma$ . Portanto, os pontos pertencentes a  $(\delta p + \gamma v) \cap H^3$  tem coordenadas

$$\delta(\gamma)p - \gamma v,$$

onde  $\delta(\gamma) = \gamma\langle p, v \rangle + \sqrt{\gamma^2(\langle p, v \rangle^2 - 1) + 1}$ .

Segue abaixo a definição de esfera hiperbólica.

**Definição 4.2.1.** *O conjunto  $\{p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in H^3 : p_4 = R\}$  é a esfera hiperbólica de raio  $R$  e será denotado por  $\mathbb{S}_H^2(R)$ .*

Agora que sabemos a expressão da reta hiperbólica que passa através de  $p$  e  $v$  e temos a definição de esfera hiperbólica, então vamos encontrar o ponto de interseção entre os dois conjuntos. Ora, para fazer isso basta resolvermos a equação

$$\delta(\gamma)p_4 - \gamma v_4 = R.$$

Algumas manipulações algébricas e a equação acima torna-se

$$\frac{R + \gamma v_4}{p_4} = \gamma\langle p, v \rangle + \sqrt{\gamma^2(\langle p, v \rangle^2 - 1) + 1}.$$

Fazendo  $A = v_4 - \langle p, v \rangle p_4$ ,  $B = p_4$  e  $C = \langle p, v \rangle^2 - 1$  resulta que

$$\frac{R + \gamma A}{B} = \sqrt{\gamma^2 C + 1}.$$

Algumas manipulações algébricas e temos a seguinte equação em  $\gamma$

$$\gamma^2 \left( C - \frac{A^2}{B^2} \right) - 2\gamma \frac{AR}{B^2} + 1 - \frac{R^2}{B^2} = 0,$$

que tem como solução

$$\gamma_{1,2} = \frac{AR \pm B\sqrt{A^2 + CR^2 - CB^2}}{CB^2 - A^2}.$$



Precisamos verificar que  $CB^2 - A^2 < 0$ . Note que

$$CB^2 - A^2 = -p_4 - v_4 + 2p_4v_4\langle p, v \rangle.$$

Então, provemos o seguinte teorema

**Teorema 4.2.1.**  $CB^2 - A^2 \leq 0$ . Valendo a igualdade se, e somente se,  $p = v$ .

*Demonstração.* Escreva

$$-p_4 - v_4 + 2p_4v_4\langle p, v \rangle = 1 - (p_4^2 - 1)(v_4^2 - 1) - p_4v_4 + 2p_4v_4\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle,$$

onde  $\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle$  é o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^3$  para  $\bar{p}$  e  $\bar{v}$ . Lembrando que  $p_4 = \sqrt{1 + |\bar{p}|^2}$  e  $v_4 = \sqrt{1 + |\bar{v}|^2}$ , segue que

$$\begin{aligned} -p_4 - v_4 + 2p_4v_4\langle p, v \rangle &= -|\bar{p}|^2|\bar{v}|^2 - p_4v_4 + 2p_4v_4\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle + 1 \\ &= -2|\bar{p}|^2|\bar{v}|^2 - |\bar{p}|^2 - |\bar{v}|^2 + 2\sqrt{1 + |\bar{p}|^2}\sqrt{1 + |\bar{v}|^2}\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Young temos que a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\left(1 + \frac{1}{|\bar{p}|^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{|\bar{v}|^2}\right) \geq 2\sqrt{1 + \frac{1}{|\bar{p}|^2}}\sqrt{1 + \frac{1}{|\bar{v}|^2}}.$$

Daí, a igualdade vale se, e somente se,  $p = v$ . Ora, essa desigualdade é equivalente a

$$2|\bar{p}|^2|\bar{v}|^2 + |\bar{p}|^2 + |\bar{v}|^2 \geq 2\sqrt{1 + |\bar{p}|^2}\sqrt{1 + |\bar{v}|^2}|\bar{p}||\bar{v}|.$$

Portanto,  $CB^2 - A^2 \leq 0$ . □

Como o denominador de  $\gamma_{1,2}$  é negativo e já que  $\gamma_1\gamma_2 = 1 - \frac{R^2}{B^2} < 0$ . Então, a solução que procuramos é

$$\gamma = \frac{AR - B\sqrt{A^2 + CR^2 - CB^2}}{CB^2 - A^2}.$$

Seja a aplicação  $\Lambda_R : \mathbb{S}_H^2(R) \rightarrow \mathbb{S}_H^2(\sqrt{2})$  dada por

$$\Lambda_R(p) = \left( \frac{\bar{p}}{\sqrt{R^2 - 1}}, \sqrt{2} \right).$$

Então,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\Lambda_R(\delta(\gamma)p - \gamma v)} = L(-\langle p, v \rangle + \sqrt{\langle p, v \rangle^2 - 1})\bar{p} - L\bar{v},$$

onde

$$L = \frac{A}{CB^2 - A^2} - \frac{B\sqrt{C}}{CB^2 - A^2} = \frac{-1}{p_4(-\langle p, v \rangle + \sqrt{\langle p, v \rangle^2 - 1}) + v_4}.$$

