UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ELIZOMILSON FONSECA FREITAS

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E MÉTODOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º E 2º GRAUS

FORTALEZA

2016

ELIZOMILSON FONSECA FREITAS

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E MÉTODOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º E 2º GRAUS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

F933e Freitas, Elizomilson Fonseca
Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do 1º e 2º graus / Elizomilson Fonseca Freitas
137 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Função afim. 2. Função quadrática. 3. Software GeoGebra . I. Título.

CDD 510

ELIZOMILSON FONSECA FREITAS

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E MÉTODOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º E 2º GRAUS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26/ 07/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A Deus

À minha mãe Ivone.

A todos que me apoiaram ao longo desses dois anos e meio de estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me ajudar desde o meu acesso ao mestrado até o seu término.

À minha mãe Ivone Maria da Fonseca Freitas pelo seu grande suporte e pelas suas orações para que eu viajasse são e salvo.

À minha namorada, Francisca Jaiane da Silva Gomes, pelo seu apoio e pela sua paciência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes, pela dedicação, eficiência e compromisso na orientação.

Aos professores Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho, Dr. Joserlan Perote da Silva, Dr. Romildo José da Silva, Dr. Marcos Ferreira de Melo e Me. José Afonso de Oliveira.

A todos os meus colegas de mestrado da UFC pelas reflexões, críticas e companheirismo.

Aos meus colegas e amigos do mestrado Francisco Filipe Passos dos Santos e Paulo de Oliveira Meneses, por suas contribuições e ajuda.

Ao meu amigo João Paulo de Lima, por sua contribuição e ajuda.

Aos meus amigos professores que sempre torciam por minha vitória.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

Aos professores participantes da banca examinadora, Dr. José Valter Lopes Nunes e Dr. Ângelo Papa Neto pelo tempo dedicado ao exame deste trabalho, pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

“Gostar de Matemática é um grande passo para aprendê-la. ”

(Elizomilson Fonseca Freitas)

RESUMO

O ensino de Matemática vem passando por uma série de desafios, principalmente em relação à aversão que os discentes têm a essa disciplina. Os conteúdos de funções afins e quadráticas são sempre trabalhados da forma tradicional prática expositiva, sobrecarregando os alunos com um amontoado de fórmulas, a fim de encontrar o resultado de maneira repetitiva. Este trabalho visa apresentar uma maneira diferenciada de trabalhar esses conteúdos, dando ênfase aos métodos algébrico e geométrico, bem como a aplicabilidade dos mesmos. Apresenta-se métodos de resolução de equações de 1º e 2º graus de forma geométrica, inclusive o método de completar quadrado de Al-Khwarizmi, que resolve geometricamente uma equação quadrática utilizando áreas. Por fim, dá-se a exploração das funções afins e quadráticas num ambiente dinâmico (Software GeoGebra). Com isso, busca-se nos alunos o gosto e o prazer pela Matemática, tornando-os sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chaves: Função Afim. Função Quadrática. Equações do 1º grau. Equações do 2º grau. Métodos algébricos e geométricos. Software GeoGebra.

ABSTRACT

The teaching of Mathematics has been facing a lot of challenges, mainly when the subject is the hate which some students own about this discipline. The contents about affine and quadratic functions are always seen and exposed in a tradition way and practice, stimulating the students to learn many formulas, in order to find the result in a repetitive way. This paper aims to show a different manner of teaching these contents, giving an extra importance to the algebraic and geometric method, and the utilization of them. It is presented methods of how to solve equations of first and second degrees in a geometric manner, including the method of completing quadrate, by Al-Khwarizmi, which solves geometrically a quadratic equation using areas. To finish this theory, it occurs the exploration and the analysis of the affine and quadratic functions in a dynamic environment (GeoGebra Software). This way, it is aimed in the students the enthusiasm and the pleasure for the Mathematics, turning them into active players of the teaching-learning process.

Keywords: Affine Function. Quadratic Function. Equations of 1º degree. Equations of 2º degree.. Algebraic and geometric methods. GeoGebra Software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathcal{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática não é uma tarefa fácil, tanto para o educando quanto para o professor. Muitos são os desafios, pois além dos problemas conhecidos por todos, como a falta de estrutura das escolas, excesso de alunos por sala, desmotivação dos alunos (o que gera em muitas vezes a desistência destes), formação inadequada e desvalorização dos professores. Apesar das inúmeras adversidades, buscam-se sempre alternativas para que seja possível desempenhar um trabalho de qualidade com a educação.

Na educação básica valorizam-se situações em que o desenvolvimento de habilidades e competências possa acontecer, de maneira que o pensar matematicamente seja vinculado ao fazer matemático. Assim, o ensino é proposto de forma investigativa, fazendo com que o aluno construa seu aprendizado.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)[2]:

> Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; e valide seus procedimentos.

Assim, muitas vezes é necessária a habilidade de realizar cálculos mentais para que o aluno adquira habilidades e competências para a solução de problemas.

Muitos povos, na história da Matemática, utilizavam métodos de resolução de equações de forma geométrica, o que não ocorre mais no ensino de hoje. O ensino de Matemática, em geral, apresenta uma abordagem simbólica com a utilização de fórmulas, não havendo preocupação com a parte geométrica. Com isso, os alunos sempre são levados a praticarem matemática apenas por meio do emprego de fórmulas diversas e de maneira exaustiva, de modo que as resoluções por eles trabalhadas são apenas numéricas, não existindo o incentivo à dedução algébrica e geométrica ou à contextualização histórica sobre o processo de criação das fórmulas, nem tampouco à diversificação de métodos de resolução.

Com base nisso, este trabalho tem por objetivo geral fazer um estudo detalhado das funções afins e quadráticas, bem como apresentar métodos algébricos e geométricos para encontrar os zeros destas funções, ou mais especificamente, para resolver equações do 1º e 2º graus.

Na primeira parte deste trabalho, demos um enfoque ao estudo das funções, sendo, na maioria das escolas, assunto de praticamente toda a 1ª série do ensino médio, além de base para algumas disciplinas nas universidades, e que aparece naturalmente em situações práticas do cotidiano, cuja importância está respaldada nos parâmetros curriculares nacionais de matemática para o ensino médio em [2]:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (p.121).

Faremos uma breve introdução do conceito de função, logo em seguida o foco será nas funções afins e quadráticas, suas propriedades, características e aplicações diversas. Nesta seção, destacaremos a relação entre Função Linear e Proporcionalidade, enfatizando sua importância nas aplicações dos conteúdos.

A seguir, daremos ênfase à resolução de equações de primeiro e segundo graus de forma geométrica, por meio de métodos fascinantes e curiosos. Aqui, daremos relevância aos métodos de resolução como: régua e compasso, completando quadrado (método de Al-Khwarizmi), método de Descartes e de Thomas Carlyle.

Por fim, veremos como explorar funções afins e quadráticas num ambiente dinâmico, a saber, o GeoGebra, bem como utilizar esse software para encontrar a raiz positiva de uma equação específica do 2º grau apenas por meio da variação da ferramenta seletor. Com isso, buscaremos uma aprendizagem mais significativa e prazerosa para o aluno, saindo da tradicional prática educacional.

2 FUNÇÕES

Nesta seção daremos um breve histórico da importância das funções, conhecer seu conceito bem como destacar e explorar alguns de seus casos particulares, o quais têm bastante praticidade no cotidiano das pessoas.

2.1 O Que é Função?

2.1.1 Breve Histórico da Importância das Funções

De acordo com Dante [3] no livro “Matemática: contexto e aplicações”, os papiros egípcios apresentam problemas práticos ligados às necessidades cotidianas e não tinham o objetivo de analisar o comportamento dos fenômenos. Desafiando a mente humana, as situações sugeridas provocavam o pensamento lógico, direcionando-o aos resultados numéricos. Mas o caráter de generalização, próprio da Matemática, levou os estudiosos a avanços grandiosos. A observação de modelos presentes nos fenômenos, como por exemplo, a trajetória da bala de um canhão, os fazia investigar e descobrir leis que regiam esses modelos. Interessava mais o caso geral e menos o particular, aquele que acontece especificamente numa circunstância, como um caso isolado. Esse caráter atribui à Matemática a qualidade de prever resultados por meio de leis que têm como característica relacionar as variáveis envolvidas no fenômeno. Nesse contexto aparecem as funções, que apresentam muitas dessas leis e contribuem para as pesquisas nas mais variadas áreas: Física, Economia, Ecologia, Meteorologia, Genética, Engenharia, etc.

Ainda segundo o autor, as paisagens do mundo inteiro contêm pontes de diversas formas e tamanhos. Um formato muito peculiar é o das pontes pênseis: os cabos que as sustentam apresentam-se em curva, conferindo a elas uma beleza singular. No Brasil, a maior ponte pênsil foi construída entre 1922 e 1926, no estado de Santa Catarina, ligando a ilha onde fica a capital, Florianópolis, ao continente. Essa ponte recebeu o nome de Hercílio Luz, em homenagem ao governador que promoveu sua construção. Tem 819 metros de comprimento e duas torres de 75 metros.

A curva formada pelos cabos que sustentam essas pontes foi descrita algebricamente por meio de uma equação. Durante o século XVII, grandes matemáticos de diversas partes da Europa, como Huygens, na Holanda, os irmãos Bernoulli, na Suíça, e Leibniz, na Alemanha, dedicaram-se a esses estudos, um independente do outro e publicando propostas de soluções, sendo a mais clara a de Bernoulli. Falaremos mais do formato dos cabos das pontes pênseis em 2.3.5, seção essa que fala de aplicações das funções estudadas neste trabalho. [3]

Figura 1 – Ponte Hercílio Luz (SC)

Fonte: Disponível em:<http://www.joaquimbechhotel.com.br>

As funções, descrições algébricas da dependência entre grandezas, podem, também, ser representadas graficamente, facilitando a linguagem e favorecendo sua compreensão. O crescimento populacional da Terra, fenômeno de grande interesse, é com frequência representado por gráficos, o que permite traçar projeções para o futuro.

O estudo das funções é fundamental para a construção do conhecimento matemático, sendo o início de uma jornada, um convite à exploração dos vários campos que compõem a Matemática.

2.1.2 Definição de Função

O tema Funções, por sua abrangência e complexidade, apresenta dificuldades específicas no ensino e na aprendizagem; uma delas se refere às diferentes representações (língua natural, forma algébrica, forma tabular e forma gráfica) desse objeto matemático, pois por muito tempo os alunos o confundem com as suas representações. Tivemos um longo processo histórico até chegarmos à seguinte definição formal de função, tendo como principal motivador a necessidade do homem em compreender os fenômenos da natureza e as relações intrínsecas existentes.

Conforme Roque [10]:

> Atualmente, quando pensamos no conceito de função, algumas ideias vêm à mente. Por exemplo, a ideia de uma correspondência. Deste ponto de vista, pode-se dizer que as tabelas babilônias e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratavam justamente de registros de correspondência (por exemplo, entre número e o resultado das operações que envolvem este número). As tabelas cordas de Ptolomeu, similares às nossas tabelas de senos, também estabelecem correspondência que consideramos hoje de natureza funcional. (p.264)

O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática, e está associado à análise da variação entre grandezas. Ao longo da história, esse conceito sofreu alterações, porém, somente no início do século XX, passou a ser associado como relações unívocas[1] entre conjuntos.

Definição 2.1.1 Conforme Lima [5], dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (Lê-se “uma função f de X em Y”) é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Exemplo 2.1.1 A área A de um círculo depende do seu raio r. A regra que conecta r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número r positivo está associado um único valor de A e dizemos que A é uma função de r.

Exemplo 2.1.2 O custo C de enviar uma carta preferencial pelo correio depende de seu peso ω. Embora não haja uma fórmula simples relacionando ω e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando ω é dado.

Recomendações: [5]

1. É importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f. Muitos livros costumam dizer “a função $f(x)$” quando deveriam dizer “a função f”. Por tornar a comunicação mais rápida, fica difícil resistir à tentação de usá-la. Mas é muito importante a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo.

---

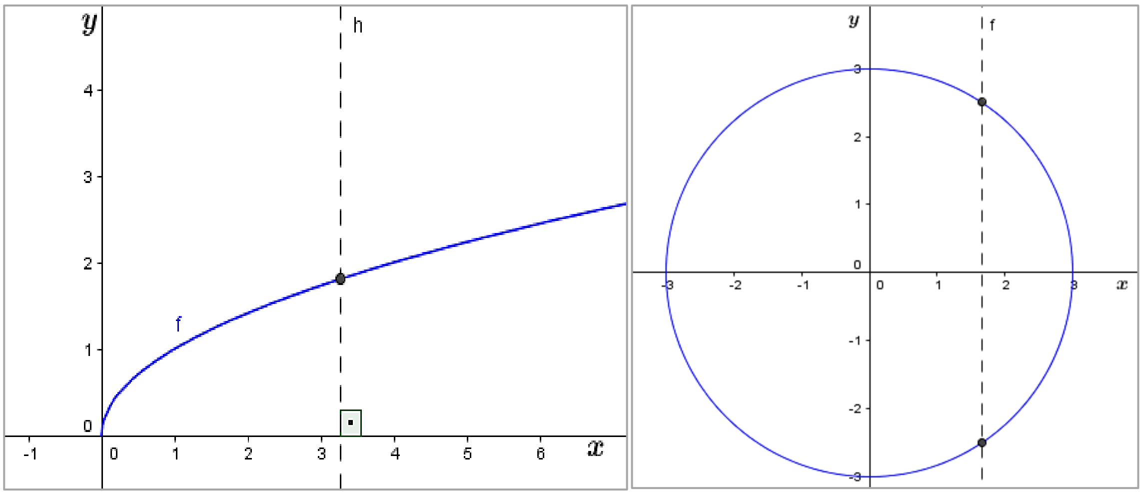
[1] Unívoca: um elemento do primeiro só pode estar associado a um único elemento no segundo conjunto.

2. Uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$. Assim, quando dizemos simplesmente "a função f", ficam subentendidos seu domínio X e seu contradomínio Y. Para existir a função, eles devem ser especificados. Logo, uma pergunta do tipo "Qual é o domínio da função $f(x) = 1/x$?", não faz sentido. A pergunta correta seria: "Qual é o maior subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = 1/x$ define uma função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$?". Observa-se que a pergunta incorreta é mais fácil de se formular. Se for feita assim, é preciso saber seu significado.

Definição 2.1.2 O **gráfico** de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ formado pelos pontos $(x, f(x))$, cuja abscissa é um número real arbitrário x e cuja ordenada é o valor $f(x)$ que a função assume no ponto x.

Lembrando de que para termos uma função é preciso existir exatamente um valor da variável dependente para cada valor da variável independente no domínio da função. Geometricamente, isso significa que o gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto. Caso intercepte em mais de um ponto, então não temos uma função. Abaixo, temos dois conjuntos, em que o primeiro representa uma função e o segundo, não representa.

Figura 2 – Reta Vertical Interceptando em Um Ponto e em Dois



Depois dessa breve apresentação de função, daremos agora enfoque aos conteúdos centrais desse trabalho: **Funções Afim e Quadrática.**

2.2 Função Afim

As funções afins podem fornecer uma interessante gama de aplicações que motivam o estudante e mostram, através de exemplos, como um conceito matemático tão simples pode ser usado para resolver problemas variados do nosso dia-a-dia. Daremos ênfase ao caso particular de função afim, chamado *função linear*, o qual é o modelo matemático para as questões referentes à proporcionalidade, que há séculos é um dos instrumentos matemáticos mais empregados nas aplicações e na teoria.

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos uma situação-problema do nosso dia-a-dia, a fim de entendermos melhor as características desta função.

Situação-problema

João foi de táxi de sua casa à casa de seu amigo José percorrendo um total de 10 km de distância. O valor cobrado pelo taxista engloba uma parcela fixa de R$ 2,00, chamada bandeirada, mais R$ 1,80 por cada quilômetro percorrido. Pergunta-se:

a) Quanto João pagou pela corrida de táxi?
b) Quanto João pagaria para deslocar-se de sua residência até a praia situada a 20 km de sua casa?
c) João pagou R$ 11,00 para deslocar-se de sua casa até o cinema. É possível dizer qual a distância percorrida entre sua casa e o cinema? Se possível, qual é esta distância?
d) É possível encontrar uma fórmula matemática que permita calcular o valor a ser pago nas corridas de táxi?

Definição 2.2.1 Uma $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A situação apresentada acima pode ser modelada matematicamente por uma função do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são coeficientes específicos. Veja a solução da última pergunta (item d) da situação-problema apresentada na introdução de função afim.

Situação-problema

O problema envolve:

- Um valor fixo (bandeirada): R$ 2,00 valor de “b”;
- Um valor por quilômetro rodado: R$ 1,80 valor de “a”;

- Um valor variável, que é a quantidade de quilômetros rodados (x).

Sendo assim, a fórmula que nos permitirá calcular o valor pago nas corridas de táxi em função dos quilômetros rodados será:

$$f(x) = 1{,}80x + 2{,}00$$

Podemos, a partir dela, responder facilmente as outras perguntas, fazendo, para isso, uma simples substituição.

2.2.1 Casos Particulares da Função Afim

Existem alguns casos particulares da função afim $f(x) = ax + b$. Vejamos alguns deles.

1º) Função Identidade

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, $a = 1$ e $b = 0$.

2º) Constante

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, a= 0.

Exemplos:

a) $f(x) = 2$ $(b = 2)$;
b) $f(x) = -0{,}5$ $(b = -0{,}5)$.

3º) Translação (da Função Identidade)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Neste caso, $a = 1$.

Exemplos:

a) $f(x) = x + 10$;
b) $f(x) = x - 2$.

4º) Função Linear

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, $b = 0$.

Exemplos:

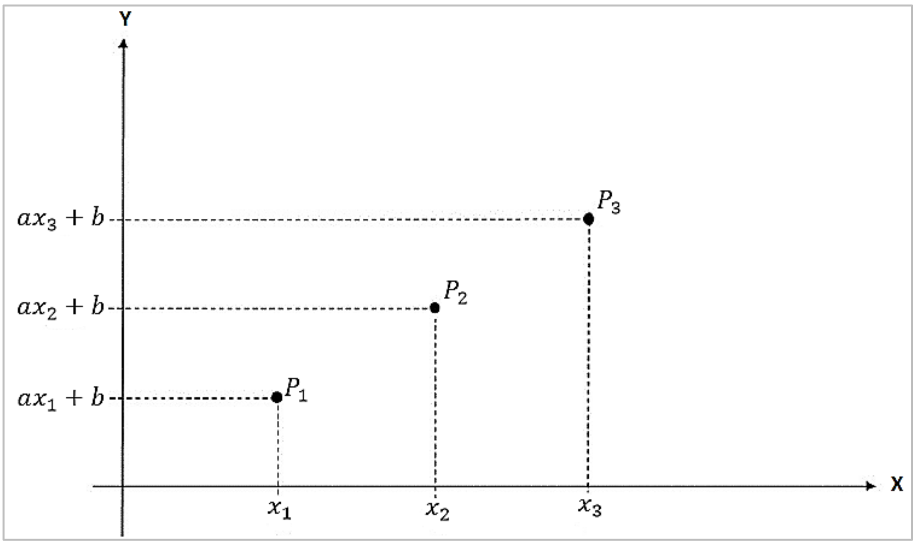
a) $f(x) = 2x$ $\quad (a = 2);$

b) $f(x) = -2x$ $\quad (a = -2).$

Teorema 2.2.1 O gráfico G de uma função afim $f: x \longrightarrow ax + b$ é uma reta.

Demonstração. Vamos mostrar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Sejam $P_1(x_1, ax_1 + b),\ P_2(x_2, ax_2 + b)\ e\ P_3(x_3, ax_3 + b)$ três pontos no gráfico da função $f(x) = ax + b$. Veja figura 3.

Figura 3 – Três Pontos da Função $f(x) = ax + b$



Para que os pontos P_1, P_2 e P_3 sejam colineares é necessário e suficiente que um dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Supondo que $x_1 < x_2 < x_3$, mostraremos que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{1(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2} \end{aligned}$$

$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \qquad (2.2.1)$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2}$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2}$$

$$= \sqrt{1(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + a^2)(x_3 - x_1)^2}$$

$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \qquad (2.2.2)$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2}$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2}$$

$$= \sqrt{1(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + a^2)(x_3 - x_2)^2}$$

$$= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \qquad (2.2.3)$$

Assim, das equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3), temos que

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$= d(P_1, P_3), \qquad (2.2.4)$$

ou seja,

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3).$$

Portanto, três pontos quaisquer do gráfico da função afim são colineares, o que significa que o gráfico é uma reta.

Observação: Em geral vale $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ (Desigualdade triangular) e ocorre a igualdade quando os três pontos são colineares.

$\square$

Considere a função afim $f(x) = ax + b$. Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta (que é o gráfico da função f) intersecta o eixo Oy.

O número a chama-se a inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta (em relação ao eixo Ox). Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente; e quando $a < 0$, a reta é descendente. De fato, dados x_1 e x_2 reais, temos:

- $\boldsymbol{a > 0}$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2.$$

Somando b real a ambos os membros, vem:

$$ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Assim,

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

o que mostra que f é crescente.

- $\boldsymbol{a < 0}$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2.$$

Somando b real a ambos os membros, vem:

$$ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Assim,

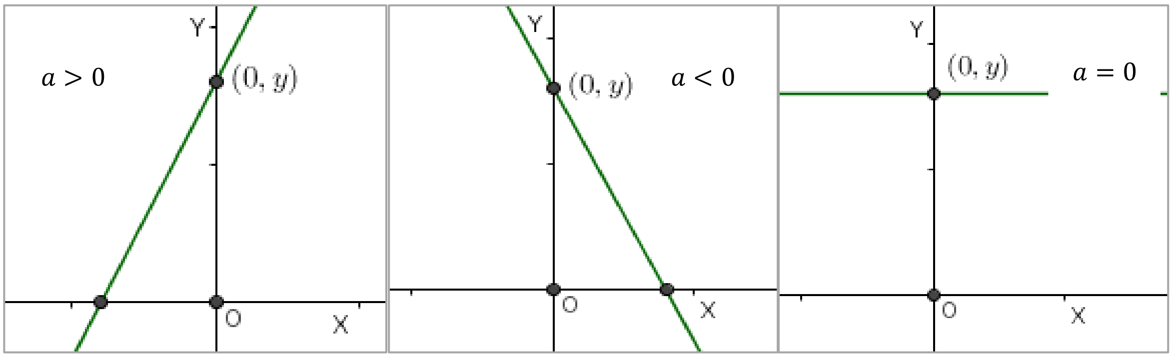
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

demonstrando que f é decrescente.

$\square$

A abscissa do ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo OX é chamado de **zero da função**. Este assunto abordaremos com mais detalhes na seção 2.2.6.

Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = ax + b$



2.2.2 Função Linear e Proporcionalidade

A Função Linear, que já foi mencionada anteriormente, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

Conforme Dante [3], a ideia de proporcionalidade é natural para nós, pois desde criança assimilamos esse conhecimento aplicando-o nas ações mais simples. A noção de que, quanto mais aumenta uma grandeza, mais aumenta outra, parece ser inerente ao ser humano. Está presente em nosso dia-a-dia na compra de alimentos (quanto mais gramas, mais se paga), ao abastecer o carro (o consumo de combustível é diretamente proporcional à quantidade de quilômetros percorridos), no preparo de um bolo (para dobrar uma receita, dobramos a quantidade dos ingredientes) e em muitas outras situações.

Sabe-se que a compreensão do conceito de proporção acontece muito antes do ensino formal. Desse modo, os problemas de proporção devem ser explicados mediante estratégias diversificadas para que o aluno os assimilem melhor.

Na Física, a lei fundamental da dinâmica afirma que “Força é igual ao produto da massa pela aceleração” e é representada por $F = ma$. Quando se trata de aceleração da gravidade, expressa por g, F é a força da atração que a Terra exerce sobre um corpo, a força peso. Nesse caso, sendo g constante, a função acima fica expressa por $P = mg$, indicando que o peso é diretamente proporcional à massa de um corpo. [3]

Grandezas diretamente proporcionais são expressas por meio da função chamada ***função linear***.

Definição 2.2.2 De acordo com Lima [7], duas grandezas são diretamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \longmapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

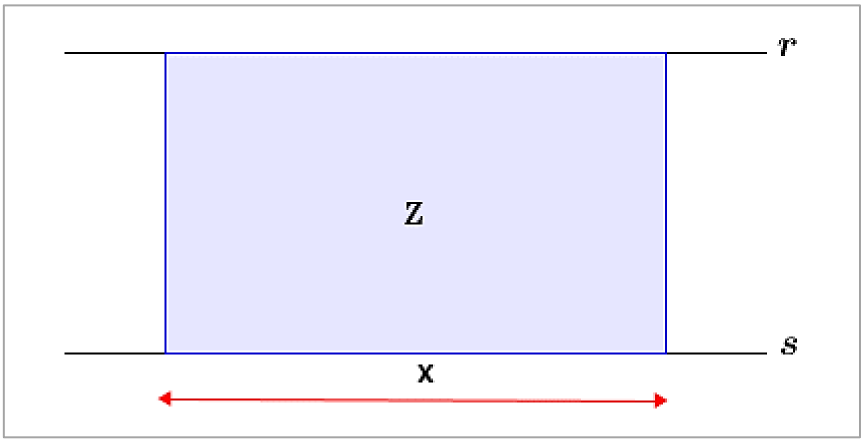
1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos:
   Se $x \longmapsto y$ e $x' \longmapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \longmapsto y$ então $nx \longmapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, a correspondência $x \longmapsto y$ chama-se uma proporcionalidade.

Os exemplos abaixo foram extraídos de LIMA [15].

Exemplo 2.2.1 Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo.

Figura 5 – Retângulo com lados contidos nas retas r e s



A correspondência $x \longmapsto z$ é uma proporcionalidade. Ou seja: quando a altura de um retângulo é fixada, sua área z é proporcional à base x.

Com efeito, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual à área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$. E um retângulo de base $n \cdot x$ pode ser expresso como união de n retângulos justapostos de base x (e mesma área z), logo sua área é $n \cdot z$.

Exemplo 2.2.2 Investindo uma quantia x numa caderneta de poupança, após o decurso de um mês obtém-se um montante y. A correspondência $x \longmapsto y$ é uma proporcionalidade, pois o que se recebe no fim do mês é proporcional ao que se aplicou. Com efeito, é claro que aplicando-se mais recebe-se mais e investindo-se uma quantia n vezes maior do que x, pode-se considerar essa operação como n investimentos iguais a x, logo o que se recebe é $n \cdot y$.

Por exemplo, uma aplicação de $R\$\ 1000{,}00$ que rende $0{,}7\%$ ao mês dá um montante de $R\$\ 1007{,}00$ no fim de um mês; caso a aplicação seja $R\$\ 2000{,}00$, o montante no final do mês será de $R\$\ 2014{,}00$. Veja a tabela abaixo:

Tabela 1 – Montante Proporcional ao Capital Investido

Capital inicial (C)	Juros (J)	Montante (M)
$\boldsymbol{R\$\ 1000,00}$	$R\$\ 7{,}00$	$R\$\ 1007{,}00$
$\boldsymbol{R\$\ 2000,00}$	$R\$\ 14{,}00$	$R\$\ 2014{,}00$

Observação: Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa mesma quantia gere o retorno $n \cdot y$, mesmo que a taxa de juros permaneça constante, pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual à existente no mês anterior mais os juros correspondentes.

Logo, num período fixo, o retorno é proporcional ao capital inicial investido, mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Depois desses exemplos, temos a seguinte formulação da definição matemática de proporcionalidade, onde as grandezas são substituídas por números reais, que são suas medidas.

Definição 2.2.3 Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto é, $x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.
2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Teorema 2.2.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

Se $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer x e c em $\mathbb{R}^+$.

Demonstração. De acordo com Souza [21], temos, por hipótese, que é uma função crescente, logo se $x < x'$, então $f(x) < f(x')$. Além disso, temos que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Queremos mostrar que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer x e $c \in \mathbb{R}^+$.

Essa propriedade já é válida para $c \in \mathbb{N}$, resta mostrar a validade para c racional e c irracional.

Sejam $r = \frac{m}{n}$ um número racional, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^+$.

Como $rx \in \mathbb{R}$, por hipótese, temos que:

$$nf(rx) = f(nrx) = f\left(n \cdot \frac{m}{n} \cdot x\right) = f(mx) = mf(x)$$

$$\Rightarrow f(rx) = \frac{m}{n} f(x)$$

$$\Rightarrow f(rx) = rf(x).$$

A última igualdade mostra a validade da propriedade $f(cx) = c \cdot f(x)$ para c racional.

Para mostrar a validade da propriedade $f(cx) = c \cdot f(x)$ para c irracional, adotaremos a prova por absurdo.

Suponha que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq cf(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Sendo assim, temos duas possibilidades: ou $f(cx) < cf(x)$ ou $f(cx) > cf(x)$.

Suponha que $f(cx) < cf(x)$, que implica em $c > \frac{f(cx)}{f(x)}$. Seja r um número racional próximo de c, de modo que $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, isto é, $f(cx) < rf(x) < cf(x)$. Como r é racional, temos que $rf(x) = f(rx)$. Com isso, reescrevendo a desigualdade anterior, obtemos $f(cx) < f(rx) < cf(x)$ e, em particular, $f(cx) < f(rx)$. O que contradiz o fato de f ser crescente, já que $rx < cx$. Logo, não podemos ter $f(cx) < cf(x)$. Analogamente, mostra-se que também não podemos ter $f(cx) > cf(x)$ para c irracional e algum $x \in \mathbb{R}^+$.

Dessa forma, podemos concluir que $f(cx) = cf(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Observação: Esse método, inventado por Eudoxo de Cnido e usado por Euclides e Arquimedes, é conhecido como Método da Exaustão.

□

Corolário 2.2.1 Se $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então tem-se, para todo $x > 0$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$. O valor a recebe o nome de ***constante de proporcionalidade***.

Demonstração. Com efeito, como, por hipótese, f é uma proporcionalidade, então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $c \in \mathbb{N}$ temos $f(cx) = cf(x)$, para qualquer x e c em $\mathbb{R}^+$. Como f satisfaz a propriedade acima, podemos escrever:

$$f(xc) = xf(c) \tag{2.2.5}$$

Substituindo c por 1 na equação (2.2.5), obtemos

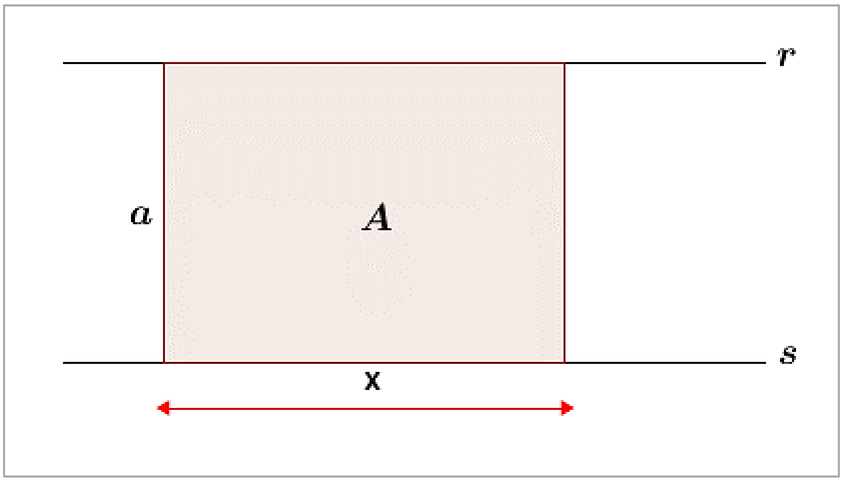
$$f(x) = xf(1) \tag{2.2.6}$$

Fazendo $a = f(1)$ na equação (2.2.6), obtemos $f(x) = xa$, que é uma função linear com coeficiente a.

Esse corolário mostra que se $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então f é uma função linear.

Exemplo 2.2.3 Consideremos as retas **r** e **s** paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, vamos chamar de **x** a medida de um desses lados e **A** a área da região retangular. Verifique se a correspondência $x \rightarrow A$ é uma proporcionalidade.

Figura 6 – Correspondência $x \longrightarrow A$ e a Proporcionalidade



Considerando **a** a distância entre as retas paralelas, temos:

$\boldsymbol{x}$	1	2	3	...	c
$\boldsymbol{A}$	$1a$	$2a$	$3a$	...	ca

Dividindo o valor da área A pelo comprimento x, vem:

$$\frac{1a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{3a}{3} = \cdots \frac{ca}{c} = a,$$

que é a constante de proporcionalidade. Logo, $x \longrightarrow A$ é uma proporcionalidade direta.

Como podemos observar, este exemplo é o mesmo do exemplo 2.2.1, porém aqui resolvemos por meio da constante de proporcionalidade.

Exemplo 2.2.4 Consideremos $\boldsymbol{x}$ a medida do lado e $\boldsymbol{A}$ a área de uma região quadrada. A correspondência $x \longrightarrow A$ não é uma proporcionalidade. De fato, para $x = 1\ cm$, temos $A = 1\ cm^2$; para $x = 2\ cm$, temos $A = 4\ cm^2$. Dobrando $\boldsymbol{x}$ (1 para 2), $\boldsymbol{A}$ quadruplica (1 para 4), ou seja, $\boldsymbol{A}$ não dobrou nem ficou pela metade. Logo, essa correspondência não é uma proporcionalidade.

Assim, a propriedade “quanto maior for x, maior será y” não assegura a proporcionalidade entre x e y.

Exemplo 2.2.5 O comprimento **C** de uma circunferência é dado em função da medida **D** do diâmetro, pois $C = \pi \cdot D$ é uma função linear. Então o comprimento **C** é proporcional à medida **D** do diâmetro. Determine a coeficiente de proporcionalidade.

$\boldsymbol{D}$	1	2	3	...	D
$\boldsymbol{C}$	1π	2π	3π	...	$D\pi$

Dividindo o valor da área C pelo diâmetro D, vem:

$$\frac{1\pi}{1} = \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{3} = \cdots \frac{D\pi}{D} = \pi,$$

que é a constante de proporcionalidade.

