UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AMSRANON GUILHERME FELÍCIO GOMES DA SILVA

MATEMÁTICA APLICADA À BIOLOGIA

FORTALEZA

2016

AMSRANON GUILHERME FELÍCIO GOMES DA SILVA

MATEMÁTICA APLICADA À BIOLOGIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S578m Silva, Amsranon Guilherme Felício Gomes da
Matemática aplicada à biologia / Amsranon Guilherme Felício Gomes da Silva . – 2016.
134 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Matemática aplicada - Biologia. 2. Matrizes. 3. Logaritmos. 4. Ensino médio. I. Título.

CDD 510

AMSRANON GUILHERME FELICIO GOMES DA SILVA

MATEMÁTICA APLICADA À BIOLOGIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dra. Cristina Paiva da Silveira Carvalho (Externo)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte e detentor de tudo, onde por várias vezes pude sentir sua presença e atividade durante minha trajetória de vida, especialmente no que concerne a este ciclo acadêmico.

Ao Professor Marcelo Ferreira de Melo, por sua orientação, competência e ajuda na realização deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao meu pai, Raimundo Nonato da Silva, primeiro mestre, sábio e espelho em minha vida, que sempre foi minha referência em tudo, especialmente ao que condiz aos ramos de conhecimento, postura e integridade.

A minha mãe, Antônia Maria da Silva, principal guardiã e detentora da minha referência de amor, bondade, simplicidade, perseverança, força e fé. Sem ela, a vida com certeza seria mais cinza, mais rasa e opaca.

As minhas irmãs, Antônia Rickele da Silva, Amsraiane Guilherme Felício Gomes da Silva e Cheila Maria da Silva, companheiras de vivências e instigadoras de conhecimento e aprendizagem.

Aos meus amigos de mestrado, Rivelino, Jandean, Paulo e Isaac, sem os quais a luta seria exponencialmente mais árdua, monótona e sem graça. Em especial à Milínia Felício e Clésio Mendes, parceiros sem precedentes, que me estimularam, me apoiaram e me socorreram em inúmeros momentos de dificuldades, desânimos e fraquezas. Amigos no qual tenho um apreço todo especial e que espero partilhar inúmeros outros momentos pelo decorrer da vida.

Ao meu bem, Davila Gadelha, companheira e amante, que ao longo de todo o percurso do mestrado esteve comigo partilhando e me fortalecendo com sua fibra, força, amor e fé. Que abdicou de vários momentos e alegrias por conta da impossibilidade do meu estudo e sempre me instigou a melhorar e crescer.

“Sempre alimente a esperança de vencer. Só duvide de quem duvida de você./ Fui Pixote, sei andar na escuridão, enfrentar moinho, derrubar dragão/ Cavaleiro Andante, sei andar sozinho, Dom Quixote não tem medo de alucinação/ Desde o saco do meu pai tô na batalha, não nasci pra ser esparro de canalha!” (Gabriel O Pensador).

RESUMO

O trabalho tem o intuito de expor, reunir e aprofundar assuntos pertinentes a matemática e a biologia com ênfase no ensino para os alunos do ensino médio. Foi realizado uma pesquisa no campo motivacional e de conteúdos com alunos do 2° e 3° anos do Colégio do estado Liceu Professor Domingos Brasileiro a fim de analisar a reação dos alunos quando observaram os conteúdos de matrizes e funções exponenciais e logarítmicas em uma significação através da biologia. Além disso, o trabalho nos mostra uma interseção entre as esferas das duas ciências baseada em exemplos e aplicações. Verificou-se que relacionar ambos os conteúdos se mostra eficaz, principalmente se comparado ao ensino dito tradicional.

Palavras-chave: Aplicações. Exemplos. Motivação. Significação. Minicurso. Matrizes. Limite. Derivada. Integral. Exponencial. Logaritmo.

ABSTRACT

The work aims to expose, gather and deepen matters pertaining to mathematics and biology with an emphasis on education for high school students. There was a research on the motivational and knowledge area with students that study on the second and third years in the state high school Teacher Liceu Domingos Brasileiro to analyze the reaction of students when they observed the contents of matrices and exponential and logarithmic functions in a signification through biology. Also work shows an intersection between the worlds of both science-based examples and applications. It was found that both relate content efficacious, especially when compared to traditional said instruction.

Keywords: Applications. Examples. Motivation. Meaning. Short course. Matrices. Limit. Derivative. Integral. Exponential. Logarithm.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

R	Corpo dos números reais
C	Corpo dos números complexos
λ	Lambda
$\int$	Integral
$\sum$	Somatório
∞	Infinito
θ	Teta

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
CNE	Conselho Nacional de Educação
LDB	Liceu Domingos Brasileiro
SEDUC	Secretaria de Educação
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A grosso modo podemos pensar que a relação entre matemática e biologia seja quase inexistente, que são disciplinas completamente distintas e destoantes. Absolutamente errado! Sem o uso da matemática, teríamos uma biologia extremamente pobre e sem uma de suas principais ferramentas, afinal de contas a matemática, tida como mãe de todas as ciências, exerce um papel fundamental para a biologia e sem ela garantir a previsão e a reprodutibilidade de experiências e experimentos, bem como determinar métricas e padrões seria impossível.

Fazendo pouco esforço podemos encontrar muito facilmente diversas relações entre as duas ciências em diversos campos de atuação das mesmas, onde podemos observar que uma auxilia a outra para resoluções e aprofundamentos de questões que são inerentes a natureza de cada ciência. Podemos citar áreas como, a saúde, genética, morfologia, bioquímica, citologia, ecologia, farmacologia, fisiologia dentre tantas outras. Nesse trabalho, elencaremos algumas aplicações e situações onde a matemática atua como forte ferramenta para resolução de casos de cunho biológico, como também trazendo e definindo conceitos matemáticos de uma forma mais simples e usual, relacionando e tentando envolver o leitor em usos que podem ser passados quase que despercebidos no dia a dia e no uso.

Sabemos que a matemática não se resume a pífias interpretações de dados situados em um plano cartesiano, graficamente tomados em função do tempo ou quantidade. Sabemos também, que diversas tomadas de decisão só são obtidas através da analise dos números. Não é recente, que os matemáticos utilizam a própria biologia para inventar matemática e aprofundar conceitos matemáticos. Para exemplificar, se *Francis Galton*(1) não tivesse se dado ao trabalho de medir o tamanho, o peso, a pressão causada por uma mão e a capacidade visual de cerca de 10.000 pessoas, talvez *Karl Pearson*(2) não desenvolvesse técnicas para calcular a relação entre duas variáveis. Se na atualidade, alguns engenheiros de tráfego fazem uso de estudos das cadeias de Markov para configurar semáforos de grandes centros, foi pelo fato do um matemático russo *Andrei Markov*(3) ter tido interesse por assuntos matemáticos de um fenômeno biológico: movimentos brownianos (que também podem ser visualizados em uma simples flor de girassol).

A matemática capacita e transforma a visão que muitos biólogos tem sobre as coisas, como afirma Cohen (1990), Os biólogos que entendem cálculo, as equações diferenciais ordinárias e parciais e a teoria das probabilidades, tem um jeito especial de olhar o mundo biológico que está inacessível aos biólogos que não entendem nada disso. Acredito que não somente alguns dos diversos ramos matemáticos, mas o olhar o mundo tendo a matemática de forma geral como base de pensamentos nos permite observar e aprofundar conceitos que estão fora do alcance de quem não se baseia ou até repudia essa ciência.

É com esse intuito de relacionar campos aparentemente tão diferentes que formalizei os objetivos deste trabalho, que são: 1) Expor algumas das interseções entre o estudo da matemática e a biologia de forma simples e clara; 2) Fazer uma relação de conteúdos matemáticos estudados no ensino médio e no nível superior, com algumas de suas importantes aplicações na realidade usando para isso a biologia (interdisciplinaridade); 3) Apresentar e instigar o uso para os professores da disciplina de matemática de nível médio e superior, de uma maneira bem objetiva e direta, a vinculação e aplicação da matemática sobre a biologia; 4) Pesquisar sobre os aspectos motivacionais do ensino da matemática quando este está aliado a aplicações práticas e 5) Investigar a opinião de alguns estudantes confrontando a educação tida como tradicional e uma didática mais contextualizada utilizando pra isso um minicurso de aprofundamento.

Traçados estes objetivos, o trabalho tem características de análise bibliográfica tendo como finalidade uma pesquisa para conceber uma base teórica e assim termos a possibilidade de expor algumas das importantes interseções entre as ciências supracitadas. O que me conduziu a especificar e limitar quais das diversas áreas do conhecimento matemático seriam elucidadas aqui, sendo escolhidas para isso os conteúdos de: Matrizes, Limites e Continuidade, Derivada, Integral e Funções Exponenciais e Logarítmicas. O objetivo seria trabalhar uma ampla variedade de conteúdos, mas que se consiga pelo menos o mínimo de aprofundamento visando que não haveria como contemplar toda gama do conhecimento matemático ligado a biologia neste único trabalho. O trabalho culmina em um minicurso de aprofundamento e realizado na Escola Estadual de Ensino Médio Professor Domingos Brasileiro situada em Fortaleza - CE a inciativa para a realização deste projeto surgiu da vontade de aplicar os conteúdos aqui debatidos com a realidade da educação pública.

O trabalho de dissertação está realizado da seguinte forma:

No capítulo 2, “Matrizes”, preferimos especificar um único assunto: A matriz de Leslie, assunto relacionado a dinâmica das populações, elencando alguns aspectos importantes dentro do estudo de matrizes para dar base a explanação e aplicação do modelo de Leslie.

No capítulo 3, “Limites e Continuidade”, partimos da utilização de exemplos de problemas com raízes biológicas que demonstram a necessidade do uso da matemática para suas respectivas resoluções, partindo de exemplos mais elementares para exemplos um pouco mais complexos, procurando dentro de cada um explanar os conceitos matemáticos envolvidos.

No capítulo 4, “Derivadas”, abordamos primeiramente o conceito de reta tangente, a definição de derivada, as principais regras de derivação, teste da derivada primeira e segunda bem como algumas das principais derivadas e adentramos novamente na resolução de problemáticas biológicas que tem a necessidade do uso direto desta ferramenta.

No capítulo 5, “Integrais”, procuramos seguir a mesma metodologia do capitulo 3, ou seja, elencamos exemplos das aplicações de integrais dentro da biologia e no decorrer da resolução destes exemplos procuramos mostrar e explanar os conceitos do cálculo integral.

O capítulo 6 “Funções exponenciais e logarítmicas”, versamos sobre as aplicações destas funções dentro da biologia. Escolhidas por não serem contempladas, dentro da maioria dos livros didáticos, fazendo luz a interdisciplinaridade com a biologia.

O capítulo 7, último capítulo desta dissertação, intitulado: “Biocalculia, a matemática na biologia” é reservado para a discursão e análise dos dados obtidos através do minicurso de aprofundamento em matemática utilizando a biologia, ministrado a um grupo de alunos do colégio da rede estadual Liceu Domingos Brasileiro situado em Fortaleza – CE. Discutindo e avaliando alguns dados oriundos deste grupo de alunos, dados estes nos quesitos: interesse, motivação, interdisciplinaridade e aprofundamento de conteúdos.

(1) Francis Galton (1822-1911) – Antropólogo, meteorologista, matemático e estatístico inglês.
(2) Karl Pearson (1857-1936) – Estatístico.

2 MATRIZES

Historicamente a matemática relata que o uso e o estudo das matrizes advém de um período bastante antigo da historia humana. Tendo relatos do seu uso em textos chineses datado por volta do século II a.C., sendo aplicadas, já naquela época, em uma das suas principais utilizações que seria a resolução de equações lineares.

O livro chinês “Nove capítulos da arte Matemática” expõe 20 problemas em seu sétimo capítulo onde, tirando somente um deles, mostram um método para resolução de equações lineares utilizando matrizes, denominado como a “dupla falsa posição”.

No século XVII, os matemáticos *Kowa*[(1)] e *Leibniz*[(2)], também desenvolveram métodos para resolução de sistemas lineares utilizando tabelas numéricas que foram as precursoras para o que hoje denominamos matrizes.

A palavra matriz como conhecida hoje, foi usada a priori pelo inglês *Sylvester*[(3)] tendo uma ajuda fundamental de *Cayley*[(4)] no desenvolvimento da teoria matricial.

Em termo de presente as matrizes ganharam um espaço e uma visão bastante significativa especialmente nos campos de álgebra linear, física quântica, computação gráfica e por que também não dizer na Biologia como será visto mais na frente.

Neste capítulo, temos o intuito de relacionar o ramo da matemática que contém matrizes com a Biologia, dando um foco a um tipo de matriz especifica que é bastante utilizada por demógrafos: A matriz de Leslie. Para isso partiremos da contextualização de matrizes, falando a priori da notação que será utilizada, seu conceito e sua representação, definindo alguns conceitos importantes que serão

(1) Takakazu Seki Kowa (1642-1708) nascido em Edo (agora Tóquio), Japão. Nasceu em uma família de guerreiros samurais. Entretanto, muito jovem, ele foi adotado por uma família nobre chamada Seki Gorozayemon. Seki foi um "menino prodígio" em Matemática. Em 1674 Seki publicou Hatsubi Sampo, Seki foi a primeira pessoa a estudar determinantes em 1683. Dez anos mais tarde Leibniz, independentemente, usou determinantes para resolver equações simultâneas, embora a versão de Seki fosse a mais geral. (http://www.somatematica.com.br/biograf/seki.php acesso em 05/05/2016)

(2) Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig. Ingressou na Universidade aos quinze anos de idade e, aos dezessete, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal. (http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm acesso em 05/05/2016)

(3) James Joseph Sylvester (1814 - 1897) Professor e matemático inglês nascido em Londres, um dos criadores da álgebra moderna. Publicou numerosos trabalhos, notadamente sobre polinômios. Frequentou duas escolas primárias em Londres, e teve a instrução secundária na Royal Institution em Liverpool. Fez graduação no St. John's College, em Cambridge (http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JameJose.html acesso em 05/05/2016)

(4) Arthur Cayley (1821 - 1895) Advogado, professor e um dos nomes mais relevantes da matemática inglesa no século XIX nascido em Richmond, Surrey, cujas teorias matemáticas proporcionaram a formulação das teoria da relatividade de Einstein e da mecânica quântica de Max Planck. Estudou no King's College de Londres e no Trinity College de Cambridge. (http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/ArthuCay.html acesso em 05/05/2016) definidos como: Espaço vetorial, subespaço vetorial, espaço gerado, base, dimensão , autovetores e autovalores de um matriz para enfim, culminar na matriz de Leslie.

2.1 Notação

Primeiramente, é descrita a notação dos conjuntos numéricos, vetores e matrizes. Denotaremos o conjunto dos números reais por R , e o conjunto dos números complexos por C .

Para o espaço de todos os vetores coluna, com n elementos reais será usada a notação R^n , e no caso dos n elementos pertecerem aos complexos, será usado C^n . O conjunto de todas as matrizes $m x n$, onde todos os elementos sao reais, será escrito por R_{mxn} , analogamente para as de elementos complexos $\left(C_{mxn}\right)$.

Ao longo de todo o texto, faremos uso das letras minúsculas do alfabeto romano para simbolizar vetores e maiúsculas para matrizes, além de letras gregas minúsculas para representar escalares.

O elemento de uma matriz A, situado na linha *i* e na coluna *j*, será denotado por a_{ij} .

Tanto a matriz nula, como o vetor nulo, como o escalar zero serão denotados por 0. A matriz identidade será representada por I ou I_n caso haja necessidade de informar a ordem.

A transposta da matriz A será denotada por A^t , a inversa da matriz A por A^{-1} , o determinante da matriz A por $detA$, e o traço da matriz A por trA .

2.2 Representação de matrizes

DEFINIÇÃO:

Dados $m\,e\,n \in N\{0\}$, uma matriz real de ordem m por n, ou de forma mais simples uma matriz m por n (escreve-se m x n) é definida como sendo uma tabela numérica retangular com m x n elementos de R distribuidos em m linhas e n colunas.

Exemplificando temos:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2 x 2.

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2 x 3.

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3 x 2.

4) $[-7]$ é uma matriz de ordem 1 x 1.

Se tomarmos a rigor temos que as tabelas acima representadas não são matrizes, e sim, representações de matrizes. Onde matrizes são na realidade funções definidas como:

> Sejam $\Pi_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ e $\Pi_m = \{1,2,3,\ldots,m\}$ subconjuntos de N. Uma matriz A sobre um corpo F de ordem mxn é uma função
>
> $$A : \Pi_m x\, \Pi_n \rightarrow F$$
>
> tal que para cada par ordenado $(i, j) \in \Pi_m x\, \Pi_n$ está associada um único escalar
>
> $$a_{ij} = A(i, j) \in F$$
>
> (LIMA, 2005, pág. 17)

Exemplo.

Considere o conjunto $\Pi_3=\{1,2,3\}$. Seja a matriz real dada por $A:\Pi_3 x\, \Pi_3 \to R$ dada por $a_{ij}=A(i,j)=i-j$, seguindo a definição de matriz, a partir da lei de formação, temos:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

GENERALIZANDO.

Denominamos por termos cada elemento exposto na matriz, a titulo de organização, em uma matriz M qualquer indicamos a_{ij} o elemento localizado na linha i e coluna j de M. Onde i e j são chamados de índices do elemento. É convencionado que as linhas sejam distribuídas em ordem crescente de cima para baixo e as colunas da esquerda para direita, assim uma matriz M (m x n) é representada genericamente por:

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Toda matriz M (m x n) pode também ser representada por $M=(a_{ij});i\in\{1,2,\dots,m\}e\ j\in\{1,2,\dots,n\}$ ou simplesmente $M=(a_{ij})_{mxn}$.

2.3 Espaços Vetoriais

Considere um conjunto de vetores E não vazio, e um corpo K com os elementos escalares. Neste conjunto definimos duas operações:

1) Adição, representada por +: $E x E \to E$;
2) Multiplicação por escalar, representada por *: $\alpha * E \to E$.

Geralmente, o corpo K é o corpo dos reais ou dos complexos.

Se o Conjunto E munido com as operações + e $\times$, satisfizer os 8 axiomas a seguir, ele será um espaço vetorial sobre o corpo K.

ADIÇÃO

1) Comutatividade: para cada $u,v\in E, u+v=v+u$;
2) Associatividade: para cada $u,v,w\in E, (u+v)+w=u+(v+w)$;
3) Elemento neutro aditivo: Existe um vetor nulo, denotado por 0, onde para todo $u\in E, 0+u=u$;
4) Inverso aditivo: para cada $u\in E, \exists -u\in E$ tal que $u+(-u)=0$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

5) Distributividade: para cada um dos elementos $\alpha\in K$ e cada $u,v\in E, \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$;
6) Distributividade: Para cada $\alpha,\beta\in K$ e cada $u\in E, (\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$;
7) Associatividade: para cada $\alpha,\beta\in K$ e cada $u\in E, (\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$;
8) Elemento neutro multiplicativo: Para cada $u\in E, existe\, o\, elemento\, neutro\, 1\, tal\, que\, 1u=u$.

2.4 Subespaço Vetorial

Dado E um espaço vetorial sobre o corpo K. Um subespaço vetorial de E será um subconjunto S de E, também não vazio, também espaço vetorial sobre o corpo K, munido com as mesmas operações de E.

