



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO FILIPE PASSOS DOS SANTOS

**ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES E CONSTRUÇÕES COM O USO
DO SOFTWARE WINPLOT**

FORTALEZA

2016

FRANCISCO FILIPE PASSOS DOS SANTOS

**ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES E CONSTRUÇÕES COM O USO
DO SOFTWARE WINPLOT**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S235a Santos, Francisco Filipe Passos dos
Algumas curvas notáveis: aplicações e construções com o uso do software Winplot / Francisco
Filipe Passos dos Santos. – 2016.
101 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Matemática. 2. Curvas. 3. Winplot (Software). I. Título.

FRANCISCO FILIPE PASSOS DOS SANTOS

**ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS: APLICAÇÕES E CONSTRUÇÕES COM O USO
DO SOFTWARE WINPLOT**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará
Orientador

Prof. Dr. José Válter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal do Ceará

Aos meus pais Francisco Gerniel e Maria José (in memoriam) que sempre confiaram no poder que a educação possui para a transformação do mundo e me fizeram trilhar nesse nobre caminho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, que em seu infinito amor nos fortalece na caminhada da vida e dos estudos. A Ele toda honra, glória e louvor.

À minha esposa Brena Reis por sempre me acompanhar e incentivar no meu progresso.

Ao meu filho Gabriel que sempre me animava com um sorriso, um abraço e com demonstrações de carinho.

Ao professor José Othon pela grandiosa contribuição e orientação neste trabalho. Agradeço também pela sua forma simples, tranquila e amigável no tratamento conosco.

À minha família, nas pessoas de Rita Maria e Andrecina Passos de quem sempre obtive apoio com palavras, gestos e atitudes.

À meu amigo Elizomilson Fonseca Freitas pelos conselhos dados durante a produção deste trabalho.

Aos meus colegas da escola João Nogueira Jucá nas pessoas de Cláudia Pires e Júnior Farias por serem sempre compreensivos durante minha participação nesse mestrado.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza.”

Bertrand Russell

RESUMO

.A escassez de significado da matemática na realidade dos discentes os distanciam progressivamente desta ciência. Sem contextualização e ausência de conexão entre as demais ciências, a Matemática pode transformar-se, na mente de um jovem, em uma ciência sem utilidade. As curvas exemplificam bastante a importância que esta ciência gozou no desenvolvimento das diversas culturas e denota como fórmulas e equações possuíram papel importante nos mais variados problemas. Além disso, as aplicações cotidianas das curvas são apresentadas de forma a provar o quanto a matemática é empregada em construções, na música e nas artes, dando assim significado para esta ciência. Devido a facilidade que atualmente se dá a tecnologia, se faz importante o uso de ferramentas denominadas TIC's. Neste trabalho se utiliza a ferramenta Winplot para a construção das Curvas. Esta permite ao discente além da visualização dos gráficos, variadas funções em que podem obter informações para ampliação de seu conhecimento.

Palavras-chaves: Significado. Matemática. Curvas. Aplicações. Winplot.

ABSTRACT

The lack of significance of mathematics in the reality of the students gradually distances them from this science. Without contextualization and lack of connection between other sciences, mathematics may become, in a young man mind, a meaningless science. The curves exemplify the quite importance that this science enjoyed in the development of different cultures and denotes how formulas and equations assumed an important role in several problems. Furthermore, the daily applications of the curves are presented in order to prove how math is used in buildings, music and arts, thereby giving a meaning to this science. Nowadays, the great ease of how technology has been provided, it became important the use of tools called TIC's. The present work uses the Winplot tool for the construction of curves. Moreover, it allows the student besides the preview of graphics, various functions, which may get information to expand his/her knowledge.

Keys-Word: Significance. Mathematics. Curves. Applications. Winplot

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Construção da Elipse.....	
Figura 2: Elementos da Elipse.....	
Figura 3: Construção da Elipse a Partir de Uma Circunferência.....	
Figura 4: Construção da Hipérbole.....	
Figura 5: Elementos da Elipse	
Figura 6: Construção da Parábola.....	
Figura 7: Telescópio Cassegrain.....	
Figura 8: Catedral de Brasília.....	
Figura 9: Torres de Refrigeração.....	
Figura 10: Hiperbolóide com Superfície Regrada.....	
Figura 11: Tira Metálica Refletindo Raios de Luz.....	
Figura 12: Parabolóide de Revolução.....	
Figura 13: Esboço de um antena parabólica	
Figura 14: Cissóide.....	
Figura 15: Duplicação do Volume do Cubo.....	
Figura 16: Construção da Curva de Agnesi.....	
Figura 17: Círculo que determina a Curva de Agnesi	
Figura 18: Roda Descrevendo uma Ciclóide.....	
Figura 19: Circunferência que Gera uma Ciclóide.....	
Figura 20: Braquistócrona.....	
Figura 21: Tautócrona.....	

Figura 22: Pêndulo Isócrono.....	
Figura 23: Epiciclóide.....	
Figura 24: Ponto P Sentido Anti-Horário.....	
Figura 25: Ponto P sentido Horário.....	
Figura 26: Relação Fundamental da Trigonometria.....	
Figura 27: Variação do Seno em $[0, \pi]$	
Figura 28: Variação do Cosseno em $[0, \pi]$	
Figura 29: Frequências das Notas Musicais.....	
Figura 30: Frequências de Instrumentos Musicais.....	
Figura 31: Lemniscata.....	
Figura 32: Lemniscata Formada por Duas Ovais.....	
Figura 33: Lemniscata em Formato de Biscoito.....	
Figura 34: Lemniscata com Vários Formatos.....	
Figura 35: Lemniscata em Formas Curiosas.....	
Figura 36: Espiral de Arquimedes.....	
Figura 37: Concha do Náutilo.....	
Figura 38: Galáxia e Furacão em Formato Espiral.....	
Figura 39: Espiral Logarítmica.....	
Figura 40: Desenhos de Escher.....	
Figura 41: Desenhos Inspirados no Problema dos Quatro Insetos.....	
Figura 42: Modelo da Catenária.....	
Figura 43: Corrente Suspensa.....	
Figura 44: Forças que Atuam.....	

Figura 45: Corda Inextensível.....	
Figura 46: Força \vec{F}_0	
Figura 47: Ângulos Entre as Forças.....	
Figura 48: Decomposição das Forças.....	
Figura 49: Forças \vec{F}_1 e \vec{F}_0	
Figura 50: Gateway Arch.....	
Figura 51: Ponte de Lupu.....	
Figura 52: Basílica.....	
Figura 53: Catenária na Arquitetura 1.....	
Figura 54: Catenária na Arquitetura 2.....	
Figura 55: Local de Armazenamento do Software.....	
Figura 56: Botão Para Executar o Arquivo.....	
Figura 57: Botão Para Descompactar o Arquivo.....	
Figura 58: Início da Tela do Winplot.....	
Figura 59: Eixos no Winplot.....	
Figura 60: Eixos com Grades.....	
Figura 61: Tela da Equação Explícita.....	
Figura 62: Gráfico da Função $f(x) = 3x + 5$	
Figura 63: Zero da Função.....	
Figura 64: Gráficos das Funções $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -0.5x + 1$	
Figura 65: Interseção dos gráficos de $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -0.5x + 1$	
Figura 66: Inventário.....	
Figura 67: Tela Inicial da Função Paramétrica.....	

Figura 68: Reta Descrita por Funções Paramétricas.....	
Figura 69: Tela de Animação.....	
Figura 70: Variação da Posição da Reta Paramétrica.....	
Figura 71: Sintaxe de Uma Circunferência.....	
Figura 72: Circunferência.....	
Figura 73: Tela Inicial da Função Polar.....	
Figura 74: Rosácea de Quatro Pétalas.....	
Figura 75: Sintaxe da Elipse.....	
Figura 76: Elipse com Centro, Vértices e Focos.....	
Figura 77: Elipse.....	
Figura 78: Elipse.....	
Figura 79: Elipse.....	
Figura 80: Elipse.....	
Figura 81: Marcação do Foco F_2	
Figura 82: Construção de Um Lado Do Retângulo de Base.....	
Figura 83: Hipérbole e Seus Elementos.....	
Figura 84: Parábola e Seus Elementos.....	
Figura 85: Parábola e Seus Elementos.....	
Figura 86: Círculo que Gera Uma Cissóide.....	
Figura 87: Sintaxe de Uma Cissóide.....	
Figura 88: Cissóide.....	
Figura 89: Área da Curva de Agnesi.....	
Figura 90: Círculo que Gera Uma Ciclóide.....	

Figura 91: Esboço de Uma Ciclóide.....	
Figura 92: Exemplos de Hipociclóides.....	
Figura 93: Lemniscatas de Bernoulli.....	
Figura 94: Exemplos de Lemniscatas.....	
Figura 95: Curva do Diabo.....	
Figura 96: Fólium de Descartes.....	
Figura 97: Espiral de Arquimedes.....	
Figura 98: Interseção da Espiral de Arquimedes com Uma Reta.....	
Figura 99: Distância de Duas Espirais.....	
Figura 100: Espiral Logarítmica.....	
Figura 101: Kampyle de Eudócio.....	
Figura 102: Catenária.....	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CURVAS, EQUAÇÕES E APLICAÇÕES	18
2.1	Cônicas	18
2.1.1	<i>Elipse</i>	19
2.1.2	<i>Hipérbole</i>	22
2.1.3	<i>Parábola</i>	25
2.1.4	Aplicação das cônicas	26
2.2	Cissóide	30
2.2.1	<i>Equação polar da Cissóide</i>	31
2.3	Curva de Agnesi	32
2.3.1	<i>Construção da Curva de Agnesi</i>	33
2.3.2	<i>Aplicações</i>	36
2.4	Ciclóides	36
2.4.1	<i>Propriedades da Ciclóide</i>	37
2.4.2	<i>Curvas Tautócrona e Isócrona</i>	39
2.4.3	<i>Epiciclóide e Hipociclóide</i>	40
2.5	Senóide e Cossenóide	40
2.5.1	<i>Gráficos de seno e cosseno</i>	41
2.5.2	<i>Aplicações da Senóide</i>	42
2.6	Lemniscata	44
2.6.1	<i>Formas de Lemniscatas</i>	45
2.6.2	<i>Lemniscatas de n focos</i>	46
2.7	Espirais	47
2.7.1	<i>Espiral de Arquimedes</i>	47
2.7.2	<i>Espiral Logarítmica</i>	49
2.8	Catenária	53
2.8.1	<i>Demonstração da equação da Catenária</i>	54
2.8.2	<i>Catenária na arquitetura</i>	61
3	SOFTWARE WINPLOT	62
3.1	Instalação	63
3.2	Como utilizar o Winplot?	65
3.3	Cônicas no Winplot	75
3.3.1	<i>Elipse</i>	75
3.3.2	<i>Hipérbole</i>	78
3.3.3	<i>Parábola</i>	80
3.4	Cissóide	83

3.5	Curva de Agnesi	85
3.6	Ciclóide	86
3.7	Hipociclóide	89
3.8	Lemniscata	90
3.9	Espirais	92
3.10	Kampyle de Eudóxio	96
3.11	Catenária	97
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
	REFERÊNCIAS	99

1. INTRODUÇÃO

As avaliações externas, como o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), estão contextualizando cada vez mais os problemas propostos e exigindo um novo olhar sobre o Ensino das Ciências, dentre elas a Matemática. Esta sempre esteve ligada aos problemas que surgiam nas mais diversas culturas e sociedades, solucionando estes desafios e auxiliando na evolução das pesquisas nas mais diversas áreas. No entanto, ainda há por parte de vários alunos uma distância e repulsa a Matemática, devido o modelo em que ela é lecionada onde não se dá significados a esta ciência.

Do mesmo modo, também há a necessidade do aluno ser sujeito da sua própria aprendizagem, ser sujeito crítico nesse processo. O aluno precisa ter autonomia no processo de ensino-aprendizagem. Evidente que essa autonomia só pode ser adquirida após o domínio das ferramentas que o permitam conquistá-la: a língua materna, a própria matemática dentre outras ciências. FREIRE (1996, p.35) afirma que é com ela, a autonomia, penosamente construindo-se, que a liberdade vai preenchendo o “espaço” antes “habitado” por sua dependência.

O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) auxiliam bastante os alunos na construção de conhecimento e em eles serem sujeitos da sua própria aprendizagem, pois estas facilitam visualizações, resoluções e são utilizadas no cotidiano dos discentes. Com uma metodologia adequada, as TIC's tornam o aprendizado mais atraente e mais claro. Sabendo que grande parte dos alunos do ensino básico de hoje são nativos digitais, ou seja, desde cedo têm contato com aparelhos tecnológicos diariamente, é de suma importância incluir, como ferramenta de auxílio, o uso de tecnologias na educação. Infelizmente, grande parte das escolas públicas ainda não está preparada para o uso dessas ferramentas, pois em muitas dessas instituições ainda faltam computadores e a velocidade da internet é baixíssima. Nesse sentido, faz-se necessário também a melhoria da estrutura e valorização da educação. O uso das TIC's é cobrado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento é hoje o computador, exigirá do ensino de matemática um redirecionamento sob uma perspectiva

curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse de conhecimento em constante movimento. (1995, p.41)

Devido aos motivos expostos acima, escolhemos dissertar no presente trabalho sobre o estudo de curvas, bem como suas construções no software Winplot.

Inicialmente, fazemos um histórico sobre o advento do estudo destas curvas mostrando que, geralmente, surgiram da necessidade de se resolver algum problema proposto ou de observações no cotidiano de alguns matemáticos. Mostramos, após isto, a sua construção, a aplicação nas mais variadas ciências e em arquitetura. Há também a apresentação das equações e problemas matemáticos relacionados com demonstrações.

A segunda parte da pesquisa ilustra as construções das curvas no software Winplot, bem como a facilidade que a ferramenta apresenta em resolver determinados problemas, apresentando como pode tornar-se agradável o aprendizado.

2. CURVAS, EQUAÇÕES E APLICAÇÕES

As curvas foram objetos de estudos dos geômetras ao longo dos séculos. Veremos a seguir a história, equações e aplicações de diversas curvas.

2.1 CÔNICAS

Conforme DELGADO (2013, p. 98), os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 - 320 AC aproximadamente), discípulo de Eudócio na academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas. Ele foi o primeiro matemático a mostrar que elipses, parábolas e hipérbolas eram obtidas como secções de um cone quando cortados por um plano não paralelo à sua base. No entanto, a designação das curvas não coube a Menaecmus, mas sim a Apolônio de Perga (262 – 190 AC). Este aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto em sua obra *Seções Cônicas*. Esse escrito, ao lado dos *Elementos* de Euclides, constituem o ápice da matemática grega.

Pierre de Fermat, em sua obra *Ad locos planos et sólidos isogage* (1636), estabeleceu um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana. Fermat se utilizou da linguagem algébrica para obter demonstrações dos teoremas descritos por Apolônio propostos por Pappus de Alexandria (290 – 350 aproximadamente). A Álgebra associada com a natureza particular dos lugares geométricos, indicaram a Fermat que todos os lugares geométricos abordados por Apolônio poderiam ser escritos na forma de equação algébrica com duas variáveis.

Através de seus estudos, conseguiu encontrar sete equações que ele obteria como formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis que, escrita na linguagem atual, é:

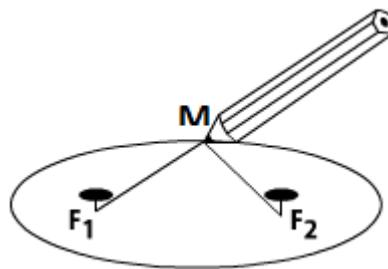
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

A parábola, elipse e hipérbole surgem desta equação, dependendo dos seus coeficientes. Adiante, observaremos certas formas de construções das cônicas, assim como também seus elementos.

2.1.1 Elipse

Para a construção de uma elipse, tomamos um fio e amarramos suas duas extremidades a dois alfinetes de modo que não fique esticado. Utilizando agora um lápis, esticamos o fio e, mantendo-o esticado, deslocamos o lápis apoiado no - papel. Esse processo descreverá uma curva de forma ovalada, semelhante a uma circunferência achatada, que se denominará *elipse*. Observe na figura 1.

Figura 1: Construção da Elipse



Fonte: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/Elipse/

Após desenhar a metade da elipse, para completar, basta passar o fio de um dos lados do alfinete para o outro. A soma das distâncias do lápis aos dois furos dos alfinetes F_1 e F_2 é sempre constante, evidentemente. Essa soma é exatamente o comprimento do fio.

Os dois furos marcados no papel F_1 e F_2 são denominados os focos da elipse. Foco vem do latim *focus*, de onde também se origina a palavra *fogo* e é justificada pela seguinte propriedade notável da elipse.

Se encurvamos em um arco de elipse uma tira metálica estreita bem polida e colocamos em um dos focos uma fonte de luz pontual, seus raios, depois de refletirem-se na tira metálica, reunir-se-ão no outro foco. Consequentemente, uma fonte de luz, imagem da primeira, será também visível no outro foco. (MARKUCHEVITCH, 1995, p. 4)

Algebricamente, podemos definir uma elipse ε de focos F_1 e F_2 como sendo o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a

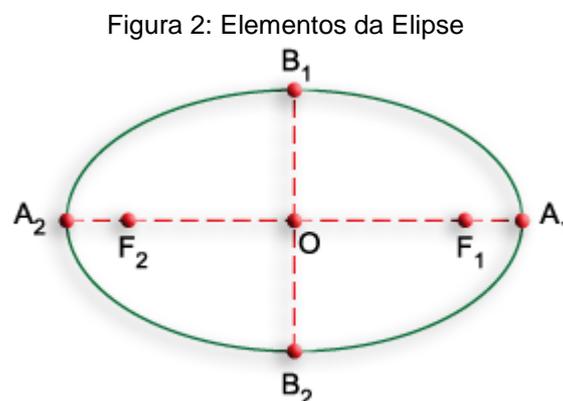
uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$:

$$\varepsilon = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

ELEMENTOS DA ELIPSE

Traçamos um segmento de reta unindo os dois focos F_1F_2 e o prolongamos nas duas direções até intersectar a elipse. Desse modo, obtemos o eixo maior A_1A_2 . A Elipse é simétrica em relação a este eixo maior.

Construindo a mediatriz do segmento F_1F_2 até cortar a elipse, obteremos o eixo menor B_1B_2 que também é eixo de simetria da elipse. Os extremos A_1, A_2, B_1 e B_2 são denominados *vértices* da elipse. Estes elementos estão descritos na Figura 2.



Fonte: <http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/1086?token=5%2F2Yd2%2Bzzv%2F29umTApxi0Q%3D%3D>

Somando os comprimentos dos segmentos A_1F_1 e A_1F_2 devemos ter exatamente o comprimento do fio, ou seja, $A_1F_1 + A_1F_2 = l$. Pela simetria da elipse, sabemos que $A_1F_1 = A_2F_2$. Assim, substituímos A_2F_2 ao invés de A_1F_1 . Teremos:

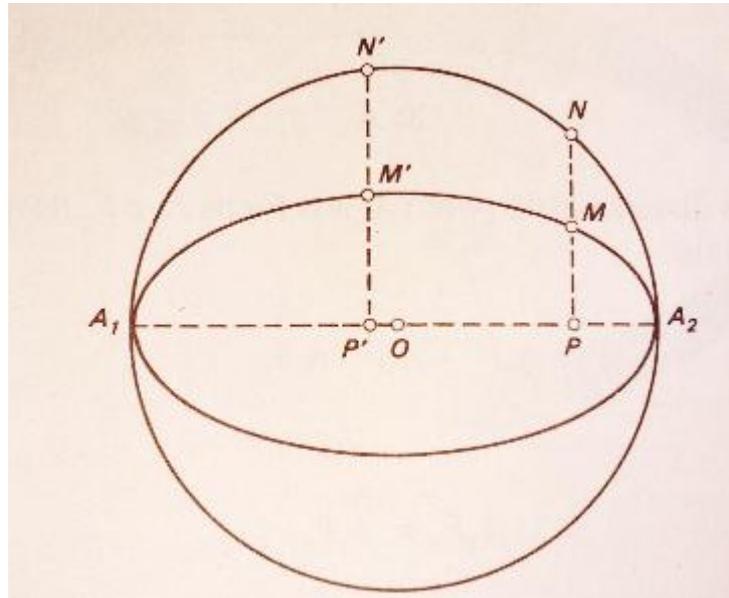
$$A_2F_2 + A_1F_2 = A_1A_2 = l$$

Pela simetria da elipse, a distância de qualquer um dos vértices B_1 ou B_2 a qualquer um dos focos será a metade do comprimento do eixo maior.

ELIPSE E CIRCUNFERÊNCIA

Seja dada uma circunferência em que o diâmetro é igual ao eixo maior da elipse conforme a figura 3.

Figura 3: Construção da Elipse a Partir de Uma Circunferência



Fonte: Markuchevitch

A partir de um ponto N qualquer da circunferência é baixada uma perpendicular sobre o eixo maior. Seja P a interseção entre esse eixo e a perpendicular. Marquemos em NP um ponto M que pertencerá à elipse desejada. Obviamente $NP = k.MP$, $k \in R$. A partir de N' , outro ponto da circunferência, baixamos novamente uma perpendicular até encontrar-se com o eixo maior em P' . Determinemos M' de tal forma que $N'P' = k.M'P'$, ou seja,

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'} = k$$

Em outras palavras, pode-se obter uma elipse a partir de sua circunferência circunscrita, devendo-se para isso aproximar todos os pontos da circunferência ao eixo maior da elipse, reduzindo um mesmo número de vezes suas distâncias a esse eixo. (MARKUCHEVITCH, 1995, p. 7)

Esta propriedade nos oferece uma forma distinta de construir uma elipse: Traçamos uma circunferência e, a partir dela, baixamos as perpendiculares ao diâmetro. Tomamos os pontos nessas perpendiculares uma distância fixa até o diâmetro. Dessa forma, obteremos os pontos da elipse com eixo maior coincidindo com o diâmetro e eixo menor um número correspondente de vezes menor que o diâmetro.

2.1.2 Hipérbole

Empregando processo semelhante ao da elipse, vamos realizar a construção da hipérbole. Tomamos os pontos M , tais que, a diferença de suas distâncias a dois pontos determinados F_1 e F_2 seja sempre constante.

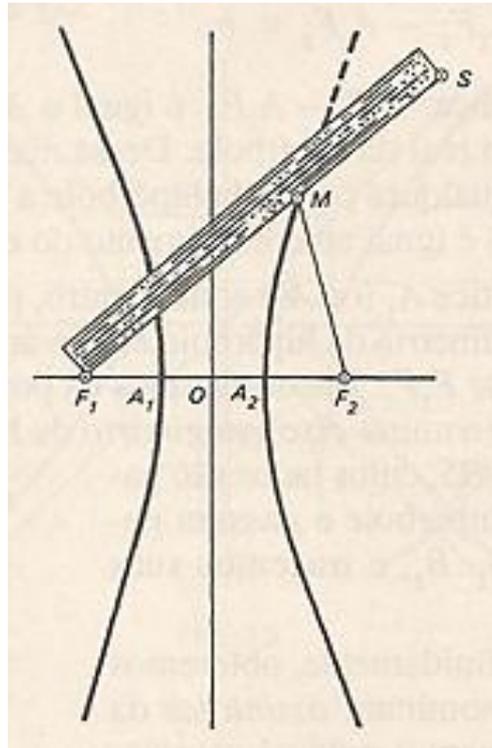
Do mesmo modo, cravamos dois alfinetes nos pontos F_1 e F_2 que serão denominados focos da Hipérbole. Fixamos uma régua em um dos focos, de forma que ela possa rotacionar no papel ao redor do alfinete. Na extremidade de uma régua atamos a ponta de um fio (de menor medida que a régua) e, a outra ponta no alfinete F_2 . Estiremos o fio e o apoiemos na régua utilizando a ponta M de um lápis. Assim, a diferença entre as distâncias MF_1 e MF_2 será igual a :

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS)$$

Portanto, temos nesta equação a diferença entre as medidas de comprimento da régua e do fio. Girando a régua em torno de F_1 , sustentando o lápis nela, estendendo ao máximo o fio, o lápis esboçará no papel uma curva em que a diferença das distâncias de qualquer ponto a F_1 e F_2 sempre vai ser a diferença m entre os comprimentos do fio e da régua. Desse modo, teremos a parte superior direita da curva. Para a parte inferior, colocamos a régua por baixo dos alfinetes. Para finalizar, fixamos a régua no alfinete F_2 e o extremo do fio no alfinete F_1 e assim, teremos a parte esquerda. Ambas as partes estão descritas na figura 4. As duas

curvas construídas são denominadas ramos de apenas uma curva intitulada Hipérbole.

Figura 4: Construção da hipérbole



Fonte: Markuchevitch

Algebricamente, uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$:

$$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$

ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

Pelos focos F_1 e F_2 da hipérbole, traçamos uma reta que será designada de *eixo de simetria da hipérbole*. Traçando a mediatriz do segmento F_1F_2 teremos o outro eixo de simetria. O ponto O , da intersecção entre as duas retas é o *centro de*

simetria ou apenas *centro da hipérbole*. Os pontos de intersecção entre um dos eixos e a hipérbole são denominados *vértices* A_1 e A_2 . Chamamos de *eixo real* o eixo que contém A_1A_2 . Tomando a diferença entre as distâncias do ponto A_1 aos dois focos F_1 e F_2 devemos obter o valor m .

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m.$$

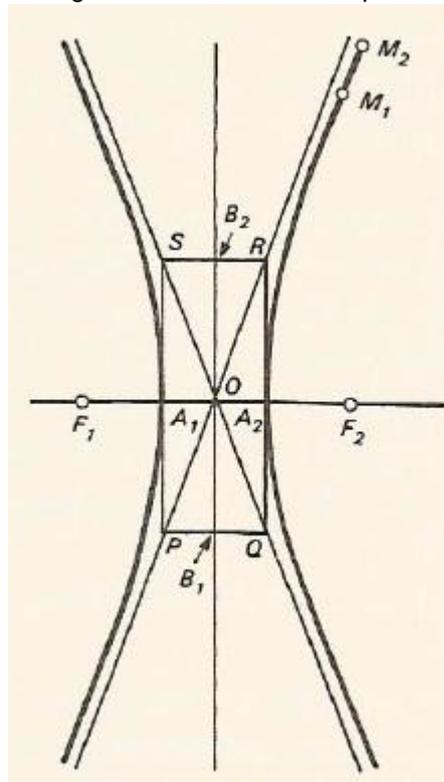
Contudo, $A_1F_1 = A_2F_2$ por consequência da simetria da hipérbole.