□

2.2.3 Caracterização da Função Afim

Teorema 2.2.3 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Se a diferença $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h, então f é uma função afim. [5]

Demonstração. Suporemos que a função f seja crescente. Assim, definamos a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também crescente tal $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$ com $h \in \mathbb{R}$ que e que $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos:

$$\varphi(h+k) = f(x+k+h) - f(x)$$

$$= f\big((x+k)+h\big) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)$$

$$= \varphi(h) + \varphi(k).$$

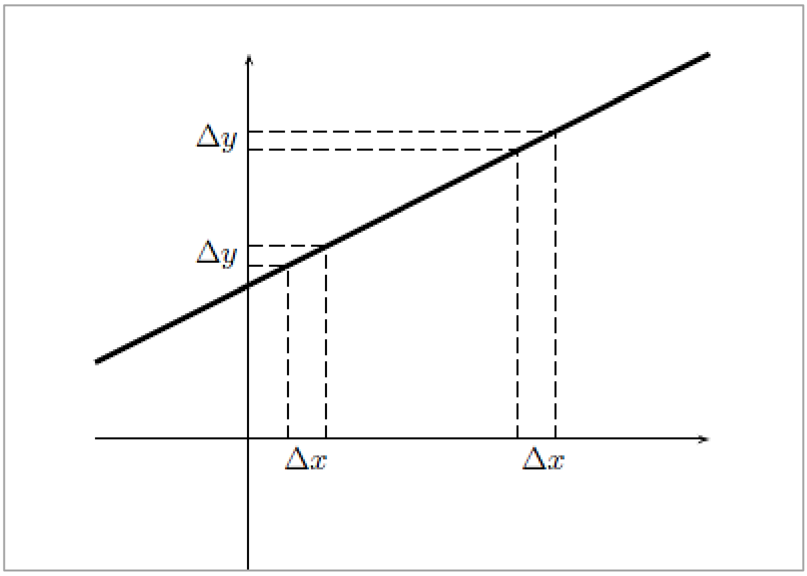
Logo, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = \varphi(1 \cdot h) = \varphi(1) \cdot h = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$ (Teorema Fundamental da Proporcionalidade), isto é, $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Tomando também $b = f(0)$, resulta $f(h) - f(0) = \varphi(h) \Longrightarrow f(h) = ah + b$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A recíproca do teorema acima é óbvia. Se $f(x) = ax + b$ então $f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - (ax+b) = ax + ah - ax - b = ah$, ou seja, não depende de x.

A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que ***"acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$"***. Outra maneira de dizer isso é "acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

$\square$

Figura 7 – Variação de x Corresponde à Mesma de y



Fonte: Girado, Victor. **Caracterização da função afim**. PROFMAT-SBM-Apresentação de slides, 2013.

Exemplo 2.2.6 Suponha um ponto que se movimenta sobre um eixo. Sua posição, em cada instante t, é determinada pela abscissa $f(t)$. Diz-se que se trata de um *movimento uniforme* quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Isto significa que $f(t+h)-f(t)$, espaço percorrido no tempo h, a partir da posição $f(t)$, depende apenas de h, mas não de t. Então f é uma função afim: $f(t)=at+b$, onde $a=f(t+1)-f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, e chama-se *velocidade* e $b=f(0)$ é a posição inicial.

Proposição 2.2.1 Uma função afim leva progressões aritméticas em progressões aritméticas.

Demonstração. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim, a saber $f(x)=ax+b$. Considere $x_1, x_2, x_3, \ldots$ uma progressão aritmética; então $r=x_{i+1}-x_i$ é constante. Tomando $y_i=f(x_i)$, então $y_{i+1}-y_i=(ax_{i+1}+b)-(ax_i+b)=ax_{i+1}-ax_i=a(x_{i+1}-x_i)=ar$ (constante). Logo $y_1, y_2, y_3, \ldots$ formam uma progressão aritmética de razão ar.

Proposição 2.2.2 Se uma função monótona $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ leva progressões aritméticas em progressões aritméticas, então f é uma função afim.

Demonstração. Com efeito, neste caso a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(x)-f(0)$ leva progressões aritméticas em progressões aritméticas. Para todo $x\in\mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$

formam uma progressão aritmética. Logo, $g(-x)$, $g(0)$, $g(x)$ também formam uma progressão aritmética, portanto $g(-x) = -g(x)$.

Em seguida, considerando $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, os números $0, x, 2x, \ldots, nx$ formam uma progressão aritmética. Da mesma forma, $0, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ também formam uma progressão aritmética. A razão dessa progressão é $g(x) - 0 = g(x)$. Logo, $g(nx) = ng(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos $-n \in \mathbb{N}$. Logo, $g(nx) = -g(-nx) = -\big(-ng(gx)\big) = ng(x)$. Então $g(nx) = ng(x), \forall\, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue que g é linear, ou seja, $g(x) = ax$. Tomando $f(0) = b$, temos $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 2.2.7 Considere a função afim $f(x) = 2x + 1$ e a sequência dos números ímpares $(1, 3, 5, \ldots, 2n - 1)$. Como essa sequência é uma progressão aritmética de razão $r = 2$, então substituindo seus termos na função afim f, vem:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11;$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(2n - 1) = 2 \cdot (2n - 1) + 1 = 4n - 1.$$

Assim, a sequência $(3, 7, 11, \ldots, 4n - 1)$ forma uma progressão aritmética de razão $r = a \cdot r = 2 \cdot 2 = 4$, conforme a proposição 2.2.1.

□

2.2.4 Determinação de uma Função Afim Conhecendo-se seus Valores em dois Pontos

Conhecendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para x_1 e x_2 reais quaisquer, com $x_1 \neq x_2$, podemos explicitar os valores **a** e **b** da função $f(x) = ax + b$ bastando, para isso, o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) = ax_1 + b \\ y_2 = f(x_2) = ax_2 + b \end{cases}$$

Assim temos:

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ \ x_1 \neq x_2}} \tag{2.2.7}$$

Substituindo esse valor de **a** em $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, obtemos o valor de **b**:

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1 = b(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}, \ \ x_1 \neq x_2}} \tag{2.2.8}$$

Veja abaixo um exemplo interessante de LIMA [5].

Exemplo 2.2.8 E.W. observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ... $36, 37, 37, 38,$ ... O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé precisar de crescer h centímetros para passar de tamanho 33 para 34, precisará de crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39. Isto lhe deu a certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim: $f(x) = ax + b$ (Teorema 2.2.3).

E.W. atravessou a rua. Do outro lado havia uma papelaria, onde comprou uma régua. Voltou à sapataria e pediu emprestada a escala do vendedor. Como sua régua media até milímetros enquanto a escala só marcava pontos e meios pontos, escolheu dois valores $x_1 \neq x_2$ tais que os números de sapato correspondentes, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, assinalados na escala, fossem inteiros. Tomou $x_1 = 20, x_2 = 28$ e viu que $f(x_1) = 32, f(x_2) = 42$. A partir daí, calculou os coeficientes usando as fórmulas (2.2.7) e (2.2.8), chegando à fórmula abaixo:

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4},$$

o que dá o número do sapato de uma pessoa em função do comprimento do seu pé em centímetros.

□

2.2.5 *Taxa de Variação da Função Afim* $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

Substituindo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ na equação (2.2.7), obtemos:

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2.}} \qquad (2.2.9)$$

O parâmetro **a** é chamado de ***taxa de variação*** *(*ou taxa de crescimento). Essa taxa é sempre constante para cada função afim, e isso é uma característica importante das funções afins. Por exemplo, a taxa de variação da função $f(x) = 5x + 2$ é 5 e a da função $g(x) = -2x + 3$ é -2.

Substituindo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ na equação (2.2.9), temos:

$$a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow \boxed{a = f(1) - f(0).}$$

Assim, a taxa de variação da função afim $f(x) = ax + b$ pode ser obtida fazendo $f(1) - f(0)$.

Sugestão de [5]:

> Se a função afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número $\boldsymbol{a}$ coeficiente angular da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Assim, tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

□

2.2.6 Zero da Função Afim

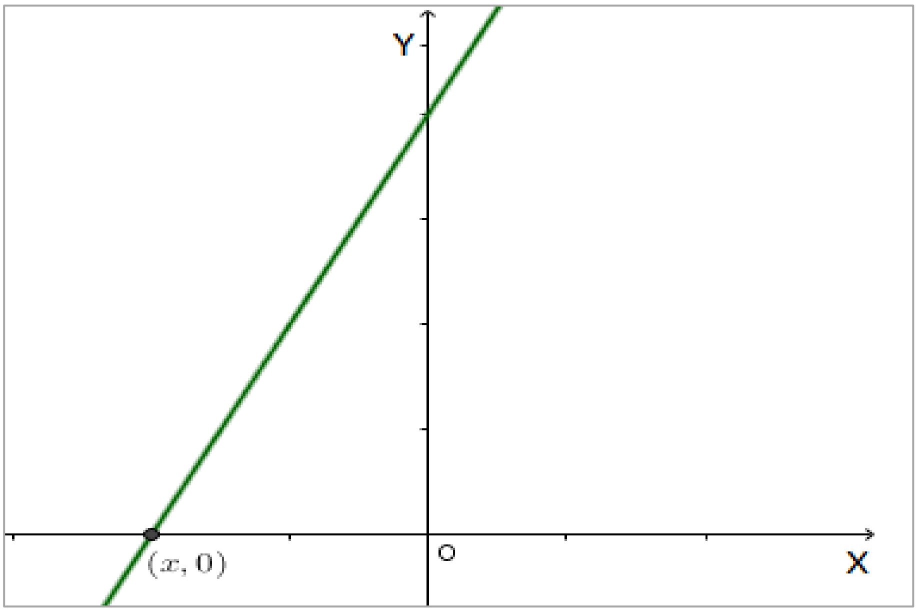
Definição 2.2.4 *Zero de uma função* é todo número x cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$. Encontrar o zero de uma função afim, com $a \neq 0$, corresponde à resolução de uma equação do 1º grau, ou seja, equivale a resolver a equação abaixo.

$$ax + b = 0.$$

Observação: Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, a função não tem zeros. Caso $a = b = 0$, todo número real é zero da função afim.

Geometricamente, o zero é a abscissa (coordenada x) do ponto em que o gráfico da função afim toca o eixo OX.

Figura 8 – Zero da Função Afim



A solução algébrica de uma equação do 1º grau baseia-se em dois axiomas:

1) Princípio aditivo de igualdade ou princípio de Euclides.

Podemos somar um número real a ambos os membros de uma igualdade que ela não se altera. Em símbolos, dados a, b e c números reais, tem-se:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

2) Princípio multiplicativo da igualdade.

Podemos multiplicar ambos os membros de uma igualdade por um número real não nulo que ela não se altera. Em símbolos, dados a, b e c números reais, com $c \neq 0$, tem-se:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

Com base nesses princípios, vamos resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Primeiramente, somando-se o oposto de b nos dois lados da igualdade, temos:

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow$$

$$ax = -b.$$

Como $a \neq 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade pelo inverso de a, obtemos:

$$ax \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = -b \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a},}$$

que é a raiz da equação do 1º grau.

Exemplo 2.2.9 Resolva a equação $2x - 8 = 2$.

Nosso objetivo é isolar o termo que contém a incógnita x no primeiro membro. Logo, aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar 8 em ambos os membros da equação. Assim, temos:

$$2x - 8 + \mathbf{8} = 2 + \mathbf{8} \Rightarrow$$

$$2x = 10.$$

De acordo com o segundo princípio, multiplicando os dois lados da equação pelo inverso de 2, obtemos:

$$2 \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = 10 \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{10}{2} \Rightarrow$$

$$x = 5.$$

□

Vamos examinar agora o sinal da função afim. Para isso, consideremos dois casos:

1) 1º caso: $a > 0$

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \ \ e$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

2) 2º caso: $a < 0$

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \ \ e$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Em ambos os casos, temos:

$$f(x) = ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo 2.2.10 Estude os sinais da função de cada função abaixo:

a) $f(x) = 2x - 10.$

Temos $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5.$

Como $a = 2 > 0$, então:

$$f(x) > 0 \ \ se \ \ x > 5;$$

$$f(x) < 0 \ \ se \ \ x < 5 \ e$$

$$f(x) = 0 \ \ se \ x = 5.$$

b) $f(x) = -2x + 8.$

Temos $f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4.$

Como $a = -2 < 0$, então:

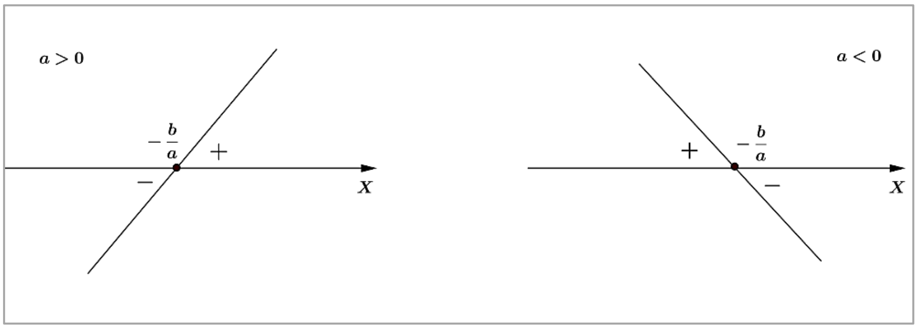
$$f(x) > 0 \ \ se \ \ x < 4;$$

$$f(x) < 0 \ \ se \ \ x > 4 \ e$$

$$f(x) = 0 \ \ se \ x = 4.$$

A figura abaixo dá uma melhor compreensão desse estudo dos sinais.

Figura 9 – Sinal da Função Afim



□

2.3 Função Quadrática

Conforme Albuquerque [20], a noção de função quadrática associa-se originalmente à ideia de equação do 2º grau. Já na Antiguidade, por volta de 300 a. C., o matemático grego Euclides (325-265 a. C.) desenvolveu uma técnica denominada álgebra geométrica para lidar com o que veio a se chamar álgebra. Naquela época, não havia a noção de equação ou mesmo de função. Se os gregos tivessem desenvolvido uma álgebra com uma linguagem mais adequada, a noção de função teria quase que inevitavelmente aparecido como resultado da conjunção das ideias de curva e equação – em particular, de parábola com a equação do 2º grau – e, de maneira mais geral, da álgebra com a geometria. Porém, essa ideia somente ocorreria no Renascimento motivada por vários fatores. Dentre eles, destacam-se as tentativas de explicar o movimento de queda livre de um corpo ou a trajetória de uma bala de canhão, que é uma parábola.

Vários teóricos dos séculos XVI e XVII tentaram explicar essa trajetória, sem obter a parábola. Tais explicações foram aperfeiçoadas até se chegar à parábola associada à curva de 2º grau, o que acelerou a necessidade de se relacionar curvas a equações e, de modo geral, álgebra à geometria.

2.3.1 Um Pouco da História das Equações Quadráticas

De acordo com [4], [9] e [10], um dos primeiros indícios do uso de equações está relacionado, aproximadamente, ao ano de 1650 a. C., no documento denominado Papiro de Rhind, adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor – Egito, em 1858. O papiro de Rhind também recebe o nome de Ahmes, um escriba que relata no papiro a solução de problemas relacionados à Matemática. Nessa mesma época, os babilônios já conseguiam trabalhar com equações do segundo grau e tinham uma álgebra bem desenvolvida e conseguiam resolver seus problemas por métodos semelhantes aos que conhecemos hoje ou pelo método de completar quadrados. As resoluções eram interpretadas geometricamente e não fazia sentido falar em raízes negativas. O estudo das raízes negativas foi feito a partir do século XVIII.

Na Grécia, a matemática era filosófica e pouco prática. Euclides resolve equações polinomiais do segundo grau através de métodos geométricos. Diofanto (séc. III d. C.), avançou na resolução das equações apresentando uma representação introduzindo símbolos. Na índia, as equações eram resolvidas completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada por Al – Khowarizmi, no século IX, onde se descartavam raízes negativas por não serem adequadas e aceitavam raízes irracionais.

Na China, a resolução das equações foi através do método fan – fan introduzido por Zhu Shijie, no século XIII. Este método foi redescoberto no século XIX pelos ingleses William George Horner e Theophilus Holdred e o italiano Paolo Ruffini. O método fan – fan ficou conhecido na Europa como método de Horner, mas já havia sido antecipado por Isaac Newton em 1669.

No Brasil, costuma-se chamar de fórmula de Bhaskara a fórmula que dá soluções a equação do segundo grau. Além de ser historicamente incorreto, esta nomenclatura não é usada em nenhum outro país. A fórmula resolvente é devida ao matemático hindu Sridhara, do século 10. Já em relação aos babilônios, estes se utilizavam de tabletes de argila e tinham um sistema de numeração bem desenvolvido com base 60. Dos tabletes que foram encontrados, existem alguns que tratam das equações do segundo grau.

A matemática grega é diferente da babilônica e egípcia. Eles transformaram os conhecimentos destas duas civilizações em resultados bem estruturados, onde a argumentação é feita através da demonstração matemática. A maneira dos matemáticos gregos apresentarem seus resultados é geométrica, como nos Elementos de Euclides, escritos por volta do ano 300 a. C.

A matemática hindu ocorre entre 400 e 1200 d. C. e, seus primeiros registros, foram encontrados em vários sulvasutras (conhecimentos teóricos necessários para construção de altares) escritos entre 800 e 500 a. C. Há também o manuscrito chamado Bakshali e importante para o conhecimento da Matemática hindu. As equações do segundo grau surgem na matemática hindu com os sulvasutras, sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem apresentar soluções. Já com o Bakshali, descreve procedimento de solução correspondente à fórmula moderna.

O matemático Ariabata I (476 d. C.) chegou a uma equação do segundo grau a partir de um problema de progressões aritméticas. Os árabes assimilaram a Matemática dos gregos e fizeram progressos em várias áreas. O matemático Muhammad bn Musa al – Khwarizmi (780 – 850) foi o primeiro a escrever sobre a solução de problemas usando al – jabr (adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, a fim de eliminar termos negativos) e al – muqabala (redução de termos positivos por meio de subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação). A solução de quadrados repostos ou equação do segundo grau, quase sempre envolvia partilha de bens entre herdeiros inventariados.

2.3.2 Zeros da Função Quadrática

Nesta seção, daremos ênfase à parte algébrica, apresentando alguns métodos para determinar os zeros da função quadrática.

2.3.2.1 Problema Histórico

Começaremos esse estudo com um problema histórico envolvendo equações do segundo grau, e que servirá de motivação para definirmos função quadrática. Vejamos o problema:

Problema 2.3.1 *Encontrar dois números conhecendo apenas a sua soma e o produto.*

Solução. Considere a soma $\boldsymbol{s}$ e o produto $\boldsymbol{p}$. Sendo um dos números procurados $\boldsymbol{x}$, o outro será $\boldsymbol{s-x}$ e dessa forma o produto será

$$p = (s-x)x,$$

ou seja,

$$\boxed{x^2 - sx + p = 0.} \tag{2.3.1}$$

Como o mecanismo de resolução, como conhecemos nos dias atuais, só começou a ser utilizado pelo matemático Viète, no final do século XVI, os babilônios possuíam uma receita, que segundo Elon [5], era enunciada assim:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Trazendo para a nossa notação atual, temos os números:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad e \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \tag{2.3.2}$$

Como os babilônios não se preocupavam com demonstrações, os passos para encontrar os valores procurados não eram justificados.

De acordo com os autores de [5], há indícios de que os babilônios chegaram a essas expressões da seguinte forma:

Considerando α e β os números procurados, são conhecidos dois números s e p, tais que $s = \alpha + \beta$ e $p = \alpha \cdot \beta$. Assim, apesar de α e β serem desconhecidos, a média aritmética $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2}$ é conhecida e possui a propriedade de ser equidistante de α e de β.

Considerando $\alpha \leq \beta$, temos que $\frac{s}{2} - \alpha = \beta - \frac{s}{2}$. Chamando esta diferença de d, o problema de encontrar dois números α e β se reduz a encontrar o único número d, pois $\alpha = \frac{s}{2} - d$ e $\beta = \frac{s}{2} + d$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} p &= \alpha \cdot \beta \\ &= \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) \\ &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2. \end{aligned}$$

Logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p,$$

como d é não negativo,

$$d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Daí

$$\boxed{\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}} \quad e \quad \boxed{\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.} \qquad (2.3.3)$$

Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios nunca tiveram preocupação com eventuais soluções negativas fornecidas por sua regra. E no caso de $\left(\frac{s}{2}\right)^2 < p$, eles simplesmente diziam que os números procurados não existiam.

□

Exemplo 2.3.1 João cercou uma região retangular de área $12\ m^2$ com $14\ m$ de corda. Encontre as dimensões dessa região.

Sejam a e b os lados da região retangular. As condições sobre o perímetro e a área desse retângulo nos levam às seguintes equações:

$$2\mathrm{a} + 2\mathrm{b} = 14 \Rightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b} = 7 \ \text{ e } \ \mathrm{ab} = 12,$$

ou seja, $s = 7$ e $p = 12$. Usando as fórmulas (2.3.3) , temos:

$$\alpha = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Portanto, as dimensões da região procurada são 3 e 4 metros.

□

Segundo Boyer [1], não se sabia resolver uma equação do segundo grau da forma $x^2 + px + q = 0$, $p, q > 0$, pois isso daria duas raízes negativas. Assim, só havia três tipos de equação do segundo grau, e todas são encontradas em textos babilônicos antigos, há aproximadamente 4000 anos.

Sejam elas:

$$x^2 + px = q,$$

$$x^2 = px + q \qquad \text{e}$$

$$x^2 + q = px,$$

em que resolveremos geometricamente na seção 2.4.2.

Como vimos anteriormente, a resolução da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, tem sua origem no problema de descobrir dois números inteiros positivos conhecendo-se a sua soma s e seu produto p. E por meio de documentos e fontes históricas, constatou-se que provavelmente os primeiros a resolverem o que hoje conhecemos como equações quadráticas foram os babilônios.

□

2.3.2.2 Soma e Produto

Veremos agora a relação existente entre a soma e o produto das raízes de uma equação quadrática.

Voltando à equação (2.3.1), temos que o coeficiente de x^2 é 1, de x é $-s$ e o termo independente é p. Ao trabalharmos com uma equação de segundo grau qualquer, não é sempre verdade que o coeficiente de x^2 é igual a 1. Ele pode assumir qualquer valor real, desde que não se anule, pois, neste caso, a equação recair-se-ia numa equação do primeiro grau.

Reescrevendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ na forma (2.3.1), temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Comparando a expressão acima com (2.3.1), temos:

$$-s = \frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{b}{a} \qquad e$$

$$p = \frac{c}{a}.$$

Assim, o problema histórico se transforma em descobrir dois números x' e x'' tais que

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}} \qquad e$$

$$\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}\,.}$$

- **Equação do segundo grau completa**

Dizemos que uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é completa se seus coeficientes a, $b, c \neq 0$.

- **Equação do segundo grau incompleta, com $b = 0$ e $c = 0$**

Neste caso mais trivial, a única solução é zero.

Exemplo 2.3.2 Determine as raízes da equação $3x^2 = 0$.

Vemos imediatamente que:

$$3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- **Equação do segundo grau incompleta, com $b = 0$ e $c \neq 0$**

Neste caso, podemos obter explicitamente os valores das duas raízes.

Exemplo 2.3.3 Descubra as raízes da equação $x^2 - 4 = 0$.

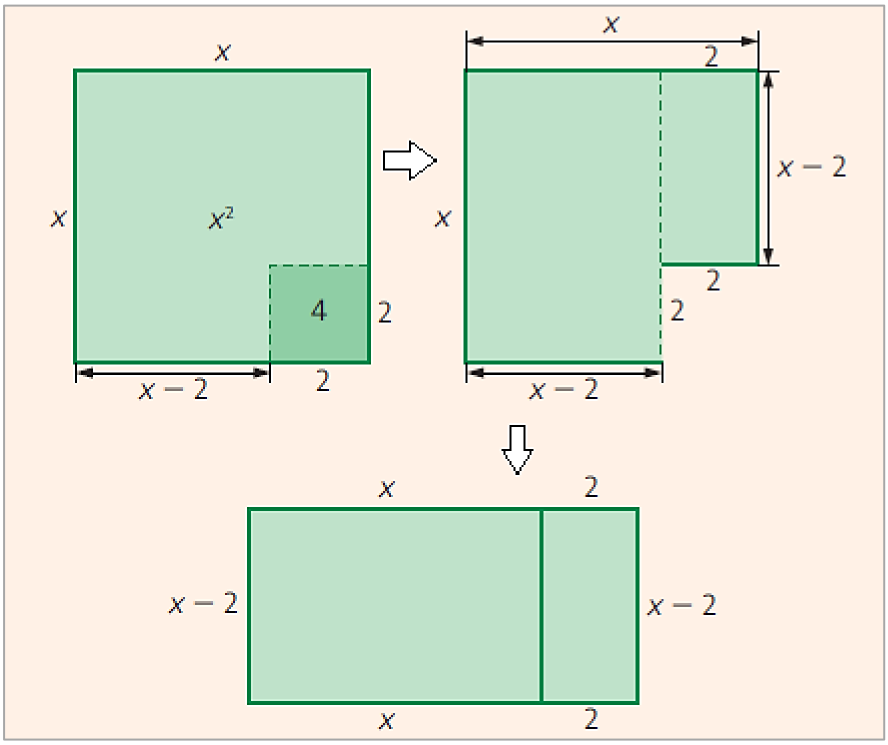
Desenvolvendo a equação acima e isolando o termo x^2, temos:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Logo, $x' = -2$ e $x'' = 2$.

Geometricamente, podemos representar $x^2 - 4$ assim:

Figura 10 – Fatoração de $x^2 - 4$



Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações Vol. 01**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

Observe que a área dada por $x^2 - 4$ é a mesma que a dada por $(x-2)(x+2)$. Assim, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Logo,

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' = 2 \ \ ou \ x'' = -2.$$

□

Exemplo 2.3.4 Determine as raízes da equação $x^2 + 5 = 0$.

Resolvendo, temos:

$$x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-5}.$$

Mas $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$. Logo, a equação acima não possui raízes reais, e seu conjunto solução é $S = \emptyset$ no universo dos números reais.

Assim, podemos inferir que para, esse tipo de equação, só existe solução se $c < 0$.

- **Equação do segundo grau incompleta, com $c = 0$ e $b \neq 0$**

Utilizaremos um artifício, conhecido desde o ensino fundamental, que consiste em colocar em evidência o fator comum a dois termos explícitos na equação.

Exemplo 2.3.5 Calcule as raízes da equação $x^2 + 2x = 0$.

Observando a expressão, vemos que o fator x aparece nas duas parcelas da soma no primeiro membro. Logo, devemos colocá-lo em evidência. Assim temos:

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot x + 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = 0.$$

Para que esse produto seja zero, é necessário que pelo menos um dos fatores seja zero, ou seja,

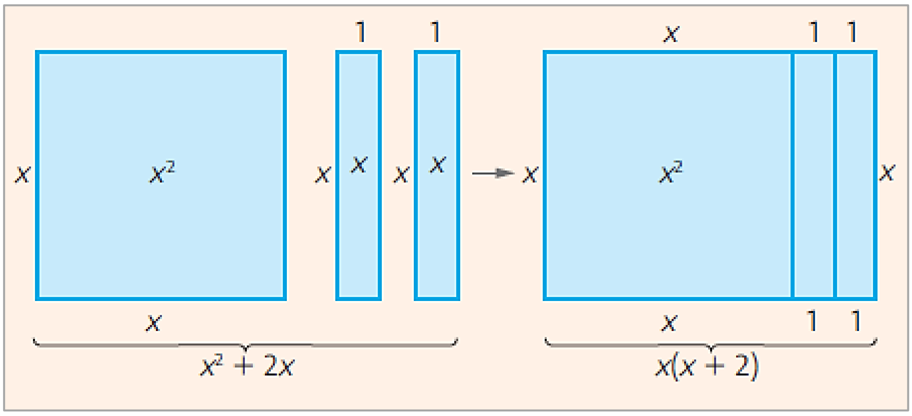
$$x = 0 \ \ ou$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Logo, as raízes da equação são $x' = 0$ ou $x'' = -2$.

Geometricamente, temos:

Figura 11 – Fatoração de $x^2 + 2x$



Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações Vol. 01**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

Observe que a área dada por $x^2 + 2x$ é a mesma que a dada por $x(x+2)$. Assim,

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' = -2 \;\; ou \; x'' = 0.$$

Observação: O fato de uma equação do segundo grau não ter raízes reais não significa que não tenha solução em qualquer conjunto. No corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, toda equação de grau n tem n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

□

2.3.2.3 Método de Completar Quadrado

Os babilônios possuíam outra maneira de obter esses valores, que é o "método de completar quadrados". Embora eles tivessem conseguido resolver muitos problemas matemáticos, suas soluções era uma espécie de receita prática, que não especificava nem a sua fórmula geral nem o modo como a solução havia sido obtida. Essas receitas quando aplicadas a problemas do segundo grau conduziam de forma natural à dedução da fórmula que conhecemos hoje, porém os babilônios não chegaram a generalizar tais receitas. A fórmula de resolução de equações quadráticas que conhecemos hoje deve-se ao matemático indiano Sridhara $(870 - 930)$; este método foi bastante empregado pelos gregos em suas abordagens geométricas.

De acordo com Soares [18], começaremos com um caso simples:

$$ax^2 + c = 0,$$

que pode ser resolvida isolando o valor de x, ou seja, por meio dos seguintes procedimentos: subtraindo o valor de c em ambos os membros; dividindo os dois lados da equação por a (Princípio de Euclides); e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros.

Com isso, temos o seguinte valor de x abaixo:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Os alunos trabalham exemplos como esse, no entanto, no caso do trinômio estar em sua forma completa os professores abandonam esse método e já apresentam as fórmulas resolutivas para resolver equações.

É fundamental que o professor trabalhe casos do tipo:

$$a(x+m)^2 + k = 0,$$

onde podemos usar o mesmo raciocínio anterior e isolando x, obtemos:

$$x = -m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}},$$

ou seja, a ideia consiste em partir de um trinômio completo $(ax^2 + bx + c)$ e chegar a uma expressão do tipo $a(x+m)^2 + k$, que já sabemos como determinar sua solução.

Mostraremos agora como chegar na expressão de cima partindo do trinômio do segundo grau em (2.3.1), utilizando para isso o "método de completar quadrados".

Considere o trinômio $x^2 - sx + p$. Vamos escrevê-lo como um quadrado perfeito do tipo $x^2 - 2kx + k^2$. Já temos:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + p.$$

Somando e subtraindo a parcela $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ para não alterarmos o trinômio, temos:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Assim:

$$x^2 - sx + p = \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Por meio desse trinômio fatorado, podemos obter facilmente a solução da equação (2.3.1). Com efeito,

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{s}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}},$$

que é a mesma solução que os babilônios encontraram há 4000 anos!

□

Exemplo 2.3.6 Vamos resolver por completamento de quadrado a equação do exemplo 2.3.7.

Temos que $x^2 + 2x = 0$. Somando-se 1 a ambos os membros, vem:

$$x^2 + 2x + \mathbf{1} = 0 + \mathbf{1} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

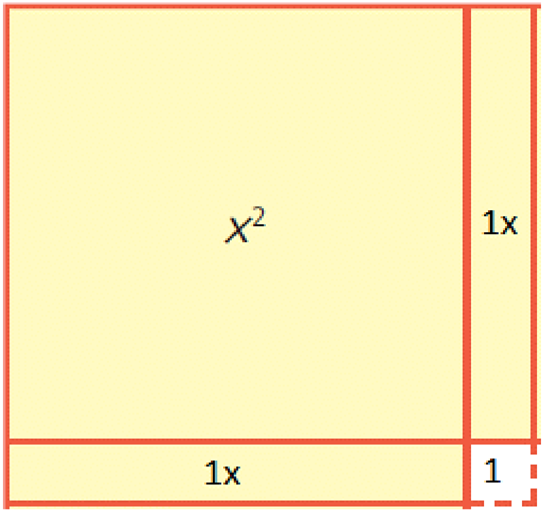
$$x + 1 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$x' = -2 \;\; ou \;\; x'' = 0.$$

Geometricamente, temos:

Figura 12 – Completando o Quadrado de $x^2 + 2x$



Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações Vol. 01**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

Observa-se que falta 1 região quadrada. Por isso somamos e subtraindo 1 para completar o quadrado, ou seja:

$$x^2 + 2x + \mathbf{1} - \mathbf{1} = (x+1)^2 - 1.$$

Assim,

$$(x+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 = 1,$$

o que dá $x' = -2 \ ou \ x'' = 0$.

□

Exemplo 2.3.7 Encontre dois números cuja soma é 1 e cujo produto é -1.

De forma análoga, temos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Completando o quadrado, temos:

$$\mathrm{x}^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ou \qquad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

O valor positivo de x é conhecido como número de ouro.[2]

□

2.3.2.4 Método de Viète

O matemático francês François Viète $(1540 - 1603)$ descobriu uma forma de resolução da equação quadrática em que basicamente consiste em transformar a equação $ax^2 + bx + c = 0$ em uma equação incompleta sem o termo do 1º grau.

[2] O número de ouro é considerado um símbolo da harmonia. Aparece na natureza, na arquitetura, na arte, música, etc. Uma observação importante é que a razão entre um termo e seu antecessor na sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ converge para o número de ouro.

Conforme [12], seja a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Reescrevendo essa igualdade na incógnita v, obtemos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \tag{2.3.4}$$

Anulando o coeficiente de v, vem:

$$2au + b = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo esse valor em (2.3.4), temos:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$av^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$ então $v = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Logo,

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

□

Exemplo 2.3.8 Resolva a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pelo método de Viète.