Segue que

$$L = \frac{1}{p_4(\langle p, v \rangle - \sqrt{\langle p, v \rangle^2 - 1}) - v_4}.$$

Tome  $D(p, v) = \langle p, v \rangle - \sqrt{\langle p, v \rangle^2 - 1}$ . Daí, a aplicação que estávamos procurando  $\mathcal{G} : K \times L \rightarrow \mathbb{S}^2$  é dada por

$$\mathcal{G}(p, v) = \frac{D(p, v)\bar{p} - \bar{v}}{D(p, v)p_4 - v_4}.$$

Lembre que  $\langle p, v \rangle = \cosh \eta(p, v)$ , então  $D(p, v) = e^{-\eta(p, v)}$ . Assim, dividindo por  $e^{-\frac{\eta(p, v)}{2}}$  temos

$$\mathcal{G}(p, v) = \frac{e^{-\frac{\eta}{2}}\bar{p} - e^{\frac{\eta}{2}}\bar{v}}{e^{-\frac{\eta}{2}}p_4 - e^{\frac{\eta}{2}}v_4}.$$

Um cálculo simples, mas enfadonho, mostra que

$$e^{\frac{\eta}{2}}v_4 - e^{-\frac{\eta}{2}}p_4 = |e^{\frac{\eta}{2}}\bar{p} - e^{-\frac{\eta}{2}}\bar{v}|.$$

Enfim, a aplicação  $\mathcal{G}$  dada por

$$\mathcal{G}(p, v) = \frac{e^{\frac{\eta}{2}}\bar{p} - e^{-\frac{\eta}{2}}\bar{v}}{|e^{\frac{\eta}{2}}\bar{p} - e^{-\frac{\eta}{2}}\bar{v}|}$$

será chamada de aplicação de Gauss hiperbólica.

Nosso próximo passo é conseguir um resultado semelhante ao do teorema 2.3.3., porém para a aplicação de Gauss hiperbólica.

### 4.3 Extensão do teorema de Shonkwiler e Vela-Vick para o caso hiperbólico

Começemos dando a definição de hipersuperfície no contexto hiperbólico, a qual é simplesmente uma adaptação do caso euclidiano.

**Definição 4.3.1.** Dizemos que uma hipersuperfície  $M^n \subset H^{n+1}$  é visível de um ponto  $p \in H^{n+1}$  se todo raio hiperbólico que sai de  $p$  ou intersecta  $M^n$  transversalmente ou não a intersecta.

**Observação 4.3.1.** Toda hipersuperfície visível do ponto  $e_{n+1}$  será chamada simplesmente de hipersuperfície visível.

Antes de irmos para o teorema que é o equivalente no contexto hiperbólico do teorema 2.3.3. vamos enunciar um importante teorema da teoria do grau.

**Teorema 4.3.1.** Seja  $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$  uma homotopia diferenciável entre variedades compactas, conexas e orientadas. Então,

$$\deg(H_0) = \deg(H_1).$$

Para demonstração veja Ruiz e Outerelo (?, p.101).

**Teorema 4.3.2.** *Sejam  $K^k$  e  $L^l$  duas subvariedades compactas, conexas, orientadas e disjuntas de uma hipersuperfície visível  $M^n \subset H^{n+1}$  tais que  $k + l = n - 1$ . Então,*

$$\deg(\mathcal{G}) = Lk(K, L).$$

*Demonstração.* Observe o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K \times L & \xrightarrow{\iota} & H^{n+1} \times H^{n+1} & \xrightarrow{\Theta_R} & \mathbb{S}_H^n(R) \\ \zeta \times \zeta \downarrow & & \downarrow \zeta \times \zeta & & \downarrow \zeta \\ K' \times L' & \xrightarrow{\iota} & D^{n+1} \times D^{n+1} & \xrightarrow{\Psi_r} & \mathbb{S}^n(r) \end{array}$$

onde  $\iota$  é a inclusão,  $\zeta$  é a inversa da projeção gnomônica,  $\Theta_R$  é a aplicação que leva dois pontos no ponto de interseção da reta hiperbólica que passa por eles com a esfera hiperbólica  $\mathbb{S}_H^n(R)$  e  $\Psi_r$  é a aplicação que leva dois pontos no ponto de interseção da reta que passa por eles com a esfera  $\mathbb{S}^n(r)$ .