2.5 Combinação Linear

Dado E um espaço vetorial sobre um corpo K. Chamamos $u\in E$ de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n\in E$ quando existem $\propto_1, \ldots, \propto_n\in K$ tais que $\propto_1 v_1+\propto_2 v_2+\ldots+\propto_n v_n=u$. Perceba que, de acordo com a definição, nem os $\propto_i$, como os v_i , necessitam ser distintos.

2.6 Dependência e Independência Linear

Dados $v_1,\ldots,v_n$ vetores de um espaço vetorial E. Dizemos que $v_1,v_2,\ldots,v_n$ são linearmente independentes (denominamos por LD), se existirem escalares $\propto_1,\ldots,\propto_n \in K$, com pelo menos um não nulo tais que $\propto_1 v_1 + \propto_2 v_2 + \ldots + \propto_n v_n = 0$, caso contrário, dizemos que $v_1,\ldots,v_n$ são Linearmente independentes (LI), ou seja, $v_1,\ldots,v_n$ são LI quando a única combinação linear que tem como resultado o vetor nulo é a solução trivial, isto é, $\propto_1 = \propto_2 = \ldots = \propto_n = 0$.

2.7 Subespaço Gerado

Seja S um subconjunto de um espaço vetorial E. Denominamos por subespaço gerado por S o conjunto de todas as combinações lineares finitas, de elementos de S, Denotamos aqui por [S].

2.8 Base

Tomando E um espaço vetorial sobre um corpo K, chamamos de base de E um subconjunto $B \subset V$ onde temos as condições que seguem:

a) $[B]=E$;
b) $B\, é\, LI$.

2.9 Dimensão

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo K. Se E admite uma base finita então dizemos que a dimensão de E (denotamos por $dimE$) é o numero de vetores dessa base. Se ele não tem uma base finita, dizemos que E tem dimensão infinita.

2.10 Auto Vetores e Autovalores de uma Matriz

Nos deteremos agora no estudo de autovalores e autovetores de uma matriz A de ordem n. Devido ao fato desses conceitos serem profundamente estudados e possuírem diversas aplicações. Tendo em vista também que os autovetores e autovalores ligados a uma matriz carregam, em si, características intrínsecas a cada matriz.

Definição: Dada uma matriz *A* de ordem n, sendo ela real ou complexa denominamos por autovetor de A, um vetor não-nulo *v* em C^n , tal que *Av* é um múltiplo escalar de *v* , isto é, $Av=\lambda v$, para algum escalar λ . E neste caso, λ será denominado autovalor de A associado a λ .

É válido notar que, mesmo a matriz A sendo puramente real, seus autovalores e/ou autovetores podem ser complexos. A cargo de viabilidade, o vetor v pode ser qualquer um com exceção do vetor nulo, dado que tomando v como vetor nulo na equação supracitada, seguiria que $A*0=\lambda*0$, não nos cabendo analisar nada sobre a matriz A, tão pouco do valor λ , logo, tomaremos $v\neq 0$.

Se tomarmos na perspectiva algébrica, um autovetor de uma matriz A é um vetor cujo o produto por A pode ser feita de maneira simples, isto é, bastando multiplicar o próprio vetor por um escalar.

2.11 Polinômio Característico

Partindo da equação: $Av=\lambda v$, podemos obter que $(A-\lambda I)v=0$, como v deve ser diferente do vetor nulo, temos que $A-\lambda I$ deve ser uma matriz singular, ou seja, não admite inversa e este fato acontece somente quando $det(A-\lambda I)=0$. Esta equação e chamada de Equação característica de A, onde as raízes λ são os autovalores de A, onde para cada autovalor λ_i podemos encontrar mais de um autovetor respectivo v_i , se tivermos o sistema de equações lineares $(A-\lambda_i I)v_i=0$ possível e indeterminado, então $det(A-\lambda I)$ é denominado como polinômio característico.

Para exemplificarmos, vamos calcular os autovetores e autovalores associados a matriz abaixo utilizando o polinômio característico.

Exemplo:

Seja $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, para calcularmos os autovalores e autovetores devemos analisar o polinômio característico dado por $det(A-\lambda I)=0$, assim temos:

$$det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)-2*4=0$$

$\lambda^2-4\lambda-5=0$ oque nos resulta em: $\lambda_1=5$ e $\lambda_2=-1$.

Tomando a igualdade $Av=\lambda v$, para $\lambda_1=5$ obtemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=5\times\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

Efetuando as operações temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases}\alpha_1+4\alpha_2=5\alpha_1\\ 2\alpha_1+3\alpha_2=5\alpha_2\end{cases}$$

Logo, temos que $\alpha_1=\alpha_2$

Assim, o vetor $(1,1)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda=5$.

2.12 o modelo de Leslie

Um dos instrumentos mais importantes do ponto de vista tecnológico e cientifico é a matemática. Pois, por intermédio dela o ser humano pode criar modelos e tipificar situações problemas que descrevem o comportamento de fenômenos da natureza e ajudam na resolução de problemas de diversas áreas. Tomando isto como ponto de partida, notou-se a necessidade de utilizar a matemática para a obtenção de resultados de modo satisfatório na concretização de varias atividades, sejam de cunho cientifico, tecnológico ou do dia a dia.

Com o passar do tempo o estudo na área do crescimento de uma população tornou-se uma problemática comum em várias áreas. Por exemplo, inúmeros produtores buscam o tempo certo para se retirar animais de uma determinada população de tal modo que se obtenha a maior produtividade. Neste caso, retirar não precisa significar simplesmente o abate dos seres, podendo também caracterizar o período em que um animal possa ser retirado para outras finalidades. A exemplo disto temos a retirada de ovelhas para o corte e recolhimento de lã. Para a obtenção de melhores resultados se faz de extrema importância e necessidade que se tenha uma colheita sustentável, ou seja, a distribuição etária da população remanescente e o rendimento de cada retirada, após cada colheita deve ser constante.

Uma das maneiras mais encontradas e conhecidas para relatar e informar o crescimento ou decrescimento de uma população bem como a projeção de sua distribuição etária, tomando por base deste modelo que a população é fechada para migração e onde somente o sexo feminino seja considerado e esta, utilizada por grande parte dos demógrafos se dá através da Matriz de Leslie, ou modelo de Leslie, que foi utilizado pela primeira vez, em 1920 pelo matemático Alfred J. Lotka, porém, foi formalizado e nomeado em 1940 por Leslie Patrick Holt (1900-1974).

Segundo Kalin et al (2012, p.).

> Modelos matriciais população tem crescido cada vez mais importante nos estudos Ecologia após muito desenvolvimento uma vez que a primeira matriz de Leslie. Eles fornecem uma ampla gama de aplicações, uma vez que tenham sido submetidos a desenvolvimento analítico completa e a sua utilidade em, por exemplo, a biologia da conservação, não é trivial. Quando o seu objetivo de intervenção na taxa de crescimento de uma determinada população (seja para aumentar ou diminuir), a análise de sensibilidade e elasticidade da população modelos matriciais pode contribuir para a montagem eficiente estratégias de gestão, uma vez que identificam o metas que influenciam a taxa de crescimento populacional mais criticamente.

Compartilhando da linha de pensamento e entendimento do trabalho a respeito de matrizes. A proposta segue então, pelo uso do conhecimento de matrizes advindo da matemática, auxiliando na área de biologia em formas de exercícios, contextualizações e aplicações utilizando estudo de populações como exemplo.

2.12.1 Base do Modelo de Leslie

Para a utilização do modelo de Leslie a população estudada é dividida em grupos, todos eles separados por faixa etária. Para isso, considere M a idade máxima em que uma fêmea da população pode atingir. Se dividirmos a população em n faixas etárias, obteremos para cada faixa M/n o intervalo de tempo de cada uma. A matriz de Leslie é uma matriz quadrada, em que a ordem corresponde a mesma quantidade de elementos do vetor da população estudada. Esse vetor representa a população a cada intervalo de tempo passado, com um elemento para cada classe das idades , em que o elemento destacado representa o numero de indivíduos por classe na fase atual.

Faixa Etária	Intervalo de Idade
1	[0, M/n)
2	[M/n, 2M/n)
3	[2M/n, 3M/n)
$\vdots$	$\vdots$
n-1	[(n-2)M/n, (n-1)M/n)
n	[(n-1)M/n, M]

Com o decorrer do tempo , a quantidade de fêmeas dentro de cada um do n grupos vai mudar por consequência de três processos: nascimentos, mortes e envelhecimento.

Para tanto, adotemos como x_1^t a quantidade de fêmeas na primeira faixa etária no instante t, x_2^t a quantidade de fêmeas na segunda faixa etária no instante t, tomadas assim até o último intervalo. Como no processo existem n grupos, podemos formar o vetor coluna no instante t, indicado como:

$$X^t = \begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{array}{c} t_0 = 0 \\ t_1 = \dfrac{L}{n} \\ t_2 = \dfrac{2L}{n} \\ \vdots \\ t_k = \dfrac{kL}{n} \\ \vdots \end{array}$$

Denominado de vetor de distribuição etária no momento t, que no caso de t=0 é chamado de vetor de distribuição etária inicial.

$x_1^{(0)}$ são as fêmeas na primeira faixa etária no instante inicial, $x_2^{(0)}$ são as fêmeas na segunda faixa e assim sucessivamente.

Como pré-requisito no modelo de Leslie devemos ter que o tempo decorrido entre dois tempos de observação distintos seja igual a duração de uma faixa etária. Isso garante no estudo da população que todas as fêmeas de um determinado instante k situadas no grupo etário i, são oriundas de da faixa (i-1) no instante (k-1). Os processos, tanto de nascimento como morte entre um par sucessivo de período de observação podem ser elucidados por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

$a_i, (i=1,2,\ldots,n)$ é o número de fêmeas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na *i*-ésima faixa etária;

$b_i, (i=1,2,\ldots,n-1)$ é a fração de fêmeas na *i*-ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a (i+1)-ésima faixa etária. Pode ser entendida também, como a probabilidade de uma fêmea mudar para próxima faixa etária.

Pelas definições acima temos:

(i) $a_i \geq 0, para\, i=1,2,\ldots,n$

(ii) $0 < b_i \leq 1, para\, i=1,2,\ldots,n-1$

Perceba que para qualquer *i*, b_i é diferente de 0, caso contrario fêmea alguma sobreviveria além da *i*-ésima faixa etária. Nos também vamos supor que pelo menos um dos a_i é positivo, para que com isso, haja algum nascimento. Denominamos a faixa etária em que o a_i é positivo por *faixa etária fértil.*

Agora podemos entender, tendo em vista o vetor de distribuição etária, que no instante t_k as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre o instante t_{k-1} e t_k . Logo podemos escrever:

$$x_1^{(k)}=a_1 x_1^{(k-1)}+a_2 x_1^{(k-1)}+\ldots+a_n x_1^{(k-1)} \qquad (1)$$

Onde,

$x_1^{(k)}$ = número de fêmeas na faixa etária 1 no tempo t_k

$a_1 x_1^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária 1 entre os tempos t_{k-1} e t_k .

$a_2 x_2^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária 2 entre os tempos t_{k-1} e t_k .

$\vdots$

$a_n x_n^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária n entre os tempos t_{k-1} e t_k .

As fêmeas na (1+i)-ésima faixa etária (i= 1, 2, ..., n-1) no instante t_k , são as mesmas que estavam na i-ésima faixa no instante t_{k-1} e ainda vivem no período t_k . Logo,

$$x_{i+1}^{(k)}=b_i x_i^{(k-1)}, i=1,2,\ldots,n-1 \qquad (2)$$

Fazendo uso da linguagem Matricial, temos a possibilidade de escrever as equações (1) e (2) supracitadas como:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

De maneira mais compacta temos:

$$x^{(k)} = L\,x^{(k-1)}, k=1,2,\ldots \qquad (3)$$

Em que L é a matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Logo, pela equação (3) podemos obter:

$$x^{(1)} = L\,x^{(0)}$$

$$x^{(2)} = L\,x^{(1)} = L^2\,x^{(0)}$$

$$x^{(3)} = L\,x^{(2)} = L^3\,x^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = L\,x^{(k-1)} = L^k\,x^{(0)} \qquad (5)$$

Com isso, se tivermos conhecimento da distribuição etária inicial $x^{(0)}$ e a matriz de Leslie L, podemos então determinar a distribuição etária dos indivíduos do sexo feminino nos períodos posteriores. Mesmo tendo o conhecimento que a equação (5) dê a distribuição etária populacional a qualquer momento dos períodos decorridos ela não expõe automaticamente a ideia geral da dinâmica do processo de crescimento. Assim, faz-se necessário investigar os autovetores e autovalores da matriz de Leslie. Com isso, é necessário a elucidação de alguns teoremas importantes.

Exemplo: Por suposição a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma certa espécie é de 20 anos, e que existe para essa população quatro classes etárias definidas de iguais intervalos, cada um com cinco anos. Suponhamos também que a matriz de Leslie desta população é dada por:

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,10 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de distribuição inicial:

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Para estudar a população paras os próximos anos temos:

$$x^{(1)}=L\,x^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 140 \\ 25 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Seguindo com os cálculos temos:

$$x^{(2)}=L\,x^{(1)}=L^2\,x^{(0)}=(140\,;25;30\,;2) \quad .$$
$$x^{(3)}=L\,x^{(2)}=L^3\,x^{(0)}=(78,5\,;29,7\,;17,5;0,3) \quad .$$
$$x^{(4)}=L\,x^{(3)}=L^4\,x^{(0)}=(84,75\,;19,6\,;14,8;1,75) \quad .$$

Portanto, ao passar 20 anos, ou seja, quatro períodos, haverá aproximadamente 85 fêmeas com idade ate 5 anos; 20 com idade entre 5 e 10 anos; 15 com idade entre 10 e 15 anos e 2 fêmeas com idades entre 15 e 20 anos.

2.12.2 Comportamento no Limite

Se tomarmos a equação $x^{(k)}=Lx^{(k-1)}=L^k x^{(0)}$ percebemos que esta não nos oferece o panorama geral para o processo de crescimento populacional, temos portanto, que investigar e estudar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie. Observando o polinômio característico temos que:

$$P(\lambda)=\text{¿}L-\lambda I\vee\text{¿}\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

Desenvolvendo o determinante acima (para maiores detalhes ver em: ANTON; RORRES, 2001) obtemos:

$$\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-a_2b_1\lambda^{n-2}-a_3b_1b_2\lambda^{n-1}-\ldots-a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}=0$$

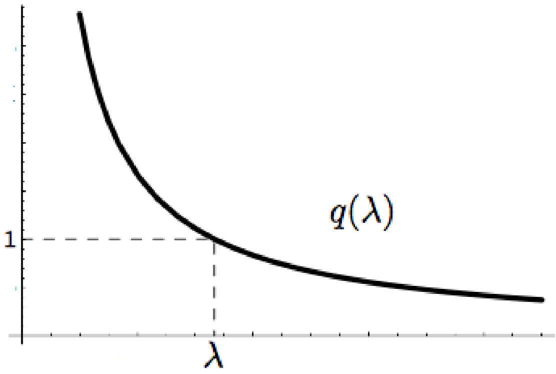
Efetuando a divisão por $-\lambda^n$, obtemos:

$$-1+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2b_1}{\lambda^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3}+\ldots+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n}=0$$

Denominando $q(\lambda)=\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2b_1}{\lambda^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3}+\ldots+\frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n}$, podemos observar que P($\lambda\text{¿}=0$ equivale a $q(\lambda)=1$

Observando graficamente a função $q(\lambda)$

Figura 1: Gráfico Esboço da função $q(\lambda)$



Fonte: Próprio autor

1) $q(\lambda)$ é monótona decrescente para $\lambda>0$, ou seja, $0<\lambda_1<\lambda_2 \Longrightarrow q(\lambda_1)>q(\lambda_2)$.
2) $\lim_{\lambda \to 0} q(\lambda)=+\infty$
3) $\lim_{\lambda \to +\infty} q(\lambda)=0$

Mais especificamente, existe e é único λ positivo , tal que $q(\lambda)=1$. Isto é, A matriz de Leslie L tem apenas um único autovalor positivo para o qual $q(\lambda)=1$. Além disso, a multiplicidade deste λ é 1.

Como, $Lv=\lambda v$, sendo v o autovetor associado ao λ acima, podemos calcular v em função de λ e o valor de v será:

$$v=\left(1,\frac{b_1}{\lambda},\frac{b_1 b_2}{\lambda^2},\frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda^3},\ldots,\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)$$

Com isto, analisando as informações acima, podemos enunciar os seguintes teoremas:

Teorema 1 (existência de um positivo): Dada uma matriz de Leslie L, esta possui um único autovalor positivo λ_1 . Este autovalor tem multiplicidade 1 é um autovalor associado a v_1 cuja as entradas são todas positivas.

Teorema 2 (autovalores da Matriz de Leslie): Se λ_1 é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_k é qualquer outro autovalor real ou complexo de L, então $|\lambda_k|\leq\lambda_1$.

Teorema 3 (autovalor dominante): Dada a matriz de Leslie L, Se esta possuir duas entradas sucessivas $a_i e a_{i+1}$ da primeira linha não nulas, então o autovalor positivo de L é dominante.

Como consequência dos cálculos anteriores temos que:

$x^{(k)} \cong \lambda^{(k)} x^{(0)} ou x^{(k)} \cong \lambda x^{(k-1)}$.

Onde λ é o autovalor dominante da matriz de Leslie L.

Estes últimos teoremas tem vital importância a respeito do comportamento ao longo do tempo da distribuição das faixas etárias, porém, as suas demonstrações vão além do propósito e objetivo deste trabalho, para um maior aprofundamento procurar em (ANTON; RORRES, 2001).

2.13 Aplicações na Biologia

Exemplo 1 (Montagem da matriz e utilização do modelo)

Uma espécie de besouro alemão, o vollmar-wasserman (ou besouro VW, para abreviar), vive no máximo três anos. Dividimos as fêmeas em três faixas etárias de um ano cada: jovens (zero a um ano), adolescentes (um a dois anos) e adultos (dois a três anos). Os jovens não produzem ovos; cada adolescente produz uma média de quatro fêmeas; e cada adulto produz uma media de três fêmeas. A taxa de sobrevivência para os jovens é de 50% (isto é, a probabilidade de um jovem vir a se tornar adolescente é de 0,5), e a taxa de sobrevivência dos adolescentes é de 25%. Suponha que começamos a população com 100 fêmeas de VWs: 40 jovens, 40 adolescentes e 20 adultos. Qual será a previsão da população para daqui a 3 anos?

Exemplo 2 (Interpretação e utilização do modelo)

Uma população com três faixas etárias tem matriz de Leslie $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ se o vetor da população inicial é $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, O que é e quanto vale $x^{(1)}, x^{(2)} e\, x^{(3)}$?

Exemplo 3 (Utilização do modelo)

Uma população com quatro faixas etárias tem a matriz de Leslie

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \text{, se } x^{(0)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} ,$$

qual a situação da população após 3 períodos?

Exemplo 4 (Comparação de hipóteses)

Uma espécie com 2 faixas etárias de um ano de duração cada tem uma probabilidade de sobrevivência de 80% da faixa 1 para a 2. Evidências empíricas mostram que, em média, cada fêmea dá a luz a 5 outras fêmeas por ano. Desta maneira duas formas possíveis para a matriz de Leslie são:

$$L_1=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} e\, L_2=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$$

Se o vetor inicial é $x^{(0)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ qual seria a analise dos dois gráficos relativos a cada distribuição nos primeiros 5 períodos?

