



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA E
CONTABILIDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA – CAEN

ÍTALO MORAIS SANTOS

ANÁLISE DE EQUILÍBRIO GERAL COM AGENTES HETEROGÊNEOS
UTILIZANDO O ALGORITMO DE FAIR-TAYLOR

FORTALEZA

2016

ÍTALO MORAIS SANTOS

**ANÁLISE DE EQUILÍBRIO GERAL COM AGENTES HETEROGÊNEOS
UTILIZANDO O ALGORITMO DE FAIR-TAYLOR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia, da Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Antônio de Castro Pereira.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S239a Santos, Ítalo Morais.
Análise de equilíbrio geral com agentes heterogêneos utilizando o algoritmo de Fair-Taylor / Ítalo Morais Santos. – 2016.
34 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Programa de Pós-Graduação em Economia, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Antônio de Castro Pereira.

1. Equilíbrio Geral. 2. Agentes Heterogêneos. 3. Algoritmo de Fair-Taylor. I. Título.

CDD 330

ÍTALO MORAIS SANTOS

**ANÁLISE DE EQUILÍBRIO GERAL COM AGENTES HETEROGÊNEOS
UTILIZANDO O ALGORITMO DE FAIR-TAYLOR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia, da Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Antônio de Castro Pereira.

Aprovado em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Antônio de Castro Pereira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Márcio Veras Corrêa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Gildemir Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A minha esposa, Carol

A toda minha família

AGRADECIMENTOS

À CAPES e à FUNCAP, pelo auxílio financeiro.

Ao Prof. Ricardo Antônio de Castro Pereira pela orientação e pelas palavras de apoio.

Aos demais professores participantes da banca examinadora Márcio Veras Corrêa e Francisco Gildemir Ferreira da Silva, pela disponibilidade e pelas contribuições.

Ao Prof. José Welington Félix Gomes, por checar minhas equações sempre que possível.

Aos meus caros colegas de turma, pela camaradagem sem igual.

RESUMO

Nesta dissertação discutimos o algoritmo de Fair-Taylor, um método numérico de solução de sistemas de equações em diferença que geralmente é utilizado para solução de sistemas não-lineares. As equações em diferenças possuem diversas aplicações em economia e são comuns principalmente nos modelos de equilíbrio geral dinâmico. Foram realizados alguns exercícios de simulação a título de demonstração do funcionamento do algoritmo. Primeiramente implementamos iterações deste algoritmo para propor uma técnica alternativa que utilizamos para encontrarmos o estado estacionário de um modelo de equilíbrio geral simples com apenas dois consumidores heterogêneos e uma firma representativa. Logo após utilizamos o algoritmo de Fair-Taylor para encontrar solução de um modelo de equilíbrio geral mais amplo, cuja a heterogeneidade entre os consumidores é adicionada tanto por diferenças de produtividade, quanto pela forma como os consumidores são taxados e como eles se beneficiam de políticas de transferência de renda. Concluimos que sob algumas condições, na ausência de falhas de mercado que impensam os consumidores de tomar ou emprestar capital livremente e em qualquer nível, ocorre uma equalização dos níveis de consumo das famílias.

Palavras-Chave: Equilíbrio Geral, Agentes Heterogêneos, Algoritmo Fair-Taylor, Desigualdade.

ABSTRACT

In this dissertation we discuss the Fair-Taylor algorithm, a numerical method for solving systems of difference equation which is usually used for solving non-linear systems. Difference equations have several applications in economics and are especially common in dynamic general equilibrium models. A few simulation exercises were done in order to demonstrate the functioning of the algorithm. First, we implement iterations of this algorithm to propose a alternative technique to find the steady state of a simple general equilibrium model with only two heterogeneous consumers and one representative firm. After we utilize the Fair-Taylor algorithm to find the solution of a more ample general equilibrium model, were the consumer's heterogeneity are added by differences in productivity, by the fashion they are taxed e how they benefit from income transference policies. We conclude that under certain conditions, at the absence of market flaws that stops consumers from borrowing or landing capital freely and at any level, there is a equalization of consumption levels across households.

Keywords: General equilibrium, Heterogeneous agents, Fair-Taylor algorithm, Inequality.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	O ALGORITMO DE FAIR-TAYLOR	11
3	DESCRIÇÃO GERAL DO MODELO	14
3.1	Comportamento das Famílias	15
3.2	Comportamento das Firmas	17
3.3	Agregação	18
3.4	Estado Estacionário	19
4	ALGORITMO DE SOLUÇÃO DE ESTADO ESTACIONÁRIO	21
4.1	Aplicando o algoritmo	24
5	RESULTADOS	26
5.1	Modelo com Governo	27
5.2	Restrição ao Crédito	28
6	CONCLUSÃO	30
	ANEXO	31
	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

Modelos econômicos de equilíbrio geral com escolha intertemporal vêm se tornando uma ferramenta analítica básica para análise de fenômenos macroeconômicos. Esta abordagem é principalmente útil para construção de modelos em que agentes econômicos interagem em um ambiente de trocas e que as decisões de todos os agentes devam ser consistentes entre si. Assim é permitido que variáveis que são tipicamente exógenas em modelos de equilíbrio parcial sejam endógenas, além de revelar interações que podem ser omitidas.

Por algum tempo, modelos desta espécie limitava-se ao uso do recurso chamado de agente representativo. Nestes modelos geralmente considera-se apenas que apenas um agente em cada setor exista – por exemplo, um consumidor e uma firma – e espera-se que estas unidades decisórias representem adequadamente as economias reais que são habitadas por um número arbitrariamente grande de agentes.

A abordagem de agentes representativos possui algumas limitações. Em primeiro lugar a hipótese ao qual um agente representativo de fato tem comportamento consistente com os agentes representados são resritivas e consideradas irreais por alguns economistas. Kirman (1992) argumenta que quando se assume um único agente representando todo um setor elimina-se todo e qualquer problema de coordenação, um erro grave visto que problemas em macroeconomia como a existência de desemprego e danos causados pela inflação são explicados justamente por coordenação imperfeita entre os agentes econômicos.

A forma como a heterogeneidade dos agentes pode afetar as variáveis macroeconômicas também é uma riqueza que é perdida na análise de agentes representativos. Hugget (1993) mostra que choques idiossincráticos nas dotações dos agentes alteram sua demanda por ativos sem risco, tornando os resultados mais precisos do que a versão de agente representativo do mesmo problema.

Outro problema dos modelos de agente representativo, e que temos mais interesse em investigar nesta dissertação, é a omissão dos aspectos distributivos de uma economia. Na abordagem de agentes representativos somos incapazes de analisar como a desigualdade afeta variáveis agregadas assim como que aspectos estruturais das economias explicam a existência de desigualdades. Gloom e Ravikumar (1992), por

exemplo, utilizam um modelo de gerações sobrepostas com agentes heterogêneos para comparar os efeitos distributivos e de eficiência entre sistemas de educação pública e privada. Benabou (1996), Heckman, Lochner e Taber (1998) e Heckman e Lochner (1999) utilizam um modelo de gerações sobrepostas com agente heterogêneos para analisar educação e desigualdades.