Efetivando a substituição na primeira equação, encontramos:

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m.$$

Logicamente, a diferença $A_1F_2 - A_2F_2$ é a mesma que A_1A_2 , ou seja, o mesmo que o comprimento do eixo real da hipérbole. Destarte, considerando a diferença m entre as distâncias de um ponto da hipérbole a seus dois focos, onde a diferença é positiva, obteremos o comprimento do eixo real da hipérbole. Consideremos neste instante o vértice A_1 ou A_2 como centro e vamos procurar a intersecção do segundo eixo de simetria da hipérbole com o arco de circunferência de raio $\frac{F_1F_2}{2}$. Em vista disso, possuiremos os pontos B_1 e B_2 . A reta que passa por B_1 e B_2 é denominado *eixo imaginário da hipérbole*. Construindo o retângulo $PQRS$ que passa pelos vértices A_1 , A_2 , B_1 e B_2 , tracemos as duas diagonais. Se as prolongarmos infinitamente, teremos duas retas denominadas de *assíntotas da hipérbole*. Uma notável propriedade que as assíntotas possuem é a de nunca encontrarem a hipérbole, embora cheguem tão perto quanto se queira. Basta distanciar os pontos da hipérbole de seu centro. Observemos os elementos acima na figura 5:

Figura 5: Elementos da Elipse

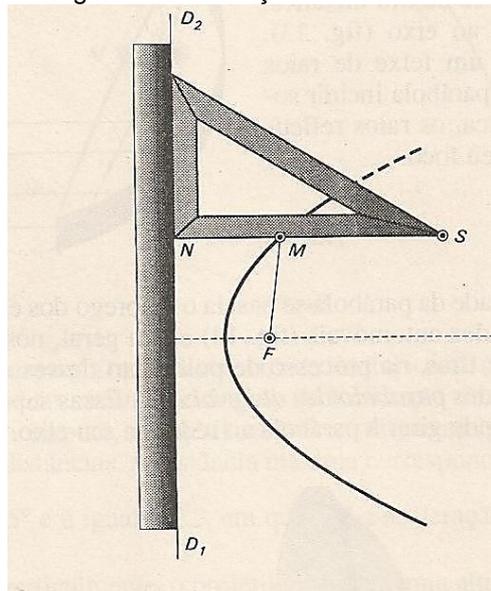


Fonte: Markuchevitch

2.1.3 Parábola

Em uma folha de papel tracemos uma reta qualquer D_1D_2 marcando um ponto F externo a essa reta. Com a ponta M do lápis escrevamos os pontos, tais que as distâncias do lápis à reta e do lápis ao ponto F sejam sempre iguais. Utilizemos um esquadro para auxiliar na construção. Fixemos nele dois vértices S e N , tais que SN seja um dos catetos do esquadro. Em S atamos uma das extremidades de um fio de tamanho igual ao do cateto SN e a outra extremidade fixamos a um alfinete fincado no ponto F . Deslizando o outro cateto do esquadro ao longo de uma régua apoiada sobre D_1D_2 , a ponta M do lápis, que estica o fio e o apoia no cateto livre do esquadro, estará exatamente a distâncias iguais da régua e do alfinete. Observe a Figura 6:

Figura 6: Construção da Parábola



Fonte: Markuchevitch

A ponta do lápis descreverá uma curva denominada parábola. Esta curva contém um ramo que se estende ao infinito. O ponto F é chamado *foco da parábola*. O eixo de simetria, ou simplesmente *eixo da parábola*, é construído baixando a perpendicular do foco sobre a reta D_1D_2 , que é denominada *diretriz*.

Algebricamente, definimos a Parábola da seguinte maneira: Sejam L uma reta e F um ponto do plano não pertencente a L . A parábola P de foco F e diretriz L é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual sua distância a L :

$$P: \{P | d(P, F) = d(P, L)\}$$

2.1.4 Aplicação das Cônicas

Desde a época dos gregos se tem conhecimento do Princípio de Reflexão das Cônicas. Este princípio é explorado desde o século XVII para construção de telescópios. Conforme Delgado, o telescópio refletor de Cassegrain, inventado pelo francês Guillaume Cassegrain no ano 1672, utiliza um espelho refletor primário parabólico e um espelho secundário hiperbólico. Este modelo é usado no telescópio espacial Hubble que orbita a Terra desde 1990 (Figura 7).

Figura 7: Telescópio Cassegrain



Fonte: <http://pt.slideshare.net/TheMrGabriel/hiprbole-36810208>

Catedral de Brasília: as estruturas de concreto são arcos de parábolas que tem função estrutural e estética (Figura 8).

Figura 8: Catedral de Brasília



Fonte: <http://spaziodesignjf.com.br/new/wp-content/uploads/2012/12/catedral-de-brasilia.jpg>

Torre de refrigeração: As torres mostradas na Figura 9 geralmente são hiperboloides de uma folha gerados pela rotação de uma hipérbole em torno de um de seus eixos. Esse formato acelera o fluxo de ar e melhora o processo de refrigeração, assim como possibilita um gasto mínimo de material em suas construções.

Figura 9: Torres de Refrigeração



Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/quimica/reator-nuclear.htm>

Podemos mostrar que o Hiperbolóide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transversal é também gerado por uma reta. Ou seja, ele pode ser considerado como sendo formado por uma união de retas (**superfície regrada**). Assim, seu formato é usado na construção de centrais de energia atômica, onde barras de aço retilíneas (que têm alta resistência) se cruzam para obter estruturas extremamente fortes. (SATO, J., 2005).

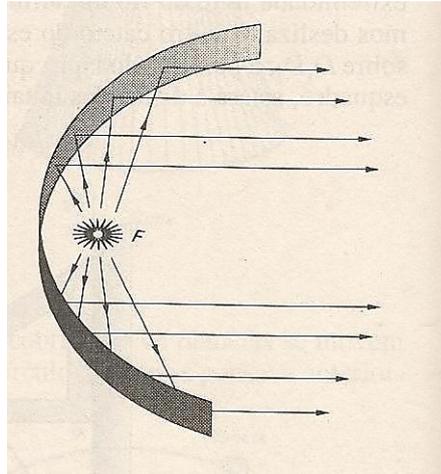
Figura 10: Hiperbolóide como Superfície Regrada



Fonte: <http://www.fumec.br/revistas/construindo/article/viewFile/1714/1084>

Faróis de automóveis: A figura 11 mostra que encurvando uma tira metálica estreita bem polida e dando a ela a forma de um arco de parábola, os raios de uma fonte de luz situada em seu foco, ao refletirem na tira metálica, tornam-se paralelas ao eixo.

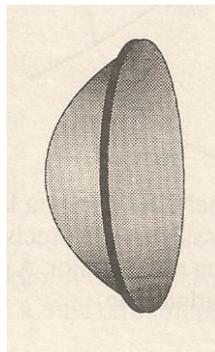
Figura 11: Tira Metálica Refletindo Raios de Luz



Fonte: Markuchevitch

Essa propriedade é aplicada nos espelhos parabólicos de faróis de automóveis e em refletores. Nesse caso, ao invés de tiras metálicas, utilizam-se no processo de polimento desses espelhos os chamados *paraboloides de revolução*. Para obter essa superfície, basta girar a parábola em torno de seu eixo, conforme a Figura 12:

Figura 12: Paraboloides de Revolução



Fonte: Markuchevitch

Antena Parabólica: As cônicas possuem uma grande quantidade de aplicabilidade na Engenharia. Uma das mais famosas é a antena parabólica (Figura 13), que recebe o nome da cônica.

Figura 13: Esboço de uma antena parabólica



Fonte: Souza

Percebemos que o receptor na haste central localiza-se exatamente sobre o foco da parábola. Isto significa que todo o sinal que for recebido pela superfície da antena será refletido em direção ao foco. Conforme Souza (2014), esse redirecionamento está diretamente ligado à propriedade refletora das parábolas.

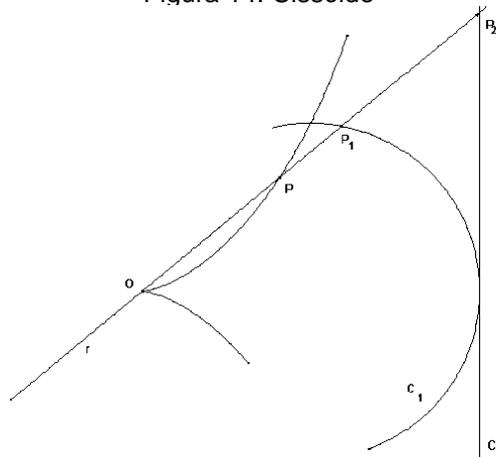
2.2 CISSÓIDE

A Cissóide foi descoberta por Díocles no intuito de solucionar o problema de duplicação do cubo utilizando métodos geométricos. Posteriormente, conforme Reis (2008, p. 264) o método utilizado para gerar a Cissóide de Díocles foi generalizado e todas as curvas geradas por um processo análogo ao dela são designadas por cissóides do grego kissós (hera) e eidos (forma).

Definimos a Cissóide geral da seguinte forma:

Dadas duas curvas C_1 e C_2 no plano R^2 e um ponto fixo $O \in R^2$. Traçando uma reta variável r passando por O , tome P_1 e P_2 as intersecções de r com as curvas C_1 e C_2 , respectivamente. Chamamos de Cissóide de C_1 e C_2 com respeito ao pólo O , o lugar geométrico dos pontos $P \in r$, tais que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$. De acordo com EVES (Pág.: 151) se C_1 é uma circunferência, C_2 é a tangente a C_1 num ponto A e O é o ponto de C_1 diametralmente oposto a A , então a cissóide de C_1 e C_2 para o pólo O é a Cissóide de Díocles. Na figura 14 temos o esboço de uma Cissóide.

Figura 14: Cissóide



Fonte: Reis

2.2.1 Equação Polar da Cissóide

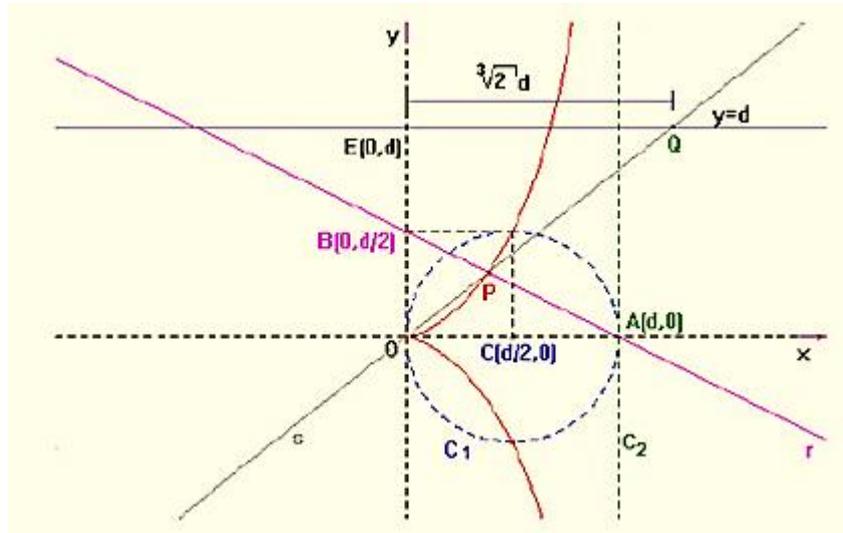
Nitidamente, a equação polar da Cissóide é $\rho(\theta) = \rho_2(\theta) - \rho_1(\theta)$, onde $\rho_1(\theta)$ é a equação polar de C_1 e $\rho_2(\theta)$ é a equação polar de C_2 .

Para solucionar o problema da duplicação do cubo usando a Cissóide de Diocles, tomamos uma aresta dada de um cubo de comprimento d . Como desejamos um cubo de volume duplo, temos que a aresta desse cubo deve ter comprimento $\sqrt[3]{2}d$. Agora, construa a cissóide de equação cartesiana $y^2(d-x) = x^3$, ou seja, a Cissóide de Diocles de circunferência C_1 , de centro $C\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{d}{2}$ e da reta tangente C_2 dada por $x = d$ (com pólo na origem). Após, esboce a reta r passando pelos pontos $A(d, 0)$ e $B\left(0, \frac{d}{2}\right)$. Assim, r possui equação cartesiana $2y = d - x$.

Agora, vamos determinar o ponto P , que é o ponto de intersecção da reta r com a Cissóide de Diocles construída anteriormente. Após, vamos construir a reta s passando pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto P . Determine o ponto Q como o ponto de intersecção da reta s com a reta $y = d$. Desse modo,

podemos afirmar que o segmento \overline{QE} , sendo E de coordenadas $E(0,d)$, possui comprimento $\sqrt[3]{2}$. Portanto, esta é a aresta do cubo que duplica o volume do cubo dado. Note na figura 15:

Figura 15: Duplicação do Volume do Cubo



Fonte: Reis

Para comprovar este fato, denote P em coordenadas por $P(a,b)$ que é solução do sistema de equações $\begin{cases} (d-x)y^2 = x^3 \\ d-x = 2y \end{cases}$. Portanto, satisfaz a relação $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2$. Daí temos que a equação cartesiana da reta s que passa pela origem e pelo ponto P é dada por $x = \sqrt[3]{2}y$ e, portanto, o ponto Q de intersecção da reta s com a reta $y = d$, em coordenadas é dado por $Q(\sqrt[3]{2}d, d)$. Sendo assim, $\overline{QE} = \sqrt[3]{2}$, uma vez que $E = (0, d)$.

Posteriormente será explicada a origem do problema da Duplicação do Cubo e outros métodos de resolução, bem como será demonstrada a equação polar da cissóide de Díocles.

2.3 CURVA DE AGNESI

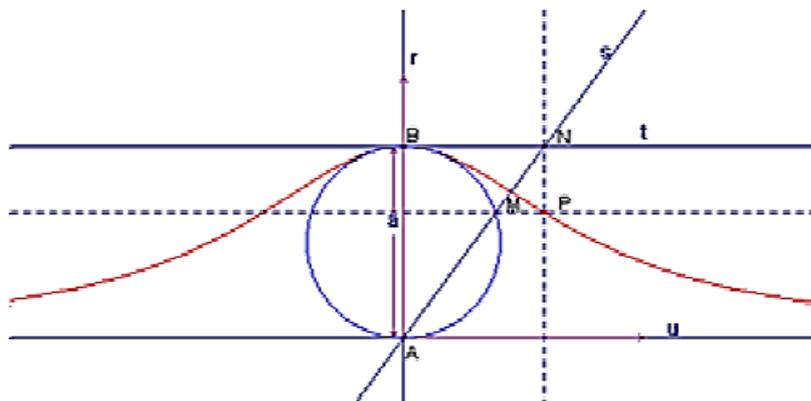
De acordo com EVES (2004, pag. 504), definimos elegantemente a Feiticeira de Agnesi da seguinte forma. “Considere uma circunferência de raio a e

diâmetro OK sobre o eixo y , onde O é a origem do sistema de coordenadas. Seja OA uma secante variável por O , sendo A sua intersecção com a tangente à circunferência por K . Se Q é a segunda intersecção de OA com a circunferência, então a curva de Agnesi o lugar geométrico dos pontos P de intersecção das retas QP e AP paralelas e perpendiculares, respectivamente, ao eixo x .” A equação da Agnesi é da forma $y(x^2 + a^2) = a^3$. Inicialmente, essa curva foi estudada por Fermat. Em sua origem, a curva se denominava “a versiera Agnesi”, onde Versiera significava “a que gira”. No entanto, versiera também é a abreviatura de “avversiera” (mulher do demônio). Devido a uma má tradução inglesa, a curva passou de “la versiera” para “avversiera” e, até hoje, é conhecida como “a bruxa de Agnesi”.

2.3.1 Construção da Curva de Agnesi

Consoante Siqueira (2007, p. 4), definimos a curva de Agnesi considerando uma circunferência de centro em $(0, \frac{a}{2})$ e raio $\frac{a}{2}$. Tome $AB = a$ o diâmetro da circunferência, r a reta que contém o diâmetro AB , u a reta perpendicular a r que passa por A , t a reta perpendicular a r que passa por B , M um ponto que pertence à circunferência e s a reta que passa por M e A . Seja N o ponto de intersecção das retas s e t . Assim, Siqueira (2007, p. 4) define a curva de Agnesi, exemplificada na figura 16, como o lugar geométrico dos pontos P que estão a igual distância da reta u que o ponto M , e a mesma distância da reta r que o ponto N , quando M percorre a circunferência.

Figura 16: Construção da Curva de Agnesi



Fonte: Siqueira

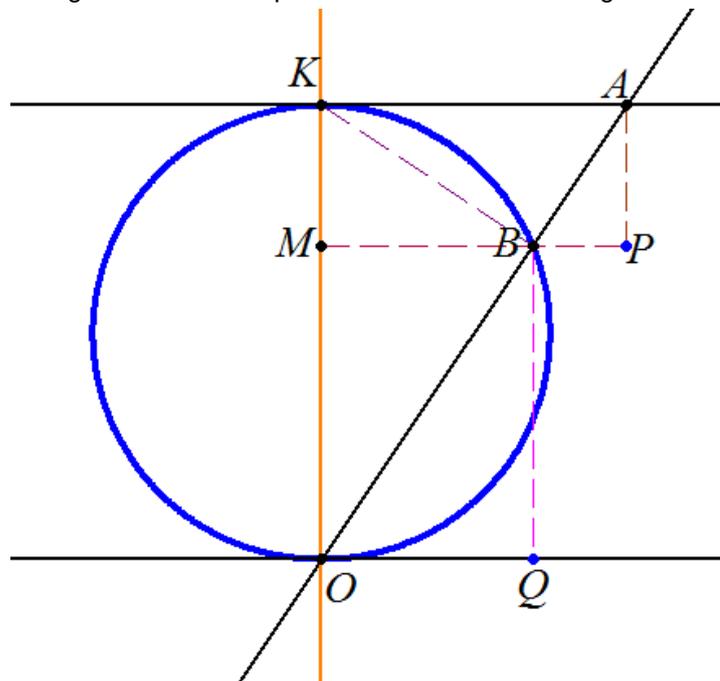
Desse modo, podemos calcular a área abaixo do gráfico com $a = 1$ e obtemos o resultado abaixo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi.$$

Logo, a área abaixo da curva de Agnesi para $a = 1$ é igual ao número irracional π . A demonstração desse resultado será apresentada posteriormente.

Para demonstrar a equação cartesiana da Curva de Agnesi, tomamos uma circunferência de diâmetro $OK = a$ como descreve a figura 17:

Figura 17: Círculo que determina a Curva de Agnesi



Sejam (x, y) as coordenadas de P que descreve a Curva de Agnesi. Pela figura temos que AK é perpendicular a OK , AP é perpendicular a BP e AP é perpendicular a AQ . Os triângulos retângulos AKO e BPA são semelhantes. O ângulo OBK é reto, pois está inscrito em um semicírculo. Assim, os triângulos retângulos AKO e ABK possuem um ângulo agudo em comum, então são semelhantes. Seguindo o mesmo raciocínio, KBO e AKO também são, assim como AKO e BPA . Então:

$$\frac{AK}{BP} = \frac{KO}{PA}, \text{ ou } \frac{x}{x-u} = \frac{a}{a-y}$$

onde u é a abscissa do ponto B . Então,

$$x(a - y) = a(x - u) \rightarrow u = \frac{xy}{a}$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(I) \text{ No triângulo } OBQ: \quad OB^2 = u^2 + y^2;$$

$$(II) \text{ No triângulo } KMB, \quad BK^2 = (a - v)^2 + u^2;$$

$$(III) \text{ No triângulo } KOB, \quad a^2 = OB^2 + BK^2$$

Tomando (I) e (II) e substituindo em (III):

$$a^2 = [u^2 + y^2] + [(a - y)^2 + u^2] \rightarrow$$

$$a^2 = u^2 + y^2 + a^2 - 2ay + y^2 + u^2 \rightarrow$$

$$u^2 + y^2 - ay = 0$$

Já vimos que $u = \frac{xy}{a}$. Substituindo na expressão acima, temos:

$$\left(\frac{xy}{a}\right)^2 + y^2 - ay = 0 \rightarrow$$

$$x^2y^2 + a^2y^2 - a^3y = 0 \rightarrow$$

$$(x^2 + a^2)y^2 - a^3y = 0 \rightarrow$$

$$y[(x^2 + a^2)y - a^3] = 0 \rightarrow$$

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

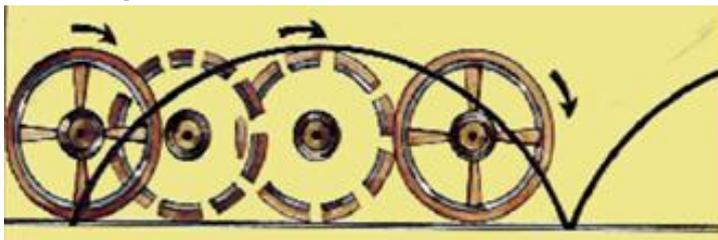
2.3.2 Aplicações

Em 1703 Fermat estudou esta curva e, na época em que foi descoberta, não se conhecia utilização prática para ela. Recentemente, foi determinado que sua forma se aproxima da distribuição do espectro de energia dos raios ópticos. Foi demonstrado que o efeito Doppler apresentou uma imprecisão na curva de Gauss e a Curva de Agnesi se aproximou mais da realidade. Há também aplicações em estatísticas. Uma pesquisa está agregando a curva ao efeito atmosférico que uma montanha pode acarretar em seu contorno.

2.4 CICLÓIDES

O primeiro matemático que começou a estudar a Ciclóide foi o francês Charles Bouvelles (1470 -1553), mas somente na primeira metade do século XVII é que ela recebeu as atenções de nomes famosos como Descartes, Mersenne, Pascal, Galileu, Torricelli e Roberval. Galileu recomendou que a Ciclóide fosse utilizada na construção de arcos de pontes. Não demorou muito e se determinou a área sob um arco da curva e se descobriram métodos de traçar tangentes a ela. Essas descobertas levaram os matemáticos citados a considerar questões relativas a superfícies e volumes de revolução obtidos girando-se um arco de ciclóide em torno de diversos eixos. Como isto ocorreu antes da invenção dos cálculos Diferencial e Integral, esses matemáticos precisaram valer-se de métodos muito criativos, como o dos "indivisíveis", divulgado por Bonaventura Cavalieri (1598-1647), uma forma equivalente de se avaliarem muitas das integrais definidas que figuram nos atuais cursos de cálculo, e que, em essência, equivalia ao método da exaustão de Eudócio/Arquimedes. A figura 18 apresenta um exemplo de Ciclóide.

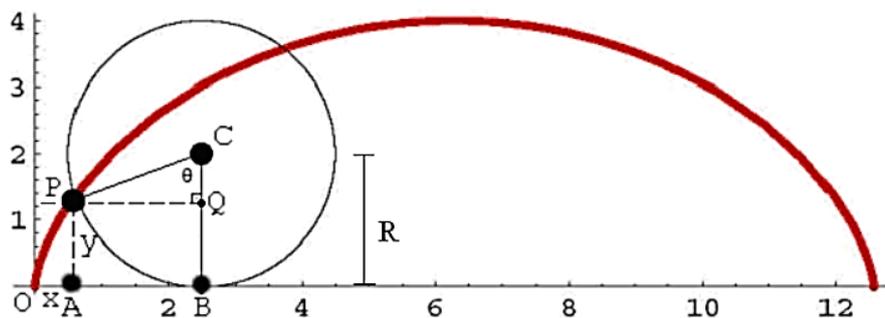
Figura 18: Roda Descrevendo uma Ciclóide



Fonte: http://www.sbhmat.org/wa_files/C14.pdf

Devido às suas propriedades foi a curva mais estudada durante o século XVII. A Ciclóide é a curva gerada pela trajetória de um ponto P numa circunferência de centro C e raio R que rola sem deslizar sobre uma reta. Fixando a reta como sendo o eixo x e denotando por θ o ângulo formado pela reta que passa por C e pelo ponto de tangência da circunferência com o eixo x e o segmento que une P com C . Para um ângulo θ genérico representamos através da figura abaixo, onde $R = 2$ para a circunferência geradora.

Figura 19: Circunferência que Gera Uma Ciclóide



Fonte: Freixo

A representação paramétrica da Ciclóide e sua demonstração serão apresentadas adiante.

2.4.1 Propriedades da Ciclóide

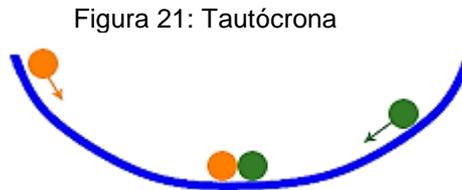
Tomando várias curvas que se unem em dois determinados pontos, um mais alto e outro mais baixo, a curva na qual o objeto demora menos tempo para vir do ponto de intersecção mais elevado ao ponto menos elevado é a Ciclóide. Devido a isto também se chama **Braquistócrona** (menor tempo), exemplificada na figura 20:

Figura 20: Braquistócrona



Fonte: http://historiaybiografias.com/preguntas_raras5/

Se um objeto desliza sobre a curva, livre de atrito e sujeito à aceleração da gravidade, o tempo que demora para alcançar o ponto mais baixo da curva é sempre o mesmo, independente do ponto de partida do objeto. Por este motivo também se dá o nome de **Tautócrona** (tempos iguais).



Fonte: <https://almargendefermat.wordpress.com/2009/02/22/la-cicloide-i-braquistocrona-y-tautocrona/>

De acordo com Freixo (2009, p. 7), essa propriedade da Ciclóide (Braquistócrona) foi descoberta por Jean Bernoulli (1667-1748) em 1696, quando pesquisava a trajetória que minimizava o tempo gasto por um corpo, partindo do repouso e sujeito apenas à ação da gravidade, para ir de um ponto a outro, em níveis diferentes e não situados sobre a mesma vertical. Bernoulli constatou que a Braquistócrona assemelha-se a um arco de Ciclóide invertida. Ao analisar a fundo esta descoberta, ficou extasiado e incitou publicamente os mais brilhantes matemáticos que existiam dos mais variados países, concedendo-lhes um semestre para que apontassem soluções do problema. Passado esse tempo, Bernoulli divulgaria sua demonstração. No prazo estabelecido, apenas G. W. Leibniz solucionou o problema. Bernoulli ampliou o prazo por mais quatro meses e remeteu várias cartas a brilhantes matemáticos, dentre os quais Isaac Newton. Este a recebeu em janeiro de 1697, quando regressava do local de trabalho (Casa da Moeda da Inglaterra). Motivado pelo problema, concentrou-se nele e solucionou na madrugada do mesmo dia. Newton divulgou sua demonstração sem anunciar sua autoria no jornal da Royal Society. Passado algum tempo, Jean Bernoulli a leu e identificou, sem hesitar, que apenas um homem na Inglaterra seria hábil para aquele feito. Bernoulli, extasiado pela genialidade de Newton, proferiu as seguintes palavras: "Pelas garras se conhece o leão". A questão da Braquistócrona foi resolvida também por Marquês de L'Hopital e Jacques Bernoulli, irmão mais velho de Jean. Podemos encontrar a elegante solução de Jacques Bernoulli na obra *What is Mathematics?* de R. Courant e H. Robbins pela editora New York, Oxford University Press publicado em 1996.