Exemplo 5 ***(Reprodução líquida)***

A taxa de reprodução líquida de uma população é definida por:

$$r=a_1+a_2 b_1+a_3 b_1 b_2+\ldots+a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

Onde os a_i são as taxas de nascimentos e os b_i são as taxas de sobreviventes para a população.

a) Explique porque *r* pode ser interpretado como o número médio de filhas nascidas de uma única fêmea ao longo de sua vida.

b) Mostre que $r=1$ se, e somente se, $\lambda=1$ (isso representa o crescimento populacional zero)

Exemplo 6 ***(Significado do único autovalor positivo)***

Dado o exemplo anterior e assumindo que exista um único autovalor positivo λ, mostre que $r<1$ se, e somente se, a população estiver decrescendo, e $r>1$ se, e somente se, a população estiver crescendo.

Exemplo 7 ***(Colheita sustentável)***

Uma política de colheita, ou ceifagem sustentável é um procedimento que permite que seja segregada uma determinada fração da população (representada pelo vetor de distribuição $x^{(k)}$) de modo que, passado um determinado período de tempo, a população volte ao contingente do momento da colheita ($x^{(k)}$), sendo este período de tempo, a extensão de uma faixa etária da população, Se h é a fração de cada faixa etária que foi retirada, então, matematicamente podemos expressar o mecanismo da colheita do seguinte modo: iniciando com o vetor populacional $x^{(k)}$, após um período teremos $Lx^{(k)}$; a colheita segregará $hLx^{(k)}$ da população, nos dando:

$$Lx^{(k)}-hLx^{(k)}=(1-h)Lx^{(k)}$$

Pela condição imposta para a colheita sustentável temos que:

$$(1-h)Lx^{(k)}=x^{(k)}$$

(Nota: ambientalistas tiveram que fazer uma colheita na população de leões-marinhos quando a pesca predatória reduziu o alimento disponível a um ponto no qual a população estava em risco de inanição)

a) Se λ é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e h é a razão aplicada na colheita sustentável, prove que

$$h=1-1/\lambda$$

b) Determine a colheita sustentável para a população com matriz $L=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

3 LIMITES E CONTINUIDADE

A ideia de limite já surgiu com um imenso paradoxo e mesmo com isso, todos os conceitos principais do cálculo como Continuidade, Convergências, Divergências, Derivadas e Integrais podem ser definidos fazendo uso de limites.

A matemática tem o limite como a definição mais fundamental do Cálculo. De fato, se tomarmos no nível mais básico é o limite quem diferencia o cálculo dos demais ramos da matemática. Com isso, se formos tomar ordenadamente em nível de estrutura e desenvolvimento lógico dentro do cálculo o limite é aquele que deve vir primeiro. No entanto, em uma análise histórica, temos exatamente o oposto. Durante muitos anos as ideias a respeito de limites eram bastante opacas e confusas se mostrando extremamente vagas e fracamente fundamentadas, tomando como base noções filosóficas sobre o infinito fazendo uso até de intuições geométricas subjetivas. Nosso conceito atual em termos de limite tem base no iluminismo Europeu do fim do século XVIII e início do século XIX.

O conceito de limite de uma função é, a grosso modo, o que segrega a matemática elementar da matemática superior. Seus fundamentos diferem da álgebra e da geometria.

Neste capítulo, iremos elucidar e analisar algumas das interseções entre a as esferas de conhecimento matemático e biológico através de exemplos práticos e direcionados utilizando do conceito, da noção e da aplicação de limites, bem como fazer uso do conhecimento a cerca de continuidade. Elencando e explanando sempre que necessário alguns teoremas, definições e demonstrações que irão nos dar base e respaldo para discutirmos e solucionarmos problemas de cunho biológicos fazendo uso de instrumentos matemáticos.

Exemplo 1: RETA NUMÉRICA

O primeiro exemplo de aproximação da biologia com a matemática vem de uma padronização simples, porém necessária: A organização de elementos por ordem numérica de quantidade.

O valor de pH é um numero usado para medir a concentração de íons de hidrogênio em uma solução. Ácidos fortes produzem valores pequenos de pH, e bases fortes possuem valores elevados. Como poderíamos representar por ordem de importância, ou pela necessidade de fazer uso de uma determinada substância com caráter mais básico ou ácido supondo que fazemos uso das seguintes substâncias seguidas de seus respectivos pH's: ácido clorídrico: 0,0; suco de limão: 2,0; Limpador de forno: 13,0; bicarbonato de sódio: 9,0; água destilada: 7,0; café: 5,0. (*Fonte: Adaptado de Levine/Miller*, Biology: Discovering Life, *Second Edition*.)

Exemplo 2: INTERVALO

O American Kennel Club formulou uma série de regras para julgar as características de diversas raças de cães. No caso dos *collies*, as regras estabelecem que o peso dos machos deve satisfazer a desigualdade

$$\left|\frac{w-57{,}5}{7{,}5}\right| \leq 1$$

onde *w* é o peso médio em libras. Qual o intervalo de pesos dos animais avaliados?

Exemplo 3: INTERVALO

A utilização do entendimentos sobre máximos e mínimos tem como uma das principais aplicações sabermos o campo de atuação de um determinado estudo ou objeto a ser pesquisado, para tratarmos disso, vamos utilizar como um exemplo os batimentos cardíacos humanos.

Imagine que o valor máximo recomendável dos batimentos cardíacos de uma pessoa em boa saúde está relacionado à idade dessa pessoa através da equação:

$$r = 220 - A$$

Onde *r* é o valor máximo dos batimentos cardíacos por minuto e A é a idade da pessoa em anos. Alguns médicos recomendam que durante os exercícios físicos as pessoas devem aumentar os batimentos cardíacos até pelo menos 60% do máximo, no caso de pessoas de vida sedentária, e até 90% do máximo, no caso de atletas em excelente forma física. Como determinar por exemplo o intervalo da quantidade de batimentos máximos de uma pessoa qualquer com 20 anos?

Exemplo 4 (Função polinomial do 1° grau)

Na superfície do oceano, a pressão da água é igual a do ar acima da água, 1,05 kg/ cm^2 . Abaixo da superfície, a pressão da água cresce 0,1kg/ cm^2 para cada metro abaixo da superfície. Como expressar a pressão da água como função da profundidade abaixo da superfície do oceano? Qual a profundidade, por exemplo a 7 kg/ cm^2 ?

Exemplo 5 (Função polinomial do 1° grau)

Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a $20℃$ e 180 vezes por minuto a $29℃$.
Qual seria a equação linear notada pelos biólogos que modela a temperatura T como uma função do número de cricrilos por minuto? Qual e o que representa a inclinação do gráfico? Se os grilos estão cricrilando 150 vezes por minuto, qual a estimativa para a temperatura?

Exemplo 6 (Função polinomial do 2° grau)

Um modelo matemático para o número de transplantes de rim realizados nos EUA entre 1993 e 1997 é $y=-49{,}5t^2+828{,}3t+8950$, onde y é o numero de transplantes, e t é o número de anos, com $t=0$ correspondendo ao ano de 1990. (fonte: United Netwoeek for Organ Sharing)

Quantos transplantes de rim foram realizados nos EUA em 1990? E em 1997? De acordo com o modelo, que número de transplantes é previsto para o ano de 2012? Você acha essa previsão razoável? Que fatores afetariam a precisão do modelo?

Exemplo 7 (Limite)

O custo (em reais) para remover p% dos poluentes da água de um lado é dado por

$$C=\frac{25.000\,p}{100-p}\,,0\leq p\leq 100,$$

onde C é o custo, e *p* é a porcentagem de poluentes removidos.

Qual o custo para remover 50% dos poluentes? Qual a porcentagem de poluentes que pode ser removida por R$ 100.000,00? O que acontece com o Custo quando a porcentagem se aproxima cada vez mais de 100?

Exemplo 8 (Limite)

A temperatura de um paciente depois de receber um antitérmico é dada por

$$T=36{,}8+\frac{3}{t+1}$$

Onde *T* é a temperatura em graus Celsius e t é o tempo em horas.
Para quais valores de horas a função é válida? Qual a temperatura de um paciente no instante em que recebeu o antitérmico? Qual é a interpretação biológica para T a medida em que t se torna muito grande?

Exemplo 9 (Continuidade)

O tempo de Gestação dos coelhos é de apenas 26 a 30 dias. Por esse motivo, a população de um ninho de coelhos pode aumentar rapidamente. A tabela mostra a população N de um ninho de coelhos em função do tempo t (em meses).

t	0	1	2	3	4	5	6
N	2	8	10	14	10	15	12

Em uma análise gráfica, o que seria discutir a continuidade dessa função?

4 DERIVADAS

Todo o aparato de conhecimento no ramo e no processo de derivação é de suma importância tendo em vista as inúmeras áreas de aplicações em diferentes setores e manifestações das ciências. Para tanto, a visão que temos agora é resultado de um processo de desenvolvimento ao longo de 2500 anos, com as contribuições de inúmeros matemáticos.

Neste capitulo temos como objeto de estudo a ligação da área da matemática com a da biologia através das Derivadas. Temos, nas derivadas, um instrumento de extrema importância para as mais diversas áreas e com as mais diversas finalidades e utilizações, algumas das quais iremos fazer uso neste trabalho, entretanto não podemos de forma alguma generalizar e tomar em caráter fechado as aplicações das derivadas e dos limites. São diversos os recursos que podem ser criados tomando por base seus conceitos.

De forma introdutória e um pouco resumida a derivada é a medida de declividade de uma reta que tangencia cada ponto de uma função, também pode ser entendida como uma função que retorna valores relativos de grande utilidade, podendo também ser utilizada para encontrar o ângulo da reta tangente ao ponto da curva inicial. De forma geral, podemos extrair muitos elementos das derivadas, pois elas fornecem diversos artifícios para manipular os números em uma função. Porém, não se pode delimitar o conceito de derivada apenas na reta tangente, ela é uma magnífica e poderosa ferramenta para a resolução de problemas.

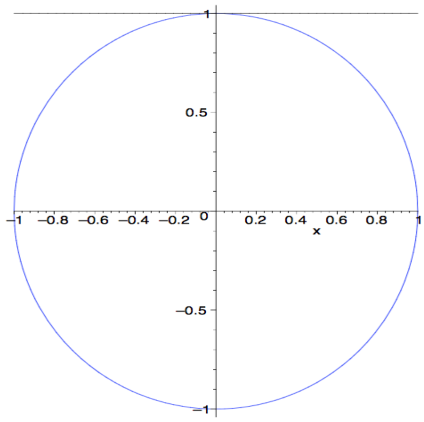
Iremos agora tratar do estudo da derivada bem como alguma de suas propriedades e aplicações, tendo como o foco de aplicação a área de biologia e de como esse tema pode ser abordado.

A derivada como conhecemos hoje , deve-se a Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão infinitesimal. Newton e Leibniz, já a tenha utilizaram, no século XVII, os fundamentos deste conceito como método para relacionar problemas de quadraturas de tangentes.

4.1 Definição e propriedades das derivadas

Para os gregos a definição de tangente a um ponto no círculo é uma reta que passa por esse ponto e é perpendicular ao raio [1], no entanto, para uma curva qualquer o conceito de tangente só ficou bem definido no século XVII.

Figura 3: Reta tangente ao círculo.



Fonte: Próprio autor.

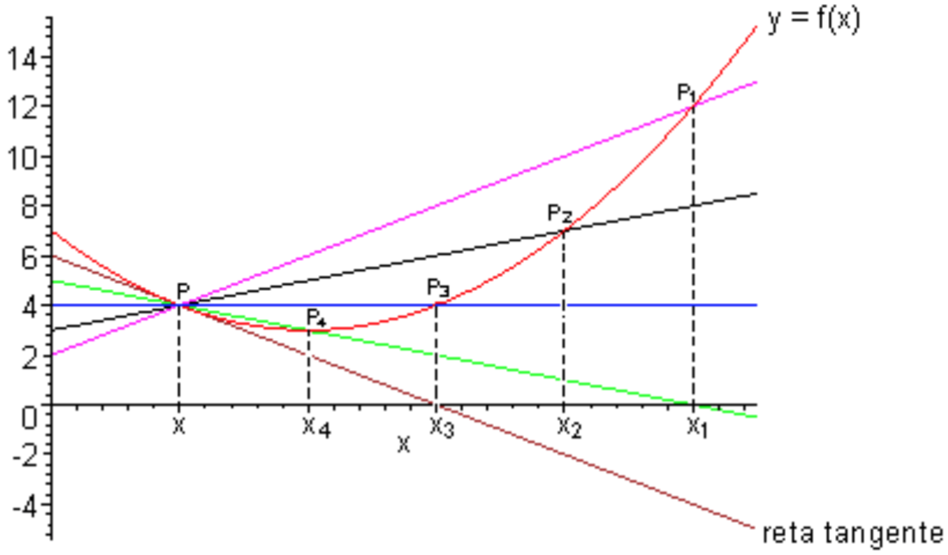
Definição: Tomando P e P_1, pontos da curva y = f (x), uma função dada, com $P=(x,f(x))$ e $P_1=(x_1,f(x_1))$, chamemos de r_1 a reta secante que contém P e P_1, se avaliarmos o deslocamento de P_1 na direção de P seguindo a curva [2], de maneira intuitiva percebemos um limite r para reta secante, na medida que $P_1 \to P(x_1 \to x)$. Logo cabe-nos avaliar e definir quem será esta reta limite. Para tal fim, devemos encontrar o coeficiente angular da reta secante, avaliando os dois pontos conhecidos de interseção com a curva, e o coeficiente é dado por:

$$m_1 = tg\propto = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Fazendo $P_1 \to P(x_1 \to x)$ tem-se, geometricamente, que o coeficiente angular m_1 da então reta secante se aproxima cada vez mais do coeficiente da reta limite. Assim,

$$\lim_{p_1 \to P} m_1 = \lim_{p_1 \to P} tg \propto = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Figura 4: Ponto de vista geométrico da derivada.



Fonte: Próprio Autor.

O coeficiente angular da reta existir (que é o próprio limite) é chamado de **derivada da função** $y = f(x)$, se o limite existir e podendo ser reescrito tomando $x_1 = x + h$, então:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dentre as notações para derivada estão: $f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}, y'.$

Alguns dos principais teoremas no estudo da derivada são:

$$Tomando\ f\ e\ g\ funções\ deriváveis\ em\ relação\ a\ x\ e\ k\ uma\ constante$$

temos algumas das principais regras de derivação:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(kf)' = kf'$, $sendo\ k\ constante$.

3. $(f.g)'=f'.g+f.g'$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$

Algumas das principais derivadas

1. $(x^n)'=n.x^{n-1}$
2. $(senx)'=cosx$
3. $(cosx)'=-senx$
4. $k'=0, onde\, k\, é\, constante.$ v

Faz-se necessário considerar outros tipos de função antes de elucidarmos outros tipos de regras de derivação. São as chamadas funções compostas. Se $y=y(u)$, por exemplo $y=3u+1$, e $u=u(x)$, por exemplo $u=x^3$, logo *y* também é função de *x* e pode ser escrito como $y=3x^3+1$. De modo mais geral, se $y=f(u)\, e\, u=g(x)$ podemos obter uma nova função aplicando uma dentro da outra tomadas todas em uma única variável desde que os valores tomados pela função g estejam contidos no domínio de f. Daí, pode-se nomear essa nova função como função composta e denotamos por $h(x)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$, sendo definida sempre que os valores assumidos por $g(x)$ estejam no domínio de f.

Teorema 11 (Regra da cadeia): *Sejam* $f(x)\, e\, g(x)$ *duas funções deriváveis de tal modo que* $h(x)=f(g(x))$ *esteja definida. Então* $h(x)$ *é derivável e será dada por:*

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

Escrevendo $u=g(x)$ então $\frac{dh}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$.

Definição 3.2. *Seja f uma função derivável. Dizemos que se f' é derivável, então a sua derivada é denominada derivada de segunda de f, e denotamos por* $(f')'=f''=f^{(2)}$.

Dizemos que se f" é derivável então a sua derivada é denominada derivada terceira de f, e denotamos por $(f'')'=f'''=f^{(3)}$.

De forma geral, temos que se a derivada de ordem (n-1) de f é uma função derivável, sua derivada é dita enésima de f e é denotada por $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.

Podemos então afirmar também que se $f^{(n)}$ existe, então f é derivável n vezes.

Tendo em vista que o intuito principal deste capitulo é elucidar, explanar e enfatizar a aproximação do ramo de estudos matemáticos a respeito das derivadas e as ciências biológicas trazemos alguns exemplos de aplicações satisfatórias das derivadas com o intuito de resolução de problemas de cunho biológico.

PROBLEMA 1 (Crescimento do tumor). Suponha que um paciente foi diagnosticado com um tumor e suponha que este tenha forma esférica. Deseja-se saber se quando o raio do tumor for 0,5 cm e o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?

PROBLEMA 2 (Velocidade do ar através da traqueia). Durante a tosse há um decréscimo no raio da traqueia de uma pessoa. Suponha que o raio da traqueia seja R cm e que durante a tosse o raio seja r cm, onde R é uma constante e r uma variável. Pode-se mostrar que a velocidade do ar através da traqueia é uma função de r e se *V(r)* cm/s for essa velocidade, então $V(r) = k r^2 (R - r)$ onde *k* é uma constante positiva e r está em $\left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Determine o raio da traqueia durante a tosse, para que a velocidade do ar através da traqueia seja máxima.

PROBLEMA 3 (Dinâmica populacional). Centenas de animais pertencendo a uma espécie colocada em perigo estão colocados em uma reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva e dada por $p = 100.\frac{t^2 + 5t + 25}{t^2 + 25}$. Após quantos anos a população será máxima?

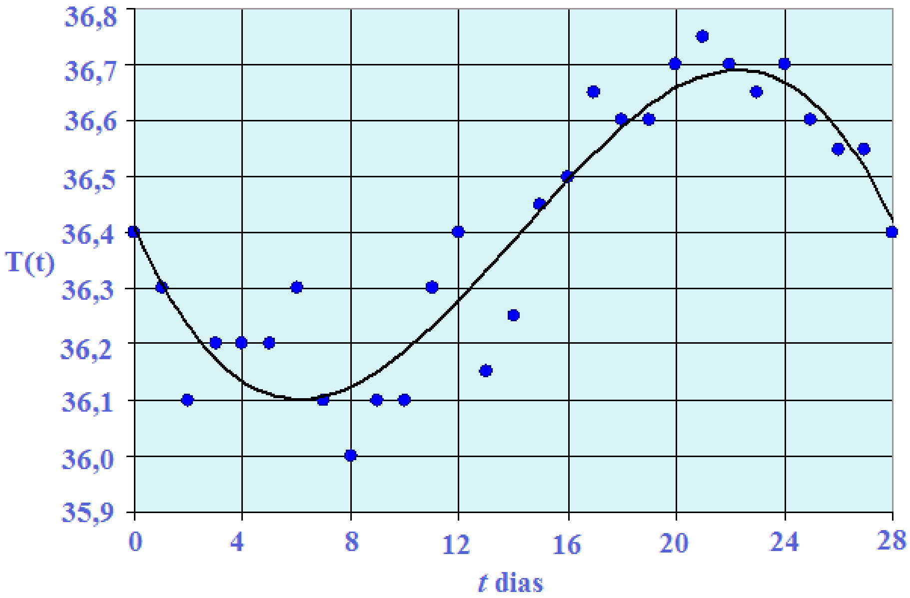
PROBLEMA 4 (Crescimento populacional). Certo lago pode suportar uma população máxima de 20.000 peixes. Se há poucos peixes no lago, a taxa de crescimento populacional será proporcional ao produto da população existente pela

diferença entre a população existente a partir de 20.000. Para que valor da população a taxa de crescimento será máxima ?
[NOTA: indique por f(x) a taxa de crescimento para uma população de dimensão x, então $f(x) = kx(20.000 - x)$.