O grande potencial analítico da abordagem de modelos com agente heterogêneo vêm com um custo. Tais modelos são em parte mais difíceis de solucionar pois na maioria das vezes nem mesmos suas soluções estacionárias possuem forma analítica. Hommes (2006) apresenta casos em que indivíduos com comportamento simples e estável sob autarquias geram dinâmicas caóticas e complexas quando postos para interagir. Brock e Hommes (1998) apresenta um modelo de precificação de ativos com agente heterogêneos em que apesar do grande esforço numérico para encontrar uma solução, está ainda é extremamente instável. Taylor e Uhlig (1990) apresenta a solução de um mesmo modelo resolvido por vários algoritmos distintos e conclui que em muitos casos os resultados são sensíveis à técnica utilizada. Não apenas a solução dos modelos de agentes heterogêneos, mas a própria construção destes é em geral mais difícil.

A solução de modelos com agentes heterogêneos deve passar por algum método numérico ou computacional, devido a não-analiticidade gerada pelas equações de agregação. Nesta dissertação optemos por explorar o algoritmo proposto em Fair e Taylor (1983) para solucionarmos modelos de equilíbrio geral intertemporal com agentes heterogêneos em relação a sua produtividade, a forma como são taxados, a forma como são beneficiados por programas de transferência de renda e, no último exercício, acesso ao mercado de crédito. Muitos estudos¹ analisam o efeito da estrutura tributária e da política fiscal sob aspectos macroeconômicos, mas estudos sobre desigualdade ainda são relativamente escassos.

Como em todo trabalho que envolve métodos numéricos o foco deve estar tanto no método quanto no objeto de estudo. Por este motivo fazemos uma descrição rigorosa do método além de aplicá-lo em nossa análise sobre desigualdade.

Na próxima seção iremos apresentar o algoritmo de Fair-Taylor com detalhes antes de aplicá-lo. Na seção 3 faremos uma apresentação do modelo que será usado como base nas seções finais. Na seção 4 propomos uma algoritmo baseado em alguns passos do

¹Por exemplo, Chamley (1986), Lucas (1990) e Jones et all (1993).

Fair-Taylor e resolvemos um modelo simplificado. Na seção 5 utilizamos as soluções de Fair-Taylor para analisarmos quais fatores estruturais da economia exercem influência sobre a desigualdade nos níveis de consumo.

2 O ALGORITMO DE FAIR TAYLOR

Inicialmente proposto por Fair (1976) e depois desenvolvido em Fair e Taylor (1983) o algoritmo de Fair-Taylor é uma das formas mais comumente utilizadas para encontrar soluções de sistemas de equações em diferenças. Inicialmente este algoritmo foi proposto para solucionar modelos não-lineares de expectativas racionais e logo passou a ser utilizado em modelos de equilíbrio geral intertemporal². Iremos nessa seção apresentar uma versão determinística do algoritmo original aplicada a um caso generalizado.

O problema que estamos tentando resolver é descrito a seguir. Dada um sistema de equações de Euler definida nos reais e que evolui infinitamente em um fluxo de tempo discreto³.

$$f(y_t, y_{t+1}, x_t, \Phi) = 0 \quad (1)$$

Onde y_t é um vetor de variáveis endógenas, x_t é um vetor de variáveis exógenas e Φ é o conjunto de parâmetros estruturais do sistema. A equação (1) nos diz que há um conjunto de variáveis y_t que evoluem ao longo do tempo de forma específica e que essa evolução depende dos valores assumidos pela própria variável no passado, além de condições externas representados por x_t e Φ . Existe uma grande gama de fenômenos naturais e sociais que podem ser representados por este tipo de equação, como por exemplo o peso de um ser vivo ao longo do tempo ou a evolução de condições climáticas. Em economia este tipo de equação é recorrente em análise de políticas macroeconômicas e em modelos de crescimento econômico.

Solucionar a equação (1) nada mais é do que encontrar uma sequência $\{y_t\}$ de variáveis que seja consistente com $f(\cdot)$ dada as condições x_t e Φ . O algoritmo utiliza uma estratégia de tentativa e erro para encontrar a solução numericamente. Os passos computacionais a seguir descrevem o seu funcionamento.

1. Inicialmente deve-se fixar um horizonte $S > 1$ suficientemente grande. Adivinhe valores para as variáveis y_t em todo $t = 0, 1, 2, \dots, S$. Iremos nos

² Wilcoxon (1995).

³ O que implica $-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} y_t < \infty$.

referir a cada uma dessas tentativas de $y_t^{z,S}$, onde $z = 1, 2, \dots$ é o número de tentativas que fizemos até o momento.

2. Substitua $y_{t+1}^{1,S}$ em (1) e resolva a equação (2) para y_t .

$$f(y_t, y_{t+1}^{1,S}, x_t, \Phi) = 0 \quad (2)$$

A solução y_t^a da equação (2) chamamos de série aparente ou implícita. Esta série nos dá uma nova dinâmica das variáveis endógenas que é consistente com x_t e Φ em $f(\cdot)$, mas caso $y_t^{1,S}$ não seja a solução de (1) haverá uma inconsistência entre $y_t^{a,S}$ e as demais variáveis e parâmetro do sistema. Este passo é chamado de iteração de Fair-Taylor do tipo I.

3. Calcule:

$$\Delta_{II} = |y_t^{a,S} - y_t^{1,S}| \quad \forall \quad t = 0, 1, \dots, S \quad (3)$$

Esta diferença nos dá o grau de inconsistência da tentativa inicial $y_t^{1,S}$. Caso todos as entradas de Δ_{II} seja menores do que um certo valor de tolerância pré-determinado, o algoritmo prossegue para o passo 4. Caso contrário, deve-se retornar ao passo 2 fazendo uma nova tentativa $y_t^{z+1,S} = g(y_t^{a,S}, y_t^{1,S})$. Este passo é chamado de iteração de Fair-Taylor do tipo II.

4. Repita os passos 1-4 substituindo S por $S + 1$ e fazendo $y_t^{1,S+1} = y_t^{a,S}$. Calcule:

$$\Delta_{III} = |y_t^{a,S+1} - y_t^{a,S}| \quad \forall \quad t = 0, 1, \dots, S \quad (4)$$

Caso Δ_{III} seja menor do que um certo valor de tolerância, o algoritmo termina e consideramos $y_t^{a,S+1}$ como solução. Este passo é chamado de iteração de Fair-Taylor do tipo III. A função deste passo é corrigir um possível erro na escolha de S pois é possível que o algoritmo atinja convergência nas iterações do tipo I e II mesmo que tenhamos escolhido um S pequeno demais de tal forma que o estado estacionário não possa ser atingido. Além disso começarmos com um S relativamente restrito é importante pois impede que erros de tentativa nos períodos distantes contaminem o ajuste das iterações I e II nos períodos iniciais.

