



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL  
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELAINE DE SOUSA TEODOSIO

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES À GEOMETRIA NO  
ENSINO MÉDIO

FORTALEZA

2016

ELAINE DE SOUSA TEODOSIO

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES À GEOMETRIA NO ENSINO  
MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

T289n Teodosio, Elaine de Sousa  
Números complexos e suas aplicações à geometria no ensino médio / Elaine de Sousa Teodosio . –  
2016.  
102 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Círculo de nove pontos. 2. Reta de Simson . 3. Teorema de Cantor. I. Título.

---

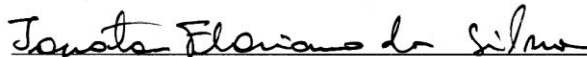
CDD 512.788

“NUMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES À GEOMETRIA  
NO ENSINO MEDIO”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

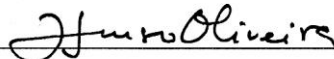
Aprovada em: 25 / 06 / 2016.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Me. José Afonso de Oliveira

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Damiano Júnio Gonçalves Araújo

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a Deus, meu pai Teodosio, minha mãe Francisca, meu irmão Thiago e minha irmã Sheila e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

## AGRADECIMENTOS

À Deus, a minha família: meu pai Teodosio, minha mãe Francisca ,meu irmão Thiago, minha irmã Sheila e meu namorado Isaias.

Ao núcleo gestor, aos alunos e colegas professores da Escola Estadual Proessora Eudes Veras.

A CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores do PROFMAT.

Aos colegas da turma de mestrado, em especial Milinia e Lucimara, pelas reflexões, críticas e sugestões .

“The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.”

Jacques Hadamard

## RESUMO

O conjunto dos números complexos muitas vezes é assunto esquecido no ensino médio. Quando abordado, há uma restrição em relação aos conteúdos na própria matriz curricular. Isso ocorre, talvez, pela ignorância quanto a sua aplicabilidade, fazendo com que seu estudo seja tratado especificamente na graduação de alguns cursos superiores. O presente trabalho tem como objetivo utilizar esses números na demonstração de alguns teoremas de geometria, mostrando assim sua aplicação nessa área da matemática. Para isso, inicialmente abordaremos os conceitos algébricos: operações de adição, multiplicação, potências de  $i$ , conjugado e módulo de um número complexo. Em seguida, conceitos geométricos simples como distância entre dois pontos, medidas de ângulo, condição de linearidade, ortogonalidade e cocircular, semelhança de triângulos e geometria analítica, que até então, utiliza-se apenas números reais, agora amplia-se para os números complexos. Com a inserção de números complexos na geometria é possível demonstrar teoremas como: O círculo de nove pontos, a reta de Simson, o teorema de Cantor, o teorema de Feuerbach e o teorema de Morley. Por fim, desenvolveremos o projeto: minicurso números complexos e geometria com um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Eudes Veras, localizada em Maracanaú, Ceará. Para a coleta dos dados foram utilizados, um questionário socioeconômico e um teste sobre potências de  $i$ , conjugado, módulo, equação da reta, teorema de Napoleão e círculo de nove pontos. Esses dados foram organizados e analisados

**Palavras-chave:** Números complexos. Geometria. Círculo de nove pontos. Reta de Simson. Teorema de Cantor. Teorema de Feuerbach. Teorema de Morley



## ABSTRACT

The set of complex numbers is often subject forgotten high school. When approached, there is a restriction on the content in their own curriculum. This is perhaps the ignorance of their applicability, making their study is specifically addressed in the graduation of some university courses. This study aims to use these numbers in the statement of some geometry theorems, showing its application in the area of ??mathematics. For this, initially we discuss the algebraic concepts: operations of addition, multiplication, powers of  $i$ , conjugate and modulus of a complex number. Then simple geometric concepts such as distance between two points, angle measurements, linearity condition, orthogonality and cocircular, similar triangles and analytic geometry, which until then, it uses only real numbers, now extends to the complex numbers . With the inclusion of complex numbers in geometry it is possible to prove theorems as: The circle of nine points, the straight of Simson, Cantor's theorem, Feuerbach's theorem and the theorem Morley. Finally, we will develop the project: short course complex numbers and geometry with a group of students of the 3rd year of high school at the State School Professor Eudes Veras, located in Maracanaú, Ceará. To collect the data were utilizados, a socioeconomic questionnaire and a test on powers of  $i$ , conjugate module, equation of the line, Napoleon's theorem and circle of nine points. These data were organized and analyzed.

**Keywords:** Complex numbers. Geometry. The nine-point circle. The Simson Line. The Cantor Theorems. The Feuerbach Theorem. The Morley Theorem.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Coordenadas complexas do ponto. . . . .	30
Figura 2 – Representação vetorial do ponto. . . . .	30
Figura 3 – Adição de números complexos. . . . .	31
Figura 4 – Multiplicação de número real por um número complexo. . . . .	32
Figura 5 – Coordenadas polares. . . . .	32
Figura 6 – Triângulo equilátero inscrito no círculo unitário. . . . .	38
Figura 7 – Ângulo orientado. . . . .	42
Figura 8 – Ângulo orientado positivamente. . . . .	43
Figura 9 – Rotação. . . . .	44
Figura 10 – Rotação em torno da origem através do ângulo dado. . . . .	44
Figura 11 – Rotação em torno da origem através do ângulo dado. . . . .	48
Figura 12 – Triângulo de Napoleão. . . . .	49
Figura 13 – Círculo unitário. . . . .	50
Figura 14 – Coordenadas do ortocentro. . . . .	58
Figura 15 – Interpretação geométrica do produto complexo. . . . .	60
Figura 16 – Os nove pontos do círculo de Euler. . . . .	61
Figura 17 – Demonstração do teorema do círculo de nove pontos. . . . .	63
Figura 18 – A reta de Simson. . . . .	64
Figura 19 – Teorema de Cantor. . . . .	68
Figura 20 – Teorema de Feuerbach. . . . .	71
Figura 21 – Teorema de Morley. . . . .	73
Figura 22 – Arcos e coordenadas. . . . .	75
Figura 23 – Trissetrizes adjacentes forma um triângulo equilátero. . . . .	75

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Grau de dificuldade. . . . .	81
Gráfico 2 – Primeira questão. . . . .	82
Gráfico 3 – Acertos da segunda questão. . . . .	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de inscrito por turma. . . . .	77
Tabela 2 – Frequência. . . . .	77
Tabela 3 – Renda familiar. . . . .	78
Tabela 4 – Nível de escolaridade do pai. . . . .	78
Tabela 5 – Nível de escolaridade da mãe. . . . .	78
Tabela 6 – Horas estudadas por dia além das horas em sala de aula. . . . .	79
Tabela 7 – Nota que você se daria como estudante. . . . .	79
Tabela 8 – Nota para o grau de importância de matemática para a sua vida. . . . .	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\gamma$	Gama
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\Delta$	Delta
$\neq$	Diferente
$\epsilon$	Epsilon
$\infty$	Infinito
$\lambda$	Lambda
$=$	Igual
$\geq$	Maior ou igual que
$\leq$	Menor ou igual que
$\parallel$	Retas paralelas
$\perp$	Retas perpendiculares
$\in$	Pertence
$\pi$	Pi
%	Porcentagem
$\rho$	Rho
$\theta$	Theta
$\cup$	União

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA . . . . .	18
2.1	Representação algébrica dos números complexos . . . . .	18
2.1.1	Definição de números complexos . . . . .	19
2.1.2	Propriedades relativas à adição . . . . .	19
2.1.3	Propriedades relativas a multiplicação . . . . .	20
2.1.4	Os números complexos na forma algébrica . . . . .	22
2.1.5	Potências do número $i$ . . . . .	24
2.1.6	Conjugado de um número complexo . . . . .	24
2.1.7	Módulo do número complexo . . . . .	26
2.1.8	Equações do 2º grau . . . . .	27
2.2	Interpretação geométrica . . . . .	29
2.2.1	Interpretação geométrica do número complexo . . . . .	29
2.2.2	Interpretação geométrica do módulo . . . . .	30
2.2.3	Interpretação geométrica das operações . . . . .	31
2.3	Representação polar dos números complexos . . . . .	32
2.3.1	Coordenadas polares no plano . . . . .	32
2.3.2	Representação polar do número complexo . . . . .	33
2.3.3	Operações com números complexos na forma polar . . . . .	33
2.4	Raízes $n$ -ésimas da unidade . . . . .	35
2.4.1	Definindo as raízes $n$ -ésimas . . . . .	35
2.4.2	As raízes $n$ -ésimas da unidade . . . . .	37
2.5	Algumas noções geométricas simples e propriedades . . . . .	38
2.5.1	A distância entre dois pontos . . . . .	38
2.5.2	Segmentos, raios e retas . . . . .	39
2.5.3	Dividindo um segmento para uma determinada razão . . . . .	42
2.5.4	Medida de um ângulo . . . . .	42
2.5.5	Rotação de um ponto . . . . .	43
2.6	Condição de linearidade, ortogonalidade e cocircularidade . . . . .	44
2.7	Triângulos semelhantes . . . . .	45
2.8	Triângulos equiláteros . . . . .	46
2.9	Geometria analítica no plano complexo . . . . .	50
2.9.1	Equação da reta . . . . .	50
2.9.1.1	Equação da reta determinada por dois pontos . . . . .	51
2.9.1.2	Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta . . . . .	54
2.9.2	A equação da circunferência . . . . .	55

3	<b>APLICAÇÕES À GEOMETRIA</b> . . . . .	57
3.1	O círculo dos nove pontos . . . . .	57
3.1.1	O produto real de dois números complexos . . . . .	57
3.1.2	O produto complexo de dois números complexos . . . . .	59
3.1.3	Os nove pontos do círculo de Euler . . . . .	61
3.2	A reta de Simson . . . . .	63
3.3	Teorema de Cantor . . . . .	68
3.4	Teorema de Feuerbach . . . . .	71
3.5	Teorema de Morley . . . . .	73
4	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> . . . . .	76
4.1	Metodologia de aplicação . . . . .	76
4.2	Contexto . . . . .	76
4.3	Participantes . . . . .	77
4.3.0.1	<i>Problemas encontrados</i> . . . . .	79
4.4	Projeto: Minicurso de números complexos e geometria . . . . .	80
4.4.1	Justificativa . . . . .	80
4.4.2	Desenvolvimento do projeto . . . . .	80
4.4.3	Avaliação . . . . .	81
4.4.3.1	Resultado da avaliação . . . . .	81
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	84
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	85
	<b>APÊNDICE A – INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS</b>	87



## 1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em nosso dia a dia desde os tempos mais remotos. O homem desenvolveu a matemática para melhorar a sua vida e ao longo do tempo, esses conhecimentos se multiplicaram e deram novas possibilidades ao indivíduo para construir e transformar nossa sociedade de forma singular. Em meio a tantas contribuições, a linguagem da matemática encontra espaço nas escolas de ensino regular para continuar sendo pensada e repensada de modo a construir novas descobertas.

Para facilitar a compreensão dos conhecimentos matemáticos, há uma preocupação em dividir seus conteúdos. Em especial nesse trabalho de pesquisa tratamos do ensino dos números complexos, que nas escolas de ensino médio têm como motivação inicial a resolução de equações de segundo grau, contudo percebemos que não há um aprofundamento dos estudos relacionados a essa temática.

O não aprofundamento do estudo envolvendo o conjunto dos números complexos gera dúvidas nos alunos que por sua vez tem a impressão de que os mesmos não têm outra utilidade e que foram criados e desenvolvidos com o propósito de solucionar todas as equações quadráticas. Nós professores precisamos mudar essa realidade pois é impossível imaginar a matemática moderna sem os números complexos. Sabemos que todos os domínios matemáticos fazem uso deles de alguma forma. Isso também é verdade para outras disciplinas como por exemplo mecânica, física, hidrodinâmica e química.

É importante ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que este assunto fique na parte flexível do currículo. Mas, devemos esclarecer que os números complexos também são eficazes na resolução de problemas relacionados aos conteúdos geométricos. Desse modo, o trabalho tem como objetivo verificar a aplicabilidade desses números à geometria e assim apresentar o elo que há entre essas áreas. Para estudarmos esse assunto nessa abordagem, organizamos os conteúdos deste trabalho em três capítulos.

O primeiro foca a representação e manipulação algébrica, e para isso acontecer de modo satisfatório revisitamos assuntos simples dos conteúdos geométricos com a inserção dos números complexos, esse detalhe fará toda diferença na construção desse conhecimento. O segundo capítulo tem como objetivo mostrar a eficiência dos números complexos na demonstração de teoremas como o círculo de nove pontos, a reta de Simson, o teorema de Cantor, o teorema de Feuerbach e o teorema de Morley. Ainda neste capítulo serão apresentados dois resultados bem interessantes que é o produto real e o produto complexo de dois números complexos que é uma adaptação do produto escalar e do produto vetorial, respectivamente, ambos são usados para simplificar problemas consideráveis. O terceiro capítulo retrata a metodologia da pesquisa, onde serão apresentados os participantes, a condução da atividade, os instrumentos de coleta dos dados e a análise dos resultados.

O embasamento teórico deste trabalho tem como principais referências os li-

vros: “Complex numbers from A to...Z” de Titu Andreescu e Dorin Andrica e “Complex numbers and Geometry” de Liang-shin Hahn.

## 2 NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA

Os números complexos, na maioria das vezes, não são contemplados na matriz curricular do ensino médio, e quando há um espaço para a contemplação deste conteúdo ao longo do ano letivo, percebemos que sua explanação fica restrita a perspectiva algébrica. No entanto, é preciso ressaltar que os números complexos contemplam, também, aspectos geométricos importantes e de aplicabilidade em várias áreas do conhecimento científico, e nesse trabalho ressaltamos a área que compreende a matemática.

Estamos convictos de que o ideal é a interação entre as perspectivas algébricas e geométricas no estudo sobre os números complexos. Acreditamos que essa estratégia permite que os alunos compreendam a utilidade e a beleza de tais números e, consequentemente, desmistificaríamos o pensamento de que os mesmos são desnecessários.

Portanto, nesta seção temos como objetivo ampliar os conceitos geométricos já existentes a partir da utilização dos números complexos.

### 2.1 Representação algébrica dos números complexos

Na tentativa de solucionar problemas envolvendo equações algébricas desenvolve-se a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos. Em meados do século XVI Cardano e Tartaglia em uma espécie de competição, buscam a solução da equação do 3º grau e percebem que os números reais não são suficientes para resolvê-la. A partir dessas tentativas, surgem as primeiras ideias para a criação (desenvolvimento) dos números complexos.

No século XVIII, dois matemáticos contribuíram de forma significativa para o estudo dos números complexos. O primeiro foi René Descartes (França, 1596 - 1650), vale ressaltar que:

Com o domínio da geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Em uma passagem do Discurso do Método escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”.

Por esse motivo, até hoje o número  $\sqrt{-1}$  é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão “número complexo”. Infelizmente, são designações um tanto inadequadas e subjetivas para objetos matemáticos. ( <http://www.ime.usp.br/martha/caem/complexos.pdf>).

Em seguida, Leonhard Euler (Suíça, 1707 - 1783) também fez uma importante contribuição quando denotou que  $i$  vale  $\sqrt{-1}$ , melhorando a simbologia dos números complexos.

Nesta seção vamos estudar a definição de números complexos, operações e propriedades.

### 2.1.1 Definição de números complexos

No que segue, ao assumirmos que a definição das propriedades básicas dos conjuntos dos números reais  $\mathbb{R}$  são conhecidas, vamos considerar o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dois elementos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  são iguais se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . Definimos as operações de adição e multiplicação, em  $\mathbb{R}^2$ , por

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2,$$

para todos  $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  e  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

O elemento  $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^2$  é chamada a soma de  $z_1, z_2$  e o elemento  $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}^2$  é chamado o produto.

**Observação 2.1.** 1. Se  $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$  e  $z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ , então  $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2, 0)$ .

2. Se  $z_1 = (0, y_1) \in \mathbb{R}^2$  e  $z_2 = (0, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , então  $z_1 \cdot z_2 = (-y_1y_2, 0)$ .

**Definição 2.1.** O conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido das operações de adição e multiplicação, é chamado o conjunto dos números complexos, denotado por  $\mathbb{C}$ . O elemento  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  é chamado número complexo.

A notação  $\mathbb{C}^*$  é usada indicando o conjunto  $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ .

### 2.1.2 Propriedades relativas à adição

A adição de números complexos satisfaz as seguintes propriedades:

a) Comutatividade.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

b) Associatividade.

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

*Demonstração.* De fato, se  $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$  e  $z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ , então

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$

e

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$$

portanto, temos a igualdade devido à associatividade da adição de números reais. ■

c) Identidade aditiva.

Existe um único número complexo  $0 = (0, 0)$  de tal modo que

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ para todos } z = (x, y) \in \mathbb{C}.$$

d) Inverso aditivo.

Para um número complexo  $z = (x, y)$  existe um único  $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$  de tal modo que

$$z + (-z) = (-z) + z = 0 \text{ para todos } z = (x, y) \in \mathbb{C}$$

As propriedades (a), (c) e (d) decorre de seus análogos no conjunto dos números reais.

O número  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$  é chamado de diferença do número  $z_1$  e  $z_2$ . A operação atribuída aos números  $z_1$  e  $z_2$  pelo número  $z_1 - z_2$  é chamada de subtração e é definida por

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{C}.$$

### 2.1.3 Propriedades relativas a multiplicação

A multiplicação de números complexos satisfaz as seguintes propriedades:

a) Comutatividade.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

b) Associatividade.

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

c) Identidade multiplicativa.

Existe um único número complexo  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$  de tal modo que

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \text{ para todos } z \in \mathbb{C}.$$

*Demonstração.* Com uma manipulação algébrica simples podemos verificar essas igualdades:

$$z \cdot 1 = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z$$

e

$$1 \cdot z = (1, 0) \cdot (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) = (x, y) = z.$$

■

d) Inverso multiplicativo.

Para um número complexo  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  existe um único  $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$  de tal modo que

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1.$$

*Demonstração.* Temos que encontrar  $z^{-1} = (x', y')$ , observe que  $(x, y) \neq (0, 0)$  implica  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$  e conseqüentemente  $x^2 + y^2 \neq 0$ .

A relação  $z \cdot z^{-1} = 1$  dá  $(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0)$ , ou equivalentemente

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1, \\ yx' + xy' = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema no que diz respeito a  $x'$  e  $y'$ , obtemos

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ e } y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Conseqüentemente o inverso multiplicativo do número complexo  $(x, y) \in \mathbb{C}^*$  é

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{C}^*$$

Pela comutatividade também temos  $z^{-1} \cdot z = 1$ . ■

As propriedades acima referidas mostram que o conjunto dos números complexos, formam um corpo.

Dois números complexos  $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$  e  $z = (x, y) \in \mathbb{C}^*$  determina unicamente um terceiro número chamado quociente, denotado por  $\frac{z_1}{z}$  e definimos por

$$\frac{z_1}{z} = z_1 \cdot z^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{x_1x + y_1y}{x^2 + y^2}, \frac{-x_1y + y_1x}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{C}$$

**Definição 2.2.** Uma potência inteira de um número complexo  $z \in \mathbb{C}^*$  é

$$z^0 = 1; z^1 = z; z^2 = z \cdot z;$$

$$z^n = z \cdot z \dots z, \text{ para todos inteiros } n > 0$$

e  $z^n = (z^{-1})^{-n}$  para todos inteiros  $n < 0$ .

Na seguinte proposição obtemos os resultados para o produto e a divisão de potências de mesma base, potência de potência e o produto e a divisão de uma potência.

**Proposição 2.1.** Para todos números complexos  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e todos inteiros  $m, n$  temos:

1.  $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ ;
2.  $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$ ;
3.  $(z^m)^n = z^{mn}$ ;
4.  $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$ ;
5.  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$ .

Quando  $z = 0$ , definimos  $0^n = 0$  para todos inteiros  $n > 0$ .

e) Distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \text{ para todos } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

As propriedades (a), (b) e (e) são fáceis de verificar.

### 2.1.4 Os números complexos na forma algébrica

Para manipulação algébrica não é conveniente representar um número complexo da forma como foi definido anteriormente. Por esta razão, apresentaremos outra forma de escrita.

Para introduzir esta nova representação algébrica, considere o conjunto  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , juntamente com as operações de adição e multiplicação definidos em  $\mathbb{R}^2$ . A função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = (x, 0)$$

é bijetiva e além disso

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \text{ e } (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

Não podemos deixar de notar que as operações algébricas em  $\mathbb{R} \times \{0\}$  são semelhantes às operações em  $\mathbb{R}$ , por isso, podemos identificar o par ordenado  $(x, 0)$  com o número  $x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, podemos usar, pelo que precede a bijeção de  $f$ , a notação  $(x, 0) = x$ .

Sendo  $i = (0, 1)$  obtemos,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Na proposição abaixo, mostraremos a representação algébrica do número complexo  $z = (x, y)$

**Proposição 2.2.** Qualquer número complexo  $z = (x, y)$  pode ser representado exclusiva-

mente na forma

$$z = x + yi$$

onde  $x, y$  são números reais, e  $i^2 = -1$ .

A identidade  $i^2 = -1$  decorre diretamente da definição de multiplicação:  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

A expressão  $z = x + yi$  é chamada de representação algébrica do número complexo  $z = (x, y)$ , por isso podemos escrever  $\mathbb{C} = \{x + yi | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ . A partir de agora vamos denotar o número complexo  $z = (x, y)$  por  $x + yi$ . O número real  $x$  é chamada a parte real do número complexo  $z$  e será denotado por  $x = Re(z)$  e semelhante,  $y$  é chamada parte imaginária de  $z$  e será denotado por  $y = Im(z)$ . O número complexo  $yi$ ,  $y \in \mathbb{R}$  - em outras palavras, cuja parte real é 0 - são chamados de imaginários. Por outro lado, os números da forma  $yi$ ,  $y \in \mathbb{R}^*$ , são chamados puramente imaginários e  $i$  é chamado a unidade imaginária.