PROBLEMA 5 (Pressão sanguínea). Suponha que a diminuição da pressão sanguínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda da pressão sanguínea será uma função de x. Seja f(x) esta função e $f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x)$ onde x está em [0, k] e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sanguínea.

PROBLEMA 6 (Período fértil da mulher). Estudos sobre os melhores (ou piores) períodos para se engravidar já movimentam a humanidade a muito tempo, uma das contribuições na biologia pela matemática esta aí, mais especificamente o uso da derivada. Podemos encontrar os períodos mais férteis de uma mulher, fazendo uma análise da flutuação da temperatura corporal no decorrer do seu ciclo menstrual. As mulheres são bastante influenciadas pelas atuações dos hormônios, especialmente se analisarmos seu ciclo ovulatório. Determinadas mulheres, inspecionam a variação da temperatura corporal basal para saber o período de um pico de fertilidade, com o intuito de maximizar (ou minimizar) a probabilidade de uma possível gravidez, no entanto, este tipo de conduta não é aconselhável. O pico de fertilidade está associado ao maior aumento da temperatura basal.

Figura 6: tabela temperatura no ciclo menstrual



Fonte: Próprio Autor.

A figura acima representa o gráfico da temperatura basal aferida no mesmo horário de cada dia, durante o período de um ciclo de 28 dias de uma mulher. O polinômio que ajusta melhor ao gráfico obtido através da interpolação de Lagrange fazendo uso dos pontos fornecidos é dada por:

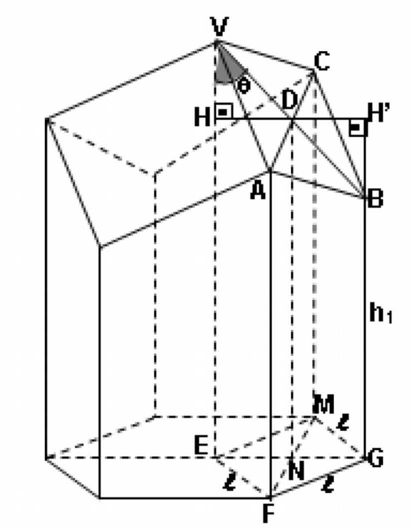
$$T(t) = -0{,}0002762t^3 + 0{,}01175t^2 - 0{,}1121t + 36{,}41$$

Onde $T(t)$ representa a temperatura em graus Celsius e t o tempo, em dias.

Partindo do estudo da curva acima relacionada, podemos descobrir a máxima e a mínima temperatura, e daí, determinar o pico de fertilidade?

PROBLEMA 7 (Área do alvéolo da abelha). Utilizando estudos (ALANO, 2013) sabemos que um alvéolo de abelha tem o formato de um poliedro de base hexagonal, com faces laterais na forma de trapézios retângulos, ortogonais a base e culminando por um ápice triédrico.

Figura 7: Vista geométrica do alvéolo da abelha



Fonte: ALANO, 2013

Análises mostram que a área de cada alvéolo aberto de abelha é dada por

$$A = 6 l h_2 + \frac{3l^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta} - cot\theta\right)$$

onde, AF é h_2 ; EG é l e θ é o ângulo em v formado por EV e VB

Tomando l e h_2 como valores dados, então esta área se encontra em função de θ , e terá menor valor quando $T(\theta)$ for mínimo para um θ variando entre 0 e $90°$ $(0<\theta<90°)$ onde $T(\theta)$ é dada por:

$$T(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta} - cot\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{sen\theta} - \frac{cos\theta}{sen\theta} = \frac{\sqrt{3} - cos\theta}{sen\theta} > 0,$$

pois no intervalo citado , $sen\theta > 0 \, e \, 0 < cos\theta < 1$, ou seja, $\sqrt{3} - cos\theta > 0$ e portanto o quociente é positivo.

Fazendo uso de uma calculadora, temos a possibilidade de calcular alguns valores de T. Construindo a tabela:

θ	$T(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta} - cot\theta\right)$
10	4,3032

20	2,3167
30	1,7320
40	1,5028
50	1,4219
60	1,4226
70	1,4792
80	1,5824
90	1,7320

Observamos que o menor valor de T ocorre para um valor de θ no intervalo entre $50° e\,60°$.

Para determinarmos o valor de θ iremos utilizar os conceitos de derivada.

Problemática: Qual a área mínima de um alvéolo de abelha, para que esta gaste o mínimo possível de material dado l e h_2 ?

PROBLEMA 8 (Farmacologia).

A reação do organismo na administração de um medicamento é frequentemente representada por uma função da forma

$$R(D)=D^2\left(\frac{C}{2}-\frac{D}{3}\right)$$

onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R em relação a D é chamada de sensibilidade. Qual seria o valor de D para a máxima sensibilidade?

5 INTEGRAIS

Adentraremos agora na segunda divisão do cálculo mais atualmente divulgado e conhecido: O Cálculo integral. Uma visão mais histórica e sistêmica sobre o que seria o cálculo integral, bem como as elucidações e explanações dos seus teoremas nos renderia um outro tipo de texto que sairia do intuito inicial da concepção deste trabalho como um todo, pois aqui, muito nos interessa a aplicabilidade desta ferramenta matemática em outro ramo: A Biologia. Porém, se faz necessário, pelo menos de maneira simples, falarmos um pouco da historia das Integrais.

Comete um grande erro quem pensa que o cálculo de forma geral foi concebido de uma maneira única e linear ao longo dos anos. Este, é fruto de diversas contribuições de inúmeros matemáticos ao longo da história. Muitos deles de forma até imprecisa ou não rigorosa, já faziam uso dos conceitos de cálculo para a resolução de diversos problemas – por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Que em seus respectivos tempos não dispunham (por não haver) de uma sistematização, no sentido de descrição estruturada de forma precisa e lógica.

A junção dos segmentos deste tipo de conhecimento utilizados até então, aliada ao desenvolvimento e aprimoramento das técnicas foi dado por Newton e Leibniz que originaram os conceitos e ideias mais fundamentais do cálculo: as Derivadas e as Integrais.

No capítulo anterior percebemos o tamanho da importância da derivada e do cálculo diferencial e algumas das diversas aplicações que o mesmo tem dentro do ramo da biologia. Neste capítulo trataremos de outro conceito de extrema necessidade em diversas áreas (inclusive a Biologia) e do funcionalismo dele como uma ferramenta poderosa para resolução de problemas e compreensão de conceitos: a Integral.

5.1 Alguns fatos históricos

Se formos analisar na história do cálculo, os primeiros problemas que surgiram que tem alguma relação com as integrais foram os problemas de **quadratura**. Os gregos, já enfrentavam problemas de medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas na antiguidade. Geômetras da antiguidade começaram a estudar áreas de figuras planas relacionando com a área de um quadrado, por ser uma área simples de ser mensurada. Assim, tentavam encontrar um quadrado com a área mais próxima a superfície estudada.

Nesse viés, a palavra quadratura se tornou um antigo termo que fazia menção ao procedimento de encontrar áreas.

As quadraturas que mais fascinavam os geômetras eram de figuras curvas, como círculo, ou outras figuras originadas pela delimitação de arcos. As Lúnulas – regiões que lembram a lua em uma de suas fases (quarto-crescente) foram analisadas por Hipócrates de Chios, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas. Antifon, procurou encontrar, em 430 a.C., a quadratura do círculo utilizando uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos, sequência esta que nunca pode ser finalizada entretanto, foi de suma importância e de uma genialidade enorme que deu origem ao método da exaustão. Arquimedes contribuiu enormemente por volta de 225 a.C. quando teorizou a quadratura da parábola. Depois de Arquimedes, as principais contribuições para o Cálculo surgira, no final do século XVI. Kepler, em seus estudos sobre os movimentos de planeta teve de encontrar áreas de varias regiões elípticas e setores elípticos. Cavalieri, em sua obra, *Geometria indivisibilibus continuorum nova,* desenvolveu as ideias de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Cavalieri por sua vez teve seu trabalho geométrico “traduzido” para a aritmética por Wallis, este desenvolvendo os princípios de indução e interpolação, entre outras diversas contribuições. Diversos outros matemáticos tiveram suma importância para os conceitos e a maneira como podemos estudar e aprender o Cálculo integral hoje.

Exemplo 1:

Uma loja de plantas vende um certo tipo de arbusto depois de cria-lo durante 5 anos. A taxa de crescimento do arbusto durante esses 5 anos pode ser modelada pela função:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{17{,}6\,t}{\sqrt{17{,}6\,t^2+1}}$$

Onde t é o tempo em anos e h a altura em centímetros. As mudas são plantadas com $6\,cm$ de altura $(t=0)$.

Qual a função da altura? E qual a altura dos arbustos quando forem vendidos?

Exemplo 2:

Uma vez que pingos de chuva crescem a medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência a sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a=\begin{cases} 9-0{,}9t \; se \; 0\leq t\leq 10 \\ 0 \; se \; t>10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver incialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levaria para cair?

Exemplo 3:

Suponha que uma bola de neve derrete de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional a área da sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade do seu volume original, quanto demorará para que a bola de neve derreta por completo?

Exemplo 4:

Um tanque para criação de peixes tem a água escoada pelo fundo a fim de irrigar uma determinada plantação, a uma taxa de escoamento de $q'(t)=200-4t$ litros por minutos, onde $0\leq t\leq 50$. Qual a quantidade de água que foi reaproveita ao final dos 10 primeiros minutos?

Exemplo 5:

Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é:

$$R(t)=85-0{,}18\cos(\pi t/12)$$

em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem em um período de 24 horas?

Exemplo 6:

A respiração é cíclica, sendo um ciclo completo iniciado pela inalação e finalizando pela exalação, com duração de 5s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica em parte, por que a função:

$$f(t)=\frac{1}{2}sen\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

Tem sido muito usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Usando este modelo, qual o volume de ar inalado nos pulmões no instante t?

Exemplo 7:

Suponha que em uma certa cidade a temperatura (em ℃) t horas depois das 9 horas pode ser aproximada pela função:

$$T(t)=20+6\,sen\left(\frac{\pi t}{12}\right).$$

Qual a temperatura média durante o período entre 9h e 21h

Exemplo 8:

A velocidade v do sangue que circula em uma veia com raio R e comprimento l a uma distancia r do eixo central é:

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

Em que P é a diferença de pressão entre as extremidades da veia e η é a viscosidade do sangue. Encontre a velocidade média (em relação a r) no intervalo $0\leq r\leq R$. Compare a velocidade média com a velocidade máxima.

Exemplo 9:

De acordo com o exemplo anterior, a lei do fluxo laminar estabelece que:

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

Agora para determinar a taxa da circulação sanguínea, ou fluxo (volume por unidade de tempo), calculamos a integral: $F=\int_0^R 2\pi r v(r)\,dr$.

Mostre que:

$$F=\frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

A equação resultante, denominada Lei de Poiseuille, mostra que o fluxo é proporcional a quarta potência do raio do vaso sanguíneo.

Exemplo 10:

A pressão alta resulta da constrição das artérias. Para manter uma taxa normal de circulação (fluxo), o coração tem que bombear mais forte, aumentando assim a pressão sanguínea. Use a Lei de Poiseuille para mostrar que se R_0 e P_0 são valores normais para o raio e a pressão em uma artéria, e R e P, os valores para a artéria constrita, então, para o fluxo permanecer constante, P e R estão relacionados pela equação:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

Deduza que se o raio de uma artéria é reduzido para três quartos de seu valor normal, então a pressão é mais que triplicada.

6 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Mesmo tendo em vista que não é o objetivo principal deste trabalho a definição e a conceituação de nenhum dos conteúdos em que este se destina a estudar e tendo como foco primordial as aplicações na área da biologia, faz-se necessário que a forma que iremos abordar para as resoluções das problemáticas seja totalmente clara. Assim, iremos utilizar o conceito que entende o logaritmo como sendo a função inversa da função exponencial, mesmo não sendo este conceito o único. Podendo ser melhor observado em (Lima, 2010) onde acreditamos ser a de melhor aplicação no que condiz a este trabalho.

O intuito de explorar e entender fenômenos naturais já acompanha a humanidade desde seus primórdios e a formulação, bem como disseminação do estudo a respeito dos instrumentos exponenciais e logarítmicos auxiliam principalmente no que condiz a simplificação de cálculos matemáticos.

Com a intenção de explorar um pouco mais sobre outro ramo da matemática que tem uma imensa interseção com a biologia, podendo as vezes, para alguns, ate ser confundido como utilização principal. Adentraremos agora ao estudo de funções exponenciais e logarítmicas com o foco nas aplicabilidades das mesmas. Para isso, fez-se necessário fazer um breve levantamento histórico para que se possa situar definir e entender de que maneira esse conteúdo adveio a nossa sociedade.

Tendo como ponto de partida a aritmética, as dificuldades para efetuar cálculos longos sempre existiu, e preocupados com isso, alguns matemáticos trabalharam com a finalidade de transformar os laboriosos cálculos aritméticos em cálculos mais simplificados. Dividindo os cálculos em grupos, o primeiro, representado pela adição e subtração, o segundo representando pela multiplicação e divisão e um terceiro composto pela potenciação e radiciação.

Os logaritmos tem em uma de suas grandes funcionalidades transformar cálculos do grupo 3 em cálculos do grupo 2 e os do grupo 2 nos do grupo 1, facilitando assim, cálculos que envolvam potenciação, radiciação, multiplicações e divisões.

Exemplo 1:

(vunesp/97) Suponhamos que uma represa de área igual a $128\,km^2$ tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8k m^2 e que este estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições:

a) Qual seria a área infestada n anos depois do estudo, caso não se tomasse nenhuma providência?

Exemplo 2:

(Portal Positivo – Adaptada) Em uma experiência de laboratório, verifica-se que uma população de um certo microrganismo cresce segundo a relação:

$N(t)=x_0(-1+2^{0,1t})$, onde $N(t)$ é o numero de microrganismos t meses após o início da experiência e x_0 é o número de microrganismos no início da experiência. Quantos anos devem se passar para que se tenha uma população 63 vezes a população inicial de microrganismos?

Exemplo 3:

O pH do suco gástrico presente no estômago humano varia no intervalo de 1 a 3. O valor do pH está relacionado com a concentração de íons de hidrogênio através da equação $pH=-\log_{10}[H^{+}]$ Quantas vezes a concentração de íons hidrogênio diminui quando o pH aumenta de 1 para 3?

Exemplo 4:

Um médico após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 10 anos, obteve a fórmula:

$h(i)=\log_{10}^{\left(10^{0,7}\times\sqrt{i}\right)}$, onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela formula obtida pelo médico, qual a variação em centímetros das alturas das crianças?

Exemplo 5:

O nível de álcool presente no sangue de uma pessoa que ingeriu uma certa quantidade de bebida alcoólica decresce de acordo com a relação:

$N(t)=t_0 \times 2^{-t}$ sendo t o tempo decorrido em horas a partir do momento t_0 , onde o nível foi constatado. Sabendo-se que o CTB (Código de Transito Brasileiro) estabelece 0,6 gramas por litro como limite máximo de álcool no sangue, para quem dirige, e considerando-se $\log_{10}^{2}=0{,}3$, quanto tempo, no mínimo, essa pessoa deve aguardar, antes de dirigir?

Exemplo 6:

Em uma experiência realizada em laboratório, o pesquisador observou que decorrendo t horas, a população P de uma certa bactéria crescia segundo a função $P(t)=25 \times 2^{t}$. Nessa experiência, sabendo que $\log_{2}^{5}=2{,}32$, quanto tempo levou para a população atingir 625 bactérias?

Exemplo 7:

(UNEMAT-2009) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção da espécie animal é inevitável. A população de uma determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo uma função exponencial do tipo $f(t)=k.a^{t}$, na qual k e a são números reais e $f(t)$ indica o numero de indivíduos dessa espécie no instante t (em anos). Atualmente (instante t=0) existem 1500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram irreversível para a extinção?

n	2	3	5	10
log n	0,30	0,47	0,70	1

Exemplo 8:

Sob condições ideais, sabe-se que certa população de bactérias dobra a cada três horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias: Qual a população após t horas? É possível estimar o tempo para a população atingir 50.000 bactérias? Qual o significado da função inversa da função população?

Exemplo 9:

A função $C(t)=K(e^{-at}-e^{-bt})$, onde $a, b e K$ são constantes positivas e $b>a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante t.

a) Mostre que $\lim_{t\to\infty} C(t)=0$
b) Encontre a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
c) Quando esta taxa é igual a zero?

Exemplo 10:

O numero de células de levedura em uma certa cultura de laboratório aumenta rapidamente no inicio, mas eventualmente se estabiliza. A população é modelada pela função:

$$n=f(t)=\frac{a}{1+b\,e^{-0,7t}}$$

Em que t é medido em horas. No instante $t=0$ a população é de 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de $a e b$. De acordo com este modelo, oque ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

Exemplo 11:

Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,7944 membros por dia. No dia 0, a população consistia de dois membros. Encontre o tamanho da população depois de seis dias.

(Obs.: A taxa de crescimento relativa, é a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população)

Exemplo 12:

Uma cultura de bactérias inicialmente contem 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.

a) Encontre a expressão para o numero de bactérias depois de t horas
b) Qual o numero de bactérias após 3 horas
c) Qual a taxa de crescimento depois de 3 horas
d) Quando a população atingirá 10.000 células?

Exemplo 13:

Uma determinada amostra é tirada da estufa e sua temperatura alcança $85°C$ e esta amostra é colocada em uma bancada em um ambiente onde a temperatura é de $22°C$. Se $T(t)$ for a temperatura da amostra apos t minutos, então a Lei de resfriamento de Newton implica que:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-22)k<0,k\,constante$$

a) Se a temperatura da amostra for $65°C$ depois de meia hora, qual sera a temperatura depois de 45 min?
b) Quando a amostra esfriará a $40°C$?

Exemplo 14:

Seja $C(t)$ a concentração de uma droga na corrente sanguínea. A medida que o corpo elimina a droga, $C(t)$ diminui a uma taxa proporcional a quantidade da droga presente naquele instante. Assim, $C'(t)=-kC(t)$, em que k é uma numero positivo chamado de constante de eliminação da droga.

a) Se C_0 for a concentração no instante $t=0$, encontre a concentração no instante t.
b) Se o corpo eliminar a metade da droga em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% da droga?

Exemplo 15:

Uma solução de glicose administrada por via intravenosa na corrente sanguínea a uma taxa constante r. A medida que a glicose é adicionada ela é convertida em outras substancias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional a concentração naquele instante. Então um modelo para a concentração $C=C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é:

$$\frac{dC}{dt}=r-kC$$

Onde k é uma constante positiva.

a) Suponha que a concentração no tempo $t=0$ é C_0. Determine a concentração em um tempo qualquer t resolvendo a equação diferencial.

b) Assumindo que $C_0 < \frac{r}{k}$, qual a interpretação de $\lim_{t \to \infty} C(t)$

Exemplo 16:

Em um modelo de crescimento sazonal, uma função periódica do tempo é introduzida para considerar variações sazonais da taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.

a) Encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt} = kPcos(rt-\phi) P(0) = P_0$$

onde $k, r e \phi$ são constantes positivas

b) O que se pode dizer sobre $\lim_{t \to \infty} P(t)$?