A intuição por trás do algoritmo é bem simples. Ao tentarmos uma solução qualquer e calcular uma série explícita, nós obtemos informações preciosas dos erros que cometemos na nossa tentativa inicial. O algoritmo então utiliza uma critério de

atualização $g()$ que se baseia nestas informações para fazer uma nova tentativa de tal forma a reduzir a inconsistência no sistema.

O maior desafio na implementação deste algoritmo é definirmos o critério de atualização $g()$, que deverá consistir em uma contração. Inicialmente Fair e Taylor (1983) propôs:

$$g(y_t^{a,S}, y_t^{1,S}) = y_t^{a,S} \quad (5)$$

Este critério de atualização inicial é suficiente para maior parte dos modelos, especialmente modelos lineares. Para modelos não-lineares algumas vezes é necessário que se utilize de *damping* na atualização das tentativas, ou seja, que a atualização esteja entre os valores implícitos e a tentativa:

$$g(y_t^{a,S}, y_t^{1,S}) = \rho y_t^{a,S} + (1 - \rho) y_t^{1,S} \quad \text{tal que } \rho \in (0,1] \quad (6)$$

O critério de atualização (6) reduz os erros de aproximação que são inerentes aos métodos de solução de sistemas não lineares. Na seção 4 utilizaremos as iterações do tipo I para desenvolver um algoritmo que encontra o estado estacionário de modelos. Na seção 5 é resolvido um modelo de equilíbrio geral utilizando o algoritmo de Fair-Taylor. Além disso, segue em anexo uma breve apresentação do uso do algoritmo para obtenção da solução de um modelo linear simples.

3 DESCRIÇÃO GERAL DO MODELO

Nesta seção iremos apresentar um modelo de equilíbrio geral dinâmico com agentes heterogêneos similar ao utilizado por Paes e Bugarin (2006). Este será utilizado como *benchmark* para os exercícios de investigação de uso do algoritmo de Fair-Taylor apresentados nos capítulos subsequentes. Como discutido nas sessões anteriores, a principal característica deste modelo é sua capacidade de investigar do ponto de vista teórico e macroeconômico a desigualdades de renda, riqueza, nível de consumo e horas trabalhadas e diversos outros aspectos, algo que seria impossível em modelos de agentes representativos.

Suponha uma economia fechada e com governo populada por N famílias heterogêneas entre si e uma firma representativa. Essa economia existe num fluxo de tempo que progride infinitamente de forma discreta. Nesta economia os agentes econômicos possuem informação perfeita sob todos os aspectos desta. Além disso os agentes fazem previsões perfeitas. Ou seja, os agentes, ao tomar suas decisões presentes e futuras sabem de anti-mão toda a sequência futura de políticas⁴. Uma consequência desta última propriedade é a ausência de elementos estocásticos.

Em cada período as famílias escolhem, de forma ótima, entre tempo de lazer e um único bem de consumo. Além disso estas famílias estão sujeitas a uma restrição orçamentaria e de disponibilidade de tempo. Todos os fatores de produção, trabalho e capital, estão sob propriedade das famílias que ofertam estes para a firma representativa em troca de remuneração. Por sua vez, cada período, a firma representativa contrata estes fatores de produção das famílias e produz o bem de consumo que será consumido por completo no mesmo período e um adicional de bens de capital que só serão incorporados na produção no período subsequente. A interação entre firmas e famílias se dão nos mercados de bem de consumo, de bem de capital e no mercado de trabalho e todos os agentes são tomadores-de-preço, ou seja, nenhum agente tem quaisquer poder de mercado. Em outra palavra, todos os três mercados estão em competição perfeita.

⁴ Na literatura refere-se a esse tipo de modelo como *perfect foresight*, em contraste com os modelos de expectativas racionais em que a informação disponíveis aos agentes são os momentos das distribuições das políticas.

O governo interfere nesta economia por duas vias. Primeiro, ele tributa a renda obtida do trabalho e do capital das famílias. Segundo, ele redistribui esta renda na forma de transferências, que podem ou não serem iguais para todas as famílias. É possível também que a distribuição de transferências seja proporcional a contribuição de cada família à receita tributária. Nos referimos a forma como o governo decide distribuir essas transferências de política redistributiva e está será tratada como exógena em nosso modelo. Comparar os efeitos das diversas possibilidades de políticas distributivas será o principal exercício realizado nesta seção.

A heterogeneidade entre as famílias é incorporada de diversas formas. Primeiramente, as famílias possuem produtividades do trabalho diferentes. Além disso a alíquota que incide sob a renda do trabalho pode ser distinta entre as famílias, assim como o benefício que elas recebem da política distributiva. Finalmente elas também podem diferir no que tange ao acesso ao mercado de crédito.

3.1 Comportamento das Famílias

Cada uma das i -ésimas famílias resolvem o problema de otimização de utilidade presente (7) sujeitas a restrição orçamentária (8), a disponibilidade de tempo (9) em cada instante t e a um estoque inicial de capital k_{i0} .

$$\max_{c_{it}, l_{it}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\alpha \ln(c_{it}) + (1 - \alpha) \ln(l_{it})] \quad (7)$$

$$\text{sujeito à } c_{it} + s_{it} \leq (1 - \tau_{it}^h) w_t \xi_i h_{it} + (1 - \tau_t^k) r_t k_{it} + tr_{it} \quad (8)$$

$$l_{it} + h_{it} = 1 \quad (9)$$

Onde β representa a preferência intertemporal das famílias⁵, α a preferência das famílias entre consumo e lazer⁶ e ξ_i mede de produtividade de cada família. c_{it} representa o nível de consumo, s_{it} o investimento e k_{it} o estoque de capital de cada i -ésima família no período t . h_{it} e l_{it} representam, respectivamente, a fração de tempo disponível em

⁵ $\beta \in (0,1)$ e quanto mais perto de 0 mais as famílias valorizam o consumo e o lazer no presente vis-a-vis o consumo e o lazer futuro. β próximo de 1 implica que as famílias são quase indiferentes entre consumo e lazer presente e consumo e lazer futuro.

⁶ $\alpha \in (0,1)$ e quanto maior, mais as famílias valorizam consumo em detrimento de lazer.

cada período dedicado a lazer ou dedicado a trabalho. w_t representa o salário médio pago às famílias e r_t a taxa de juros de mercado pago pelo empréstimo do capital. Finalmente τ_{it}^h , e τ_t^k representam as alíquotas de tributação sobre o rendimento bruto do trabalho e do capital, respectivamente, e tr_{it} representa a renda que foi transferida para a família neste período.