Substituindo $x = u + v$ na equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, temos:

$$(u+v)^2 - 3(u+v) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$u^2 + 2uv + v^2 - 3u - 3v + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$v^2 + (2u - 3)v + u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Fazendo $2u - 3 = 0$, obtemos $u = \frac{3}{2}$. Substituindo esse valor na equação acima, vem:

$$v^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$v^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow v^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow v = \pm\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$x = u + v = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$x' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \ \ e$$

$$x'' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Portanto, $S = \{1,2\}$.

□

2.3.2.5 Resolução por Fatoração

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dividindo ambos os membros por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ \ ou \ \ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Adicionando a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$ aos dois lados da igualdade, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, essa equação é equivalente à:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0. \tag{2.3.5}$$

Da equação (2.3.5), concluímos que

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ou$$

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Rightarrow = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Reunindo em uma única fórmula, temos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Observe que aqui também foi usado o método de completar quadrado.

□

2.3.2.6 Representação de uma Função Quadrática

Há duas formas muito interessantes de se representar uma função quadrática: a forma canônica e a fatorada.

Definição 2.3.1 Função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o valor $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Definição 2.3.2 Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dizemos que um número α é raiz da equação $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ se $f(\alpha) = 0$. Como α anula a função, então dizemos também que α é um dos zeros da função f. [16]

Proposição 2.3.1 Seja a equação $x^2 - sx + p = 0$. Se α é raiz desta equação, então $\beta = s - \alpha$ também é raiz desta equação. [16]

Demonstração. De fato, como α é raiz da equação, temos:

$$\alpha^2 - s\alpha + p = 0.$$

Substituindo $\beta = s - \alpha$ na equação inicial, temos:

$$\beta^2 - s\beta + p =$$

$$= (s - \alpha)^2 - s(s - \alpha) + p =$$

$$= s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p =$$

$$= \alpha^2 - s\alpha + p = 0.$$

□

2.3.2.6.1 Forma Canônica

Esta forma baseia-se na técnica conhecida como "completar quadrado", já mencionada e explorada anteriormente, e consiste em criar um quadrado perfeito, fazendo os devidos ajustes na expressão da função.

De acordo com Soares [18], considere o trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Colocando o a em evidência e completando o quadrado, temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Assim, podemos reescrever a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.} \tag{2.3.6}$$

De maneira equivalente:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,} \tag{2.3.7}$$

onde $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

□

Para um aluno de ensino médio representar uma função quadrática na forma canônica pode até parecer complicado e até mesmo inútil. No entanto, essa forma fornece algumas propriedades importantes:

- **1ª Propriedade:** Valor máximo e mínimo

Definição 2.3.3 Dado $m \in \mathbb{R}$, $f(m)$ é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m), \forall x \in \mathbb{R}$, e dizemos que $f(m)$ é o valor mínimo se $f(x) \geq f(m), \forall x \in \mathbb{R}$.

Observe que a forma (2.3.7) é composta por $a(x - x_0)^2$, que varia com x e por $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$, formada apenas por valores constantes.

Se $a > 0$, então $a(x - x_0)^2 \geq 0$ e $a(x - x_0)^2 + y_0 \geq 0 + y_0$.

Assim: $f(x) \geq y_0$, ou seja, f atinge o valor mínimo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou melhor, em $x = x_0$.

Se $a < 0$, então $a(x - x_0)^2 \leq 0$ e $a(x - x_0)^2 + y_0 \leq 0 + y_0$.

Assim: $f(x) \leq y_0$, ou seja, f atinge o valor máximo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou melhor, em $x = x_0$.

Logo, o ponto $x_0 = -\frac{b}{2a}$ é o ponto que minimiza ou maximiza a função f, dependendo apenas do sinal de a. [18]

□

Exemplo 2.3.9 Encontre o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - 8x + 19$.

Passando $f(x)$ para a forma canônica, temos:

$$f(x) = (x-4)^2 + 3.$$

Como $a = 1 > 0$, então $y_0 = 3$ é valor mínimo, que ocorre no ponto $x = 4$.

Observe que a partir da forma canônica podemos determinar facilmente os valores mínimo ou máximo da função.

- **2ª Propriedade:** Zeros da função

Considere a forma canônica em (2.3.5). Partindo de $f(x) = 0$, obtemos a equação:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0, \qquad (2.3.8)$$

cuja solução é a famosa fórmula[3] abaixo:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},} \qquad (2.3.9)$$

que é a mesma fórmula obtida pelo método de Viète, porém, o método de completar quadrado foi usado muito ante do que o de Viète.

O termo $b^2 - 4ac$ é representado pela letra grega Δ (delta),

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (2.3.10)$$

é chamado de discriminante, e tem grande importância no estudo das raízes da equação do segundo grau.

[3] Essa expressão é conhecida, equivocadamente, no ensino básico brasileiro como Fórmula de Bhaskara. Porém, não foi este matemático que deduziu ela, mas imortalizou seu nome por publicá-la em um livro seu.

Assim, com essa nova notação, a equação (2.3.8) pode ser representada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{2.3.11}$$

Das fórmulas (2.3.8) e (2.3.10) obtemos a seguinte equação:

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}} \tag{2.3.12}$$

que podemos extrair informações importantes sobre o estudo de suas raízes.

Como o primeiro membro de (2.3.12) está elevado ao quadrado, então:

- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.
- Se $\Delta = 0$, então temos apenas uma raiz da equação (ou duas raízes iguais), a saber:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a},$$

que é o próprio valor de máximo ou mínimo da função quadrática.

- Se $\Delta > 0$, então temos duas raízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assim:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \;\; e \;\; x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observação: Mesmo que o valor de Δ seja negativo (consequentemente a equação não possui raízes reais), podemos esboçar ser gráfico e determinar o ponto de máximo e mínimo da função.

□

Exemplo 2.3.10 Determine os zeros de cada função abaixo.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Temos que:

$$x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Logo, $x = 2$ ou $x = 3$.

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

De forma análoga, temos:

$$-x^2 + 2x - 1 = -1(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 = 0,$$

ou seja, $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

Da mesma forma, temos:

$$x^2 - x + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

que não possui raiz real. Porém, podemos ver facilmente que seu valor mínimo é $y_0 = \frac{3}{4}$, que ocorre para $x_0 = \frac{1}{2}$.

□

2.3.2.6.2 Forma Fatorada

Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponha que α seja raiz dessa função. Logo:

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Assim, podemos escrever $f(x) = f(x) - f(\alpha)$. Logo, temos:

$$f(x) - f(\alpha) = ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)$$

$$= ax^2 - a\alpha^2 + bx - b\alpha + c - c$$

$$= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha)$$

$$= a[(x-\alpha)(x+\alpha)] + b(x-\alpha).$$

Colocando a e $(x - \alpha)$ em evidência, temos:

$$f(x) = a(x - \alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right).$$

Denotando $\alpha + \frac{b}{a} = -\beta$, vem:

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).} \qquad (2.3.13)$$

Esta forma é conhecida como forma fatorada da função quadrática e sua maior vantagem é determinar, visualmente, os zeros da função. De fato, analisando a expressão (2.3.13), vemos que f só se anula quando pelo menos um de seus termos for nulo. Como $a \neq 0$, logo:

$$x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha,$$

$$x - \beta = 0 \Leftrightarrow x = \beta.$$

E mais, a partir da forma fatorada podemos obter mais uma propriedade importante da função f:

- **3ª Propriedade:** Sinal da Função

Estudar o sinal de uma função f é encontrar os valores de x para os quais a imagem $f(x)$ é um número negativo ou positivo. A forma fatorada fornece imediatamente a seguinte informação sobre o sinal da função quadrática:

Se x está situado entre duas raízes da equação $f(x) = 0$, então $f(x)$ tem sinal oposto ao sinal de a. Caso contrário, ou x é raiz ou $f(x)$ tem o mesmo sinal de a.

Com efeito, sejam α e β os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e supondo, sem perda da generalidade, que $\alpha < \beta$, o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é negativo se, e somente se, x está entre α e β $(\alpha < x < \beta)$. Assim, o sinal de f será contrário ao de a.

Para $x < \alpha$ e $x > \beta$, o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é positivo e, consequentemente, o sinal de f é o mesmo de a. Se $\alpha = \beta$, então temos $f(x) = a(x - \alpha)^2$. Neste caso a função se anula apenas em $x = \alpha$ e terá o mesmo sinal de a para $x \neq \alpha$, pois $(x - \alpha)^2$ é sempre positivo.

Caso a função não possua zeros reais, não podemos escrevê-la em sua forma fatorada, mas podemos analisar o estudo de seus sinais através do valor máximo e mínimo. Veja:

Se $a > 0$, a função possui valor mínimo $-\frac{\Delta}{4a}$. Como a função não possui zeros reais ($\Delta < 0$), o valor mínimo será positivo e portanto $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. De forma análoga, se $a < 0$, a função possui valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$. Como a função não possui zeros reais, o valor máximo será negativo e portanto $f(x) \leq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 2.3.11 Estude o sinal da função $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

Colocando a função em sua forma canônica, temos:

$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Calculando os zeros dessa função, obtemos $x' = 2$ e $x'' = 3$. Assim, sua forma fatorada é:

$$f(x) = 2(x-2)(x-3).$$

Logo, vemos que:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3;$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3;$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3.$$

□

2.3.3 Caracterização das Funções Quadráticas

Definição 2.3.4 Uma ***progressão aritmética de segunda ordem*** é uma sequência y_1, y_2, y_3, y_4, ... tal que as diferenças sucessivas

$$\mathrm{d}_1 = y_2 - y_1, \qquad \mathrm{d}_2 = y_3 - y_2, \qquad \mathrm{d}_3 = y_4 - y_3, \ldots$$

formam uma progressão aritmética de primeira ordem.

Exemplo 2.3.12 A progressão $(1, 4, 9, 16, 25. \ldots)$ é de segunda ordem pois a diferença entre dois termos consecutivos forma uma PA de razão 2. De fato:

$$4 - 1 = 3;$$

$$9 - 4 = 5;$$

$$16 - 9 = 7;$$

$$25 - 16 = 9.$$

Assim, temos a PA $(3, 5, 7, 9, \dots)$ de razão 2.

□

As demonstrações das proposições a seguir encontram-se em LIMA [5], “A Matemática do Ensino Médio” vol. 01.

Proposição 2.3.2 A função quadrática transforma uma progressão aritmética de razão r em uma progressão aritmética de segunda ordem de razão $2ar^2$.

Demonstração: Inicialmente, uma progressão aritmética de segunda ordem é aquela em que as diferenças entre os termos consecutivos formam uma P.A. de razão diferente de zero. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ uma função quadrática arbitrária e $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \dots)$ uma progressão aritmética de razão r. A sequência $\{f(x_1),\ f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$ goza da propriedade de que as diferenças sucessivas: $d_1 = f(x_2) - f(x_1),\ d_2 = f(x_3) - f(x_2),\ d_3 = f(x_4) - f(x_3), \dots$ formam uma progressão aritmética de razão $2ar^2$. De fato, seja $x_{n+1} - x_n = r$. Temos que:

$$f(x_{n+1}) = a(x_{n+1})^2 + b(x_{n+1}) + c \quad e$$

$$f(x_n) = a(x_n)^2 + b(x_n) + c.$$

Calculando a diferença desses valores, vem:

$$\begin{aligned} d_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\ &= a(x_{n+1})^2 + b(x_{n+1}) + c \ - [a(x_n)^2 + bx_n + c] \\ &= a[(x_{n+1})^2 - (x_n)^2] + b[(x_{n+1}) - x_n] \\ &= a(x_{n+1} - x_n) \cdot (x_{n+1} + x_n) + br \\ &= ar \cdot (x_{n+1} + x_n) + br \end{aligned}$$

De maneira análoga, calculando d_{n+1}, vem:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) \\ &= a(x_{n+2})^2 + b(x_{n+2}) + c - [(x_{n+1})^2 + b(x_{n+1}) + c] \end{aligned}$$

$$= a[(x_{n+2})^2 - (x_{n+1})^2] + b[(x_{n+2}) - x_{n+1}]$$

$$= a(x_{n+2} - x_{n+1}) \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) + br$$

$$= ar \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) + br$$

Logo,

$$d_{n+1} - d_n = ar \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) + br - [ar \cdot (x_{n+1} + x_n) + br]$$

$$= ar \cdot (x_{n+2} - x_n)$$

$$= ar\big(x_1 + (n + 2 - 1)r - (x_1 + (n - 1)r)\big)$$

$$= ar\big(x_1 + (n + 1)r - (x_1 + (n - 1)r)\big)$$

$$= ar(x_1 + nr + r - x_1 - nr + r)$$

$$= ar(2r) = \boxed{2ar^2} \text{ (constante).}$$

Logo, a sequência $\{f(x_1),\ f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Proposição 2.3.3 Toda função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Demonstração: Primeiramente, sabemos que uma progressão aritmética é uma função restrita ao conjunto dos números naturais. Tomando $a = r$ e $b = x_1 - r$, então a equação $x_n = x_1 + (n-1)r$ pode ser escrita como $x_n = an + b$. Esta função restrita aos naturais nos fornece os termos $x_1 = f(x_1), x_2 = f(x_2), x_3 = f(x_3), \dots, x_n = f(n)$, ..., da progressão aritmética.

Ainda, se $\{y_1,\ y_2, y_3, y_4, \dots\}$ é uma $P.A.$ de segunda ordem, então existem a, b, c naturais, tais que $y = an^2 + bn + c$, para todo n natural. De fato, as diferenças sucessivas $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$, ... é uma progressão aritmética com primeiro termo d_1 e razão r. Assim, temos:

$$d_n = d_1 + (n - 1)r \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} - y_n = (y_2 - y_1) + (n - 1)r, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que:

$$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1. \text{ Logo,}$$

$$y_{n+1} = (d_1 + (n-1)r) + (d_1 + (n-2)r) + (d_1 + r) + d_1 + y_1 \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} = nd_1 + \frac{n(n-1)}{2} r + y_1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como essa igualdade é verdadeira quando $n = 0$, podemos escrever:

$$y_n = (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r + y_1 \Longrightarrow$$

$$y_n = (n-1)d_1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} r + y_1 \Longrightarrow$$

$$y_n = \frac{r}{2} n^2 + \left(d_1 - \frac{3r}{2}\right) n + r - d_1 + y_1.$$

Tomando $a = \frac{r}{2}$, $b = d_1 - \frac{3r}{2}$ e $c = r - d_1 + y_1$, temos:

$$\boxed{y_n = an^2 + bn + c, \forall\, n \in N}.$$

Teorema 2.3.1 (Caracterização das Funções Quadráticas) A fim de que a função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada (Não é uma P.A. ordinária) $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots y_n = f(x_n), \dots$

A necessidade e a suficiência foram demonstradas nas proposições 2.3.2 e 2.3.3. Vejamos um exemplo para entendermos melhor esse teorema.

Exemplo 2.3.13 Considere a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Vamos calcular alguns valores de $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1;$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2;$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7;$$

$$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 = 14;$$

$$f(4) = 4^2 + 2 \cdot 4 - 1 = 23.$$

Denotando a diferença $f(n) - f(n-1)$ por δ_n, temos:

$$\delta_1 = f(1) - f(0) = 2 - (-1) = 3;$$

$$\delta_2 = f(2) - f(1) = 7 - 2 = 5;$$

$$\delta_3 = f(3) - f(2) = 14 - 7 = 7;$$

$$\delta_4 = f(4) - f(3) = 23 - 14 = 9.$$

Observe que a sequência $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ forma uma $P.A.$ não trivial, ou seja, com razão $r \neq 0$. Assim, os valores de $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma $P.A$ de segunda ordem, conforme o Teorema 2.3.1 da caracterização afirma.

□

Exemplo 2.3.14 Considere a sequência $5, 11, 19, 29, 41, 55, \ldots$, de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas $11 - 5, 19 - 11, 29 - 19, 41 - 29, 55 - 41, \ldots$, formam a $P.A.$ ordinária $6, 8, 10, 12, 14, \ldots$, de razão 2 e primeiro termo $d_1 = 6$. Segue-se da proposição 2.2.3 que o n-ésimo termo da sequência inicial é dado por $y_n = an^2 + bn + c$, onde $a = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $b = d_1 - \frac{3r}{2} = 6 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 6 - 3 = 3$ e $c = r - d_1 + y_1 = 2 - 6 + 5 = 1$. Ou seja, o termo de ordem n da sequência $5, 11, 19, 29, 41, 55, \ldots$ é $y_n = n^2 + 3n + 1$.

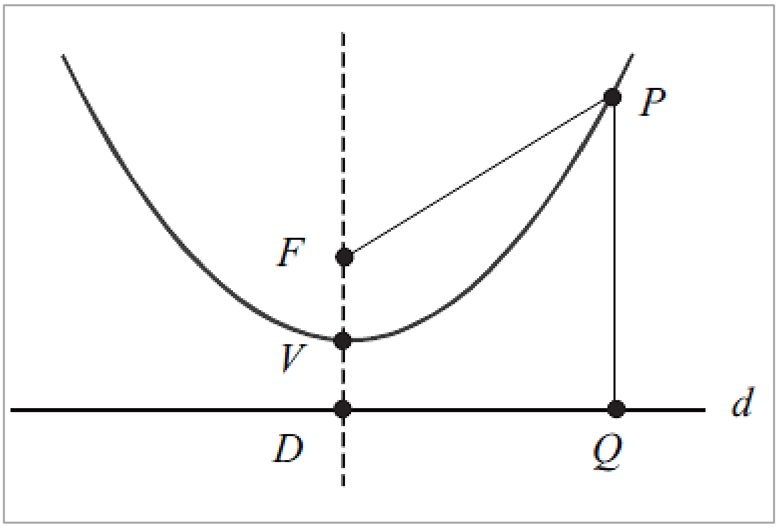
□

2.3.4 Gráfico da Função Quadrática

"O gráfico de uma função quadrática é uma parábola". Muitos professores dizem isso em suas aulas, sem antes mesmo de definir cada um. Com isso, o aluno acaba associando a parábola, de forma equivocada, a qualquer gráfico que possua o formato similar ao dela. Assim, vamos definir a parábola e o gráfico de uma função quadrática e mostrar que eles são iguais.

Definição 2.3.5 Consideremos no plano uma reta d e um ponto F fora dela. A parábola de *foco* F e *diretriz* d é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da reta d.

Figura 13 – Parábola com foco F e diretriz d



A reta perpendicular à diretriz passando por F será chamada de eixo da parábola e o ponto V, que é o ponto médio do segmento com extremidades em F e na interseção da diretriz com o eixo da parábola, será chamado de vértice. Este é o ponto da curva que está mais próximo da diretriz.

Demonstra-se por congruência de triângulos que se o ponto P pertence à parábola e P' é o seu simétrico em relação ao eixo, então $d(P',F) = d(P,F)$ e $d(P',d) = d(P,d)$. Logo P' também pertence à parábola. Isso significa a parábola possui um eixo de simetria.

Mostraremos agora que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola em $\mathbb{R}^2$ cujo foco é o ponto $F = (0, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

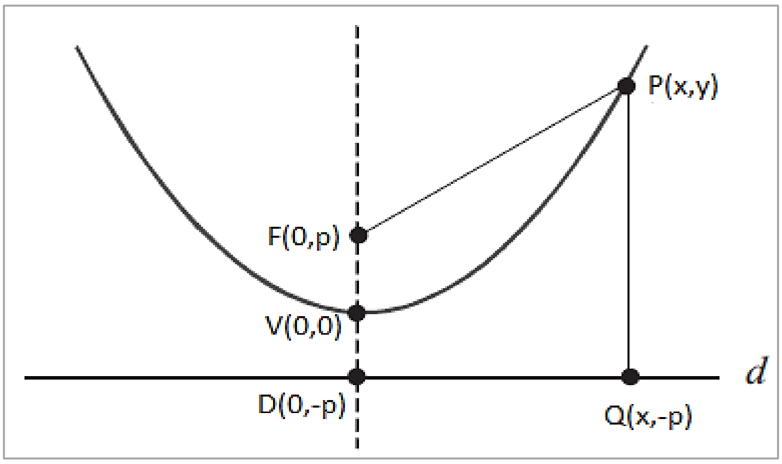
Consideremos o vértice V da parábola coincidindo com a origem do plano cartesiano e o foco sendo o ponto de coordenadas $(0,p)$, ou melhor: $V = (0,0)$ e $F = (0,p)$. Dessa forma, a diretriz será a reta $y = -p$.

Considere $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola. Como P é equidistante do foco F e da diretriz d, então

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p, \tag{2.3.14}$$

em que o primeiro membro representa a distância entre P e F, e o segundo membro, a distância entre P e a diretriz d. Veja a figura abaixo.

Figura 14 – Representação da distância de P a F e à diretriz d



Elevando ao quadrado os dois membros da equação (2.3.14), obtemos:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

o que resulta em:

$$4py = x^2,$$

ou ainda:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4p}.}$$

Assim, os pontos da parábola de foco $F(0, p)$ e diretriz d: $y = -p$ satisfazem a equação $y = \frac{x^2}{4p}$, ou seja, pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ com $a = \frac{1}{4p}$.

Mostraremos agora que vale também a recíproca, ou seja, que os pontos do gráfico da função $f(x) = ax^2$ pertencem à parábola de foco $F(0, \frac{1}{4p})$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

Seja $P(x, ax^2)$ um ponto do gráfico da função f. Calculando a distância entre P e F, temos:

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}}$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

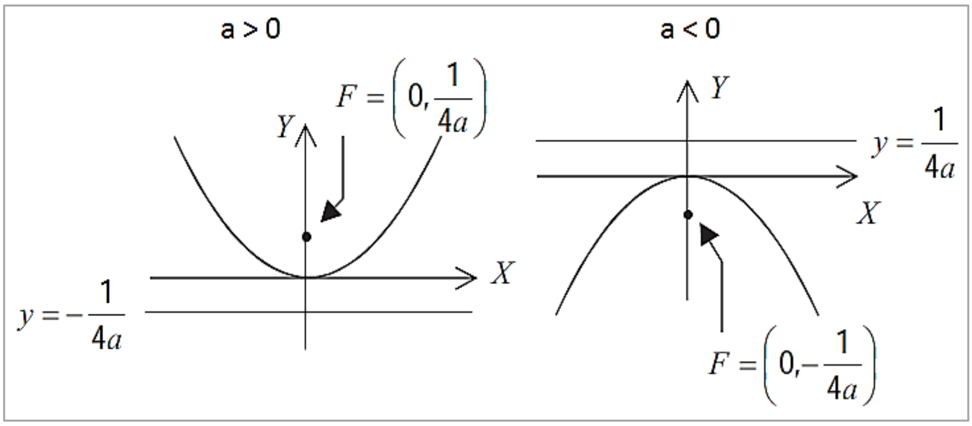
$$= \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right| = \left|ax^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right|.$$

que é a distância entre P e a diretriz d. Como essa igualdade é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$, então os pontos do gráfico $f(x) = ax^2$ coincidem com os da parábola de foco $F(0, \frac{1}{4p})$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

□

Assim, se $a > 0$, a parábola $f(x) = ax^2$ tem concavidade voltada para cima e seu vértice $V(0,0)$ é o ponto de menor ordenada (mínimo). Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo e seu vértice é o ponto de maior ordenada (máximo). Veja a figura abaixo.

Figura 15 – Concavidade da Parábola $f(x) = ax^2$



Fonte: LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

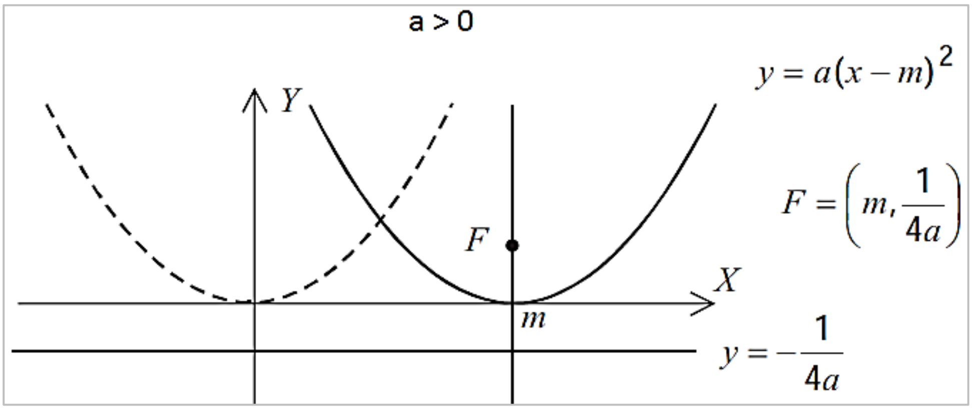
Conforme SOARES [18], veremos duas propriedades sobre translações que vão nos auxiliar na obtenção do gráfico da função quadrática em sua forma completa.

Propriedade 2.3.1 Seja uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + x_0, y)$, a qual leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = x_0$, então o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o horizontalmente x_0 unidades, para a esquerda ou para a direita, conforme $x_0 < 0$ ou $x_0 > 0$.

Propriedade 2.3.2 Seja uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + y_0)$, a qual leva o eixo horizontal $y = 0$ na reta $y = y_0$, então o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o verticalmente y_0 unidades abaixo ou acima, conforme $y_0 < 0$ ou $y_0 > 0$.

Agora, examinemos o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$, que também é uma parábola cujo foco é o ponto $F(m, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz d é a reta $y = -\frac{1}{4a}$. Para chegarmos a essa conclusão basta observar que o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ resulta daquele de $f'(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + m, y)$, que leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = m$. Veja o gráfico abaixo.

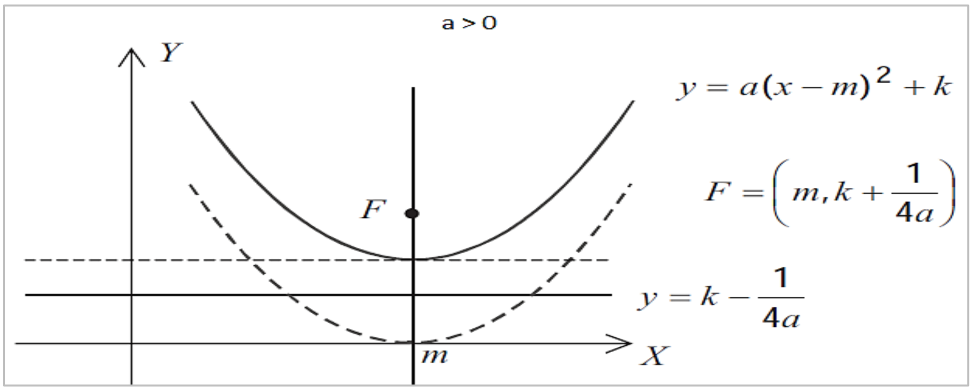
Figura 16– Translação Horizontal de $f(x) = ax^2$



Fonte: LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

Finalmente, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F(m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é d é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Figura 17 – Translação Vertical de $f(x) = a(x - m)^2$



Fonte: LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

De fato, basta aplicarmos a translação vertical $(x,y) \mapsto (x,y+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$, no gráfico da função $f'(x) = a(x-m)^2$, obtendo, assim, o gráfico de $(x) = a(x-m)^2 + k$.

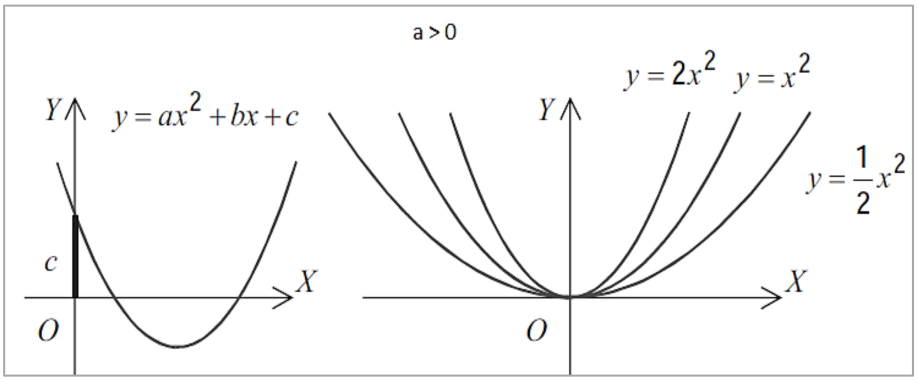
Como qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita sob a forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$, em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = f(m)$, então o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

□

Veremos agora o significado gráfico têm os coeficientes a, b, c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O valor de $c = f(0)$ é a abscissa do ponto em que a parábola $f(x)$ corta o eixo OY. O coeficiente a mede a maior ou menor abertura da parábola. De fato, suponhamos, por simplicidade, que $a > 0$. Então $a < a' \Rightarrow ax^2 < a'x^2$ para todo $x \neq 0$, logo a parábola $f'(x) = a'x^2$ situa-se no interior de $f(x) = ax^2$. Assim, quanto maior for a mais fechada será a parábola e vice-versa. Caso a e a' sejam negativos, o “maior” e “menor” devem ser tomados em valor absoluto.

Figura 18– Significado Gráfico dos Coeficientes a e c

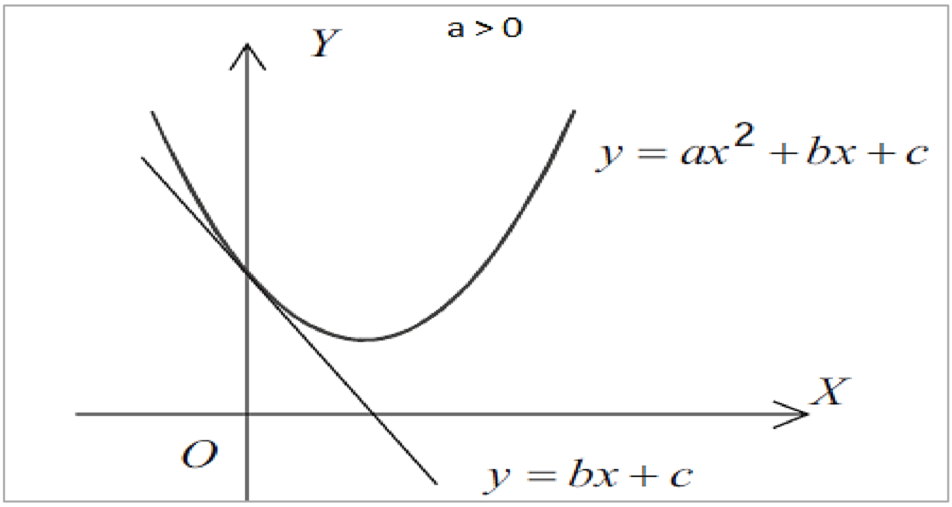


Fonte: LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

Seja P um ponto de uma parábola. Uma reta que passe por P determina dois semiplanos. Diz-se que essa reta é tangente à parábola no ponto P quando ela está completamente contida num desses semiplanos.

Sabemos que a reta que passa pelo ponto $P(0, c)$ e tem inclinação b é descrita pela equação $y = bx + c$. Os semiplanos determinados por essa reta são descritos pelas desigualdades $y \geq bx + c$ (semiplano superior) e $y \leq bx + c$ (semiplano inferior). Como os pontos (x, y) da parábola cumprem $y = ax^2 + bx + c$, então todos eles estão no semiplano superior da reta $y = bx + c$ quando $a > 0$ ou estão no semiplano inferior se $a < 0$. Logo, a reta $y = bx + c$, de inclinação b, é tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ no ponto $P(0, c)$. Em outras palavras, o coeficiente b é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto $P(0, c)$ (ver figura abaixo).

Figura 19 – Inclinação da Reta Tangente à Parábola $y = ax^2 + bx + c$ no ponto $P(0, c)$



Fonte: LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

Assim, podemos tirar conclusões importantes em relação aos zeros da função quadrática:

- Se $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$ e $\Delta > 0$ ou $a < 0$, $c < 0$, $b > 0$ e $\Delta > 0$ então temos dois zeros positivos, pois o gráfico intercepta o eixo X à direita da origem; caso $\Delta = 0$, temos apenas um zero positivo.
- $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$ e $\Delta > 0$ ou $a < 0$, $c < 0$, $b < 0$ e $\Delta > 0$ então temos dois zeros negativos, pois o gráfico intercepta o eixo X à esquerda da origem; caso $\Delta = 0$, temos apenas um zero negativo.

Portanto, se a e c possuem mesmo sinal, e se este for oposto ao sinal de b, então temos raízes (ou raiz) positivas; caso a, b e c possuem sinais iguais, temos raízes (ou raiz) negativas. Para os demais casos, temos raízes de sinais contrários ou nenhuma raiz. Os gráficos abaixo visualizam melhor essas conclusões.