Exemplo 17:

O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento $L(t)$ de um peixe em um período de tempo. Se L_∞ for o maior comprimento para a espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento do comprimento seja proporcional a $L_\infty - L$, o comprimento que o peixe ainda pode crescer.

a) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para $L(t)$

b) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que $L_\infty = 53\,cm$, $L(0) = 10\,cm$ e a constante de proporcionalidade é 0,2. Como é a expressão para $L(t)$ deixe peixe?

Exemplo 18:

O transporte de uma substância através de uma parede capitar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

Onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Qual a relação entre $h e t$?

Exemplo 19: (decaimento radioativo)

O isótopo radioativo tório desintegra-se em uma taxa proporcional a quantidade presente. Se 100 gramas deste material são reduzidos a 80 gramas em uma semana, qual a expressão para a quantidade de tório em qualquer tempo? Qual o tempo necessário para a massa decair a metade de seu valor original, a dita meia-vida?

Exemplo 20: (UFG – 2011)

Estudos apontam que o amento de CO_2 na atmosfera intensifica a acidificação dos oceanos, o que pode prejudicar a vida marinha. Nesses estudos, em um determinado experimento (E_1) em água com $PH=8{,}05$, ovos de caracóis (lesma-marinha) geraram embriões que formaram conchas, após certo período de tempo. Em outro experimento (E_2) com ovos deste mesmo tipo, porém em água com $pH=7{,}6$, após o mesmo período de tempo, verificou-se que alguns ovos estavam vazios e os embriões ainda não haviam criado conchas. OCEANOS AMEAÇADOS DE DENTRO PARA FORA. Scientific American Brasil, São Paulo, set 2010, p.64-71. [Adaptado].

Considerando estas informações, Qual a razão entre as concentrações hidrogeniônicas nos experimentos $E_1 e E_2$? (Dado $10^{0{,}45}=3¿$

Exemplo 21: (Crescimento populacional)

(UFLA – 2006) Segundo o modelo Malthusiano para o crescimento populacional, as populações podem crescer sem limites. Apesar desses aspecto, o modelo funciona bem durante certo tempo. Utilizando dados dos censos de 1940 e 1998, o modelo prevê para a população brasileira um crescimento segundo a equação: $P(t)=40e^{0{,}02t}$, sendo $P(t)$ a população, em milhões de habitantes para cada ano t, e $t=0$ o ano de 1940. De acordo com a projeção malthusiana, determine o ano a partir do qual a população brasileira irá ultrapassar os 200 milhões de habitantes. Considerando $\ln 5 = 1,6$

Exemplo 22: (Idade das árvores)

Uma das técnicas para datar a idade das árvores de grande porte da floresta amazônica é medir a quantidade do isótopo radioativo C^{14} presente no centro dos troncos. Ao retirar uma amostra de uma castanheira, verificou-se que a quantidade de C^{14} presente era de 84% da quantidade existente na atmosfera. Sabendo-se que o C^{14} tem decaimento exponencial e sua vida média é de 5730 anos e considerando os valores de $\ln 0,5 = -0,69$ e $\ln 0,84 = -0,17$, qual a idade aproximada da castanheira que podemos afirmar?

Exemplo 23: (produção de frutos)

Um produtor do interior do estado do Pará decidiu investir no plantio de uma nova variedade de banana, a BRS Conquista, em função das vantagens apresentadas, como por exemplo: a resistência as doenças como o Mal do Panamá, Sigatoka Amarela e Negra. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou uma certa quantidade de bananas. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes maior que a quantidade inicial? $(\log 2 = 0,3)$

7 “BIOCALCULIA” A MATEMÁTICA NA BIOLOGIA.

7.1 Descrição

Se pararmos e dispormos um pouco do nosso tempo para analisar a matemática e o ensino desta tão bela ciência nos dias atuais, podemos observar que esta análise nos pede um olhar interdisciplinar que faça uma articulação entre ela e as Ciências naturais devido o forte vínculo entre os próprios conteúdos que, nesse sentido são complementares, ou seja, permitem o aprofundamento para estudo de modo desafiador tanto para os educadores como, especialmente, para os educandos que compõe a principal seção comunidade escolar do ensino médio.

Tomando como referência o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), que foi implementado em 1992 pela Secretaria de Educação (SEDUC), com o objetivo de promover um ensino de qualidade equânime para todos os alunos da rede pública do estado, sendo este uma avaliação de larga abrangência pois avalia desde a alfabetização até o ensino médio e também o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Ambos, são exames que tem por característica serem testes com enfoque no desempenho e fazem uso de questionários contextualizados que tem como uma das finalidades extrair parâmetros e dados para traçar um panorama que mede qualitativamente a educação dos estudantes. Este trabalho, teve o intuito de fazer uma singela pesquisa no âmbito motivacional e interdisciplinar com uma representação dos alunos de uma escola pública.

A escola Liceu Domingos Brasileiro, local e fonte desta pesquisa esta longe de ser localizada entre as escolas que possuem os piores resultados nas avaliações externas do estado Ceará, porém, possui resultados alarmantes no que condiz, por exemplo, o SPAECE, possuindo níveis que se aproximam do muito crítico nos últimos anos avaliados (2013 e 2014) segundo o próprio sistema.

Acredita-se que um dos motivos geradores para o tão critico desenvolvimento seja o desinteresse por parte dos estudantes pela matemática. Onde por diversas vezes é tomada de forma totalmente mecânica e aparentemente sem uso. As aulas de matemática deve ter como um de seus intuitos conduzir ou simular a condução dos alunos a resolver e solucionar situações-problema fazendo uso de conhecimentos que podem e devem serem ministrados no decorrer das aulas, para que ocorra uma maior significação e conexão com a realidade dos mesmos.

A interdisciplinaridade, tema tão discutido na atualidade, requer cooperação, troca, ajuda e construção conjunta, especialmente de novos saberes, principalmente quando estes organizam e norteiam a construção do processo de conhecimento cada vez mais uno, menos fragmentado e específico. Um conhecimento que transpasse barreiras e fronteiras entre conteúdos, disciplinas e ciências é oque, hoje, as avaliações buscam como meta. Conseguindo adequar as aparições destes novos conhecimentos de maneira mais serena e compreensível da realidade pelo todo. Segundo FAZENDA (1993) em “Práticas Interdisciplinares na Escola”, é ressaltado que:

> O prefixo ‘inter’, dentre as diversas conotações que podemos lhes atribuir tem o significado de ‘troca’, ‘reciprocidade’ e ‘disciplina’, de ‘ensino’, ‘instrução’, ‘ciência’. Logo, a interdisciplinaridade pode ser compreendida como sendo um ato de troca, de reciprocidade entre as disciplinas ou ciências – ou melhor, de áreas do conhecimento. (FERREIRA in FAZENDA, 1993, p 21-22)

Seguindo esta linha de raciocínio, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996, regulamentada em 1998 pelas diretrizes do Conselho Nacional de Educação (CNE) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) prioriza que, a escolha dos conteúdos a serem trabalhados, o currículo do Ensino Médio tem o dever de sempre procurar uma maior integração dos conteúdos e conhecimentos por intermédio de um trabalho interdisciplinar que comtemple uma coparticipação entre as áreas e um compartilhamento de ideias e atividades. Visando cada ciência de uma forma plural e não isolada que possui suas peculiaridades, porém reconhecendo que necessita de outras bases cientificas para a construção da mesma.

Para a consolidação da proposta interdisciplinar deste trabalho, tema e abordagem principal deste último capítulo, foi pensado e ministrado um minicurso de aprofundamento em matemática tendo como embasamento questões da biologia e foram propostos quatro questionários (2 pré-testes e 2 pós-testes) sendo eles de cunho motivacional e de conteúdos, aplicados a alunos dos segundos e terceiros anos do turno da manhã da Escola Estadual Professor Domingos Brasileiro indagando sobre conhecimentos de interdisciplinaridade, interesse pelas aulas de matemática e a respeito de conteúdos que foram vistos por eles em algum momento da sua vida estudantil e que foram abordados nesse trabalho.

A intenção principal desse minicurso foi promover uma relação significativa de integração com reciprocidade entre os conteúdos da matemática e da biologia, de tal maneira que levasse o aluno a solucionar situações problemas e se questionar a que área do conhecimento aquela problemática estava envolvida, bem como ponderar sobre que tipos de ferramentas e conteúdos seriam necessários para resolver tais questões, melhorando assim, o interesse e a aprendizagem dessas disciplinas a partir da troca de informações e dos conhecimentos adquiridos em cada área.

Segundo Japiassu (1976, p. 75)

> Podemos dizer que nos reconhecemos diante de um empreendimento interdisciplinar todas as vezes em que ele conseguir incorporar os resultados de varias especialidades, que tomar de empréstimo a outras disciplinas certo instrumentos e técnicas metodológicas. Fazendo uso dos esquemas conceituais e das análises que se encontram nos diversos ramos do saber, a fim de faze-los integrarem e convergirem, depois de terem sido comparados e julgados. Donde podemos dizer que o papel específico da atividade interdisciplinar consiste, primordialmente, em lançar uma ponte para ligar as fronteiras que haviam sido estabelecidas anteriormente entre as disciplinas com objetivo preciso de assegurar a cada uma seu caráter propriamente positivo, segundo modos particulares e com resultados específicos.

Fazendo o professor moderno refletir e ponderar a respeito, percebendo que a relação entre conteúdos até então distintos pressupõe e necessita da produção de mais conhecimento, por que a interação entre eles gerarão novos conceitos e metodologias no intuito de atender a multiplicidade mais complexa da natureza no qual estão inseridos.

Para a realização deste trabalho no ramo da interdisciplinaridade com a matemática necessitou-se de muitos fatores, por exemplo, o planejamento e o estudo prévio dos encontros e aulas, tendo como fator mediador o diálogo com professores e profissionais da biologia e matemática, não apenas do LDB como de outros locais e escolas como UFC e escolas particulares.

7.2 Avaliação prévia

Devido a conjuntura geral da educação pública a nível Fortaleza do estudo de matemática, onde a carência dos alunos começa na base matemática, ou seja, a inconsistência da apreensão do conhecimento mais básico que seria as operações matemáticas desde soma e subtração ate as demais, espera-se sim grande dificuldade na realização dos exercícios propostos dada a complexidade e quantidade de conteúdo e propriedades envolvidos.

É de extrema importância ressaltar que infelizmente a aplicação do minicurso foi realizada no período de greve na esfera da educação estadual cearense, sendo assim, os alunos foram convidados a participar antes da implementação da greve, e foram alertados por uma lista de contato deixada previamente, desse modo, não foi necessário a continuidade do estudante na escola para o contra-turno, isto é, as atividades foram realizadas pela manhã, período normal de aula. Porém, devido a greve, a assiduidade foi comprometida.

Estimasse que a maioria dos alunos tenha como visão da matemática colegial a utilidade para definir formulas e regras, e que para eles sua principal funcionalidade seja para adentrar a universidade, não vendo eles muito sentido na ênfase dada a matemática na educação e não conseguindo relacionar a mesma com outras disciplinas, especialmente a biologia.

É esperado também que a resposta dos estudantes quanto a motivação por estudar matemática seja quase inexistente ou, quando muito, ter uma perspectiva de vida melhor ao entrar no ensino superior. Espera-se também que eles se alegrem ao ver algumas das aplicações com a biologia e que falem que é raro a contextualização por parte dos professores de matemática em outras disciplinas.

Em se tratando de conteúdo, é esperado para o primeiro teste uma dificuldade grande para a solução, devido ao fato de ser basicamente aplicação de fórmulas, conceitos e métodos para a resolução. Porém para o segundo teste é estimado que o estudante tenha uma maior desenvoltura dado o fato que nesse caso ele é estimulado a pensar, onde aquele problema deixa de ser apenas números no papel e passa a ter um significado concreto.

7.3 Metodologia de aplicação

A pesquisa foi realizada na Escola Pública Estadual Professor Domingos Brasileira, que é sediada no bairro Planalto Ayrton Senna, em Fortaleza, Ceará. A escola conta em 2016 com 1072 alunos matriculados, possuindo apenas o ensino médio, distribuídos em 12 turmas de primeiros anos, 8 turmas de segundos anos e 6 turmas de terceiros anos.

A realização do minicurso foi pensada e desenvolvida a partir de uma conversa com professores da área de ciências da natureza em momentos separados avaliando as opiniões dos mesmos no que concerne a proposta interdisciplinar e a que eles atribuem o desinteresse por parte dos estudantes em matemática.

A ideia do minicurso nasceu com o intuito de testar a veracidade da produção de elementos motivacionais nos estudantes, tendo surgido a necessidade no decorrer e no desenrolar da elaboração dos capítulos do trabalho e por motivação pessoal própria ao descobrir partes das aplicações.

Foi conversado com o núcleo gestor do colégio LDB, sobre a aplicação desse projeto, onde o núcleo gestor se mostrou bastante satisfeito e a favor da proposta oferecendo todo material disponível na entidade para a realização do trabalho, desde o espaço físico ao material ou disponibilidade da merenda escolar para os alunos participantes.

O minicurso teve uma duração de uma semana de aula, ou seja, cinco encontros. Tendo cada encontro uma media de 2 horas de aula e divididos da seguinte maneira:

1˚ Encontro:

Foi apresentado o pré-projeto do minicurso (ver apêndice A) e discutido sobre o que se tratava especificamente esse minicurso e de que maneira o mesmo contribuiria para a vida escolar desses estudantes, bem como as possíveis aplicações e adaptações que outros professores poderiam fazer utilizando deste trabalho para que, em caso positivo, pudesse ser reaplicado em outras turmas respeitando as devidas modificações, foi divulgado também o conteúdo que seria visto pelos alunos durando o minicurso, que seriam: matrizes, potenciação, radiciação, logaritmo, função exponencial e função logarítmica.

Após a explanação sobre o projeto, realizou-se a distribuição de um termo de um termo de consentimento livre e esclarecido (Ver apêndice B), onde estavam impressos e explicados mais assuntos como: Pagamento, benefícios, confidencialidade, riscos, desconfortos, informações sobre os questionários, envolvimento na pesquisa, participantes da pesquisa e natureza da pesquisa. Depois de lido em voz alta e sanado alguma dúvida que possa ter ocorrido eventualmente foi requisitado que eles assinassem o termo e me entregassem.

Depois do recolhimento do termo, foi distribuído, explicado e requisitado a resposta de um questionário sócio – econômico, tendo este, como um dos principais objetivos, traçar um panorama mais geral sobre o público alvo do em que estava se aplicando o minicurso a fim de conhecer e entender possíveis zonas de complicações no decorrer da aplicação.

Recolhida o instrumental anterior, foi distribuído o 1˚ pré-teste, este de cunho motivacional (ver apêndice D), onde eram indagados por opiniões pessoais a respeito da visão de cada um sobre a matemática de forma geral, interdisciplinaridade, aplicações interesses nas matérias dentre outros. Este pré-teste, tinha o intuito de conhecer as opiniões dos alunos e determinar uma base de estudo e avaliação para podermos futuramente comparar com os resultados obtidos depois do minicurso. A titulo de confidencialidade, foi atribuído aos alunos um número para a identificação dos seus testes, sendo este mesmo número utilizado no teste final.

Após a realização do pré-teste motivacional, foi distribuído o pré-teste de conteúdos (ver apêndice F) onde era requisitado dos alunos a resoluções de questões de um conteúdo que eles já deveriam ter certo domínio, sendo esse um dos motivos das restrições da pesquisa para apenas alunos do 2˚ e 3˚ ano do ensino médio. Não foi ministrada previamente nenhuma aula de revisão ou retomada de conhecimentos, mesmo se sabendo necessária pela lacuna temporal entre a época em que o conteúdo foi visto e a aplicação do teste, isso ocorreu propositadamente pelo intuito de avaliar quais seriam os conhecimentos necessários por parte dos estudantes para a concretização da atividade, porém, a medida que iam surgindo as dúvidas, eu no papel de professor e enquanto mediador do conhecimento, fazia uma breve explicação ou retomada no quadro de uma maneira bem objetiva e sucinta, para que fosse possível apenas a dissolução de cada questão levantada.

Terminada a ultima atividade, foram feitos agradecimentos aos estudantes pela contribuição ao trabalho, foi requisitado que assinassem uma lista de frequência (Ver apêndice H) a titulo de documentação e foi feito novamente o convite para o próximo encontro que seria no dia seguinte.

2° Encontro

O encontro foi iniciado com um acolhimento dos estudantes e foi ressaltado a importância da contribuição e da participação ao trabalho que estava sendo realizado e foi iniciado uma verdadeira retomada do conteúdo de matrizes. Foi destacado desde a formação de tabelas e seu comportamento como também foi explicado de modo intuitivo as operações entre matrizes (adição, subtração, multiplicação e potência), fazendo uso de exemplos práticos como por exemplo, os que foram abordados no CAPITULO 1 deste trabalho.

Ao final do encontro, foi dada uma pequena lista de exercícios contendo alguns exemplos que foram abordados no CAPITULO 1 por solicitação dos alunos, para que se fossem resolvidas em casa. Foi requisitado também que os estudantes assinassem a lista de frequência (ver apêndice H), e eles foram novamente convidados para o próximo encontro.

3° Encontro

O encontro foi iniciado com um acolhimento dos estudantes também foi ressaltado a importância da contribuição e da participação ao trabalho que estava sendo realizado, houve também um pedido pela assiduidade e foi iniciado uma verdadeira retomada do conteúdo de função exponencial, apresentado logo no inicio da explicação a imensa dificuldade por parte dos estudantes no conteúdo base para exponencial: potenciação e radiciação.

Após a retomada das propriedades de potenciação e radiciação, foi revisado também as equações envolvendo potências para que então pudesse ser abordado o conteúdo de exponencial. Utilizando para isso, exemplos práticos tratados no CAPITULO 6.

Ao final do encontro, foi dada uma pequena lista de exercícios contendo alguns exemplos que foram abordados no CAPITULO 6 para que os alunos solucionassem em casa. Foi requisitado também que os estudantes assinassem a lista de frequência (ver apêndice H), e eles foram novamente convidados para o próximo encontro.

4° Encontro

O encontro foi iniciado com um acolhimento dos estudantes também foi ressaltado a importância da contribuição e da participação ao trabalho que estava sendo realizado, houve também um pedido pela assiduidade e foi iniciado uma verdadeira retomada do conteúdo de função logarítmica, sendo necessário logo no inicio da explicação a dificuldade gigantesca por parte dos estudantes do conteúdo base para exponencial: potenciação e logaritmos.

Após a retomada das propriedades dos logaritmos e tendo como base a aula anterior sobre potenciação, foi revisado também as equações logarítmicas para que então pudesse ser abordado o conteúdo de funções logarítmicas. Utilizando para isso, exemplos práticos tratados no CAPITULO 6.

Ao final do encontro, foi dada uma pequena lista de exercícios contendo alguns exemplos que foram abordados no CAPITULO 6 para que os alunos solucionassem em casa. Foi requisitado também que os estudantes assinassem a lista de frequência (ver apêndice H), e eles foram novamente convidados para o próximo e último encontro.