O estoque de capital de cada uma das famílias deve seguir a lei de movimento de capital, onde o estoque de capital no período seguinte é dado pela parcela não-depreciada do estoque de capital atual⁷ mais o investimento realizado no período.

$$k_{it+1} = (1 - \delta)k_{it} + s_{it} \quad (10)$$

Rearranjando (9) em função de l_{it} e (10) em função de s_{it} e substituindo em (7) e (8), respectivamente, obtemos:

$$\max_{c_{it}, h_{it}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\alpha \ln(c_{it}) + (1 - \alpha) \ln(1 - h_{it})] \quad (11)$$

$$\text{sujeito a } c_{it} + k_{it+1} \leq (1 - \tau_{it}^h)w_t \xi_i h_{it} + [1 - \delta + (1 - \tau_t^k)r_t]k_{it} + tr_{it} \quad (12)$$

As condições de primeira ordem do problema descrito pelas equações (11) e (12) são:

$$\lambda_t = \frac{\beta^t \alpha}{c_{it}} \quad (13)$$

$$\lambda_t = \frac{\beta^t (1 - \alpha)}{(1 - \tau_{it}^h)w_t \xi_i (1 - h_{it})} \quad (14)$$

$$\lambda_t = [1 - \delta + (1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1}] \lambda_{t+1} \quad (15)$$

$$c_{it} + k_{it+1} = (1 - \tau_{it}^h)w_t \xi_i h_{it} + [1 - \delta + (1 - \tau_t^k)r_t]k_{it} + tr_{it} \quad (16)$$

Além das equações (13), (14), (15) e (16) é necessário que a solução atenda a condição de transversalidade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sum_{t=0}^n \beta^t [\alpha \ln(c_{it}) + (1 - \alpha) \ln(1 - h_{it})]| < \infty \quad (17)$$

⁷ δ é a taxa de depreciação do capital.

Avançando um período em (13) e substituindo λ_{t+1} em (15) obtemos a equação (18). Igualando (13) e (14) obtemos a equação (19).

$$\frac{c_{it+1}}{c_{it}} = \beta[1 - \delta + (1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1}] \quad (18)$$

$$h_{it} = 1 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha(1-\tau_{it}^h)w_t\xi_i} c_{it} \quad (19)$$

A equação (18) é a uma equação de Euler para consumo. Além disso, note que nenhum termo do lado direito da equação (18) depende de i e por tanto $\frac{c_{it+1}}{c_{it}}$ é igual para todas as famílias em um dado período. Sendo assim, diferença entre níveis de consumo só ocorrem caso as famílias escolham níveis de consumo inicial c_{i0} distintos.

A equação (19) nos dá o trade-off entre consumo e a oferta de trabalho de cada família em cada período. A partir dela sabemos que mesmo que os níveis de consumo entre as famílias sejam iguais, diferenças de produtividade e da alíquota da tributação do trabalho fazem com que as famílias ofertem quantidades distintas de horas de trabalho.

3.2 Comportamento das Firmas

Suponha a existência de uma única firma representativa maximizadora de lucro. Esta firma têm tecnologia neoclássica e utiliza os fatores de produção trabalho, medida em horas, e capital para produção do único bem de consumo e dos bens de investimento que são incorporados ao estoque de capital ao final de cada período. Optamos por utilizar uma função de produção do tipo Cobb-Douglas.

$$Y_t = K_t^\theta H_t^{1-\theta} \quad (20)$$

Onde Y_t representa o produto total da firma, K_t representa o estoque de capital agregado e H_t representa o total de horas trabalhadas por todos os indivíduos, ajustadas por suas respectivas produtividades ε_i .

$$K_t = \sum_{i=1}^N k_{it} \quad (21)$$

$$H_t = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i h_{it} \quad (22)$$

Como esta firma existe em um ambiente competitivo, seu comportamento é de tomador de preço e sendo assim seu problema de maximização de lucro deve ser representado da seguinte forma:

$$\max_{K_t, H_t} \sum_{t=0}^{\infty} (K_t^\theta H_t^{1-\theta} - w_t H_t - r_t K_t) \quad (23)$$

Como nenhuma de suas variáveis possuem uma componente dinâmica, a solução do problema acima pode ser obtida simplesmente buscando-se a solução do problema de maximização de lucro em cada período, individualmente. Desta forma a solução de primeira ordem do problema de maximização de lucro é dado pelas equações:

$$r_t = \theta \left(\frac{K_t}{H_t} \right)^{\theta-1} \quad (24)$$

$$w_t = (1 - \theta) \left(\frac{K_t}{H_t} \right)^\theta \quad (25)$$

Finalmente, como a firma possui retornos constantes de escala, existe em um ambiente competitivo e tem total flexibilidade na alocação de fatores de produção, vale:

$$Y_t = w_t H_t + r_t K_t \quad (26)$$

3.3 Agregação

Nesta economia o governo arrecada tributando o rendimento do trabalho e do capital das famílias e gasta esses recursos redistribuindo renda para as famílias. Por hipótese o governo gasta exatamente o que arrecada em cada período. Sendo assim sua restrição orçamentaria é expressa por:

$$\sum_{i=1}^N \tau_{it}^h w_t \varepsilon_i h_{it} + \sum_{i=1}^N \tau_{it}^k r_t k_{it} = \sum_{i=1}^N tr_{it} = T_t \quad (27)$$

Onde T_t é o gasto total do governo. A proporção com o qual o governo distribui os recursos é exógena.

$$tr_{it} = \gamma_i T_t \quad (28)$$

O parâmetro de política distributiva γ_i representa o percentual de toda a arrecadação que é destinado a cada i -família⁸.

⁸ É evidente que $\gamma_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^N \gamma_i = 1$.

Se somarmos as restrições orçamentarias (8) de todas as famílias obtemos a equação (29).

$$C_t + I_t = \sum_{i=1}^N (1 - \tau_{it}^h) w_t \varepsilon_i h_{it} + (1 - \tau_t^k) r_t K_{it} + T_t \quad (29)$$

$$C_t = \sum_{i=1}^N c_{it} \text{ e } I_t = \sum_{i=1}^N s_{it} \quad (30)$$

Onde C_t e I_t representam, respectivamente, o consumo e o investimento agregado. Substituindo (25) e (26) em (28) é fácil perceber que a relação macroeconômica fundamental (30) é implicitamente mantida em todos os períodos.

$$Y_t = C_t + I_t \quad (31)$$

A solução do modelo de equilíbrio geral dinâmico aqui descrito é uma coleção de seqüências de consumo c_{it} , horas trabalhadas h_{it} , estoque de capital k_{it} , salários w_t , taxas de juros r_t , alíquotas de tributação τ_{it}^h e τ_t^k , e transferências tr_{it} que satisfazem todas as equações (17), (18), (19), (24), (25) e (27) simultaneamente.