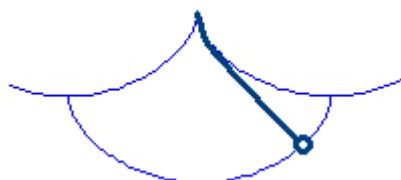
2.4.2 Curvas Tautócrona e Isócrona

Uma das propriedades que a Ciclóide possui é a de ser *Tautócrona* (tempos iguais), descoberta por Christian Huygens (1629-1695) por volta de 1656. Huygens estava a procura de produzir relógios em que a precisão fosse mais elevada que a dos que usavam pêndulos tradicionais.

Segundo Freixo (2009, p. 7), Huygens provou que um ponto material, partindo do repouso e deixado deslizar sem atrito sobre um arco de Ciclóide invertido, atinge o nível inferior em um intervalo de tempo que independe do ponto de partida. Esta propriedade é designada Tautocronismo, do grego *tauto* (igual), e *cronos* (tempo). Em outros termos, ao deslocar um pêndulo através de uma Ciclóide Invertida, esse exibe um período de oscilação independente da amplitude do movimento. A prova foi divulgada em 1673 em seu renomado tratado *Horologium Oscillatorium*, a mais importante obra sobre mecânica redigida anterior ao *Principia*, de Isaac Newton (1687).

Huygens, em 1673, descobriu também a curva ilustrada na Figura 22, denominada isócrona, e resultou ser também uma ciclóide. Portanto, dispondo de um pêndulo oscilando entre duas ciclóides, esse é *isócrono*, descrevendo, por sua vez, uma ciclóide.

Figura 22: Pêndulo Isócrono



Fonte: <http://www.ciencianet.com/helena.html>

Por possuir inúmeras propriedades, e por ter sido centro de disputa entre muitos matemáticos da época, a Ciclóide foi batizada de a "*Helena da Geometria*" ou o "*pomo da discórdia*".

2.4.3 Epiciclóide e Hipociclóide

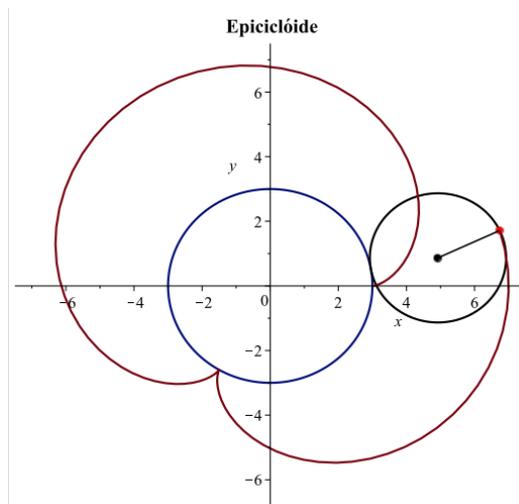
Denominamos Epiciclóide a curva plana esboçada por um ponto escolhido numa circunferência de raio r que gira externo a outro círculo cujo raio é R . Obtemos a Hipociclóide do mesmo modo, no entanto giramos o círculo do raio r interno à circunferência de raio R . As equações paramétricas que descrevem a Epiciclóide e a Hipociclóide, são:

$$x(\theta) = (R + s.r) \cdot \cos\theta + s.r \cdot \cos\left(\frac{R + s.r}{r} \cdot \theta\right)$$

$$y(\theta) = (R + s.r) \cdot \sin(\theta) - r \cdot \sin\left(\frac{R + s.r}{r} \cdot \theta\right)$$

Para $s = 1$ a equação descreve uma Epiciclóide (Figura 23). Se $s = -1$, uma Hipociclóide.

Figura 23: Epiciclóide



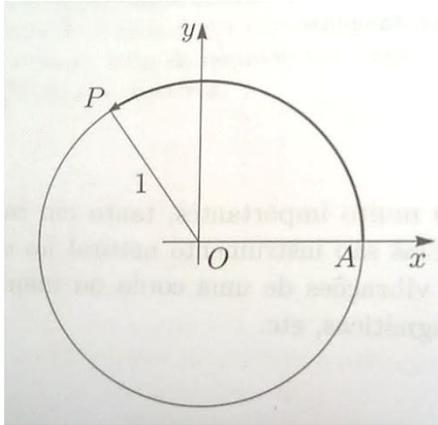
Fonte: The Mobius Project

2.5 SENÓIDE E COSSENÓIDE

Seja dada uma circunferência no plano Oxy de centro na origem e raio uma unidade de comprimento. Seja θ um número real. Marcamos sobre a circunferência, a partir do ponto $A = (0,1)$, o arco $AP = \theta$. Consideramos θ no

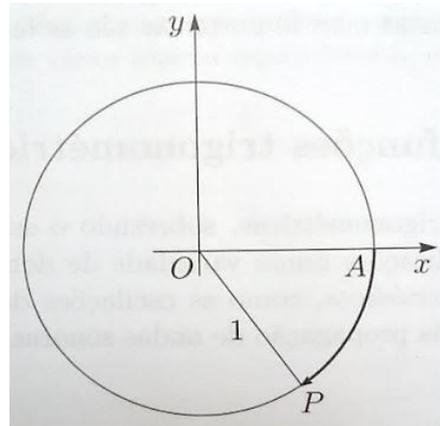
sentido anti-horário se θ for positivo. Se negativo, no sentido horário (Figuras 24 e 25).

Figura 24: Ponto P Sentido Anti-Horário



Fonte: Geraldo Ávila

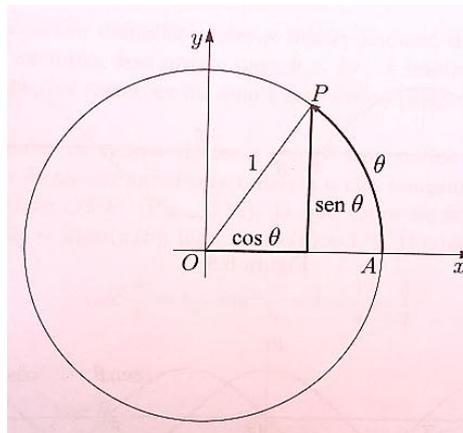
Figura 25: Ponto P Sentido Anti-Horário



Fonte: Geraldo Ávila

Ávila (2012, p. 114) define o *seno* de θ a ordenada do ponto P . Sua notação é $\text{sen } \theta$ e o *cosseno* de θ , indicado por $\text{cos } \theta$, pela abscissa de P . Sabemos que P pertence à circunferência unitária. Logo, pelo Teorema de Pitágoras temos $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$, relação fundamental da Trigonometria (Figura 26).

Figura 26: Relação Fundamental da Trigonometria



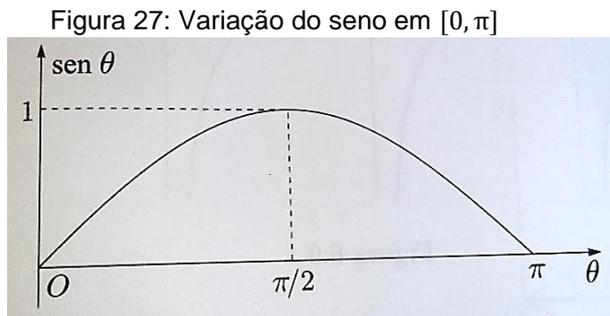
Fonte: Geraldo Ávila

2.5.1 Gráficos de seno e cosseno

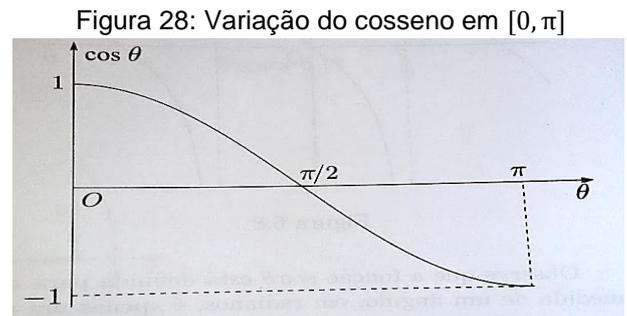
À medida que o ponto P se move sobre a circunferência, sua abscissa e ordenada variam e, nunca superam a medida do raio da circunferência, que mede 1. Em linguagem matemática, isso significa que:

$$-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \text{cos } \theta \leq 1$$

O seno cresce de 0 a 1, quando θ varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$ e o cosseno decresce de 1 a 0; quando θ varia de $\frac{\pi}{2}$ a π , o seno decresce de 1 a 0 e o cosseno decresce de 0 a -1 (Figuras 27 e 28).



Fonte: Geraldo Ávila



Fonte: Geraldo Ávila

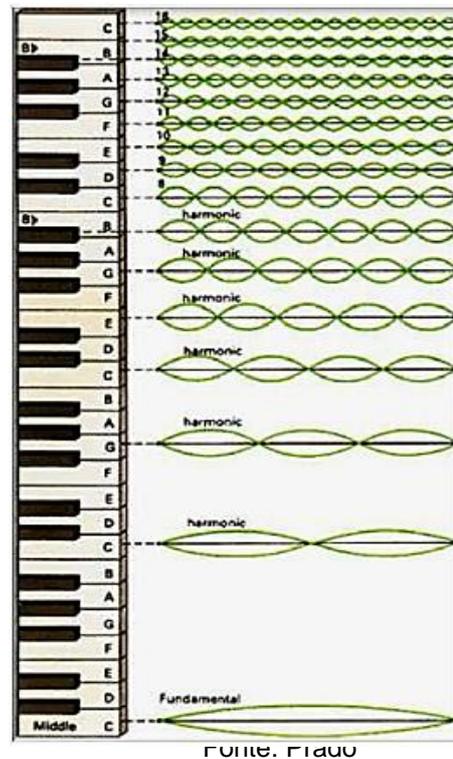
2.5.2 Aplicações da Senóide

A senóide possui várias aplicações, principalmente na física com estudo de osciladores, correntes alternadas, dentre outras. Uma aplicação interessante vemos na música. O osciloscópio é um instrumento que transcreve ondas sonoras em imagens.

”Os cientistas verificaram que a maioria dos sons musicais formam estruturas definidas por ondas e descritas por funções matemáticas (chamadas de “função seno” ou “senóide”). Por meio de um osciloscópio, podemos “ler” a matemática que há por trás da uma música ou qualquer tipo de som, além disso podemos verificar que cada instrumento produz uma modalidade matemática diferente, ou seja, cada tipo de instrumento musical tem uma espécie de “assinatura”. (PRADO, 2013, p. 98)

Vejamos na Figura 29:

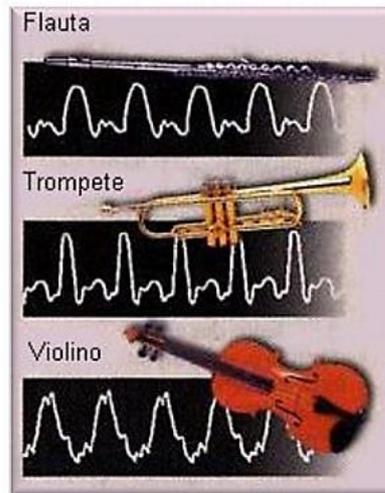
Figura 29: Frequências das Notas Musicais



Harmônicos, segundo Prado (2013, p. 91), são os sons produzidos por um corpo a partir de um estímulo e devido às suas características físicas, consistem em uma frequência principal e seus múltiplos inteiros (o dobro, o triplo, etc). Prado ainda define o Timbre como sendo a variação da intensidade que cada um dos múltiplos da frequência natural tem. Adicionando estes múltiplos, o aspecto característico do som de um instrumento musical é produzido.

Um trompete e um violino transmitem a mesma nota com timbres distintos. Este acontecimento se deve ao fato de que mesmo a frequência fundamental dos sons sendo iguais nos dois instrumentos, a agitação das frequências harmônicas é distinta. No violino, uma imensa escala de harmônicos encontra-se unido à fundamental. A união desses sons possui como consequência o timbre do instrumento. Em sua maioria, os sons naturais são arranjos de sinais, todavia um som puro monotônico é representado por uma senoide pura. Observe a Figura 30:

Figura 30: Frequências de Instrumentos Musicais



Fonte: Prado

2.6 LEMNISCATA

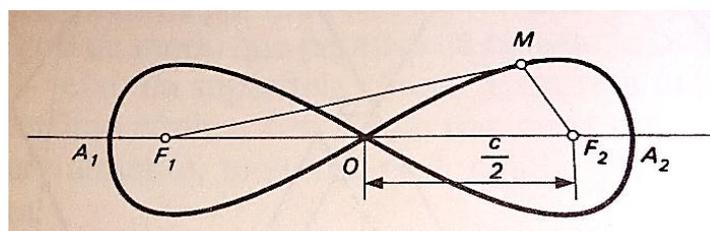
Considere a curva traçada pelos pontos M de modo que o produto das distâncias de M a dois pontos fixados F_1 e F_2 mantenha-se constante. De acordo com MARKUCHEVITCH (1995, p. 19), esta curva se denomina *lemniscata* e significa “em forma de um laço de fita”. Seja c o comprimento do segmento F_1F_2 e O o ponto médio entre F_1 e F_2 . Então, a distância de O a qualquer um desses pontos será $\frac{c}{2}$ e o produto das distâncias será $\frac{c^2}{4}$.

Primeiramente, verificaremos o caso em que $p = \frac{c^2}{4}$, ou seja,

$$MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4};$$

isto posto, a lemniscata conterà o ponto O e aparentará um “oito deitado” (Figura 31).

Figura 31: Lemniscata



Fonte: Markuchevitch

Prolongando nas duas direções o segmento F_1F_2 até intersectar a curva, obteremos os pontos A_1 e A_2 . Para expressar a distância $A_1A_2 = x$ em função de c que é o comprimento do segmento F_1F_2 , basta notar que $A_2F_2 = \frac{x}{2} - \frac{c}{2}$ e $A_2F_1 = \frac{x}{2} + \frac{c}{2}$. Assim, o produto dessas distâncias será:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}.$$

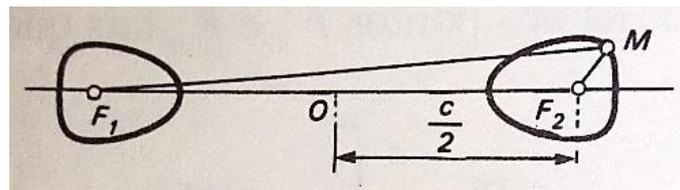
No entanto, pela hipótese, temos que esse produto deve ser $\frac{c^2}{4}$, ou seja,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}, \text{ de onde } x^2 = 2c^2 \text{ e } x = \sqrt{2}c = 1,414c.$$

2.6.1 Formas de Lemniscatas

Analisaremos o caso em que p é diferente de $\frac{c^2}{4}$. Em tal situação a lemniscata apresentará uma forma diferente. Se $p < \frac{c^2}{4}$, a lemniscata é formada por duas ovas, onde uma contém o ponto F_1 e a outra contém o ponto F_2 (Figura 32).

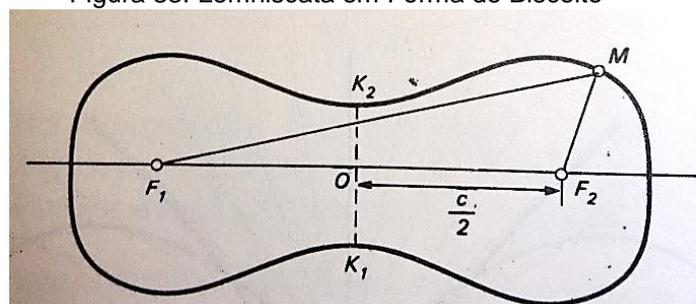
Figura 32: Lemniscata Formada por Duas Ovas



Fonte: Markuchevitch

Se $\frac{c^2}{4} < p < \frac{c^2}{2}$, a lemniscata terá a forma abaixo (Figura 33):

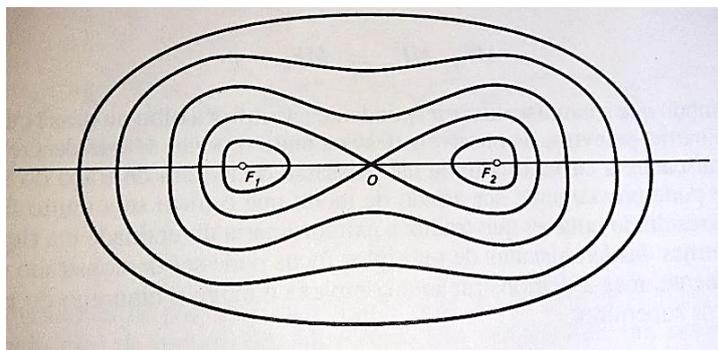
Figura 33: Lemniscata em Forma de Biscoito



Fonte: Markuchevitch

Se p for muito próximo de $\frac{c^2}{4}$, a distância K_1K_2 será bastante estreita e ficará próximo da forma de um “oito deitado”. Se p for próximo de $\frac{c^2}{2}$, a cintura da curva quase não é marcada e, para p igual ou superior a $\frac{c^2}{2}$, a cintura desaparece totalmente e a lemniscata fica na forma oval. Abaixo, temos a representação de distintas lemniscatas (Figura 34):

Figura 34: Lemniscatas com vários formatos



Fonte: Markuchevitch

2.6.2 Lemniscatas de n focos

Consideremos um número qualquer de pontos F_1, F_2, \dots, F_n no plano e movamos o ponto M de forma que o produto de suas distâncias aos pontos permaneça constante. Vamos obter uma curva onde a forma dependerá da posição dos pontos F_1, F_2, \dots, F_n e do valor do produto constante. Denominaremos essa curva de *lemniscata de n focos*.

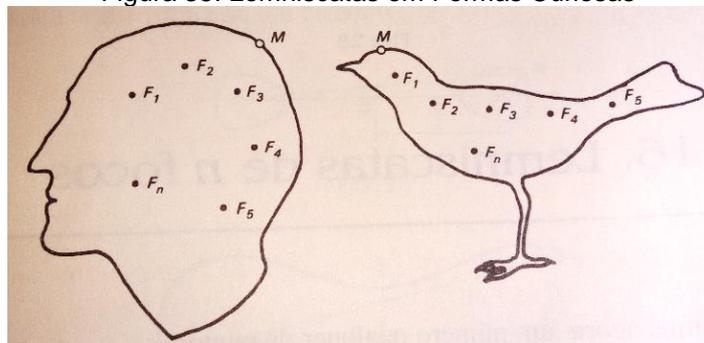
Ao escolher mais de dois focos, dispô-los de diferentes formas e designando valores distintos aos produtos das distâncias, obteremos lemniscatas de formas bastante curiosas. Traçando sobre um papel a partir de um ponto dado A , de modo que volte ao ponto inicial. Assim obteremos uma certa curva. A única exigência é que a curva não se intersecte. Evidentemente, desse modo obteremos curvas que podem ter a forma de uma cabeça humana ou de um pássaro. Sempre podem ser escolhidos o número n , a posição dos focos F_1, F_2, \dots, F_n e o valor do produto constante das distâncias

$$MF_1 \cdot MF_2 \cdot \dots \cdot MF_n = p$$

De modo que a lemniscata correspondente não difira a olho nu dessa curva.

“Em outras palavras, os possíveis desvios entre o ponto M que descreve a lemniscata e a curva escolhida não passarão da largura do traço do lápis (que pode ser afiado de modo que o traço seja muito fino). Esse resultado notável que traduz a extraordinária diversidade e a riqueza de formas das lemniscatas de múltiplos focos pode ser demonstrados rigorosamente, mas a demonstração é complexa e exige o emprego de matemáticas superiores.” (MARKUCHEVITCH, 1995, p. 24)

Figura 35: Lemniscatas em Formas Curiosas



Fonte: Markuchevitch

2.7 ESPIRAIS

De acordo com Figueira (2007, p. 5), definimos geometricamente a espiral como uma curva plana gerada por um ponto P de uma reta que passa sempre por um ponto fixo O denominado pólo e que gira uniformemente em torno de O . O ponto P se desloca continuamente ao longo da reta OP com alguma lei, resultando diferentes tipos de espiral de acordo com essa lei de deslocamento.

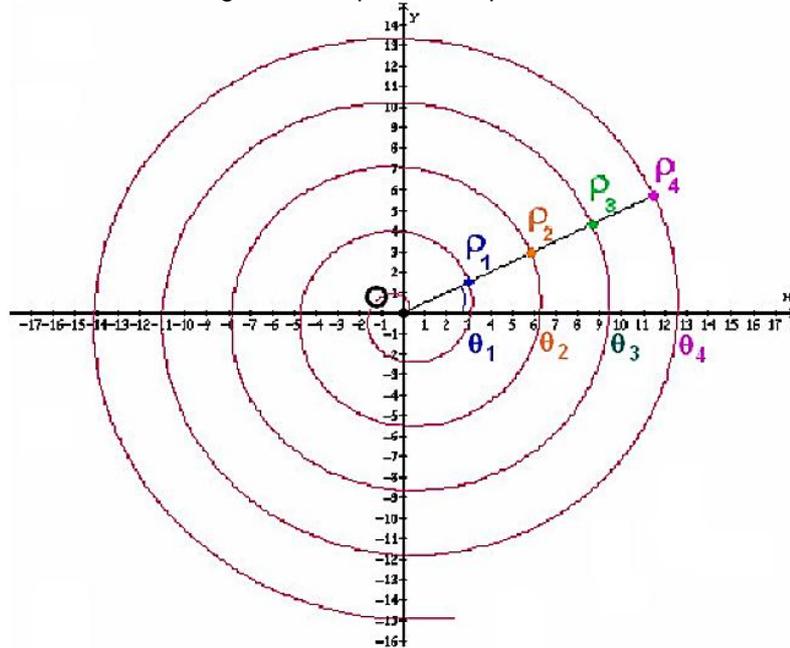
Geralmente, são definidas utilizando coordenadas polares, r e θ .

2.7.1 Espiral de Arquimedes

Chamamos de raio vetor a distância $\rho = OP$. Esse valor define o deslocamento do ponto P na reta. Se a variação desse valor é proporcional ao ângulo θ de rotação da reta, a partir do eixo polar, com a equação $\rho = k\theta$, a curva resulta na conhecida Espiral de Arquimedes (também conhecida como espiral

uniforme – Figura 36). Essa última denominação é atribuída pelo fato da uniformidade entre as distâncias das espirais.

Figura 36: Espiral de Arquimedes



Fonte: Figueira

Temos:

$$\rho_1 = k \cdot \theta_1$$

$$\rho_2 = k \cdot \theta_2 = k \cdot (\theta_1 + 2\pi)$$

$$\rho_3 = k \cdot \theta_3 = k \cdot (\theta_2 + 2\pi)$$

$$\rho_4 = k \cdot \theta_4 = k \cdot (\theta_3 + 2\pi)$$

Calculando a distância entre as espirais consecutivas, temos:

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_3 - \rho_2 = \rho_4 - \rho_3 = 2\pi \cdot k$$

O pioneiro nos estudos dessa curva foi Arquimedes, donde se justifica ela ser conhecida como Espiral de Arquimedes. Quando o raio vetor gira uma volta completa (2π), há um aumento de $2\pi \cdot k$ no próprio. Se k é pequeno, a distância entre as espirais são pequenas.

2.7.2 Espiral Logarítmica

O raio também pode variar pela lei $\rho = \rho_0 \cdot e^{k \cdot \theta}$, onde ρ_0 é o valor inicial do raio vetor (com $\theta = 0$) e k é uma constante que se relaciona com a inclinação da espiral em relação ao raio vetor.

Para entender o significado da constante k , apliquemos o logaritmo em ambos os membros da equação acima. Teremos:

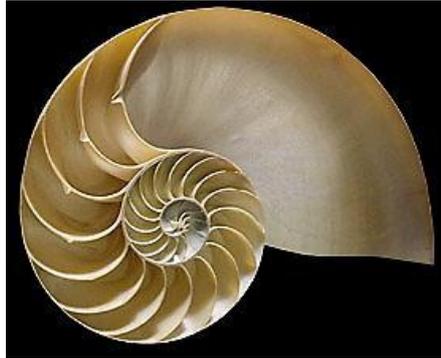
$$\log \rho = \log \rho_0 \cdot e^{k \cdot \theta} \Leftrightarrow k \cdot \theta = \log \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

Assim, k é o logaritmo da relação entre o raio vetor inicial ($\theta = 0$) e o raio vetor ρ de um giro de 1 radiano. Por este motivo, essa espiral se denomina “espiral logarítmica”. Sua equação na forma polar é: $r = a \cdot e^{k \cdot \theta}$, com $a > 0$ e $k > 0$, sendo r o raio, a o raio inicial, k uma constante e θ o ângulo polar.

A Espiral Logarítmica na Arte e na Natureza

Segundo Maor (2008, p. 175), provavelmente nenhuma outra curva exerce fascínio maior para cientistas, artistas e naturalistas do que a espiral logarítmica. Jakob Bernoulli a chamava de *spira mirabilis* e a considerava notável pelas propriedades matemáticas que a torna única entre as curvas planas. Desde a antiguidade ela é utilizada como modelo decorativo favorito, por conta da graciosidade de sua forma. Na natureza, com exceção do círculo (que é um caso particular da espiral logarítmica), ela ocorre mais frequentemente do que qualquer outra curva. Um exemplo fascinante e preciso é a concha do náutilo, como vemos na Figura 37.

Figura 37: Concha do Náutilo



Fonte: <http://bio-orbis.blogspot.com.br/2015/09/voces-conhecem-o-nautilus.html>

“Talvez o fato mais notável sobre a espiral logarítmica é que ela parece a mesma em todas as direções. Mais precisamente, cada linha reta através do centro (o pólo) atravessa a espiral exatamente com o mesmo ângulo. Por isso ela também é conhecida como espiral equiangular. Esta propriedade dá à espiral a simetria perfeita do círculo – de fato, o círculo é uma espiral logarítmica para a qual o ângulo de intersecção é 90° e a taxa de crescimento é 0.” (MAOR, 2008, p. 175)

Outra característica que se relaciona com a primeira é o fato de que se girarmos por arcos iguais a espiral, a distância ao pólo aumenta por uma taxa igual, ou seja, uma progressão geométrica. Disso resulta que, traçando um par de linhas através dos pólos e fixando um ângulo entre as linhas, as divisões cortadas da espiral são semelhantes (não são congruentes). Nota-se perfeitamente essa característica na concha do náutilo, onde as câmaras são perfeitamente réplicas umas das outras, apenas aumentando o tamanho. A espiral logarítmica é o crescimento preferido de algumas formas da natureza como as cochas, chifres, girassóis, furacões e galáxias (Figura 38).