5° Encontro

O ultimo encontro iniciou com a acolhida dos estudantes na sala, foi apresentado um vídeo motivacional para reflexão, foi conversado ainda sobre a satisfação ao ser realizado minicurso e foram feitos agradecimentos pela participação dos estudantes.

Após os agradecimentos, foi distribuído o 1° pós-teste, sendo este de cunho motivacional (ver apêndice E), onde também eram indagados novamente por opiniões pessoais a respeito da visão de cada um sobre a matemática de forma geral, de forma interdisciplinaridade, sobre aplicações, interesses nas matéria dentre outros. Este pós-teste, tinha o intuito de conhecer e avaliar as opiniões dos alunos após o minicurso para que em comparação com o teste anterior, pudesse observar o que teria mudado por intermédio do minicurso. A título de confidencialidade, foi pedido aos alunos que colocassem o mesmo número para a identificação nos seus testes.

Após a realização do pós-teste motivacional, foi distribuído o pós-teste de conteúdos (ver apêndice G) onde era requisitado dos alunos a resoluções de questões de um conteúdo que eles já deveriam ter certo domínio, e foram revistos no decorrer do minicurso, onde as questões do pós-teste se diferiam das questões do pré-teste pela significação e possibilidade de aplicação do conteúdo em um problema.

7.4 Análise de resultados

A pesquisa realizada foi do tipo Teórico-Metodológica, fazendo uso de instrumentais para coleta de dados de 4 testes e um questionário socioeconômico. O projeto possuiu inicialmente uma inscrição de 25 alunos, porém os dados do projeto são relacionados a somente 10 alunos por possuírem assiduidade total no minicurso, os estudantes contam com idades no intervalo de 16 a 18 anos, cursando o segundo ou terceiro ano do ensino médio. É importante ressaltar que os estudantes foram convocados e por livre vontade se inscreveram no curso, tendo o mesmo tipo tão baixa assiduidade pela infelicidade de ser realizado em um momento de conturbação e paralização nas escolas do estado por conta de uma greve de professores e alunos.

Apresentaremos abaixo uma análise dos dados coletados pelo questionário socioeconômico e os testes realizados com os estudantes.

7.4.1 Do questionário socioeconômico

Os alunos participantes do minicurso não destoaram significativamente quanto ao sexo, mesmo depois da evasão permaneceram nas aulas 60% do total de meninos contra 40% de meninas, 60% dos estudantes possuem 17 anos de idade, 30% possuem 16 anos e apenas 10% é maior de idade com 18 anos.

Todos os alunos cursaram o ensino comum, sendo que 90% deles cursaram todo em escola pública. Um dado relevante é que 20% dos alunos participantes possuem atividade remunerada enquanto cursam o nível médio, sendo que nenhum deles frequentou a qualquer aula de reforço ou aprofundamento fora a escola. Dos alunos pesquisados todos pretendem prestar o ENEM mas apenas 20% já prestaram e a mesma porcentagem começou um curso técnico.

Alguns dados já esperados pela localidade da escola, mas ainda assim alarmante foram obtidos quando os estudantes foram questionados sobre os pais. 70% dos pais possuem o ensino fundamental incompleto e 70% das mães não fizeram o ensino médio. 70% das mães não possuem um trabalho remunerado, sendo tidas como “donas de casa” e 70% dos pais são trabalhadores autônomos, 90% possuem casa própria. Outro dado alarmante é que 20% deles possuem uma renda salarial abaixo de 1 salario mínimo para toda família e esse dado sobe para 80% se estipularmos abaixo de 2 salários mínimos para toda família. Creio que por esse motivo 70% recebem algum auxilio do governo e possuem uma média de 4 pessoas por família.

Podemos tirar por conclusão que os alunos se encontram em um quadro bastante carente da sociedade, porem possuem o imenso desejo de mudar a realidade a que são submetidos estudando, lutando e querendo sair dessas condições.

7.4.2 Do Pré-teste motivacional

Podemos perceber que dentre as finalidades da matemática que o aluno quer que se torne mais frequente se encontra ingressar no nível superior(70% dos votos) contrastando com a que menos interessa da lista que seria definir regras e formulas aparecendo em ultimo lugar 70% das vezes. Percebemos também que para os alunos, na atual situação deles a finalidade mais frequente é justamente o oposto que seria definir regras e formulas (60% dos votos).

Quando questionados sobre a principal intenção ao estudar matemática o item: resolver questões de raciocínio logico apareceu 70% das vezes divergindo da opção que muito interessa aos professores que seria se tornar mais critico (80%). Para os estudantes principal sentido de estudar matemática é ingressar no nível superior (90%).

No quesito de relação entre matemática e outras ciências eles apontaram que tem relações sim mas podem ser totalmente independentes (60%) porém, quando questionado com a relação especifica com a biologia a maioria apontou que 40% acha que não tem, 50% pouca relação e somente 10% acham que existe muita relação.

O uso da matemática é por eles apontado como principal fator motivador de estudar tal ciência com (60%) e sobre a relação feita pelo professor com as suas aplicações foi apontado que este sempre mostra exemplos (70%) o que de certa forma melhora a visão da matemática para eles pois 90% gosta muito de ver as aplicações praticas. Mas em relação a gostar de matemática apenas 30% gosta muito 40% somente gosta e 30% apenas um pouco.

7.4.3 Do pré-teste de conteúdos

Foi observado que apenas 30% possuem um domínio razoável das operações com matrizes e 60% apresentaram dificuldades em formalizar uma tabela a partir de dados. Sobre exponencial e logaritmo 30% obtiveram um resultado satisfatório no que condiz a domínio e imagem de exponencial, 20% em equações exponenciais e o resultado piora quanto ao estudo de logaritmos, pois apenas 10% obtiveram êxito em expressões e propriedades e 10% conseguiram solucionar equações logarítmicas. Porém, é importante ressaltar que todos eles se esforçaram bastante em todas as questões, tendo cometido pequenos deslizes nos exercícios, que os atrapalharam para conseguir um resultado satisfatório, sendo as operações os principais erros cometidos.

7.4.4 Do pós teste motivacional

Foi muito gratificante perceber algumas mudanças depois da realização do curso, apesar do percentual de várias das respostas permanecerem o mesmo ou sem muitas mudanças, algumas perguntas chaves que obtiveram resultados positivamente diferentes.

No quesito: Qual sua principal intenção ao estudar matemática, o percentual mudou de 70% que optaram por solucionar questões de raciocínio lógico e 20% que eram de solucionar contas mais elaboradas para 40% de se tornar mais crítico 30%

para solucionar contas mais elaboradas e 30% para solucionar questões de raciocínio lógico. Mostrando que os alunos puderam perceber outros sentidos para a matemática que não apenas o pensar lógico.

No quesito: Principal sentido de estudar matemática para você, se encontra a maior surpresa, o nível enorme de 90% com intenção de estudar apenas para entrar no nível superior caiu para 50% deixando o entender o mundo em que vivo com 40% onde não foram computados votos e zerando a opção de não vejo sentido estudar matemática. Conquista bastante significativa para o minicurso pois é possível observar se não a apreensão de conhecimentos pelo menos a significação do mesmo.

Outro resultado interessante foi no quesito: relação entre a matemática e a biologia, desapareceram os 40% que não enxergavam relação entre as ciências e diminuíram os 50% que viam pouca relação, aumentando de 10% para 70% os que enxergam muita relação entre as ciências.

Podemos então atribuir ao minicurso um papel importante para a significação e motivação para os estudantes, onde estes conseguiram visualizar um sentido mais amplo para matemática e outras ciências.

7.4.5 Do Pós-teste de conteúdos

Chegamos então a um dos pontos chaves da pesquisa e novamente temos um resultado bastante satisfatório tendo em vista as condições iniciais. Percebe-se que com o decorrer das aulas expositivas com enfoque nos motivos e nas razões para as propriedades das matrizes obedecerem o procedimento que elas obedecem, e fazendo uma relação direta com a aplicação prática na biologia, foi possível notar uma melhora considerável no que condiz ao uso das operações entre matrizes, onde 60% dos alunos conseguiram efetuar as operações necessárias para a solução das questões.

Os resultados saltam quando se trata das equações exponenciais, passam dos 20% iniciais para os 60% de soluções satisfatórias. Em equações logarítmicas também temos um avanço de 10% para 40% de resoluções o que é um avanço considerável dada a complexidade dos problemas propostos.

7.5 Avaliação geral e conclusão

A avaliação dos resultados do minicurso foi bastante satisfatória, cabendo a uma outra pesquisa investigar mais a fundo o real motivo para a melhoria do aproveitamento, se foram pelas aulas voltadas a questões práticas e reais onde os estudantes tinham algum conhecimento, se é pelo fato dos interesses dos alunos em matemática, se é por eles descobrirem um novo campo de relação entre os conteúdos.

Creio que se faça necessário o professor ressaltar e relacionar sempre que possível a matemática com outras ciências, pois, tendo como base a pesquisa feita no minicurso, essa relação se mostrou de imensa importância e necessidade.

De modo geral, o minicurso encontrou alguns problemas, dentre eles a assiduidade dos alunos, como falado anteriormente por conta da greve. A dificuldade causada pela carência de conhecimentos básicos por conta dos alunos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve dois objetivos principais, aprofundar e expor relações entre as ciências citadas e pesquisar, com foco no aluno, de que maneira e qual importância essa relação entre as ciências era capaz de interferir na falta de motivação dos estudantes no estudo com a matemática, tendo em vista a dificuldade notória dos professores da atualidade do ensino que é se ensinar a quem não tem real interesse em aprender.

Tratando-se de motivação do estudante, ou de qualquer indivíduo o professor deve ter o conhecimento que ninguém motiva ninguém, o que é cabível é possibilitar ao aluno instrumentos e materiais necessários para que ele em si se motive, possibilitando a ação de querer, de buscar e de se interessar por aquilo que se tem a oferecer, nas palavras de (Lieury & Fenouillet, 2000, p. 9):

> A motivação é o conjunto de mecanismos biológicos e psicológicos que possibilitam o desencadear da ação, da orientação (para uma meta ou, ao contrário, para se afastar dela) e, enfim, da intensidade e da persistência: quanto mais motivada a pessoa está, mais persistente e maior é a atividade.

Os conhecimentos prévios dos alunos devem ser, por prioridade, primeiramente observados pelo professor no decorrer do processo de aprendizagem. Essa pesquisa buscou aproximar o ensino da matemática com a vivência e a significação para os alunos. Conseguindo êxito dentro das possibilidades da realização da pesquisa no que se queria, ou seja, foi possível perceber o interesse e a necessidade dos estudantes no que concerne a significação dos conteúdos que são ministrados no cotidiano. Notando inclusive a melhora dos conhecimentos matemáticos tendo como base uma outra ciência.

O trabalho dá margem a um aprofundamento maior no assunto abordado, bem como deixa espaço para possíveis mudanças e aplicações para a implementação no cotidiano de sala de aula. Espera-se ter possibilitado uma base de conteúdos significativa e usual para professores e alunos que se interessam pelo assunto.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Danielle Oliveira de; REZENDE, Thiago Maia de; RUAS, Antônio Augusto Gaspar. *Dmat UFMG.* 03 07, 2016. http://www.mat.ufmg.br/~proin/cIII/calculo/funcoes%20vetoriais/funcoesvet.html. Acesso em: 10/05/2016.

ALANO, Edivan. **Geometria das abelhas**. Teresina, PI: SBM/PROFMAT, 2013.

AMABIS, José Mariano; MARTHO, Gilberto Rodrigues. **Biologia.** 2° Ed., São Paulo: Moderna, 2004.

AMABIS, Jose Mariano; MARTHO, Gilberto Rodrigues, **Biologia 3** – Biologia das populações – 3° série – Ensino médio; 2° Ed., São Paulo: Moderna, 2012.

ANTON, H.; RORRES,C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre; Bookman, 2001.

ÁVILA, Geraldo. **O ensino de Cálculo no 2o Grau**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 18. 1991.

BOYER, C. B.; MERZBACH, Cuta. **História da matemática.** São Paulo: Blucher, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN –** vol. 3. Brasília: MEC /SEF, 1998.

COLARES, G. B. **Autovalores e Autovetores e Aplicações**. Foz do Iguacu-PR: UFSC e UAB, 2011.

DELGADO, Jorge, FRENSEL; Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria a prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação para uma sociedade em transição**. Campinas, SP: Papirus, 1999.

DOCA, Ricardo Helou; BISCUOLA, Gualter José; BÔAS, Newton Villas. **Tópicos de física**. Vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2007.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar** – vol. 2 – Logaritmos – 10° Ed., Atual, 2013.

FAZENDA, Ivani. **Práticas interdisciplinares na escola**. 2 Ed., São Paulo: Cortez, 2013.

FAZENDA, Ivani, **Didática e Interdisciplinaridade**, 17˚ Ed. São Paulo: Papirus, 2013.

HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar** – vol. 4 — 8˚ Ed., Atual, 2012.

JÚNIOR, Francisco Ramalho; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo António de Toledo. **Os fundamentos da física**. São Paulo: Moderna, 2007.

LIEURY, A.; FENOUILLET, F. (2000). **Motivação e aproveitamento escolar**. Tradução de Y. M. C. T. Silva. São Paulo: Loyola. (trabalho originalmente publicado em 1996).

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Eduardo Wagner, MORGADO, Augusto César. **A matemática no ensino médio** – vol. 4, 1˚ Ed., Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Eduardo Wagner, Augusto César. **A matemática no ensino médio** – vol. 1, 10˚ Ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages, **Logaritmos**. 5˚ Ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MESQUITA, DAVID. **Matriz de Leslie e Valores próprios dominantes**, Universidade do Porto, artigo científico, 2011.

Stewart, James. **Cálculo.** Vol. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, J. **Cálculo Volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

TAO, Terence, **Como resolver problemas matemáticos**: uma perspectiva pessoal, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANEXO A - PROJETO DE MINICURSO DE APROFUNDAMENTO: "BIOCALCULIA" : A MATEMÁTICA NA BIOLOGIA

"BIOCALCULIA": A matemática na Biologia

Justificativa

Notando a carência, a falta de domínio e a pouca assimilação dos conteúdos a respeito de Matrizes e funções exponenciais e logarítmicas, bem como a pouca relação cognitiva entre o conteúdo matemático apreendido no ensino médio com as aplicações que o mesmo possa ter. E tendo em vista a tamanha importância na decisão individual para sua vida futura que cada aluno deverá tomar ao termino do ensino médio percebi a importância de elaborar e desenvolver uma atividade que possibilite uma maior clareza na importância e na beleza da matemática, principalmente aliada a outros conteúdos. O projeto do minicurso também tem como justificativa: 2) Avaliar o grau de envolvimento e empolgação dos alunos com os mesmos conteúdos matemáticos aprendidos em um momento anterior observados agora de um prisma um pouco diferente. 3) Ser a secção prática do meu trabalho de conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática. 4) Avaliar a nível motivacional a dicotomia entre a metodologia dita tradicional (utilizando apenas exemplos numéricos) e a metodologia do minicurso (apresentar os conceitos a partir de exemplos)

Objetivos

1. **Objetivo Geral**

Apresentar os conceitos matemáticos necessários para se trabalhar Matrizes e funções (exponenciais e logarítmicas).

2. **Objetivos Específicos**

2.1. Relacionar meu trabalho de conclusão do curso de mestrado e o desenvolvimento da minha prática de ensino no colégio estadual Liceu Professor Domingos Brasileiro.

2.2. Avaliar do ponto de vista motivacional através de pequenos depoimentos a apreensão e o envolvimento dos alunos

2.3. Suprir parte das necessidades dos alunos do Colégio Estadual Professor Domingos Brasileiro do Município de Fortaleza com o entendimento de conteúdos que tantas vezes são tratados em forma de apêndices na matemática do ensino médio.

2.4. Fazer uma discursão entre a metodologia empregada do ponto de vista tradicional com a empregada no minicurso.

Metodologia de aplicação

1. **Dos alunos participantes.**

O minicurso de aprofundamento será realizado com um total de quinze alunos selecionados da seguinte forma: Serão convidados a participar todos os alunos dos segundos e terceiros anos do ensino médio, visto que estes já se depararam com os conteúdos a serem abordados. Dentre os interessados serão selecionados quinze alunos que tiverem melhor desempenho nas áreas de matemática e ciências das naturezas tendo este critério a justificativa de os alunos dominarem pelo menos a nível básico os conteúdos que irão ser estudados no curso.

2. **Dos procedimentos.**

Para o inicio do curso, os alunos selecionados passarão por uma avaliação prévia, sendo a mesma utilizada ao final do curso como parâmetro para aferir os resultados obtidos.

O minicurso terá um total de 6 encontros divididos da seguinte forma: 1) explicação do projeto e avaliação inicial; 2,3,4 e 5) aulas; 6) avaliação final e agradecimentos. As aulas serão de caráter expositivo, tendo elas uma duração média de uma hora e meia (90 minutos). Será entregue ao final da exposição de cada aula uma Lista de exercícios para fixação dos conteúdos abordados.

3. Cronograma

Semana 1	Avalição Prévia (Pré-teste)
	Aula 1
	Aula 2
Semana 2	Aula 3
	Aula 4 – resolução de exercícios
	Avalição Final (Pós teste)

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: **“Biocalculia” : A matemática na Biologia.**

Nome do Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo.**

Nome do Pesquisador assistente: **Amsranon Guilherme Felício Gomes da Silva.**

1. **Natureza da pesquisa:** Você está sendo convidado(a) a participar desta pesquisa que tem como finalidade observar a contribuição da matemática no desenvolvimento do ensino no ensino médio, aplicada a uma outra disciplina, conteúdo e ciência: a biologia. A pesquisa pretende analisar de que maneira os o envolvimento entre conceitos matemáticos e biológicos auxiliam no desenvolvimento e motivação do aprendizado dos conteúdos que são estudados no ensino médio.
2. **Participantes da pesquisa:** Participarão da pesquisa 12 (doze) alunos do ensino médio, sendo metade destes do terceiro ano e a outra metade do segundo ano, que deverão, após assistir aulas ministradas pelo pesquisador, serem avaliados por meio de questionários o aprendizado e a motivação a cerca dos conceitos matemáticos.
3. **Envolvimento na pesquisa:** Ao participar desta pesquisa, você permitirá que o pesquisador publique os resultados do(s) questionário(s) aplicado(s). Você tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando a qualquer momento da pesquisa, sem qualquer prejuízo. Sempre que quiser poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do e-mail do pesquisador: amsranon@hotmail.com.
4. **Sobre os questionários:** Os questionários constam com questão que indagarão sobre sua motivação a respeito da matemática bem como seus conhecimento sobre alguns assuntos ligados a ela.
5. **Riscos e desconforto:** A participação nesta pesquisa não traz complicações legais, sem nenhum risco ao participante. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme a resolução N° 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos utilizados oferece risco a sua dignidade.
6. **Confidencialidade:** Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e o orientador terão conhecimento e acesso aos dados.

7. **Benefícios:** Ao participar desta pesquisa você não terá nenhum beneficio direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga informações importantes sobre a contribuição da matemática para as aulas de matemática e a segundo plano de biologia , de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa auxiliar os professores de Matemática e Biologia a tornar suas aulas em sala de aula mais atrativas na escola pública estadual, onde o pesquisador se compromete a divulgar os resultados obtidos.
8. **Pagamento:** Você não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa.

Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa. Declaro que recebi cópia deste termo de consentimento e autorizo a realização da pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Nome do participante da pesquisa.