As seguintes relações são fáceis de verificar:

a)  $z_1 = z_2$  se e somente se  $Re(z_1) = Re(z_2)$  e  $Im(z_1) = Im(z_2)$ .

b)  $z \in \mathbb{R}$  se e somente se  $Im(z) = 0$ .

c)  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  se e somente se  $Im(z) \neq 0$ .

Usando a representação algébrica, as operações usuais com números complexos podem ser realizada como se segue:

1) Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Podemos observar que

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2);$$

$$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2).$$

2) Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \in \mathbb{C}.$$

Em outra palavras

$$Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$$

e

$$Im(z_1 \cdot z_2) = Im(z_1)Re(z_2) + Im(z_2)Re(z_1).$$



Para um número real  $\lambda$  e um número complexo  $z = x + yi$ ,

$$\lambda \cdot z = (\lambda + 0i)(x + yi) = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi \in \mathbb{C}$$

é o produto de um número real com um número complexo.

As seguintes propriedades são válidas:

1.  $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$ ;
2.  $\lambda_1(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \lambda_2)z$ ;
3.  $(\lambda_1 + \lambda_2)z = \lambda_1 z + \lambda_2 z$  para todos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  e  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

3) Subtração

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i \in \mathbb{C}.$$

Isso é,

$$Re(z_1 - z_2) = Re(z_1) - Re(z_2);$$

$$Im(z_1 - z_2) = Im(z_1) - Im(z_2).$$

### 2.1.5 Potências do número $i$

As fórmulas para as potências de um número complexo com expoentes inteiros são preservadas para a forma algébrica  $z = x + yi$ . Considerando  $z = i$ , obtemos

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1; i^5 = i^4 \cdot i = i; i^6 = i^5 \cdot i = -1; i^7 = i^6 \cdot i = -i$$

Pode-se provar por indução que para qualquer inteiro positivo  $n$ ,

$$i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i.$$

Consequentemente  $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$  para todos inteiros  $n \geq 0$ . Se  $n$  é um inteiro negativo, temos

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}.$$

### 2.1.6 Conjugado de um número complexo

Para  $z = x + yi$  o número  $\bar{z} = x - yi$  é chamado o conjugado do número complexo  $z$ .

A conjugação tem as propriedades abaixo.

**Proposição 2.3.** *Dados  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos:*

1. A relação  $z = \bar{\bar{z}}$  ocorre se, e somente se,  $z \in \mathbb{R}$ .

2. Para qualquer número complexo  $z$  vale a relação  $z = \bar{\bar{z}}$ .
3. Para qualquer número complexo  $z$  o número  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$  é um número real não negativo.
4.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  (o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados).
5.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  (o conjugado de um produto é o produto dos conjugados).
6. Para qualquer número complexo  $z$ , diferente de zero, temos a relação  $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ .
7.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  (o conjugado de um quociente é o quociente dos conjugados),  $z_2 \neq 0$ .
8. As fórmulas

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são válidas para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* 1. Se  $z = x + yi$ , a relação  $z = \bar{z}$  é equivalente a  $x + yi = x - yi$ .

Consequentemente  $2yi = 0$ . Isso ocorre se e somente se  $y = 0$  e portanto  $z = x \in \mathbb{R}$ .

2. Temos  $\bar{z} = x - yi$  e  $\bar{\bar{z}} = x - (-yi) = x + yi = z$ .
3. Observe que  $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$ .
4. Note que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

5. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

6. Como  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ , então  $\overline{\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)} = \bar{1}$  e consequentemente  $\bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$ , produzindo  $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ .
7. Observe que  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .
8. A partir das relações

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x,$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$$

segue que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

■

### Observação 2.2.

Para obter o inverso multiplicativo de um número complexo  $z \in \mathbb{C}^*$  pode-se usar a seguinte fórmula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

O conjugado complexo nos permite obter o quociente de dois números complexos do se-

guinte modo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}.$$

### 2.1.7 Módulo do número complexo

O número  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  é chamado módulo ou valor absoluto do número complexo  $z = x + yi$ .

Por exemplo, os números complexos

$$z_1 = 4 + 3i, z_2 = -3i \text{ e } z_3 = 2$$

tem módulos, respectivamente

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, |z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \text{ e } |z_3| = \sqrt{2^2} = 2.$$

Na próxima proposição mostraremos as propriedades do módulo.

**Proposição 2.4.** *As seguintes propriedades são satisfeitas:*

1.  $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$  e  $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ .
2.  $|z| \geq 0$ . Além disso, temos  $|z| = 0$  se e somente se  $z = 0$ .
3.  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ .
4.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .
5.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  (o módulo do produto é o produto dos módulos).
6.  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
7.  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ ,  $z \neq 0$ .
8.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  (o módulo do quociente é o quociente dos módulos),  $z_2 \neq 0$ .
9.  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

*Demonstração.* Pode se facilmente checar que (1) - (4) é válida. Vejamos os demais casos.

5. Temos que

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

e conseqüentemente

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

com  $|z| \geq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

6. Observe que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2.$$

Sabemos que  $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$ , logo

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}\{z_1 \overline{z_2}\} \leq 2|z_1 \overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|.$$

Assim,

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

e conseqüentemente  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

Para obter a outra desigualdade, observe que

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |(-z_2)| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

com isso,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

7. Note que  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ , implicando que  $|z| \left| \frac{1}{z} \right| = 1$ , ou  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ . Conseqüentemente,  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ .

8) Temos que

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

9) Podemos escrever

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

então

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Por outro lado,

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

■

### 2.1.8 Equações do 2º grau

Nesta seção resolveremos equações quadráticas com coeficientes reais quando o discriminante é negativo e, também mostraremos a solução para as equações que tem coeficientes complexos.

O primeiro caso a ser analisado é a equação do 2º grau com coeficientes reais

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

em que o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  é negativo.

Completando quadrados, facilmente temos a equivalência

$$a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

Pela *proposição 2.2* temos  $i^2 = -1$ , portanto

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = 0,$$

e assim  $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

Agora para as equações quadráticas com coeficientes complexos usamos a mesma manipulação algébrica como no caso dos coeficiente reais, então

$$a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

Isto é equivalente a

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ . Chamado o discriminante da equação do 2º grau. Sendo

$$z = x + \frac{b}{2a} \text{ e } \xi = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

Nosso problema torna-se em resolver  $z^2 = \xi$  para um número complexo arbitrário  $\xi$ . Denotando

$$z = u + iv, \text{ e } \xi = \alpha + i\beta,$$

devemos encontrar uma par de números reais  $u$  e  $v$  tais que

$$z = (u + iv)^2 = \alpha + i\beta.$$

Reescrevendo a igualdade, temos:

$$(u^2 - v^2) + 2iuv = \alpha + i\beta.$$

Consequentemente, nosso problema se reduz em resolver o sistema de equações

$$u^2 - v^2 = \alpha \text{ e } 2uv = \beta$$

Portanto,

$$(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

onde  $u^2 + v^2 \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$  e  $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$u^2 + v^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Daí,

$$u^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \text{ e } v^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

Note que,

$$\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \geq 0 \text{ e } \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \geq 0,$$

de modo que,

$$u = \pm \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } v = \pm \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde os sinais devem ser escolhidos para satisfazer  $2uv = \beta$ . Isto é, a raiz quadrada  $\sqrt{\xi} = u + iv$  é dado por

$$\sqrt{\xi} = \begin{cases} \pm \left( \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right), & \text{para } \beta > 0; \\ \pm \left( - \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right), & \text{para } \beta < 0; \\ \pm \sqrt{\alpha}, & \text{para } \beta = 0 \text{ e } \alpha \geq 0; \\ \pm i \sqrt{-\alpha}, & \text{para } \beta = 0 \text{ e } \alpha < 0. \end{cases}$$

Mostramos que cada número complexo diferente de zero tem duas raízes quadradas.

## 2.2 Interpretação geométrica

### 2.2.1 Interpretação geométrica do número complexo

A interpretação geométrica, que hoje conhecemos é devida ao matemático Jean-Robert Argand que teve a ideia de representar um número complexo como um ente provido de grandeza absoluta e de direção no plano. Nesta seção apresentaremos a representação geométrica do números complexo, do módulo e das operações.

Definimos um número complexo  $z = (x, y) = x + yi$  como um par ordenado de números reais  $(x, y) \in \mathbb{R}$ , então é natural que o número complexo  $z = x + yi$  seja representado pelo ponto  $M(x, y)$  no plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

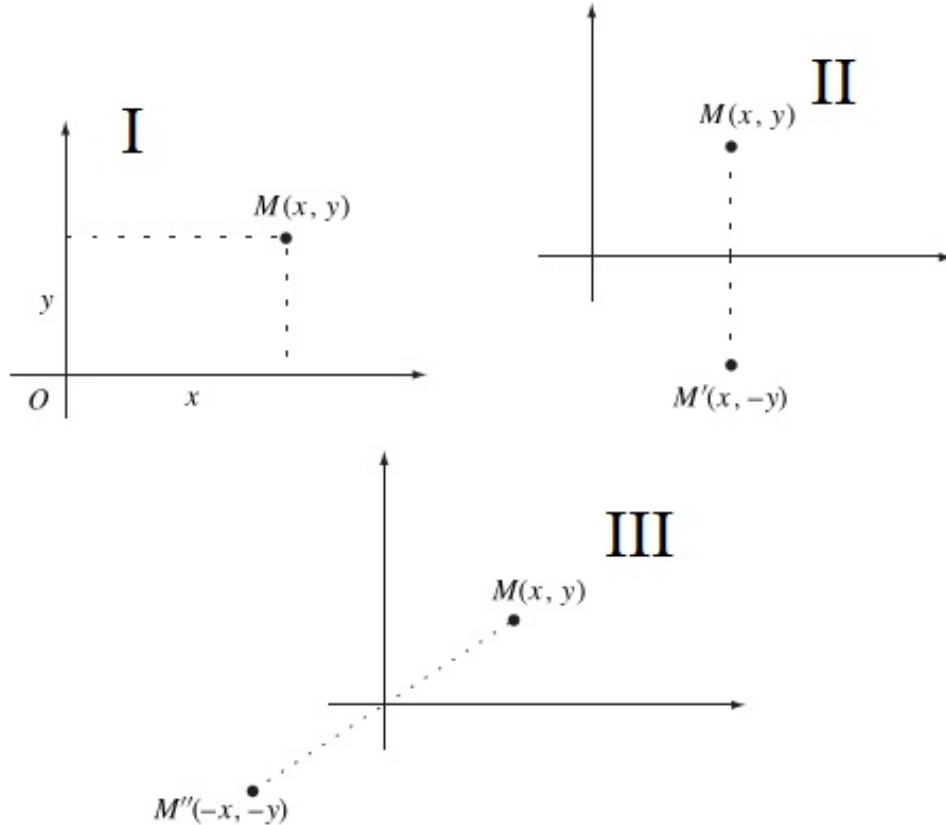
Para uma apresentação formal, vamos considerar  $P$  como sendo o conjunto de pontos de um determinado plano  $\pi$  com o sistema de coordenadas  $xOy$ . Considere a

função bijetiva  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow P$ ,  $\varphi(z) = x + yi$ .

**Definição 2.3.** O ponto  $M(x, y)$  é chamado imagem geométrica do número complexo  $z = x + yi$ .

O número complexo  $z = x + yi$  é chamado de coordenadas complexas do ponto  $M(x, y)$ . Usaremos a notação  $M(z)$  para indicar que a coordenada complexa de  $M$  é o número  $z$  (Observe a Figura 1).

Figura 1 – Coordenadas complexas do ponto.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

A imagem geométrica do conjugado de  $z = x + yi$  é a reflexão  $M'(x, -y)$ , ao longo do eixo  $x$ , do ponto  $M(x, y)$ , representado na figura II.

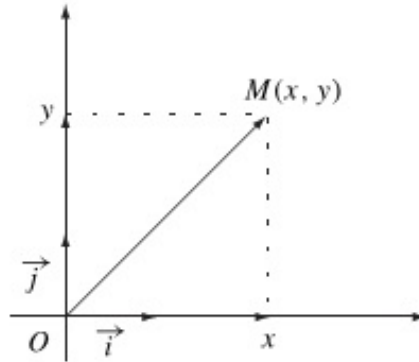
A imagem geométrica do inverso aditivo  $-z$ , do número complexo  $z = x + yi$ , é a reflexão  $M''(-x, -y)$  ao longo da origem do ponto  $M(x, y)$  (na figura III).

A função bijetiva  $\varphi$  mapeia o conjunto  $\mathbb{R}$  sobre o eixo  $x$ , chamado de eixo real. Por outro lado, os números complexos imaginários correspondem ao eixo  $y$ , que é chamado eixo imaginário. O plano  $\pi$ , cujos os pontos são identificados com números complexos, é chamado de plano complexo.

Por outro lado, podemos identificar um número complexo  $z = x + yi$  como um vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ , onde  $M(x, y)$  é a imagem geométrica do número complexo, representado na figura 2.

Consideramos  $V_0$  o conjunto dos vetores cujos pontos iniciais são a origem  $O$ .

Figura 2 – Representação vetorial do ponto.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Então, podemos definir a função bijetiva:

$$\varphi' : \mathbb{C} \rightarrow V_0, \quad \varphi'(z) = \overrightarrow{OM} = \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

onde  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os vetores do eixo  $x$  e eixo  $y$ , respectivamente.

### 2.2.2 Interpretação geométrica do módulo

Vamos considerar um número complexo  $z = x + yi$  e a imagem geométrica  $M(x, y)$  no plano complexo e  $O = (0, 0)$  pois é a origem. A distância euclidiana do segmento  $OM$  é dada pela fórmula

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2},$$

portanto  $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = |z| = |\vec{v}|$ . Em outras palavras, o valor absoluto de  $|z|$  do número complexo  $z = x + yi$  é o comprimento do segmento  $OM$  ou a magnitude do vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

- Observação 2.3.**
1. Para o número real  $r$ , o conjunto dos números complexos com módulo  $r$  corresponde no plano complexo a  $C(O; r)$ , essa é a notação para o círculo de centro  $O$  e raio  $r$ .
  2. Os números complexos  $z$  com  $|z| < r$  correspondem aos pontos do interior do círculo  $C(O; r)$ . Por outro lado os números complexos  $z$  com  $|z| > r$  correspondem aos pontos exteriores ao círculo.

### 2.2.3 Interpretação geométrica das operações

a) Adição e subtração

Considere os números complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  e os vetores correspondentes  $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  e  $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ .



Observe que a soma dos números complexos é

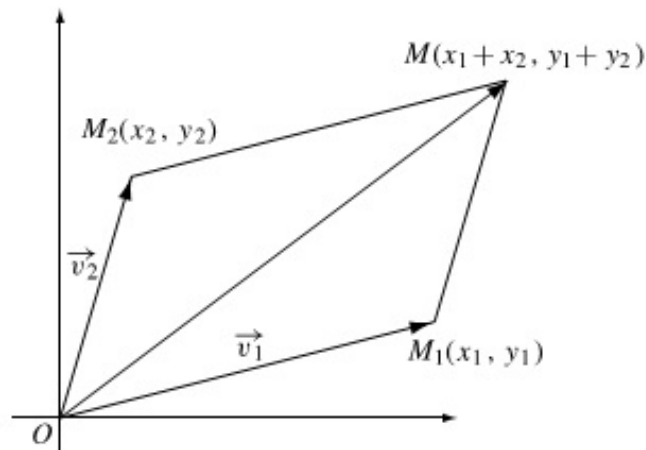
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

e a soma de vetores é

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Portanto, a soma  $z_1 + z_2$  corresponde a soma vetorial  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  (Figura 3).

Figura 3 – Adição de números complexos.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Por outro lado, a diferença dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$  é dada por

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

e a diferença dos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  por

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$$

Consequentemente, a diferença  $z_1 - z_2$  corresponde a diferença vetorial  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

b) A multiplicação de um número real por um número complexo.

Considere o número complexo  $z = x + yi$  e o vetor correspondente  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Se  $\lambda$  é um número real, usando a álgebra de vetores, temos que a multiplicação  $\lambda z$  é dada por

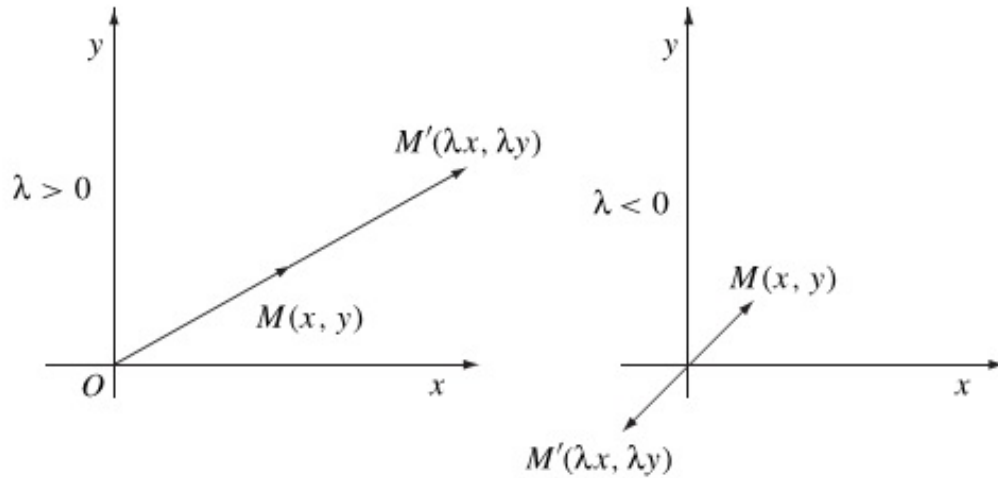
$$\lambda z = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}.$$

Note que se  $\lambda > 0$  os vetores  $\lambda\vec{v}$  e  $\vec{v}$  tem mesma orientação e

$$|\lambda\vec{v}| = \lambda|\vec{v}|.$$

Quando  $\lambda < 0$ , o vetor  $\lambda\vec{v}$  tem orientação oposta e  $|\lambda\vec{v}| = -\lambda|\vec{v}|$ . e  $\lambda = 0$ , então  $\lambda\vec{v} = 0$ , veja figura 4.

Figura 4 – Multiplicação de número real por um número complexo.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

## 2.3 Representação polar dos números complexos

### 2.3.1 Coordenadas polares no plano

Vamos considerar um plano coordenado e um ponto  $M(x, y)$  desse plano, que não é a origem.

O número real  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é chamado raio polar do ponto  $M$ . O ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  entre o vetor  $\overrightarrow{OM}$  e o eixo  $x$  é chamado de argumento polar do ponto  $M$ . O par  $(r, \theta)$  é chamado de coordenadas polares do ponto  $M$ . Vamos descrever  $M(r, \theta)$  (veja figura 5). Note que a função  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ ,  $h((x, y)) = (r, \theta)$  é bijetiva.

A origem  $O$  é o único ponto com  $r = 0$ , tal que o argumento  $\theta$  da origem não está definido.

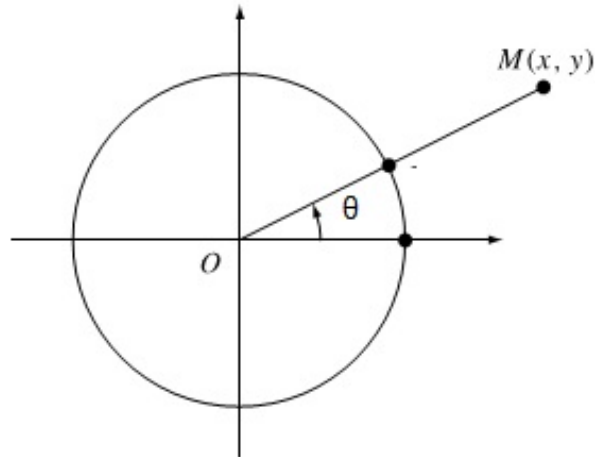
Para qualquer ponto  $M$  no plano há um único ponto de interseção  $P$  do raio  $OM$  com o círculo unitário centrado na origem. O ponto  $P$  tem o mesmo argumento polar  $\theta$ . Usando as definições das funções seno e cosseno, descobrimos que

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta$$

Portanto, é fácil obter as coordenadas cartesianas de um ponto de suas coordenadas polares.

Por outro lado, consideramos um ponto  $M(x, y)$  com raio polar  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para determinar o argumento polar analisaremos os seguintes casos:

Figura 5 – Coordenadas polares.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

a) Se  $x \neq 0$ , então  $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} + k\pi$  temos,

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

onde

$$k = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \text{ e } y \geq 0, \\ 1 & \text{se } x < 0 \text{ e para qualquer } y, \\ 2 & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

b) Se  $x = 0$  e  $y \neq 0$ , então

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

### 2.3.2 Representação polar do número complexo

Para um número complexo  $z = x + yi$  podemos escrever sua representação polar

$$z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta i),$$

onde  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$  são as coordenadas polares da imagem geométrica de  $z$ .

O argumento polar  $\theta$  da imagem geométrica de  $z$  é chamado argumento de  $z$ , denotado por  $\operatorname{arg}z$ . Para  $z \neq 0$ , o módulo e o argumento de  $z$  são unicamente determinados.

Considerando  $z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta i)$  e  $\theta^* = \theta + 2k\pi$  para um número inteiro  $k$ , temos

$$z = r[\cos(\theta^* - 2k\pi) + \operatorname{sen}(\theta^* - 2k\pi)i] = r(\cos\theta^* + \operatorname{sen}\theta^*i).$$

Chamamos  $\theta^*$  o argumento estendido do número complexo  $z$ .