Figura 20 – Zeros Positivos de Funções Quadráticas

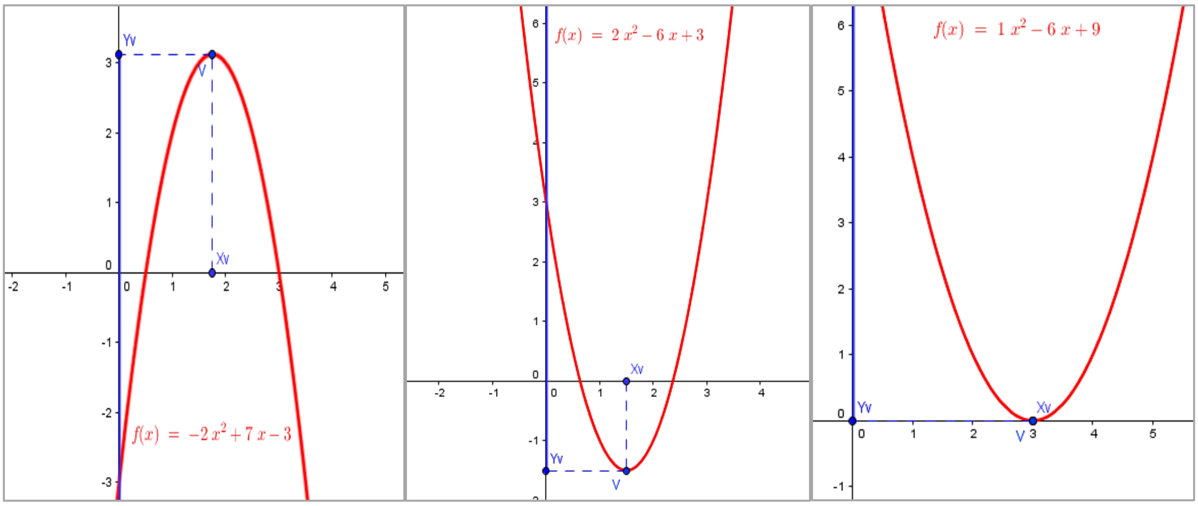
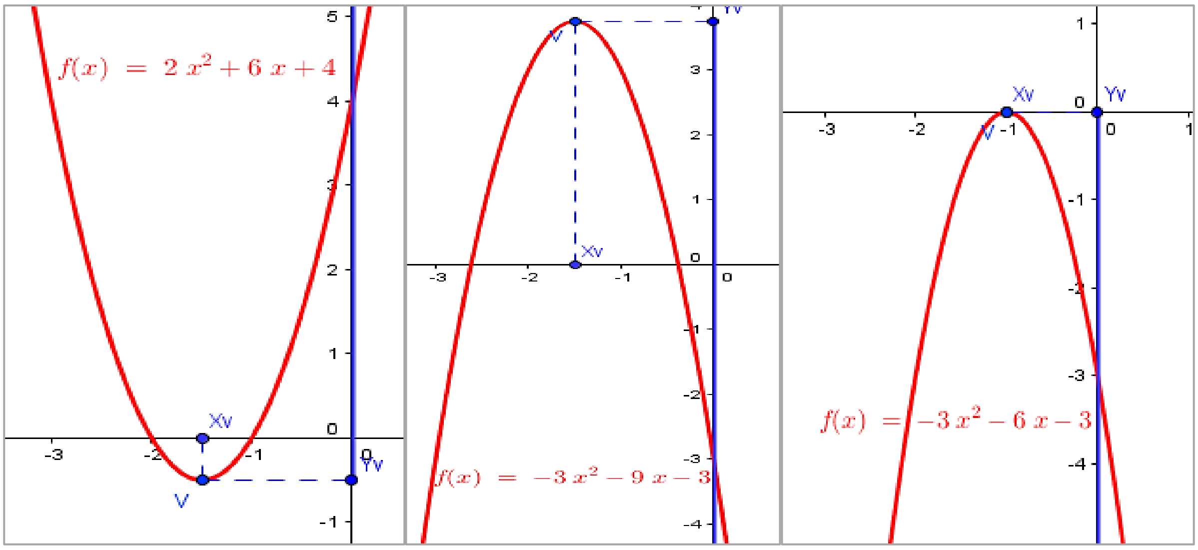


Figura 21 – Zeros Negativos de Funções Quadráticas

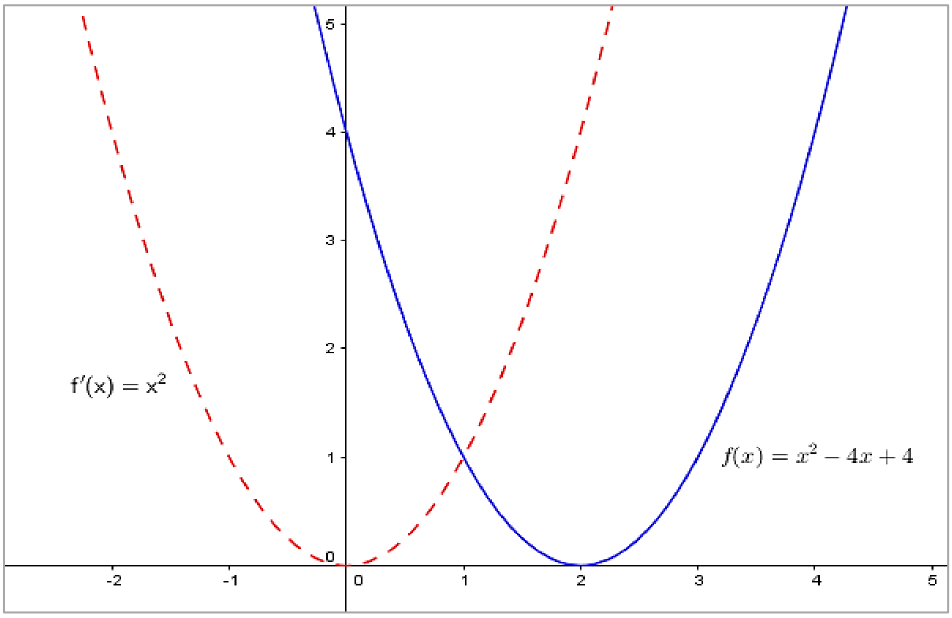


Utilizaremos essas conclusões na seção 2.4 quando apresentarmos métodos geométricos de resolução da equação quadrática.

Exemplo 2.3.15 Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Escrevendo a função $f(x)$ em sua forma canônica, obtemos $f(x) = (x-2)^2$. Aplicando a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+2, y)$ na função $f'(x) = x^2$ obtemos o gráfico da função $f(x) = (x-2)^2$.

Figura 22 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ por Translação



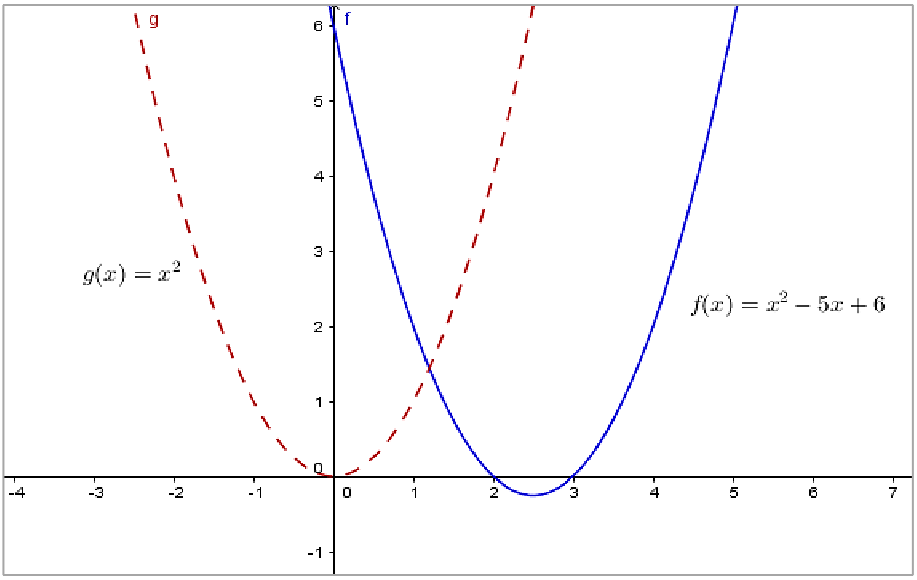
Observe que a reta $x = 2$ é o eixo de simetria da parábola. Logo adiante veremos com mais detalhes sobre eixo de simetria.

Depois de termos conhecido o gráfico de uma função quadrática (parábola), podemos extrair algumas informações sobre ele, como, por exemplo, o estudo dos zeros e do sinal da função. Na seção 2.3.2.6 trabalhamos a maneira algébrica; aqui, veremos geometricamente.

Em relação aos zeros da função quadrática, podemos tirar as seguintes conclusões:

- Se a função possui zeros diferentes ($\Delta > 0$), o gráfico toca o eixo das abscissas em dois pontos distintos. Assim, de acordo como no exemplo 2.3.10 item a) temos:

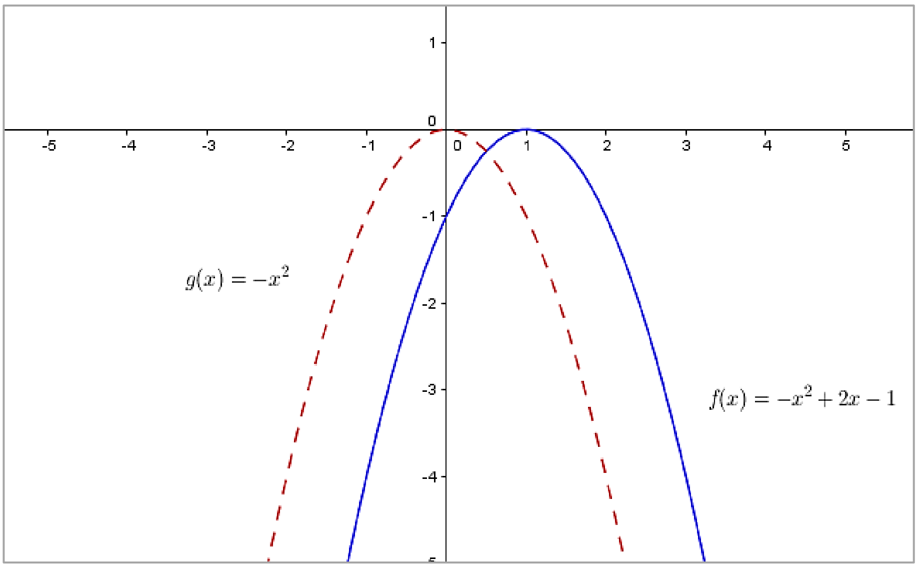
Figura 23– Zeros da Função $f(x) = x^2 - 5x + 6$



Observe que fizemos uma translação para obtermos o gráfico de $f(x)$. Os outros exemplos procedemos do mesmo modo.

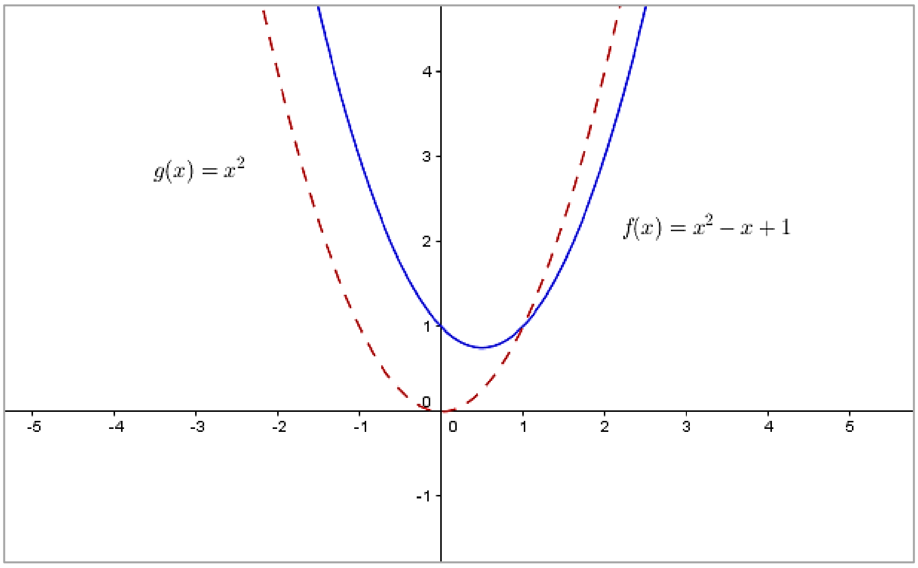
- Se a função possui zeros iguais ($\Delta = 0$), então o gráfico toca o eixo x num único ponto. Assim como no exemplo 2.3.10 item b) temos:

Figura 24 – Zeros da Função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$



- O gráfico não toca o eixo das abscissas quando a função não possui zeros reais ($\Delta < 0$). Veja o item c) do mesmo exemplo:

Figura 25 – Zeros da Função $f(x) = x^2 - x + 1$

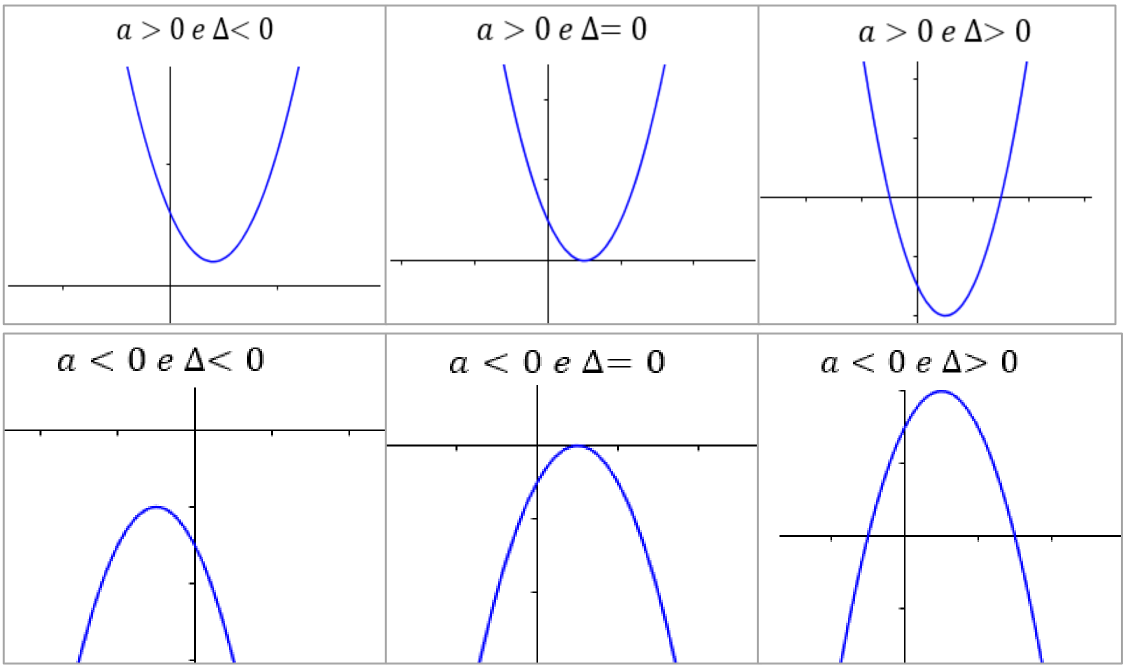


Já fizemos o estudo do sinal de uma função algebricamente a partir da forma fatorada. Faremos agora esse estudo observando o seu gráfico.

Quando se esboça o gráfico de uma função, temos alguns casos a considerar:

- Se $a > 0$, a função possui um valor mínimo e, portanto, a concavidade da parábola é voltada para cima. Caso $\Delta < 0$, a parábola não toca o eixo x e dessa forma a função só assume valores positivos $(f(x) > 0)$ para todo x real; caso $\Delta = 0$, a parábola toca no eixo x em apenas um ponto e, neste caso, a função se anula quando x for zero dessa função, e esta será positiva para qualquer outro valor. Por último, a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos quando $\Delta > 0$. Ora, como $\Delta > 0$, a função possui dois zeros reais distintos. Sejam α e β os zeros da função e considere $\alpha < \beta$; a função será positiva quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$.
- Se $a < 0$, f possui um valor máximo e, assim, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Se $\Delta < 0$, a parábola não toca o eixo x e, portanto, a função assume somente valores negativos para todo x real. Se $\Delta = 0$, a parábola toca no eixo x em apenas um ponto e, neste caso, a função é zero quando x é raiz da equação e f será negativa para outro valor de x. Por fim, caso $\Delta > 0$, a parábola toca o eixo x em dois pontos distintos. Da mesma forma que nem no primeiro caso, sejam α e β os zeros da função, com $\alpha < \beta$, então f será positiva quando $x < \alpha < \beta$ e será negativa quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$. Veja a figura abaixo para compreender melhor.

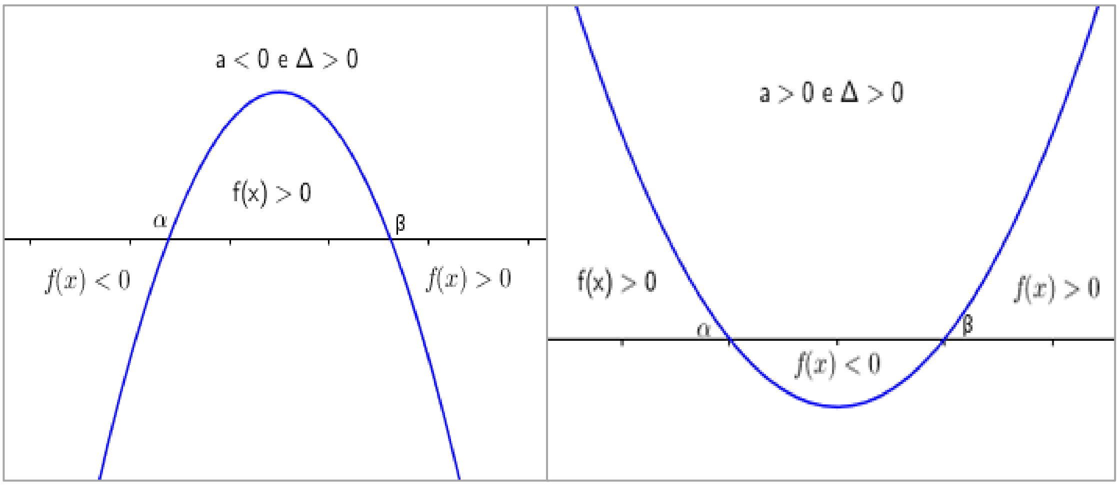
Figura 26 – Variação do Gráfico da Função Quadrática



□

O gráfico abaixo dar um entendimento melhor para a variação da função f quando o discriminante é positivo, variando apenas o valor de a.

Figura 27 – Sinal da Função Quadrática quando $\Delta > 0$

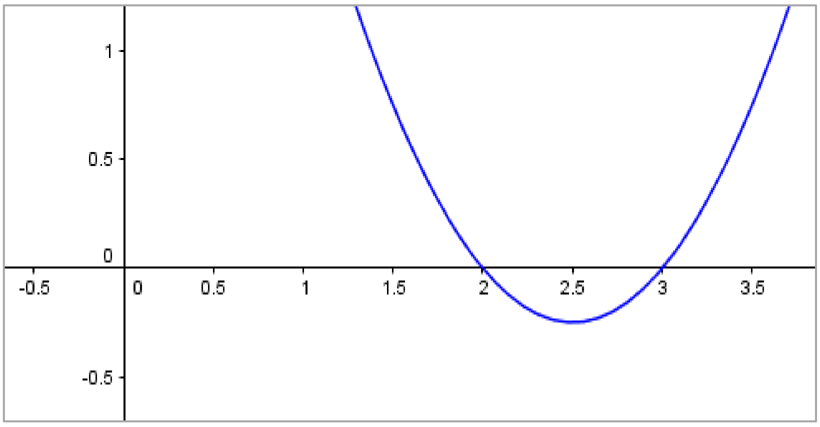


Exemplo 2.3.16 Estude os sinais das funções abaixo (exemplo 2.3.10).

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Escrevendo a função em sua forma canônica, temos: $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Com isso temos o esboço do gráfico abaixo.

Figura 28 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$

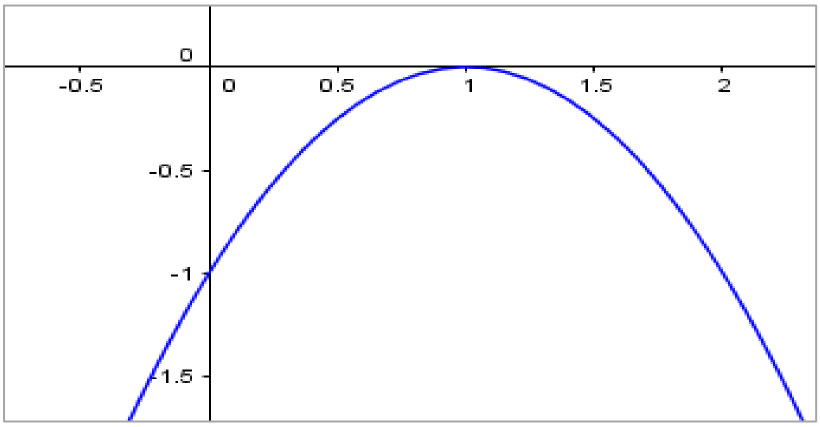


De acordo com o gráfico acima, para $2 < x < 3$, $f(x) < 0$ e para $x < 2$ ou $x > 3$, $f(x) > 0$.

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

A forma canônica de f é $f(x) = -(x-1)^2$. Assim, seu esboço está representado abaixo.

Figura 29 – Gráfico da Função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

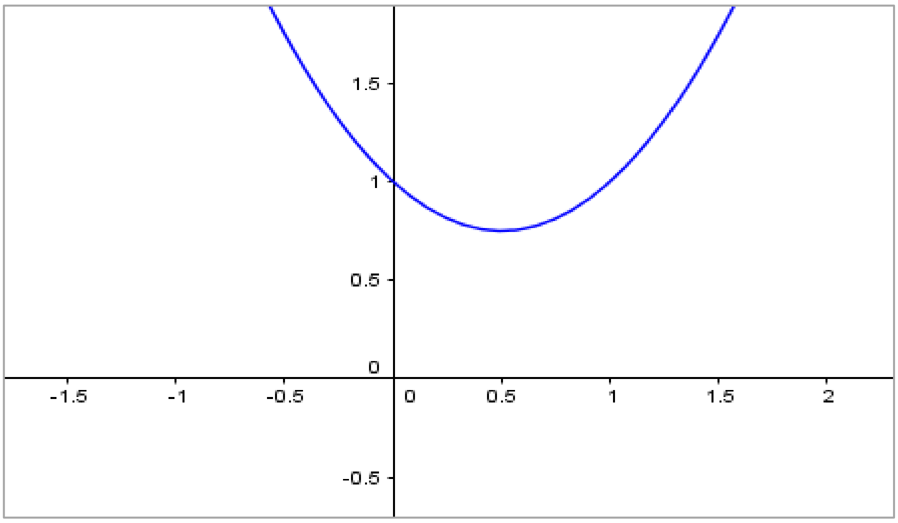


Para $x < 1$ ou $x > 1$, $f(x) < 0$; se $x = 1$, $f(x) = 0$.

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

Escrevendo em sua forma canônica, temos $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, e seu esboço está representado abaixo. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, ou seja, a função é sempre positiva para todo x real.

Figura 30 – Gráfico da Função $f(x) = x^2 - x + 1$



Observe que os gráficos dão uma visão notável sobre os zeros de uma função, bem como o estudo do sinal da mesma.

Proposição 2.3.4 Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com x real. Então $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação à reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ para todo x_1 e x_2 reais. Isto significa que $x = -\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola. [18]

Demonstração. Mostremos primeiro a ida. De fato, sejam x_1 e x_2 números reais com $x_1 \neq x_2$ e tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja,

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Agrupando os termos, temos:

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)] + b(x_1 - x_2) = 0.$$

Colocando o termo $(x_1 - x_2)$ em evidência, vem:

$$(x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b] = 0.$$

Como $x_1 \neq x_2$, então

$$a(x_1 + x_2) + b = 0.$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.}$$

Mostraremos agora que se $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, então $f(x_1) = f(x_2)$. De fato, já sabemos, visto anteriormente, que $f(x) = (x - x_0)^2 + y_0$, onde $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Assim:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left[x_1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]^2 + y_0 \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + y_0 \\ &= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + y_0 \\ &= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + y_0 \\ &= \left[x_2 - \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right]^2 + y_0 \\ &= f(x_2). \end{aligned}$$

Logo $f(x_1) = f(x_2)$.

□

Exemplo 2.3.17 As coordenadas do vértice de uma função quadrática f são $(5, -3)$ e um de seus zeros é 8. Qual o valor do outro zero dessa função?

Como a função possui a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria, então os seus zeros possuem a mesma distância para a coordenada x do vértice. Logo, se um dos zeros é 8, então o outro é 2.

□

2.3.5 Aplicações das Funções Afim e Quadrática

A função afim pode ser utilizada em muitos casos, tais como: diárias de hotéis, planos de saúde, planos com parcelamentos a longo prazo e suas alternativas, verificar lucro e prejuízo, verificar o valor máximo de determinada coisa, coisas assim que podem ser vantajosas se for observado bem, mas podem ser bem caras se mal observadas. A função afim também é aplicada à cinemática, economia, etc.

Por exemplo, conforme Vilches [19], na economia temos a **função oferta**. A oferta é a relação entre o preço de um bem e quantidade do mesmo que é oferecida pelos produtores. A oferta de um produto depende essencialmente da quantidade, do preço e do custo do produto, da tecnologia com que se produz o produto, dos concorrentes, etc. Assim, se denotarmos por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade do produto oferecido no mercado, então a função $p = f(x)$ é chamada função de oferta. Essa função define a relação existente entre o preço de mercado de um produto ou bem e a quantidade desse mesmo produto ou bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender, e o seu gráfico é chamado **curva de oferta**.

Uma curva de oferta típica tem a forma ascendente, pois quanto maior o preço unitário, maior o interesse dos empresários em fabricar o produto. O modelo mais simples da função oferta é o de função afim. Observa-se que quando o preço de um bem aumenta, a oferta também aumenta e decresce se o preço decresce. Assim, o modelo deve ter coeficiente angular não negativo, ou seja:

$$p = f(x) = ax + b, \ \ a \geq 0.$$

Para $a = 0$, significa que há um preço constante independente da oferta. E se o coeficiente angular não é definido (reta vertical), indica que a oferta é constante, independente do preço.

Exemplo 2.3.18 Quando o preço de mercado de certo produto atinge R$ 200,00 por unidade, a fábrica não produz este produto; quando o preço do produto aumenta R$ 10,00, a fábrica disponibiliza 250 unidades do produto no mercado. Ache a função de oferta se ela for afim.

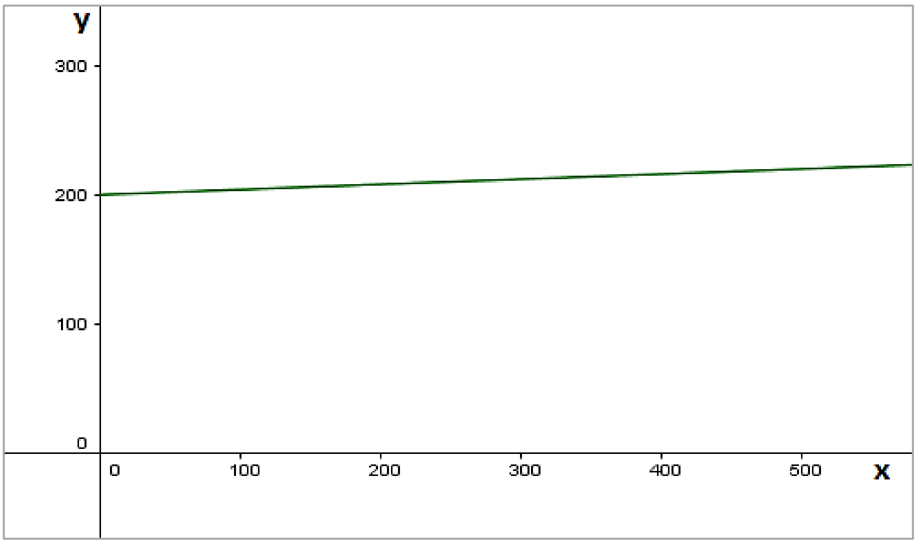
Como a função deve ser afim: $p = f(x) = ax + b$; para $x = 0$, temos $b = 200$ e $p = ax + 200$; por outro lado,

$$250a + 200 = 200 + 10 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1}{25} \Longrightarrow \boxed{p(x) = \frac{x}{25} + 200},$$

que é a curva de oferta, cujo gráfico está representado abaixo.

Figura 31 – Curva de Oferta



Observe que quando o valor a se aproxima de zero, temos um preço constante independente da oferta, a saber, $R\$ \ 200{,}00$.

□

Em relação à **função quadrática**, esta tem bastante aplicação em áreas como estatística, logística, engenharia, medicina, física, etc. Nos lançamentos de projéteis, essa função também aparece, como por exemplo: ao lançar um objeto no espaço (dardo, pedra, tiro de canhão) visando alcançar a maior distância possível, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos a resistência do ar desprezível. Em economia, o gráfico originado do estudo desses investimentos chama-se curva de possibilidade de produção, que pode ser aproximada por uma função quadrática. Por meio do valor máximo da função quadrática, podemos obter o lucro máximo de uma empresa, usando, para isso, a função receita.

A parábola (gráfico da função quadrática) é uma das figuras mais importantes da Matemática e pode ser encontrada em muitas estruturas, físicas ou teóricas no nosso dia-a-dia, tais como: as antenas parabólicas, os fogões solares, os estudos de balística[4], etc.

□

2.4 Resolução Geométrica das Equações de 1º Grau e Quadrática

Nas seções anteriores conhecemos a maneira algébrica de encontrar os zeros das funções afins e quadráticas. Agora, vamos encontrar seus zeros geometricamente.

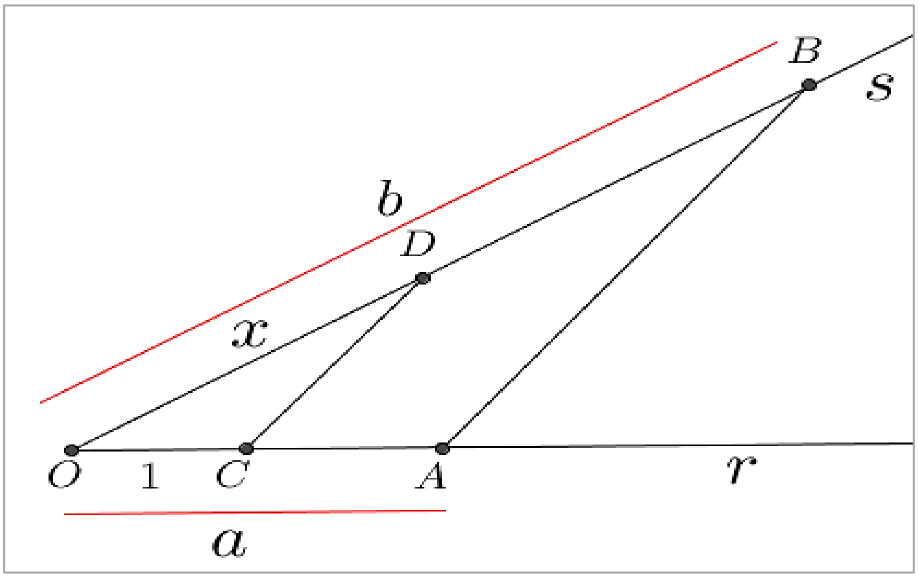
2.4.1 Resolução Geométrica da Equação de 1º Grau

Conforme Ferreira [25], a equação do 1º grau do tipo $ax + b = 0$, podem ser resolvidas geometricamente e faz-se referência à semelhança de triângulos, utilizando o teorema do matemático grego Tales de Mileto $(640 - 550\, a.C)$, o qual fala sobre proporcionalidade de segmentos paralelos cortados por transversais. Geometricamente, x é o quarto proporcional para os três segmentos de comprimento a, b e 1.

Considere duas retas r e s partindo da origem. Marcamos sobre r o ponto A e na outra, o B, de modo que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$; depois, ligamos os pontos A e B. Em seguida, sobre a reta r marcamos o ponto C, de modo que $\overline{0C} = 1$ unidade. Logo após, façamos uma reta passando por C e que seja paralela ao segmento $\overline{AB}$. A interseção dessa reta com s é o ponto D. O segmento $x = \overline{OD}$ é a raiz da equação do 1º grau procurada. Todo esse procedimento podemos fazer por meio de régua e compasso.

[4] Ciência que se ocupa do estudo do movimento de projéteis.

Figura 32 – Resolução Geométrica da Equação do 1º grau



De fato, como $\overline{AB}$ é paralela a $\overline{CD}$, então os triângulos ΔOAB e ΔOCD são semelhantes. Utilizando o teorema de Tales sobre proporcionalidade, temos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = \frac{b}{a}.}$$

Com base nisso, temos as seguintes observações referente à equação $ax + b = 0$:

- Os segmentos $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$ são dados em módulo por tratar-se de medidas;
- Se a e b tiverem o mesmo sinal, então temos uma raiz negativa;
- Caso a e b tenham sinais diferentes, temos uma raiz positiva.

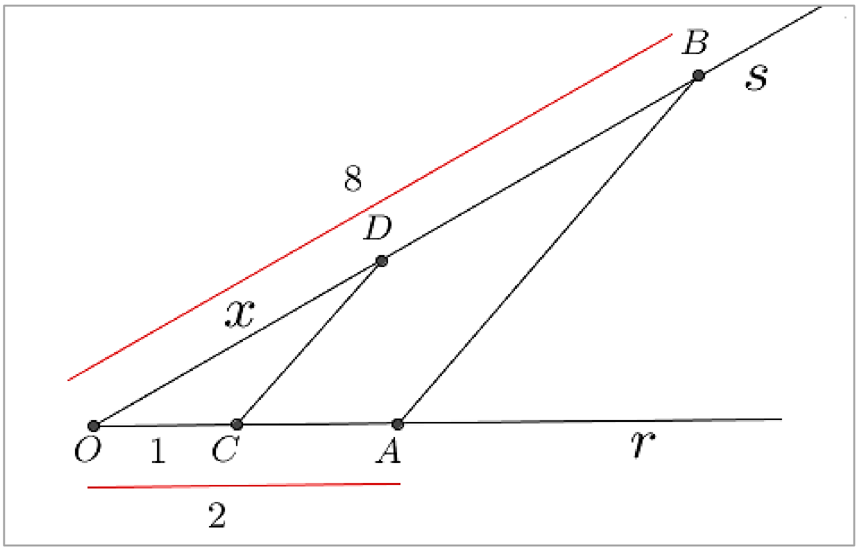
Quando o aluno aprende a resolução de uma equação do 1º grau , ele consegue ter uma aprendizagem melhor de conteúdos como razão, proporção, regra de três simples e composta, como também na resolução de equações incompletas do 2º grau, o que são resolvidas por fatoração.