3.4 Estado Estacionário

O conhecimento das equações de estado estacionário das variáveis em muitos casos é essencial para que possamos encontrar a solução do modelo utilizando algum método numérico. Impondo a condição de estacionaridade sob (15) e rearranjando a equação obtemos o valor de estado estacionário da taxa de juros.

$$r_{ss} = \frac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{1 - \tau_{ss}^k} \quad (32)$$

Substituindo (32) em (24) e rearranjando obtemos a relação capital-trabalho de estado estacionário.

$$K_{ss}/H_{ss} = \left[\frac{\theta(1 - \tau_{ss}^k)}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (33)$$

Substituindo (33) em (25) obtemos também o salário de estado estacionário.

$$w_{ss} = (1 - \theta) \left[\frac{\theta(1 - \tau_{ss}^k)}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right]^{\frac{\theta}{1-\theta}} \quad (34)$$

Note das equações (33) e (34) que a taxa de juros e os salários de estado estacionário dependem exclusivamente de parâmetros globais da economia. Sendo assim, nenhuma alteração que afete os agentes isoladamente irá afetar o sistema de preços.

Infelizmente não é possível obter uma fórmula analítica de estado estacionário para nenhuma das demais variáveis. Isso ocorre por conta da heterogeneidade das alíquotas de tributação sob o trabalho e da produtividade do trabalho. Na próxima seção iremos apresentar um algoritmo derivado do algoritmo de Fair-Taylor que poderá ser utilizado para encontrarmos o estado estacionário das demais variáveis baseando-nos apenas na condição terminal conhecida (33).

Além disso, há outra relação de estado estacionário que nos será útil. Avaliando a restrição orçamentária dos consumidores (16) no estado estacionário, substituindo (32) e rearranjando obtemos uma relação do estoque de capital dos indivíduos e de suas horas trabalhadas no estado estacionário.

$$k_{iSS} = \frac{\beta[(1-\tau_{iSS}^h)w_{SS}\varepsilon_i(\alpha-h_{iSS})-(1-\alpha)tr_{SSi}]}{(1-\alpha)(1-\beta)} \quad (35)$$

Observe da equação acima que a relação entre estoque de capital e horas trabalhadas no estado estacionário é negativa. Além disso, sempre que as horas trabalhadas de um dos indivíduos for maior do que (35) o estoque de capital de estado estacionário é negativo e essa família terá uma dívida no longo prazo.

$$\alpha - \frac{(1-\alpha)tr_{SSi}}{(1-\tau_{iSS}^h)w_{SS}\varepsilon_i} \quad (36)$$

4 ALGORITMO DE SOLUÇÃO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

Nesta seção iremos apresentar um algoritmo de desenvolvimento próprio que é capaz de encontrar soluções de estado estacionário pela via numérica. Esse procedimento é útil caso uma solução de estado estacionário analítica não seja possível de ser obtida. Existem outros procedimentos de cálculo de estados estacionário que geralmente baseiam-se em avaliar as equações do sistema em estado estacionário e solucionar este sistema com algum algoritmo de solução de sistemas não-lineares, como o método de Newton. Um dos problemas destes métodos é que em geral é necessário partir de um ponto relativamente próximo ao estado estacionário para que uma solução seja encontrada. No nosso caso tentativas relativamente distantes ou convergem ou podem ser facilmente corrigidas.

Este algoritmo consiste em utilizar a iteração do tipo I de Fair e Taylor (1983) para encontrarmos valores estacionários para as séries mas que são inconsistentes com a tentativa inicial. É necessário que se conheça alguma condição terminal do sistema que possa ser utilizada como critério de atualização das tentativas. Deve-se então atualizar as tentativas de tal forma que a condição terminal conhecida do sistema seja obedecida.

Sem perda de generalidade, suponha uma economia com apenas dois indivíduos e sem governo que diferem entre si no apenas em termos de produtividade do trabalho. Para aplicarmos o algoritmo devemos então assumir alguns valores para os parâmetros do modelo. Estes valores são utilizados apenas para demonstrar o funcionamento do algoritmo aqui utilizado e não para fazer uma simulação precisa de uma economia concreta. De qualquer forma utilizamos parâmetros que são comumente encontrados na literatura.

Tabela 1 – Parâmetros e Condições Iniciais

Parâmetros	Valores
α	0,429
β	0,963
θ	0,4

δ	6,56%
ε_1	0,4
ε_2	0,6
τ^k	0%
k_{10}	1
k_{20}	1

Fonte: Elaboração própria.

Dado este conjunto de parâmetros podemos então fazer as iterações do tipo I de Fair-Taylor. No contexto de modelos de equilíbrio geral, deve-se excluir as equações de Euler (18) e resolver o sistema utilizando as demais equações e a tentativa inicial.

Escolhemos as séries de horas de lazer para fazermos nossos chutes pois diferente das demais variáveis estas variáveis são limitadas superiormente e inferiormente. Além disso, como no nosso modelo temos dois agentes, teremos que fazer tentativa de duas séries simultaneamente e para que possamos fazer o ajuste em apenas uma das séries, é conveniente que devemos deduzir alguma relação entre estas. Este procedimento pode ser feito na tentativa e erro – caso a proporção entre as séries não seja a proporção de estado estacionário, a iteração do tipo I não produzirá séries estacionárias das demais variáveis. No nosso caso encontramos que a proporção adequada de horas de lazer de estado estacionário é dada por:

$$\frac{l_{1t}}{l_{2t}} = \frac{(1-\tau_1^h)\varepsilon_2}{(1-\tau_2^h)\varepsilon_1} \quad (37)$$

Inicialmente defina um horizonte de simulação S , assim como no algoritmo de Fair-Taylor. A seguir chute um valor qualquer para l_{1t} em toda a série $t = 0,1,2, \dots, S$ e utilize a equação (37) para calcular o chute complementar l_{2t} . Temos então uma tentativa de solução para $l_{1t}^c, l_{2t}^c, h_{1t}^c, h_{2t}^c$ e H_t^c .

Para completarmos a iteração I devemos primeiros encontrar as séries das demais variáveis que são associadas ao chute inicial. Substituindo h_{10}^c e h_{20}^c em (19) obtemos c_{10}^c e c_{20}^c uma vez que K_0 é conhecido. Então podemos calcular k_{11}^c e k_{21}^c utilizando as restrições orçamentarias (16). Repita estes passos, mas agora utilizando $h_{11}^c, h_{21}^c, k_{11}^c$ e k_{21}^c para calcular $c_{11}^c, c_{21}^c, k_{12}^c$ e k_{22}^c . Repetindo estes passos S vezes obtem-se um conjunto de sequências $h_{1t}^c, h_{2t}^c, c_{1t}^c, c_{2t}^c, k_{1t}^c, k_{2t}^c, H_t^c, K_t^c, w_t^c$ e r_t^c . Estas sequências são todas consistentes entre si uma vez que respeitam as equações (16), (19), (24) e (25), mas

não a equação (18) caso nossa primeira tentativa seja equivocada. Para completarmos nossa iteração do tipo I temos que utilizar nossa tentativa inicial para calcularmos uma série implícita de h_{1t} e h_{2t} .