Figura 38: Galáxia e Furacão em Formato Espiral



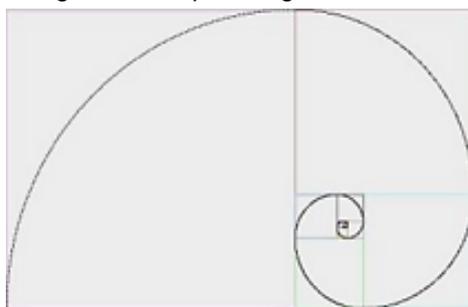
Fonte: <http://www.zenite.nu/galaxias-e-furacoes/>

Na figura 38 é possível notar a Galáxia de Andrômeda e um furacão visto através de satélite. Ambos possuem formatos de uma espiral.

No início do século XX, a arte grega voltou a ficar em evidência assim como sua relação com a matemática. Muitos estudiosos tentaram formular matematicamente o conceito de beleza a partir de teorias sobre a estética. Assim voltou ao foco a espiral logarítmica. A espiral ficou em tanta evidência nessa época que, em 1914, Sir Theodore Andrea Cook publicou o livro *The Curves of Life* que contém quase 500 páginas dedicadas apenas à espiral e sua ligação com a arte e a natureza. Em 1926, Jay Hambdige escreveu *Dynamic Symmetry* e, segundo Maor, “influenciou um geração de artistas que buscavam a beleza e harmonia perfeitas” (MAOR).

Em seu livro, Hambdige se utilizou da *regra de ouro*, número utilizado por Leonardo da Vinci em suas pinturas mais famosas. Tomando um segmento de linha, devemos dividir de modo que o todo esteja para a parte maior, assim como a parte maior esteja para a parte menor. Indicamos essa proporção pela letra φ (fi) e seu valor é $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1,618 \dots$. Para muitos artistas o retângulo de ouro, cuja razão comprimento-largura é igual a φ , é o que apresenta dimensões mais harmoniosas, sendo assim muito utilizado na arquitetura. A partir de um retângulo de ouro pode ser formado um novo retângulo dourado e seu comprimento é a largura do retângulo original. Realizando esse processo infinitamente, teremos uma sequência interminável de retângulos dourados e seu tamanho se reduz até zero. Desse modo teremos uma espiral logarítmica inscrita nos retângulos de ouro construídos. Veja na Figura 39:

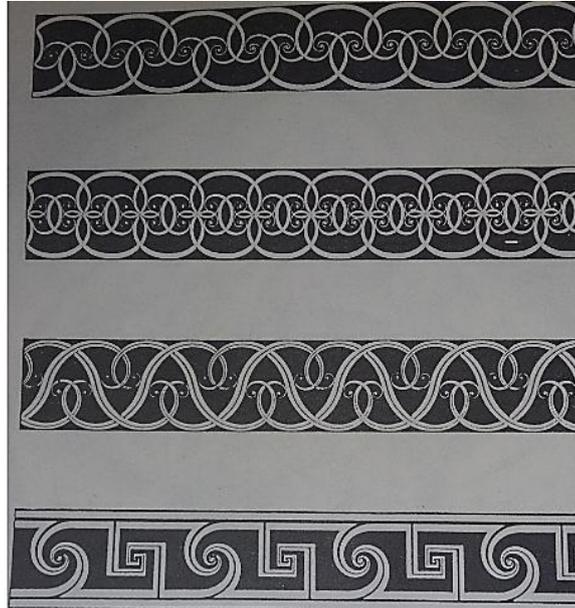
Figura 39: Espiral Logarítmica



Fonte: <http://www.scoop.it/t/donde-reside-la-belleza>

Mauritius C. Escher (1898-1972), artista holandês, utilizou a espiral de ouro em seus trabalhos mais criativos (Figura 40).

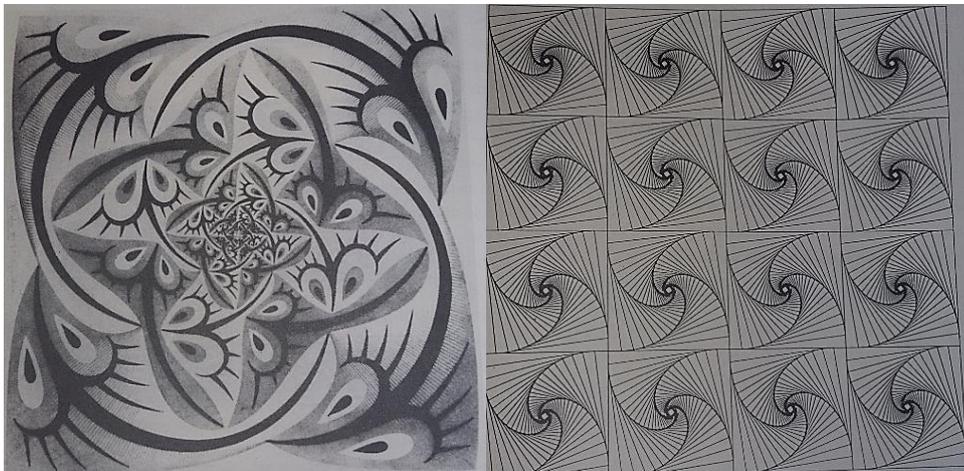
Figura 40: Desenhos de Escher



Fonte: MAOR

O Problema dos Quatro Insetos inspirou muitos desenhos em que aparecem as espirais logarítmicas. O problema diz o seguinte: Imagine quatro insetos posicionados nos vértices de um retângulo. Ao ouvir um sinal sonoro, os insetos se movem em direção ao seu vizinho. O curso que eles seguirão e onde se encontrarão revelam uma espiral logarítmica e convergem para o centro. A Figura 41 representa dois desenhos inspirados no Problema dos Quatro Insetos.

Figura 41: Desenhos Inspirados no Problema dos Quatro Insetos

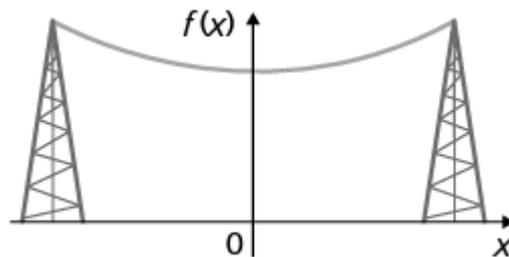


Fonte: MAOR

2.8 CATENÁRIA

A curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso em suas extremidades submetido apenas à força da gravidade é conhecida como catenária (em latim, corrente). Está descrita geometricamente na Figura 42.

Figura 42: Modelo da Catenária



Fonte: <http://www.xn--e-matematica-q7a.com/index.php/12-ano-matematica-a/manual-xeqmat/exercicios-das-margens-xeqmat-2-volume/550-085-problema-xeqmat-12-ano-2-volume>

O problema em descrever essa curva matematicamente foi proposto por Galileu Galilei (1564 - 1642) onde ele considerava que a curva era uma parábola. Em 1647, Christiaan Huygens, matemático e físico holandês, mostrou que a conjectura de Galileu era falsa, utilizando argumentos físicos. No entanto, Huygens não encontrou a expressão analítica da curva. Joachim Jungius (1587 – 1657), também matemático, contestou a ideia de que a curva era uma parábola. Em 1690 Jakob Bernoulli lançou o desafio publicamente aos matemáticos de sua época e assim, surgiram três soluções: Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz. As três descreviam geometricamente a curva, o que equivale à sua equação e mostravam as principais propriedades. No entanto, nenhuma explicava o método para encontrá-la. Huygens resolveu utilizando o euclidiano clássico. Bernoulli e Leibniz se utilizaram do cálculo diferencial. Nesse momento, finda o estilo arquimediano da matemática e aparece o primeiro sucesso público do novo cálculo.

Para demonstrar a resolução de tal problema, adotaremos a solução de Bernoulli por ser mais simples em relação ao de Leibniz. A solução se divide em três partes. No início, usando argumentos da mecânica clássica dos corpos em equilíbrio

, Bernoulli deduz a equação diferencial abaixo, que deve ser satisfeita pela catenária:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}, \text{ sendo } a \text{ uma constante e } s \text{ o comprimento do arco.}$$

O comprimento do arco é calculado da seguinte forma:

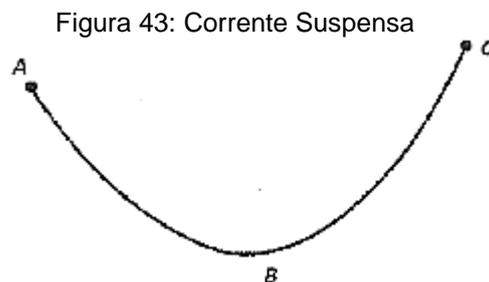
$$s = \int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} dy$$

Como x e y aparecem implicitamente não dá pra resolver diretamente a equação diferencial. Então Bernoulli transformou a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$ na equação explícita $dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$. A terceira parte consiste na resolução da equação determinando a curva que a satisfaz.

2.8.1 Demonstração da Equação da Catenária

Bernoulli resolveu através de uma construção geométrica, ou seja, pelo método de construção dos pontos da curva, interpretando como uma área, porque nessa época não tinham conhecimento de funções logarítmicas e exponenciais. As suas hipóteses sobre a corrente suspensa foram as seguintes: (Demonstração encontrada em FARIA, 2011).

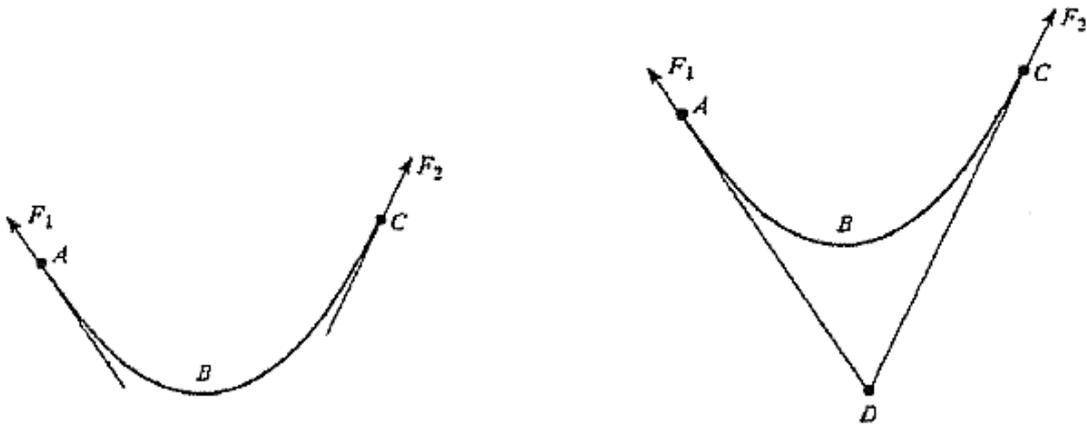
I) A corrente é amplamente flexível:



Fonte: Faria

II) F_1 e F_2 são duas forças que sustentam a corrente ABC em A e C , assim como sustentam o peso D que é o mesmo peso da corrente ABC suspensa por cordas AD, CD ao longo das tangentes à curva em A e C .

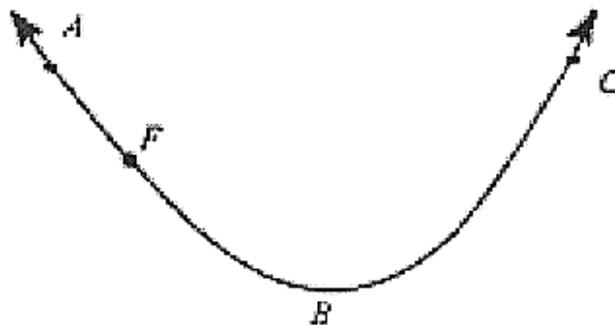
Figura 44: Forças que Atuam



Fonte: Faria

III) A corda é inextensível, ou seja, se a corda está suspensa nos pontos A e C e fixamos um ponto F e retiramos a parte AF , a parte FBC não muda formato.

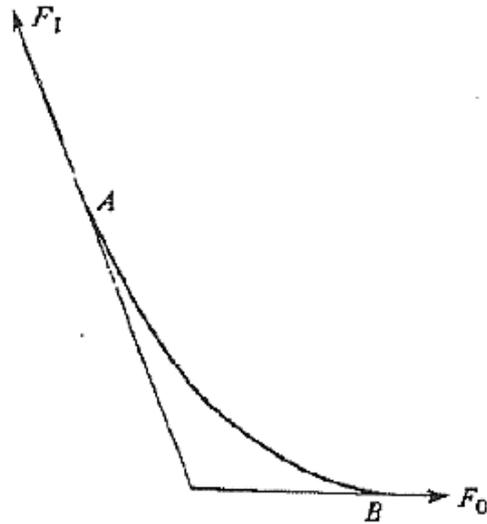
Figura 45: Corda Inextensível



Fonte: Faria

IV) Agora suponha que o ponto B, o mais baixo da corrente, esteja fixo. De acordo com a hipótese III, temos que a força \vec{F}_0 que a corrente exerce em B independe da posição do outro ponto de suspensão A.

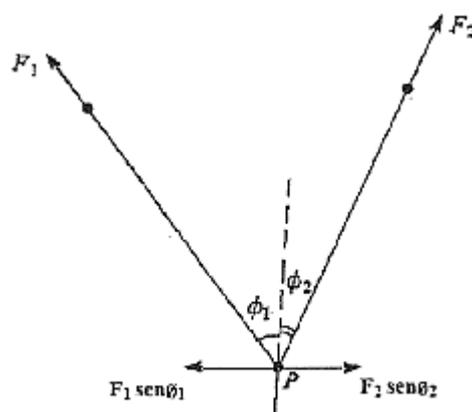
Figura 46: Força \vec{F}_0



Fonte: Faria

V) Se as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 sustentam o peso \vec{P} atuando em D, as cordas sem peso formam com a vertical os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 .

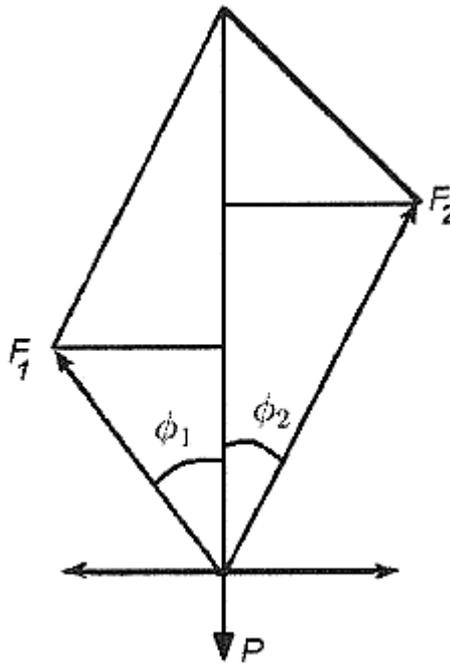
Figura 47: Ângulos Entre as Forças



Fonte: Faria

VI) Como há equilíbrio, a soma das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 deve se igualar à força \vec{P} . Dessa forma, a diagonal do paralelogramo formado por \vec{F}_1 e \vec{F}_2 de comprimento igual à força \vec{P} é colinear com a soma das forças. Decompondo as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 nos eixos horizontais e verticais temos $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{P}$ e as componentes horizontais \vec{F}_1 e \vec{F}_2 se anulam. Assim:

Figura 48: Decomposição das Forças



Fonte: Faria

$$F_1 \text{sen} \varphi_1 = F_2 \text{sen} \varphi_2 , \quad (\text{I})$$

onde: $F_1 = ||\vec{F}_1||$ e $F_2 = ||\vec{F}_2||$

Temos: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{sen} \varphi_2}{\text{sen} \varphi_1} \quad (\text{II})$

e também: $F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 = P$, (III)

onde $P = ||\vec{P}||$.

Tomando $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{sen} \varphi_2}{\text{sen} \varphi_1} \rightarrow F_1 = F_2 \frac{\text{sen} \varphi_2}{\text{sen} \varphi_1}$ e substituindo em (III), obtemos:

$$F_2 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2}{\text{sen} \varphi_1} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \right) = P$$

Desse modo: $\frac{P}{F_2} = \left[\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \varphi_1}{\text{sen} \varphi_1} \right] \rightarrow$

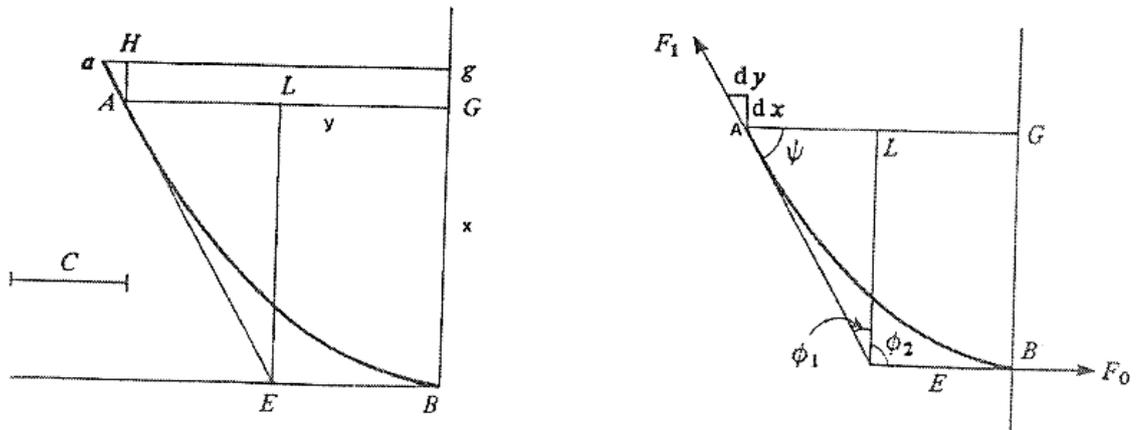
$$\frac{P}{F_2} = \frac{\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\text{sen} \varphi_1} \quad \text{(IV)}$$

Deduzimos também, de forma semelhante a razão:

$$\frac{P}{F_1} = \frac{\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\text{sen} \varphi_2}$$

Bernoulli dizia que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_0 sustentavam a corrente nos pontos da catenária A e B , respectivamente, sendo B o ponto mais baixo da curva. As mesmas forças sustentam o peso de AB em E . Como o peso da corrente é distribuído em seu todo, podemos escolher as unidades de comprimento e peso de forma que o peso da corrente AB seja igual ao comprimento $\frac{s}{2}$. Bernoulli tornou \vec{F}_0

igual a a por aquele ser constante.

Figura 49: Forças \vec{F}_1 e \vec{F}_0 

Fonte: Faria

Resulta da hipótese VI:

A) Aplicando em IV:

$$\frac{PESO\ AB}{a} = \frac{\text{sen}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{sen}\varphi_1}$$

Da figura acima, temos:

$$P = S = PESO\ AB, \quad F_2 = F_0, \quad F_0 = a, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180^\circ \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ - \psi$$

$$\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{sen}(180^\circ - \psi) = \text{sen}180^\circ \cdot \text{cos}\psi - \text{sen}\psi \cdot \text{cos}180^\circ$$

Concluimos: $\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = -\text{sen}\psi \cdot (-1) \rightarrow \text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{sen}\psi$

Desse modo, temos:

$$\frac{s}{a} = \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi_1} = \frac{\frac{EL}{AE}}{\frac{AL}{AE}} = \frac{EL}{AE} \cdot \frac{AE}{AL} = \frac{EL}{AL}$$

B) Na segunda figura, obtemos:

$$\cos \varphi_1 = \frac{EL}{F_1} \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{EL}{\cos \varphi_1}$$

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{AL}{F_1} \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{AL}{\text{sen } \varphi_1}$$

Comparando os resultados de F_1 , temos:

$$\frac{EL}{\cos \varphi_1} = \frac{AL}{\text{sen } \varphi_1} \quad \rightarrow \quad \frac{EL}{AL} = \frac{\cos \varphi_1}{\text{sen } \varphi_1}$$

Pelo equilíbrio dos corpos, a soma das forças se anulam. Resulta que o peso P é igual a EL , todavia:

$$P = \text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Assim:

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\text{sen } \varphi_1}$$

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)}{\text{sen } \varphi_1}$$

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \cos \varphi_1 + \text{sen } \varphi_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{\text{sen } \varphi_1}$$

Donde:

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\cos \varphi_1}{\text{sen } \varphi_1} = \frac{s}{a}$$

C) Temos uma semelhança entre os triângulos ELA e AaH, assim:

$$\frac{EL}{dx} = \frac{AL}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{EL}{AL} = \frac{s}{a}$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$

Representa a equação diferencial da catenária em função de y, x e s .

Para obtermos a equação cartesiana da Catenária, precisamos resolver essa equação diferencial.

2.8.2 Catenária na Arquitetura

Vimos acima que a catenária é a curva que equilibra o seu peso com a tensão interna do cabo e é formada por um fio entre dois postes.

Por conta desse equilíbrio, a catenária invertida é a mais eficaz para a construção de arcos. Dentre várias, temos como exemplo belíssimas construções, tais como o Gateway Arch, em Saint Louis (Figura 50), Estados Unidos; outro exemplo é a Ponte de Lupu, em Xangai, na China (figura 51) e a Basílica da Sagrada Família, em Barcelona (Figura 52), na Espanha.

Figura 50: Gateway Arch



Fonte: <http://www.planetware.com/>

Figura 51: Ponte de Lupu



Fonte: <http://pt.dreamstime.com/>

Figura 52: Basílica



Fonte: <http://estruturandocivil.com.br>

De acordo com Carvalho, suas propriedades (da catenária) a tornam boa para a construção de fornos para cerâmica que não se deformam com altas variações de temperatura, de colmeias com formatos inovadores ou de barracas de camping que resistem a fortes ventos, mostrados nas fotos a seguir (Figura 53):

Figura 53: Catenária na Arquitetura



Fonte: Carvalho

Até cadeiras são inspiradas nessa bela curva, assim como vários projetos modernistas, como casa de uma fazenda orgânica, no deserto de Thar, na Índia (Figura 54).

Figura 54: Catenária na Arquitetura



Fonte: Carvalho

3. SOFTWARE WINPLOT

Em 1985, Richard Parris, professor da *Philips Exeter Academy*, desenvolveu o software Winplot, instrumento de construção das curvas presente neste trabalho. No início, o software tinha por nome Plot e era executado em DOS. Após o Windows ser lançado, houve uma mudança no nome e passou a se chamar

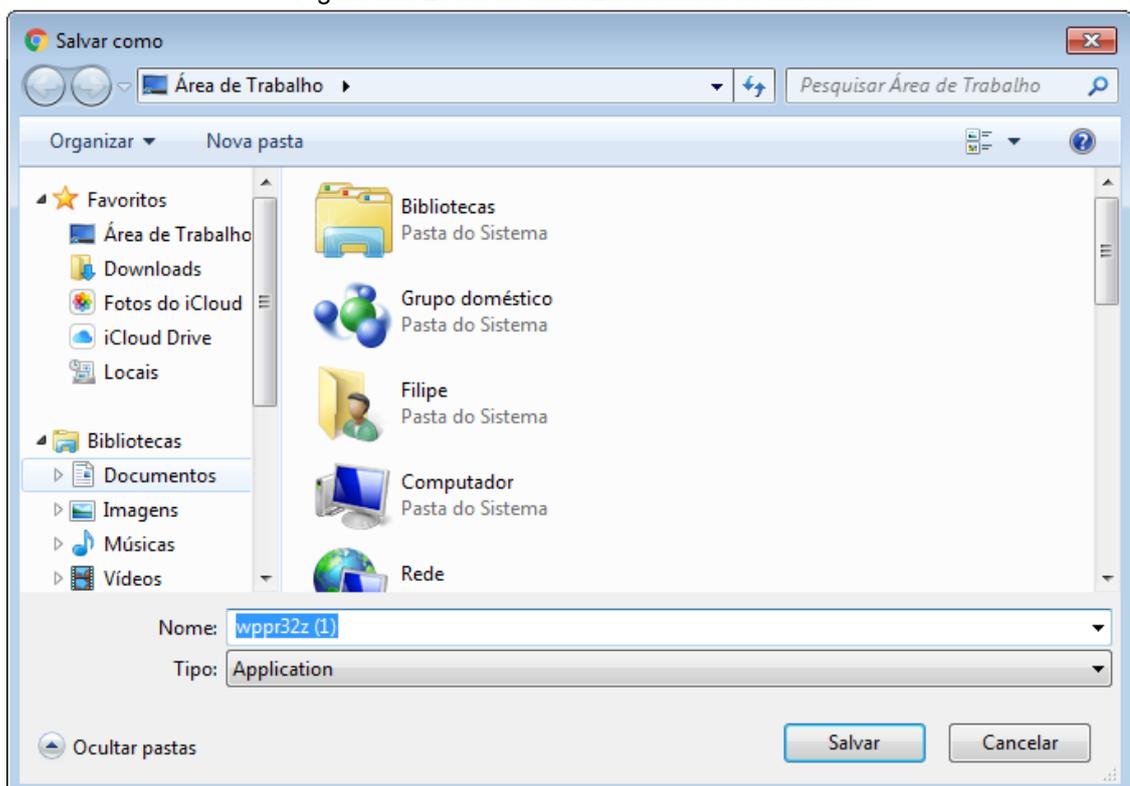
Winplot. Este programa executa diversos comandos, todavia sua principal aplicabilidade é na construção de gráficos de funções de uma ou mais variáveis.

Para baixar o programa, basta acessar o link <http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe>, que traz a versão em português. O software é gratuito.