Exemplo 2.4.1 Resolva geometricamente as equações do 1º grau abaixo:

a) $2x - 8 = 0$;

Como a e b têm sinais diferentes, então temos uma raiz positiva. Por meio de régua e compasso, montamos o triângulo a partir dos coeficientes $a = 2$ e $b = 8$, tomados em módulo.

Figura 33 – Resolução Geométrica da Equação $2x - 8 = 0$



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{8}{2},$$

o que resulta em $x = 4$.

b) $-2x - 8 = 0$

Como a e b têm sinais iguais, então temos uma raiz negativa. Tomando, em módulo, $a = 2$ e $b = 8$, temos a mesma figura acima, construída por régua e compasso. Assim, $x = 4$. Como a raiz tem que ser negativa, então na verdade tomamos $x = -4$.

□

2.4.2 Resolução Geométrica da Equação Quadrática

Na seção 2.3.2 vimos vários métodos algébricos de resolver uma equação quadrática; nesta, conheceremos métodos geométricos bastante instigante e belos.

2.4.2.1 Régua e Compasso

De acordo com o artigo de Tunala [11], por meio de régua e compasso vamos determinar as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$. Observe que $a = 1$; caso contrário, basta dividir toda a equação por a. Supondo que $c \neq 0$, pois caso contrário teríamos sempre as raízes 0 e $-b$, temos dois casos a considerar:

1º caso: $c > 0$

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 têm o mesmo sinal e

$$\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |b| \\ |x_1| \cdot |x_2| = c \end{cases}.$$

De fato,

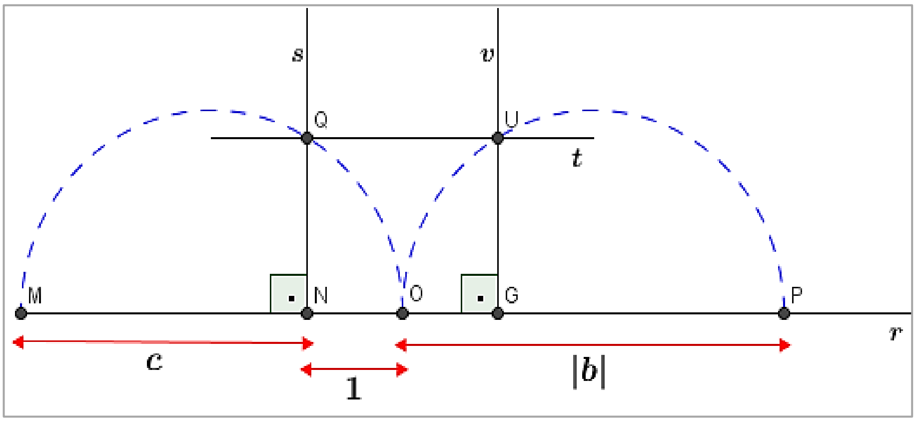
i) Se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 = -b > 0 \Rightarrow b < 0$. Logo, $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b|$.

ii) Se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 = -b < 0 \Rightarrow b > 0$. Logo, $|x_1 + x_2| = -x_1 + -x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = b = |b|$.

Portanto, o problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja c.

Construção

Figura 34 – Resolução Geométrica da Equação $x^2 + bx + c = 0$, com $c > 0$



Procedimentos Geométricos

1. Tracemos uma reta r e, sobre ela, marquemos os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NO}$ e $\overline{OP}$ de comprimentos, respectivamente, c, 1 e $|b|$;
2. A seguir, tracemos duas semicircunferências de diâmetros $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$;
3. Por N levantemos a perpendicular s à reta r, determinando Q na semicircunferência de diâmetro $\overline{MO}$;

4. Por Q tracemos a reta t, paralela a r, determinando U na semicircunferência de diâmetro $\overline{OP}$;
5. Por U, tracemos a reta v, perpendicular a r, determinando G em r.

Os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

De fato, $\overline{GU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$ e $\overline{GU}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$. Temos $\overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$ e, além disso, por construção, $|b| = \overline{OG} + \overline{GP}$. Assim, $\overline{OG}$ e GP são dois segmentos cuja soma é $|b|$ e cujo produto é c. Vale ressaltar as seguintes considerações:

- Se $b > 0$, então as raízes são negativas, ou seja, $x_1 = -\overline{OG}$ e $x_2 = -\overline{GP}$;
- Se $b < 0$, então as raízes são positivas, a saber, $x_1 = \overline{OG}$ e $x_2 = \overline{GP}$.

Em relação à ambas raízes positivas ou negativas, essas conclusões foram explicados com mais vigor na seção 2.3.4, quando trabalhamos gráfico da função quadrática.

OBS.: Se a reta t não interceptar a semicircunferência de diâmetro $\overline{OP}$, isto é, se $\sqrt{c} < \frac{|b|}{2}$, as raízes são imaginárias ($\Delta < 0$) e não podemos determina-las pela construção, pois a mesma é para resolver a equação no conjunto dos reais. O mesmo ocorre, em particular, no caso degenerado $b = 0$ (com $c > 0$).

2º caso: $c < 0$

Neste caso, as raízes têm sinais contrários. Supondo $|x_1| > |x_2|$, devemos ter:

$$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = |b| \\ |x_1| \cdot |x_2| = |c| \end{cases}.$$

De fato,

i) Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 = -b > 0 \Rightarrow b < 0$. Logo, $|x_1| - |x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b|$;

ii) Se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 = -b < 0 \Rightarrow b > 0$. Logo, $|x_1| - |x_2| = -x_1 + -x_2 = -(x_1 + x_2) - (-b) = b = |b|$.

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta, cuja diferença seja $|b|$ e cujo produto seja $|c|$.

Procedimentos Geométricos

Da mesma forma como no 1º caso, determinaremos os pontos M, N, O e P numa reta r e o ponto Q. Como antes, temos $\overline{NQ} = \sqrt{c}$.

1. Translademos $\overline{NQ}$ numa direção paralela a s, obtendo o segmento $\overline{OU}$;
2. Liguemos U ao centro I da circunferência, determinando o diâmetro $\overline{GH}$;

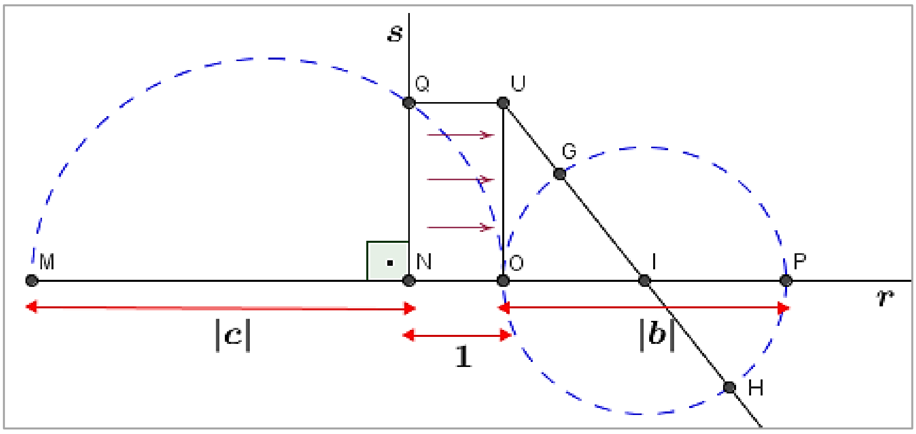
Os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ representam os valores absolutos das raízes da equação.

De fato, $\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = |b|$ (diâmetro). Por outro lado, por ser $\overline{OU}$ tangente e $\overline{UH}$ secante ao círculo de diâmetro $\overline{OP}$, temos:

$$\overline{OU} = \overline{NQ} = \sqrt{c} \Rightarrow$$
$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = |c| \Rightarrow$$
$$\overline{OU}^2 = \overline{UH} \cdot \overline{UG} \Rightarrow$$
$$|c| = \overline{UH} \cdot \overline{UG}.$$

Construção

Figura 35 – Resolução Geométrica da Equação $x^2 + bx + c = 0$, com $c < 0$

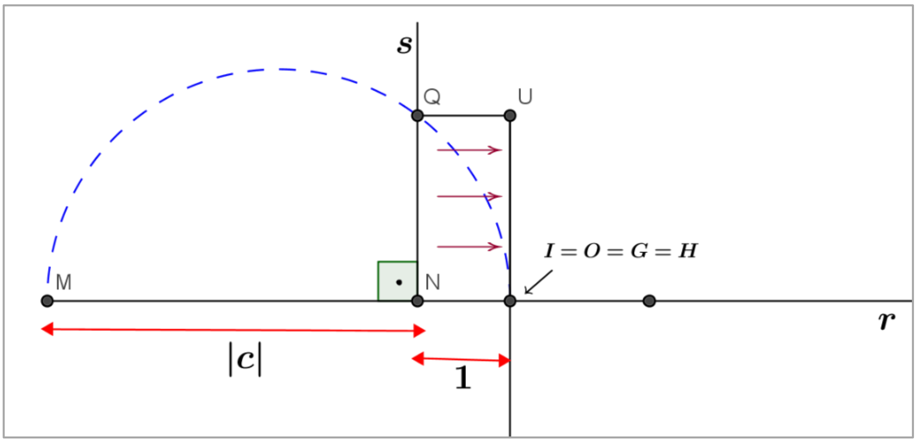


Então $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são dois segmentos cuja diferença é $|b|$ e cujo produto é $|c|$. Lembrando as considerações abaixo:

- Se $b > 0$, então $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$ são as raízes da equações;
- Se $b < 0$, então $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$ são as raízes da equações.

OBS.: Neste caso, o problema sempre tem solução. Se $b = 0$, temos o caso degenerado em que $I = O = G = H$ (o raio da circunferência de centro I é zero) e as raízes são $\overline{UH} = \overline{UO}$ e $-\overline{UG} = -\overline{UO}$.

Figura 36– Resolução Geométrica da Equação $x^2 + bx + c = 0$, com $c < 0$ e $b = 0$

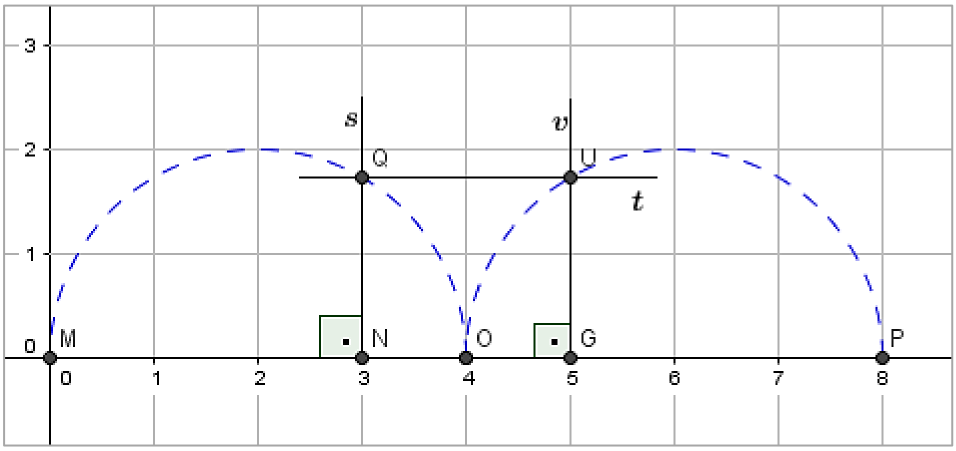


Exemplo 2.4.2 Calcule, por meio de régua e compasso as raízes de cada equação quadrática abaixo:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

Como $c > 0$, então fazendo os mesmos procedimentos geométricos do 1º caso, temos a figura abaixo.

Figura 37 – Resolução Geométrica da Equação $x^2 - 4x + 3 = 0$



Vemos claramente que:

$$\overline{GU} = \overline{OG} \cdot \overline{GP} = 3 \cdot 1 = 3 \; e$$

$$\overline{OG} + \overline{GP} = 4.$$

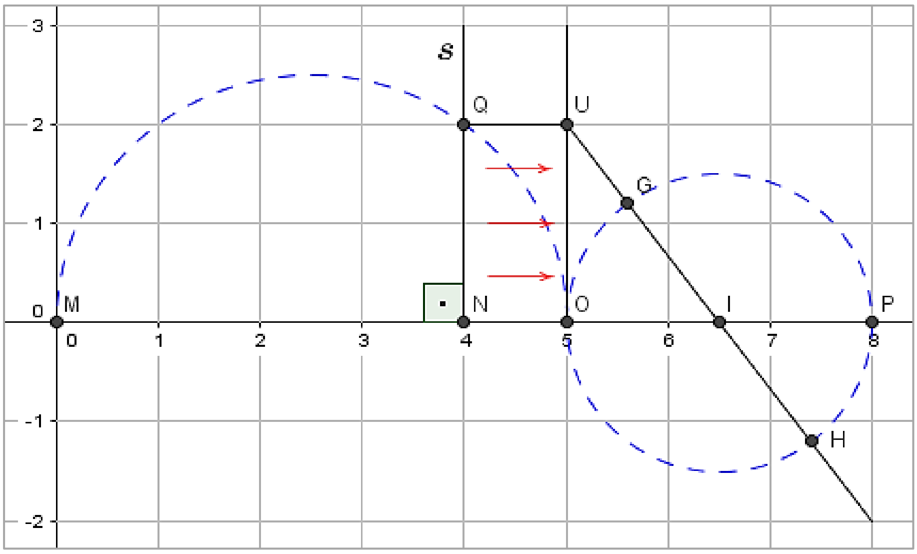
Assim, devemos determinar dois números cuja soma é 4 e seu produto é 3, considerando esses valores já em módulos. Como $c > 0$ e $b < 0$, então temos duas raízes positivas, a saber:

$$x_1 = \overline{OG} = 1 \ \ e \ \ x_2 = \overline{GP} = 3.$$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

Como $c < 0$, então fazendo os mesmos procedimentos geométricos do 2º caso, temos:

Figura 38 – Resolução Geométrica da Equação $x^2 - 3x - 4 = 0$



Temos que:

$$\overline{OU} = \overline{NQ} \Rightarrow$$

$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NO} = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow$$

$$\overline{OU}^2 = 4.$$

Como $\overline{OU}$ é tangente e $\overline{UH}$ é secante à circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, temos que:

$$\overline{OU}^2 = \overline{UH} \cdot \overline{UG} \Rightarrow$$

$$\overline{UH} \cdot \overline{UG} = 4.$$

Temos também que:

$$\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = 3.$$

Assim, $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são dois segmentos cuja diferença é 3 e seu produto é 4, dados esses valores já em módulos.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo UOI, temos:

$$\overline{UI}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{OI}^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\overline{UI}^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\overline{UI} = \frac{5}{2}.$$

Assim,

$$\overline{UG} = \overline{UI} - \overline{GI} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$\overline{UG} = 1 \ \ e \ \ \overline{UH} = \overline{UG} + \overline{GH} = 1 + 3 = 4.$$

Portanto, como $c < 0$, então uma raiz é positiva e a outra, negativa. Como a soma de suas duas raízes é o oposto do coeficiente b, então $x_1 = -\overline{UG} = -1$ e $x_2 = \overline{UH} = 4$.

□

2.4.2.2 Método de Completar Quadrado de Al-Khwarizmi

Este método geométrico é utilizado para achar a solução das equações:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + q = px,$$

com $p, q > 0$, já mencionadas na seção 2.3.

1º caso: $x^2 + px = q$

De acordo com Pontes [26], consiste em pensar na quantidade $x^2 + px$ como sendo uma área, sendo $\boldsymbol{x^2}$ um quadrado de lado x e $\boldsymbol{px}$ um retângulo de lados de comprimento p e largura x. Assim, constrói-se uma cruz formada pelo quadrado de lado x e dividindo o retângulo $\boldsymbol{px}$ por 4, obtemos quatro retângulos de lados $\frac{p}{4}$ e x. A área da cruz é exatamente $x^2 + px$, que é igual a q. Logo, completa-se essa cruz com os quatro quadrados, cuja área de cada um vale $\frac{p^2}{16}$,obtendo um quadrado maior de área $q + 4 \cdot \frac{p^{\,2}}{16} = q + \frac{p^2}{4}$. Logo seu lado mede $\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$. Assim,

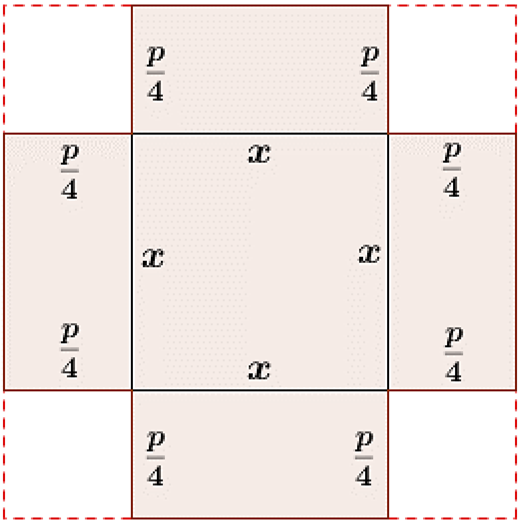
$$\frac{p}{4} + x + \frac{p}{4} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \Longrightarrow$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.}$$

.

Figura 39 – Construção de Al-Khwarizmi



□

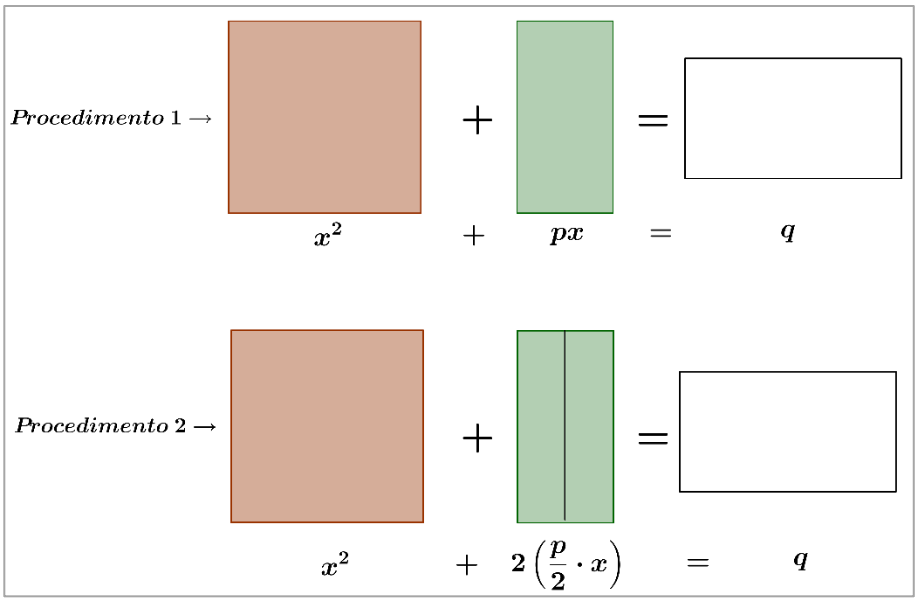
Uma descrição de uma variação do método de Al-Khwarizmi é dado abaixo por meio de 4 procedimentos como na figura abaixo. Na seção 3 exploraremos esse método usando um ambiente dinâmico.

Procedimento 1: Escreve-se a equação $x^2 + px = q$ usando figuras. O quadrado e o primeiro retângulo têm altura $\boldsymbol{x}$; suas larguras são, respectivamente, $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{p}$. O retângulo menor à direita tem área $\boldsymbol{q}$.

Procedimento 2: Divide-se o primeiro retângulo em duas partes iguais, sendo o corte paralelo a sua altura, obtendo imagem da seguinte equação:

$$x^2 + 2\left(\frac{p}{2} \cdot x\right) = q.$$

Figura 40 – Método de Completar Quadrado de Al-Khwarizmi (Procedimentos 1 e 2)



Procedimento 3: Arruma-se as duas novas partes e gruda-se nas bordas do quadrado.

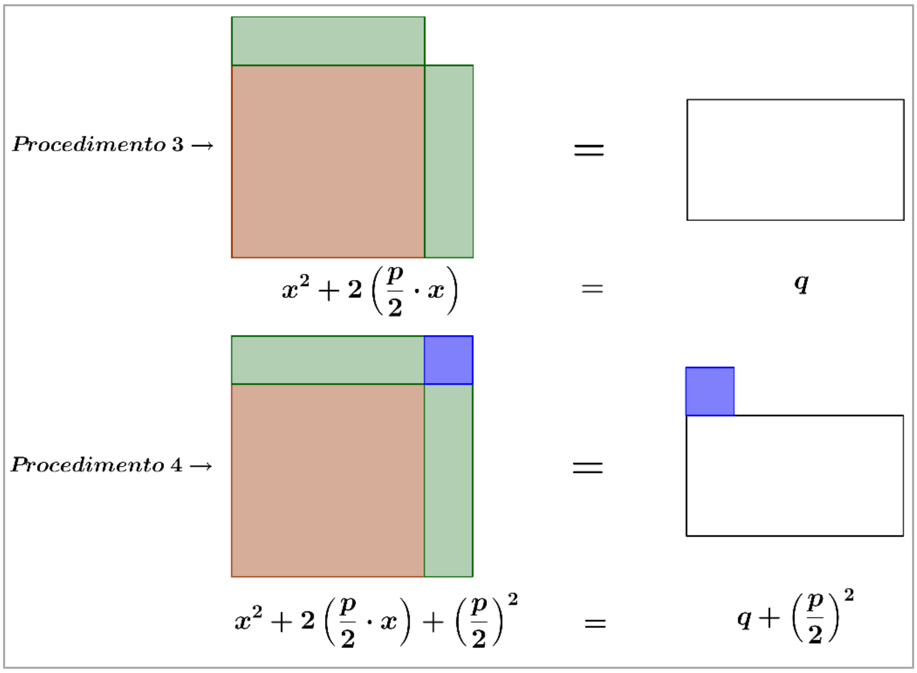
Procedimento 4: Adiciona-se o pequeno quadrado azul, cuja área é $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, ao desenho da esquerda, obtendo-se um quadrado maior de área $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Assim, seu lado mede $\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$.

Como o termo da esquerda é um quadrado de lado $x + \frac{p}{2}$, então podemos escrever:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.}$$

Figura 41 – Método de Completar Quadrado de Al-Khwarizmi (Procedimentos 3 e 4)

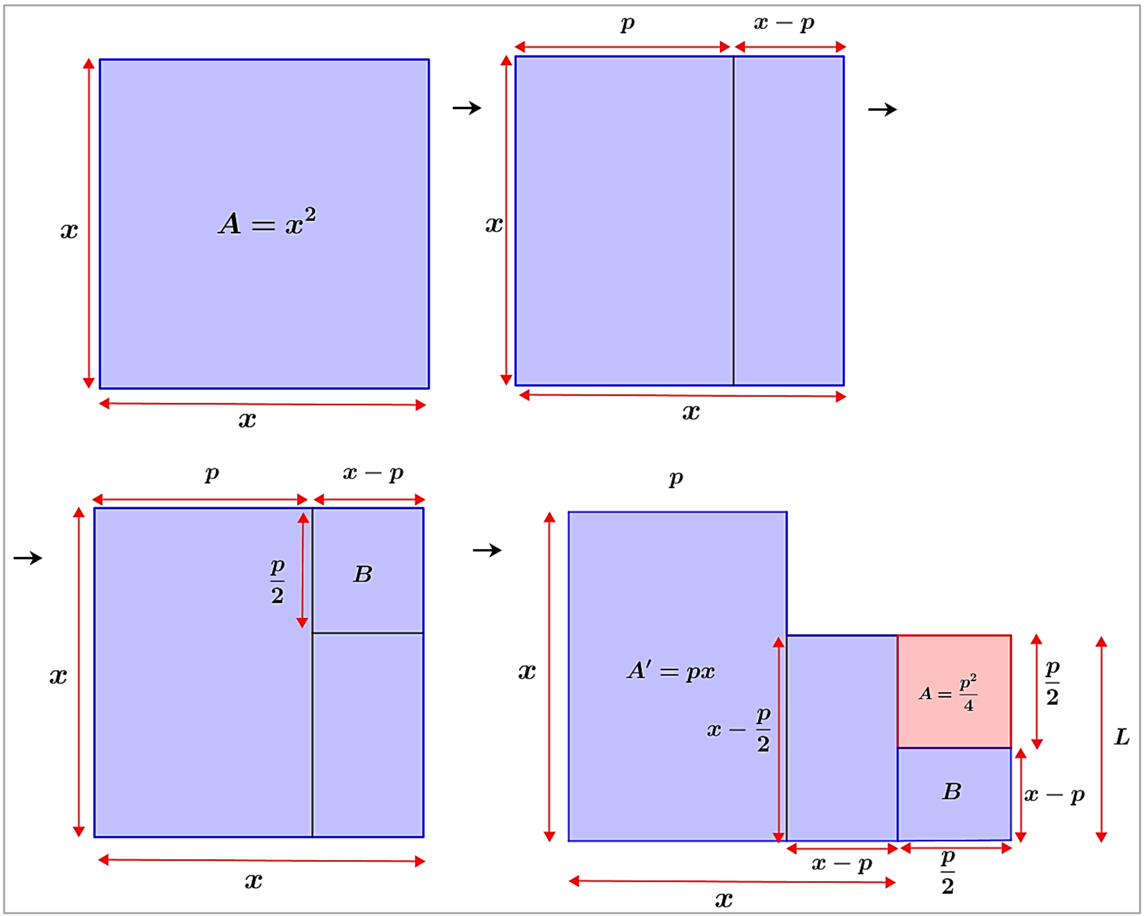


2º caso: $x^2 = px + q$

Consiste em pensar na quantidade x^2 como sendo uma área. Assim, divide-se essa área em dois retângulos: um com medidas p e x e o outro medindo x e $x - p$. A seguir, divide-se este último retângulo, obtendo uma figura B cujas medidas são $x - p$ e $\frac{p}{2}$. Em seguida, transladamos a figura B e, acima dela, construímos um quadrado de lado $\frac{p}{2}$.

A figura abaixo explica o passo-a-passo para resolver a equação acima.

Figura 42 – Construção Geométrica de $x^2 = px + q$



Como $x^2 = px + q$, então $px + q$ representa a parte azul da figura. Assim, somando $\frac{p^2}{4}$ (quadrado vermelho) a q, obtemos a área de um quadrado de lado L, cuja medida é:

$$L = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Como,

$$x - \frac{p}{2} = L \Rightarrow$$

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \Rightarrow$$

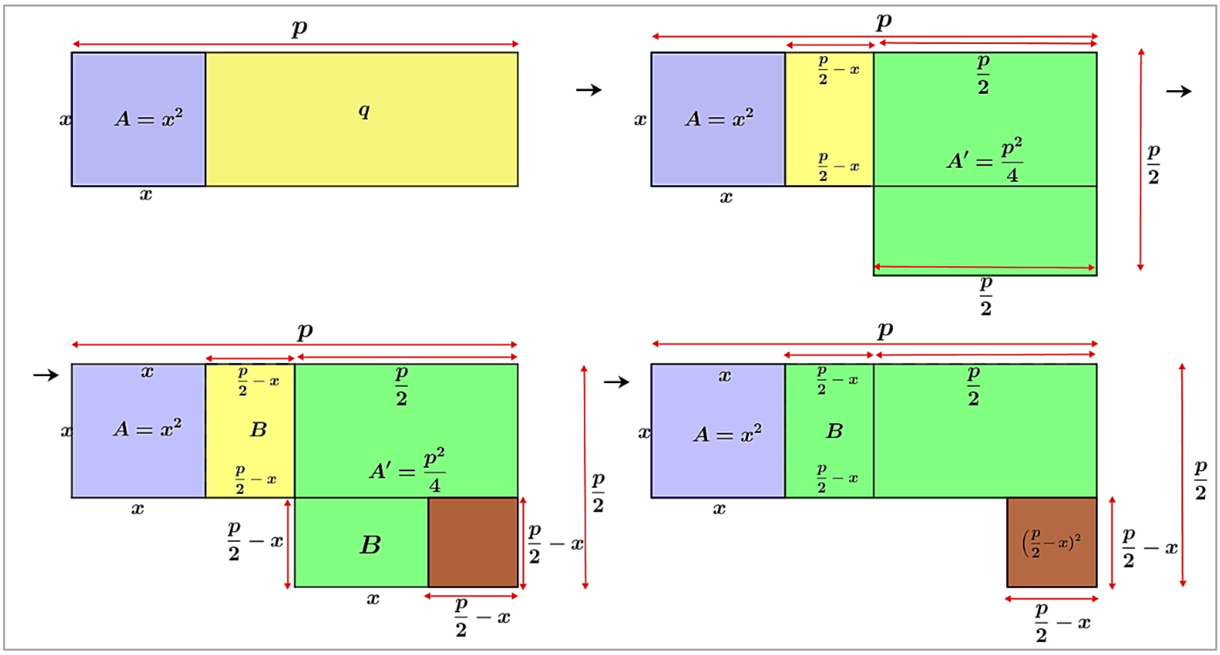
$$\boxed{x = \frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.}$$

Observação 1: Como estamos trabalhando com áreas, não faz sentido a raiz negativa.

3º caso: $x^2 + q = px$

Pensamos na quantidade $x^2 + q$ como sendo uma área. Depois, divide-se essa área em um quadrado de lado x e um retângulo cujas medidas são x e $p - x$. Construímos sobre esse retângulo um quadrado de lado $\frac{p}{2}$ (figura verde) e no próprio quadrado, construímos um quadrado menor de lado $\frac{p}{2} - x$ (figura marron). Por fim, fazemos uma translação da figura B. A figura abaixo mostra o passo-a-passo da resolução da equação acima.

Figura 43 – Construção Geométrica de $x^2 + q = px$



Como q representa a parte verde, então subtraindo da área do quadrado de lado $\frac{p}{2}$, (cujo valor é $\frac{p^2}{4}$) a área q, obteremos a área do quadrado de lado $\frac{p}{2} - x$. Assim,

$$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \Rightarrow$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Al – Khwarizmi partiu do princípio que $x < \frac{p}{2}$. No caso contrário, existe uma outra solução. Ele simplesmente dizia: “Se quiseres outra solução, em vez de subtrair, soma”. Porém, o matemático Ibn Tark realizou a demonstração geométrica para o caso $x > \frac{p}{2}$.

Observe também que a equação $x^2 + q = px$ é equivalente a $x^2 - px + q = 0$. Como o sinal de q (positivo) é oposto ao de p (negativo), então pela seção 2.3.4 temos duas raízes positivas.

Portando, o terceiro é o único que terá duas raízes positivas, obtidas pela fórmula:

$$\boxed{x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.}$$

□

Exemplo 2.4.4 Considere a equação $x^2 + 6 = 5x$. Como ela é do 3º tipo, então existem duas raízes positivas, a saber: $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Observação: O 2º e 3º casos foram generalizados e adaptados de Neves [27].

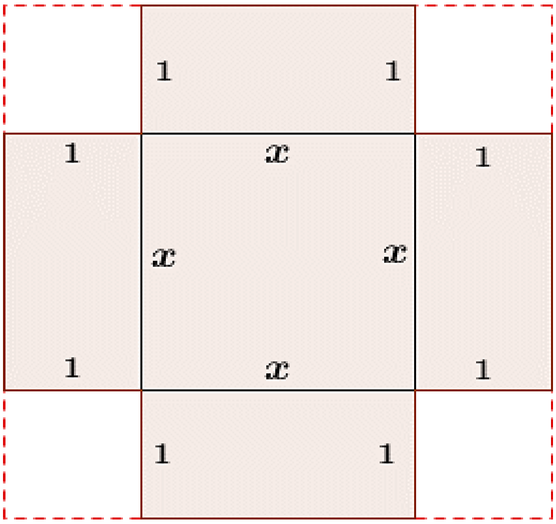
Apesar de muito interessante, esse método possui a desvantagem de não se obter soluções negativas da equação. Como x representa a medida do lado de um quadrado, x sempre assumirá o valor positivo. Porém, Al-Khwarizmi não percebeu isso porque na sua época ainda não eram conhecidos os números negativos.

Mesmo assim, este método deve ser compartilhado com os alunos, pois permite uma visão diferente da habitual com relação à equação quadrática, uma abordagem geométrica que, em alguns casos, pode facilitar o entendimento e amplia um pouco o conhecimento histórico, sendo a parte histórica essencial na apresentação do conteúdo para os alunos. E mais, o conceito de completar quadrados se torna algo mais visível e, portanto, mais fácil de ser compreendido.

Exemplo 2.4.5 Resolva geometricamente a equação quadrática $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Como $x^2 + 4x - 5 = 0$ é equivalente à $x^2 + 4x = 5$, então esta equação recai no 1º caso.

Figura 88 – Construção Geométrica de $x^2 + 4x = 5$



Constrói-se uma cruz formada pelo quadrado de lado x e por quatro retângulos de lados 1 e x, sendo esses retângulos obtidos da divisão de $4x$ por 4. A área formada por esse quadrado e pelos quatro retângulos será $x^2 + 4x$, que é igual a 5. Para completar o quadrado, adicionamos quatro quadradinhos de área 1 a essa cruz, obtendo um quadrado maior de área $5 + 4 = 9$. Assim, o lado desse quadrado mede $\sqrt{9} = 3$.

Como $x + 2 = 3$, então $x = 1$ é a solução da equação inicial.

□

2.4.2.3 Método de Descartes

No livro "La Géométrie de René Descartes $(1596 - 1650)$ é descrito um método geométrico para a resolução da equação do 2º grau.

Este método geométrico resolve equações do tipo $x^2 = bx + c$, $x^2 + bx = c$ e $x^2 + c = bx$, sempre com b e c positivos. Conforme Pontes [26], temos a resolução abaixo desses três casos.