Portanto, se dois números complexos  $z_1, z_2 \neq 0$  são representados por

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 i) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 i)$$

eles são iguais se e somente se  $r_1 = r_2$  e  $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ , para um inteiro  $k$ .

### 2.3.3 Operações com números complexos na forma polar

Com os conceitos de módulo e argumento, daremos uma interpretação geométrica para a multiplicação de números complexos não nulos.

#### Multiplicação

**Proposição 2.5.** *Suponha que*

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 i) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 i)$$

Então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) i \}.$$

Em particular,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ e } \operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg}z_1 + \operatorname{arg}z_2.$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 i)(\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 i) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) i \}. \end{aligned}$$

■

### Potências de números inteiros

Na proposição seguinte determinaremos uma expressão para potências de expoente inteiro  $n$  cuja base é um número complexo não nulo.

**Proposição 2.6.** *(De Moivre) Seja  $z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta i)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$z^n = r^n \{ \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) i \}$$

*Demonstração.* Faremos inicialmente a demonstração por indução sobre o expoente  $n$ , quando  $n$  for natural.

A verificação é imediata para  $n = 1$ . Seja  $n \geq 1$  e suponhamos que a igualdade seja válida para  $n$ , isto é,  $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$ . Logo,

$$z^{n+1} = z \cdot z^n$$

$$\begin{aligned}
&= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) \\
&= r^{n+1}(\cos(\theta + n\theta) + i\operatorname{sen}(\theta + n\theta)) \\
&= r^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i\operatorname{sen}((n+1)\theta)),
\end{aligned}$$

onde: a segunda igualdade segue da hipótese de indução; a terceira da multiplicação de números complexos na forma polar; e a última, mostra a validade da fórmula do enunciado para  $n+1$ . Concluímos, por indução, a validade da fórmula para todo número natural  $n$ .

Para  $n=0$ , a fórmula vale, pois, sendo  $r^0=1$ ,  $\cos 0=1$  e  $\operatorname{sen} 0=0$ , temos que  $z^0=r^0(\cos(0\cdot\theta) + i\operatorname{sen}(0\cdot\theta))$ .

Seja  $n < 0$  um inteiro. Então,  $-n > 0$  e  $z^n = (z^{-1})^{-n}$ . Como  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2 = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$ , pela fórmula já demonstrada temos

$$\begin{aligned}
(z^{-1})^{-n} &= (r^{-1})^{-n}(\cos((-n)(-\theta) + i\operatorname{sen}(-n)(-\theta))) \\
&= r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade vale para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

A demonstração acima foi retirada do livro “Polinômios e Equações Algébricas” de Abramo Hefez e Lúcia Villela.

Observação.

Podemos notar que  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\operatorname{arg}(z^n) = n \cdot \operatorname{arg}(z)$

### Divisão

Similarmente utilizando os conceitos de módulo e argumento podemos provar que, se

#### Proposição 2.7.

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \neq 0,$$

então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \}.$$

Em particular,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ e } \operatorname{arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{arg} z_1 - \operatorname{arg} z_2.$$

## 2.4 Raízes n-ésimas da unidade

### 2.4.1 Definindo as raízes n-ésimas

Consideremos um inteiro positivo  $n \geq 2$  e um número complexo  $z_0 \neq 0$ . No campo dos números reais, a equação

$$Z^n - z_0 = 0 \quad (1)$$

é usada para definir as n-ésimas raízes do número  $z_0$ . Por isso chamamos qualquer solução  $Z$  da equação (1) de raiz n-ésima do número complexo  $z_0$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $z_0 = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  um número complexo com  $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . O número complexo  $z_0$  tem  $n$  raízes n-ésimas distintas, dada pela fórmula*

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

$k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

*Demonstração.* Usando a fórmula polar do número complexo  $Z$ , temos

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Pela definição temos que  $Z^n = z_0$  ou equivalentemente

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Obtemos  $\rho^n = r$  e  $n\varphi = \theta + 2k\pi$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim  $\rho = \sqrt[n]{r}$  e  $\varphi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Até agora, as raízes da equação (1) são

$$Z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi_k + i\operatorname{sen}\varphi_k), \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que  $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < 2\pi$ , por isso os números  $\varphi_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , são argumentos reduzidos, em particular,  $\varphi_k^* = \varphi_k$ . Temos agora  $n$  raízes distintas de  $z_0$ :

$$Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}.$$

Considere algum inteiro  $k$  com  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  o resíduo de  $k$  módulo  $n$ . Então  $k = nq + r$ , para  $q \in \mathbb{Z}$ , e

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + (nq + r)\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + r\frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \varphi_r + 2q\pi.$$

É claro que  $Z_k = Z_r$ . Consequentemente,

$$\{Z_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$$

Em outras palavras, existem exatamente  $n$  distintas raízes  $n$ -ésimas de  $z_0$ . ■

As imagens geométricas das raízes  $n$ -ésimas do número complexo  $z_0 \neq 0$  são os vértices de um polígono regular de  $n$ -lados inscrito no círculo com centro na origem e raio  $\sqrt[n]{r}$ .

Para provar isso, denotamos  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  os pontos com coordenadas complexas  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$ . Note que  $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$ , para  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Segue - se que os pontos  $M_k$  estão sobre o círculo  $C(O, \sqrt[n]{r})$ . Por outro lado, a medida do arco  $\widehat{M_k M_{k+1}}$  é igual a

$$\arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  e o arco restante  $\widehat{M_{n-1} M_0}$  é

$$\frac{2\pi}{n} = 2\pi - (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

Uma vez que todos os arcos  $\widehat{M_0 M_1}, \widehat{M_1 M_2}, \dots, \widehat{M_{n-1} M_0}$  são iguais, então o polígono  $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$  é regular.

### 2.4.2 As raízes $n$ -ésimas da unidade

As raízes  $Z_n - 1 = 0$  são chamadas as raízes  $n$ -ésimas da unidade. Uma vez que  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ , a partir da fórmula das raízes  $n$ -ésimas dos números complexos, deduzimos que as raízes  $n$ -ésimas da unidade são

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1; \\ \epsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \epsilon \\ \epsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \epsilon^2 \\ &\dots \\ \epsilon_{n-1} &= \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = \epsilon^{n-1} \end{aligned}$$

O conjunto  $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}\}$  é denotado por  $U_n$ . Observe que o conjunto  $U_n$  é gerado pelo elemento  $\epsilon$ , isto é, os elementos de  $U_n$  são as potências de  $\epsilon$ .

Como mencionado anteriormente, as imagens geométricas das raízes  $n$ -ésimas da unidade são os vértices de um polígono regular com  $n$  lados inscrito no círculo unitário com um dos vértices em 1.

Vamos analisar alguns valores particulares de  $n$ :

a) Para  $n = 2$ , a equação  $Z^2 - 1 = 0$  tem raízes  $-1$  e  $1$ , que são as raízes quadradas da unidade.

b) Para  $n = 3$ , as raízes cúbicas da unidade, isto é, as raízes da equação  $Z^3 - 1 = 0$  são dadas por

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

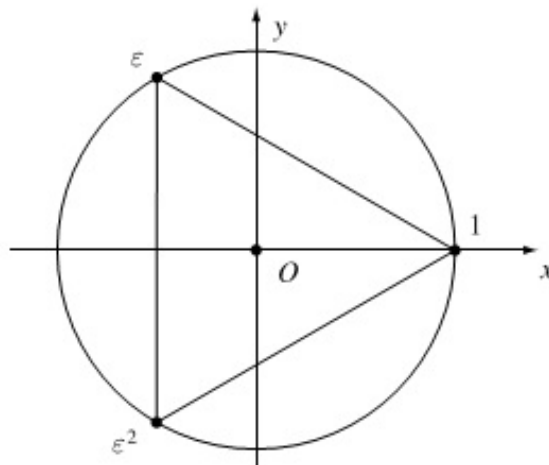
Assim,

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \epsilon,$$

$$\epsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \epsilon^2.$$

Elas formam um triângulo equilátero inscrito no círculo  $C(O; 1)$ , como na figura abaixo.

Figura 6 – Triângulo equilátero inscrito no círculo unitário.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

c) Para  $n = 4$  as raízes quarta da unidade são

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

De forma explícita, temos

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1; \quad \epsilon_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$$



$$\epsilon_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \quad \epsilon_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Observe que  $U_4 = \{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}$ . As imagens geométricas das raízes quarta da unidade são os vértices de um quadrado inscrito no círculo  $C(O, 1)$ .

## 2.5 Algumas noções geométricas simples e propriedades

Nesta seção iremos apresentar temas introdutórios como a distância entre dois pontos; segmentos; raios; retas; medida de um ângulo; condição de linearidade, ortogonalidade e cocircularidade; semelhança de triângulos, e, em seguida, teremos tópicos de geometria analítica.

### 2.5.1 A distância entre dois pontos

Suponha que os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  possuam as imagens geométricas  $M_1$  e  $M_2$ . Então, a distância entre os pontos  $M_1$  e  $M_2$  é dada pela

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2|.$$

A função distância  $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$  definida por

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

satisfaz as seguintes propriedades:

a) positividade e não degeneração:

$$d(z_1, z_2) \geq 0, \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$$d(z_1, z_2) = 0 \text{ se e somente se } z_1 = z_2.$$

b) simetria:

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1), \text{ para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

c) desigualdade triangular:

$$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \text{ para todos } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C};$$

Para justificar c) observamos que:

$$|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$

da propriedade do módulo. A igualdade ocorre se, e somente se, existe um número real positivo  $k$  tal que

$$z_3 - z_1 = k(z_2 - z_3).$$

Com o conceito de distância, daremos uma interpretação geométrica para segmentos, raios ou semirretas e retas. Daqui por diante, denotaremos por  $A(a)$  um ponto  $A$  no plano complexo que tem coordenada complexa  $a$  e que  $a = x + yi$  onde  $x = \operatorname{Re}(a)$  e  $y = \operatorname{Im}(a)$ .

### 2.5.2 Segmentos, raios e retas

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos com coordenadas complexas  $a$  e  $b$ . Dizemos que o ponto  $M$  com coordenada complexa  $z$  está entre os pontos  $A$  e  $B$ , se  $z \neq a$ ,  $z \neq b$  e a seguinte relação é satisfeita:

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|.$$

Usamos a seguinte notação  $A - M - B$ . Para segmento aberto o conjunto  $(AB) = \{M : A - M - B\}$ , determinado pelos os pontos  $A$  e  $B$ . O conjunto  $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$  representa o segmento fechado definido pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**Teorema 2.2.** *Suponha que  $A(a)$  e  $B(b)$  são dois pontos distintos. As declarações a seguir são equivalentes:*

1.  $M \in (AB)$ ;
2. há um número real positivo  $k$  tal que  $z - a = k(b - z)$ ;
3. há um número real  $t \in (0, 1)$  de tal forma que  $z = (1-t)a + tb$ , onde  $z$  é a coordenada complexa de  $M$ .

*Demonstração.* Primeiro provaremos que 1) e 2) são equivalentes. Com efeito, temos  $M \in (AB)$  se somente se  $|a - z| + |z - b| = |a - b|$ . Isto é,  $d(a, z) + d(z, b) = d(a, b)$ , ou equivalentemente existe uma real  $k > 0$  tal que  $z - a = k(b - z)$ .

Para provar que 2) e 3) são equivalentes, definimos  $t = \frac{k}{k+1} \in (0, 1)$  ou  $k = \frac{t}{1-t} > 0$ . Então,  $z - a = k(b - z)$  se, e somente se,  $z = \frac{1}{k+1}a + \frac{k}{k+1}b$ . Isto é,  $z = (1-t)a + tb$ . ■

O conjunto  $(AB = \{M \mid A - M - B \text{ ou } A - B - M\})$  é chamado de raio aberto ou semirreta com ponto inicial  $A$  que contém  $B$ .

**Teorema 2.3.** *Suponha que  $A(a)$  e  $B(b)$  são dois pontos distintos. As declarações a seguir são equivalentes:*

1.  $M \in (AB)$ ;
2. há um número real positivo  $t$  de tal forma que  $z = (1-t)a + tb$ , onde  $z$  é a coordenada complexa de  $M$ ;

3.  $\arg(z - a) = \arg(b - a)$ ;  
 4.  $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$ .

*Demonstração.* Basta provar que  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$ .

$1) \Rightarrow 2)$ . Como  $M \in (AB)$ , temos  $A - M - B$  ou  $A - B - M$ . Logo, existem números  $t, l \in (0, 1)$ , tais que

$$z = (1 - t)a + tb \text{ ou } b = (1 - l)a + lz.$$

No primeiro caso, já temos o resultado; para o segundo caso, usamos  $t = \frac{1}{l}$ . Com isso,

$$z = tb - (t - 1)a = (1 - t)a + tb.$$

$2) \Rightarrow 3)$ . De  $z = (1 - t)a + tb, t > 0$ , obtemos

$$z - a = t(b - a), t > 0.$$

Consequentemente,

$$\arg(z - a) = \arg(b - a).$$

$3) \Rightarrow 4)$ . A relação

$$\arg \frac{z - a}{b - a} = \arg(z - a) - \arg(b - a) + 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

implica  $\arg \frac{z-a}{b-a} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Desde que  $\arg \frac{z-a}{b-a} \in [0, 2\pi)$ , segue que  $k = 0$  e  $\arg \frac{z-a}{b-a} = 0$ . Assim,  $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$ , como desejado.

$4) \Rightarrow 1)$ . Seja  $t = \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$ . Consequentemente

$$z = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb, t > 0.$$

Se  $t \in (0, 1)$ , então  $M \in (AB) \subset (AB)$ .

Se  $t = 1$ , então  $z = b$  e  $M = B \in (AB)$ . Finalmente, se  $t > 1$ , então,  $l = 1/t \in (0, 1)$ , temos

$$b = lz + (1 - l)a.$$

Daqui resulta que  $A - B - M$  e  $M \in (AB)$ .

A prova está concluída. ■

O próximo teorema traz afirmações equivalentes para um ponto pertencente a uma reta.

**Teorema 2.4.** . *Suponha que  $A(a)$  e  $B(b)$  são dois pontos distintos. As declarações a seguir são equivalentes:*

1.  $M(z)$  encontra-se na reta  $AB$ .

2.  $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ .
3. Existe um número real  $t$  tal que  $z = (1-t)a + tb$ .
4. 
$$\begin{vmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 1 \end{vmatrix} = 0$$
5. 
$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Para obter a equivalência 1)  $\Leftrightarrow$  2)  $\Leftrightarrow$  3) observe que, para um ponto  $C$  tais que  $C - A - B$ , a reta  $AB$  é a união  $(AB \cup A \cup (AC)$ . Em seguida, aplique o Teorema 2.3.

Agora provaremos a equivalência 2)  $\Rightarrow$  4)  $\Rightarrow$  5).

Com efeito, temos  $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$  se e somente se  $\frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)}$ .

Isto é  $\frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$ , ou, equivalentemente 
$$\begin{vmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
 Assim obtemos que 2) é equivalente a 4).

Por outro lado, temos 
$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$$
 se e somente se 
$$\begin{vmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} & 0 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A última relação é equivalente a 
$$\begin{vmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
 assim obtemos que 4) é equivalente a 5). ■

Na próxima seção iremos tratar da divisão de um segmento e com isso obtaremos as coordenadas do ponto que divide o segmento ao meio chamado de ponto médio e, também do baricentro de um triângulo, que é o ponto que se encontram as três medianas.

### 2.5.3 Dividindo um segmento para uma determinada razão

Considere dois pontos distintos,  $A(a)$  e  $B(b)$ . Um ponto  $M(z)$  na linha  $AB$  divide o segmento  $AB$  em relação  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  se os vetores detém a seguinte relação:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}.$$

Em termos de números complexos, essa relação pode ser escrita como

$$a - z = k(b - z) \text{ ou } (1 - k)z = a - kb.$$

Assim, obtemos

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}.$$

Observe que para  $k < 0$  o ponto de  $M$  encontra-se no segmento de reta que

une os pontos  $A$  e  $B$ . Se  $k \in (0, 1)$ , então  $M \in (AB \setminus [AB])$ . Finalmente, se  $k > 1$ , então  $m \in (BA \setminus [AB])$ .

Como consequência, note que para  $k = -1$  obtemos que a coordenada do ponto médio de segmento  $[AB]$  é dada por  $z_m = \frac{a+b}{2}$ .

**Exemplo 2.1.** *Sejam  $A(a), B(b), C(c)$  pontos não colineares no plano complexo. Então, o ponto médio  $M$  do segmento  $[AB]$  tem como coordenada o complexo  $z_m = \frac{a+b}{2}$ . O baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$  divide a mediana  $[CM]$  em  $2 : 1$  internamente, daí a sua coordenada complexa é dada por  $k = -2$ , isto é,*

$$z_G = \frac{c + 2z_M}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}$$

#### 2.5.4 Medida de um ângulo

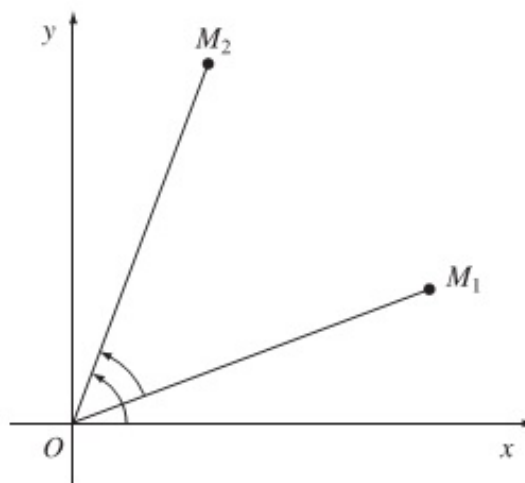
Recorde que um triângulo é orientado se a ordenação dos seus vértices é especificada. É positivamente ou diretamente orientado se os vértices estão orientados no sentido anti - horário. Caso contrário, dizemos que o triângulo é orientado de forma negativa. Considere dois pontos distintos  $M_1(z_1)$  e  $M_2(z_2)$ , que não sejam a origem do plano complexo. O ângulo  $\widehat{M_1OM_2}$  é orientado se o pontos  $M_1$  e  $M_2$  são ordenados no sentido anti-horário.

Na próxima proposição iremos calcular o argumento do ângulo orientado positivamente.

**Proposição 2.8.** *A medida do ângulo orientado positivamente  $\widehat{M_1OM_2}$  é igual  $\arg \frac{z_2}{z_1}$ .*

*Demonstração.* Consideremos os dois casos seguintes.

Figura 7 – Ângulo orientado.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

a) Se o triângulo  $M_1OM_2$  é negativamente orientado ( veja figura 7), então

$$\widehat{M_1OM_2} = \widehat{xOM_2} - \widehat{xOM_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

b) se o triângulo  $M_1OM_2$  é orientado positivamente (veja figura 8), então

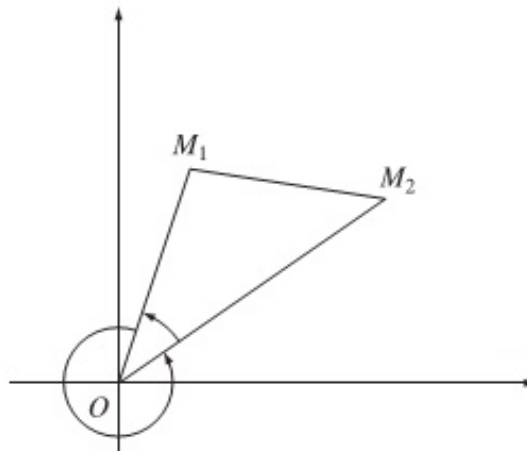
$$\widehat{M_1OM_2} = 2\pi - \widehat{M_2OM_1} = 2\pi - \arg \frac{z_2}{z_1},$$

uma vez que o triângulo  $M_2OM_1$  é orientado negativamente. Assim,

$$\widehat{M_1OM_2} = 2\pi - \arg \frac{z_1}{z_2} = 2\pi - (2\pi - \arg \frac{z_2}{z_1}),$$

tal como desejado. ■

Figura 8 – Ângulo orientado positivamente.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

**Observação 2.4.** O resultado também é válido se os pontos  $O, M_1, M_2$  são colineares.

A medida de um ângulo, que não tem o vértice na origem, é dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 2.5.** Considere três pontos distintos  $M_1(z_1), M_2(z_2)$  e  $M_3(z_3)$ . A medida do ângulo orientado  $\widehat{M_2M_1M_3}$  é  $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ .

*Demonstração.* A translação do vetor  $-z_1$  mapeia os pontos  $M_1, M_2, M_3$  para os pontos  $O, M'_2, M'_3$  com coordenadas complexas  $O, z_2 - z_1, z_3 - z_1$ . Por outro lado, temos  $\widehat{M_2M_1M_3} = \widehat{M'_2OM'_3}$ . Pelo resultado anterior, obtemos

$$\widehat{M'_2OM'_3} = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

como desejado. ■

### 2.5.5 Rotação de um ponto

Considere um ângulo  $\alpha$  e o número complexo dado por

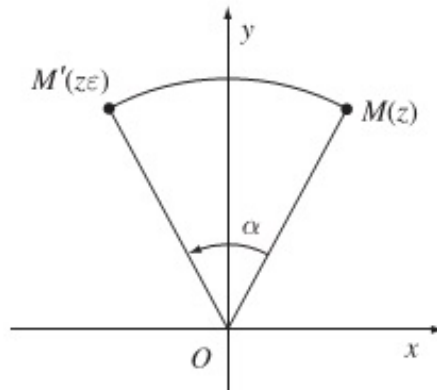
$$\epsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Seja  $z = r(\cos t + i \sin t)$  um número complexo e  $M$  sua imagem geométrica. Temos que o produto  $z\epsilon = r(\cos(t + \alpha) + i \sin(t + \alpha))$  e vale observar que  $|z\epsilon| = r$  e

$$\arg(z\epsilon) = \arg z + \alpha.$$

Isto resulta na imagem geométrica  $M'$  do  $z\epsilon$  que é a rotação de  $M$  em relação a origem pelo ângulo  $\alpha$ , como mostra a figura 9.