Um detalhe é que a equação (18) está escrita em termos de consumo. Para encontrar a equação de Euler das horas de lazer, basta isolar c_{it} em (19), avançar um período e fazer uma substituição em (18). Já substituindo os salários e taxa de juros por (24) e (25) obtemos:

$$h_{it} = 1 - \frac{\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}\right)^\theta (1-h_{it+1})}{\left(\frac{K_t}{H_t}\right)^\theta \beta^{(1-\delta+\theta)} \left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}\right)^{\theta-1}} \quad (38)$$

Não é possível calcularmos a série implícita a partir de (38) pois o termo H_t do lado direito da equação também deve ser determinado de forma implícita. Antes devemos somar todas as equações (38) para obtermos sua versão agregada:

$$H_{it} = 2 - \frac{\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}\right)^\theta (2-H_{it+1})}{\left(\frac{K_t}{H_t}\right)^\theta \beta^{(1-\delta+\theta)} \left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}\right)^{\theta-1}} \quad (39)$$

Substituindo H_{t+1}^c , K_t^c e K_{t+1}^c em (39) e resolvendo para H_{it} obtemos a sequência implícita H_{it}^a . Substituindo h_{it+1}^c , H_{t+1}^c , K_t^c , K_{t+1}^c e H_{it}^a em (38) obtem-se a sequência implícita h_{it}^a para ambas as famílias e em todos os períodos⁹.

No algoritmo de Fair-Taylor deve-se utilizar as informações contidas na série implícita e na tentativa inicial para criar-se uma nova tentativa na iteração do tipo II de tal forma a encontrarmos uma tentativa que atenda a todas as equações do sistema simultaneamente. No nosso algoritmo alternativo iremos utilizar uma outra abordagem.

Note que no estado estacionário a equação (18) é exatamente a nossa condição terminal (33). Se fizermos sucessivas tentativas de tal forma que (33) seja atendida em nossa iteração, encontraremos uma solução de estado estacionário para o modelo. Então calculamos K_t^c/H_t^a e comparamos seu valor com (33). Caso seja maior, devemos

⁹ Note que para o último período S precisamos de um chute h_{iS+1}^c . Basta fazer $h_{iS+1}^c = h_{iS}^c$. Isto não gera nenhuma distorção pois S deverá ser grande o bastante para o sistema atingir a estacionaridade, onde a condição acima será atendida.

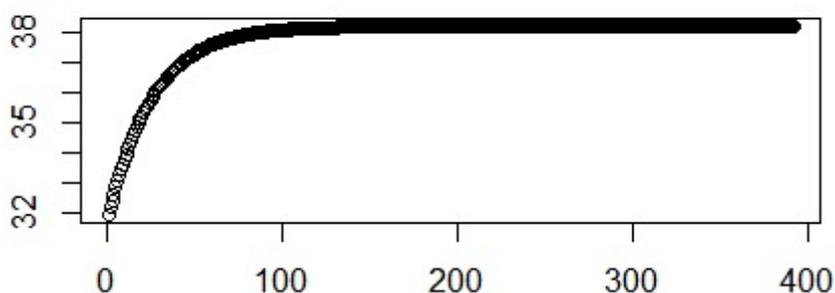
aumentar nosso chute e caso seja menor devemos reduzi-lo¹⁰. Este processo é iterado até que a diferença entre K_t^c/H_t^a e K_{SS}/H_{SS} esteja dentro de um intervalo de tolerância¹¹.

Caso S não seja grande o bastante a iteração descrita acima pode fazer a aproximação antes mesmo que o sistema atinja o estado estacionário. Neste caso a solução obtida é equivocada. Para garantirmos que obtemos uma solução correta devemos sempre após a convergência repetir o algoritmo fazendo o horizonte $S + 1$. Caso os valores continuem dentro de um intervalo de tolerância é porque S é grande o suficiente para o sistema atingir a estacionaridade. Possivelmente, uma forma mais eficiente de computar este algoritmo é encontrar um S grande o bastante antes mesmos de fazer a iteração aqui proposta. Para isso basta fazermos a iteração de Fair-Taylor do tipo I e antes de fazer uma nova tentativa conferir se aumentar o horizonte para $S + 1$ altera a condição terminal.

4.1 Aplicando o Algoritmo

Inicialmente fizemos $l_{1t} = 0,6$ para todo t e $S = 50$. Aplicando o método de expansão de S aqui descrito, encontramos que o horizonte de convergência mínimo deste modelo para o intervalo de tolerância¹² é $S = 439$. O gráfico 1 mostra a evolução da condição terminal a cada iteração, em um total de 390 iterações.

Gráfico 1- Determinação do horizonte mínimo para convergência.



Fonte: Elaboração própria.

¹⁰ Lembre que nosso chute inicial é nas horas de lazer do indivíduo 1.

¹¹ O intervalo de tolerância aqui usado é de $\pm 10^{-6}$.

¹² Também utilizamos $\pm 10^{-6}$ como intervalo de tolerância.

Após encontrarmos um horizonte adequado podemos com segurança utilizar a técnica descrita na seção anterior para encontrarmos os valores de estado estacionário do modelo. A tabela 1 traz os valores de cada tentativa em cada iteração e cada um dos valores terminais obtidos.

Tabela 2 – Convergência do Algoritmo Proposto

c	l_{1t}^c	K_t^c/H_t^a	c	l_{1t}^c	K_t^c/H_t^a	c	l_{1t}^c	K_t^c/H_t^a
1	0,6	38,227520	9	0,78100	9,256425	17	0,779850	9,438981
2	0,7	22,627390	10	0,7805	9,335732	18	0,779855	9,438186
3	0,8	6,342231	11	0,7801	9,399249	19	0,779854	9,438344
4	0,75	14,310720	12	0,78001	9,413550	20	0,7798545	9,438265
5	0,76	12,657110	13	0,77900	9,574249	21	0,77985452	9,438313
6	0,77	11,022060	14	0,77950	9,494645	22	0,779854525	9,438305
7	0,78	9,415139	15	0,77990	9,431032	23	0,7798545239	9,438308
8	0,785	8,625807	16	0,77980	9,446930	24	0,7798545238	9,438307

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados aqui obtidos e apresentados estão de acordo aos resultados obtidos pela solução pelo método de Sims.

5 RESULTADOS

Segue os resultados de estado estacionário do modelo descrito nesta seção.

Tabela 3 – Resultados de Estado Estacionário.

Variáveis	Valor de Estado Estacionário	Variáveis	Valor de Estado Estacionário ¹³
h_{1SS}	0,2201458	k_{1SS}	5,607905
h_{2SS}	0,4800972	k_{2SS}	-2,058001
H_{SS}	0,3761166	K_{SS}	3,549904
c_{1SS}	0,3451465	I_{SS}	0,6352738
c_{2SS}	0,3451465	w_{SS}	1,147682
C_{SS}	0,6902930	r_{SS}	0,1040216
Y_{SS}	1,3255670	K_{SS}/H_{SS}	9,438307

Fonte: Elaboração própria.