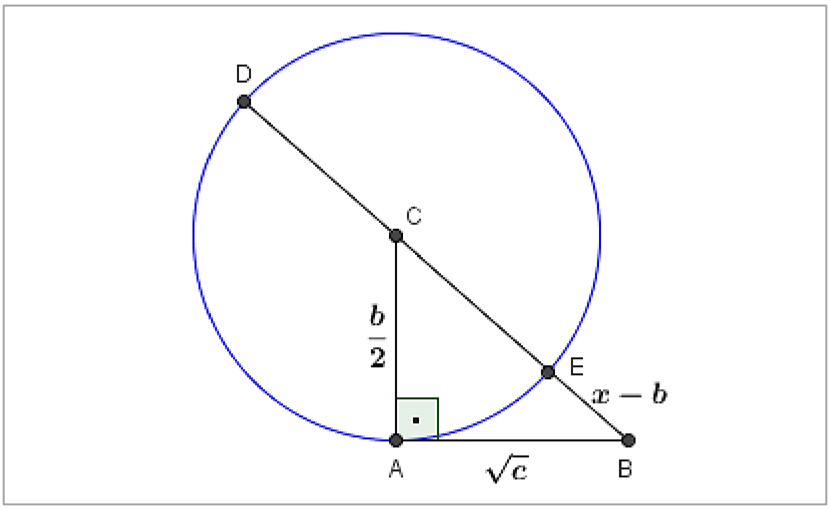
1º caso: $x^2 = bx + c$

Com o uso de régua e compasso, a resolução da $x^2 = bx + c$ segue os seguintes passos:

1. Traçar um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\sqrt{c}$;

2. Traçar uma perpendicular a $\overline{AB}$ passando por A e nessa perpendicular toma-se um ponto C, sendo $\overline{AC} = \frac{b}{2}$;
3. Construir uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$;
4. Construir uma reta que passa por B e C, cruzando a circunferência nos pontos E e D, com $\overline{BD} = x$. Veja a figura abaixo.

Figura 45 – Construção Geométrica de Descartes ($x^2 = bx + c$)



De fato, como $\overline{BD} = x$, então $\overline{BE} = x - b$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{b}{2} + (x - b)\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c \Rightarrow$$

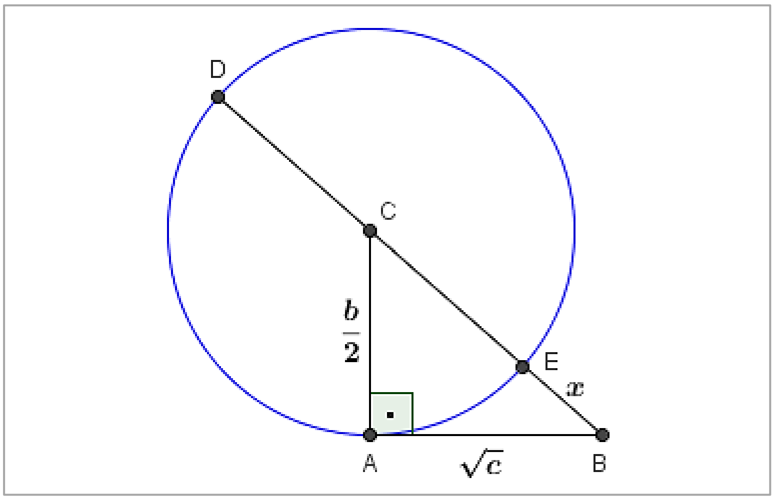
$$\boxed{x^2 = bx + c.}$$

Observação: Os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$ fornecem os valores absolutos das raízes da equação dada.

2º caso: $x^2 + bx = c$

A demonstração é construída de forma análoga a equação do 1º caso, bastando para isso tomar $\overline{BE} = x$ no 4º caso. Veja a figura.

Figura 46 – Construção Geométrica de Descartes ($x^2 + bx = c$)



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + bx = c.}$$

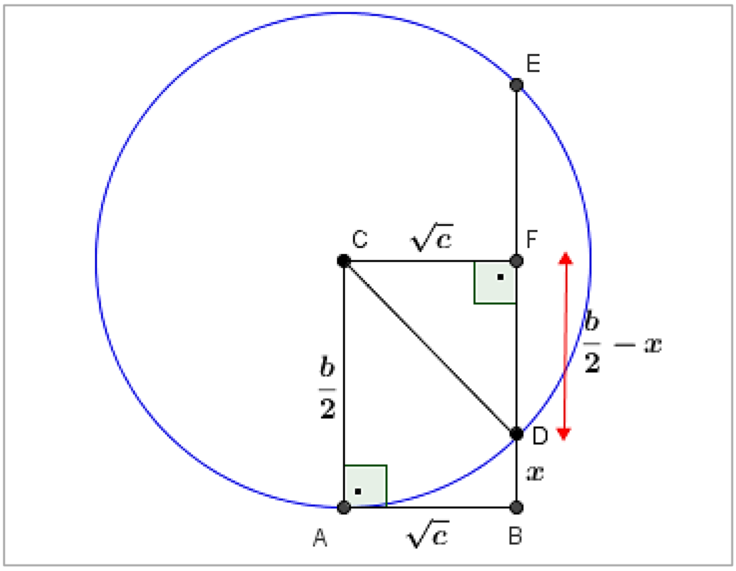
Observação: Os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$ fornecem os valores absolutos das raízes da equação dada.

3º caso: $x^2 + c = bx$

Nessa construção tem a seguinte mudança no 4º passo:

Traçar em B uma perpendicular a AB cruzando a circunferência nos pontos D e E, sendo $\overline{BD} = x$. Observe a figura abaixo.

Figura 47 – Construção Geométrica de Descartes ($x^2 + c = bx$)



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulo retângulo CFD, vem:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{DF}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{b^2}{4} = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} + c \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + c = bx.}$$

Observação: Os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$ fornecem os valores absolutos das raízes da equação dada. Neste caso, se o raio $\frac{b}{2}$ for maior que $\sqrt{c}$, temos duas soluções reais e distintas; se for igual a $\sqrt{c}$, temos uma raiz real dupla; e se for menor, não existe raiz real.

□

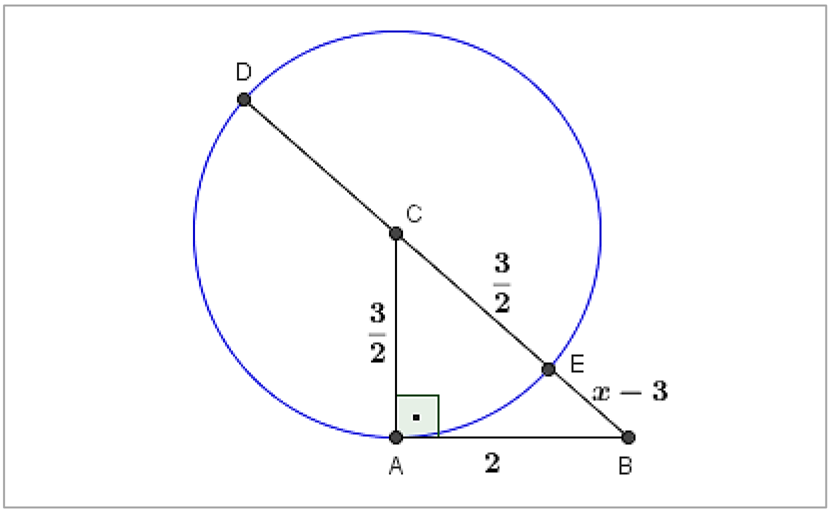
Exemplo 2.4.6 Resolva a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$ pelo método de Descartes.

Como $x^2 - 3x - 4 = 0$ é equivalente à $x^2 = 3x + 4$, então recaímos no 1º caso. Temos que $b = 3$ e $c = 4$; assim, a resolução segue os seguintes procedimentos:

1. Traçar um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\sqrt{4} = 2$;

2. Traçar uma perpendicular a $\overline{AB}$ passando por A e nessa perpendicular toma-se um ponto C, sendo $\overline{AC} = \frac{3}{2}$;
3. Construir uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$;
4. Construir uma reta que passa por B e C, cruzando a circunferência nos pontos E e D, com $\overline{BD} = x$. Veja a figura abaixo.

Figura 48 – Construção Geométrica de Descartes ($x^2 = 3x + 4$)



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2} + (x-3)\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow$$

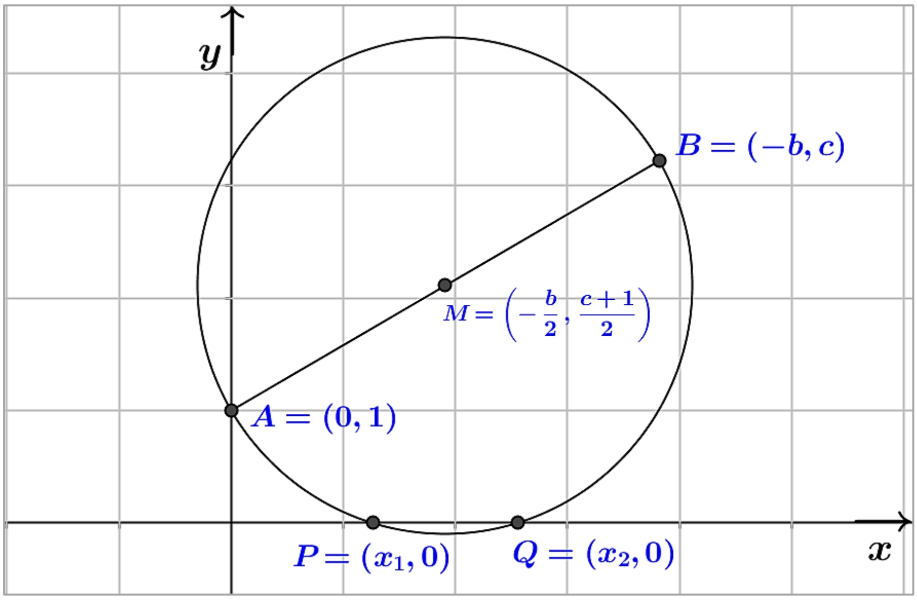
$$x' = 4 \quad ou \quad x'' = -1.$$

Observe que os segmentos $\overline{BE} = 1$ e $\overline{BD} = 4$ fornecem os valores absolutos das raízes da equação.

2.4.2.4 Método de Thomas Carlyle

Este método utilizado por Carlyle $(1775 - 1881)$ utiliza coordenadas cartesianas e é usado para a resolução da equação $x^2 + bx + c = 0$, para quaisquer b e c pertencentes aos reais. A figura abaixo mostra graficamente esse método.

Figura 49 – Construção de Thomas Carlyle ($x^2 + bx + c = 0$)



Os procedimentos geométricos desse método são descritos pelos seguintes passos:

1. Determine os pontos $A(0,1)$ e $B(-b, c)$ usando, para isso, um papel quadriculado;
2. Determine o ponto médio M de $\overline{AB}$;
3. Construa uma circunferência com centro em M e raio $\overline{AM}$;
4. A circunferência cruza o eixo X nos pontos P e Q.

Os comprimentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ representam as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$.

De fato, como $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{PM} = \overline{QM} = r$, onde r é o raio da circunferência, então calculando a metade da distância entre os pontos $A(0,1)$ e $B(-b, c)$, temos:

$$r = \frac{\sqrt{b^2 + (c-1)^2}}{2}.$$

Como o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é

$$M = \left(-\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right),$$

que é o centro da circunferência, então tomando o ponto $X(x, 0)$ pertencente à circunferência de centro M e raio r, vem:

$$\left(x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2 + 2c + 1}{4} = \frac{b^2 + c^2 - 2c + 1}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{c}{2} + \frac{1}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 + bx = -c \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + bx + c = 0.}$$

□

Dependendo do ponto $(-b, c)$, a circunferência poderá cortar o eixo x em dois pontos distintos, tangenciar ou não tocá-lo. Isso ocorrerá quando o raio é, respectivamente, maior, igual ou menor que a distância entre o centro da circunferência M e o eixo x.

Observação 1: Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Dividindo ambos os membros por a e fazendo

$$\frac{b}{a} = b' \ e \ \frac{c}{a} = c',$$

temos a equação $x^2 + b'x + c' = 0$. Tomando os pontos $A(0,1)$ e $B(-b', c')$, podemos usar o mesmo procedimento. Assim, o Método de Carlyle resolve qualquer equação completa do 2º grau.

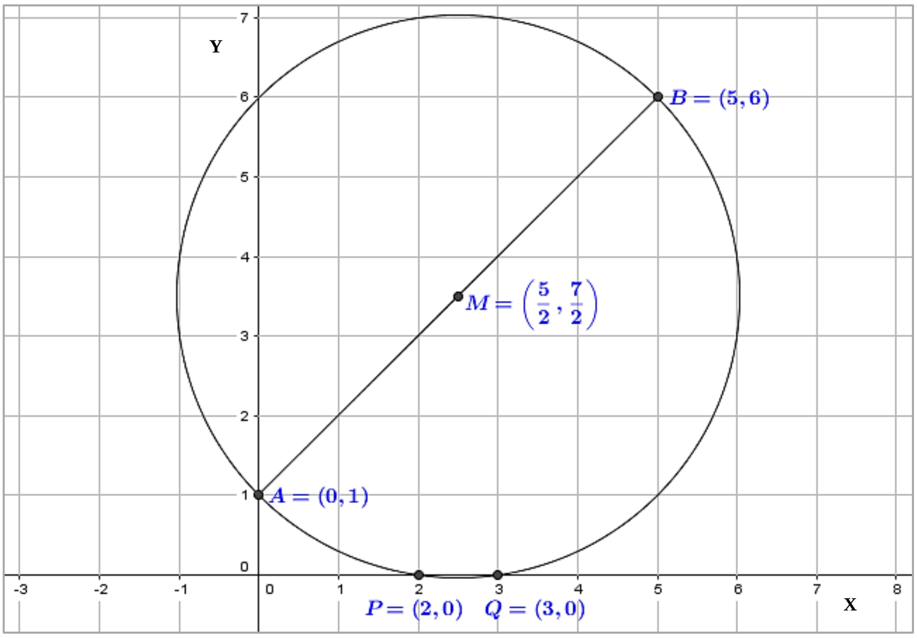
Observação 2: Se no procedimento 1 tomarmos $A = (0, -1)$ e $B = (-b, -c)$, obteremos o mesmo resultado.

Exemplo 2.4.7 Usando o Método de Carlyle, resolva as equações abaixo.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0;$

Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Assim, marcamos os pontos $A = (0,1)$ e $B = (-b, c) = (5,6)$, traçamos o segmento $\overline{AB}$, calculamos o ponto médio M de $\overline{AB}$ e construímos a circunferência de centro M e raio $\overline{AM}$, temos a interseção da circunferência com o eixo X nos pontos $P = (2,0)$ e $P = (3,0)$. Logo, 2 e 3 são as soluções da equação acima.

Figura 50 – Construção de Thomas Carlyle ($x^2 - 5x + 6 = 0$)



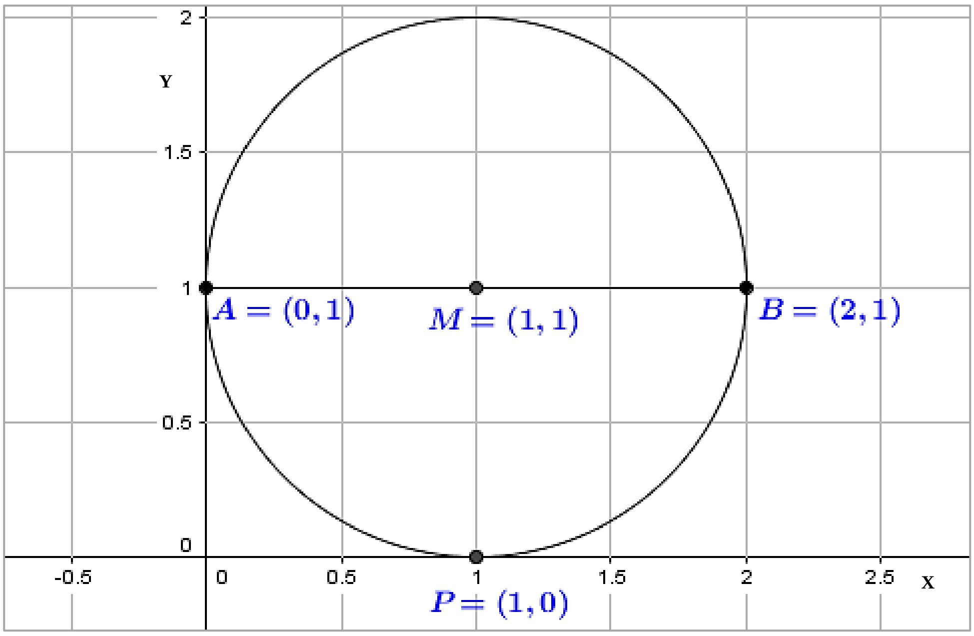
b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$;

Como $a = -1$, então dividindo ambos os membros por -1, temos:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Temos $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Procedendo de modo análogo ao exemplo anterior, temos a interseção da circunferência com o eixo X somente no ponto $P = (2,0)$. Logo, 2 é a solução da equação acima.

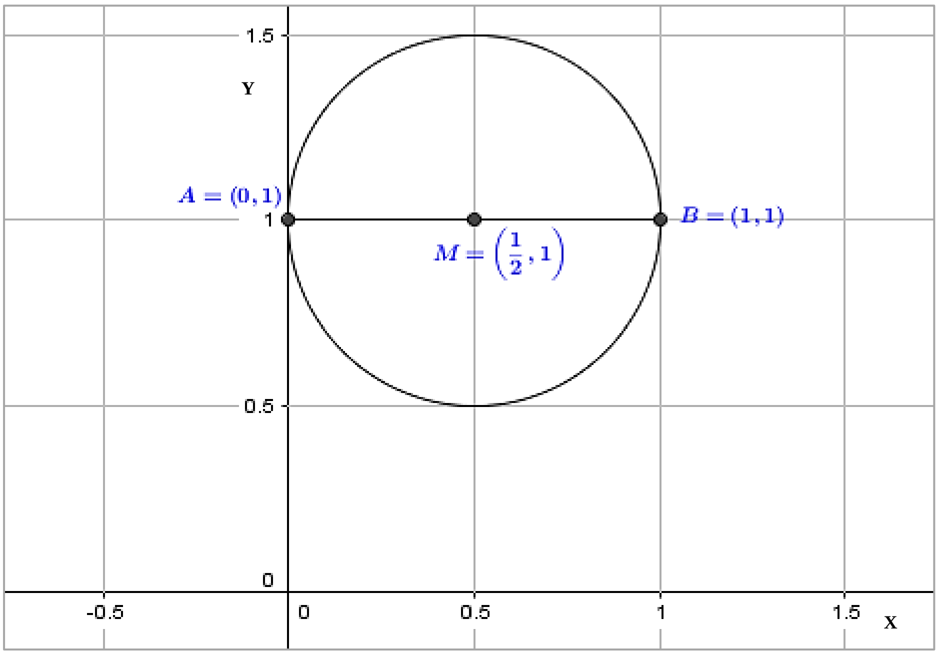
Figura 51 – Construção de Thomas Carlyle $(-x^2 + 2x - 1 = 0)$



c) $x^2 - x + 1 = 0$;

Temos $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$. De modo análogo, temos que não há interseção da circunferência com o eixo X. Logo, não existe solução real para a equação dada. Veja a figura.

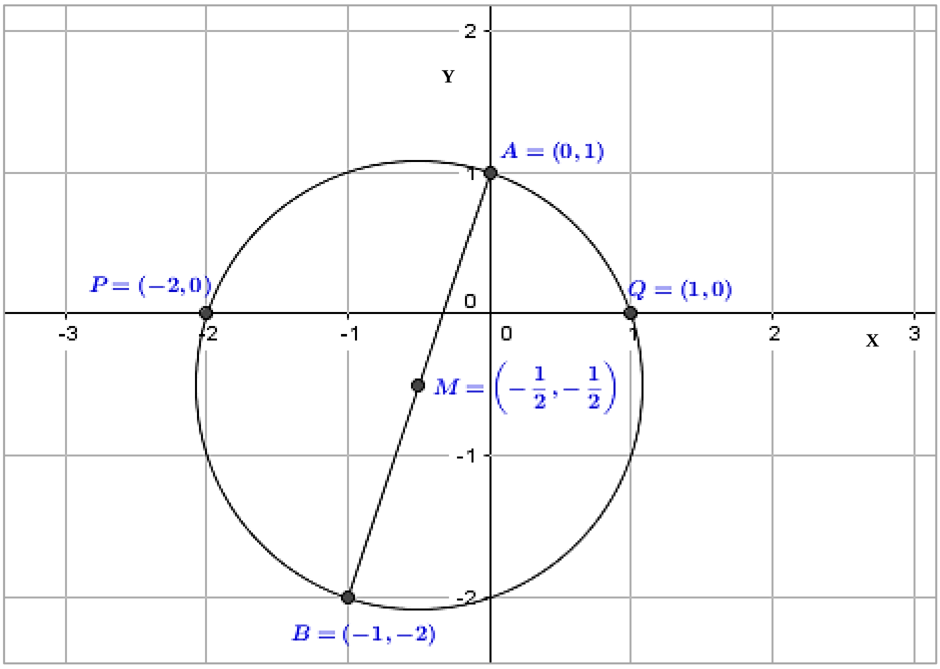
Figura 52 – Construção de Thomas Carlyle $(x^2 - x + 1 = 0)$



d) $\quad {}^2 + x - 2 = 0.$

Como $a = 1$, $b = 1$ e $c = -2$, então, de maneira análoga, temos a figura abaixo. A circunferência toca o eixo X nos pontos $P = (-2,0)$ e $Q = (1,0)$, logo -2 e 1 são as soluções da equação.

Figura 53 – Construção de Thomas Carlyle ($x^2 - x - 2 = 0$)



Portanto, o Método de Thomas Carlyle é bastante simples e prático do ponto de vista geométrico, podendo ser realizado apenas com o uso de um material quadriculado, régua e compasso para obter as soluções reais de uma equação quadrática. Além disso, podemos trabalhar plano cartesiano, circunferência, ponto médio e segmento de reta por meio desse método.

□

3 TRABALHANDO FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICAS NO AMBIENTE DINÂMICO (GEOGEBRA)

O uso de metodologias diferenciadas é fundamental para despertarem o interesse dos alunos e estimular o aprendizado dos mesmos. Vamos utilizar um software de geometria dinâmica, o GeoGebra[5], para trabalhar funções afim e quadráticas, porém, o uso produtivo deste recurso em sala depende muito do domínio dos conteúdos que serão explorados através do mesmo.

Este programa proporciona uma grande variedade de possibilidades para serem exploradas pelos alunos, fazendo com que eles saiam do tradicional lápis e papel e vejam formas diferentes de resolver o problema. Além disso, os alunos podem até encontrar novas formas ou propriedades do mesmo problema.

A escolha do GeoGebra se deve pelas seguintes razões: como já haviam outros programas no mercado, o desenvolvedor incorporou as ferramentas mais oportunas; o programa pode ser baixado gratuitamente e pode ser usado nas escolas, já que tem uma versão para Linux, sistema operacional de praticamente toda escola pública; por fim, o programa inclui funcionalidades algébricas e geométricas que auxiliam o aprendizado.

3.1 Conhecendo O Software GeoGebra

O GeoGebra é um software educativo interativo que tem como objetivo trabalhar conceitos matemáticos e facilitar a compreensão desses conceitos por alunos e professores de todos os níveis de ensino. Ele é um programa de matemática dinâmica, escrito em java, roda em qualquer plataforma (Windows, Linux, Macintosh, etc.) e pode ser baixado gratuitamente através do link: http://www.geogebra.org.

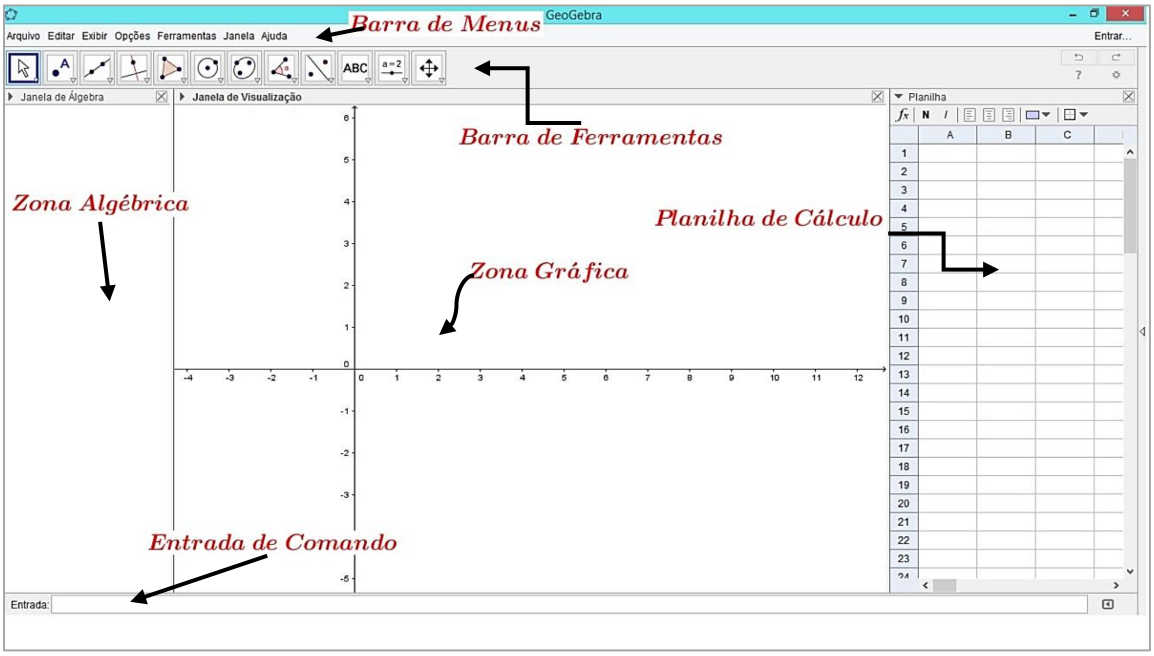
Este software é capaz de lidar com variáveis para números, vetores e pontos, derivar e integrar funções e ainda oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função, bem como verificar o gráfico da mesma com a variação dos coeficientes da função. A característica mais destacável do Geogebra é a percepção dupla dos objetos, ou seja, cada

[5] Esse software foi criado em 2001 pelo Professor austríaco Markus Hohenwarter e uma equipe computacional de programadores, como resultado de uma dissertação de mestrado e posteriormente foi melhorado na tese de doutorado.

expressão na *Janela de álgebra* corresponde a um objeto da *Zona de gráficos* e vice-versa. Os objetos adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas.

Veja a figura abaixo da tela inicial do Geogebra.

Figura 54 – Tela Inicial do Geogebra

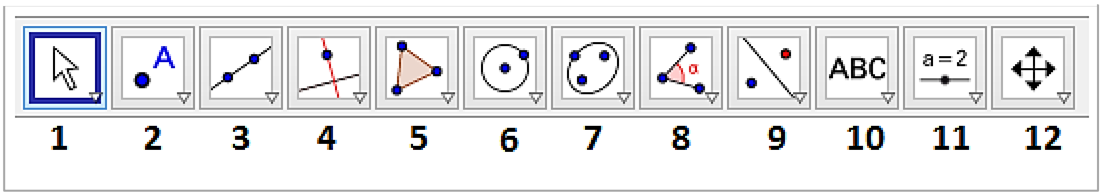


- **Barra de menus**: para acessar os ícones da barra de menus, basta clicar com o botão esquerdo do mouse sobre eles. Sugerimos que os estudantes cliquem rapidamente em cada ícone para se familiarizarem com os mesmos, bem como observar as funções disponíveis e sua aplicabilidade;
- **Barra de ferramentas**: cada ícone dessa barra tem várias opções, relacionadas com as funções descritas no desenho do ícone;
- **Entrada de comando**: zona destinada ao usuário inserir fórmulas matemáticas e funções;
- **Zona algébrica**: nesta janela aparecem indicações dos objetos (coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferência, comprimentos, áreas, etc.);
- **Zona gráfica**: onde aparecem os pontos, figuras geométricas e apresenta um sistema de eixos coordenados. Nela são apresentados os desenhos, que podem ser desenhados pela entrada de comandos ou pela barra de ferramentas;
- **Planilha de cálculo**: não fica aparente quando o Geogebra é aberto, é utilizada como uma planilha de cálculo, se assemelhando ao Excel e possui uma barra de ferramentas

diferente das demais. Em uma célula é possível digitar valores numéricos, coordenadas de pontos, funções, segmentos, polígonos, etc.

A seguir, apresentaremos uma numeração de 1 a 12 da barra de ferramentas para facilitar a identificação ao longo do trabalho. Sugerimos que o professor apresente essas janelas e suas opções de forma interativa de modo que os estudantes conheçam e construam ao mesmo tempo.

Figura 55 – Janelas da Barra de Ferramentas



3.2 Usando o GeoGebra

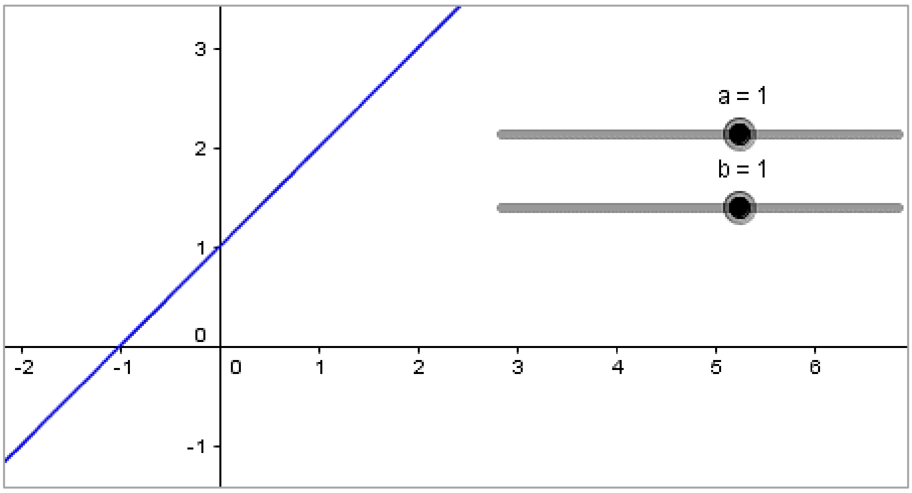
Nosso objetivo principal é preencher lacunas existentes no ensino tradicional, fazendo com que o aluno, por intermédio do professor, possa compreender funções afim e quadrática através do software GeoGebra, promovendo, assim, conhecimentos matemáticos através de uma forma lúdica, com atividades diferenciadas e dessa forma sanar as dificuldades do aluno. Trabalhar com ambiente dinâmico é uma inovação da prática educacional docente, buscando uma aprendizagem mais significativa, prática e prazerosa.

3.2.1 Função Afim

Construa o gráfico da função afim, seguindo os passos abaixo:

1) Digite no campo de entrada a seguinte equação: $f(x) = ax + b$. Na caixa que aparecer clique em “Criar Controles Deslizantes”. Aparecerá automaticamente o gráfico da função afim, junto com os controles deslizantes **a** e **b**.

Figura 56 – Gráfico da Função Afim com $a = 1$ e $b = 1$



2) Após isso, para melhor interpretação geométrica, mantenha o coeficiente **a** fixo e varie o **b**; depois, mantenha o coeficiente **b** fixo e varie o **a**. O que você pode concluir sobre o efeito da variação do coeficiente angular **a** sobre o gráfico? E do coeficiente linear **b**?