3.1. INSTALAÇÃO

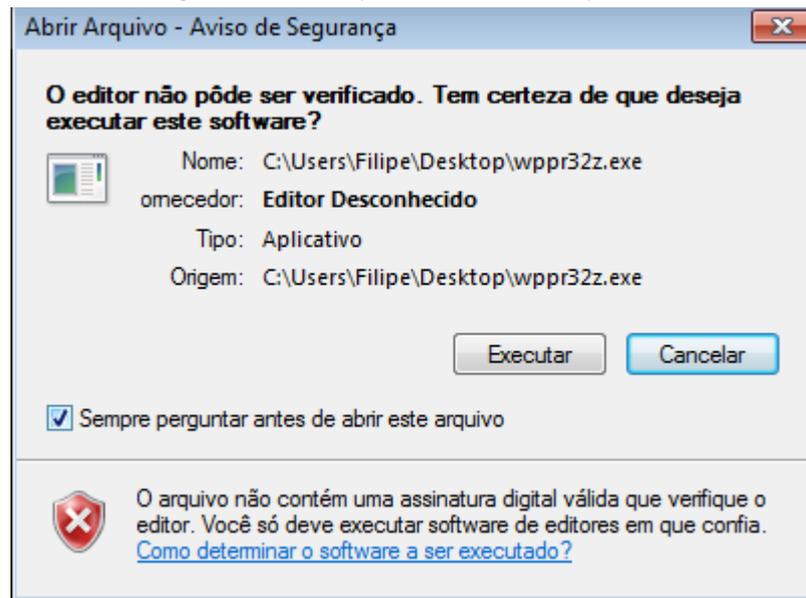
Ao clicar no link aparecerá a seguinte caixa de diálogo (Figura 55) para enviar ao local que desejamos guardar o programa:

Figura 55: Local de armazenamento do software



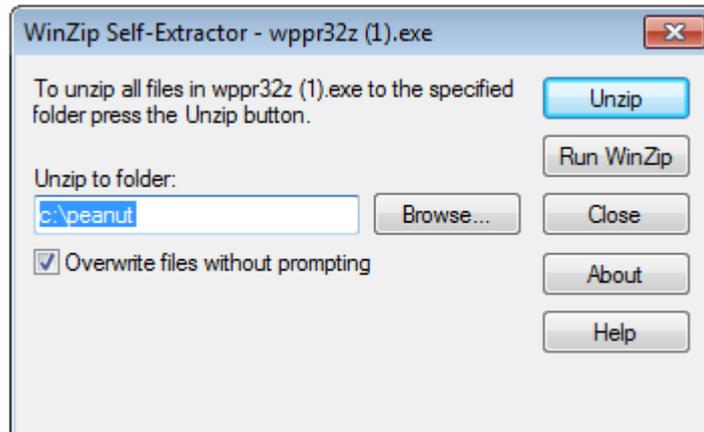
Após escolher o local surgirá a imagem da figura 56. Nela clicamos em executar.

Figura 56: Botão para executar o arquivo



Em seguida, a janela representada na figura 57:

Figura 57: Botão para descompactar o arquivo



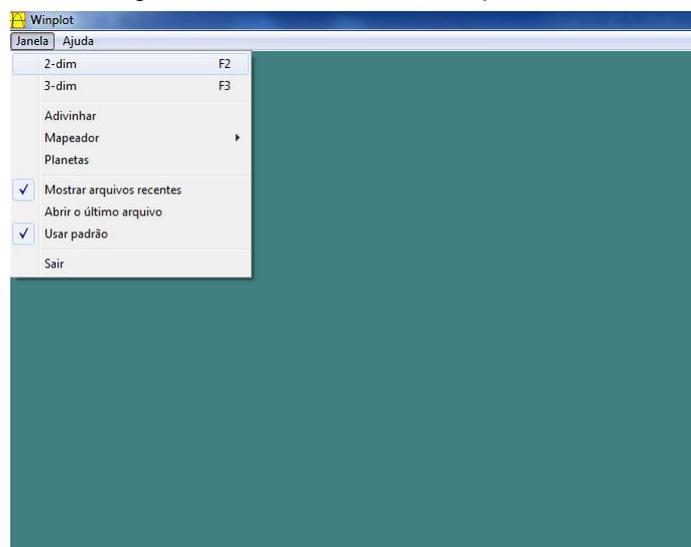
Escolhemos o diretório e clicamos em “Unzip”. Um atalho será criado na área de trabalho para uma utilização mais rápida do software. Para utilizar o programa basta um clique duplo neste atalho.

3.2. COMO UTILIZAR O WINPLOT?

O Winplot é um programa que constrói gráficos em duas ou três dimensões. Como o trabalho é sobre curvas bidimensionais, o foco será apenas na função 2-dim.

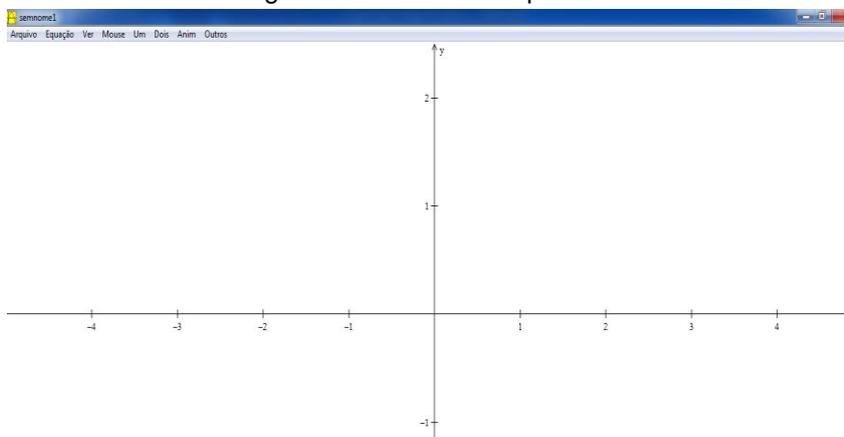
Ao abrir o Winplot, deve-se clicar em janela e, logo após, em 2-dim (Figura 58):

Figura 58: Início da tela do Winplot

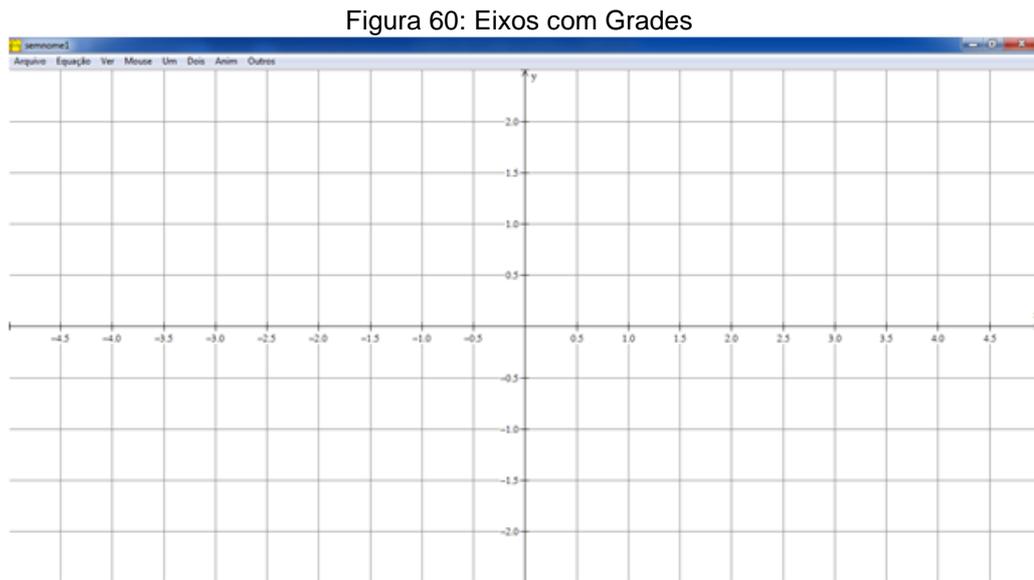


Dessa forma a tela da figura 59 será aberta:

Figura 59: Eixos no Winplot



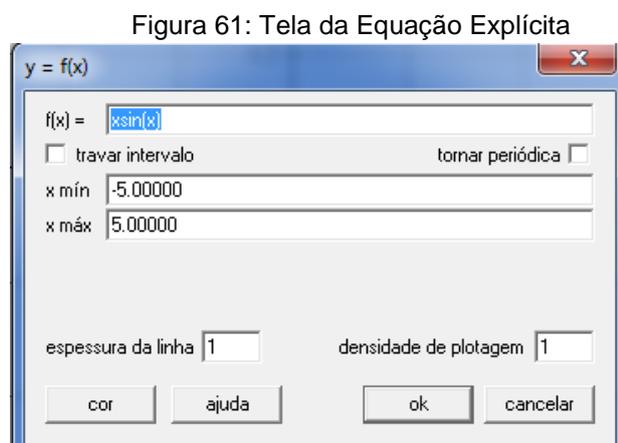
Para uma melhor visualização das curvas e gráficos, deve-se ir ao menu principal, clicar em “Ver – Grades”. Em seguida preencher os campos com os intervalos dos eixos x e y com 0.5 e clicar em aplicar e fechar em seguida. A tela do Winplot se apresentará da seguinte forma (Figura 60):



Esse intervalo propiciará uma melhor visualização dos gráficos, no entanto ele pode ser aumentado ou diminuído dependendo da curva a ser construída.

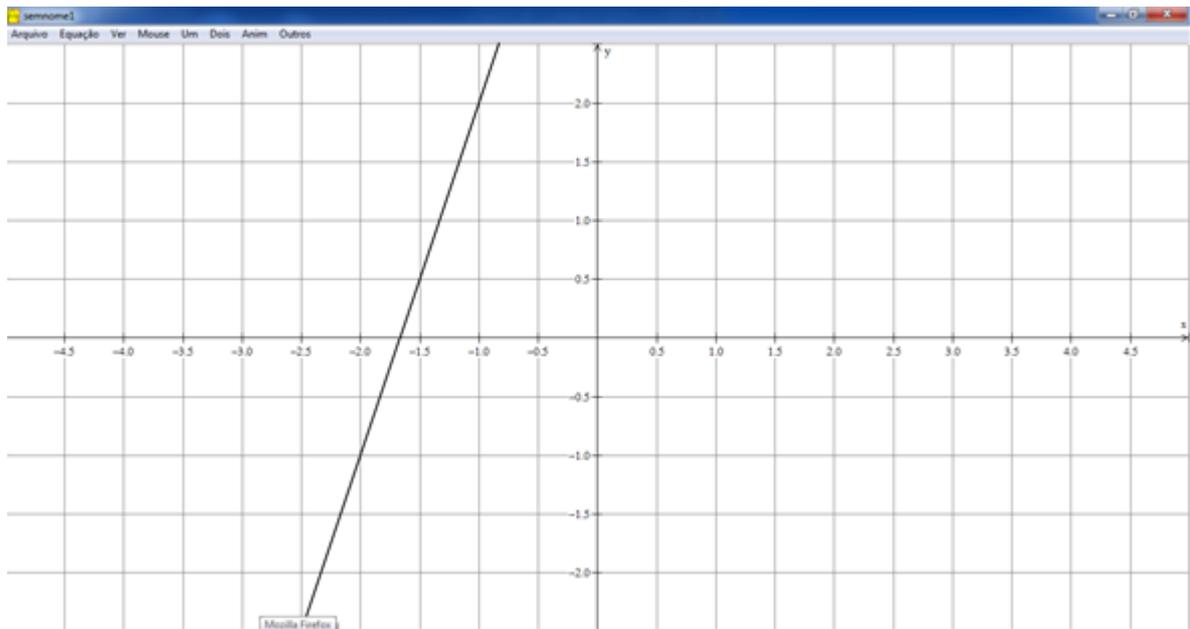
Podemos construir gráficos a partir de quatro tipos de equações: Explícita, Paramétrica, Implícita e Polar. Para a construção correta do gráfico, deve-se analisar bem a sintaxe do programa. Vejamos cada equação separadamente:

1. **Função Explícita:** Para utilizar essa função, deve-se clicar em Equação, seguido de Explícita, ou simplesmente F1 como atalho. Observe a figura 61:



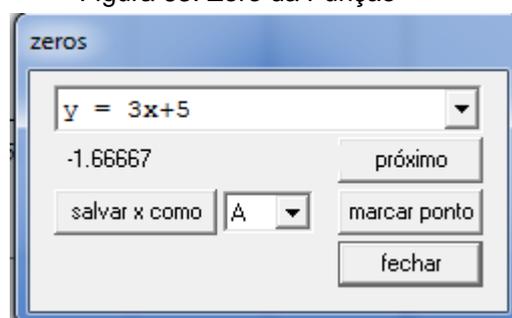
Escreve-se a função desejada com a sintaxe correta. Para exemplificar, constrói-se o gráfico da função $f(x) = 3x + 5$. Nota-se que a sintaxe permite que se escreva $3x$ ao invés de $3 * x$. Veja o gráfico abaixo (figura 62):

Figura 62: Gráfico da Função $f(x) = 3x + 5$



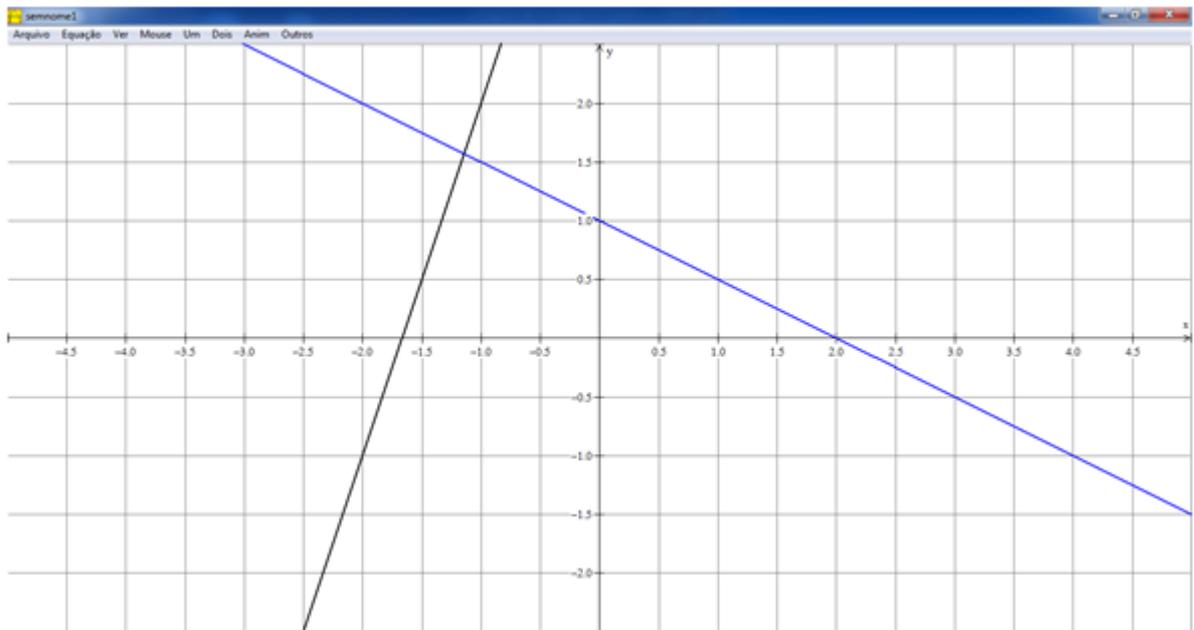
Dentre os recursos, temos a possibilidade de encontrar os zeros da função de uma forma bem simples. No menu principal, clica-se em Um – Zeros. Em relação ao gráfico acima ele apresentará o seguinte resultado, ilustrado na figura 63:

Figura 63: Zero da Função



Escrevendo a equação $f(x) = -0.5x + 1$ simultaneamente com a equação acima, os gráficos estarão de acordo com a figura 64:

Figura 64: Gráficos das funções $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -0.5x + 1$



Percebe-se que há uma interseção entre os dois gráficos. Para encontrá-la, deve-se ir ao menu principal e clicar em “Dois – Interseções”. A resposta será dada nas coordenadas x e y , mostrado na figura 65:

Figura 65: Interseção dos gráficos das funções $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -0.5x + 1$

interseção

$y = 3x+5$ ▼

$y = -0.5x+1$ ▼

prox interseção marcar ponto

$x = -1.14286$
 $y = 1.57143$
 $z = 1.71269$

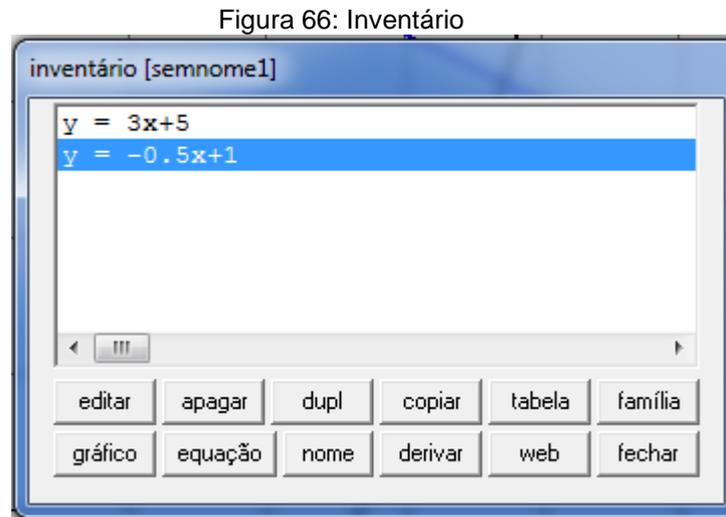
guardar X ▼

como A ▼ fechar

ângulo de interseção em graus

Portanto, a interseção entre as retas é o ponto $(-1.14286, 1.57143)$.

Para analisar alguns detalhes dos gráficos, utiliza-se o inventário. As teclas *ctrl + i* são o atalho para abri-lo e possui a seguinte caixa de diálogo da Figura 66:



As opções na janela de inventário são:

1. **Editar:** Esta opção permite modificar a equação, intervalos, cores e espessuras das linhas.
2. **Apagar:** Elimina a equação selecionada e todas as que dependem dela. Não há opção de retorno após apagar alguma equação.
3. **Dupl:** Duplica a equação selecionada para facilitar a construção de outro gráfico parecido com o desejado.
4. **Copiar:** Copia a equação para a área de transferência do sistema.
5. **Tabela:** Exibe uma lista de coordenadas que satisfazem a equação selecionada.
6. **Família:** Converte a equação em uma família de curvas ou pontos.
7. **Gráfico:** Ao selecionar uma equação e clicar nessa função o gráfico ficará oculto. Para aparecer novamente realize o mesmo processo.

8. Equação: Exibe a equação no gráfico. Ao clicar novamente a equação deixa de ser exibida.

9. Nome: Nomeia a função desejada.

10. Derivar: Essa função gera o gráfico da derivada da função selecionada.

11. Web: Traça um diagrama em rede.

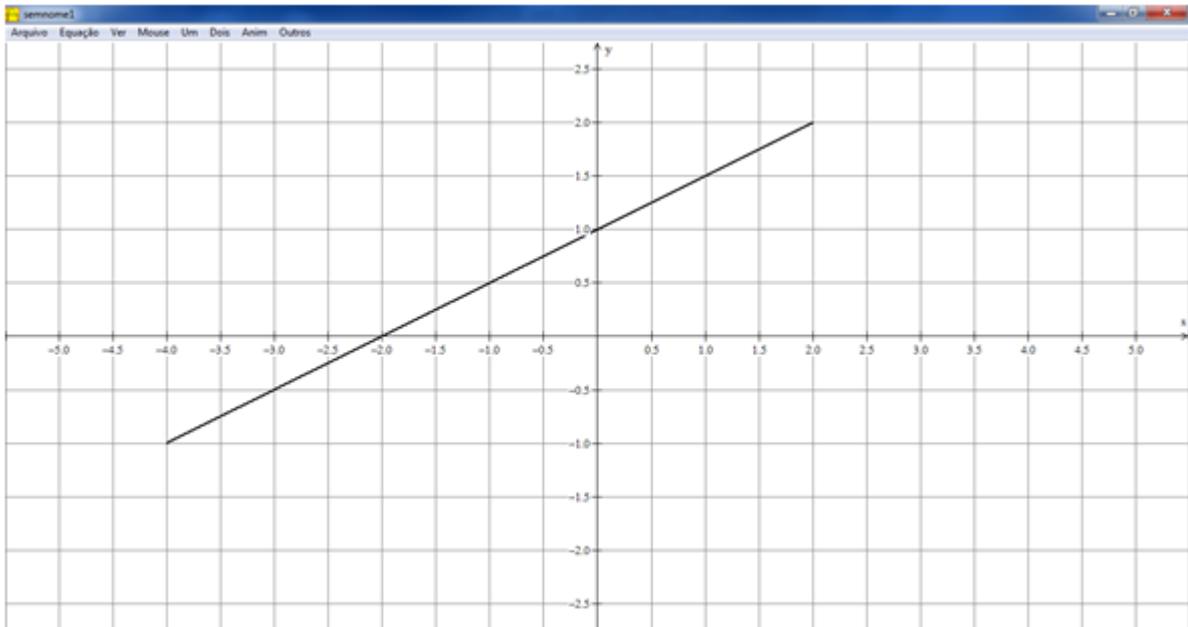
12. Fechar: Fecha a janela de inventário.

2. Função Paramétrica: Para esta função, deve-se clicar em Equação – Paramétrica, ou mais rapidamente F2 como atalho. A janela correspondente a esta função é a imagem representada na Figura 67:

Figura 67: Tela Inicial da Função Paramétrica

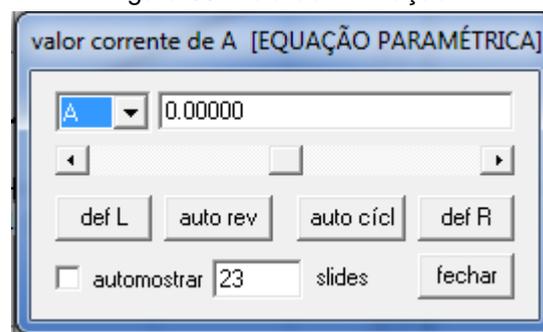
Escreve-se $f(t) = t - 2$, $g(t) = \frac{t}{2}$ e $-2 \leq t \leq 2$. A reta que descreve essa equação paramétrica é (Figura 68):

Figura 68: Reta Descrita por Funções Paramétricas



Para utilizar a função animação, usa-se o inventário e clica-se em editar. Escreve-se um valor A adicionado a $\frac{t}{2}$ na segunda equação para exemplificar. Fecha-se o inventário e deve-se clicar em Anim – Parâmetros A-W no menu principal. Surgirá a tela da Figura 69:

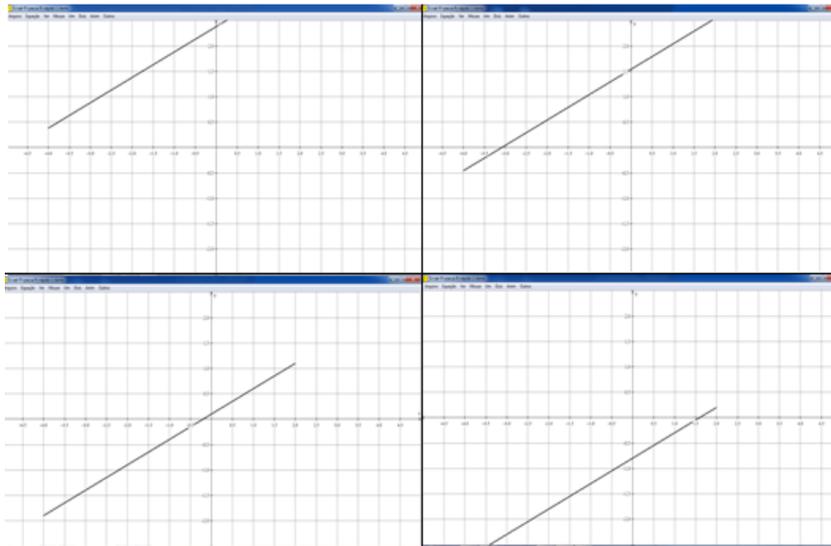
Figura 69: Tela de Animação



Na primeira seta é possível escolher o parâmetro ao qual se deseja avaliar. No espaço que está digitado 0.00000 devem-se colocar os limites abaixo e acima que se deseja. No exemplo dado, escreve-se -3 e clica-se em “def L”. Dessa forma, é escolhido o valor mínimo para A. Depois escreve-se 3 e clica-se em “def R” para

definir o valor máximo para A. A opção “auto rev” analisa a variação da reta quando o parâmetro A varia. A seqüência de retas ilustradas na Figura 70 aparecerá na tela.

Figura 70: Variação da Posição da Reta Paramétrica

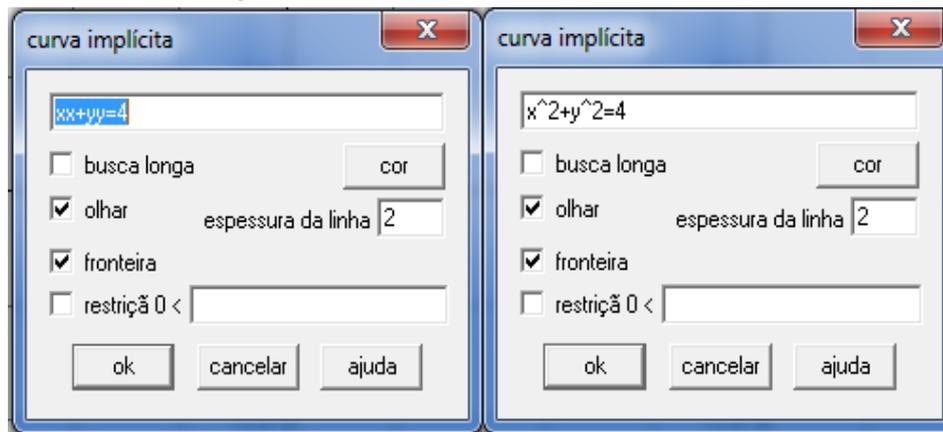


O valor do parâmetro A indica o valor de y em que a reta deve tocar, já que pela primeira equação x é definido como -2 . Portanto, a reta sobe e desce de acordo com a variação.

3. Função Implícita: De acordo com SOUSA (2004), “funções definidas implicitamente são desenhadas por um método especial. O programa procura aleatoriamente por um ponto inicial que se encaixa na equação dada. Uma vez que este ponto é encontrado, a curva a partir deste ponto é desenhada ao se calcular numericamente certas equações diferenciais”. Para utilizar essa função basta seguir os comandos Equação – Implícita ou apertar F3 no teclado.