Observe que o nível de consumo estacionário das famílias são iguais, apesar delas possuírem produtividades distintas. Ou seja, diferenças de produtividade, de acordo com a teoria aqui apresentada, não são suficientes para explicar a existência de desigualdade no nível de consumo em uma dada economia. Note que este resultado se mantém tanto para o curto quanto para o longo prazo, uma vez que a equação de Euler (18) implica que todas as famílias possuem taxas de variação de consumo idênticas ao longo do tempo. Assim a desigualdade entre consumo observada nas economias reais devem ter uma origem que não seja a desigualdade de renda.

Outro resultado que chama atenção é a dívida adquirida pela família 2 no longo prazo. Nossa interpretação é que isto ocorre por conta de vantagens comparativas. Como a família 2 é mais produtiva ela aceita fazer maior parte do trabalho e como contrapartida exige um nível de consumo mais elevado, que deve ser financiado com uma dívida. Já a família 1 compensa a baixa renda do trabalho poupando mais e obtendo renda do capital no longo prazo.

¹³ Na simulação inicial as séries k_{1t} e k_{2t} são não-estacionárias. Isso ocorreu porque o modelo em questão possui solução não-estacionárias e o algoritmo convergiu para este tipo de solução. Como não estamos interessados nesta solução, podemos descobrir os valores estacionários dos estoques de capitais ao substituímos os valores das demais variáveis aqui obtidas nas equações (34).

A desigualdade de riqueza entre as famílias aumenta ao longo do tempo uma vez que a família 1 acumula capital enquanto a família 2 acumula dívida. Ironicamente este resultado é compatível com ambas as famílias possuírem o mesmo padrão de consumo porque, no longo prazo, a todo período a família 1 empresta parte de sua renda para a família 2 para que esta aceite trabalhar mais.

Este é um resultado um tanto abstrato mas que nos revela que sobre informações perfeitas, total capacidade de previsão e nenhum tipo de restrição no mercado de crédito, a desigualdade de riqueza aumentaria ao longo do tempo até atingir um estado estacionário mas não deveria ocorrer, nem no longo, nem no curto prazo, qualquer desigualdade no padrão de consumo.

5.1 Modelo com Governo

Nesta seção iremos introduzir o governo na análise, permitindo que este tribute as rendas das famílias e realize transferências de renda. Daqui em diante iremos resolver o modelo pelo algoritmo de Fair-Taylor¹⁴.

A simulação a seguir foi realizada utilizando os mesmos parâmetros da tabela 1, exceto que adicionamos aliquotas de 14,18% para a família 1 e 21,88% para a família 2 sobre os rendimentos do trabalho e uma aliquota de 19,61% sobre a renda do capital. Estas aliquotas são utilizadas em Paes e Bugarin (2006). O governo distribui estes recursos arrecadados de tal forma que as famílias do tipo 1 recebem dois terços do benefício da arrecadação enquanto as famílias do tipo 2 recebem apenas um terço. Os resultados seguem na tabela 3.

Tabela 4 – Resultados de Estado Estacionário do modelo com governo.

Variáveis	Valor de Estado Estacionário	Variáveis	Valor de Estado Estacionário
h_{1ss}	0,185433	k_{1ss}	2,52674
h_{2ss}	0,403429	k_{2ss}	-0,462292

¹⁴ Os modelos desta seção foram resolvidos no software Dynare utilizando o comando `>extended_path`.

H_{SS}	0,316231	K_{SS}	2,70444
c_{1SS}	0,26749	I_{SS}	0,136083
c_{2SS}	0,26749	w_{SS}	1,27324
C_{SS}	0,534879	r_{SS}	0,129396
tr_1	0,0889756	Y_{SS}	0,671063
tr_2	0,0444878		

Fonte: Elaboração própria.

Como de se esperar a presença de tributações empobrecem a economia ao reduzir consumo, produto, o estoque de capital de longo prazo e oferta de trabalho, mesmo que todos os recursos arrecadados sejam devolvidos às famílias. Além do efeito distorcivo a presença do governo não altera nossos resultados uma vez que todas as conclusões que obtivemos na simulação anterior se mantêm. Desta forma concluímos que diferenças na incidência de impostos e na obtenção de benefícios, assim como as diferenças salariais, não são capazes de explicar diferenças no padrão de consumo entre as famílias de acordo com a teoria.

5.2 Restrição de Crédito

Iremos agora adicionar uma família com restrição de crédito. Esta família é idêntica as demais, com exceção que elas não podem investir ou obter empréstimos. Seu comportamento é dado pelo problema do consumidor.

$$\max_{c_{it}, h_{it}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\alpha \ln(c_{3t}) + (1 - \alpha) \ln(1 - h_{3t})] \quad (40)$$

$$\text{sujeito a } c_{3t} + \leq (1 - \tau_{3t}^h) w_t \xi_3 h_{3t} + tr_{3t} \quad (41)$$

As condições de primeira ordem do problema descrito acima são dadas por:

$$h_{3t} = 1 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha(1-\tau_{3t}^h)w_t\xi_3} c_{it} \quad (42)$$

$$c_{3t} = (1 - \tau_{3t}^h) w_t \xi_3 h_{3t} + tr_{3t} \quad (43)$$

Além da restrição de crédito, faremos esta família exatamente igual a família 1¹⁵. Assim poderemos contrastar o efeito da restrição de crédito vis-a-vis os demais fatores de heterogeneidade. A solução do modelo incluído a família 3 segue na tabela 4.

Observamos que a família 3 possui um consumo menor que demais. Sendo assim de todos os fatores levados em consideração em nossos exercícios apenas o acesso ao mercado de crédito foi capaz de promover desigualdade entre em termos de consumo. Além disso observamos que a família que não tem acesso a este mercado possui consumo menor e trabalha mais do que a família de características igual mas com acesso ao crédito. Este último resultado é similar ao obtido em Burgaryn e Ellery (2002) e é bem intuitivo. A restrição ao crédito impede que a família 3 usufrua de sua vantagem comparativa e faça empréstimos à família 2 que está disposta a se endividar. Podemos também observar que como as famílias 1 e 2 possuem acesso irrestrito ao crédito, permanece a solução em que os consumos destas são iguais.

Tabela 5 – Resultados de Estado Estacionário do modelo com governo e restrição de crédito.