Assinatura do responsável pelo participante da pesquisa

APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

Se alguma pergunta possibilitar mais de uma alternativa, indicar a mais adequada.
Não deixar nenhuma resposta em branco.

01. Qual é o seu gênero?

(1) Masculino. (2) Feminino.

02. Qual será sua idade em 31 de dezembro de 2016?

(1) 15 (2) 16 (3) 17. (4) 18 (5) outro.

03. Que tipo de curso de ensino médio você concluiu ou concluirá?

(1) Ensino médio comum. (2) Ensino profissionalizante.
(3) Magistério. (4) Educação de jovens e adultos (EJA).
(5) Outro. Qual? ____

04. Onde você cursou o ensino médio?

(1) Todo em escola pública. (2) Todo em escola particular.
(3) Maior parte em escola pública. (4) Maior parte em escola particular.

05. Exerceu atividade remunerada durante o período letivo do ensino médio?

(1) Não. (2) Parcialmente. (3) Todo o ensino médio.

06. Você frequenta ou frequentou reforço?

(1) Não. (2) Sim, menos de um semestre. (3) Sim, um semestre.
(4) Sim, um ano. (5) Sim, mais de um ano.

07. Quantas vezes você já prestou ENEM?

(1) Nenhuma. (2) Uma. (3) Duas.

(4) Três. (5) Quatro ou mais.

08. Você já iniciou algum curso técnico?

(1) Não. (2) Sim, mas o abandonei.

(3) Sim, estou cursando. (4) Sim, e já o concluí.

09. Qual é o nível de instrução de seu pai?

(1) Analfabeto. (2) Ensino fundamental incompleto.

(3) Ensino fundamental completo. (4) Ensino médio completo.

(5) Superior incompleto. (6) Superior completo.

10. Qual é o nível de instrução de sua mãe?

(1) Analfabeto. (2) Ensino fundamental incompleto.

(3) Ensino fundamental completo. (4) Ensino médio completo.

(5) Superior incompleto. (6) Superior completo.

11. Qual é a profissão de seu pai ou responsável?

____

(Se ele for falecido, pule para a próxima questão)

12. Qual é a profissão de sua mãe ou responsável?

____

(Se ela for falecida, pule para a próxima questão)

13. Qual é a sua situação habitacional?

(1) Casa própria. (2) Casa alugada.

(3) Casa cedida. Se sim, por quem? _______________________

(4) Outra? ____

14. Há despesas permanentes com tratamento de saúde? _______
Quem está doente? ______________
Qual o problema de saúde?___________________
De quanto é aproximadamente a despesa mensal com o tratamento/medicamentos?
R$ _________________

15. Você exerce atividade remunerada?

(1) Não. (2) Sim, regularmente, em tempo parcial.

(3) Sim, regularmente, em tempo integral. (4) Sim, mas é trabalho eventual.

16. Qual é sua participação na vida econômica da família?

(1) Não trabalho e meus gastos são pagos pela família.

(2) Trabalho e recebo ajuda financeira da família.

(3) Trabalho e sou responsável apenas pelo meu sustento.

(4) Trabalho e sou o principal responsável pelo sustento da família.

19. Qual é sua profissão?

____

17. Qual é a renda total mensal de sua família? (Considere a soma de todos os salários dos membros de sua família. SM = Salário Mínimo Nacional.)

entre_____ e _____ SM

18. Você ou alguém da sua família recebe algum tipo de auxilio do governo ou do município? (exemplo: bolsa família, renda cidadã, distribuição de leite e/ou cesta básica e outros)

(1) Sim (2) Não

Se sim, quais? (descriminar todos os auxílios recebidos) __________________

19. Quantas pessoas vivem da renda familiar indicada na pergunta anterior?

(1) Uma. (2) Duas. (3) Três.

(4) Quatro. (5) Cinco. (6) Seis ou mais.

20. Pretende prestar o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) neste ano?

(1) Sim. (2) Não.

24.1 Se sim, qual a finalidade de prestar o ENEM 2016?

(1) Usar como nota de ingresso para universidades públicas.

(2) Usar como nota parcial, integral ou auxiliar nos vestibulares de universidades particulares.

(3) Usar para conclusão do ensino médio.

APÊNDICE D – PRÉ-TESTE (motivacional)

1) Dentre as finalidades da matemática listadas abaixo, qual tem sido mais frequente em sua vida escolar?
(   ) Definir regras e fórmulas
(   ) Ingressar no nível superior
(   ) Desenvolver a capacidade de raciocínio
(   ) Tornar-se um cidadão consciente e crítico

2) Qual sua principal intenção quando você pensa em estudar/aprender matemática?
(   ) Aprender as operações
(   ) Resolver/ solucionar equações e “contas” mais elaboradas
(   ) Resolver/solucionar questões de raciocínio lógico
(   ) Se tornar mais critico e consciente na sociedade

3) Sobre o sentido do estudo da matemática pra você.
(   ) Não vejo muito sentido estudar matemática
(   ) Principalmente passar de ano
(   ) Principalmente para entrar no nível superior
(   ) Principalmente pra eu entender o mundo em que eu vivo

4) Na sua concepção qual a relação entre a matemática e as outras ciências estudadas no ensino médio (química, física, biologia)?
(   ) sem relação
(   ) pouca relação
(   ) tem suas relações mas podem ser independentes
(   ) São extremamente relacionadas. Não se pode separar.

5) Na sua concepção qual a relação entre a matemática e a biologia?
(   ) sem relação (   ) pouca relação
(   ) tem suas relações mas podem ser independentes
(   ) São extremamente relacionadas. Não se pode separar.

6) O que mais te motiva a estudar matemática

( ) A disciplina em si

( ) O(a) Professor(a)

( ) O uso

( ) Não tenho motivação

7) Sobre a relação que o professor faz da matemática com suas aplicações:

( ) Ele nunca relaciona

( ) Em alguns conteúdos ele mostra uma aplicação

( ) Ele mostra um ou dois exemplos para cada conteúdo

( ) Ele sempre mostra exemplos de cada conteúdo e fala das principais utilidades

8) Você gosta quando pode observar a aplicação da matemática com outra coisa?

( ) Não. ( ) Um pouco ( ) Tanto faz. ( ) gosto muito

9) Você gosta de matemática?

( ) Não

( ) Um pouco

( ) Gosto

( ) Gosto bastante

10) O que agora você acha quando pensa a respeito da relação entre a matemática e a biologia:

____

____

____

____

APÊNDICE E – PÓS-TESTE (motivacional)

1) Em ordem de prioridade, onde 1 é o item mais importante e 4 o de menor importância entre os itens abaixo citados. Dentre as finalidades da matemática listadas a que você quer que se torne mais frequente em sua vida escolar é:
(   ) Definir regras e fórmulas
(   ) Ingressar no nível superior
(   ) Desenvolver a capacidade de raciocínio
(   ) Tornar-se um cidadão consciente e crítico

2) Em ordem de prioridade, onde 1 é o item mais importante e 4 o de menor importância entre os itens abaixo citados. Dentre as finalidades da matemática listadas a mais frequente em sua vida escolar é:
(   ) Definir regras e fórmulas
(   ) Ingressar no nível superior
(   ) Desenvolver a capacidade de raciocínio
(   ) Tornar-se um cidadão consciente e crítico

3) Em ordem de prioridade, onde 1 é o item mais importante e 4 o de menor importância entre os itens abaixo citados. A sua principal intenção quando você pensa em estudar/aprender matemática é:
(   ) Aprender as operações
(   ) Resolver/ solucionar equações e “contas” mais elaboradas
(   ) Resolver/solucionar questões de raciocínio lógico
(   ) Se tornar mais critico e consciente na sociedade

4) Em ordem de prioridade, onde 1 é o item mais importante e 4 o de menor importância entre os itens abaixo citados. O principal sentido do estudo da matemática pra você é.
(   ) Não vejo muito sentido estudar matemática
(   ) Principalmente passar de ano
(   ) Principalmente para entrar no nível superior
(   ) Principalmente pra eu entender o mundo em que eu vivo

5) Na sua concepção qual a relação entre a matemática e as outras ciências estudadas no ensino médio (química, física, biologia)?

( ) sem relação

( ) pouca relação

( ) tem suas relações mas podem ser independentes

( ) São extremamente relacionadas. Não se pode separar.

6) Na sua concepção qual a relação entre a matemática e a biologia?

( ) sem relação ( ) pouca relação

( ) tem suas relações mas podem ser independentes

( ) São extremamente relacionadas. Não se pode separar.

7) O que mais te motiva a estudar matemática

( ) A disciplina em si

( ) O(a) Professor(a)

( ) O uso

( ) Não tenho motivação

8) Sobre a relação que o professor faz da matemática com suas aplicações:

( ) Ele nunca relaciona

( ) Em alguns conteúdos ele mostra uma aplicação

( ) Ele mostra um ou dois exemplos para cada conteúdo

( ) Ele sempre mostra exemplos de cada conteúdo e fala das principais utilidades

9) Você gosta quando pode observar a aplicação da matemática com outra coisa?

( ) Não. ( ) Um pouco ( ) Tanto faz. ( ) gosto muito

10) Você gosta de matemática?

( ) Não

( ) Um pouco

( ) Gosto

( ) Gosto bastante

11) O que agora você acha quando pensa a respeito da relação entre a matemática e a biologia:

____

____

____

____

APÊNDICE F – PRÉ-TESTE (Conteúdo)

1) Imagine que cada letra equivale a uma cidade e os caminhos entre elas, monte uma tabela dos caminhos tal que:

a) de A para B tem 2 caminhos; A para C tem 1 caminho; D para B tem 1 caminho e D para C não tem caminho.

b) de A para B tem 3 caminhos; A para C tem 1 caminho; de A para E tem 1 caminho; D para B não tem caminho e D para C tem 5 caminhos e de D para E tem 4 caminhos.

2) Dada as matrizes $X=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ Calcule:

a) XY

b) WY

c) XW

d) YX

3) Dada a matriz $L=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ e a matriz $X_0=\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, Calcule X_1 tal que $X_1=L.X_0$

4) Dada a matriz $L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$, e $X_0=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, Calcule X_2 tal que: $X_2=L.X_1$ e $X_1=L.X_0$

5) Se $f(x)=4^x$ calcule:

a) $f(4)$

b) $f(1/2)$

c) x para que $f(x)=1$

d) x para que $f(x)=256$

6) Calcule:

a) $\log_{2}^{8}$ b) $\log_{25}^{125}$ c) $\log_{27}^{3}$ d) $\log_{10}^{1}$

7) Dado $\log_{10}^{2}=0,3$ e $\log_{10}^{3}=0,48$, qual o valor de $\log_{100}^{36}$?

8) Dado que $y=x\left(-1+2^{3t}\right)$, se $y=63x$ então qual o valor de t ?

9) $y=-\log_{10}^{[x]}$. Quantas vezes o valor de x diminui quando o aumenta de 1 para 3?

10) Se $h(i)=\log_{10}^{\left(10^{2}\times\sqrt{i}\right)}$, qual o valor de h(100) – h(1) ?

APÊNDICE G – PÓS-TESTE (Conteúdo)

1) Uma espécie de besouro alemão, o vollmar-wasserman (ou besouro VW, para abreviar), vive no máximo três anos. Dividimos as fêmeas em três faixas etárias de um ano cada: jovens (zero a um ano), adolescentes (um a dois anos) e adultos (dois a três anos). Os jovens não põe ovos; cada adolescente produz uma média de quatro fêmeas; e cada adulto produz uma media de três fêmeas. A taxa de sobrevivência para os jovens é de 50% (isto é, a probabilidade de um jovem vir a se tornar adolescente é de 0,5), e a taxa de sobrevivência dos adolescentes é de 25%. Suponha que começamos a população com 100 fêmeas de VWs: 40 jovens, 40 adolescentes e 20 adultos. Qual será a previsão da população para daqui a 5 anos? Qual será o comportamento da população a cada um dos 5 anos?

2) Uma população com quatro faixas etárias tem a matriz de Leslie

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} \text{, se } \quad x^{(0)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} ,$$

O que é e quanto vale $x^{(1)}, x^{(2)} e\, x^{(3)}$? O que significa o elemento l_{32} da matriz?

3) Em uma experiência de laboratório, verifica-se que uma população de um certo micro-organismo cresce segundo a relação:

$N(t)=x_0(-1+2^{0,1t})$, onde $N(t)$ é o numero de micro organismos t meses após o início da experiência e x_0 é o número de micro-organismos no início da experiência. Quantos anos devem se passar para que se tenha uma população 63 vezes a população inicial de micro-organismos?

4) O pH do suco gástrico presente no estômago humano varia no intervalo de 1 a 3. O valor do pH está relacionado com a concentração de íons de hidrogênio através da equação

$pH=-\log_{10}[H^{+}]$ Quantas vezes a concentração de íons hidrogênio diminui quando o pH aumenta de 1 para 3?

5) Um médico após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 10 anos, obteve a fórmula:

$h(i)=\log_{10}^{(10^{0,7}\times\sqrt{i})}$, onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela formula obtida pelo médico, qual a variação em centímetros das alturas das crianças?

6) O nível de álcool presente no sangue de uma pessoa que ingeriu uma certa quantidade de bebida alcoólica decresce de acordo com a relação:

$N(t)=t_0\times2^{-t}$ sendo t o tempo decorrido em horas a partir do momento t_0 , onde o nível foi constatado. Sabendo-se que o CTB (Código de Transito Brasileiro) estabelece 0,6 gramas por litro como limite máximo de álcool no sangue, para quem dirige, e considerando-se $\log_{10}^{2}=0{,}3$, quanto tempo, no mínimo, essa pessoa deve aguardar, antes de dirigir?

7) (UNEMAT-2009) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção da espécie animal é inevitável. A população de uma determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo uma função exponencial do tipo $f(t)=k.a^t$, na qual k e a são números reais e $f(t)$ indica o numero de indivíduos dessa espécie no instante t (em anos). Atualmente (instante t=0) existem 1500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram irreversível para a extinção?

n	2	3	5	10
log n	0,30	0,47	0,70	1

8) Sob condições ideais, sabe-se que certa população de bactérias dobra a cada três horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias: Qual a população após t horas? É possível estimar o tempo para a população atingir 50.000 bactérias?

9) Uma das técnicas para datar a idade das árvores de grande porte da floresta amazônica é medir a quantidade do isótopo radioativo C^{14} presente no centro dos troncos. Ao retirar uma amostra de uma castanheira, verificou-se que a quantidade de C^{14} presente era de 84% da quantidade existente na atmosfera. Sabendo-se que o C^{14} tem decaimento exponencial e sua vida média é de 5730 anos e considerando os valores de $\ln 0{,}5=-0{,}69$ e $\ln 0{,}84=-0{,}17$, qual a idade aproximada da castanheira que podemos afirmar?

10) Um produtor do interior do estado do Pará decidiu investir no plantio de uma nova variedade de banana, a BRS Conquista, em função das vantagens apresentadas, como por exemplo: a resistência as doenças como o Mal do Panamá, Sigatoka Amarela e Negra. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou uma certa quantidade de bananas. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes maior que a quantidade inicial? $(\log 2 = 0{,}3)$

APÊNDICE H – LISTA DE FREQUÊNCIA

Declarou que estive presente ao minicurso "Biocalculia" no dia ______/______/____

Nome	**turma**

APÊNDICE I – DADOS DO QUESTIONARIO SOCIOECONOMICO

Tabela : Sexo

Sexo	Porcentagem
Masculino	60%
Feminino	40%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Idade

Idade	Porcentagem
16 anos	30%
17 anos	60%
18 anos	10%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Todos alunos cursaram ensino médio comum

Todos alunos cursaram o ensino médio todo em escola pública

20% dos alunos possuem uma atividade remunerada durante o ensino médio

Nenhum aluno frequentou reforço

20% dos alunos prestaram ENEM alguma vez

20% dos alunos começaram um curso técnico

Tabela : Escolaridade do Pai

Nível de escolaridade	Porcentagem
Ensino fundamental Incompleto	70%
Ensino médio completo	30%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Escolaridade da Mãe

Nível de escolaridade	Porcentagem
Fundamental incompleto	30%
Fundamental completo	40%
Médio Completo	30%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Profissão do Pai

Profissão do Pai	Porcentagem

Trabalhador autônomo	70%
Carteira assinada	20%
Falecido	10%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Profissão da Mãe

Profissão	Porcentagem
Trabalhador autônomo	20%
“Donas de casa”	70%
Carteira assinada	10%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Situação Habitacional

Tipo de habitação	Porcentagem
Casa própria	90%
Casa alugada	10%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Atividade realizada pelo aluno

Atividade remunerada	Porcentagem
Não	70%
Sim, regularmente	20%
Sim, eventualmente	10%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Renda Salarial por família

Quantidade de salários mínimo	Porcentagem
0 - 1	20%
1 - 2	60%
3 - 4	20%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Tabela : Auxilio governamental

A família recebe auxilio	Porcentagem
Sim	70%
Não	30%

Fonte: Dados levantados na pesquisa

Uma media de 3,5 pessoas por família

Todos pretendem prestar o ENEM

90% pretendem usar o ENEM para entrar em faculdades publicas, apenas 10% para ingressar na faculdade particular

APÊNDICE J – Exercícios propostos e algumas resoluções de exemplos

Capítulo 2: MATRIZES

Exemplo 1 (montagem da matriz e utilização do modelo)

Uma espécie de besouro alemão, o vollmar-wasserman (ou besouro VW, para abreviar), vive no máximo três anos. Dividimos as fêmeas em três faixas etárias de um ano cada: jovens (zero a um ano), adolescentes (um a dois anos) e adultos (dois a três anos). Os jovens não põe ovos; cada adolescente produz uma média de quatro fêmeas; e cada adulto produz uma media de três fêmeas. A taxa de sobrevivência para os jovens é de 50% (isto é, a probabilidade de um jovem vir a se tornar adolescente é de 0,5), e a taxa de sobrevivência dos adolescentes é de 25%. Suponha que começamos a população com 100 fêmeas de VWs: 40 jovens, 40 adolescentes e 20 adultos. Qual será a previsão da população para daqui a 3 anos?

Exemplo 2 (Interpretação e utilização do modelo)

Uma população com três faixas etárias tem matriz de Leslie $L=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ se o

vetor da população inicial é $x^{(0)}=\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, O que é e quanto vale $x^{(1)}, x^{(2)} e\, x^{(3)}$?

Solução:

De acordo com a base do modelo, sabemos que $x^{(1)}, x^{(2)} e\, x^{(3)}$ são as três primeiras previsões para a população inicial dada pelo vetor X_0 , calculadas da seguinte maneira:

$$x^{(1)}=L\,x^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 500 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)}=L\,x^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\ 70\\ 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\ 350\\ 35\end{pmatrix}$$

$$x^{(3)}=L\,x^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}720\\ 350\\ 35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1175\\ 504\\ 175\end{pmatrix}$$

Podemos entender que segundo esse modelo, a previsão para a terceira geração a partir da inicial será de 1175 fêmeas no primeiro período, 504 fêmeas no segundo período e 175 fêmeas no terceiro e último período.

Exemplo 3 (utilização do modelo)

Uma população com quatro faixas etárias tem a matriz de Leslie

$$L=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 5\\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0\end{pmatrix}\text{ , se }\quad x^{(0)}=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 10\\ 10\end{pmatrix}\ ,$$

qual a situação da população após 3 períodos?