Figura 9 – Rotação.



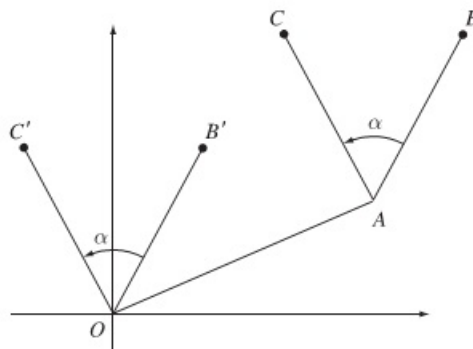
Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Agora temos todos os ingredientes para estabelecer o resultado que segue na proposição abaixo.

**Proposição 2.9.** *Suponha que o ponto  $C$  é a rotação de  $B$  em relação a  $A$  pelo ângulo  $\alpha$ . Se  $a, b, c$  são as coordenadas dos pontos  $A, B, C$ , respectivamente, então  $c = a + (b - a)\epsilon$ , onde  $\epsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ .*

*Demonstração.* A translação pelo vetor  $-a$  mapeia os pontos  $A, B, C$  nos pontos  $O, B', C'$ , com coordenadas complexas  $O, b - a, c - a$ , respectivamente ( figura 10). O ponto  $C'$  é a imagem de  $B'$  sob rotação em torno da origem através do ângulo  $\alpha$ , assim  $c - a = (b - a)\epsilon$ , ou seja  $c = a + (b - a)\epsilon$ , como desejado. ■

Figura 10 – Rotação em torno da origem através do ângulo dado.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Chamaremos a fórmula na proposição acima por fórmula de rotação.

## 2.6 Condição de linearidade, ortogonalidade e cocircularidade

Nesta seção veremos proposições que permitem determinar quando três pontos são colineares, ou duas retas são ortogonais ou quatro pontos são cocirculares. Vamos considerar quatro pontos distintos  $M_i(z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Proposição 2.10.** *Os pontos  $M_1, M_2, M_3$  são colineares, se e somente se,*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

*Demonstração.* A colinearidade dos pontos  $M_1, M_2, M_3$  é equivalente a  $\widehat{M_2 M_1 M_3} \in \{0, \pi\}$ . Segue que  $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$  ou equivalentemente  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$ , como desejado. ■

**Proposição 2.11.** *As retas  $M_1 M_2$  e  $M_3 M_4$  são ortogonais se e somente se*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

*Demonstração.* Temos  $M_1 M_2 \perp M_3 M_4$ , então  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ . Obtemos  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*$ . ■

**Observação 2.5.** *Suponha que  $M_2 = M_4$ . Então  $M_1 M_2 \perp M_3 M_2$  se e somente se  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}^*$ .*

**Proposição 2.12.** *Os pontos distintos  $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$  são cocirculares ou colineares, se e somente se,*

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

*Demonstração.* Podemos organizar quatro pontos em um círculo de  $(4 - 1)! = 3! = 6$  maneiras diferentes. Consideremos o caso em que  $M_1, M_2, M_3, M_4$  são dadas nesta ordem. Em seguida,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  são cocirculares se, e somente se,

$$\widehat{M_1 M_2 M_3} + \widehat{M_1 M_4 M_3} \in \{3\pi, \pi\}.$$

Isto é,

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \{3\pi, \pi\}.$$

Obtemos

$$\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} - \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \{3\pi, \pi\},$$

isto é,  $k < 0$ .

Para qualquer outro regime de quatro pontos a prova é similar. Note-se que  $k > 0$  em três casos e  $k < 0$  nos outros três. ■



O número  $k$  é denominada a taxa de cruzamento dos quatro pontos

$$M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3) \text{ e } M_4(z_4).$$

**Observação 2.6.** 1. Os pontos  $M_1, M_2, M_3, M_4$  são colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^* \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

2. Os pontos  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  são cocirculares se, e somente se,

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*, \text{ mas } \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R} \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R}.$$

## 2.7 Triângulos semelhantes

Na geometria plana, semelhança e congruência de triângulos são os conceitos mais fundamentais. Começaremos esta nova seção a partir das condições sobre semelhança de triângulos utilizando números complexos.

Considere seis pontos  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2$  e  $w_3$  no plano complexo. Dizemos que os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes se o ângulo em  $z_k$  é igual ao ângulo em  $w_k$  (consequentemente  $z_k$  corresponde a  $w_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ). Nesta seção, usaremos a notação  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$  para triângulos semelhantes.

**Proposição 2.13.** Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes, tendo a mesma orientação, se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \quad (2)$$

*Demonstração.* Temos  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$  se, e somente se,  $\frac{z_2 z_1}{z_3 z_1} = \frac{w_2 w_1}{w_3 w_1}$  e  $\widehat{z_1 z_2 z_3} = \widehat{w_1 w_2 w_3}$ . Isto é equivalente a  $\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|}$  e  $\arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$ . Obtemos  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$ . ■

**Observação 2.7.** A condição (2) é equivalente a 
$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Proposição 2.14.** Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes, tendo orientação oposta, se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}.$$

*Demonstração.* A reflexão dos pontos  $w_1, w_2, w_3$  com respeito ao eixo x são os pontos  $w'_1, w'_2, w'_3$ . Os triângulos  $\Delta w_1 w_2 w_3$  e  $\Delta w'_1 w'_2 w'_3$  são semelhantes e tem orientação oposta, portanto, os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w'_1 w'_2 w'_3$  são semelhantes com a mesma orientação. A conclusão decorre da proposição anterior. ■

## 2.8 Triângulos equiláteros

Os triângulos equiláteros serão apresentados na perspectiva dos números complexos. As proposições e os teoremas seguintes, servirão para resolver o problema cuja solução é atribuída a Napoleão.

**Proposição 2.15.** *Suponhamos que  $z_1, z_2, z_3$  são as coordenadas dos vértices de um triângulo. As declarações a seguir são equivalentes:*

a)  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é um triângulo equilátero;

b)  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ ;

c)  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ ;

d)  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ ;

e)  $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$ , onde  $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ ;

f)  $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$ , onde  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ;

g) 
$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* O triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se, é semelhante e com a mesma orientação  $\Delta z_2 z_3 z_1$ , isto é,

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

assim  $a) \Leftrightarrow g)$ .

Calculando o determinante obtemos

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0,$$

consequentemente  $g) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow f)$ . Com manipulação algébrica simples, mostramos que  $d) \Leftrightarrow c)$ . Para o que falta,  $a) \Leftrightarrow b)$  é óbvia. ■

Os próximos resultados trazem alguns refinamentos para esta questão.

**Proposição 2.16.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  as coordenadas dos vértices  $A_1, A_2, A_3$  do triângulo orientado positivamente, respectivamente. As declarações a seguir são equivalentes.*

a)  $\Delta A_1 A_2 A_3$  é um triângulo equilátero;

b)  $z_3 - z_1 = \omega(z_2 - z_1)$ , onde  $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ;

c)  $z_2 - z_1 = \omega(z_3 - z_1)$ , onde  $\omega = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ ;

d)  $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ , onde  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

*Demonstração.* O  $\Delta A_1 A_2 A_3$  é equilátero e positivamente orientado se e somente se  $A_3$  é obtido pela rotação de  $A_2$  em torno de  $A_1$  por um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$ . Isso é,

$$z_3 = z_1 + \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (z_2 - z_1),$$

consequentemente  $a) \Rightarrow b)$  (veja figura 11).

A rotação sobre  $A_1$ , através de um ângulo de  $\frac{5\pi}{3}$ , mapeia  $A_3$  para  $A_2$ . Considerações semelhantes mostram que  $a) \Rightarrow c)$ .

Para provar que  $b) \Rightarrow d)$ , observamos que  $b)$  é equivalente a

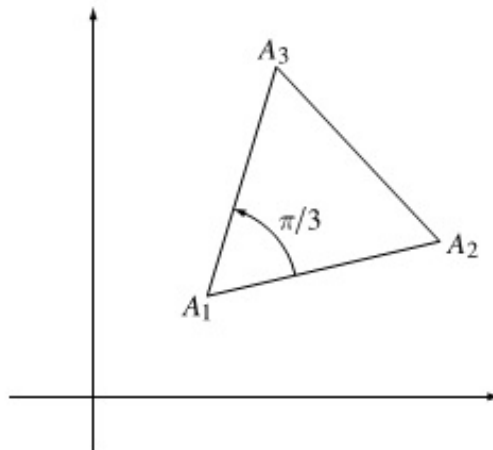
$z_3 = z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_3 \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[ \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 \right] \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 - z_1 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 = 0, \end{aligned}$$

ou  $b) \Leftrightarrow d)$

■

Figura 11 – Rotação em torno da origem através do ângulo dado.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

**Proposição 2.17.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  as coordenadas dos vértices  $A_1, A_2, A_3$  de um triângulo orientado negativamente. As afirmações a seguir são equivalentes:*

a)  $A_1 A_2 A_3$  é um triângulo equilátero;

b)  $z_3 - z_1 = \omega(z_2 - z_1)$ , onde  $\omega = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ ;

- c)  $z_2 - z_1 = \omega(z_3 - z_1)$ , onde  $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ;  
 d)  $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$ , onde  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

*Demonstração.* O triângulo equilátero  $\Delta A_1 A_2 A_3$  é orientado negativamente se, e somente se,  $\Delta A_1 A_3 A_2$  é um triângulo equilátero orientado positivamente. O restante segue a partir da proposição anterior. ■

**Proposição 2.18.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  as coordenadas dos vértices do triângulo equilátero  $A_1 A_2 A_3$ , respectivamente. Considere as declarações:*

- a)  $A_1 A_2 A_3$  é um triângulo equilátero;  
 b)  $z_1 \cdot \bar{z}_2 = z_2 \cdot \bar{z}_3 = z_3 \cdot \bar{z}_1$ ;  
 c)  $z_1^2 = z_2 \cdot z_3$  e  $z_2^2 = z_1 \cdot z_3$ .

Então b)  $\Rightarrow$  a), c)  $\Rightarrow$  a) e b)  $\Rightarrow$  c).

*Demonstração.* b)  $\Rightarrow$  a). Tomando o módulo dos termos na relação dada obtemos

$$|z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_2| \cdot |\bar{z}_3| = |z_3| \cdot |\bar{z}_1|,$$

ou equivalentemente

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_2| \cdot |z_3| = |z_3| \cdot |z_1|.$$

Isso implica que

$$r = |z_1| = |z_2| = |z_3|$$

e

$$\bar{z}_1 = \frac{r^2}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{r^2}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{r^2}{z_3}.$$

Voltando à relação dada, temos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_3}{z_1}$$

ou

$$z_1^2 = z_2 z_3, z_2^2 = z_1 z_3, z_3^2 = z_1 z_2.$$

Com essas relações temos

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2.$$

Assim, pela proposição 2.15, o  $\Delta A_1 A_2 A_3$  é equilátero.

Observe que também provamos que b)  $\Rightarrow$  c) e que os argumentos são reversíveis; daí c)  $\Rightarrow$  b). Como consequência, c)  $\Rightarrow$  a). ■

Com os resultados acima podemos provar com facilidade o teorema atribuído a Napoleão. No entanto, muitas pessoas estão céticos de que Napoleão sabia geometria suficiente para descobrir este teorema.

**Teorema 2.6.** *Em cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero exterior. Em seguida o baricentro destes três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero (veja figura 12).*

*Demonstração.* Seja  $\Delta z_1 z_2 z_3$  um triângulo dado, e

$$\Delta w_1 z_3 z_2, \Delta z_3 w_2 z_1, \Delta z_2 z_1 w_3$$

os triângulos equiláteros exteriores com a mesma orientação que  $\Delta 1 \omega \omega^2$ , veja figura 13 (onde  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ) e com  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  os baricentros desses triângulos equiláteros. Então, pela proposição 2.16,

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0,$$

$$z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0,$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0.$$

Por outro lado, temos o  $\Delta \xi_1 \xi_2 \xi_3$ , devemos provar  $\xi_1 + \omega \xi_2 + \omega^2 \xi_3 = 0$ , como  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  são baricentros, então

$$\begin{aligned} \xi_1 + \omega \xi_2 + \omega^2 \xi_3 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{1}{3}\{(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Delta \xi_1 \xi_2 \xi_3$  é um triângulo equilátero. ■

## 2.9 Geometria analítica no plano complexo

Veremos, nesta seção, as equações das retas e círculos no plano  $\mathbb{R}^2$  utilizando números complexos.

### 2.9.1 Equação da reta

Determinaremos no plano complexo a equação da reta e as posições relativas entre duas retas, a partir dos conhecimentos de geometria analítica.

**Proposição 2.19.** *A equação de uma reta no plano complexo é dada por*

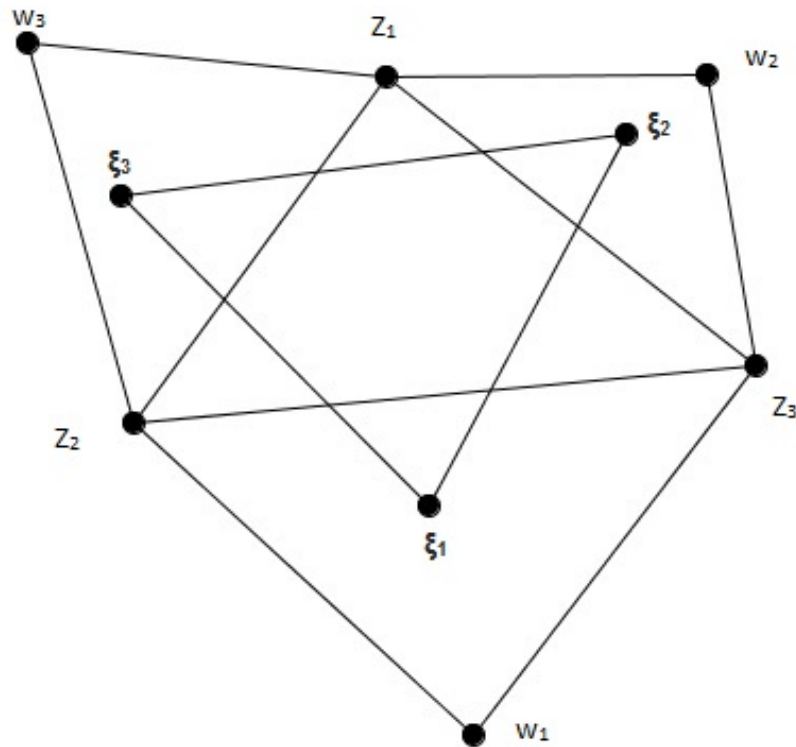
$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha z + \beta = 0,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* A equação de uma reta no plano cartesiano é dada por

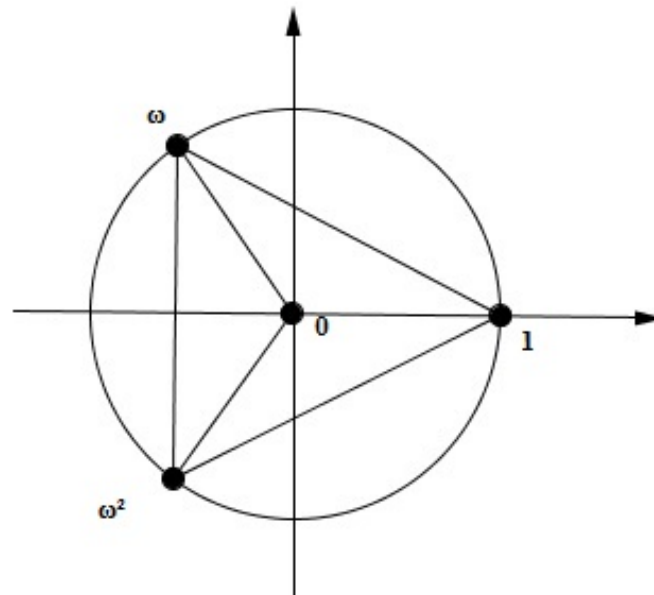
$$Ax + By + C = 0,$$

Figura 12 – Triângulo de Napoleão.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Figura 13 – Círculo unitário.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

onde  $A, B, C \in \mathbb{R}$  e  $A^2 + B^2 \neq 0$ . Se estabelecermos  $z = x + iy$ , então  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ . Assim,

$$A \frac{z+\bar{z}}{2} - Bi \frac{z-\bar{z}}{2} + C = 0,$$

ou equivalentemente

$$\bar{z}\frac{A+Bi}{2} + z\frac{A-Bi}{2} + C = 0.$$

Sendo  $\alpha = \frac{A-Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$  e  $\beta = C \in \mathbb{R}$ , temos

$$\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0.$$

■

Se  $\alpha = \bar{\alpha}$ , então  $B = 0$  e temos uma linha vertical. Se  $\alpha \neq \bar{\alpha}$ , então definimos o coeficiente angular da reta como:

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i.$$

A seguir, estudaremos as posições relativas entre duas retas no plano.

**Proposição 2.20.** *Considere as retas  $d_1$  e  $d_2$  com equações*

$$\bar{\alpha}_1\bar{z} + \alpha_1 z + \beta_1 = 0$$

e

$$\bar{\alpha}_2\bar{z} + \alpha_2 z + \beta_2 = 0,$$

respectivamente. Então, as retas  $d_1$  e  $d_2$  são:

1. paralela se e somente se  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$ ;
2. perpendiculares se, e somente se,  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$ ;
3. concorrentes se, e somente se,  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$ .

*Demonstração.* 1. Temos  $d_1 \parallel d_2$  se, e somente se,  $m_1 = m_2$ . Portanto  $\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}i = \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}i$  e assim  $\alpha_2\bar{\alpha}_1 = \alpha_1\bar{\alpha}_2$ . Logo,  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$ .

2. Temos  $d_1 \perp d_2$  se, e somente se,  $m_1 m_2 = -1$ . Isso é,  $\alpha_2\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 = 0$  ou  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$ .

3. As retas  $d_1$  e  $d_2$  são concorrentes se, e somente se,  $m_1 \neq m_2$ . Esta condição fornece  $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$ .

■

A relação  $m_d = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$  é chamada coeficiente angular complexo da reta de equação

$$\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0.$$

### 2.9.1.1 Equação da reta determinada por dois pontos

Como dois pontos distintos definem uma reta iremos fazer uso da condição de colinearidade para determinar a equação da reta.

**Proposição 2.21.** *A equação da reta determinada por dois pontos  $P_1(z_1)$  e  $P_2(z_2)$  é*

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* A equação da reta determinada pelos pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  no plano cartesiano é

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Usando números complexos, temos

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z + \bar{z}}{2} & \frac{z - \bar{z}}{2i} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z + \bar{z} & z - \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

■

**Observação 2.8.** *1. Os pontos  $M_1(z_1)$ ,  $M_2(z_2)$ ,  $M_3(z_3)$  são colineares se e somente se*

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*2. O coeficiente angular complexo da reta determinado pelos pontos com coordenadas  $z_1$  e  $z_2$  é dado por*

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$



De fato, a equação é

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2z + z\bar{z}_1 - z\bar{z}_2 - z_1\bar{z} - z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(z_2 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0.$$

Usando a definição de coeficiente angular complexo, obtemos

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

O próximo teorema traz um resultado para área de um triângulo cujos vértices são pontos localizados no plano complexo.

**Teorema 2.7.** *A área do triângulo  $\Delta A_1A_2A_3$  com vértices de coordenadas  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, é igual ao valor absoluto do número*

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

*Demonstração.* Usando coordenadas cartesianas, a área do triângulo com vértices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  é igual ao valor absoluto do determinante

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desde de que,

$$x_k = \frac{z_k + \bar{z}_k}{2} \text{ e } y_k = \frac{z_k - \bar{z}_k}{2i}, k = 1, 2, 3,$$

utilizando a propriedade de determinantes, na qual os elementos da primeira coluna são multiplicados por  $\frac{1}{2}$  e da segunda por  $\frac{1}{2i}$ , obtemos

$$\Delta = \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & -\bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & -\bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & -\bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 0 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}$$

. Como a segunda coluna da primeira matriz está multiplicada por  $-1$  e o determinante

da segunda é zero, temos

$$\Delta = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

■

Conhecendo um ponto pertencente a uma reta e uma direção, temos uma outra forma de determinar a equação dessa reta.

**Proposição 2.22.** *Seja  $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$  a equação da reta e sendo  $P_0(z_0)$  um ponto. A equação da reta paralela a  $d$  e que passa pelo ponto  $P_0$  é*

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

*Demonstração.* Usando coordenadas cartesianas, a reta paralela a  $d$  e passando pelo ponto  $P_0(x_0, y_0)$  tem a equação

$$y - y_0 = i \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}(x - x_0).$$

Usando números complexos, a equação toma a forma

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = i \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right).$$

Isto é equivalente a

$$(\alpha - \bar{\alpha})(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0) = (\alpha + \bar{\alpha})(z + \bar{z} - z_0 - \bar{z}_0)$$

, ou  $\alpha(z - z_0) = -\bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ . Portanto,  $(z - z_0) = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ . ■

Na proposição anterior, mostramos como encontrar a equação de uma reta conhecendo um ponto e uma reta paralela, agora veremos quando a reta é perpendicular.