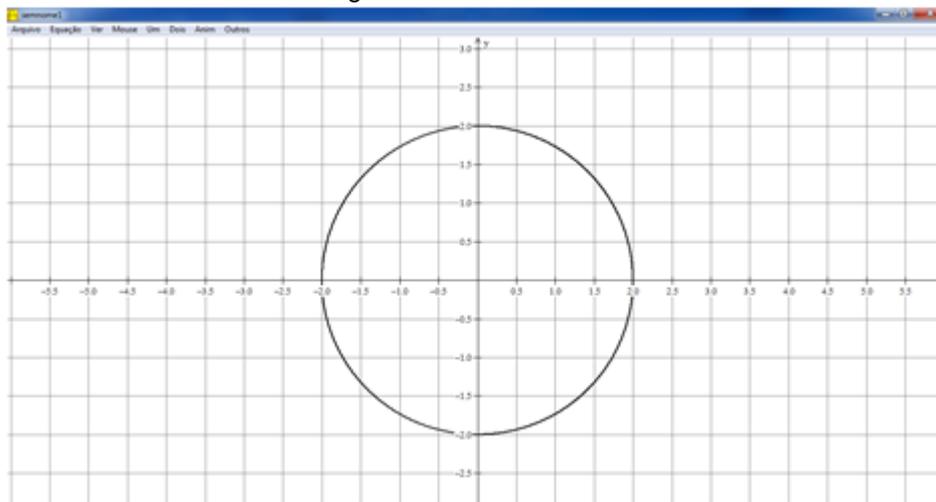
Para exemplificar, será construída uma circunferência de centro na origem e raio 2 e a equação que a descreve é $x^2 + y^2 = 4$. O Winplot reconhece as duas sintaxes apresentadas na figura 71:

Figura 71: Sintaxe de Uma Circunferência



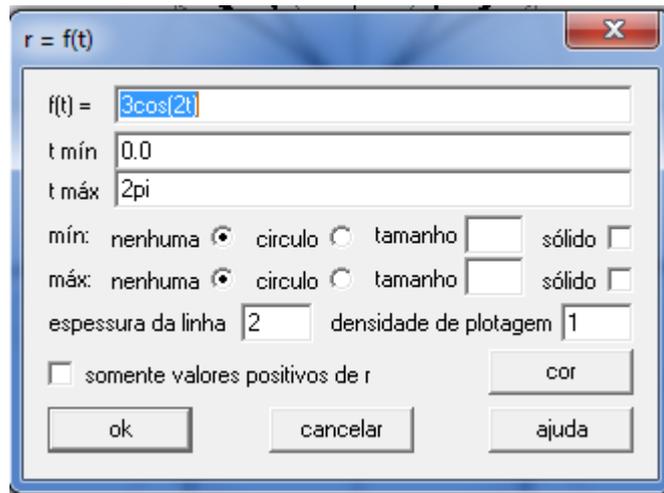
A opção “olhar” permite visualizar a construção da curva construída. Assim, a circunferência será desenhada de acordo com a figura 72:

Figura 72: Circunferência



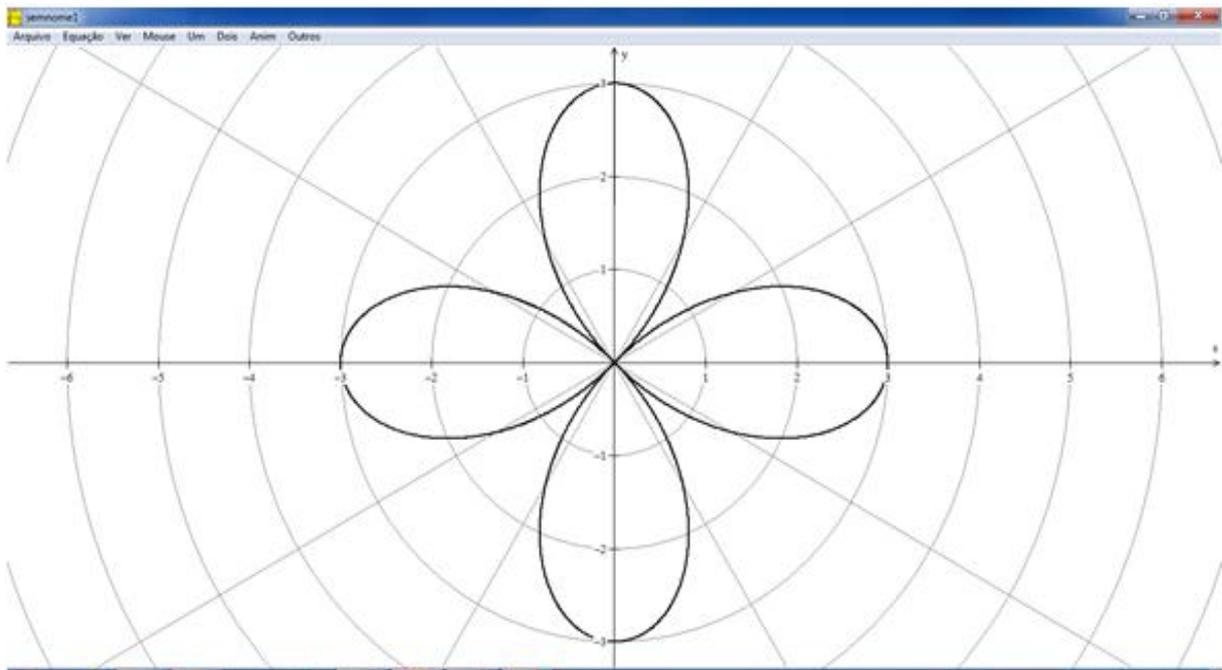
4. Função Polar: Para a utilização dessa função, clique em Equação – Polar, ou simplesmente F4 no teclado. Antes deste processo, para visualizar o gráfico na forma polar, deve-se ir em Ver – Grade e marcar “setores polares”. Depois, digitar a equação desejada no espaço apropriado e clicar em “ok”. No exemplo, foi desenhado o gráfico da equação $f(t) = 3 \cos(2t)$. Notemos a sintaxe na figura 73:

Figura 73: Tela Inicial da Função Polar



Após digitar a equação e alterar a espessura da linha para 2, clica-se em “ok” para obtermos o gráfico da figura 74.

Figura 74: Rosácea de Quatro Pétalas



Os gráficos das equações do tipo $r = asen(nt)$ ou $r = acos(nt)$ são denominados de *rosáceas*. Se n é par, o gráfico consiste de $2n$ laços. Se n é ímpar o gráfico apresenta n laços, com n inteiro positivo.

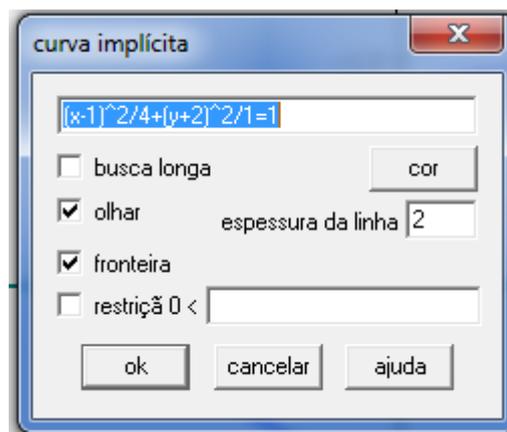
3.3. CÔNICAS NO WINPLOT

3.3.1. Elipse

A função “Equação – Implícita” permite inserir a Elipse no gráfico do Winplot. Será exibida a construção da elipse com centro em $(1, -2)$, $a = 2$ e $b = 1$.

A Elipse é definida algebricamente pela equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Logo, para a construção usa-se a sintaxe apresentada na figura 75 com os dados correspondentes e deve-se clicar em “ok”:

Figura 75: Sintaxe da Elipse



Após isso, deve-se construir as retas focal e não focal, que passam pelo centro $(1, -2)$. Desse modo, tem-se a reta não focal vertical $x = 1$ e a focal horizontal $y = -2$. Para encontrar os focos da elipse, utiliza-se a equação $a^2 = b^2 + c^2$, onde os valores de a e b já estão definidos. Substituindo:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow$$

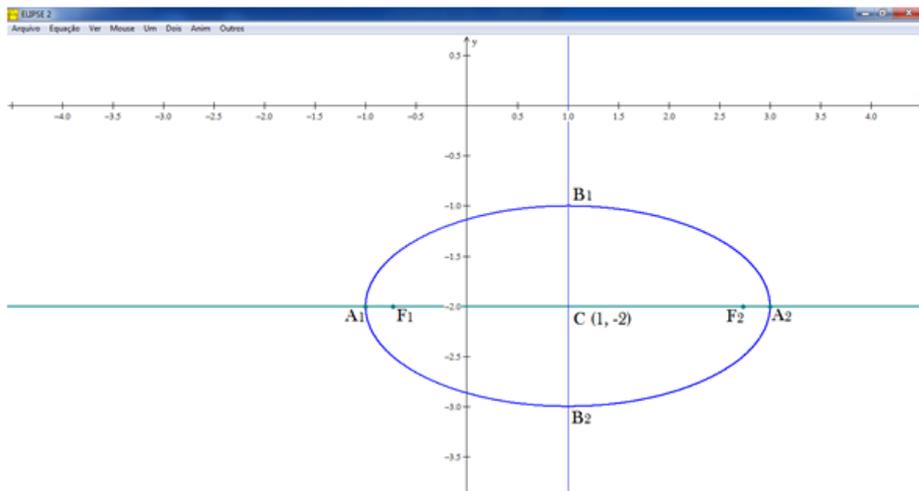
$$c^2 = 2^2 - 1^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$c = \sqrt{3}$$

Assinale os focos $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. Para isso, clica-se em “Um – Traço”. Na janela, escreve-se $x = 1 + \sqrt{3}$ e clica-se em “marcar ponto”. Repete-se o mesmo processo para $x = 1 - \sqrt{3}$ e clica-se em “fechar”. Seguindo o processo mencionado, o gráfico estará construído (Figura 76):

Figura 76: Elipse com Centro, Vértices e Focos



A excentricidade de uma Elipse é um número real positivo $e > 0$ e se define como o quociente entre a metade da distância focal pela metade da medida do eixo maior ($e = \frac{c}{a}$). Como $c > 0$ e $a > 0$ implica que $e > 0$. Para analisá-la através do winplot, deve-se ir ao inventário e editar a equação, fazendo variar o valor de a . Basta fazer a mudança do valor 4 para A^2 . Após isso, deve-se ir em “Anim” e definir o menor valor para A sendo 1 e o maior valor para A sendo 2. Agora, clica-se em “auto rev” para analisar. A seguinte sequência de imagens aparecerá (Figuras 77, 78, 79 e 80):

Figura 77: Elipse

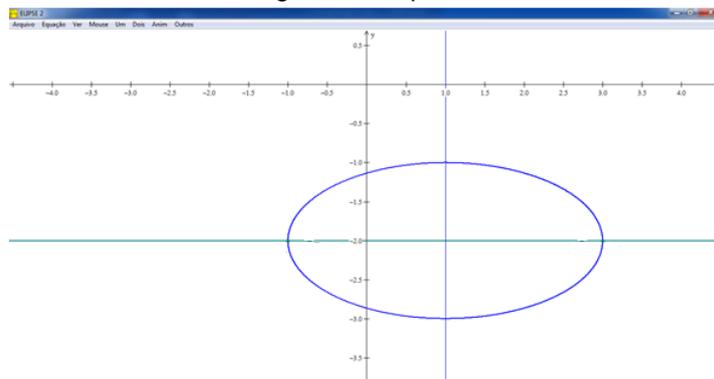


Figura 78: Elipse

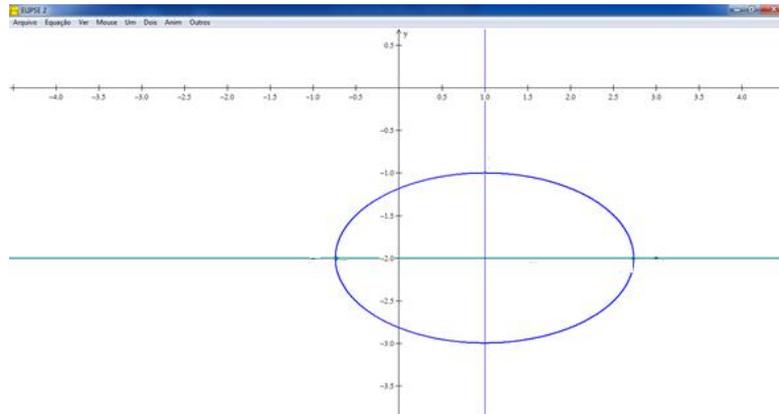


Figura 79: Elipse

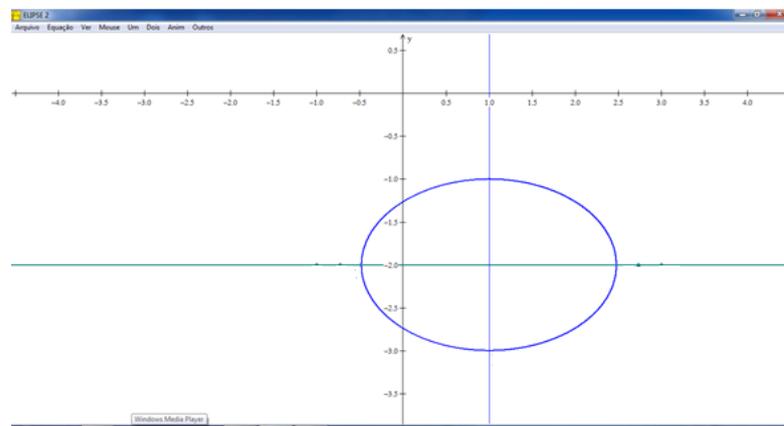
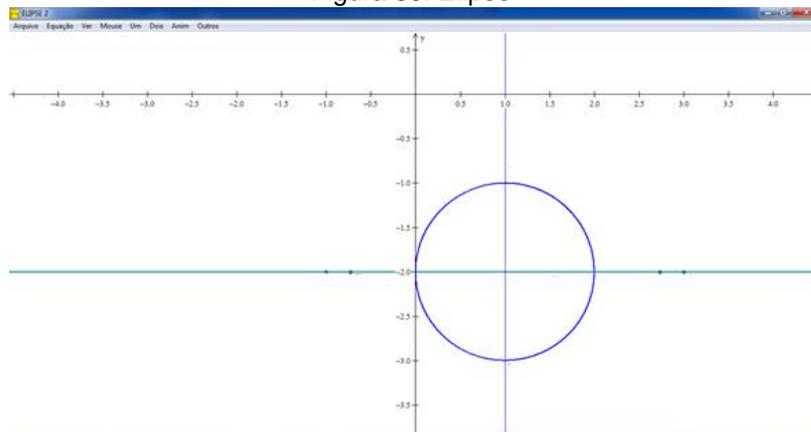


Figura 80: Elipse



Como a metade da distância focal é calculada pela fórmula $c^2 = a^2 - b^2$, e temos b fixado como 1, pode-se substituir esse valor na equação e teremos:

$$c^2 = a^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$c = \sqrt{a^2 - 1}$$

Substituindo na fórmula da excentricidade tem-se $e = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$. Analisando os valores extremos de a algebricamente verifica-se:

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 2} \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, quanto mais a excentricidade se aproxima de 0, mas próximo da circunferência a elipse se encontra. Do mesmo modo, quanto maior o valor de a , mais “achatada” é a elipse.

3.3.2. Hipérbole

Seja a Hipérbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ de centro $C(0,0)$ e vértices em $A_1(-1,0)$, $A_2(1,0)$, $B_1(0,2)$ e $B_2(0,-2)$. Desse modo, $a = 1$ e $b = 2$. Para calcular a distância focal, a hipérbole diferencia da elipse. Seja c a distância focal, calcula-se c do seguinte modo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 1^2 + 2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 5 \quad \Leftrightarrow$$

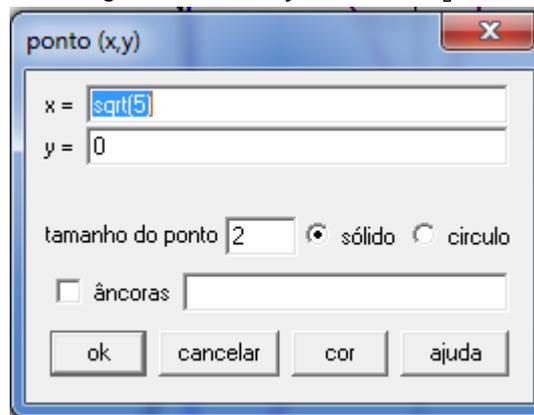
$$c = \sqrt{5}$$

Logo, a distância focal é $\sqrt{5}$. O retângulo de base da Hipérbole possui os vértices da hipérbole como pontos médios dos lados. As assíntotas são as diagonais desse retângulo, ou seja, são as retas que passam pelo centro da Hipérbole e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$. Como o centro da hipérbole que exemplifica é $(0,0)$ e como os valores de a e b são conhecidos, as assíntotas possuem como equação $y = \pm 2x$. Desse modo, alguns passos devem ser seguidos para a construção da Hipérbole e seus elementos:

Passo 1) Para construir os ramos da hipérbole deve-se em “Equação – Implícita”. Digita-se a equação $x^2/1-y^2/4=1$ e espessura da linha 2. Clica-se em “ok”. A Hipérbole estará desenhada.

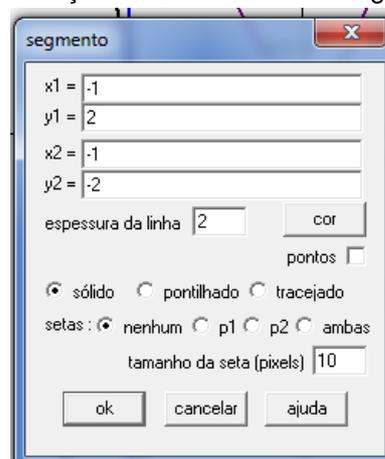
Passo 2) Marcam-se os focos F_1 e F_2 . Deve-se ir em “Equação – Ponto – (x,y)”. Na caixa de diálogo deve-se digitar o foco $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$. O software reconhece a raiz com a sintaxe sqrt(5). Repete-se o processo para o foco $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$, coloca-se o tamanho do ponto igual a 2 e clica-se em “sólido” de acordo com a Figura 81. Os pontos aparecerão no gráfico.

Figura 81: Marcação do foco F_2



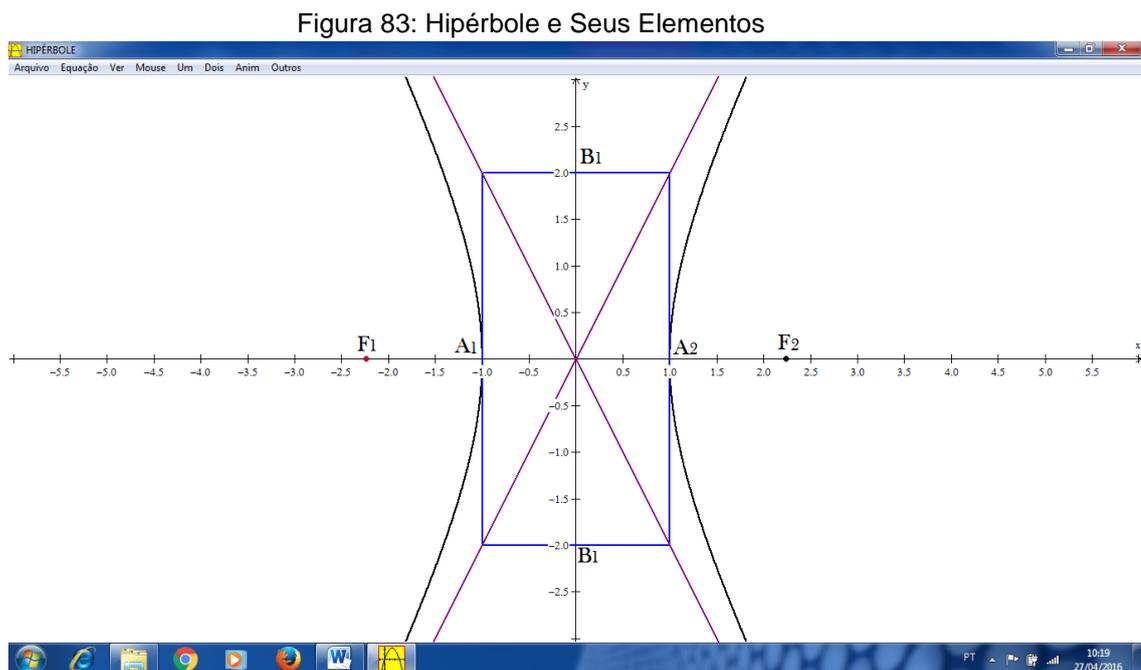
Passo 3) O recurso “Equação – Segmento – (x,y)” auxilia no esboço do retângulo de base da Hipérbole. Ao clicar nessa opção, digitamos os dados abaixo de acordo com a Figura 82:

Figura 82: Construção de Um lado do Retângulo de Base



Após construir um dos lados do retângulo, constroem-se os outros seguindo o exemplo dado.

4) A função “Equação – Explícita” traçará as assíntotas da hipérbole. Escreve-se $f(x) = 2x$ e teremos a primeira assíntota. Depois se escreve $f(x) = -2x$ para desenhar a segunda. Assim, teremos a Hipérbole construída (Figura 83) com os seus elementos:



3.3.3. Parábola

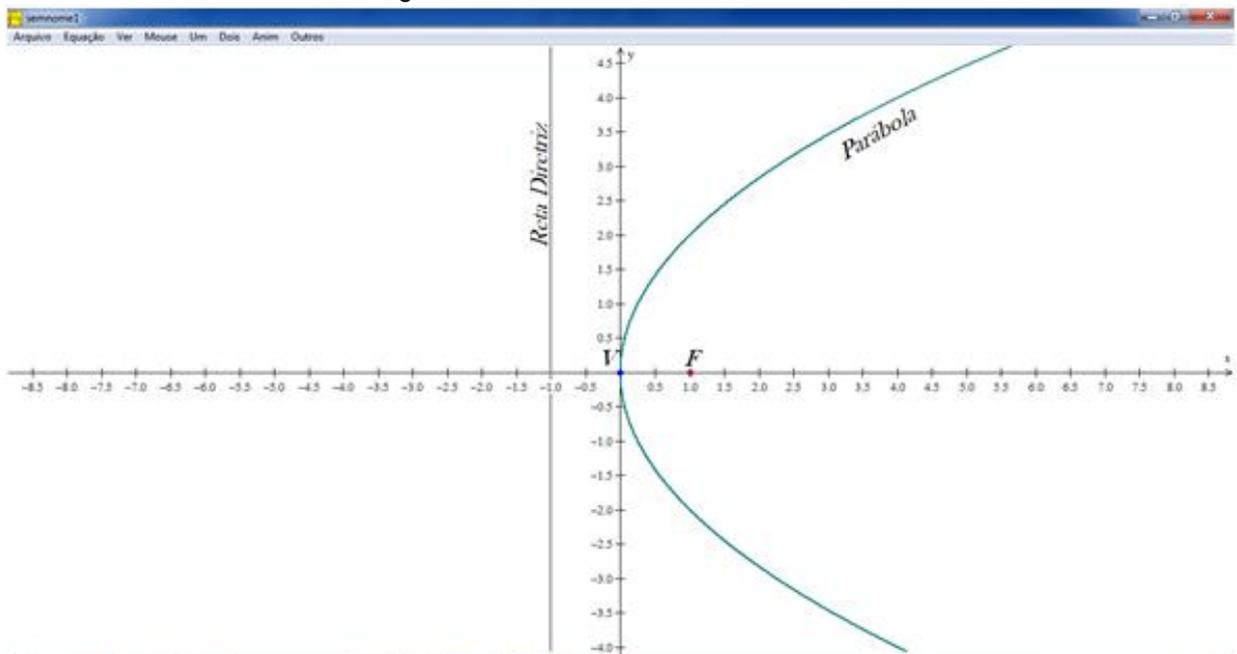
Em um sistema de coordenadas OXY será construída uma Parábola com vértice na origem e reta focal $y = 0$. Inicialmente, é necessário possuir a reta diretriz e o foco. Seja a diretriz a reta $x = -1$ e o foco o ponto $F = (1,0)$. Sabe-se que a parábola possui como equação $y^2 = \pm 4px$. Como o foco está a direita da diretriz, a equação é dada por $y^2 = 4px$, onde $2p$ é a distância do ponto F à diretriz. Facilmente encontra-se $p = 1$. Assim, a equação da parábola é dada por $y^2 = 4x$. No Winplot pode-se esboçar diretamente a parábola através da sintaxe $y^2=4x$. Todavia, não será visível a diretriz e o foco. Portanto, esboça-se os elementos através dos passos abaixo:

Passo 1) Em “Equação – Implícita” digita-se $x = -1$ e a reta diretriz será construída.

Passo 2) Vai-se em “Equação – Ponto – (x,y)” e insira o ponto (1,0). Este será o foco da parábola.

Passo 3) Para finalizar, constrói-se a Parábola com a sintaxe $y^2=4x$ (Figura 84).

Figura 84: Parábola e Seus Elementos



O vértice da Parábola fora da origem $(0,0)$ modifica a sua equação. No caso em que o vértice é $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX , a equação é dada por: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ se o foco estiver a direita da diretriz e $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ se o foco estiver a esquerda da diretriz. Seus elementos são:

- **Foco:** $F = (x_0 + p, y_0)$;
- **Vértice:** $V = (x_0, y_0)$;
- **Diretriz:** $x - x_0 = -p$, ou seja, $x = x_0 - p$;
- **Reta Focal:** $y - y_0 = 0$, ou seja, $y = y_0$.

Como no caso anterior, considerando o mesmo sistema de coordenadas, seja o vértice da Parábola $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY . Se o foco

está acima da reta diretriz, a equação será $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. No outro caso, se o foco está abaixo da diretriz, a equação será $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

A atividade abaixo é proposta para resolução e construção da curva no Winplot.