Note que a aplicação  $\zeta$  leva  $\Theta_R(p, v)$  em  $\Psi_r(\zeta(p), \zeta(v))$ , portanto o diagrama é comutativo. A aplicação  $\zeta$  é um difeomorfismo que preserva a orientação, portanto preserva o linking number e o grau, pois  $\deg(\zeta) = 1$ . Por fim,  $\zeta$  leva retas hiperbólicas em  $H^{n+1}$  em retas (euclidianas) em  $D^{n+1}$ , veja Ratcliffe (? , p.191) teorema 6.1.4. É importante observar que, para cada  $r > 0$  as aplicações  $\Psi_r$  são homotópicas, portanto segue do teorema 4.3.1. que o grau permanece constante. Se lembrarmos do processo de construção da aplicação de Gauss euclidiana concluímos que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_r$  é a aplicação de Gauss euclidiana, mas da comutatividade do diagrama temos que  $\zeta^{-1}(\Psi_r) = \Theta_R$ , logo  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Theta_R = \mathcal{G}$ , e portanto,  $\deg(\mathcal{G}) = \deg(\psi) = Lk(K, L) = Lk(K', L')$ .  $\square$

Agora, nos perguntamos se o limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CK_R \times L} \mathcal{G}^* \omega$$

existe. E a resposta infelizmente é: Não sabemos! Pois seguindo os mesmos passos que Shonkwiler e Vela-Vick, claro, fazendo as adaptações para o espaço hiperbólico, não foi possível provar que a integral acima converge.

## 5 CONCLUSÃO

O artigo de Shonkwiler e Vela-Vick (?) não foi o primeiro a derivar uma Integral Linking para duas subvariedades de uma hipersuperfície visível do espaço euclidiano, em DeTurck e Gluck (?) encontram uma Integral Linking para o caso particular quando a hipersuperfície visível é a esfera. Aliás, DeTurck e Gluck (?) foi uma referência para o artigo de Shonkwiler e Vela-Vick (?). DeTurck e Gluck também tem outro artigo sobre fórmulas integrais para linking number, veja DeTurck e Gluck (?), no qual as motivações são muito mais físicas do que matemáticas, sendo que eles se detém a fórmulas integrais para o  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $H^3$ , vale ressaltar que as fórmulas deste trabalho não tem relação alguma com as fórmulas de DeTurck e Gluck (?) e Shonkwiler e Vela-Vick (?).

Os resultados mais importantes desta dissertação são, de fato, os referentes a variedades cônicas e a aplicação de Gauss hiperbólica. Contudo, visto que o surgimento desses conceitos está relacionado ao fato de nós nos focarmos em seguir os passos de Shonkwiler e Vela-Vick, na falha tentativa de encontrar uma Integral Linking no contexto hiperbólico, não sabemos se eles serão necessários numa outra abordagem.

Enfim, apesar de não encontrarmos uma Integral Linking para o caso hiperbólico, com a mesma ideia Shonkwiler e Vela-Vick (?), conseguimos estender alguns fatos de Teoria do Grau para variedades cônicas e relacionar o grau da aplicação de Gauss hiperbólica com o linking number entre duas variedades numa hipersuperfície visível do espaço hiperbólico.

## REFERÊNCIAS

- BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. New York: Springer, 1993.
- DETURCK, D.; GLUCK, H. Eletrodynamics and the Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space. *Math arXiv*, , n. math.GT/0406276, 2008a.
- DETURCK, D.; GLUCK, H. Linking integrals in the n-sphere. *Math. arXiv*, , n. math.GT/0802.0329v1, 2008b.
- FOLLAND, G. *Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2013.
- RATCLIFFE, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. New York: Springer, 2006.
- RICCA, R. L.; NIPOTI, B. Gauss' Linking Number Revisited. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, v. vol.20, n. No 10, 2011.
- RUIZ, J. M.; OUTERELO, E. *Mapping Degree Theory*. Providence: AMS, 2009.
- SHONKWILER, C.; VELA-VICK, D. S. Higher-Dimensional Linking Integrals. *Math. arXiv*, , n. math.GT/0801.4022v1, 2008.
- WHITEHEAD, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. New York: Springer, 1978.