**Proposição 2.23.** *Seja  $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$  a equação de uma reta e  $P_0(z_0)$  um ponto. A reta passando pelo ponto  $P_0$  e perpendicular a  $d$  tem equação  $(z - z_0) = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ .*

*Demonstração.* Usando coordenadas cartesianas, a reta passando pelo ponto  $P_0$  e perpendicular a  $d$  tem equação

$$y - y_0 = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}}(x - x_0).$$

Em seguida, obtemos

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right).$$

Isso é,  $(\alpha + \bar{\alpha})(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0) = -(\alpha - \bar{\alpha})(z + \bar{z} - z_0 - \bar{z}_0)$  ou  $(z - z_0)(\alpha + \bar{\alpha} + \alpha - \bar{\alpha}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)(-\alpha + \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha})$ . Obtemos  $\alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$  e  $(z - z_0) = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ . ■

## 2.9.1.2 Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

Fazendo uso da proposição anterior e a fórmula da equação da reta vamos provar a seguinte proposição.

**Proposição 2.24.** *Seja  $P_0$  um ponto de  $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$  uma reta. O pé da perpendicular a partir de  $P_0$  até  $d$  tem coordenadas*

$$z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}.$$

*Demonstração.* O ponto  $z$  é solução do sistema

$$\begin{cases} \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0, \\ \alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \end{cases}.$$

A primeira equação resulta em

$$\bar{\alpha} = \frac{-\alpha z - \beta}{\bar{\alpha}}.$$

Substituindo o resultado na segunda, produzimos a equação

$$\alpha z - \alpha z_0 = -\alpha z - \beta - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0.$$

Consequentemente,

$$z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}.$$

■

Dispondo da projeção ortogonal de um ponto sobre a reta, podemos calcular a distância do ponto dado a reta.

**Proposição 2.25.** *A distância do ponto  $P_0(z_0)$  a reta  $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , é igual a*

$$D = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha + \sqrt{\bar{\alpha}}}}.$$

*Demonstração.* Usando o resultado anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned} D &= \left| \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} - z_0 \right| = \left| \frac{-\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} \right| \\ &= \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2|\alpha|} = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha + \sqrt{\bar{\alpha}}}}. \end{aligned}$$

■

### 2.9.2 A equação da circunferência

A circunferência fica determinada quando conhecemos seu centro  $O$  e o raio  $r$ , com esse dois elementos podemos escrever sua equação.

**Proposição 2.26.** *A equação da circunferência no plano complexo é dada por*

$$z.\bar{z} + \alpha.z + \bar{\alpha}.\bar{z} + \beta = 0,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* A equação da circunferência no plano cartesiano é

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

$m, n, p \in \mathbb{R}$  e  $p < \frac{m^2+n^2}{4}$ .

Como  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , obtemos

$$|z|^2 + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2i} + p = 0$$

ou

$$z.\bar{z} + z\frac{m-ni}{2} + \bar{z}\frac{m+ni}{2} + p = 0.$$

Tomando  $\alpha = \frac{m-ni}{2} \in \mathbb{C}$  e  $\beta = p \in \mathbb{R}$ , na equação acima, verificamos que a informação dada é satisfeita. ■

Note que o raio da circunferência é igual a

$$r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$$

Em seguida, a equação é equivalente a

$$(\bar{z} + \alpha)(z + \bar{\alpha}) = r^2.$$

Sendo

$$\gamma = -\bar{\alpha} = -\frac{m}{2} - \frac{n}{2}i,$$

a equação da circunferência com centro em  $\gamma$  e raio  $r$  é dado por

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2.$$

### 3 APLICAÇÕES À GEOMETRIA

O ensino dos números complexos nas escolas, usualmente, baseia-se apenas na perspectiva algébrica. Com isso, esquecemos que tais números têm um significado geométrico rico e que ao ser associado a ferramentas algébricas podem auxiliar o desenvolvimento da compreensão desses números, bem como aperfeiçoá-la. Os números complexos são particularmente eficazes na demonstração e na solução de vários problemas geométricos como o círculo de nove pontos, a reta de Simson, o teorema de Cantor, o teorema de Feuerbach e o teorema de Morley.

#### 3.1 O círculo dos nove pontos

Dado um triângulo ABC, temos os pontos médios de cada lado, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro (ponto de encontro das alturas). Totalizando assim, nove pontos cocirculares.

Nas próximas seções, iremos conceituar e desenvolver ferramentas para estarmos aptos a demonstrar o teorema do círculo de nove pontos.

##### 3.1.1 O produto real de dois números complexos

O conceito de produto escalar de dois vetores é bem conhecido. Desse modo, iremos introduzir este conceito para números complexos pois, em muitas situações, o uso deste produto simplifica consideravelmente a solução de problemas.

**Definição 3.1.** *Definimos o produto real de dois números complexos  $a$  e  $b$ , por*

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b}).$$

Equivalentemente

$$\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) = a \cdot b;$$

daí  $a \cdot b$  é um número real, o que justifica o nome deste produto.

Não é difícil mostrar que o produto real de dois números complexos, acima definido, possuem as propriedades a seguir.

**Proposição 3.1.** *Para todos os números complexos  $a, b, c, z$  as seguintes relações são válidas:*

1.  $a \cdot a = |a|^2$ ;
2.  $a \cdot b = b \cdot a$  (o produto real é comutativo);
3.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (o produto real é distributivo em relação a soma);
4.  $(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

5.  $a \cdot b = 0$  se, e somente se,  $OA \perp OB$ . Estamos a considerar que  $A$  tem coordenadas  $a$  e  $B$  tem coordenadas  $b$ ;

6.  $(az) \cdot (bz) = |z|^2 (a \cdot b)$ .

*Demonstração.* 1.  $a \cdot a = \frac{1}{2}(a\bar{a} + \bar{a}a) = |a|^2$ .

2.  $a \cdot b = \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{b}a + b\bar{a}) = b \cdot a$

Aplicando a definição de produto real de dois números complexos e as propriedades das operações em  $\mathbb{C}$ , facilmente as outras propriedades são demonstradas. ■

Na proposição seguinte, veremos que dados quatro pontos distintos  $A(a), B(b), C(c)$  e  $D(d)$  temos que as retas  $AB$  e  $CD$  são perpendiculares se o produto real delas é igual a zero

**Proposição 3.2.** *Suponha que  $A(a), B(b), C(c)$  e  $D(d)$  são quatro pontos distintos, as declarações a seguir são equivalentes:*

1.  $AB \perp CD$ ;

2.  $(b - a) \cdot (c - d) = 0$ ;

3.  $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$  (ou equivalentemente,  $\operatorname{Re}\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = 0$ ).

*Demonstração.* Tome os pontos  $M(b - a)$  e  $N(d - c)$  de tal forma que  $OABM$  e  $OCDN$  são paralelogramos. Então temos  $AB \perp CD$  se, e somente se,  $OM \perp ON$ . Ou seja,  $m \cdot n = (b - a) \cdot (d - c) = 0$ , usando a propriedade 5) do produto real. A equivalência 2)  $\Leftrightarrow$  3) segue imediatamente a partir da definição do produto real. ■

Com esses resultados podemos achar as coordenadas do ortocentro, o ponto de encontro das três alturas de um triângulo, denotado por  $H$ , conforme veremos na seguinte proposição. Mas antes é importante lembrar que o circuncentro  $O$  é o ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo.

**Proposição 3.3.** *O circuncentro do triângulo  $ABC$  está na origem do plano complexo. Se  $a, b, c$  são as coordenadas dos vértices  $A, B, C$ , então, o ortocentro  $H$  possui coordenadas  $h = a + b + c$ .*

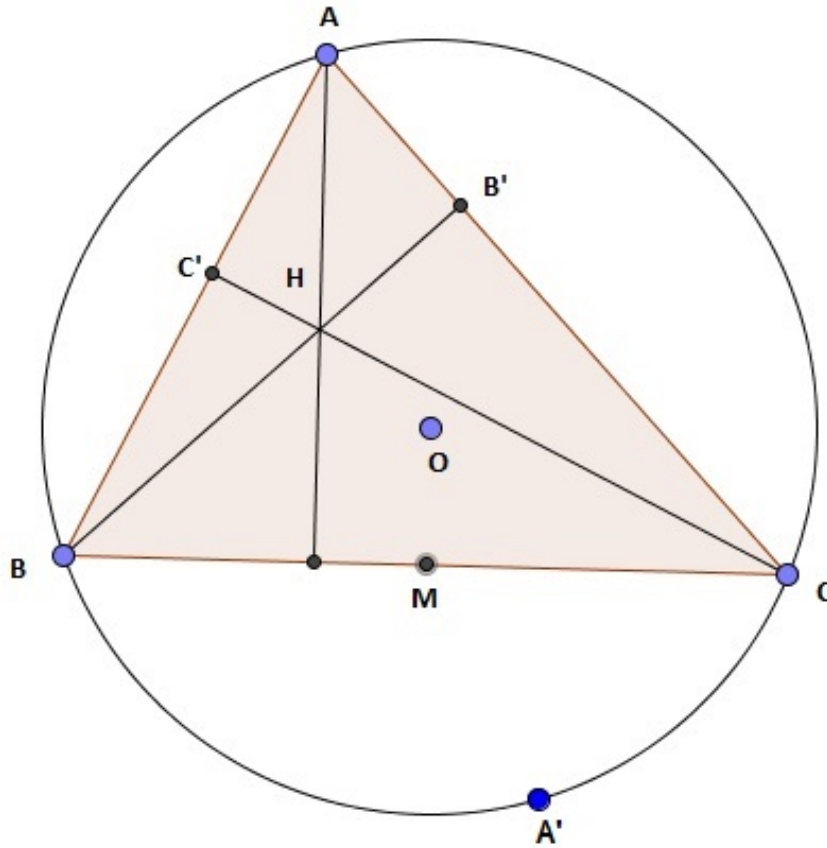
*Demonstração.* Usando o produto real dos números complexos, as equações das alturas  $AA', BB', CC'$ , veja figura 14, do triângulo são

$$AA' : (z - a) \cdot (b - c) = 0, BB' : (z - b) \cdot (c - a) = 0, CC' : (z - c) \cdot (a - b) = 0.$$

Vamos mostrar que o ponto com coordenadas  $h = a + b + c$  encontra-se em todas as três alturas. Na verdade, tem-se  $(h - a) \cdot (b - c) = 0$  se e somente se  $(b + c) \cdot (b - c) = 0$ . A última relação é equivalente a  $b \cdot b - c \cdot c = 0$ , ou  $|b|^2 = |c|^2$ . Da mesma forma,  $H \in BB'$  e  $H \in CC'$ . ■

**Observação 3.1.** *Se os números de  $a, b, c, o, h$  são as coordenadas dos vértices do triângulo  $ABC$ , o circuncentro  $O$  e o ortocentro  $H$  do triângulo, então,  $h = a + b +$*

Figura 14 – Coordenadas do ortocentro.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

$c - 2o$ . De fato, tomando  $A'$  diametralmente oposto a  $A$  na circunferência circunscrita do triângulo  $ABC$ , o quadrilátero  $HBA'C$  é um paralelogramo. Se  $\{M\} = HA' \cap BC$ , temos,

$$z_M = \frac{b+c}{2} = \frac{z_H + z'_A}{2} = \frac{z_H + 2o - a}{2}, \text{ i.e., } z_H = a + b + c - 2o$$

### 3.1.2 O produto complexo de dois números complexos

O produto vetorial de dois vetores é o conceito central em álgebra vetorial, com numerosas aplicações em diversos ramos da matemática e da ciência. Nessa seção iremos adaptar este produto para números complexos. O leitor verá que essa nova interpretação tem múltiplas vantagens na resolução de problemas envolvendo área ou colinearidade.

**Definição 3.2.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois números complexos,*

$$a \times b = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b})$$

*chama-se o produto complexo dos números  $a$  e  $b$ .*

Observe que

$$a \times b + \overline{a \times b} = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b}) + \frac{1}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b) = 0,$$

assim  $Re(a \times b) = 0$ , o que justifica a definição deste produto.

Aplicando a definição, as seguintes propriedades são fáceis de verificar.

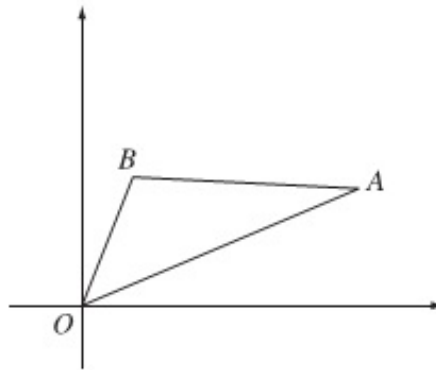
**Proposição 3.4.** *Suponha que  $a, b, c$  são números complexos. Então:*

1.  $a \times b = 0$  se, e somente se,  $a = 0$  ou  $b = 0$  ou  $a = \lambda b$ , onde  $\lambda$  é um número real.
2.  $a \times b = -b \times a$  (o produto complexo é anticomutativo);
3.  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  (o produto complexo é distributivo em relação a adição).
4.  $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
5. Se  $A(a)$  e  $B(b)$  são pontos distintos diferente da origem, então  $a \times b = 0$  se e somente se  $O, A, B$  são colineares.

**Observação 3.2.** *a) Supondo  $A(a)$  e  $B(b)$  são pontos distintos no plano complexo, diferentes a partir da origem. O produto complexo dos números  $a$  e  $b$  tem a seguinte interpretação geométrica (veja figura 15):*

$$a \times b = \begin{cases} 2i \cdot \text{área}\Delta AOB, & \text{se o triângulo } OAB \text{ é orientado positivamente;} \\ -2i \cdot \text{área}\Delta AOB, & \text{se o triângulo } OAB \text{ é orientado negativamente.} \end{cases}$$

Figura 15 – Interpretação geométrica do produto complexo.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

$O \Delta OAB$  é orientado positivamente, então

$$\begin{aligned} 2i \cdot \text{area}\Delta OAB &= i \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} \\ &= i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin \left( \arg \frac{b}{a} \right) \\ &= i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \text{Im} \left( \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{|a|}{|b|} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} |a|^2 \left( \frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) = \frac{1}{2} (\bar{a}b - a\bar{b}) = a \times b$$

No caso em que o triângulo  $OBA$  é orientado de forma positiva, temos

$$2i \cdot \text{área}\Delta OBA = b \times a = -a \times b.$$

b) Supondo  $A(a)$  e  $B(b)$  são pontos distintos no plano complexo. O produto complexo nos permite obter a seguinte fórmula para a área do triângulo  $ABC$ , então

$$\text{área}\Delta ABC = \begin{cases} \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{se o triângulo } ABC \text{ é orientado positivamente;} \\ -\frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{se o triângulo } ABC \text{ é orientado negativamente.} \end{cases}$$

Além disso, uma manipulação algébrica simples mostra que

$$\text{área}\Delta ABC = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a),$$

se o triângulo é diretamente (positivamente) orientado.

Para provar a fórmula acima, trasladamos os pontos  $A, B, C$  com o vetor  $-c$ . As imagens de  $A, B, C$  são os pontos  $A', B', O$  com coordenadas  $a-c, b-c, 0$ , respectivamente. Os triângulos  $ABC$  e  $A'B'O$  são congruentes com a mesma orientação. Se  $ABC$  é positivamente orientado, então

$$\begin{aligned} \text{área}\Delta ABC &= \text{área}\Delta A'B'O = \frac{1}{2i}((a-c) \times (b-c)) \\ &= \frac{1}{2i}((a-c) \times b - (a-c) \times c) = \frac{1}{2i}(c \times (a-c) - b \times (a-c)) \\ &= \frac{1}{2i}(c \times a - c \times c - b \times a + b \times c) = \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a) \end{aligned}$$

Na proposição a seguir mostraremos que o produto complexo de dois números é usado para determinar a colinearidade de três pontos.

**Proposição 3.5.** *Sejam  $A(a), B(b)$  e  $C(c)$  pontos distintos. A sequência de declarações a seguir são equivalentes.*

1. Os pontos  $A, B, C$  são colineares.
2.  $(b-a) \times (c-a) = 0$ .
3.  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ .

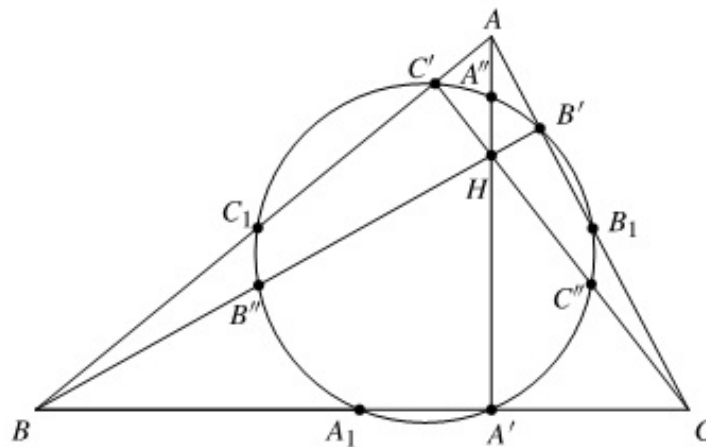
*Demonstração.* Os pontos  $A, B, C$  são colineares se, e somente se,  $\text{área } \Delta ABC = 0$ , isto é,  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ . A última equação pode ser escrita na forma  $(b-a) \times (c-a) = 0$ . ■

### 3.1.3 Os nove pontos do círculo de Euler

Dado um triângulo  $ABC$ , sem perda de generalidade, podemos supor que a origem do plano complexo é o circuncentro  $O$  do triângulo  $ABC$  com as coordenadas dos vértices  $A(a), B(b), C(c)$ . Vimos na Proposição 3.3, que a coordenada do ortocentro  $H$  é  $z_H = a + b + c$ .

Vamos denotar por  $A_1, B_1$  e  $C_1$  os pontos médios dos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente, e por  $A', B'$  e  $C'$  os pés das altitudes e por  $A'', B''$  e  $C''$  os pontos médios dos segmentos  $AH, BH$  e  $CH$ , respectivamente, veja figura 16.

Figura 16 – Os nove pontos do círculo de Euler.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Para os pontos  $A_1, B_1$  e  $C_1$ , os pontos médios dos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente possuem as seguintes coordenadas:

$$z_{A_1} = \frac{1}{2}(b + c), z_{B_1} = \frac{1}{2}(c + a) \text{ e } z_{C_1} = \frac{1}{2}(b + a)$$

As coordenadas dos pontos  $A'', B''$  e  $C''$  que são os pontos médios dos segmentos  $AH, BH$  e  $CH$ , respectivamente, são dadas por

$$z_{A''} = a + \frac{1}{2}(b + c),$$

$$z_{B''} = b + \frac{1}{2}(c + a) \text{ e}$$

$$z_{C''} = c + \frac{1}{2}(b + a).$$

Já as coordenadas  $A', B', C'$  não são tão fáceis de encontrar, por isso é necessário a seguinte propriedade.

**Proposição 3.6.** Considerando o ponto  $X(x)$  no plano do triângulo  $ABC$ , seja  $P$  a

projeção de  $X$  para a reta  $BC$ . As coordenadas de  $P$  é dada por

$$p = \frac{1}{2} \left( x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right),$$

onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ .

*Demonstração.* Utilizando o produto complexo e o produto real apresentados nas proposições 3.5 e 3.2, respectivamente, podemos escrever as equações das retas  $BC$  e  $XP$  como se segue:

$$BC : (z - b) \times (c - b) = 0,$$

e

$$XP : (z - x) \cdot (c - b) = 0.$$

A coordenada  $p$  de  $P$  satisfaz ambas as equações; portanto, temos

$$BC : (p - b) \times (c - b) = 0 \text{ e } XP : (p - x) \cdot (c - b) = 0.$$

Estas equações são equivalentes a

$$(p - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{p} - \bar{b})(c - b) = 0$$

e

$$(p - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{p} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Adicionando as relações acima, obtemos

$$(2p - b - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{x})(c - b) = 0$$

Decorre que

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left[ b + x + \frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left[ b + x + \frac{c - b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ b + x + \frac{bc}{R^2} (\bar{x} - \bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left( x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right). \end{aligned}$$

■

A partir da proposição acima, temos que as coordenadas de  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{1}{2} \left( a + b + c + \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right); \\ z_{B'} &= \frac{1}{2} \left( a + b + c + \frac{ac\bar{b}}{R^2} \right); \end{aligned}$$

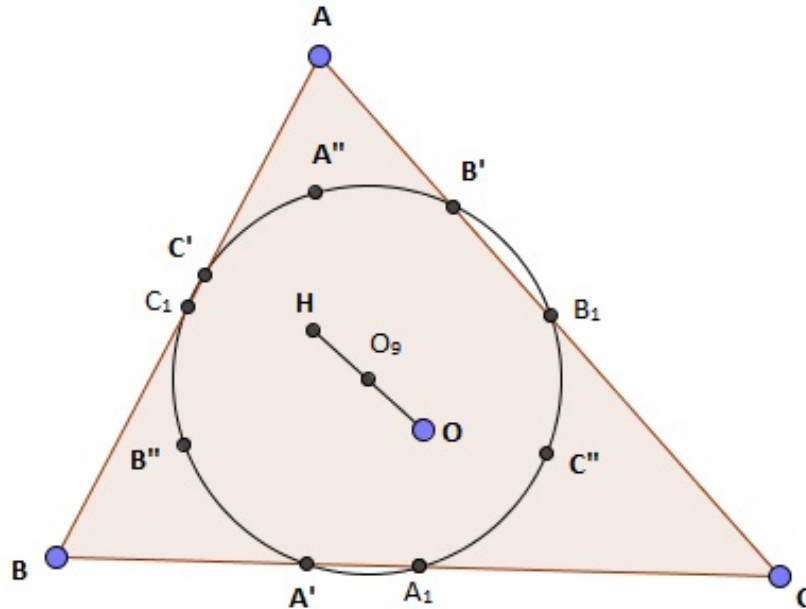
$$z_{C'} = \frac{1}{2} \left( a + b + c + \frac{ab\bar{c}}{R^2} \right);$$

Agora temos todas as ferramentas para demonstrar o teorema do círculo de nove pontos

**Teorema 3.1.** (*O círculo de nove pontos.*) *Em qualquer triângulo  $ABC$  os pontos  $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$  descrito acima estão todos no mesmo círculo, cujo centro é o ponto médio do segmento  $OH$ , e o raio é a metade da circunferência circunscrita.*

*Demonstração.* Denote por  $O_9$  o ponto médio do segmento  $OH$ ,  $O$  é o circuncentro e  $H$  o ortocentro. Usando a nossa hipótese inicial, segue-se que  $z_{O_9} = \frac{1}{2}(a + b + c)$ , pois  $z_O = 0$  e  $z_H = a + b + c$ . Também temos  $|a| = |b| = |c| = R$ , em que  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$  (veja figura 17).