Variáveis	Valor de Estado Estacionário	Variáveis	Valor de Estado Estacionário
h_{1ss}	0,181105	tr_1	0,0714427
h_{2ss}	0,400260	tr_2	0,0357214
h_{3ss}	0,335667	tr_3	0,0714427
H_{ss}	0,446864	k_{1ss}	3,0729
c_{1ss}	0,268911	k_{2ss}	-0,147902
c_{2ss}	0,268911	K_{ss}	2,93139
c_{3ss}	0,218155	w_{ss}	1,27324
C_{ss}	0,755977	r_{ss}	0,129396
I_{ss}	0,192299	Y_{ss}	0,948276

Fonte: Elaboração própria.

¹⁵ Aliquotas, transferências e produtividade todas iguais.

6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação apresentamos o algoritmo de Fair e Taylor (1983) e fizemos duas aplicações deste para solução de modelos de equilíbrio geral dinâmico com agentes heterogêneos. Nestes exercícios buscamos analisar quais fatores estruturais de uma economia é capaz de explicar a desigualdade de nível de consumo entre as famílias. Ilustramos com estes exercícios que fatores promotores de desigualdade de renda como diferenças na produtividade do trabalho, no beneficiamento de políticas sociais e na incidência de impostos não são capazes de explicar desigualdade no consumo.

No último exercício de simulação vimos que o acesso ao mercado de crédito, diferente dos outros fatores aqui considerados, gera este tipo de desigualdade. Propomos então que uma forma de explicar diferentes níveis de consumo entre os consumidores nas economias reais deva estar conectado a diferentes níveis de acesso ao crédito.

Também foi utilizado a iteração do tipo I de Fair e Taylor (1983) para propormos um algoritmo que encontra o estado estacionário de um dado modelo de equações em diferenças. A técnica baseia-se em usar a iteração do tipo I de Fair-Taylor em um chute qualquer para gerar sequências de variáveis consistentes entre si mas inconsistente com a equação de Euler. Esta então é imposta ao sistema ao utilizarmos-na para deduzir alguma condição terminal, que é usada como critério de atualização das tentativas de acerto. O algoritmo convergiu normalmente e produziu resultados consistentes.

ANEXO

Façamos um caso linear da equação (1).

$$f(y_t, y_{t+1}, x_t, \Phi) = y_t - 0,5y_{t+1} - t = 0$$

$$y_t = 0,5y_{t+1} + t \quad (44)$$

Fixemos $S = 5$ e façamos nosso chute inicial:

$$y_t^{1,5} = \{0; 0; 0; 0; 0; 0\} \quad (45)$$

Pela iteração do tipo I obtemos:

$$y_t^{a,5} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \quad (46)$$

Para computarmos a iteração do tipo II, substituímos a série (46) no lado direito da equação (44). Note que estamos utilizando o critério de atualização básico de Fair e Taylor (1983). A série implícita da primeira iteração é dada por (47).

$$y_t^{a,5} = \{0; 1,5; 3; 4,5; 6; 7,5\} \quad (47)$$

Repetimos este processo até aproximarmos quatro casas decimais. Obtemos (48) após 16 iterações.

$$y_t^{a,5} = \{0; 1,9999; 3,9999; 5,9999; 7,9999; 9,9999\} \quad (48)$$

Como já obtemos convergência das iterações I e II, iremos agora fazer $S = 6$ para computar a iteração do tipo III.

$$y_t^{a,6} = \{0; 1,9999; 3,9999; 5,9999; 7,9999; 9,9999; 11,9999\} \quad (49)$$

Como não houve mudança na progressão dos valores, atingimos a convergência da iteração de tipo III na primeira iteração. Isso ocorreu porque, como iremos ver a seguir, a solução do modelo é uma reta, então quaisquer $S > 1$ é suficiente. Com base na série (49) concluímos que a solução da equação (44) é:

$$y_t = 2t \quad (50)$$

Podemos verificar este resultado resolvendo (44) por substituição retroativa e supondo corretamente que y_t é linear em relação ao tempo.

$$y_t = 0,5y_{t+1} + t$$

$$y_t = 0,5^2y_{t+2} + 0,5t + t$$

$$y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} 0,5^h y_{t+h} + \sum_{h=0}^{\infty} 0,5^h t$$

$$y_t = 2t$$

REFERÊNCIAS

- BENABOU, Roland. Heterogeneity, stratification, and growth: macroeconomic implications of community structure and school finance. **The American Economic Review**, p. 584-609, 1996.
- BROCK, William A.; HOMMES, Cars H. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. **Journal of Economic dynamics and Control**, v. 22, n. 8, p. 1235-1274, 1998.
- BUGARIN, M. & ELLERY, Jr., R. Liquidity constraints and the behavior of aggregate consumption over the brazilian business cycle. **Revista Estudos Econômicos**, 2002.
- CHAMLEY, Christophe. Optimal taxation of capital income in general equilibrium with infinite lives. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 607-622, 1986.
- FAIR, Ray C. An analysis of a macro-econometric model with rational expectations in the bond and stock markets. **The American Economic Review**, v. 69, n. 4, p. 539-552, 1979.
- FAIR, Ray C.; TAYLOR, John B. Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Nonlinear Rational Expectations Models. 1983.
- GLOMM, Gerhard; RAVIKUMAR, Balasubrahmanian. Public versus private investment in human capital: endogenous growth and income inequality. **Journal of political economy**, p. 818-834, 1992.
- JONES, Larry E.; MANUELLI, Rodolfo E.; ROSSI, Peter E. Optimal taxation in models of endogenous growth. **Journal of Political economy**, p. 485-517, 1993.
- LUCAS, Robert E. Supply-side economics: An analytical review. **Oxford economic papers**, v. 42, n. 2, p. 293-316, 1990.
- HECKMAN, James J.; LOCHNER, Lance; TABER, Christopher. Explaining rising wage inequality: Explorations with a dynamic general equilibrium model of labor

earnings with heterogeneous agents. **Review of economic dynamics**, v. 1, n. 1, p. 1-58, 1998.

HECKMAN, James J.; LOCHNER, Lance; TABER, Christopher. **General equilibrium cost benefit analysis of education and tax policies**. National bureau of economic research, 1999.

HOMMES, Cars H. Heterogeneous agent models in economics and finance. **Handbook of computational economics**, v. 2, p. 1109-1186, 2006.

HUGGETT, Mark. The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. **Journal of economic Dynamics and Control**, v. 17, n. 5, p. 953-969, 1993.

KIRMAN, Alan P. Whom or what does the representative individual represent ?. **The Journal of Economic Perspectives**, v. 6, n. 2, p. 117-136, 1992.

PAES, Nelson Leitão; BUGARIN, Mirta Noemi Sataka. Reforma Tributária: impactos distributivos, sobre o bem-estar e a progressividade. **Revista Brasileira de Economia**, v. 60, n. 1, p. 33-56, 2006.

TAYLOR, John B.; UHLIG, Harald. Solving nonlinear stochastic growth models: A comparison of alternative solution methods. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 8, n. 1, p. 1-17, 1990.

WILCOXEN, P. Intertemporal optimization in general equilibrium: A practical introduction. **Department of Economics, The University of Texas at Austin**, 1995.