ATIVIDADE: Determine a equação da Parábola de vértice $V = (3,4)$ e foco $F = (3,2)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução: Como $V = (3,4)$ e foco $F = (3,2)$, obtém-se $x = 3$ a reta focal e nota-se que F está abaixo de V , ou seja, abaixo da reta diretriz. Logo a equação da Parábola é da forma:

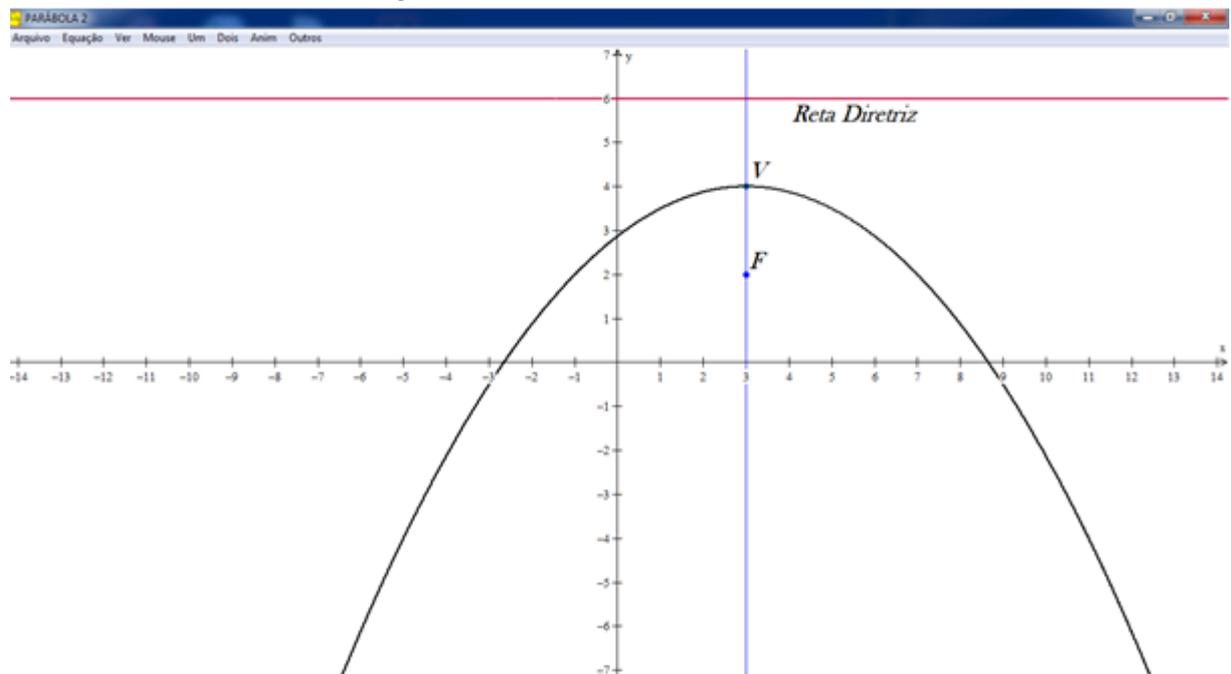
$$(x - 3)^2 = -4p(y - 4)$$

Como p é a distância do vértice ao foco, facilmente calcula-se $p = 2$. A equação da diretriz é $y = 6$ e da parábola é:

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$$

Com a equação definida, diretriz, foco e vértice, basta inserir as equações no Winplot para obter o gráfico abaixo (Figura 85):

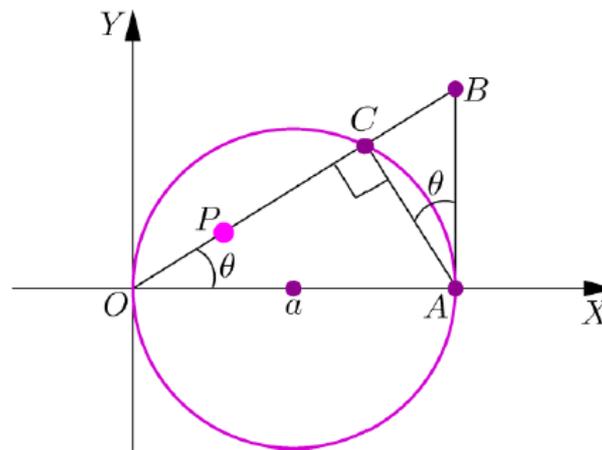
Figura 85: Parábola e Seus Elementos



3.4. CISSÓIDE

Dado o círculo abaixo, considere OA o diâmetro situado no eixo $-x$, um segmento tangente ao círculo em A representado por AB e C é a intersecção entre OB e o círculo (Figura 86).

Figura 86: Círculo que Gera uma Cissóide



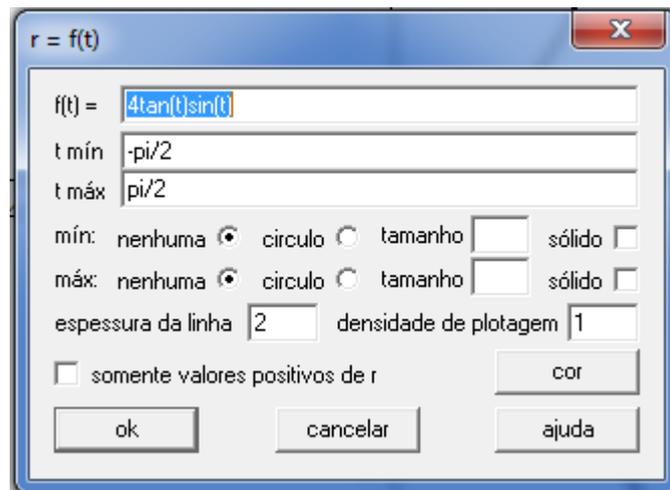
Fonte: Frensel

Considere P , tal que a distância OP seja igual à distância CB . A Cissóide de Díocles é o lugar geométrico descrito por estes pontos P . A equação polar dessa curva é determinada como segue.

Seja θ o ângulo formado entre o eixo $-x$ e o segmento OB . Do triângulo AOB se obtém $\operatorname{tg} \theta = \frac{AB}{2a}$, de onde se conclui $AB = 2a \cdot \operatorname{tg} \theta$. Seja $\rho = CB = OP$. Pelo triângulo ABC , $\operatorname{sen} \theta = \frac{CB}{AB}$. Como $CB = \rho$, infere-se $\rho = AB \cdot \operatorname{sen} \theta$. Isto posto, substituindo o valor de AB encontramos $\rho = 2a \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{sen} \theta$, com $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é titulada equação polar da curva.

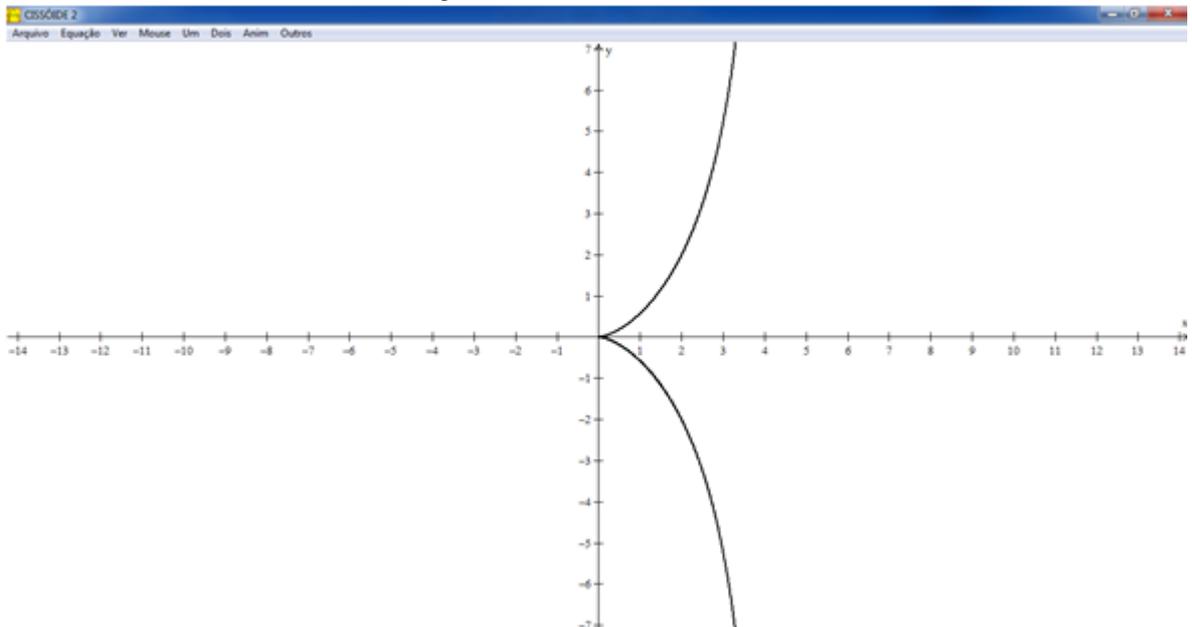
A construção da curva no Winplot se dá de maneira simples, pois utiliza-se a função “Equação – Polar”. A janela correspondente a essa função é (Figura 87):

Figura 87: Sintaxe da Cissóide



Insira a equação com a sintaxe $4 \tan(t) \sin(t)$, a variação do ângulo de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ e espessura da linha 2. O gráfico correspondente à equação inserida está desenhado na Figura 88:

Figura 88: Cissóide



Facilmente percebe-se que o valor de a na equação é 2. Quanto maior o valor de a , mais próximas estarão as duas partes acima e abaixo do eixo. Verifica-se

esta propriedade através da função “Anim”, variando a medida a . No inventário, deve-se editar a equação e escrever $2a$ ao invés de 4. Após esta mudança, a animação pode ser realizada.

3.5. CURVA DE AGNESI

Como já foi visto nesta pesquisa, a equação da Curva de Agnesi é dada por $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$. Da mesma forma foi definido o valor da área abaixo da curva para $a = 1$, calculado de acordo com o procedimento que se segue.

Deseja-se obter a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

Calcula-se as integrais do segundo membro da equação à parte:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} tg^{-1}x \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (tg^{-1}t - tg^{-1}0) = \lim_{t \rightarrow \infty} tg^{-1}t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

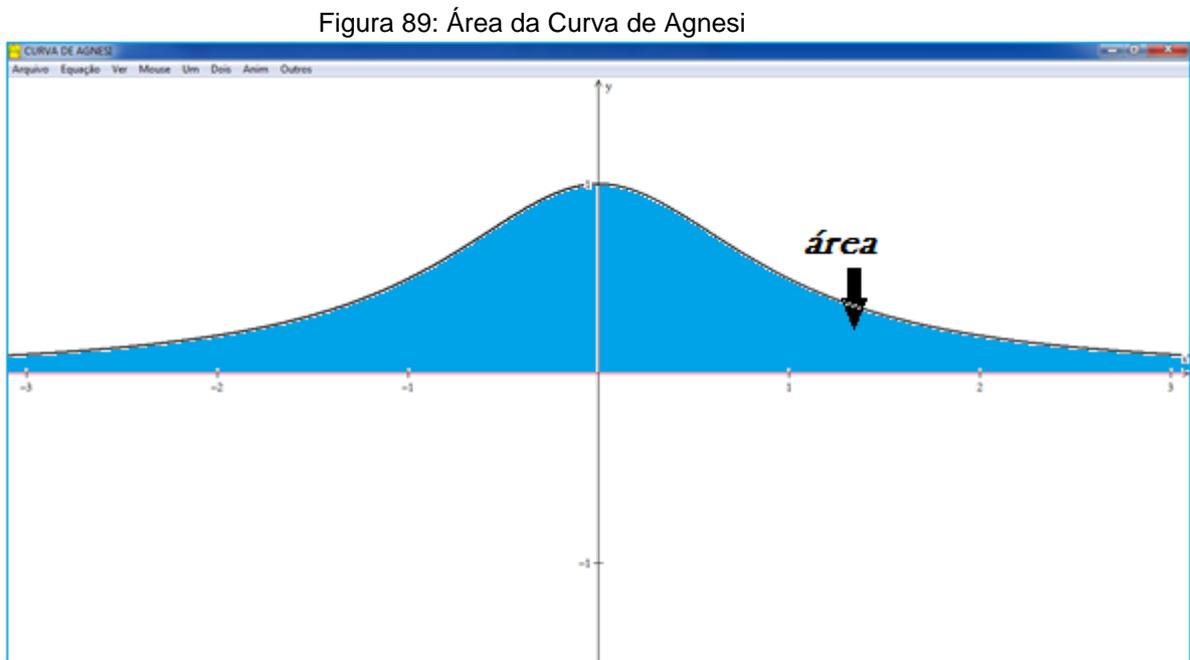
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} tg^{-1}x \Big|_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (tg^{-1}0 - tg^{-1}t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

As duas integrais são convergentes, conseqüentemente a integral dada é convergente. Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Essa integral pode ser exposta como a área da região determinada pela Curva de Agnesi, pois $\frac{1}{x^2+1} > 0$.

O gráfico é esboçado no software em “Equação – Implícita”. Utiliza-se a sintaxe $y * (x^2 + 1) = 1$. A curva será (Figura 89):



Essa curva possui como características ser simétrica em relação ao *eixo – y* e possui o *eixo – x* como assíntota. O valor máximo da curva é dado por $y = a$. No exemplo acima o valor de a é 1.

3.6. CICLÓIDE

Freixo afirma que o único modo conveniente de representar uma cicloide é por meio de equações paramétricas. Esta será demonstrada através do círculo C de raio R e centro situado na parte positiva do eixo y . Seja P o ponto de C posicionado na origem do sistema. A curva é definida como o lugar geométrico de P quando C rola sobre o eixo x . Ao rolar o círculo surgem os elementos que constam na Figura 90:

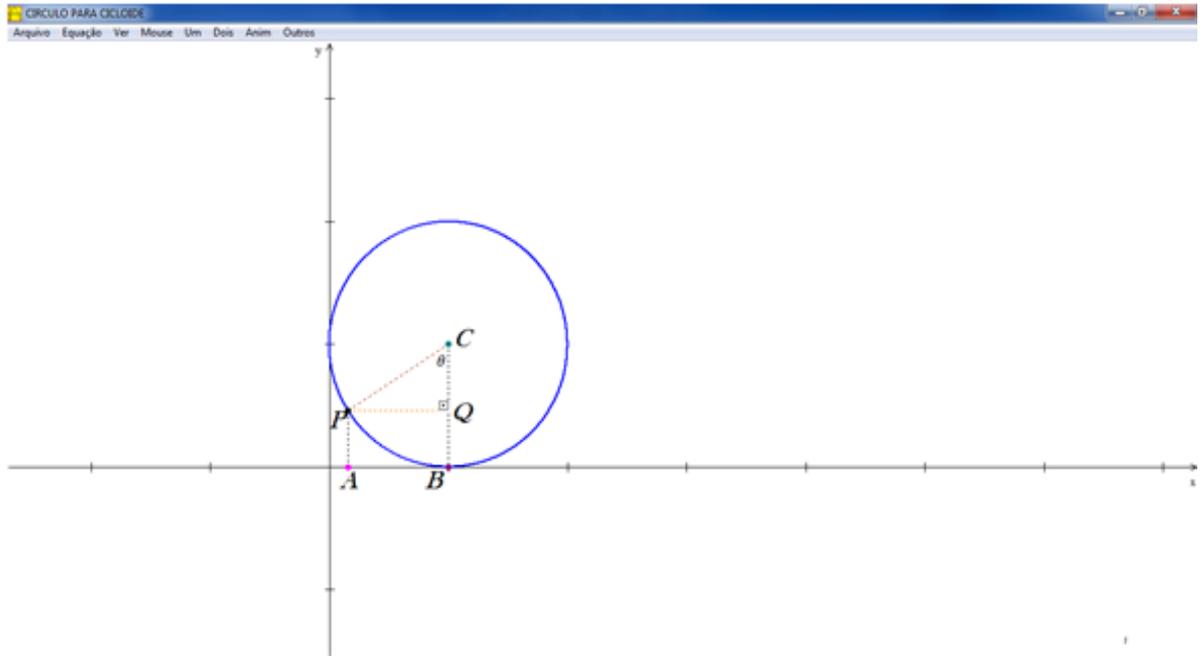
P : ponto que determina a cicloide

A e B : projeções

C : centro

θ : ângulo PCQ

Figura 90: Círculo que Gera uma Ciclóide



Sejam x e y as coordenadas de P . Pelo giro do círculo determina-se que o valor do segmento OB coincide com a medida do arco BP . Determinando o valor deste arco BP pela regra de três, obtém-se:

$$2\pi \quad - \quad 2\pi R$$

$$\theta \quad - \quad BP$$

De onde se conclui:

$$BP = R \cdot \theta$$

Os segmentos PQ e CQ são obtidos facilmente. Basta aplicar as definições de seno e cosseno no triângulo PCQ .

$$\text{sen } \theta = \frac{PQ}{R} \quad \Leftrightarrow \quad PQ = R \cdot \text{sen } \theta$$

e

$$\cos \theta = \frac{CQ}{R} \quad \Leftrightarrow \quad CQ = R \cdot \cos \theta$$

Finalmente, as coordenadas do ponto P são:

$$x = OB - AB = OB - PQ = R \cdot \theta - R \cdot \text{sen} \theta = R \cdot (\theta - \text{sen} \theta)$$

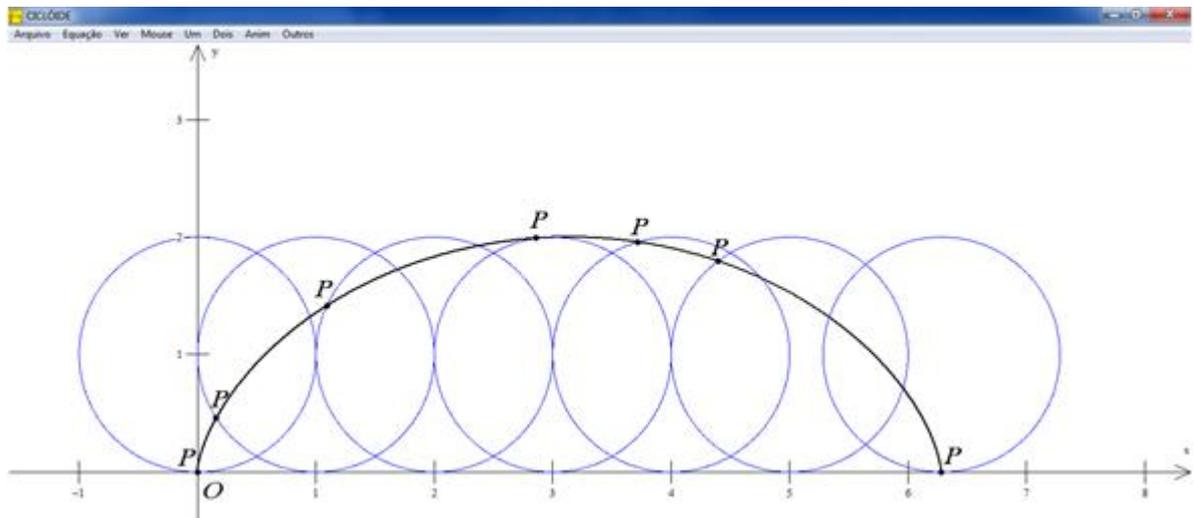
$$y = CB - CQ = R - R \cdot \cos \theta = R \cdot (1 - \cos \theta)$$

Equações Paramétricas são inseridas no Winplot na função de mesmo nome. A partir do círculo que descreve a Ciclóide, desenham-se vários para a melhor visualização da sua construção. O círculo utilizado possui raio 1 e centro $(0,1)$. Nesse caso, o ponto P que vai descrever a Ciclóide está posicionado em $(0,0)$. A princípio, trace o círculo dado através da função “Equações – Implícitas”. A equação deste círculo é $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. No inventário é possível duplicar uma quantidade necessária de vezes este círculo. Duplica-se alterando apenas o centro realizando o giro. Obviamente, a ordenada permanece constante, alterando apenas a abscissa. Os valores atribuídos a x foram de 1 a 5 e também 2π . Este último valor para o centro foi atribuído, pois caracteriza a volta completa da circunferência já conhecido como o valor do comprimento de um giro completo. De posse dos círculos já traçados, basta desenhar a Ciclóide. O gráfico será desenhado na Figura 91 com a sintaxe abaixo empregada:

$$f(t) = R * (t - \sin(t))$$

$$g(t) = R * (1 - \cos(t))$$

Figura 91: Esboço de Uma Ciclóide



3.7. HIPOCICLÓIDE

Como já visto anteriormente, a Hipociclóide é definida pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = (R - r) \cdot \cos\theta + r \cdot \cos\left(\frac{R - r}{r} \cdot \theta\right)$$

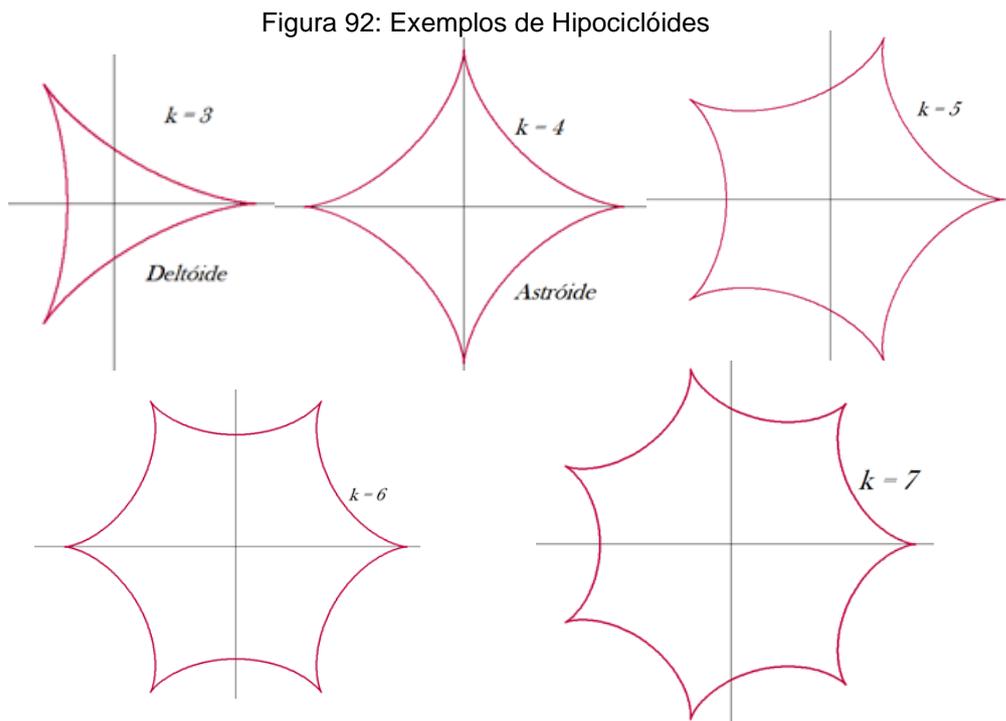
$$y(\theta) = (R - r) \cdot \sin(\theta) - r \cdot \sin\left(\frac{R - r}{r} \cdot \theta\right)$$

Seja $k = \frac{R}{r}$, as equações convertem-se ao seguinte formato:

$$x(\theta) = r(k - 1) \cdot \cos\theta + r \cdot \cos((k - 1) \cdot \theta)$$

$$y(\theta) = r(k - 1) \cdot \sin(\theta) - r \cdot \sin((k - 1) \cdot \theta)$$

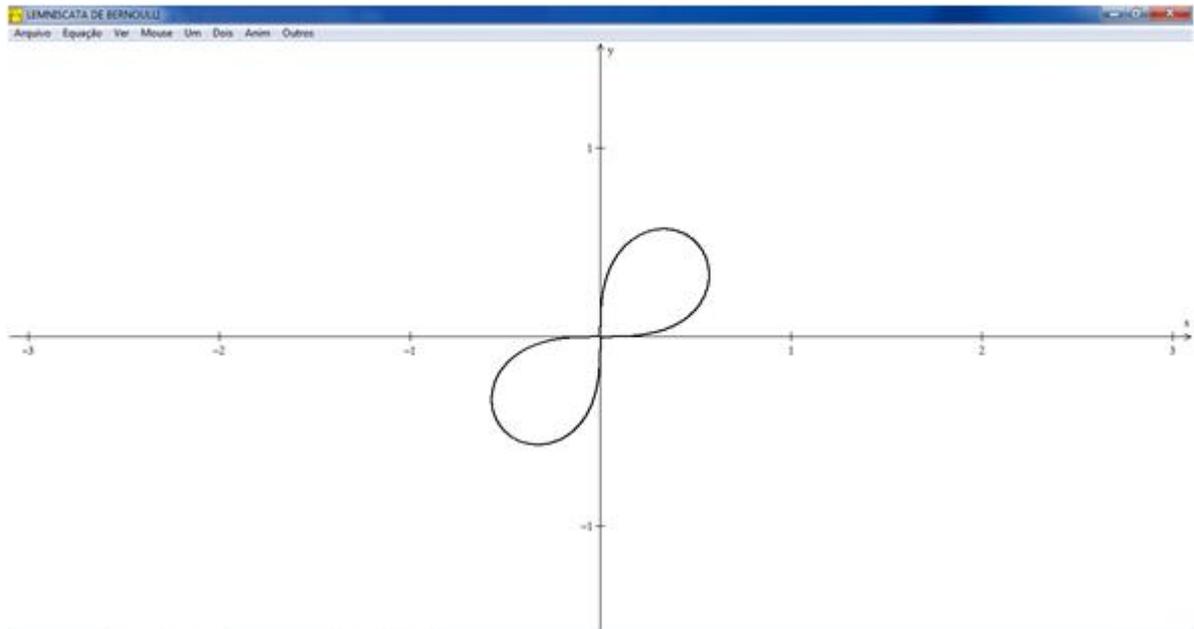
É interessante perceber as alterações nos valores de k na construção dos gráficos. Com a sintaxe apropriada escrevem-se as equações paramétricas no Winplot. Seja 1 o raio do círculo que vai girar ($r = 1$). Atribuindo a k um valor inteiro maior ou igual a 3, obtém-se os gráficos seguintes (Figura 92):



3.8. LEMNISCATA

Frensel define a Lemniscata de Bernoulli conforme a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Transpondo a equação para o software, o gráfico será (Figura 93):

Figura 93: Lemniscata de Bernoulli



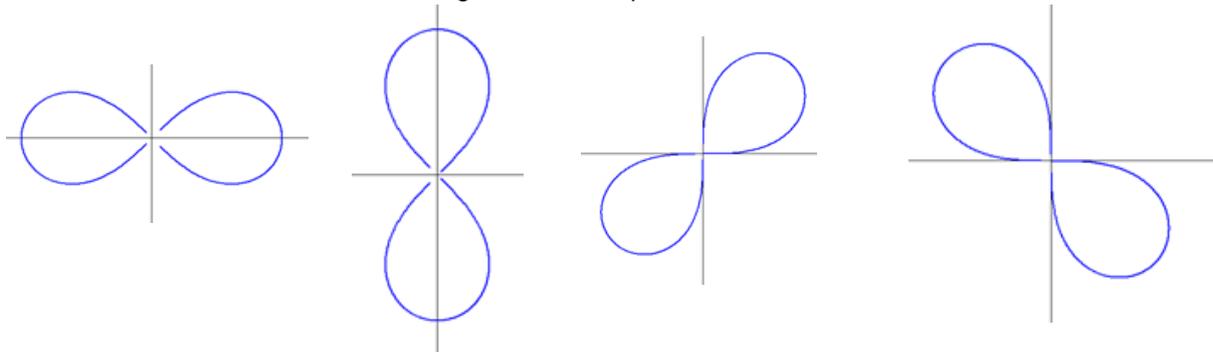
Nascimento define as lemniscatas com as equações que seguem na forma polar:

$$r^2 = \pm a \cos 2\theta$$

$$r^2 = \pm a \sin 2\theta$$

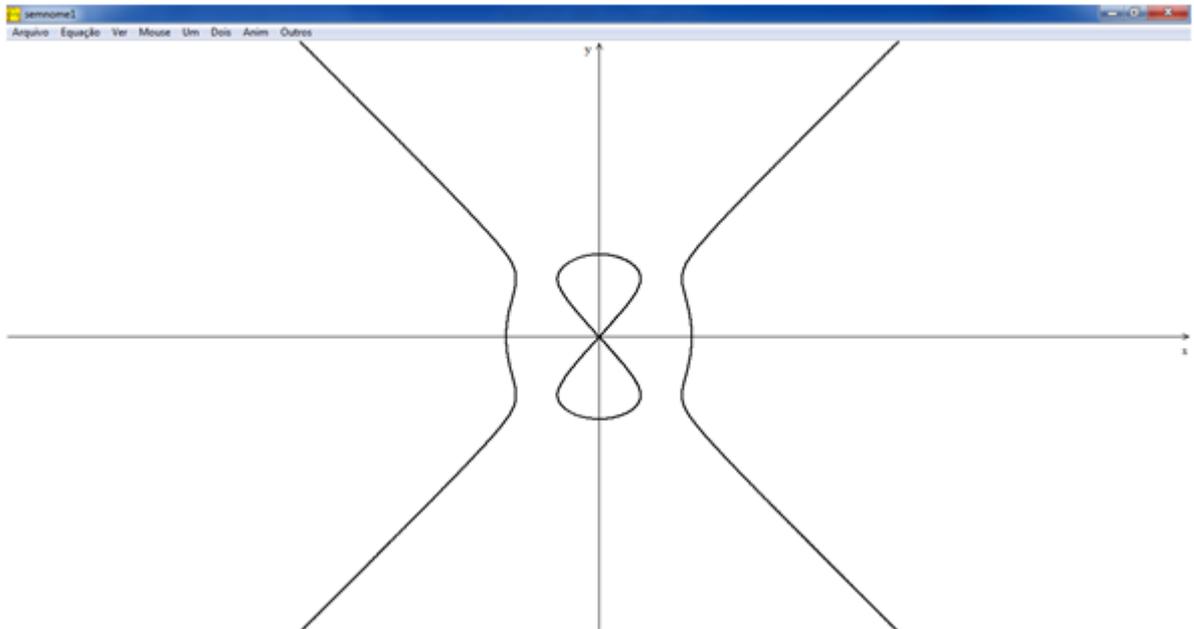
A função “Equação – Polar” no Winplot esboça as seguintes lemniscatas para $a = 1$ (Figura 94).