Figura 17 – Demonstração do teorema do círculo de nove pontos.



Fonte: Próprio autor .

Observe que  $O_9A_1 = |z_{A_1} - z_{O_9}| = \left| \frac{1}{2}(b + c) - \left( \frac{1}{2}(a + b + c) \right) \right| = \frac{1}{2} |a| = \frac{1}{2}R$ , e também  $O_9B_1 = O_9C_1 = \frac{1}{2}R$ .

Podemos escrever  $O_9A'' = |z_{A''} - z_{O_9}| = \left| a + \frac{1}{2}(b + c) - \left( \frac{1}{2}(a + b + c) \right) \right| = \frac{1}{2} |a| = \frac{1}{2}R$ , e também  $O_9B'' = O_9C'' = \frac{1}{2}R$ .

A distância de  $O_9A'$  também não é difícil de calcular

$$O_9A' = |z_{A'} - z_{O_9}| = \left| \frac{1}{2} \left( a + b + c + \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right) - \frac{1}{2}(a + b + c) \right|$$

$$\frac{1}{2R^2} |bc\bar{a}| = \frac{1}{2R^2} |\bar{a}| |b| |c| = \frac{R^3}{2R^2} = \frac{1}{2}R.$$

Similarmente, nós obtemos  $O_9B' = O_9C' = \frac{1}{2}R$ . Portanto  $O_9A_1 = O_9B_1 =$

$O_9C_1 = O_9A' = O_9B' = O_9C' = O_9A'' = O_9B'' = O_9C'' = \frac{1}{2}R$  e obtemos o desejado. ■

O baricentro, o circuncentro e o ortocentro de qualquer triângulo são colineares e isso será demonstrado no teorema a seguir.

**Teorema 3.2.** (*Reta de Euler.*) *Em qualquer triângulo  $ABC$  os pontos  $O, G, H$  são colineares.*

*Demonstração.* Consideremos, sem perda de generalidade, que o circuncentro  $O$  está na origem do plano complexo, temos  $z_O = 0$ ,  $z_G = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ,  $z_H = a + b + c$ , portanto estes pontos são colineares pelas propriedades de produto complexo. ■

### 3.2 A reta de Simson

Olhando para a figura 18 a reta  $RQ$  passando por  $P$ , onde  $P, Q$  e  $R$  são os pés das perpendiculares a partir de  $M$  e  $P, Q, R$  e  $M$  são concíclicas, é geralmente chamada de reta de Simson do ponto  $M$  com respeito ao triângulo  $ABC$ . Contudo os historiadores têm procurado em vão por ela através das obras de Robert Simson (1687 - 1768). Parece ter sido publicada pela primeira vez por William Wallace (1768 - 1843) em 1797. Nesta seção, vamos provar o teorema atribuído a Simson.

**Teorema 3.3.** *Considere o triângulo  $ABC$  e um ponto  $M$ . Sejam  $P, Q, R$  os pés das perpendiculares a partir do ponto  $M$  para (as extensões) os lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então, os pontos  $P, Q$  e  $R$  são colineares se, e somente se,  $M$  estiver no círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que o  $\Delta ABC$  está inscrito no círculo unitário, e os pontos  $A, B, C$  e  $M$  são representados pelos números complexos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , respectivamente.

Em seguida, a equação da reta que passa por  $BC$  é dada por

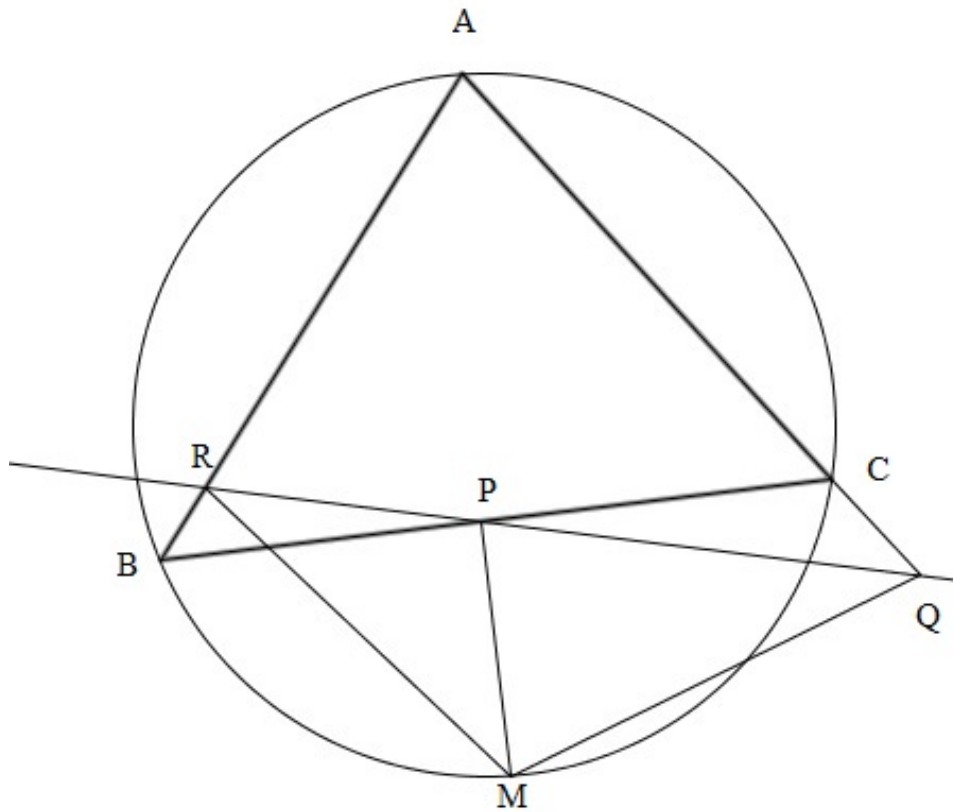
$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.,$$

isto é,

$$(\bar{\beta} - \bar{\gamma})z + (\gamma - \beta)\bar{z} + (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma) = 0.$$

Sabemos que  $|\beta| = 1 = \beta \cdot \bar{\beta}$ , então, usando a relação  $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$  e o mesmo para

Figura 18 – A reta de Simson.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

$\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ , podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)z + (\gamma - \beta)\bar{z} + \beta \cdot \frac{1}{\gamma} - \gamma \cdot \frac{1}{\beta} &= 0 \\ (\gamma - \beta)z + \gamma\beta(\gamma - \beta)\bar{z} + \beta^2 - \gamma^2 &= 0 \\ (\gamma - \beta)[z + \gamma\beta\bar{z} - (\beta + \gamma)] &= 0 \\ z + \gamma\beta\bar{z} &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

A equação da perpendicular a partir de  $M(\delta)$ , para o lado  $BC$  pela proposição 2.21 é dada por:

$$\begin{aligned} (z - z_0) &= \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0), \\ (z - \delta) &= \gamma\beta(\bar{z} - \bar{\delta}), \\ z - \gamma\beta\bar{z} &= \delta - \beta\gamma\bar{\delta}. \end{aligned}$$

Portanto,  $P(\lambda)$  é a interseção destas duas retas

$$\begin{cases} z + \gamma\beta\bar{z} = \beta + \gamma, \\ z - \gamma\beta\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta} \end{cases} .$$

Resolvendo as duas equações acima, temos que

$$\lambda = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}).$$

Similarmente, obtemos  $Q(\mu), R(\nu)$ , onde

$$\mu = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta})$$

e

$$\nu = \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \delta - \beta\alpha\bar{\delta}).$$

Agora, pela proposição 2.10  $P(\lambda), Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  são colineares  $\iff \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} \in \mathbb{R}$

No entanto, com a notação  $r = |\delta|$  (consequentemente  $\bar{\delta} = \frac{r^2}{\delta}$ ), temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} &= \frac{\frac{1}{2}(\gamma - \alpha - \beta\gamma\bar{\delta} + \alpha\beta\bar{\delta})}{\frac{1}{2}(\gamma - \beta - \gamma\alpha\bar{\delta} + \alpha\beta\bar{\delta})} \\ &= \frac{\gamma - \alpha - \beta\bar{\delta}(\gamma - \alpha)}{\gamma - \beta - \alpha\bar{\delta}(\gamma - \beta)} \\ &= \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta\bar{\delta})}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha\bar{\delta})} \\ &= \frac{(\gamma - \alpha)}{(\gamma - \beta)} \cdot \frac{-1}{-1} \cdot \frac{(\beta\bar{\delta} - 1)}{(\alpha\bar{\delta} - 1)} \\ &= \frac{(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)} \cdot \frac{\bar{\gamma}(\beta - \frac{1}{\delta})}{\bar{\gamma}(\alpha - \frac{1}{\delta})} \\ &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta r^{-2}}{\alpha - \delta r^{-2}} \\ &= \left( \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right) / \left( \frac{\alpha - \delta r^{-2}}{\beta - \delta r^{-2}} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$P, Q, R$  são colineares  $\iff (\alpha, \beta, \gamma, \delta r^{-2}) \in \mathbb{R}$

$\iff \alpha, \beta, \gamma, \delta r^{-2}$  são cocircular

$\delta \mid r^{-2} \mid = 1$

$r = \delta = 1$

■

Agora, vamos encontrar a equação da reta de Simson. Mantemos as mesmas notações como antes, em particular assumimos que o triângulo  $\Delta ABC$  está inscrito no círculo unitário, e o ponto  $M(\delta)$  está no círculo unitário. Em seguida, o pé  $P$  da perpen-

dicular de  $M(\delta)$  para o lado  $BC$  é dado por

$$z = \frac{1}{2} \left( \beta + \gamma + \delta - \frac{\beta\gamma}{\delta} \right).$$

Vamos agora introduzir as notações

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta \text{ e } \sigma_3 = \alpha\beta\gamma.$$

Então,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \\ \bar{\sigma}_3 &= \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão acima para  $z$  torna-se

$$z = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha} \right)$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left( \bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha} + \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\delta}\bar{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3} \right).$$

Eliminando  $\alpha$  a partir destas duas relações, temos

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1\delta\alpha - \alpha^2 + \delta^2\alpha - \sigma_3}{\delta\alpha} \right)$$

$$\delta z = \frac{1}{2} \left( \sigma_1\delta - \alpha\delta + \delta^2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} \right)$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha\sigma_2\delta - \sigma_3\delta + \alpha\sigma_3 - \alpha^2\delta^2}{\sigma_3\alpha\delta} \right)$$

$$\sigma_3\bar{z} = \frac{1}{2} \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{\sigma_3}{\delta} - \alpha\delta \right),$$

subtraindo uma da outra temos:

$$\delta z - \sigma_3\bar{z} = \frac{1}{2} \left( \delta^2 + \sigma_1\delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta} \right).$$

Esta é uma relação que deve ser satisfeita pelo  $P(\lambda)$  o pé da perpendicular a partir de  $M(\delta)$  para o lado  $BC$ . No entanto,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  foram determinados com respeito a  $\alpha, \beta, \gamma$ . Segue-se que esta relação também é satisfeita pelos  $Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  pés das perpendiculares a partir de  $M(\delta)$  para os lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente.

Note que esta é uma equação de uma reta, daí o  $P, Q, R$  são colineares, e que a equação obtida pertence a equação da reta de Simson. Logo, temos uma prova alternativa



para o teorema anterior.

**Teorema 3.4.** *Sejam  $L, M, N$  três pontos do círculo circunscrito ao  $\Delta ABC$ . A condição necessária e suficiente para as retas de Simson  $L, M, N$  com respeito  $\Delta ABC$  reunem-se em um único ponto é*

$$\widehat{AL} + \widehat{BM} + \widehat{CN} \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

*Demonstração.* A circunferência circunscrita ao  $\Delta ABC$  é a circunferência unitária, e  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são os números complexos que representam os pontos  $L, M$  e  $N$ , respectivamente.

Então, a equação das três retas de Simson são:

$$v_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left( v_1^2 + \sigma_1 v_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{v_1} \right),$$

$$v_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left( v_2^2 + \sigma_1 v_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{v_2} \right),$$

$$v_3 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left( v_3^2 + \sigma_1 v_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{v_3} \right).$$

Conseqüentemente, a interseção das duas primeiras retas de Simson é dada por

$$z = \frac{1}{2} \left( v_1 + v_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{v_1 v_2} \right)$$

e os das duas últimas retas de Simson é dada por

$$z = \frac{1}{2} \left( v_2 + v_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{v_2 v_3} \right).$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para estes dois pontos coincidirem é  $\sigma_3 = v_1 v_2 v_3$ ; isto é,  $\alpha \beta \gamma = v_1 v_2 v_3$ . Como  $\alpha, \beta, \gamma, v_1, v_2$  e  $v_3$  são números complexos com valor absoluto 1, definindo seus argumentos por  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$ , respectivamente, obtemos

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

e

$$(\theta_1 - \varphi_1) + (\theta_2 - \varphi_2) + (\theta_3 - \varphi_3) \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

que é a condição desejada. ■

Observe que se essa condição é satisfeita, então a interseção é dada por

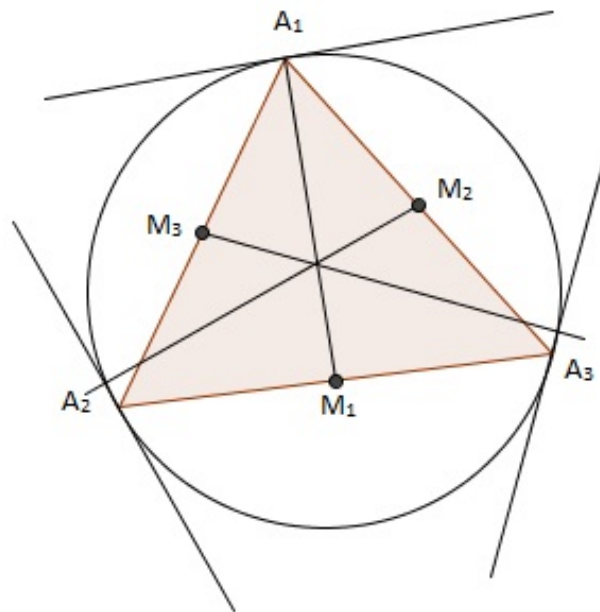
$$z = \frac{1}{2}(\sigma_1 + v_1 + v_2 + v_3) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + v_1 + v_2 + v_3).$$

### 3.3 Teorema de Cantor

Começamos a explicar o teorema de Cantor a partir do seguinte caso simples proposto no teorema abaixo.

**Teorema 3.5.** *As três perpendiculares dos pontos médios dos lados de um triângulo com as tangentes aos vértices opostos encontram-se no centro do círculo de nove pontos do triângulo.*

Figura 19 – Teorema de Cantor.



Fonte: Hahn .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\Delta A_1 A_2 A_3$  está inscrito na circunferência unitária. Vale lembrar que a equação da reta que passa pelos pontos  $\alpha$  e  $\beta$  da circunferência unitária é dada por

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

isto é,

$$(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + (\beta - \alpha)\bar{z} + (\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = 0.$$

Sabemos que  $|\alpha| = 1 = \alpha \cdot \bar{\alpha}$ , então, usando a relação  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  e o mesmo para  $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ , isso pode ser reescrito como

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)z + (\beta - \alpha)\bar{z} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} - \beta \cdot \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$(\beta - \alpha)z + \alpha\beta(\beta - \alpha)\bar{z} + \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

$$(\beta - \alpha)[z + \alpha\beta\bar{z} - (\alpha + \beta)] = 0$$

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

a tangente ao círculo unitário no ponto  $\alpha$  no caso particular em que  $\alpha$  e  $\beta$  coincide tem equação

$$z + \alpha^2\bar{z} = 2\alpha.$$

Sejam,  $A_1, A_2$  e  $A_3$  representado, pelos números complexos  $u_1, u_2$  e  $u_3$ , respectivamente. Em seguida, a equação da tangente em  $\alpha$  é

$$z + u_1^2\bar{z} = 2u_1.$$

Conseqüentemente, a equação da perpendicular do ponto médio  $M_1 \left( \frac{u_2+u_3}{2} \right)$  do lado  $A_2A_3$  a reta tangente é

$$z - \left( \frac{u_2 + u_3}{2} \right) = u_1^2 \left( \bar{z} - \frac{\bar{u}_2 + \bar{u}_3}{2} \right)$$

$$z - u_1^2\bar{z} = \frac{1}{2}\{(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)\}.$$

Substituindo o centro  $\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3)$  do círculo de nove pontos do triângulo  $\Delta A_1A_2A_3$  no lado esquerdo desta equação, obtemos

$$\frac{1}{2}\{(u_1 + u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3)\} = \frac{1}{2}\{(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)\} \text{ Obs } (u_1\bar{u}_1 = 1),$$

que coincide com o lado direito da equação. Portanto, o centro do círculo de nove-pontos satisfaz a equação da perpendicular a partir de  $M_1$  à tangente em  $A_1$ . Do mesmo modo, o centro do círculo de nove pontos é perpendicular a partir de  $M_2$  e  $M_3$  às tangentes dos respectivos vértices opostos. ■

O teorema a seguir é uma generalização para o polígono de n-lados.

**Teorema 3.6.** *Sejam  $n$  pontos em um círculo. A partir do baricentro também chamado de centro de gravidade  $n - 1$  desses pontos, traça uma perpendicular à tangente ao círculo no ponto restante. Em seguida, essas  $n$  perpendiculares se encontram em um ponto.*

*Demonstração.* A prova é praticamente a mesma que a anterior. Sendo  $u_1, u_2, \dots, u_n$  os  $n$  pontos do círculo unitário. Então, a equação da tangente em  $u_1$  é  $z + u_1^2\bar{z} = 2u_1$  pelo teorema anterior, temos que as coordenadas do baricentro é dada por

$$\frac{1}{n-1}(u_2 + u_3 + \dots + u_n) = \frac{(\sigma_1 - u_1)}{n-1} \text{ com } (\sigma_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_n),$$

então a equação da perpendicular dos pontos  $u_2, u_3, \dots, u_n$  para as tangentes é dada por

$$\begin{aligned} z - u_1^2 \bar{z} &= \frac{1}{n-1} \{(u_2 + u_3 + \dots + u_n) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \dots + \bar{u}_n)\} \\ &= \frac{1}{n-1} \{(\sigma_1 - u_1) - u_1^2(\bar{\sigma}_1 - \bar{u}_1)\} \\ &= \frac{1}{n-1} (\sigma_1 - u_1^2 \bar{\sigma}_1). \end{aligned}$$

é óbvio que o ponto

$$= \frac{1}{n-1} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{\sigma_1}{n-1}$$

satisfaz esta equação. ■

Agora vamos apresentar mais um dos teoremas descobertos por M. B. Cantor (1829 - 1920).

**Teorema 3.7.** *Sejam  $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1$  e  $P_2$  seis pontos cocirculares. Em seguida, as quatro interseções dos quatro pares de retas de Simson dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  em relação aos triângulos*

$$\Delta A_2 A_3 A_4, \Delta A_1 A_3 A_4, \Delta A_1 A_2 A_4, \Delta A_1 A_2 A_3$$

*são colineares. Esta reta é chamada reta de Cantor do par de pontos  $P_1$  e  $P_2$  em relação ao quadrilátero  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que todos esses pontos estão no círculo unitário, e que eles são representados pelos números complexos  $u_1, u_2, u_3, u_4$  e  $t_1, t_2$ , respectivamente. Então a equação da reta de Simson dos pontos  $P_1(t_1)$  e  $P_2(t_2)$  em relação ao triângulo  $\Delta A_2 A_3 A_4$  são dados por

$$t_1 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ t_1^2 + (u_2 + u_3 + u_4) t_1 - (u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_1} \right\},$$

$$t_2 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ t_2^2 + (u_2 + u_3 + u_4) t_2 - (u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_2} \right\},$$

Consequentemente, a interseção é dada por

$$z = \frac{1}{2} \left\{ t_1 + t_2 + (u_2 + u_3 + u_4) + \frac{u_2 u_3 u_4}{t_1 t_2} \right\}.$$

Denotamos

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

$$\sigma_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4,$$

$$\sigma_3 = u_2u_3u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_2u_4 + u_1u_2u_3,$$

$$\sigma_4 = u_1u_2u_3u_4.$$

A relação acima pode ser reescrita como

$$z = \frac{1}{2} \left\{ t_1 + t_2 + \sigma_1 - u_1 + \frac{\sigma_4}{t_1t_2t_3} \right\},$$

e então

$$\bar{z} = \left\{ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{1}{u_1} + \frac{t_1t_2t_3}{\sigma_4} \right\}.$$

Eliminando  $u_1$  das duas últimas relações, temos

$$t_1t_2z + \sigma_4\bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ (t_1 + t_2)t_1t_2 + \sigma_1t_1t_2 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_1 + t_2)}{t_1t_2} \right\}.$$

Esta é uma relação que deve ser satisfeita pela interseção da reta de Simson de  $P_1$  e de  $P_2$  em relação ao  $\Delta A_2A_3A_4$ . Contudo essa relação é simétrica em relação a  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$  e portanto, é satisfeita pela interseção da reta de Simson de  $P_1$  e  $P_2$  em relação aos  $\Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_2A_4$  *moboxe*  $\Delta A_1A_2A_3$ . Desse modo, esta relação é a equação de uma reta. Logo, esses quatro cruzamentos são colineares. ■

### 3.4 Teorema de Feuerbach

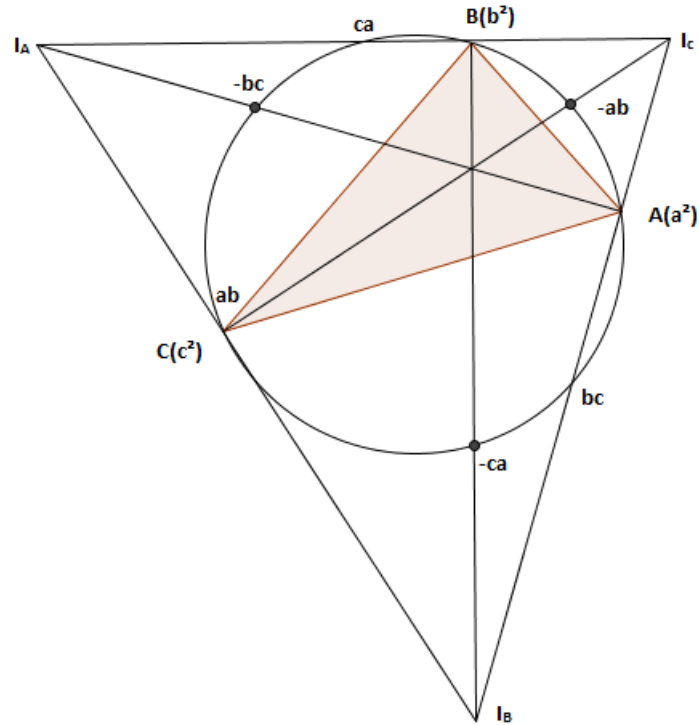
Seja  $H$  o ortocentro do triângulo  $\Delta ABC$ . Observando que o círculo de nove pontos desse triângulo é também o círculo de nove-pontos dos triângulos  $\Delta HBC, \Delta HCA$  e  $\Delta HAB$ . O seguinte teorema de 1822 atribuído a K. W. Feuerbach (1800 - 1834), um professor do ensino médio em Erlagen, Alemanha, é verdadeiramente notável.