Figura 57 – Gráficos da Função Afim Variando Apenas o Coeficiente $\boldsymbol{a}$

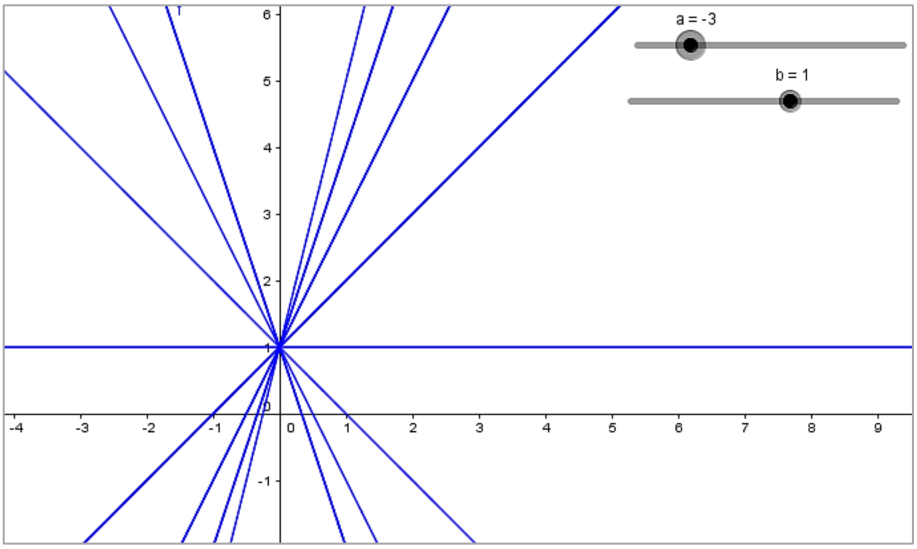


Figura 58 – Gráficos da Função Afim Variando Apenas o Coeficiente ***b***

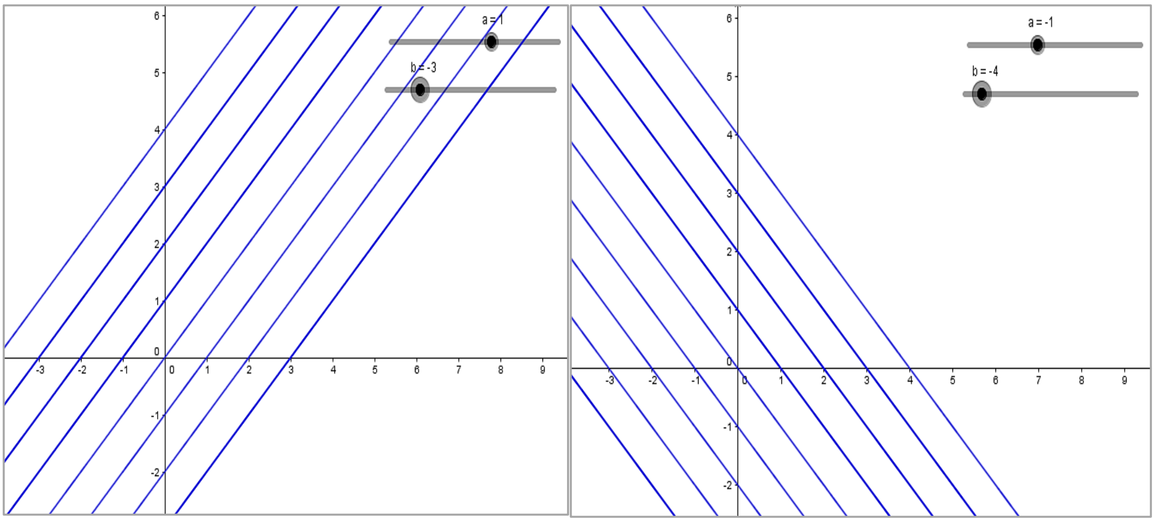
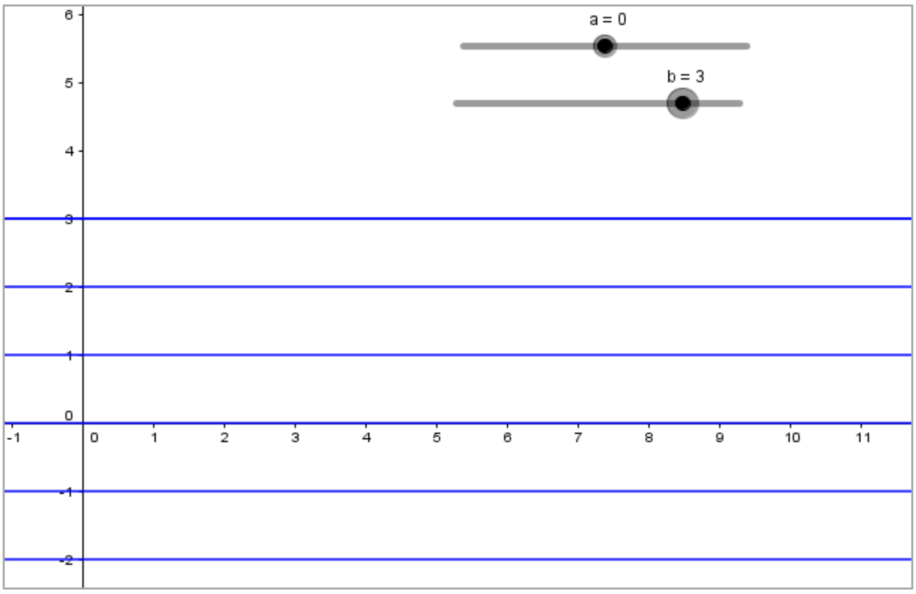


Figura 59 – Gráficos da Função Constante Variando ***b***



3) Qual a condição de existência para que a função seja afim?

4) Quando o coeficiente **b** é nulo, o que acontece com a função?

Essa atividade faz com que os alunos compreendam melhor o comportamento da variação dos coeficientes da função afim e suas particularidades (função constante e linear).

Considere agora o caso particular da função afim em que $b = 0$, ou seja, a função linear $f(x) = 2x$ e o seu gráfico para alguns valores atribuídos a x.

Figura 60 – Proporcionalidade da Função $f(x) = 2x$ para $X' = 2$

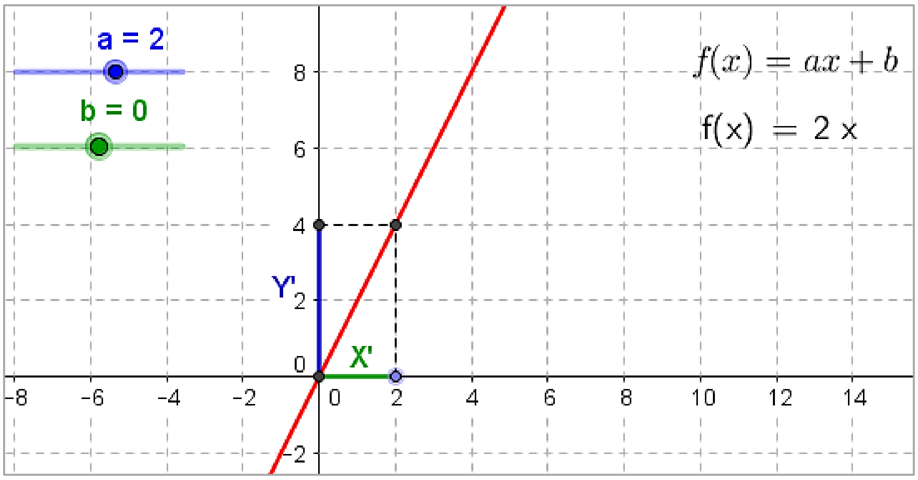


Figura 61 – Proporcionalidade da Função $f(x) = 2x$ para $X' = 4$

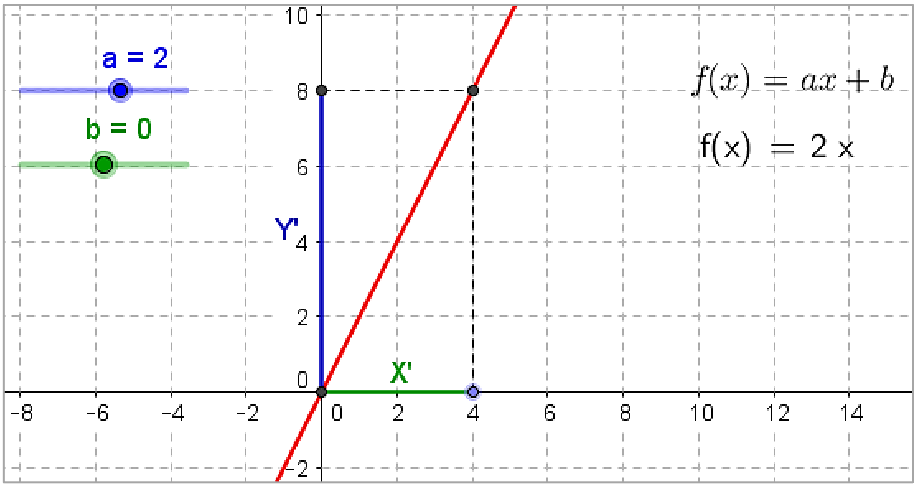
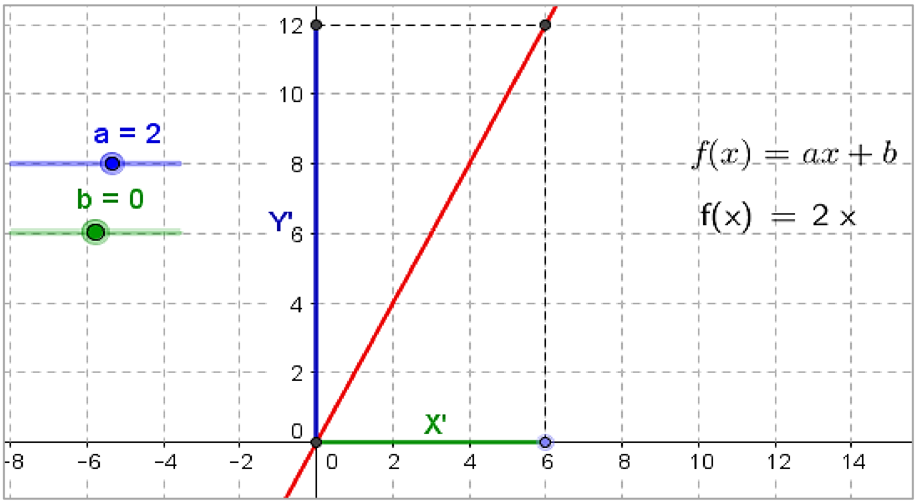


Figura 62 – Proporcionalidade da Função $f(x) = 2x$ para $X' = 6$



Observe que para $X' = 2$ temos $Y' = 4$; duplicando o valor de X', o valor de Y' também é duplicado; triplicando o primeiro, o segundo também é triplicado. Além disso, quando maior for X', maior será Y'. Assim, de acordo com a definição 2.2.2 da mesma seção, Y' é proporcional à X'. Observe também que dividindo Y' por X', o resultado é o coeficiente angular a da função.

3.2.2 Conceito, Construção e Análise de Gráficos da Função Afim

Conforme Mota [17], essa atividade visa trabalhar com funções e facilitar a articulação do software GeoGebra com a Matemática. Nessa proposta, buscar-se-á uma outra alternativa, além da convencional, para o ensino/aprendizagem da função afim onde serão abordados o conceito de função, construção e análise de gráficos.

- **Noções de Funções**

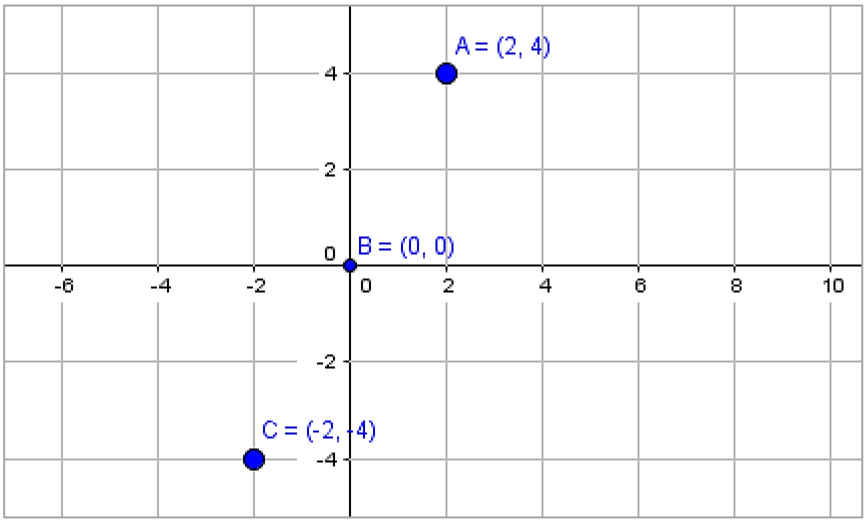
Instrução 1: Joana pensou em três números quaisquer e multiplicou-se por 2. Logo após, identificou o par ordenado (x, y) onde x representa o número pensado e y representa o número obtido e registrou todos os valores na tabela abaixo:

Tabela 2 – Três Pontos Alinhados

Número pensado	Número obtido	Par ordenado
2	4	(2,4)
0	0	(0,0)
-2	-4	(-2,-4)

Instrução 2: Em seguida, abra o software GeoGebra, vá na opção “Novo Ponto” e clique sobre o plano para determinar cada par ordenado, encontrado por Joana, na tabela anterior.

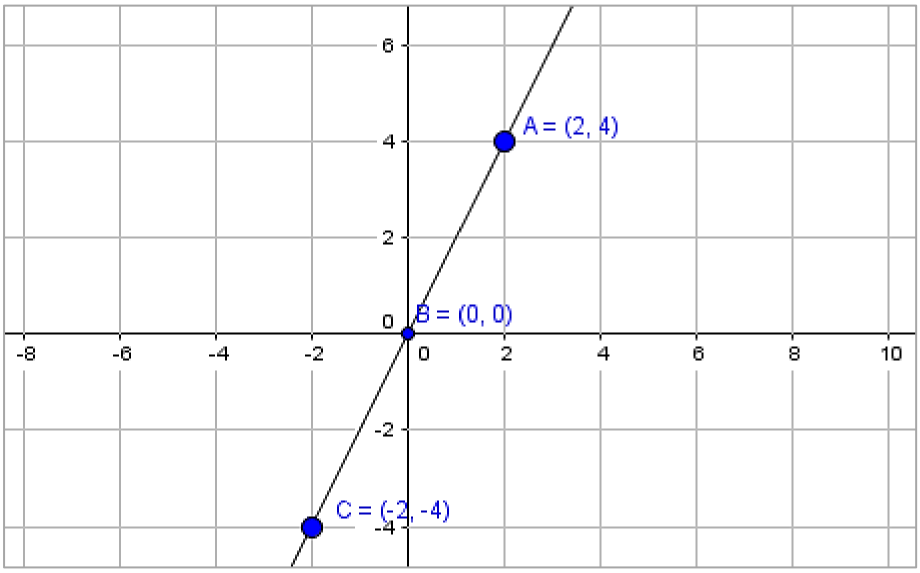
Figura 63 – Três Pontos no Plano



Instrução 3: Vá em "Reta Definida Por Dois Pontos" (Janela 3), clique em qualquer um dos dois pontos distintos dentre os três determinados no plano.

- O que você observou?
- Que relação existe entre o número pensado e a abscissa do ponto A?
- Que relação existe entre o número obtido e a ordenada do ponto B?
- Que relação existe entre o número pensado obtido e a ordenada do ponto C?
- Que relação existe entre o número pensado X e o número obtido Y?
- Com base no item anterior, esta relação pode ser representada através de uma fórmula. Indique por X o número pensado e por Y o número obtido. Que fórmula você representaria o valor de y em função de x?

Figura 64 – Reta Passando por Três Pontos



3.2.3 Função Quadrática e a Variação dos seus Coeficientes

Esta oficina foi extraída e adaptada de [14] e tem como objetivo fazer com que o aluno seja agente produtor de seus conceitos através da manipulação de características similares entre parábolas de mesma família. Teremos abaixo cinco exemplos relacionados à função quadrática.

- **1º exemplo**

Considere a função $f(x) = ax^2 + 2x + 1$. Variando o valor do coeficiente angular **a**, o que podemos afirmar sobre o seu gráfico? Usando o GeoGebra, desenhe o gráfico dessa função quando o coeficiente **a** assume cada valor abaixo, e responda.

Tabela 3 – Relação entre o Coeficiente a de uma Função e a Concavidade de seu Gráfico

Coeficiente a	**O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, para baixo ou é uma reta?**
$\boldsymbol{a = -2}$	
$\boldsymbol{a = -1}$	
$\boldsymbol{a = 0}$	
$\boldsymbol{a = 1}$	
$\boldsymbol{a = 2}$	

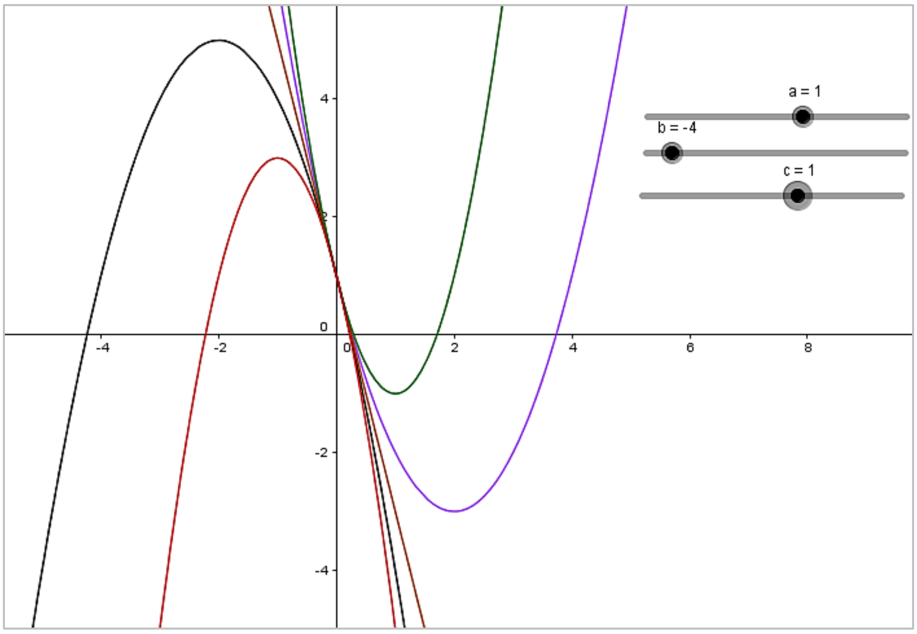
a) Quando $a = 0$, o que ocorre com o gráfico da função $f(x)$? Qual a condição para que a função f seja quadrática?

b) O que podemos afirmar sobre a concavidade da parábola da função f quando o coeficiente **a** assume valores positivos? E se **a** assumir valores negativos?

c) Podemos estabelecer alguma relação entre o sinal do coeficiente **a** e a concavidade da parábola? Que relação é essa?

Nessa primeira atividade, espera-se que o aluno, através da simples manipulação do valor do coeficiente **a**, observe a relação existente entre a variação desse coeficiente e a concavidade da parábola, bem como, a partir desse caso particular de função, o aluno possa generalizar para todo tipo de função. Assim, o sentido da concavidade pode ser determinada apenas pela simples observação de **a**, o que é um passo importante para o esboço do gráfico da função quadrática. Abaixo temos os gráficos formados de acordo com a variação do coeficiente **a**.

Figura 65 – Gráficos de $f(x) = ax^2 - 4x + 1$ Variando o Coeficiente $\boldsymbol{a}$

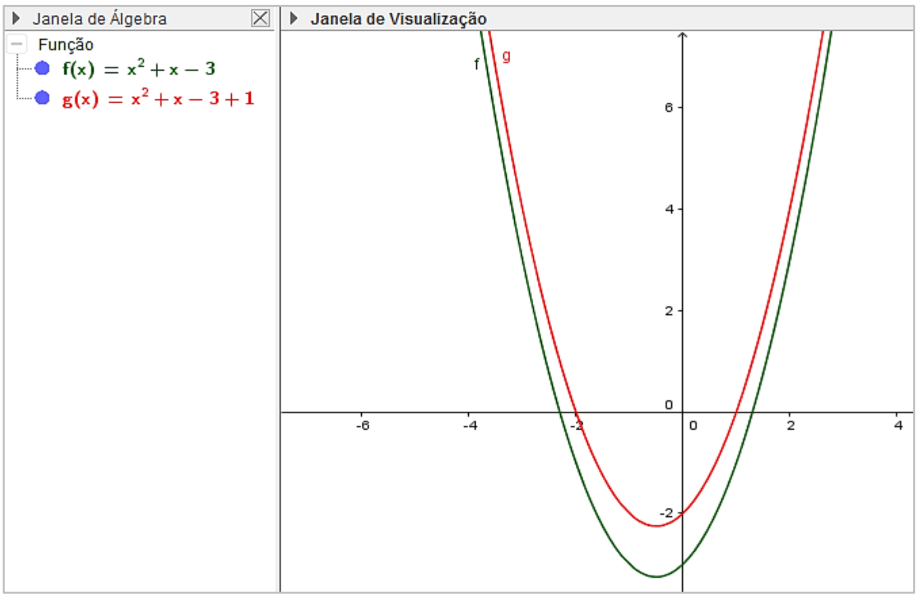


➢ **2º exemplo**

Usando o GeoGebra, desenhe o gráfico da função $f(x) = x^2 + x - 3$. Em seguida, responda as perguntas abaixo.

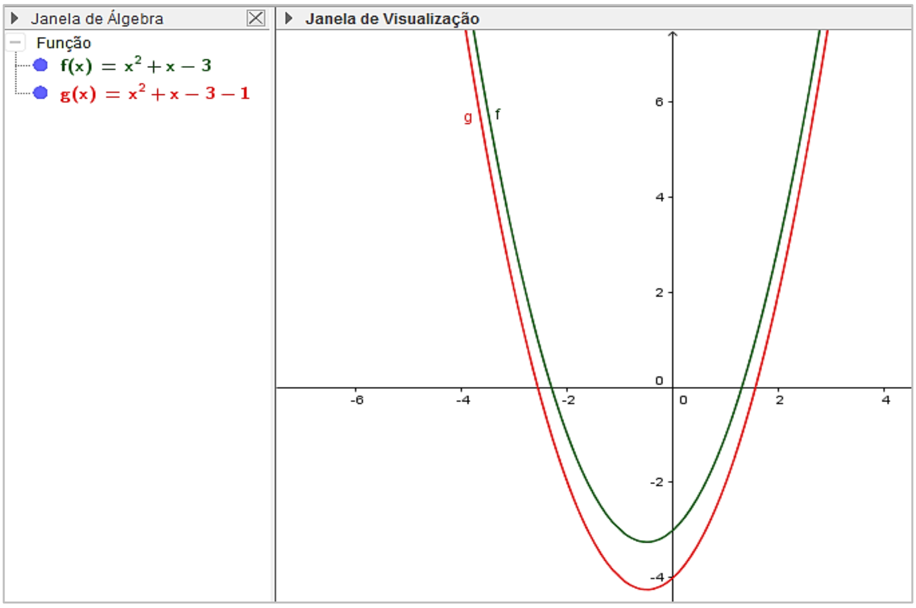
a) Adicionando 1 à função dada, o gráfico de f sofre algum deslocamento? Esse deslocamento ocorre na horizontal ou vertical? Qual o ponto em que a parábola "corta" o eixo das ordenadas?

Figura 66 – Translação de $f(x) = x^2 + x - 3$ adicionando 1 unidade



b) Adicionando -1 à função dada, o gráfico de f sofre algum deslocamento? Na horizontal ou vertical? Qual o ponto em que a parábola “corta” o eixo das ordenadas?

Figura 67 – Translação de $f(x) = x^2 + x - 3$ adicionando -1 unidade



c) De acordo com o que observamos nos itens a) e b), existe alguma relação entre o ponto de “corte” da parábola com o eixo das ordenadas? O que esses pontos têm em comum?

Essa segunda atividade faz com que o aluno compreenda que o gráfico da função sofre um deslocamento horizontal e vertical quando adicionamos, respectivamente, valores positivos e negativos. Além disso, a parábola corta o eixo das ordenadas num ponto em que a coordenada x do par ordenado é sempre nula; com isso, o aluno tem mais um ponto importante para o esboço do gráfico da função quadrática: a interseção da parábola com o eixo das ordenadas.

- **3º exemplo**

De acordo com as funções abaixo, complete a tabela e responda as perguntas abaixo.

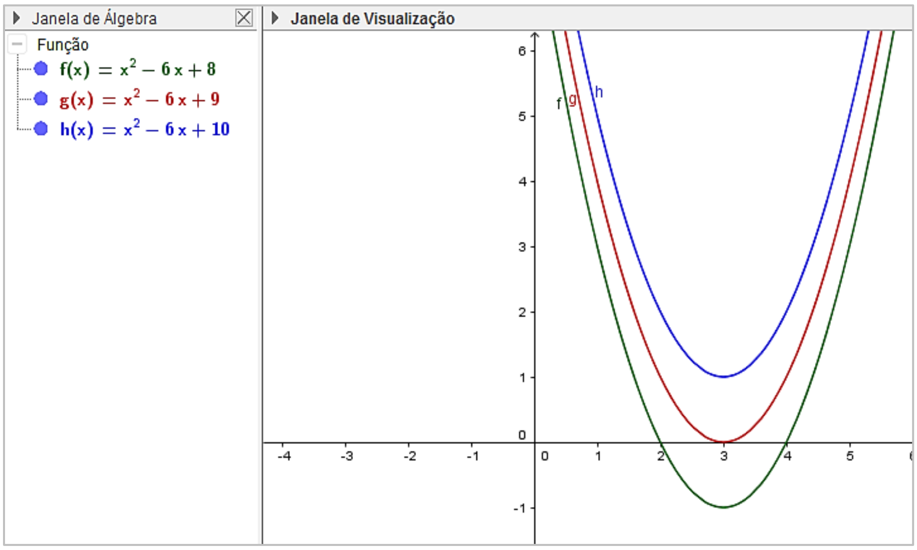
Tabela 4 – Relação entre o Discriminante Δ e os Zeros de uma Função Quadrática

Função quadrática	**Discriminante** ($\Delta = b^2 - 4ac$)	**Zeros (se existirem)**
$f(x) = x^2 - 6x + 8$	$\Delta =$	
$g(x) = x^2 - 6x + 9$	$\Delta =$	
$h(x) = x^2 - 6x + 10$	$\Delta =$	

a) Existe alguma relação entre o valor de Δ e a quantidade de zeros da função quadrática? Qual é essa relação?

b) Usando o GeoGebra, construa cada gráfico abaixo e verifique a interseção com o eixo das abscissas quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Figura 68 – Interseção da Parábola com o Eixo x quando $\Delta > 0, \Delta = 0$ *ou* $\Delta < 0$



Observação: Processo análogo quando o coeficiente $\boldsymbol{a}$ for negativo.

Essa atividade faz com que o aluno perceba a relação existente entre o valor do discriminante Δ e a interseção da parábola com o eixo das abscissas, associando o fato de que se $\Delta > 0$ a interseção ocorre em dois pontos distintos; se $\Delta < 0$, só ocorre em apenas um ponto e se $\Delta = 0$ não há interseção. Assim, essa relação auxilia o aluno no esboço de gráficos, pois os zeros são pontos notáveis do gráfico, e por meio desses zeros o aluno pode até determinar o valor da abscissa do vértice da parábola e calcular o valor máximo ou mínimo.

- **4º exemplo**

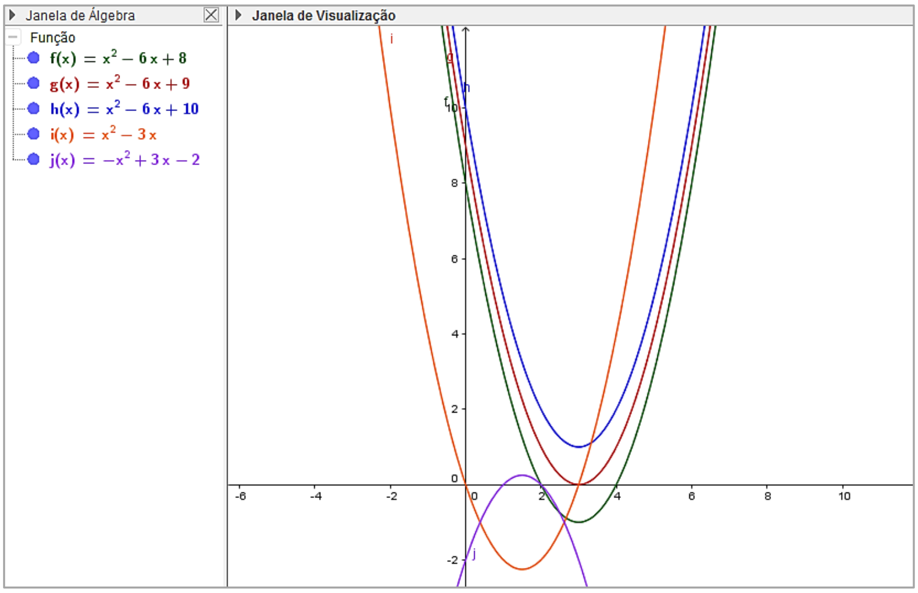
Considere a tabela abaixo. Usando o Geogebra, faça o gráfico de cada função abaixo e verifique as coordenadas do vértice da parábola.

Tabela 5 – Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

Função quadrática	**Coeficientes**	$x_v = -\frac{b}{2a}$	$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$	$V = (x_v, y_v)$
$f(x) = x^2 - 6x + 8$	$a =\quad, b =\quad, c =$			
$g(x) = x^2 - 6x + 9$	$a =\quad, b =\quad, c =$			
$h(x) = x^2 - 6x + 10$	$a =\quad, b =\quad, c =$			
$i(x) = x^2 - 3x$	$a =\quad, b =\quad, c =$			
$j(x) = -x^2 + 5x - 6$	$a =\quad, b =\quad, c =$			

Qual é a condição para que uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possua valor máximo? E valor mínimo?

Figura 69 –Valor Máximo ou Mínimo de uma Função de acordo com o Sinal do Coeficiente $\boldsymbol{a}$



Com essa atividade, o aluno deve perceber a existência de valor máximo (se $a < 0$) ou de valor mínimo (se $a > 0$) em cada gráfico, associando a ordenada do vértice de cada função. Com isso, temos mais um passo importante na determinação do vértice de uma função quadrática, que por sua vez, é um fator importante no esboço de seu gráfico e análise de problemas de máximo e mínimo.

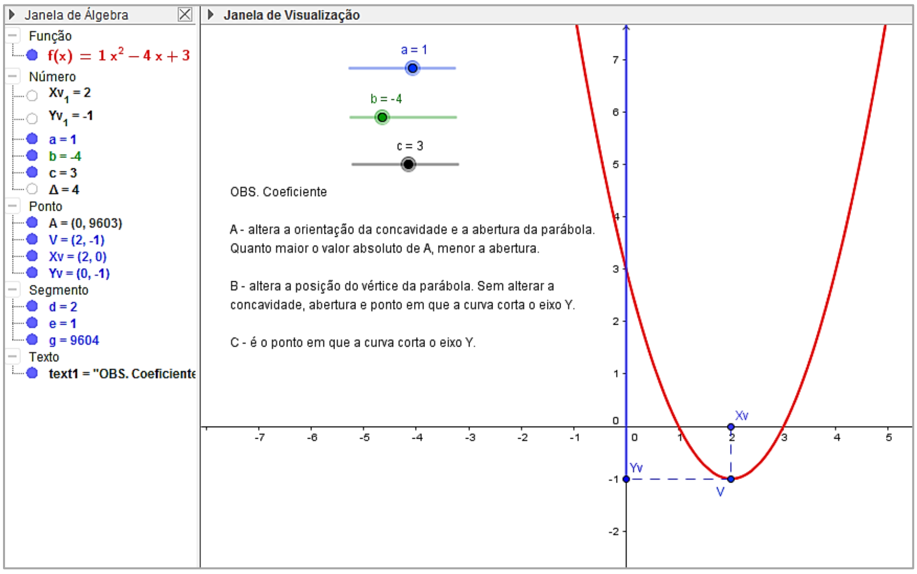
O uso de recursos computacionais é de fundamental importância para a abstração matemática de visualizar um gráfico, e com o computador a manipulação de parábolas é feita rapidamente e de modo prático.

- **5º exemplo**

Esta atividade é um resumo de tudo que vimos em relação à variação dos coeficientes **a**, **b** e **c**. Por meio do gráfico de uma função quadrática, podemos tirar todas as conclusões relacionadas à variação dos coeficientes da mesma.

1. Construímos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ com o Geogebra.

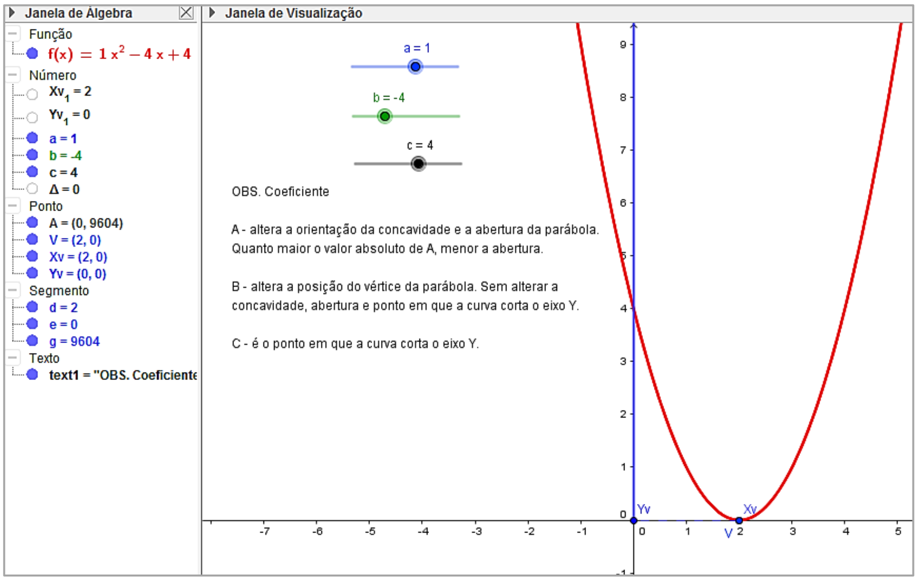
Figura 70 – Informações dos Elementos de uma Função Quadrática , 1º caso



De acordo com o gráfico, observamos que quando o coeficiente **a** é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima, assim, a função possui valor mínimo, a saber $y = -1$; o coeficiente **b** negativo faz com que a reta tangente à parábola no ponto **c** seja decrescente; e por último, o **c** positivo faz com que a parábola corta o eixo y acima da origem. Além disse como $\Delta = 4 > 0$, a parábola corta o eixo x em dois pontos.

2. De modo análogo, construímos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

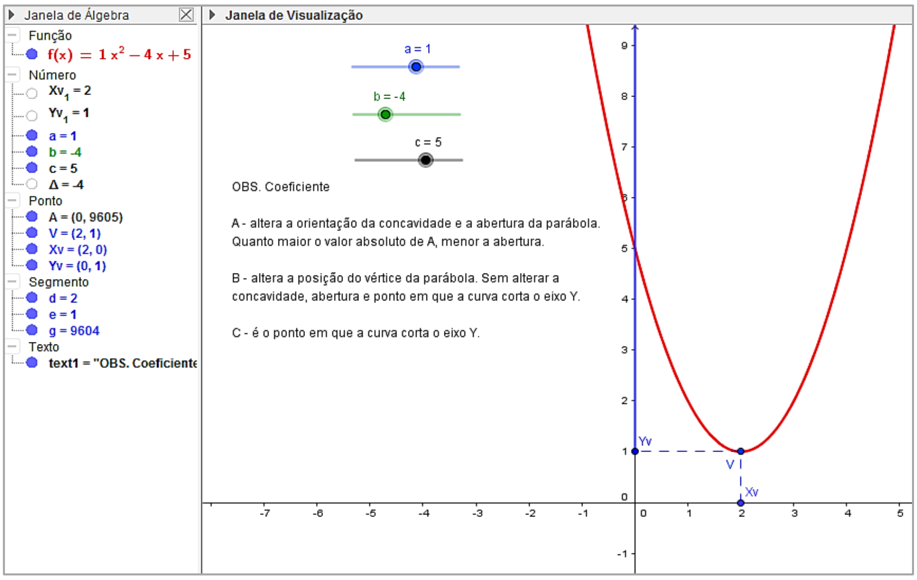
Figura 71 – Informações dos Elementos de uma Função Quadrática, 2º caso



Neste caso, a única diferença do primeiro gráfico é que neste o discriminante Δ é nulo, o que faz com que a parábola corta o eixo x em apenas um ponto e o valor mínimo coincide com o próprio zero dessa função.