Figura 94: Exemplos de Lemniscatas



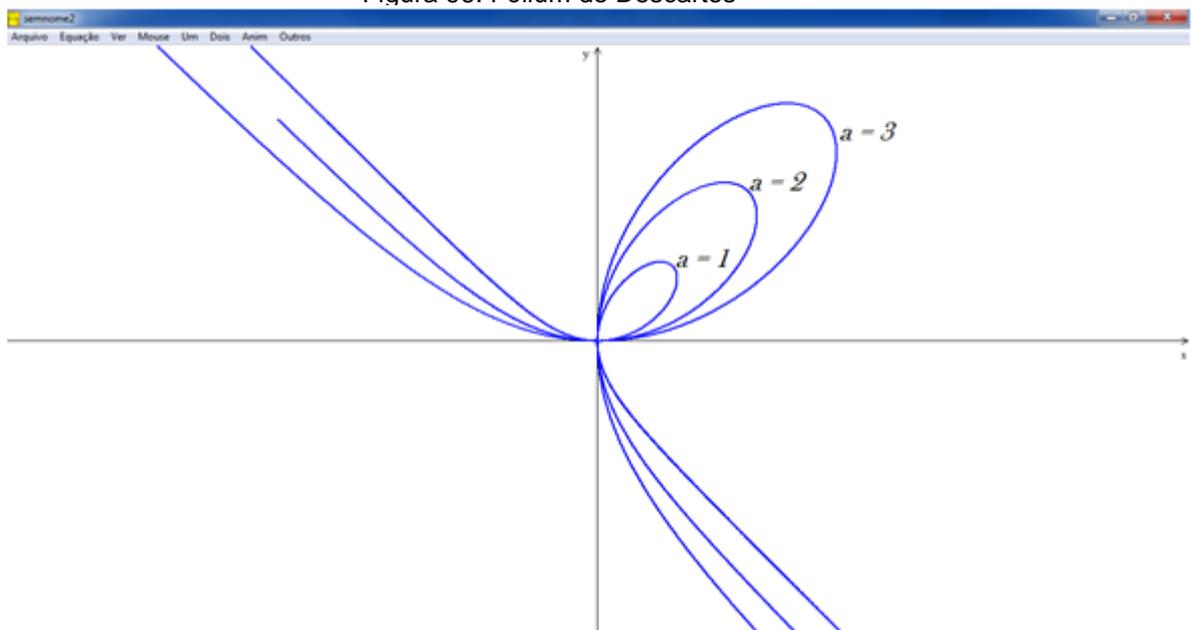
A “Curva do Diabo” foi definida por Cramer em 1750 e, possui como equação $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$ (STEWART, 1900). Sua representação geométrica é a seguinte (Figura 95):

Figura 95: Curva do Diabo



Frensel define o Fólium de Descartes com a equação $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$. O gráfico construído em “Equações – Implícita” é (Figura 96):

Figura 96: Fólium de Descartes

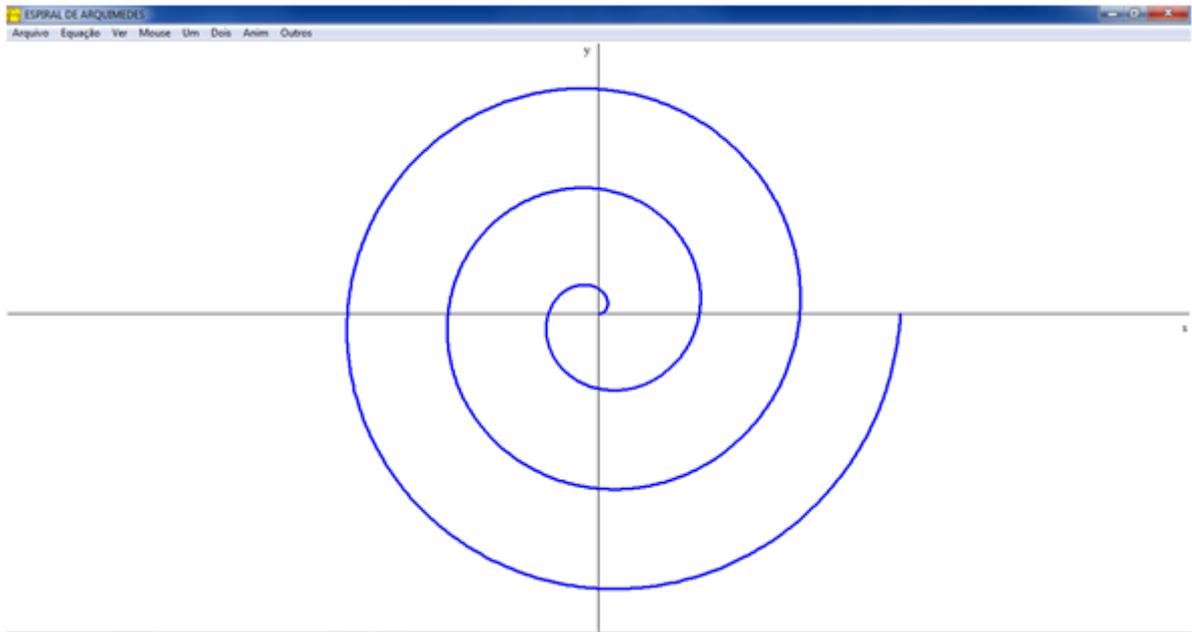


Na figura são apresentados os gráficos para os valores de $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.

3.9. ESPIRAIS

Como visto anteriormente a Espiral de Arquimedes é da forma $\rho = k\theta$, sendo ρ o raio vetor, k é uma constante que se relaciona com a inclinação da espiral em relação ao raio vetor e θ o ângulo em coordenadas polares. Seja o gráfico da Espiral $\rho = \theta$. A função “Equação – Polar” permite a construção dessa curva. Escreve-se $f(t) = t$, com $k = 1$ e t variando de 0 a 6π para obter o esboço da curva na Figura 97.

Figura 97: Espiral de Arquimedes

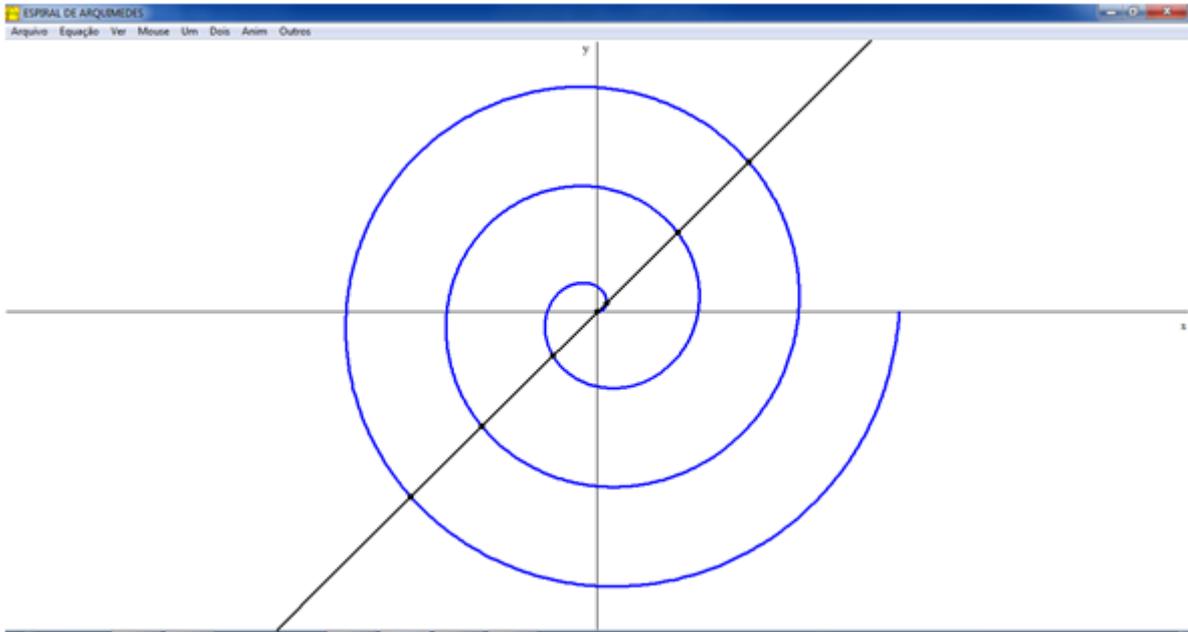


Já foi mencionado no presente trabalho que essa curva pode ser chamada de Espiral Uniforme, pelo fato das distâncias entre espirais serem uniformes, conforme demonstração. Esta distância é o valor $2\pi.k$. Como $k = 1$, teremos o valor $2\pi \approx 6,28319$.

O Programa permite visualizar a distância entre as espirais de uma forma simples. Trace a reta $y = x$ e marque os pontos de intersecção. Depois basta ir ao

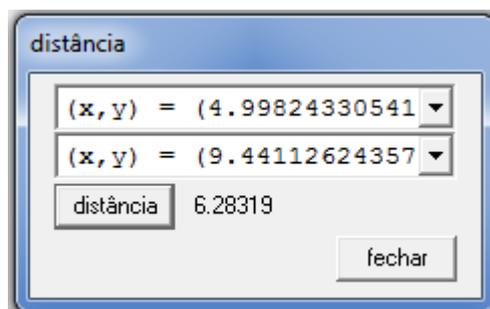
menu “Dois – Intersecção”, marcar ponto e clicar em “ próx. Intersecção” até todas as intersecções estarem marcadas. O gráfico possuirá a forma da Figura 98:

Figura 98: Intersecção da Espiral com uma Reta

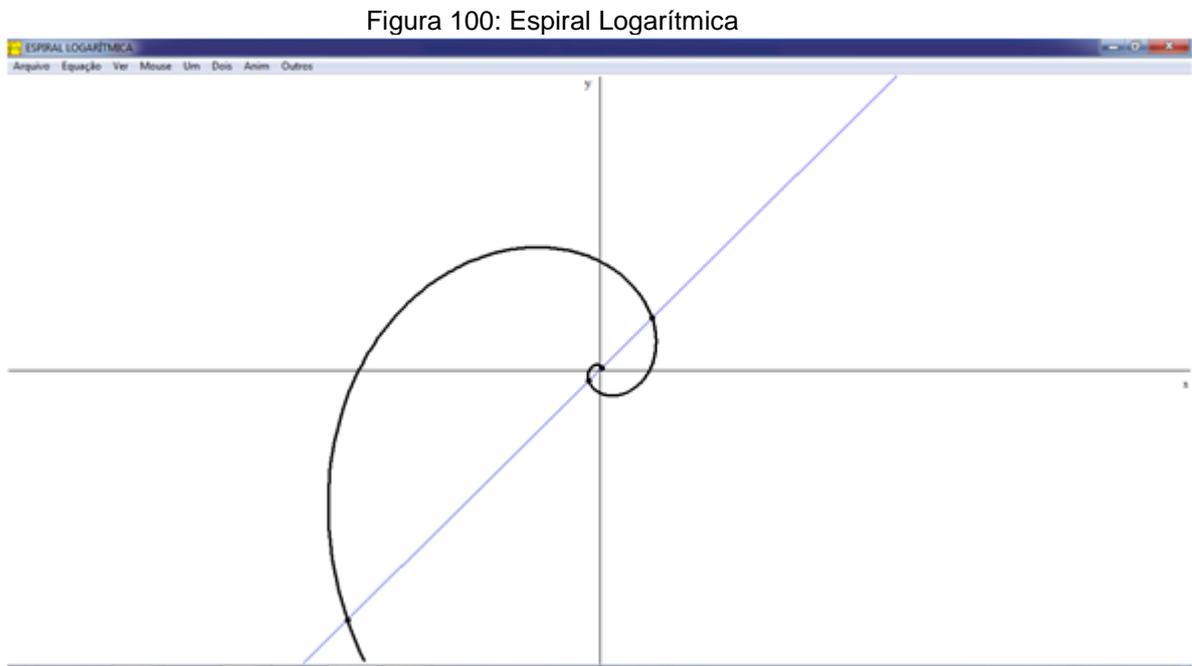


Com os pontos marcados, basta visualizar as distâncias entre dois pontos seguidos. No menu “Dois – Distâncias” escolha dois pontos consecutivos da Espiral. Como exemplo, tome os pontos $(4,99824, 4,99824)$ e $(9,44113, 9,44113)$. Clicando em “distância” o valor 6,28319 aparecerá. Calculando a distância entre dois quaisquer pontos consecutivos no software, esse valor será constante, conforme a demonstração realizada. A Figura 99 ilustra o que foi citado:

Figura 99: Distância entre Duas Espirais



A espiral logarítmica possui equação da forma $r = a \cdot e^{k \cdot \theta}$, com $a > 0$ e $k > 0$, já definidos anteriormente. Do mesmo modo, a função de equação polar permitirá a construção dessa curva no Winplot. A figura 100 expressa uma espiral logarítmica com $a = 1$ e $k = 0,5$. A sintaxe é $f(t) = \exp(0.5 \cdot t)$.



Conforme visto, a distância aumenta a taxas iguais (Progressão Geométrica). Para a demonstração deste teorema, definimos $r_1 = e^{k\theta_1}$ e $r_i = e^{k(\theta_i+2\pi)}$, com i inteiro e $i \in [1,5]$.

Assim:

$$r_2 = e^{k(\theta_1+2\pi)} = e^{k\theta_1} \cdot e^{2\pi \cdot k}$$

$$r_3 = e^{k(\theta_2+2\pi)} = e^{k(\theta_1+2\pi+2\pi)} = e^{k\theta_1} \cdot e^{4\pi \cdot k}$$

$$r_4 = e^{k(\theta_3+2\pi)} = e^{k(\theta_1+4\pi+2\pi)} = e^{k\theta_1} \cdot e^{6\pi \cdot k}$$

$$r_5 = e^{k(\theta_4+2\pi)} = e^{k(\theta_1+6\pi+2\pi)} = e^{k\theta_1} \cdot e^{8\pi \cdot k}$$

Calculando a distância entre duas espirais consecutivas, obtém-se:

$$r_2 - r_1 = e^{k\theta_1} \cdot e^{2\pi \cdot k} - e^{k\theta_1} = e^{k\theta_1} \cdot (e^{2\pi \cdot k} - 1) = r_1(e^{2\pi \cdot k} - 1)$$

$$r_3 - r_2 = e^{k\theta_1} \cdot e^{4\pi \cdot k} - e^{k\theta_1} \cdot e^{2\pi \cdot k} = e^{k\theta_1}(e^{4\pi \cdot k} - e^{2\pi \cdot k}) = r_1(e^{2\pi \cdot k} - 1)e^{2\pi \cdot k}$$

$$r_4 - r_3 = e^{k\theta_1} \cdot e^{6\pi \cdot k} - e^{k\theta_1} \cdot e^{4\pi \cdot k} = e^{k\theta_1}(e^{6\pi \cdot k} - e^{4\pi \cdot k}) = r_1(e^{2\pi \cdot k} - 1)e^{4\pi \cdot k}$$

$$r_5 - r_4 = e^{k\theta_1} \cdot e^{8\pi \cdot k} - e^{k\theta_1} \cdot e^{6\pi \cdot k} = e^{k\theta_1}(e^{8\pi \cdot k} - e^{6\pi \cdot k}) = r_1(e^{2\pi \cdot k} - 1)e^{6\pi \cdot k}$$

Nota-se que os valores variam sempre a mesma razão de $e^{2\pi \cdot k}$. Portanto, é uma Progressão Geométrica.

Comprovando no Winplot, a reta $y = x$ foi traçada e marcada as interseções entre ela e a Espiral. Os pontos, a cada giro de 2π do raio vetor e que intersectam a reta $y = x$, são os seguintes: (1,047205 , 1,047205), (24,23307 , 24,23307), (560,76997 , 560,76997) e (12976,60568 , 12976,60568). Na função Dois – Distâncias, calculamos a distância de cada ponto, obtendo os seguintes resultados:

$$r_2 - r_1 = 32,78976$$

$$r_3 - r_2 = 758,77777$$

$$r_4 - r_3 = 17558,64324$$

Com o auxílio de uma calculadora, encontramos as razões entre duas diferenças consecutivas, do seguinte modo:

$$\frac{r_3 - r_2}{r_2 - r_1} = \frac{758,77777}{32,78976} \cong 23,1407$$

$$\frac{r_4 - r_3}{r_3 - r_2} = \frac{12976,60568}{560,76997} \cong 23,1407$$

Esse valor satisfaz a razão $e^{2\pi \cdot k}$, com $k = 0,5$. Substituindo, teríamos $e^\pi \cong 23,1407$.

3.10. KAMPYLE DE EUDÓXIO

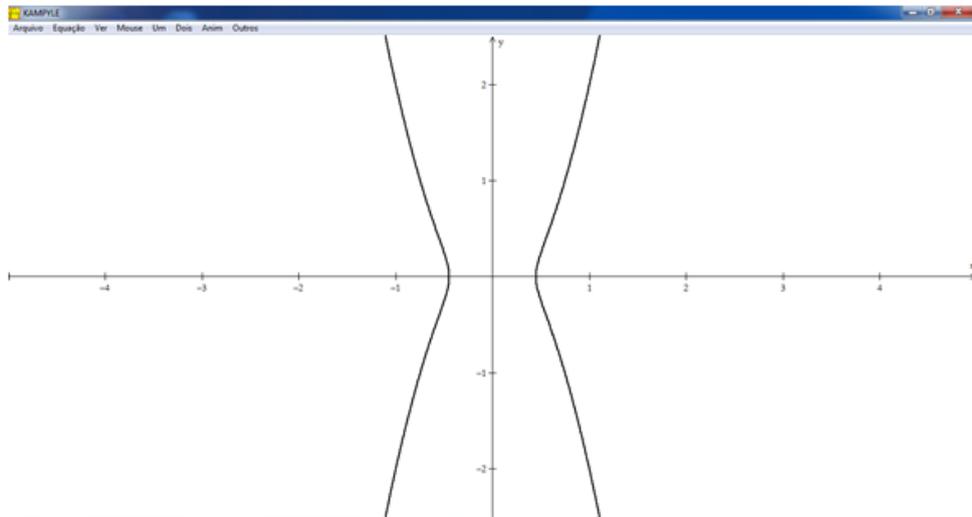
Conforme EVES (2004), há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo. A história descreve um descontentamento do lendário rei Minos com as dimensões do túmulo que foi levantado para seu filho Glauco. A ordem de Minos era dobrar o tamanho da sepultura. O poeta aconselhou Minos, de forma inexata, que bastaria dobrar cada dimensão do túmulo. Este erro do poeta induziu geômetras a procurar a solução desse problema de como dobrar um sólido mantendo seu formato. Após bastante tempo, Hipócrates apresentou sua solução, por redução do problema, utilizando médias proporcionais.

Outra história relata que, para se livrar de uma peste em que eram castigados, o oráculo orientou aos delianos (nascidos na ilha de Delos, berço do deus Apolo) dobrar o tamanho do altar de Apolo de formato cúbico. Platão, ao tomar conhecimento do problema o submeteu aos estudiosos em Geometria. Por conta disto, a duplicação do cubo é denominada de *problema deliano*. Não se tem certeza da veracidade dessa história, no entanto o problema foi estudado na Academia de Platão, existindo soluções geométricas de Eudóxio, Menaecmo e Platão (Apesar de haver dúvidas).

De acordo com EVES a solução de Eudoxo se perdeu. No entanto, sugere-se que ele utilizou a Kampyle (do grego curvado), uma curva de equação cartesiana $x^4 = x^2 + y^2$.

Vamos construir no Winplot, a Kampyle de equação $y^2 = 5x^4 - x^2$. A figura 101 expõe a curva proposta:

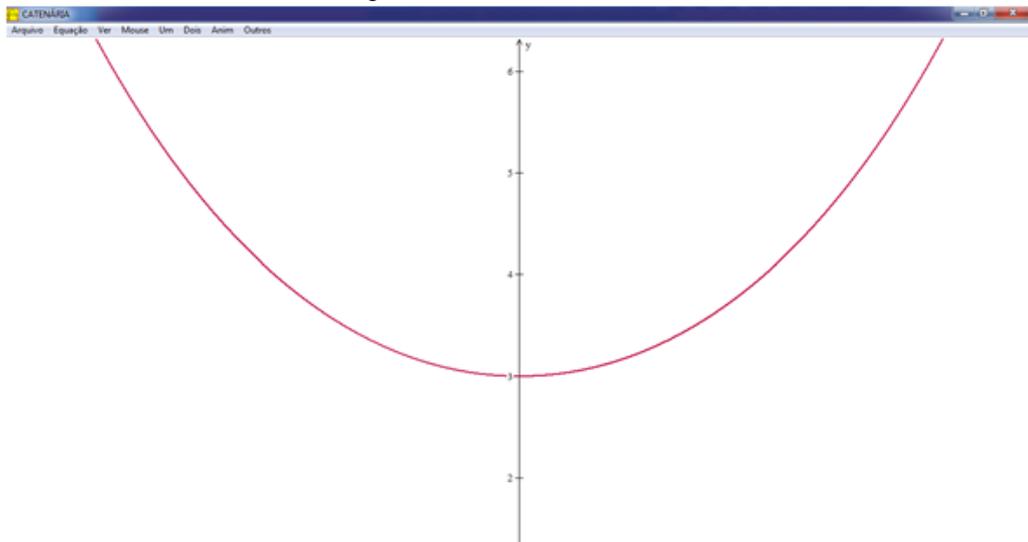
Figura 101: Kampyle de Eudócio



3.11 CATENÁRIA

Conforme Leithold, a catenária pode ser definida utilizando o cosseno hiperbólico. A equação cartesiana quando o seu ponto mais baixo for $(0, a)$ é da forma $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$. Para a construção no Winplot, em Equação – Explícita escrevemos a sintaxe $f(x) = 3 * \cosh\left(\frac{x}{3}\right)$ e assim obteremos a curva descrita na Figura 102:

Figura 102: Catenária



4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já mencionado nesta pesquisa, a falta de significado na Matemática a torna uma disciplina pouco atraente, uma vez que falta aos discentes observá-la e utilizá-la em seu cotidiano. Isto os distancia dessa ciência tão importante no desenvolvimento das sociedades, pois não percebem o quanto ela tem importância na evolução tecnológica/científica que estamos vivenciando.

O discente deve observar, através da história da matemática e das aplicações a linha tênue que há entre a matemática com a música, as artes, a arquitetura etc. Alguns desses exemplos foram mostrados nesta pesquisa, no entanto há uma gama muito maior de aplicações da matemática nessas áreas e nas outras ciências. Com efeito, mostrando a finalidade da ciência, ela se torna mais atraente.

As curvas mencionadas são bastante aplicadas em diversos estudos das mais variadas áreas. Vimos o quanto as equações, que diversas vezes são criticadas por não haver sentido, são importantes nos estudos dessas curvas.

O uso da informática pode também ser mais um estimulador para o professor utilizar em sala de aula. Como a tecnologia atualmente se faz presente na vida de quase toda a população, o seu uso torna-se imprescindível. AS TIC's possibilitam mais autonomia no processo ensino-aprendizagem e, certamente, o Winplot é uma ferramenta que auxilia bastante na construção do conhecimento. Ele também é um facilitador no estudo das funções, que pode também ser explorado pelo leitor.

A grande quantidade de cálculos gera uma reclamação por parte dos alunos. Vimos que o uso do Winplot soluciona, de forma rápida e direta, muitos cálculos, devendo o aluno apenas raciocinar de que forma deve resolver o problema com o auxílio da ferramenta.

REFERÊNCIAS

- Ávila, Geraldo. Cálculo das Funções de Uma Variável, volume I – 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- Delgado, Jorge. Geometria Analítica - Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013
- Eves, Howard. Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- Faria, Sirlene Resende de. A Catenária. Monografia (Especialização em Matemática com Ênfase em Cálculo da UFMG). Belo Horizonte, 2011.
- Figueira, Adriana Nascimento. Espirais. Artigo apresentado na Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá, 2007.
- FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996 – Coleção Leitura.
- Freixo, Suellen de Souza. Ciclóide. Artigo apresentado na Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá, 2011.
- Leithold, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica, volume I – 3ª ed. São Paulo, SP: editora HARBRA, 1994.
- Maor, Eli. E: A História de Um Número; tradução de Jorge Calife. – 4ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 2008.
- Markuchevitch, A.I. Curvas Notáveis; traduzido por Robinson Moreira Tenório. – São Paulo: Atual, 1995. – (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando)
- Prado, Flávio Brito. Uma Proposta de Ensino de Construção de Gráficos de Composições da Função Afim com Funções Trigonométricas e uma Apliação em Música. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática do Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Rio de Janeiro, 2013.
- Reis, Fabiano Elias. Um Estudo Introdutório Sobre Cissóides. FAMAT em Revista, Número 11, p. 263 – 294. Uberlândia, 2008.
- Reis, Fernando Henrique Espíndola. As Seções Cônicas na Engenharia Civil. Periódico Construindo, volume II, número 2, p. 38-44. Belo Horizonte, 2010.
- Siqueira, Evandro Moreno de. Curva de Agnesi. Artigo apresentado na Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá, 2007.
- Stewart, James. Cálculo, volume I; tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2015.
- Nascimento, Mauri C. Artigo apresentado na Universidade Estadual de São Paulo, Campus de Bauru. São Paulo.
- Souza, Lindomar Duarte de. Cônicas e Suas Propriedades Notáveis. Dissertação (PROFMAT – UFSC). Santa Catarina, 2014.