**Teorema 3.8.** *O círculo de nove pontos de um triângulo é tangente ao círculo inscrito e a três círculos exinscrito que é tangente a um lado e as extensões dos outros dois.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que o  $\Delta ABC$  está inscrito no círculo unitário. Para evitar a ambiguidade de sinais na raiz quadrada dos números complexos, vamos assumir que os vértices  $A, B, C$  são representados por números complexos  $a^2, b^2$  e  $c^2$ , respectivamente (veja figura 20).

A bissetriz interior do vértice  $A$  passa através do ponto médio de  $\widehat{BC}$ , que não contém o vértice  $A$ , enquanto que a bissetriz do ângulo externo do vértice  $A$  passa através do ponto médio de  $\widehat{BC}$ , que contém o vértice  $A$ . Deixe o último ser  $bc$ , então o primeiro deve ser  $-bc$ . Do mesmo modo, o ponto médio de  $\widehat{CA}$ , que contém o vértice  $B$  é  $ca$  e que  $\widehat{CA}$ , que não contém o vértice  $B$  é  $-ca$ , e o ponto médio de  $\widehat{AB}$ , que contém o vértice  $C$  é  $ab$  e que  $\widehat{AB}$ , e o que não contém  $C$  é  $-ab$ . (Note que isso sempre é possível, alterando o sinal(s) de  $a, b$  e  $c$ , se necessário). Por exemplo, suponha que  $A, B$  e  $C$  situam se no

Figura 20 – Teorema de Feuerbach.



Fonte: Próprio autor .

sentido anti-horário do círculo unitário com  $A$  no ponto  $z = 1$ . Escolha  $a, b$  e  $c$  de tal modo que  $a = -1$ ,  $0 < \arg b < \pi$  e  $-\pi < \arg c < 0$ .)

As equações das três bissetrizes interiores são

$$z - a^2bc\bar{z} = a^2 - bc,$$

$$z - ab^2c\bar{z} = b^2 - ca,$$

$$z - abc^2\bar{z} = c^2 - ab,$$

respectivamente. Resolvendo o sistema e escolhendo duas quaisquer das três equações acima, obtemos

$$z = -(bc + ca + ab).$$

Como de costume, se denotarmos

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = bc + ca + ab, \quad \sigma_3 = abc,$$

então a interseção é igual  $-\sigma_2$ . Claramente, este resultado também satisfaz as outras equações. Mostramos também que as três bissetrizes se encontram em um único ponto; este ponto é chamado incentro  $I$  do triângulo.

Mas  $I : \sigma_2 = -bc - ca - ab$  é também o ortocentro do triângulo com vértices em  $-bc, -ca, -ab$ . Isso é óbvio, se compararmos a equação da bissetriz do ângulo interno

do vértice  $A$  com a reta que une os pontos  $-ab$  e  $-ca$ .

$$z + a^2bc\bar{z} = -ca - ab.$$

A afirmativa acima, é verdadeira para as outras duas bissetrizes.

Observação semelhante nos diz que os exicentros  $I_A, I_B$  e  $I_C$  são ortocentros dos triângulos com vértices em

$$-bc, ab, ca,$$

$$-ca, bc, ab,$$

$$-ab, ca, bc,$$

respectivamente. Uma vez que todos estes triângulos estão inscritos na circunferência unitária, temos

$$I_A : -bc + ab + ca;$$

$$I_B : -ca + bc + ab;$$

$$I_C : -ab + ca + bc.$$

Agora, calculamos a distância  $d$  entre o incentro  $I$  e o centro do círculo de nove pontos do  $\Delta ABC$ .

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \sigma_2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sigma_2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) \right| \\ &= \frac{1}{2} |(a + b + c)^2| = \frac{1}{2} \sigma_1 \bar{\sigma}_1. \end{aligned}$$

Sabemos que o raio do círculo de nove pontos é  $\frac{1}{2}$ . Vamos calcular o raio  $r$  do círculo inscrito. A equação da reta  $BC$  é

$$z + b^2c^2\bar{z} = b^2 + c^2$$

e a equação da perpendicular desde o incentro  $I(-\sigma_2)$  para o lado  $BC$  é

$$z - b^2c^2\bar{z} = -\sigma_2 + b^2c^2\bar{\sigma}_2 = -\sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a}.$$

Portanto, o pé da perpendicular é dado por

$$z = \frac{1}{2} \left( b^2 + c^2 - \sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a} \right).$$

Segue que o raio  $r$  do círculo inscrito é

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{1}{2} \left( b^2 + c^2 - \sigma_2 + \frac{bc\sigma_1}{a} \right) + \sigma_2 \right| \\ &= \frac{1}{2} |a(b^2 + c^2) + a\sigma_2 + bc\sigma_1| \\ &= \frac{1}{2} |(a+c)(c+a)(a+b)| \\ &= \frac{1}{2} |\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3| = \left| \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| d - \frac{1}{2} \right|, \end{aligned}$$

onde usamos o fato  $|a| = 1 = |\sigma_3|$ . É simples de verificar que  $d < \frac{1}{2}$ , portanto, temos

$$r = \frac{1}{2} - d \text{ isto é, } d = \frac{1}{2} - r,$$

o que mostra que o círculo de nove pontos e o círculo inscrito são tangentes um ao outro internamente.

A prova que o círculo de nove pontos é tangente ao círculo exinscrito  $I_A$ , é clara. Temos apenas que substituir  $a$  por  $-a$  e repetir o procedimento acima. ■

### 3.5 Teorema de Morley

O teorema seguinte foi descoberto por Frank Morley (1860 - 1934) por volta do século XX. Certamente se qualifica como um dos mais belos teoremas da matemática.

**Teorema 3.9.** (Morley). *Em um triângulo qualquer, a união dos pontos de interseção das trissetrizes adjacentes forma um triângulo equilátero (veja figura 21).*

Antes de começarmos a prova deste teorema, precisaremos das seguintes informações.

**Lema 3.1.** *Suponha que  $t_1, t_2, t_3$  e  $t_4$  são pontos no círculo unitário. Então, as cordas (ou extensões das mesmas) que unem os pontos  $t_1, t_2, t_3$  e  $t_4$  se encontram em*

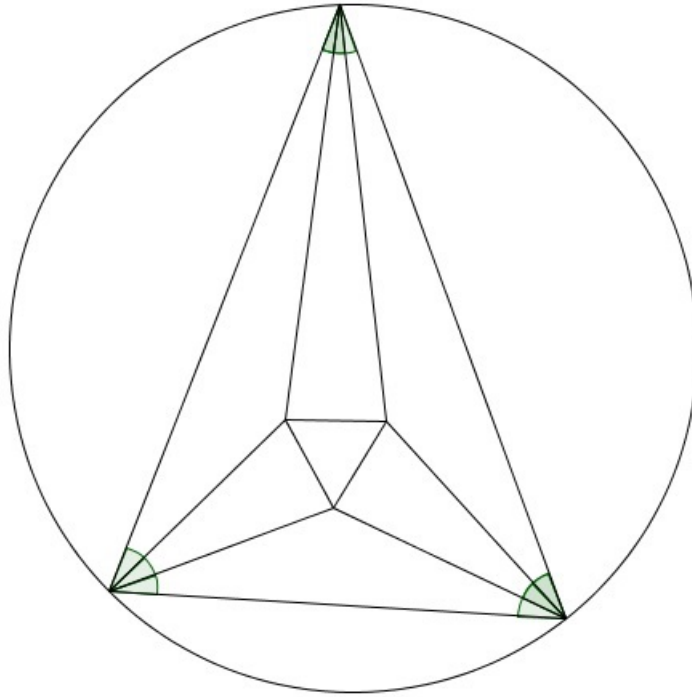
$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{t_1 t_2 - t_3 t_4}.$$

*Demonstração.* Sabemos que as equações das retas que passam nos pontos  $t_1$  e  $t_2$  e de  $t_3$  e  $t_4$  são

$$(I) : z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2,$$



Figura 21 – Teorema de Morley.



Fonte: Próprio autor .

$$(II) : z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4,$$

respectivamente.

Da equação (I), vale lembrar que  $t = \frac{1}{\bar{t}}$ , obtemos:

$$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2$$

$$z + \frac{1}{\bar{t}_1 \bar{t}_2} \bar{z} = \frac{1}{\bar{t}_1} + \frac{1}{\bar{t}_2}$$

$$\bar{t}_1 \bar{t}_2 z + \bar{z} = \bar{t}_2 + \bar{t}_1.$$

Por (II), temos:

$$z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4$$

$$z + \frac{1}{\bar{t}_3 \bar{t}_4} \bar{z} = \frac{1}{\bar{t}_3} + \frac{1}{\bar{t}_4}$$

$$\bar{t}_3 \bar{t}_4 z + \bar{z} = \bar{t}_4 + \bar{t}_3$$

$$\bar{z} = \bar{t}_4 + \bar{t}_3 - \bar{t}_3 \bar{t}_4 z.$$

Substituindo a equação (II) em (I), obtemos que a interseção das duas retas é dada por

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1 \bar{t}_2 - \bar{t}_3 \bar{t}_4}.$$



Agora demonstraremos o teorema de Morley .

*Demonstração.* (Teorema de Morley). Sem perda de generalidade, podemos assumir que o  $\Delta ABC$  está inscrito no círculo unitário, e que o vértice  $A$  está no ponto 1 (veja figura 22). Seja

$$\angle AOB = 3\gamma \quad (0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}),$$

$$\angle AOC = 3\beta \quad (-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0),$$

$$\angle BOC = 3\alpha \quad (\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0).$$

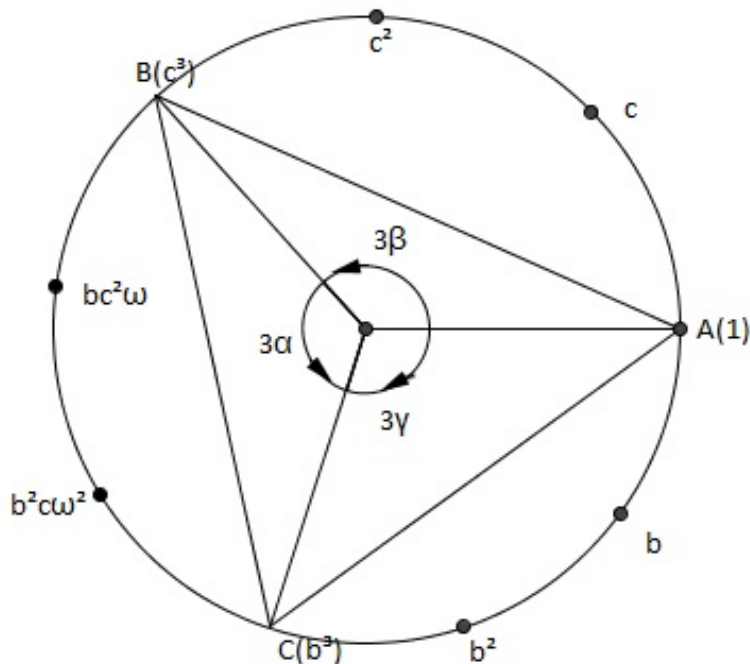
Em seguida , os argumentos dos pontos que trissecciona  $\widehat{BC}$  (não contendo o ponto A), são:

$$\alpha + 3\gamma = \beta + 2\gamma + \frac{2\pi}{3}$$

e

$$2\alpha + 3\gamma = 2\beta + \gamma + \frac{4\pi}{3}.$$

Figura 22 – Arcos e coordenadas.

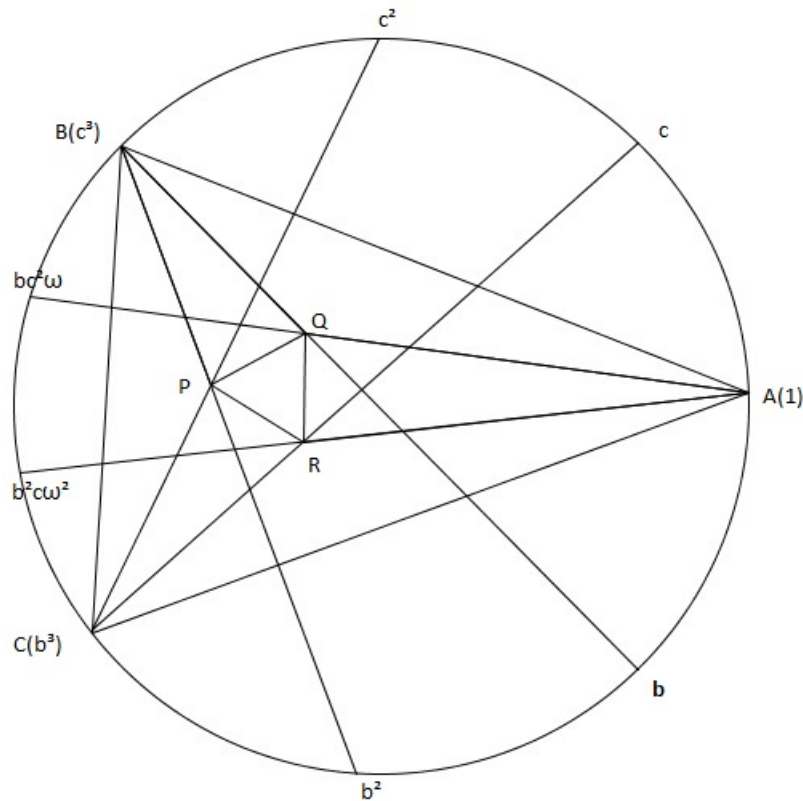


Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

Portanto, se definirmos os pontos que trisseccionam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  por  $c, c^2$  e  $b, b^2$ , respectivamente, então,  $B$  e  $C$  são  $c^3$  e  $b^3$ , respectivamente, e os pontos que trissecciona  $\widehat{BC}$  são dados por  $bc^2w$  e  $b^2cw^2$ , onde  $w^2 + w + 1 = 0$ .

Sejam  $P(\lambda)$ ,  $Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  as interseções das trissetrizes adjacentes dos ângulos de  $B$  e  $C$ ,  $C$  e  $A$ ,  $A$  e  $B$ , respectivamente. Em seguida, pelo lema anterior, e observando

Figura 23 – Trissetrizes adjacentes forma um triângulo equilátero.



Fonte: ANDREESCU, ANDRICA .

que  $\bar{b}^2 = b^{-2}$  e  $\bar{c}^2 = c^{-2}$ , temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{b^{-2} + c^{-3} - b^{-3} - c^{-2}}{b^{-2}c^{-3} - b^{-3}c^{-2}} = \frac{bc^3 + b^3 - c^3 - b^3c}{b - c} \\ &= \frac{(b - c)(b^2 + bc + c^2) - bc(b^2 - c^2)}{b - c} = (b^2 + bc + c^2) - bc(b + c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 + b^{-2}c^{-1}w^{-2} - b^{-3} - c^{-1}}{b^{-2}c^{-1}w^{-2} - b^{-3}c^{-1}} = \frac{b^3c + b\omega - c - b^3}{b\omega - 1} \\ &= \frac{c(b^3 - 1) - b(b^2 - \omega)}{\omega(b - \omega^2)} = \omega^2\{c(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1 + b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1} - c^{-3}}{b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1}c^{-3}} = \frac{bc^3 + c\omega^2 - c^3 - b}{c\omega^2 - 1} \\ &= \frac{b(c^3 - 1) - c(c^2 - \omega^2)}{\omega^2(c - \omega)} = \omega\{b(c^2 + c\omega + \omega^2) - c(c + \omega)\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda + \omega\mu + \omega^2\nu = b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2 + b^2c + bc\omega^2 + c\omega - b^2 - b\omega^2 + bc^2 + bc\omega + b\omega^2 - c^2 - c\omega = 0,$$

com isso concluímos a prova. ■

## 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

### 4.1 Metodologia de aplicação

O presente trabalho busca reconstruir pressupostos teóricos relacionados aos números complexos em seus princípios básicos utilizados em sala de aula. E para isso, se faz necessário saber que o ensino dos números complexos, muitas vezes, é limitado quanto sua potencialidade. Nessa pesquisa, acrescentamos a esse conteúdo um elemento pouco utilizado para solucionar questões teóricas a eles associado, trata-se dos conhecimentos geométricos.

Os números complexos ocupam uma posição muito singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis. De fato, que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução “imaginária” para uma equação que “sabemos” que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos. (<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>).

Na perspectiva de melhorar o ensino de números complexos será desenvolvido com o alunos um projeto de aplicação desses números na geometria analítica, como por exemplo distância de dois pontos, triângulos, equação da reta e da circunferência. Por fim demonstraremos o teorema de Napoleão e o teorema do círculo de nove pontos.

### 4.2 Contexto

A pesquisa em campo foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Professora Eudes Veras, localizada na Avenida Siqueira Campos, 601, Siqueira, Maracanaú. Funciona nos três turnos com ensino regular e EJA, tendo ao todo 27 turmas, sendo 11 turmas de 1º ano, 8 turmas de 2º ano, 7 turmas de 3º ano e 1 turma de EJA.

Estruturalmente a escola possui 9 salas de aulas, 2 laboratórios (ciências e informática), 1 multimeios, secretaria, sala dos professores, sala da coordenação, sala da direção. Além disso, no seu quadro funcional tem 50 professores, 3 coordenadores pedagógicos, 1 diretora, 1 secretária, 1 assistente administrativo, 7 auxiliares de serviço, 2 vigilantes. Esse conjunto de profissionais asseguram a rotina escolar de aproximadamente 1200 alunos na unidade pesquisada.

Em seguida, os alunos da unidade escolar foram convidados a participarem de um minicurso promovido pela mestranda, sendo aberta uma pré-inscrição para alunos interessados em participar da atividade proposta. A última etapa compõe-se de um

questionário aplicado aos alunos e da análise dos resultados verificados no minicurso.

### 4.3 Participantes

A Participação dos alunos deu-se a princípio pela formação de um grupo de trabalho com 30 alunos, entre 16 e 18 anos, das turmas de 3º série do Ensino Médio. Todos os participantes da pesquisa assinaram um termo de consentimento e utilização de imagem. As tabelas abaixo mostram o número de participantes inscrito por turma e a frequência dos alunos.

Tabela 1: Número de inscrito por turma.

Turma	Frequência
A	8
B	8
C	11
D	1
E	3
Total	30

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 2: Frequência.

Turma	09/05	10/05	12/05	13/05	16/05	17/05
A	6	7	5	6	4	7
B	7	6	5	3	3	5
C	10	6	8	9	9	9
D	1	1	1	0	1	0
E	2	3	2	1	1	2
Total	26	23	21	18	18	23

Fonte: Dados da pesquisa.

Os encontros foram proveitosos. Os alunos interagiram e responderam um questionário socioeconômico e motivacional. A partir daí, as respostas dadas foram dispostas em tabelas importantes para nortear e fomentar a pesquisa aqui desenvolvida.

As revelações feitas por meio do questionário revelam aspectos que podem interferir de forma positiva e negativa no desempenho escolar dos alunos. Entre os alunos pesquisados, há uma certa homogeneidade em relação ao perfil etário, e ao sexo. Dos alunos entrevistados, três exercem algum tipo de atividade remunerada. Em relação ao tipo de escola frequentada temos que dezesseis alunos cursaram todo o Ensino Fundamental em escola Pública, dois em escola da rede Particular e oito deles cursaram parcialmente seus estudos, do Ensino Fundamental, em escolas públicas e particulares. Os outros dados

da entrevista, como renda familiar e nível de escolaridade dos pais, foram tão reveladores que optamos por demonstrá-los nas tabelas a seguir. É importante ressaltar que o questionário foi aplicado no primeiro dia com 26 participantes.

Tabela 3: Renda familiar.