3. Considere agora a função $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

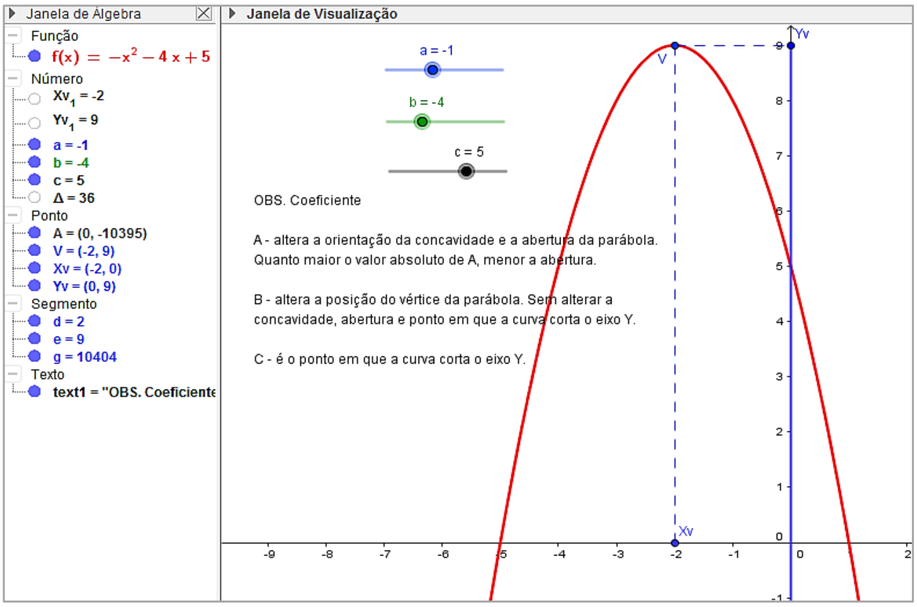
Figura 72 – Informações dos Elementos de uma Função Quadrática, 3º caso



Já, neste caso, como o discriminante $\Delta = -4$ é negativo, a parábola não corta o eixo x, no entanto, a função possui um valor mínimo no ponto $y = 1$.

4. Considere uma função em que o coeficiente **a** seja negativo, a saber, $f(x) = -x^2 - 4x + 5$.

Figura 73 – Informações dos Elementos de uma Função Quadrática, 4º caso



Em relação a este gráfico, observamos que quando o coeficiente **a** é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo, assim, a função possui valor máximo, a saber $y = 9$; Além disse como $\Delta = 36 > 0$, a parábola corta o eixo x em dois pontos. Observe também que o ponto $x = 2$ em que a função atinge o valor máximo é a média aritmética das raízes dessa função (-5 e 1).

Resumindo: o coeficiente **a** altera a orientação da concavidade e a abertura desta. Se **a** for positivo, a concavidade é voltada para cima e, consequentemente, haverá um valor mínimo; se **a** for negativo, é voltada para baixo e, consequentemente, haverá um valor máximo. Quanto maior o valor absoluto de **a**, menor abertura da parábola e vice-versa. O coeficiente **b** altera a posição do vértice da parábola, sem alterar a concavidade, abertura e o ponto em que corta o eixo y. E o **c** é o ponto em que a curva corta o eixo y.

3.2.4 Construindo e Explorando a Parábola a partir da Definição

Esta atividade busca explorar a construção da parábola com o GeoGebra, buscando uma consciência da importância do significado da parábola e do uso desse software no ensino da Matemática e, especificamente, no ensino das funções quadráticas.

Temos abaixo o passo-a-passo da construção conforme [17], porém não especificaremos em qual janela do GeoGebra o aluno deve entrar, com a finalidade de que este tenha busque a total exploração do ambiente dinâmico

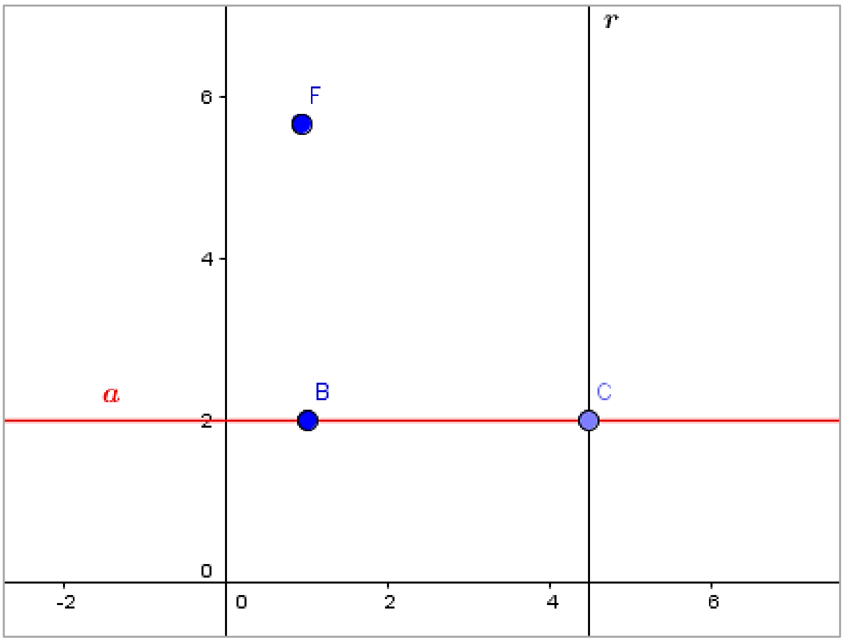
Instrução 1: Construa um ponto F (Janela 2) que será o nosso foco. Construa uma reta a paralela ao eixo das abscissas e que não passe por F. Pinte-a de vermelho. Esta reta será a diretriz da parábola.

Observe na janela algébrica a equação dessa reta. Qual é o seu grau?

Dica: Para que tenhamos uma boa manipulação da parábola, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B, selecione “propriedades” e marque a opção “fixar objeto”. Em seguida, clique no ponto B para que a diretriz fique fixa.

Instrução 2: Construa um ponto C sobre a diretriz. Faça uma reta r perpendicular à diretriz que passe por C (Janela 4).

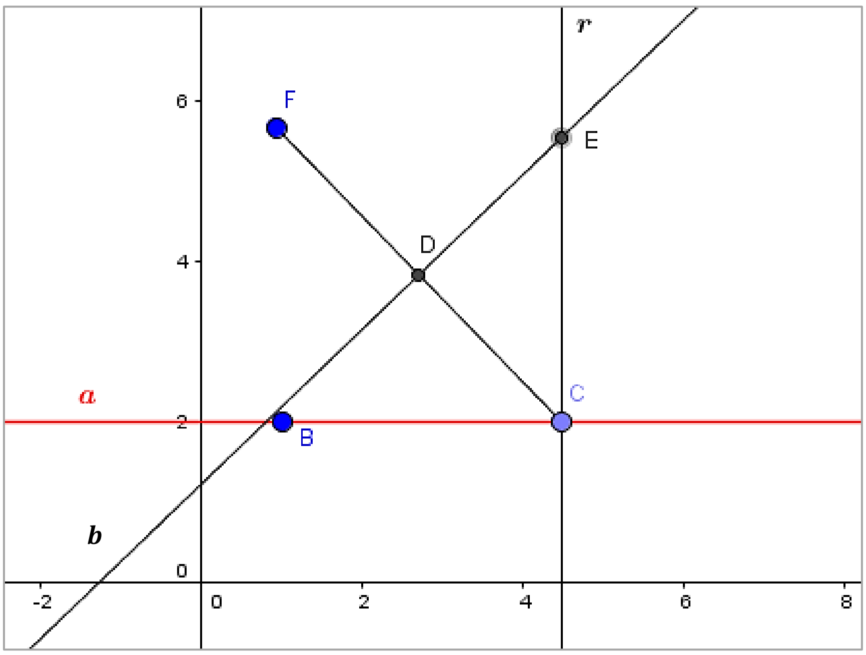
Figura 74 – Construção da Parábola – Instruções 1 e 2



Instrução 3: Construa um segmento com extremidades F e C (janela 3). Em seguida, encontre o ponto médio (Janela 2). Nomeio-o de D.

Instrução 4: Construa uma reta b perpendicular ao segmento FC que passe pelo ponto D. Obtenha o ponto E que será o ponto de interseção das retas b e r (Janela 2).

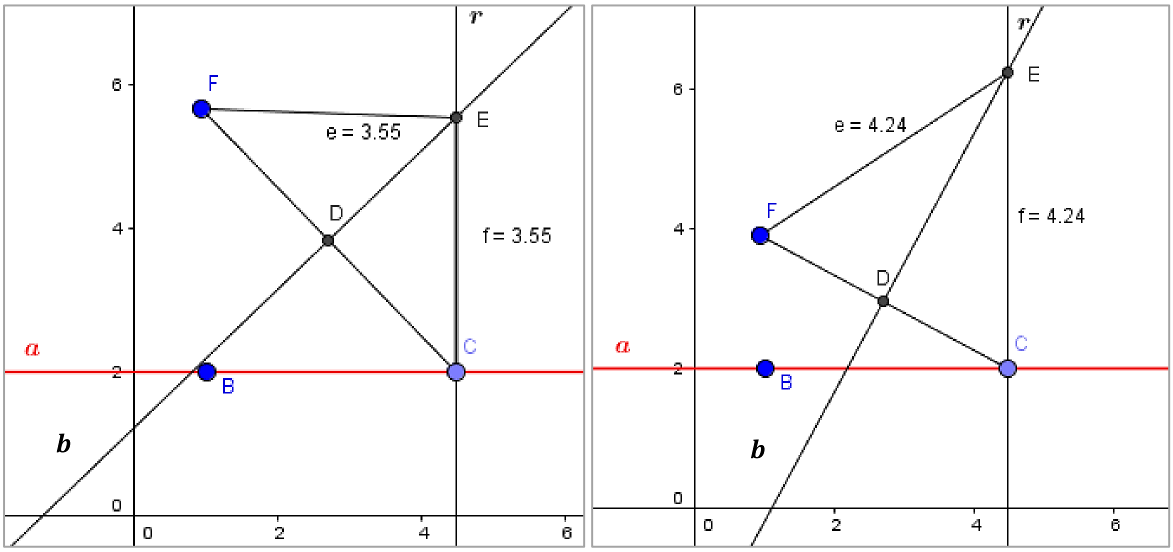
Figura 75 – Construção da Parábola – Instruções 3 e 4



Instrução 5: Construa um segmento FE e EC e calcule suas distâncias (Janela 8).

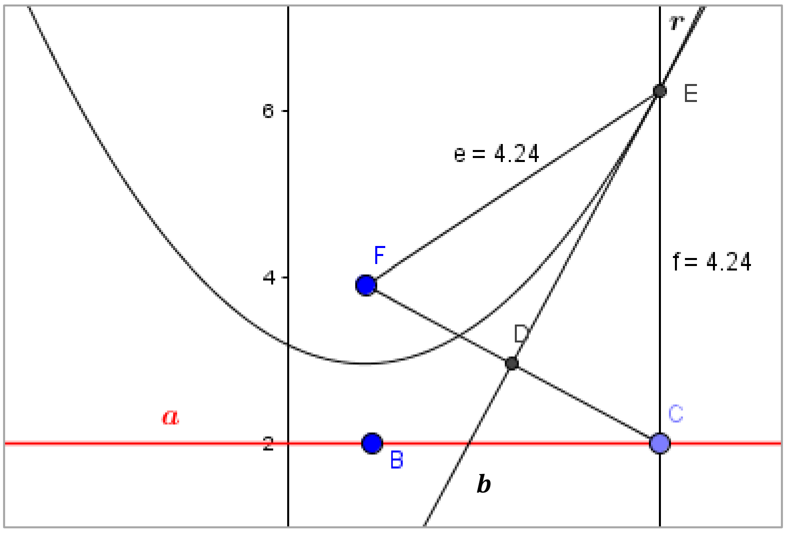
- Movimente-o o Foco. Compare as medidas de FE e EC.
- Que relação existe entre elas?

Figura 76 – Construção da Parábola – Instrução 5



Instrução 6: Selecione a opção "lugar geométrico" na janela 4. Clique sobre E e depois sobre C. Automaticamente o Geogebra mostra o lugar geométrico de todos os pontos pertencentes a parábola.

Figura 77 – Construção da Parábola – Instrução 6

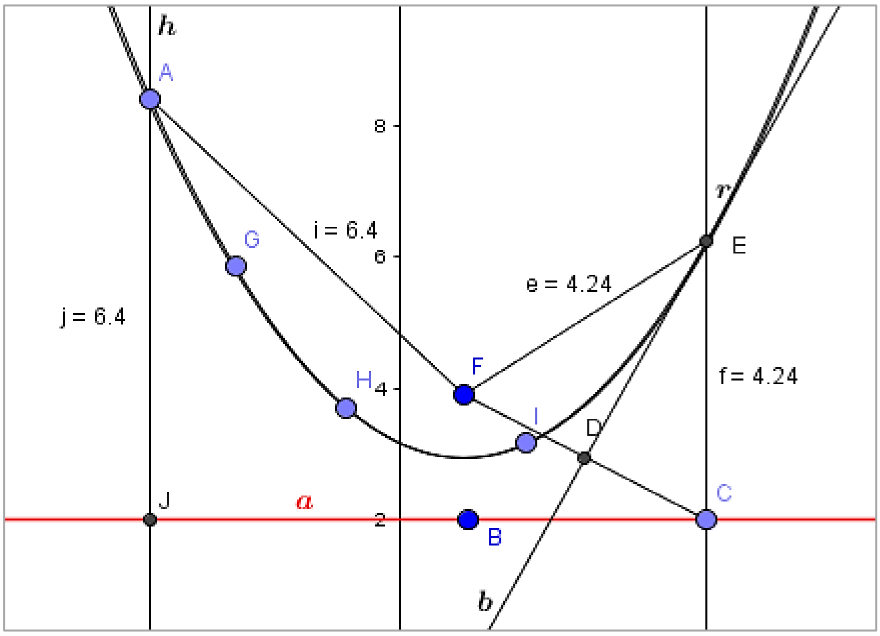


Instrução 7: Clique na janela 7 e selecione a opção cônica. Construa cinco pontos sobre o lugar geométrico obtido anteriormente para que o GeoGebra o reconheça como parábola. O quinto ponto deverá coincidir com o ponto E.

Instrução 8: Trace uma reta perpendicular h passando por um dos cinco pontos que definiram a parábola anteriormente e pela diretriz. Determine o ponto de interseção entre eles e chame-o de J. Construa o segmento FG e GJ.

Instrução 9: Compare as medidas de $\boldsymbol{FG}$ e **GJ** com $\boldsymbol{FE}$ e **EC**.

Figura 78 – Construção da Parábola – Instruções 7, 8 e 9



Instrução 10: Repita o procedimento anterior passando pelos outros pontos que definiram a parábola.

- Compare as medidas dos segmentos **FG** e **GJ** e identifique qual é a relação que existe entre eles.
- Compare as medidas dos segmentos **FE** e **EC** e identifique qual é a relação que existe entre eles.
- Analisando as relações entre os segmentos citados acima, qual é o nome que a curva destacada recebe?
- Os pontos **E** e **G** pertencem à parábola? Justifique.

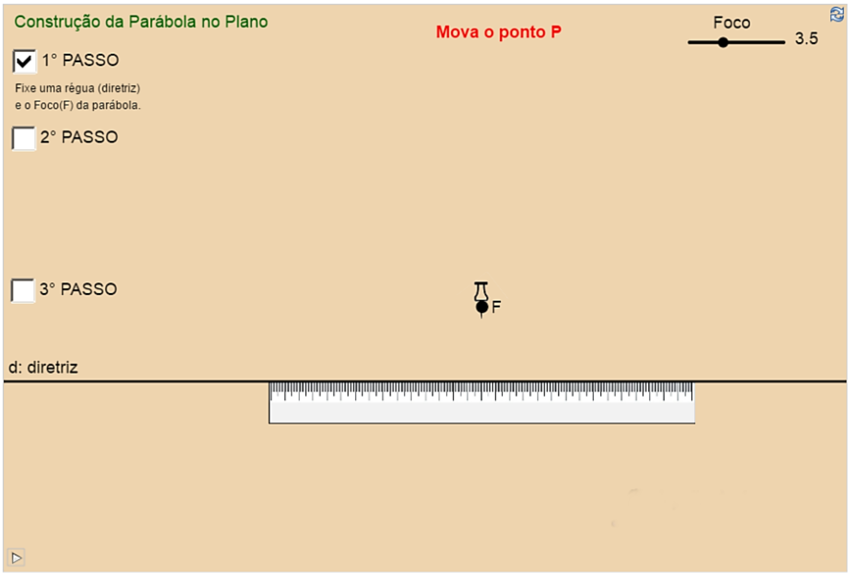
3.2.5 Método do Jardineiro para Traçar uma Parábola

Mostraremos abaixo como traçar mecanicamente a Parábola no plano (papel, cartolina, chão, etc.) tendo como base as definições usuais, processo conhecido como "Método do Jardineiro".

Conforme [13], para traçar uma Parábola no plano, siga os seguintes passos:

1. Fixe uma régua (diretriz) e um ponto que será o foco (F) da parábola;

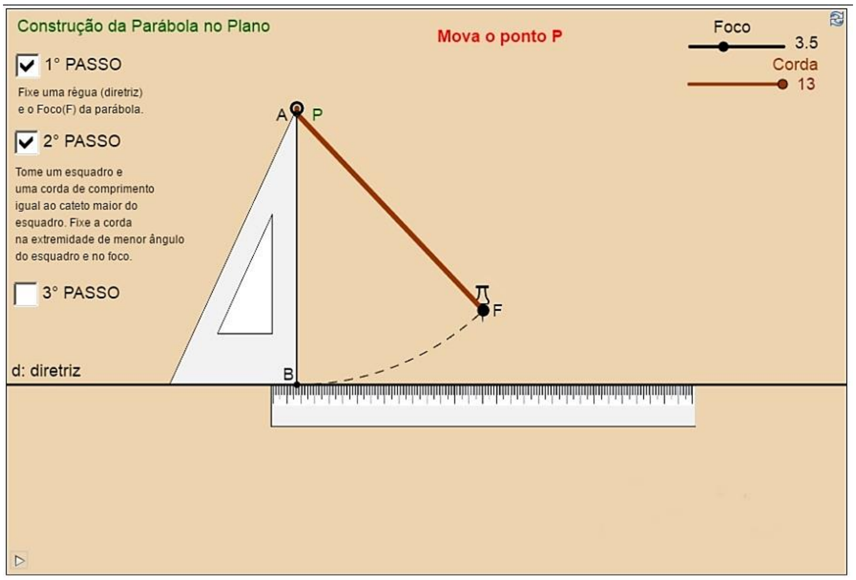
Figura 79 – Método do Jardineiro – Passo 1



Fonte: LIMA, João Paulo de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico –** Mossoró, 2014, 146 p.

2. Tome um esquadro e uma corda de comprimento igual ao cateto maior do esquadro e no foco;

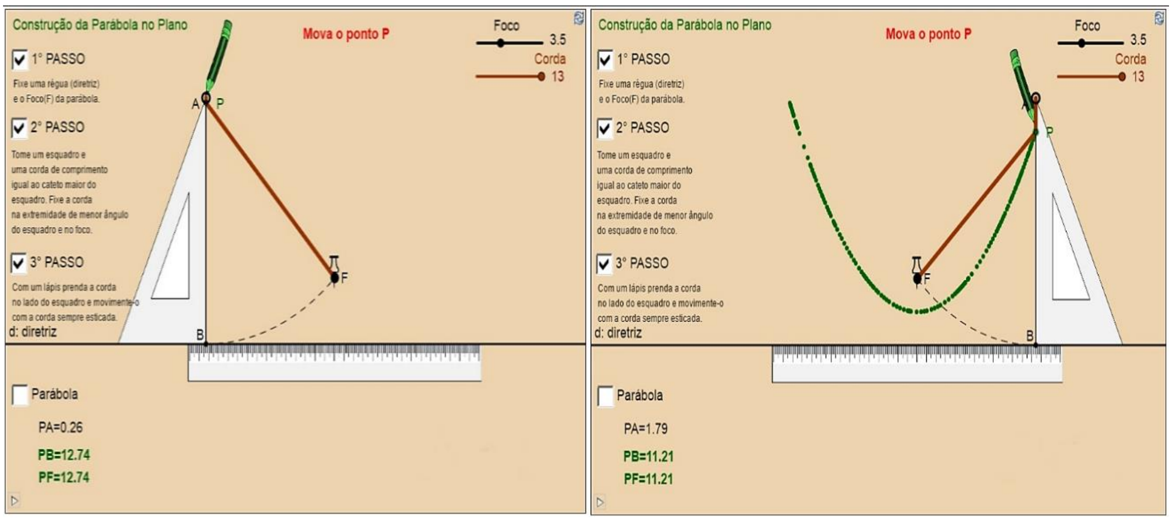
Figura 80 – Método do Jardineiro – Passo 2



Fonte: LIMA, João Paulo de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico –** Mossoró, 2014, 146 p.

3. Com um lápis prenda a corda no lado do esquadro e movimente-o com a corda sempre esticada.

Figura 81 – Método do Jardineiro – Passo 3



Fonte: LIMA, João Paulo de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico –** Mossoró, 2014, 146 p.

Observe que qualquer ponto da curva traçada é equidistante à régua e ao foco F. Logo, trata-se de uma parábola de foco no ponto fixo F escolhido e diretriz sendo a reta que contém o lado da régua fixa em contato com o esquadro.

3.2.6 Variação do Método de Al-Khwarizmi no GeoGebra

Na seção 2.4.2.2 vimos uma variação do Método de Al – Khwarizmi que usava áreas de figuras, conhecido como Método de Completar Quadrado. Aqui, utilizamos o software GeoGebra para a manipulação de soluções geométricas. Através da ferramenta **Seletor**, podemos variar os parâmetros da equação envolvida na construção geométrica. Assim, este recurso metodológico para o ensino de equações quadráticas propicia ao estudante a percepção de que a Matemática é uma ciência que vem sendo historicamente construída.

Segundo Oliveira [31], considere a equação de Al – Khwarizmi do tipo $x^2 + px = q$, com p e q positivos. O quadrado marrom tem por lado uma raiz positiva da equação e os retângulos verdes possuem lados $\boldsymbol{x}$ (raiz positiva da equação) e $\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}$. Observe ainda que a soma das áreas das três regiões em destaque (marrom e verde) é justamente $\boldsymbol{q}$.

Tomando $p = 8$ e $q = 84$, temos a equação $x^2 + 8x = 84$. Primeiramente, deixamos variamos um seletor de modo que o parâmetro $\boldsymbol{p}$ fique igual a 8; a seguir, variamos o parâmetro $\boldsymbol{x}$ até que a área do polígono $ACKJHG$ seja igual a 84. Como a soma das áreas em destaque é:

$$x^2 + x \cdot \frac{b}{2} + x \cdot \frac{b}{2} =$$

$$A(ABJE) + A(BCKJ) + A(EJHG) =$$

$$36 + 24 + 24 = 84 = \boldsymbol{q},$$

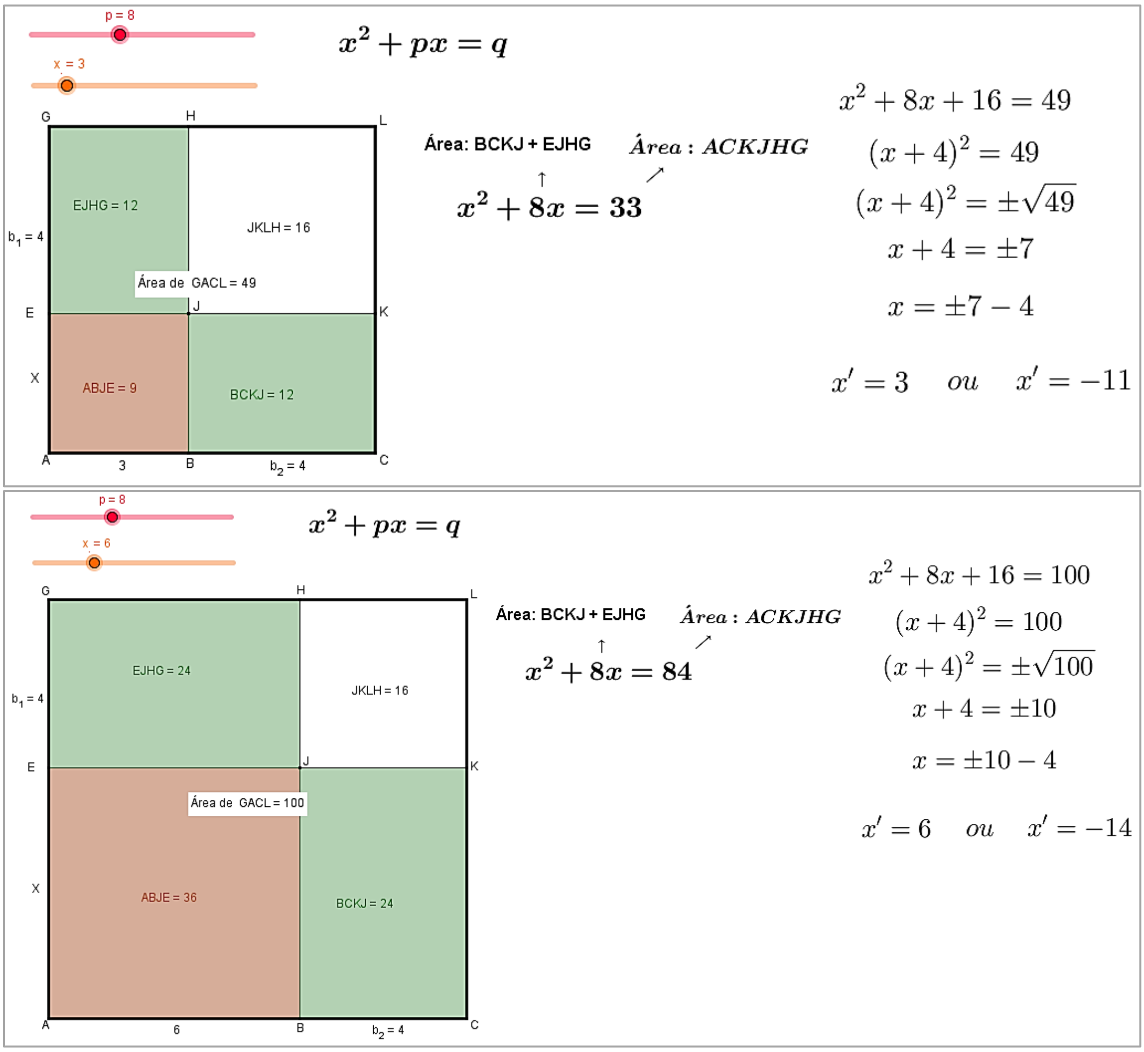
verificamos que o quadrado marrom tem área 36 e, portanto, a medida de seu lado vale $\sqrt{36} = 6$. Logo, a equação possui raiz real positiva $x' = 6$.

Observe, ao lado da figura, que a outra raiz seria $x'' = -14$. Como estamos trabalhando com áreas, essa raiz não faz sentido.

- O que acontece com as áreas quando o parâmetro p for igual a zero?
- Se $x = 0$, o que acontece com cada área?
- Se $p = x$, qual a relação das áreas do quadrado marrom com os dois retângulos verdes?

Perguntas como essas fazem com que o aluno explore ainda mais a relação que os coeficientes e a raiz da equação dada têm com suas respectivas áreas.

Figura 82 – Construção de Al – Khwarizmi no GeoGebra



4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Modificar algo ou propor uma mudança não se faz da noite para o dia, entretanto, vivemos em constantes modificações e adaptações e não podemos ignorar esses fatos. Com isso, a nossa proposta teve como finalidade apresentar uma metodologia diferenciada e mais adequada para trabalhar funções afins e quadráticas de forma teórica, algébrica, geométrica e histórica, bem como a inserção das TICs nesses conteúdos, despertando no aluno o gosto e prazer por essa disciplina.

Acreditamos que podemos motivar nossos alunos propondo para eles uma nova maneira de enxergar o conteúdo da matemática, saindo da passividade e se tornando sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem, estando o professor apenas como mediador.

Quando abordamos a forma geométrica das funções afins e quadráticas, aparece uma série de benefícios para os discentes, tais como: utilização dos recursos tecnológicos nas aulas de Matemática, contato dos alunos com ideias desconhecidas para eles e relação da álgebra com a geometria no tratamento de funções, fazendo com que o aluno busque vários caminhos para o entendimento do conteúdo.

Assim, espera-se que este trabalho contribua para o ensino das funções afins e quadráticas e que sirva de incentivo para os professores que desejam mudar suas práticas de ensino, saindo da tradicional prática expositiva e investigando algo mais dinâmico e interessante, buscando uma autoavaliação na forma de ensinar essas funções. Ao invés de incentivar a decorar uma série de fórmulas sem significado e buscar o resultado de forma mecânica e repetitiva, o professor deve priorizar no aluno o raciocínio lógico-matemático, proporcionando a ele a reflexão e a análise de forma consciente e construindo e desenvolvendo junto com o professor uma melhor maneira de aprender o conteúdo.

A forma tradicional de ensinar dá ênfase em decorar fórmulas, bastando para isso encontrar o resultado, de maneira repetitiva. Buscamos, com este trabalho, fazer com que o aluno busque o entendimento, o raciocínio lógico e atratividade pela disciplina.

Portanto, é indispensável que o professor que se detém a apenas uma forma de ensinar passe a fazer uso de vários métodos, tanto os antigos como os atuais, buscando, na maioria das vezes, utilizar a tecnologia para que os discentes tenham um melhor aproveitamento desses conteúdos e, com isso, possam enxergar as suas utilidades e aplicações no cotidiano, pois muitos ficam até curiosos em descobrirem qual a aplicabilidade daquilo que estão aprendendo.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, C. B. (1996). **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blucher LTDA., 2003.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio: MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Matematica.pdf.>. Acesso em: 13 jan. 2016.

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações Vol. 01**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[4] GARBI, Gilberto Geraldo. 2009. **O romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

[5] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 237 p.

[6] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007, 207 p.

[7] LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

[8] STEWART, James. **Cálculo, volume 1/James Stewart -7ª ed. ;**tradução EZ2 Translate. – São Paulo: Cengage Learning, 2014.

[9] PIERINI, Ana Caroline. **História da Função Quadrática**. Disponível em:< https://prezi.com/jvirjbprxy_c/historia-da-funcao-quadratica/> Acesso em 20 de jan. de 2016.

[10] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P.; **Tópicos de História da Matemática**; coleção PROFMAT, 1ª edição, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[11] TUNALA, N., **Resolução geométrica da equação do 2º grau.** Revista do Professor de Matemática, nº 12, 1988, p.33-35.

[12] AMARAL, J. T., **Método de Viète para resolução de equação do segundo grau.** Revista do Professor de Matemática, nº13, 1988, p.18-20.

[13] LIMA, João Paulo de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico –** Mossoró, 2014, 146 p.

[14] JÚNIOR, Renato Câmara Victório de Almeira. **Desenvolvimento de conceitos e resolução de atividades de função quadrática com o uso do software Geogebra** – Mato Grosso do Sul, 2013, 66 p.

[15] LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2001, 189 p.

[16] SILVA, Ramon de Abreu e. **Funções Quadráticas e suas Aplicações no Ensino Médio –** Rio de Janeiro, 2013, 53 p.

[17] MOTA, Emerson Ferreira Batista et al. **Geometria Dinâmica/PIBID/ Unimontes**: Contribuições do Geogebra para a Matemática na Educação Básica. 1. ed. Curitiba: 2013. 192 p.

[18] SOARES, Jóbson Hugo de Sousa. **Função Quadrática** – Natal, 2013, 40p.

[19] VILCHES, Maurício A. **Cálculo para economia e administração** Vol. 01, Rio de Janeiro, 425p.

[20] ALBUQUERQUE, Marcela; ROSENDO, Elizabeth. **Função quadrática ou do 2º grau**. Disponível em:< https://prezi.com/pgnexnkstbeg/funcao-quadratica-ou-de-2o-grau/> Acesso em 09 de Jun. de 2016.

[21] SOUZA, Walfredo José de. **Função afim: Teoria e aplicações –** Natal, 2013, 49 p.

[22] GIRADO, Victor. **Caracterização da função afim**. PROFMAT-SBM-Apresentação de slides, 2013.

[23] TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária: história e aplicações** – São Paulo, 2008, 97 p.

[24] CALVOSO, Júlio Cesar. **Estudo das cônicas com aplicações e o software geogebra como ferramenta de apoio didático** – Mato Grosso do Sul, 2014, 123 p.

[25] FERREIRA, Guttenberg Sergistótanes Santos; SILVA, Maria Edna Alves. **Método geométrico para resolução de equações algébricas** – In: Conferência Internacional de Educação Matemática, México, 2015, 13 p.

[26] PONTES, Ronaldo da Silva. **Equações polinomiais: soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas** – João Pessoa – PB, 2013, 90 p.

[27] NEVES, José Avelino Mota. **Resolução geométrica eq 2 grau**. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=rpvotKT17yM> Acesso em 10 de abril de 2016.

[28] STEWART, Ian Nicholas. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. 1ª ed. Editora: Zahar, 2014, 384 p.

[29] LIMA, E. L., A Equação do Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, nº 13, IMPA: Rio de Janeiro, 1988.

[30] BORBA, M.C. **Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento**. In: BICUDO, M.A.V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 285 – 295.

[31] OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo et al. **Resoluções de equação do 2º grau: método do passado com tecnologia do presente** – XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística. Revista da Educação Matemática da UFOP, vol. I, 2011.