Renda familiar	Frequência	Porcentagem
Até um salário mínimo	9	35%
Dé 1 até 2 salários mínimos	13	50,0%
Dé 2 até 5 salários mínimos	4	15%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 4: Nível de escolaridade do pai.

Nível de escolaridade do pai	Frequência	Porcentagem
1° a 4° série do ensino fundamental	8	31%
5° a 8° série do ensino fundamental	7	27%
Ensino médio incompleto	4	15%
Ensino médio completo	3	12%
Não sei	4	15%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 5: Nível de escolaridade da mãe.

Nível de escolaridade da mãe	Frequência	Porcentagem
1° a 4° série do ensino fundamental	5	19%
5° a 8° série do ensino fundamental	7	27%
Ensino médio incompleto	4	15%
Ensino médio completo	6	23,0%
Ensino superior incompleto	2	8%
Ensino superior completo	1	4%
Não sei	1	4%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

As tabelas a seguir apresentam o grau de interesse dos alunos em relação aos estudos e como eles se autoavaliaram. Um fator que chamou bastante atenção foi que 88% dos alunos entrevistados dedicam menos de duas horas por dia aos estudos em outro espaço físico, além das horas em sala de aula. E 84% deles informaram que consideram seu desempenho satisfatório, acima ou na chamada média escolar estabelecida pela unidade de ensino, que é 6.

Tabela 6: Horas estudadas por dia além das horas em sala de aula.

Horas estudadas por dia	Frequência	Porcentagem
Menos de uma hora	9	35%
Entre 1 e 2 horas	14	54%
Entre 2 e 4 horas	3	12%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 7: Nota que você se daria como estudante.

Nota	Frequência	Porcentagem
Menos que 5	1	4%
Nota 6	3	12%
Entre 6 e 8	16	62%
Entre 8 e 10	6	23%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

Todos os alunos pesquisadas acreditam que a matemática é importante para a sua vida pois por isso resolveram participar do projeto. Ressaltamos, que dos 26 alunos participantes, 8 já haviam estudado números complexos em um dado curso técnico. Em relação a motivação demonstrada pelos mesmos a participarem do minicurso em números complexos e geometria ministrado durante a realização da presente pesquisa, os alunos relataram a necessidade de conhecer e dominar o assunto como pré-requisito para cursar os cursos técnicos que frequentam e demonstraram conhecimento da importância desse assunto para o curso de graduação que pretendem fazer na universidade.

Tabela 8: Nota para o grau de importância de matemática para a sua vida.

Nota	Frequência	Porcentagem
Nota 6	10	38%
Entre 6 e 8	6	23%
Entre 8 e 10	10	38%
Total	26	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

#### 4.3.0.1 Problemas encontrados

No período de execução do minicurso a escola estava em greve, com isso aconteceu uma rotatividade dos alunos. Do grupo de 30 alunos apenas 13 obtiveram uma frequência desejada dos seis encontros desenvolvidos 7 participaram de todos e 6 faltaram apenas um dia. Portanto, a análise dos resultados do teste final será feita apenas com



esses 13 alunos.

#### 4.4 Projeto: Minicurso de números complexos e geometria

##### 4.4.1 Justificativa

Atualmente, os números complexos não são contemplados na matriz curricular no ensino médio. Um dos fatores é o modelo de prova para o acesso as universidades e também, por acreditar que sua aplicação só faz sentido para aqueles alunos que desejam ingressar em determinadas áreas específicas no ensino superior como matemática, física e engenharia.

No intuito de mostrar aplicabilidade dos números complexos e de desmistificar a ideia de não priorizar seu ensino, surge a necessidade de desenvolver esse projeto, tendo como foco ampliar o conhecimento matemático e oportunizar aos alunos outras aplicações desses números em geometria.

##### 4.4.2 Desenvolvimento do projeto

A proposta do minicurso é desenvolver com alunos aulas dialogadas, utilizando quadro branco, pincel e uma apostila. Para a aplicação, sugerimos duas semanas. Os assuntos abordados são:

- Um pouco de história dos números complexos.
- Representação algébrica dos números complexos:

- ★ Definição
- ★ Propriedades relativas a adição
- ★ Propriedades relativas a multiplicação
- ★ Os números complexos na forma algébrica
- ★ Potências do número  $i$
- ★ Conjugado
- ★ Módulo
- ★ Resolvendo equações do 2º grau.
- ★ Exercício

- Interpretação geométrica:

- ★ Número complexo
- ★ Módulo
- ★ Operações

- ★ Exercício
  - Representação polar do número complexo
  - Algumas noções geométricas simples e propriedades:
- ★ Distância entre dois pontos
- ★ Dividindo um segmento para uma determinada razão
- ★ Triângulos semelhantes
- ★ Mediana, mediatriz, altura e bissetriz do triângulo
- ★ Triângulos equiláteros
- ★ Geometria analítica no plano complexo
- ★ Equação da reta.
  - Teorema de Napoleão
  - Circunferência de nove pontos.

#### 4.4.3 Avaliação

Observar a participação dos alunos na resolução dos exercícios, propondo discursões na resolução dos teoremas. Proporcionar alguns momentos, nos quais os alunos resolvam as questões no quadro e expliquem suas soluções para os colegas, finalizando com a aplicação de um teste.

##### 4.4.3.1 Resultado da avaliação

O teste do minicurso de números complexos e geometria foi realizada no último dia de aula, mas além disso, foi possível observar em conversas informais que os alunos acharam a revisão dos elementos do triângulo (mediana, altura, mediatriz e bissetriz) e trigonometria no círculo importantes para o assunto e para outras atividades extras (curso técnico e ENEM).

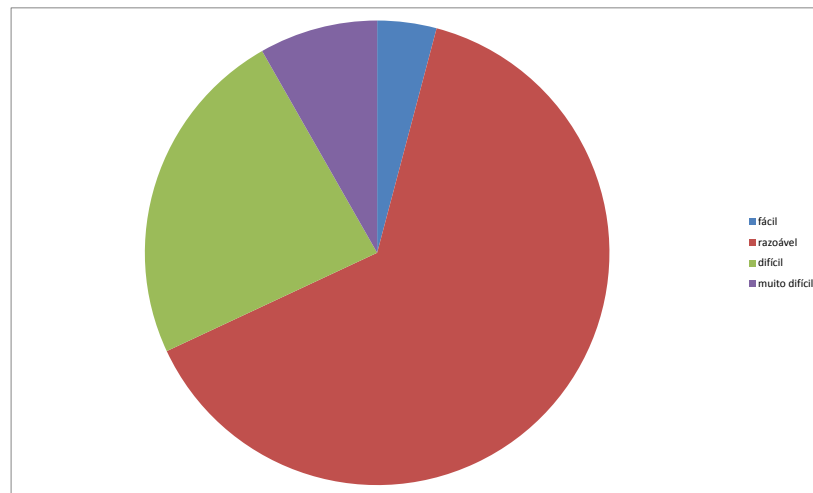
O gráfico a seguir apresenta a análise feita pelos alunos em relação ao grau de dificuldade do curso.

A seguir, faremos a análise dos resultados obtidos em cada questão com seu enunciado.

**Primeira questão:** Calcule  $i^{150} + i^{300} + i^{163}$ .

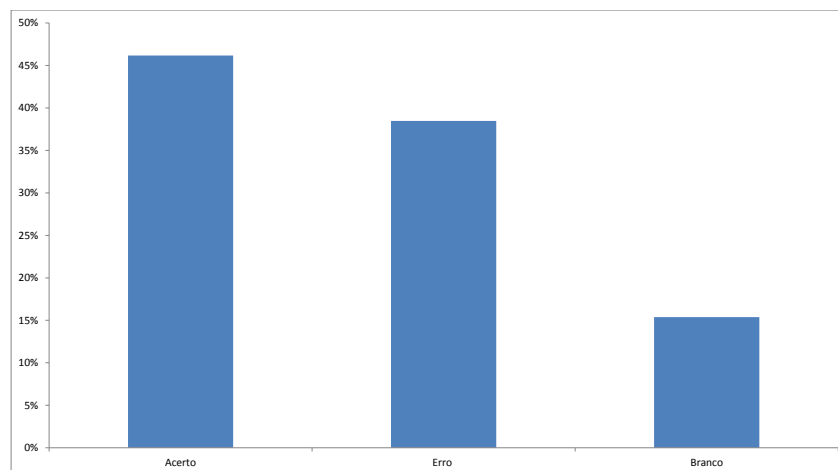
Para resolver essa questão os alunos precisam ter conhecimento que as fórmulas para as potências de um número complexo com expoentes inteiros são preservadas para a forma algébrica  $z = x + yi$  e que para qualquer inteiro positivo  $n$ ,  $i^{4n} = 1$ ;  $i^{4n+1} = i$ ;  $i^{4n+2} = -1$ ;  $i^{4n+3} = -i$ . O gráfico mostra o resultado dos alunos.

Gráfico 1 – Grau de dificuldade.



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 2 – Primeira questão.



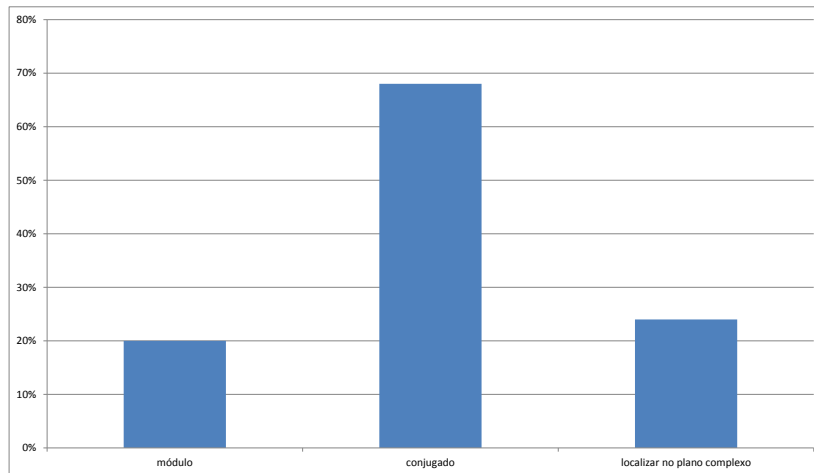
Fonte: Dados da pesquisa.

**Segunda questão:** Dado o número complexo  $z = 3 - 4i$ , se você souber os itens abaixo marque e responda.

- ( ) módulo \_\_\_\_\_
- ( ) conjugado \_\_\_\_\_
- ( ) localizar no plano complexo.

Na resolução dessa questão foi possível observar erros básicos, principalmente no item referente ao cálculo do módulo, como vários do tipo  $\sqrt{9-16}$ .

Gráfico 3 – Acertos da segunda questão.



Fonte: Dados da pesquisa.

**Terceira questão:** Dado o número complexo  $z = 3 - 3i$ , escreva na forma polar.

---

Para resolver a terceira questão, os alunos precisam ter conhecimento da localização do ponto no plano e trigonometria. Do total 10 acertaram a questão, 2 conseguiram identificar a tangente e 1 deixou em branco (veja gráfico 3).

**Quarta questão:** O que você aprendeu com o teorema de Napoleão?

---

Nessa questão 3 disseram que não entenderam ou não vieram no dia da aula, 2 fizeram a demonstração do teorema e 8 falaram o que aprenderam com o teorema de Napoleão, como: o que é triângulo equilátero, baricentro e que todo triângulo equilátero  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 w w^2$  e, por isso  $z_1 + w z_2 + w^2 z_3 = 0$ .

**Quinta questão:** Determine a equação da reta que passa pelos pontos  $z_1 = 2 - 3i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ .

---

Nessa questão, apenas 5 alunos acertaram, 2 não conseguiram chegar ao resultado pois erraram os sinais e os demais deixaram em branco.

**Sexta questão:** Determine a equação da reta perpendicular a reta do item anterior.

---

Apenas um aluno resolveu essa questão.

**Sétima questão:** Você saberia demonstrar o teorema do círculo de nove pontos?

( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, faça a demonstração.

---

Nessa questão, 6 alunos responderam que não sabiam demonstrar, 5 afirmaram que sabiam, porém, somente 2 alunos acertaram.

## 5 CONCLUSÃO

Quando analisamos o resultado do projeto constatamos que os alunos poderiam ter tido um rendimento melhor. Observando as resoluções destes alunos no teste, percebemos que muitos deles até entenderam o assunto, porém, quando se depararam com as operações com o conjunto dos números inteiros, assuntos básicos necessários para resolução de questões como por exemplo determinar a equação da reta não acertaram, por sentirem muita dificuldade em trabalhar com essas operações. Diante disso, podemos perceber lacunas em assuntos de séries anteriores. Outro problema, que acreditamos que interfere no resultado é o fato que 88% dos entrevistados dedicam menos de duas horas por dia, além das horas em sala de aula. Nesse sentido, é necessário conscientizar a comunidade escolar e a sociedade para a importância de motivar esses alunos a estudarem. Diante dessa realidade, propomos aos professores de Matemática, que ao começar determinado assunto, busquem fazer com seus alunos avaliações diagnósticas.

Podemos concluir que o objetivo deste trabalho foi alcançado, pois conseguimos demonstrar a aplicação desses números, e que podem ser úteis para provar, de forma fácil, teoremas de geometria plana. Temos também, o intuito de despertar nos professores de ensino médio o interesse de introduzi essa nova abordagem geométrica, com números complexos. Se isto, não for viável a turma desenvolver projetos que oportunizam aos alunos o contato.

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. Complex numbers from A to...Z.1<sup>o</sup> ed. New York. Birkhauser. 2001.

CARNEIRO, J.P. A geometria e o ensino dos números complexos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Pernambuco. Palestra do VII ENEM. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. Disponível em: < <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf> >. Acesso em 21 mai 2016.

CERRI C; MONTEIRO M.S. História dos números complexos. CAEM, 2001. Disponível em: < <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> > Acesso em 21 mai 2016.

EARL,R. Geometry II. Trinity Term, 2007. Disponível em: < <https://people.maths.ox.ac.uk/earl/G2-lecture3.pdf> > Acesso em 21 mai 2016.

Grünbaum B. A relative of “Napoleon’s Theorem”. University of WashingtonSeattle, WA 98195-4350. Department of Mathematics, Box 354350. Disponível em: < [http://www.math.washington.edu/~grunbaum/A% 20Relative% 20of % 20Napoleons % 20Theorem.pdf](http://www.math.washington.edu/~grunbaum/A%20Relative%20of%20Napoleons%20Theorem.pdf) >. pág 116-121

HAHN, Lian-shi; Complex numbers and Geometry. 1<sup>o</sup>ed.USA. The Mathematical Association of America. 1994.

HEFEZ, A; VILLELA M.L.T. Polinômios e equações algébricas. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro. 2012

Li. K.Y. Mathematical Excalibur. Vol 9, n 1. Disponível em: < [https://www.math.ust.hk/excalibur/v9\\_n1.pdf](https://www.math.ust.hk/excalibur/v9_n1.pdf) >. Acesso em 21 mai 2016.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. PCN + ensino médio: orientações complementares aos parâmetros curriculares da ciências da natureza matemática e suas tecnologias. Disponível em :< <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> >. Acesso em 22 mai 2016.

Park R. Complex Numbers in Geometry. TJUSAMO 2013-2014. Disponível em: <[https://activities.tjhsst.edu/vmt/w/images/8/83/TJUSAMO\\_2013-2014\\_Complex\\_Numbers\\_in\\_Geometry.pdf](https://activities.tjhsst.edu/vmt/w/images/8/83/TJUSAMO_2013-2014_Complex_Numbers_in_Geometry.pdf) >. Acesso em 21 mai 2016.

UNIVERSIDAD DE SEVILLHA. Departamento de matemática aplicada II, 2004-2005. Disponível em: < [http://personal.us.es/ealgaba/algebra% 20=04-05/TEMA3. pdf](http://personal.us.es/ealgaba/algebra%20=04-05/TEMA3.pdf) >.

Acesso em 21 mai 2016.



**APÊNDICE A – INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS****QUESTIONÁRIO****A - O PAPEL DO ENTREVISTADO****1 Qual a faixa etária do entrevistado?**

- 15 anos     16 anos     17 anos  
 18 anos     19 anos     mais de 19 anos

**2 Sexo:**

- Masculino     Feminino

**3 Você já havia estudado números complexos?**

- Sim     Não

**4 Quantas pessoas moram na sua casa (Contando com seus pais, irmãos outras pessoas que moram na mesma casa)?**

- 2 pessoas     3 pessoas     4 pessoas  
 5 pessoas     Mais de 6 pessoas     Mora sozinho

**5 Qual o nível de escolaridade do seu pai?**

- Não estudou     1º a 4º série do ensino Fundamental     5º a 8º série do ensino Fundamental  
 Ensino médio incompleto     Ensino médio completo  
 Ensino superior incompleto     Ensino superior completo  
 Pós graduação     Não sei

**6 Qual o nível de escolaridade da sua mãe?**

- Não estudou     1º a 4º série do ensino Fundamental     5º a 8º série do ensino Fundamental  
 Ensino médio incompleto     Ensino médio completo  
 Ensino superior incompleto     Ensino superior completo  
 Pós graduação     Não sei

**7 Somando sua renda com a renda das pessoas que moram com você, quanto é, aproximadamente, a renda familiar? (Considere a renda de todos que moram na sua casa)**

- Até um salário mínimo     De 1 a 2 salários mínimos     De 2 a 5 salários mínimos  
 De 5 a 10 salários mínimos     Mais de 10 salários mínimos     Nenhuma renda.

**8 Você tem alguma atividade remunerada?**

- Sim     Não

Há quanto tempo você trabalha: \_\_\_\_\_

**9 Em que tipo de escola você cursou o ensino fundamental?**

- Sempre em escola pública     Parte em escola pública e parte em escola particular  
 Sempre em escola particular     Outro.

**Assinale a(s) atividade(s) ou o(s) curso(s) que você realiza atualmente:**

**10 Curso de computação ou informática:**

- Sim     Não

**11 Curso de língua estrangeira:**

- Sim     Não

**12 Curso preparatório para o vestibular(cursinho):**

- Sim     Não

**13 Esporte:**

- Sim     Não

**14 Aula de reforço:**

- Sim     Não

**15 Grupo de estudo:**

- Sim     Não

**16 Quantas horas por dia você se dedica aos estudos além das horas em sala de aula?**

- Menos de 1 hora     Entre 1 e 2 horas     Entre 2 e 4 horas  
 Mais de 4 horas     Estuda somente no horário de aula.

**17 Você tem espaço em casa para estudar?**

- Sim     Não

**18 Que nota você se daria como estudante?**

- Menos que 5     Nota 6  
 Entre 6 e 8 horas     Entre 8 e 10.

**19 Você aprende mais quando estuda:**

- Sozinho     Em grupo

**20 Você já ficou de recuperação em alguma disciplina?**

- Sim     Não

**21 Você já ficou de recuperação em matemática?**

- Sim     Não

**22 Você já reprovou alguma disciplina?**

- Sim     Não

**23 Você já reprovou em matemática?**

- Sim     Não

**24 Você acredita que a matemática é importante para sua vida. Dê uma nota para o grau de importância.**

- Menos que 5     Nota 6  
 Entre 6 e 8 horas     Entre 8 e 10.

**25 Dê uma nota para sua motivação em participar deste mini-curso.**

- Menos que 5     Nota 6

( ) Entre 6 e 8 horas ( ) Entre 8 e 10.

**26 Você gosta de Matemática? Explique.**

---

---

---

**27 Você acredita que pode mudar seu ponto de vista em relação a esta disciplina? Explique.**

---

---

---

**28 Quais suas expectativas em relação ao curso? O que você espera com essa experiência?**

---

---

---

**APÊNDICE A – TERMO DE CONCESSÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM****MINI-CURSO NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA**

Eu, \_\_\_\_\_,  
responsável pelo aluno(a), \_\_\_\_\_,  
concedo ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional por tempo  
indeterminado, autorização para utilizar imagens do aluno(a) registradas em atividade  
durante o mini-curso “Números Complexos e Geometria”, na Escola de Ensino Médio  
Professora Eudes Veras. Estas imagens serão utilizadas apenas como dados de pesquisas  
a serem realizadas nesta instituição.

A pesquisa será realizada pela mestranda Elaine de Sousa Teodosio, aluna da  
Universidade Federal do Ceará e orientanda do professor Doutor Jonatan Floriano da  
Silva. Que declara estar ciente, que as imagens não poderão ser utilizadas e veiculadas  
como material de divulgação.

Nome e informações dados em consentimento prévio pelo colaborador serão guardados e  
utilizados somente para pesquisa.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do pai ou responsável.

Fortaleza, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_\_\_.

## APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO FINAL

## MINI-CURSO NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA

**1 O mini-curso de números complexos foi:**

- muito fácil    fácil    razoável  
 difícil    muito difícil

**2 Você pretende fazer faculdade**

- Sim    Não Qual
- 

**3 Calcule  $i^{150} + i^{300} + i^{163}$**

---

**4 Dado o número complexo  $z = 3 - 4i$ , se você souber os itens abaixo marque e responda:**

- módulo \_\_\_\_\_  
 conjugado \_\_\_\_\_  
 localizar no plano complexo.

**5 Dado o número complexo  $z = 3 - 3i$ , escreva na forma polar:**

---

---

---

**6 O que você aprendeu com o teorema de Napoleão?**

---

---

---

**7 Determine a equação da reta que passa pelos pontos  $z_1 = 2 - 3i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ .**

---

---

---

**8 Determine a equação da reta perpendicular a reta do item anterior**

---

---

**9** Quais assuntos de geometria você precisa saber para entender o teorema do círculo de nove pontos?

---

---

---

**10** Qual o objetivo do teorema do círculo de nove pontos?

---

---

---

**11** Você saberia demonstrar o teorema do círculo de nove pontos?

Sim    Não

Em caso afirmativo faça a demonstração

---