Solução:

Percebe-se que neste caso não se faz necessário estudarmos todos os períodos intermediários, assim temos:

$$x^{(3)}=L^3\,x^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 5\\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 10\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}57{,}5\\ 17\\ 28\\ 1{,}05\end{pmatrix}$$

Exemplo 4 (comparação de hipóteses)

Uma espécie com 2 faixas etárias de um ano de duração cada tem uma probabilidade de sobrevivência de 80% da faixa 1 para a 2. Evidencias empíricas mostram que, na média, cada fêmea dá a luz a 5 outras fêmeas por ano. Desta maneira duas formas possíveis para a matriz de Leslie são:

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0{,}8 & 0\end{pmatrix} e\, L_2=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0{,}8 & 0\end{pmatrix}$$

Se o vetor inicial é $x^{(0)}=\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}$ qual seria a analise dos dois gráficos relativos a cada distribuição nos primeiros 5 períodos?

Solução:

Para

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0{,}8 & 0\end{pmatrix} .$$

temos: $x^{(1)}=\begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix}; x^{(2)}=\begin{pmatrix}40\\ 40\end{pmatrix}; x^{(3)}=\begin{pmatrix}200\\ 32\end{pmatrix}; x^{(4)}=\begin{pmatrix}160\\ 160\end{pmatrix}; x^{(5)}=\begin{pmatrix}800\\ 128\end{pmatrix}$

Para

$$L_2=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0{,}8 & 0\end{pmatrix} .$$

temos: $x^{(1)}=\begin{pmatrix}50\\ 8\end{pmatrix}; x^{(2)}=\begin{pmatrix}208\\ 40\end{pmatrix}; x^{(3)}=\begin{pmatrix}872\\ 166{,}4\end{pmatrix}; x^{(4)}=\begin{pmatrix}3654{,}4\\ 697{,}6\end{pmatrix}; x^{(5)}=\begin{pmatrix}15315{,}2\\ 2923{,}52\end{pmatrix}$

Percebemos que apesar da matriz de Leslie, destoar apenas na disposição dos elementos gerado pela fêmea, o crescimento da segundo população é exponencialmente maior que o crescimento da primeira, por conta das duas entradas positivas e possuir um autovetor dominante como já visto anteriormente.

Exemplo 5 (reprodução líquida)

A taxa de reprodução líquida de uma população é definida por:

$$r=a_1+a_2 b_1+a_3 b_1 b_2+\ldots+a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

Onde os a_i são as taxas de nascimentos e os b_i são as taxas de sobreviventes para a população.

a) Explique porque *r* pode ser interpretado como o número médio de filhas nascidas de uma única fêmea ao longo de sua vida.

b) Mostre que $r=1$ se, e somente se, $\lambda=1$ (isso representa o crescimento populacional zero)

Solução:
Segue da demonstração da função $q(\lambda)$ definida no capitulo.

Exemplo 7 ***(Significado do único autovalor positivo)***

Dado o exemplo anterior e assumindo que exista um único autovalor positivo λ, mostre que $r<1$ se, e somente se, a população estiver decrescendo, e $r>1$ se, e somente se, a população estiver crescendo.

Exemplo 6 ***(Colheita sustentável)***

Uma política de colheita, ou ceifagem sustentável é um procedimento que permite que seja segregada uma determinada fração da população (representada pelo vetor de distribuição $x^{(k)}$) de modo que, passado um determinado período de tempo, a população volte ao contingente do momento da colheita ($x^{(k)}$), sendo este período de tempo, a extensão de uma faixa etária da população, Se h é a fração de cada faixa etária que foi retirada, então, matematicamente podemos expressar o mecanismo da colheita do seguinte modo: iniciando com o vetor populacional $x^{(k)}$, após um período teremos $Lx^{(k)}$; a colheita segregará $hLx^{(k)}$ da população, nos dando:

$$Lx^{(k)}-hLx^{(k)}=(1-h)Lx^{(k)}$$

Pela condição imposta para a colheita sustentável temos que:

$$(1-h)Lx^{(k)}=x^{(k)}$$

(Nota: ambientalistas tiveram que fazer uma colheita na população de leões-marinhos quando a pesca predatória reduziu o alimento disponível a um ponto no qual a população estava em risco de inanição)

a) Se λ é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e h é a razão aplicada na colheita sustentável, prove que

$$h=1-1/\lambda$$

b) Determine a colheita sustentável para a população com matriz $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

Capítulo 3: LIMITES

Exemplo 1: RETA NUMÉRICA

O primeiro exemplo de aproximação da biologia com a matemática vem de uma padronização simples porém necessária: A organização de elementos por ordem numérica de quantidade.

O valor de pH é um numero usado para medir a concentração de íons de hidrogênio em uma solução. Ácidos fortes produzem valores pequenos de pH, e bases fortes possuem valores elevados. Como poderíamos representar por ordem de importância, ou pela necessidade de fazer uso de uma determinada substância com caráter mais básico ou ácido supondo que fazemos uso das seguintes substâncias seguidas de seus respectivos pH's: ácido clorídrico: 0,0; suco de limão: 2,0; Limpador de forno: 13,0; bicarbonato de sódio: 9,0; água destilada: 7,0; café: 5,0. (*Fonte: Adaptado de Levine/Miller*, Biology: Discovering Life, *Second Edition*.)

Solução:

Para resolver esse tipo de situação, fazemos uso de um dos mais antigos instrumentos matemáticos: A reta numérica.

Figura 2: Tabela de classificação de acidez.

$\longleftarrow \textit{Mais Ácido} \, \textit{mais Básico} \longrightarrow$

Ac. Clorídrico	Suco de limão	Café	Água destilada	Bicarbonato de sódio	Limpador de forno
0,0	2,0	5,0	7,0	9,0	13,0

Fonte: Próprio autor.

Exemplo 2: INTERVALO

O American Kennel Club formulou uma série de regras para julgar as características de diversas raças de cães. No caso dos *collies*, as regras estabelecem que o peso dos machos deve satisfazer a desigualdade

$$\left|\frac{w-57{,}5}{7{,}5}\right|\leq 1$$

onde *w* é o peso médio em libras. Qual o intervalo de pesos dos animais avaliados?

Solução:

De fato, temos que:

$$\left|\frac{w-57{,}5}{7{,}5}\right|\leq 1 \Rightarrow -1\leq \frac{w-57{,}5}{7{,}5}\leq 1$$

$$\Rightarrow -7{,}5\leq w-57{,}5\leq 7{,}5$$

$$\Rightarrow 50\leq w\leq 65$$

Portanto, os pesos dos cães em pauta estão no intervalo $[50{,}65]$

Exemplo 3: INTERVALO

A utilização do entendimentos sobre máximos e mínimos tem como uma das principais utilidades sabermos o campo de atuação de um determinado estudo ou objeto a ser pesquisado, para tratarmos disso, vamos utilizar como um exemplo os batimentos cardíacos humanos.

Imagine que o valor máximo recomendável dos batimentos cardíacos de uma pessoa em boa saúde está relacionado a idade dessa pessoa através da equação:

$$r=220-A$$

Onde *r* é o valor máximo dos batimentos cardíacos por minuto e A é a idade da pessoa em anos. Alguns médicos recomendam que durante os exercícios físicos as pessoas devem aumentar os batimentos cardíacos ate pelo menos 60% do máximo, no caso de pessoas de vida sedentária, e até 90% do máximo, no caso de atletas em excelente forma física. Como determinar por exemplo o intervalo da quantidade de batimentos máximos de uma pessoa qualquer com 20 anos?

Solução:

Temos que:

$r=220-20=200$

Em caso da pessoa sedentária temos:

$máx=160\ de\, 200=320\, batimentos$

Em caso da pessoa atlética temos:

$máx=190\ de\, 200=380\, batimentos$

Exemplo 4 (função polinomial do 1° grau)

Na superfície do oceano , a pressão da água é igual a do ar acima da água, 1,05 kg/ cm^2 . Abaixo da superfície , a pressão da água cresce 0,10kg/ cm^2 para cada metro abaixo da superfície. Como expressar a pressão da água como função da profundidade abaixo da superfície do oceano? Qual a profundidade, por exemplo a 7 kg/ cm^2 ?

Solução:

É fácil ver que a função que expressa a pressão da água em termos da profundidade abaixo da superfície do oceano é da forma $P(x)=0,1x+1,05$, onde *x* representa a profundidade em metros e *P* é a pressão da água dada em kg/ cm^2 . No caso da pressão da água ser 7kg/ cm^2 , podemos determinar a profundidade com uma simples substituição na função $P(x)$. Nesse sentido, temos:

$0,1x+1,05=7$

$\Rightarrow 0,1\,x=5,95$

$\Rightarrow x=\frac{5,95}{0,1}=59,5$

Logo, a profundidade para se ter uma pressão de 7kg/ cm^2 é de 59,5m.

Exemplo 5 (função polinomial do 1° grau)

Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a $20℃$ e 180 vezes por minuto a $29℃$.
Qual seria a equação linear notada pelos biólogos que modela a temperatura T como uma função do numero de cricrilos por minuto? Qual e o que representa a inclinação do gráfico? Se os grilos estão cricrilando 150 vezes por minuto, qual a estimativa para a temperatura?

Solução:

Tomando t(c) como a temperatura na quantidade de cricrilos c, e a e b como constantes temos:

$$t(c)=ac+b\Rightarrow\begin{cases}20=112a+b\\29=180a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=9/68\\b=352/68\end{matrix}\Rightarrow t(c)=\frac{9c+352}{68}$$

Para 150 cricrilos teremos que:

$$t(150)=\frac{9\times150+352}{68}\cong 25^{\circ}C$$

Exemplo 6 (função quadrática)

Um modelo matemático para o numero de transplantes de rim realizados nos EUA entre 1993 e 1997 é $y=-49{,}5t^2+828{,}3t+8950$, onde y é o numero de transplantes, e t é o número de anos, com $t=0$ correspondendo1990. (fonte: United Netwoeek for Organ Sharing)
Quantos transplantes de rim foram realizados nos EUA em 1990? E em 1997? De acordo com o modelo, que numero de transplantes e previsto para o ano de 2012? Você acha essa previsão razoável? Que fatores afetariam a precisão do modelo?

Exemplo 7 (Limite)

O custo (em reais) para remover p% dos poluentes da água de um lado é dado por

$$C=\frac{25.000\,p}{100-p},0\le p\le100$$

Onde C é o custo, e *p* é a porcentagem de poluentes removidos.

Qual o custo para remover 50% dos poluentes? Qual a porcentagem de poluentes que pode ser removida por R$ 100.000,00? O que acontece com o Custo quando a porcentagem se aproxima cada vez mais de 100?

Solução:

Para encontrar o custo para remover 50% dos poluentes basta fazer,

$$C = \frac{25000.50}{100-50} = 25000{,}00$$

Isto é, o custo é de R$ 25000. Agora, no caso de sabermos que o custo foi de R$ 100.000,00, podemos encontrar a porcentagem de poluentes que foi removida da seguinte forma:

$$\frac{25.000\,p}{100-p} = 100000$$

$$\Rightarrow 25.000\,p = 100.000\,(100-p)$$

$$\Rightarrow 125.000\,p = 10.000.000$$

$$\Rightarrow p = \frac{10.000.000}{125.000} = 80$$

Assim, a porcentagem removida foi de 80%.

Enfim, fazendo $f(p) = 25.000\,p$ e $g(p) = 100 - p$, temos que $\lim_{p \to 100} f(p)$ é uma constante positiva e $\lim_{p \to 100} g(p) = 0$. Assim, pelo *Teorema de Limite 12* de Leithold (1994) temos que:

$$\lim_{p \to 100^{+¿}} \frac{25.000\,p}{100-p} = +\infty$$

Portanto, o custo torna-se tão grande quanto se queira, bastando para isso aproximar a porcentagem a 100%.

Exemplo 8 (Limite)

A temperatura de um paciente depois de receber um antitérmico é dada por

$$T = 36{,}8 + \frac{3}{t+1}$$

Onde *T* é a temperatura em graus Celsius e t é o tempo em horas.

Para quais valores de horas a função é válida? Qual a temperatura de um paciente no instante em que recebeu o antitérmico? Qual é a interpretação biológica para T a medida em que t se torna muito grande?

Solução:

Exemplo 9 (continuidade)

O tempo de Gestação dos coelhos é de apenas 26 a 30 dias. Por esse motivo, a população de um ninho de coelhos pode aumentar rapidamente. A tabela mostra a população N de um ninho de coelhos em função do tempo t (em meses).

t	0	1	2	3	4	5	6
N	2	8	10	14	10	15	12

Em uma analise gráfica, o que seria discutir a continuidade dessa função?

Capítulo 4: DERIVADAS

PROBLEMA 1 (crescimento do tumor). Uma determinada doutora. diz ao seu paciente que tem um tumor no corpo e suponha que seja de forma esférica. Deseja-se saber se quando o raio do teu tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?

Solução:

No tempo t o tumor tem raio $r=0{,}5\,cm$, $\frac{dr}{dt}=0{,}001\,cm$ e volume $V=\frac{4}{3}.\pi.r^3$, então:

$$\frac{dV}{dt}=4.\pi.r^2.\frac{dr}{dt}$$

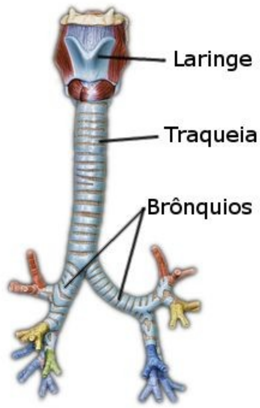
$$\frac{dV}{dt}=4.\pi.(0{,}5)^2.0{,}001$$

$$\frac{dV}{dt}=4.\pi.0{,}25.0{,}001$$

$$\frac{dV}{dt}=0{,}001\pi\, cm^3/dia$$

PROBLEMA 2 (velocidade). Durante a tosse há um decréscimo no raio da traqueia de uma pessoa . Suponha que o raio da traqueia seja R cm e que durante a tosse o raio seja r cm, onde R é uma constante e r uma variável. Pode-se mostra que a velocidade do ar através da traqueia é uma função de r e se *V(r)* cm/s for essa velocidade, então $V(r)=kr^2(R-r)$ onde *k* é uma constante positiva e r está em $\left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Determine o raio da traqueia durante a tosse, para a velocidade do ar através da traqueia seja máxima.

Figura 5: Traqueia humana



Fonte: infoescola.com/anatomia-humana/traqueia (2016)

Solução:

Desenvolvendo a expressão $V(r)=kRr^2-kr^3$, derivando-a e igualando a zero tem-se:

$$V'(r)=2kRr-3kr^2$$

$$V'(r)=0 \Leftrightarrow 2kRr-3kr^2=0 \Leftrightarrow kr(2R-3r)=0$$

$$kr=0\; ou\; 2R-3r=0$$

$$r=0\; ou\; r=\frac{2R}{3}$$

Concluindo que a solução do problema acima é $r=\frac{2R}{3}$, pois $V\left(\frac{2R}{3}\right)=\frac{4kR^3}{27}$ que é a maior velocidade. Estando a traqueia cerca de 33% contraída.

PROBLEMA 3 (população). Centenas de animais pertencendo a uma espécie colocada em perigo estão colocados em uma reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva e dada por $p=100.\frac{t^2+5t+25}{t^2+25}$. Após quantos anos a população será máxima?

Solução:

Fazendo o teste da primeira derivada temos:

$$p'=100.\frac{(2t+5)(t^2+25)-(t^2+5t+25).2t}{(t^2+25)^2}$$

$$p'=100.\frac{-5t^2+125}{(t^2+25)^2}$$

$$p'=500.\frac{25-t^2}{(t^2+25)^2}$$

$$p'=0 \Leftrightarrow 500.\frac{25-t^2}{(t^2+25)^2}=0$$

$$25-t^2=0$$
$$t=5\,anos$$

Assim, em cinco anos a população desta espécime será máxima.

PROBLEMA 4 (crescimento populacional). Certo lago pode suportar uma população máxima de 20.000 peixes. Se ha poucos peixes no lago, a taxa de crescimento populacional será proporcional ao produto da população existente pela diferença entre a população existente a partir de 20.000. Para que população a taxa de crescimento será máxima ?

[NOTA: indique por f(x) a taxa de crescimento para uma população de dimensão x, então $f(x)=kx(20.000-x)$.

Solução:

Derivando-se a expressão temos:

$$f(x)=kx(20.000-x)$$

$$f'(x)=20.000k-2kx$$

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 20.000k-2kx=0 \Longleftrightarrow 20.000k=2kx$$
$$x=10.000\, peixes$$

PROBLEMA 5 (pressão sanguínea). Suponha que a diminuição da pressão sanguínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda da pressão sanguínea será uma função de x. Seja f(x) esta função e $f(x)=\frac{1}{2}x^2(k-x)$ onde x está em [0, k] e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sanguínea.

Solução:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(k-x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}k\,x^2-\frac{1}{2}x^3$$

$$f'(x)=kx-\frac{3}{2}x^2$$

fazendo $f'(x)=0$ temos:

$$kx-\frac{3}{2}x^2=0$$

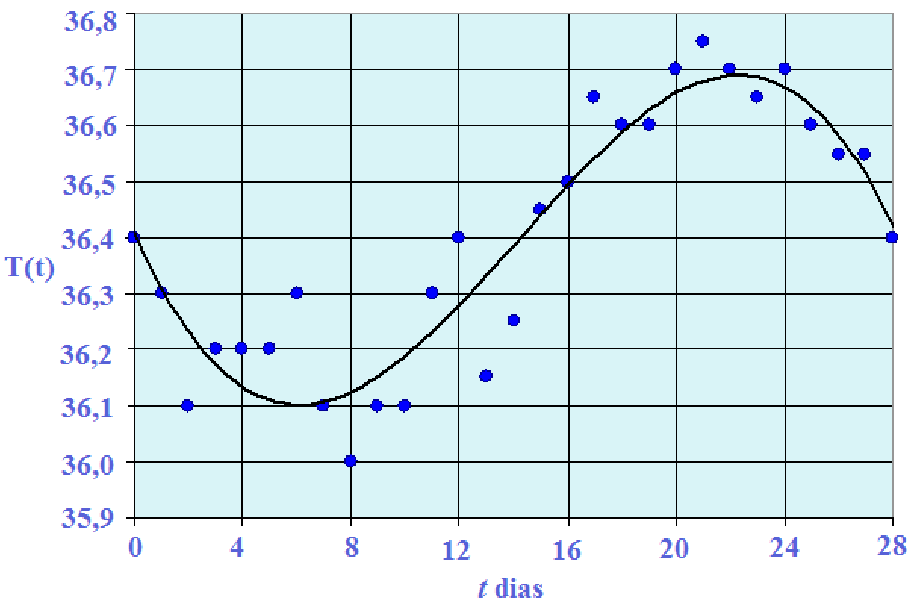
$$x(k-\frac{3}{2}x)=0$$

$$x=0\, ou\, x=\frac{2}{3}k$$

Concluindo assim que para ter o maior decréscimo de pressão $x=\frac{2}{3}k$.

PROBLEMA 6 (Período fértil da mulher). Estudos sobre os melhores (ou piores) períodos para se engravidar já movimentam a humanidade a muito tempo, uma das contribuições na biologia pela matemática esta ai, mais especificamente o uso da derivada. Podemos encontrar os períodos mais férteis de uma mulher, fazendo uma análise da flutuação da temperatura corporal no decorrer do seu ciclo menstrual. As mulheres são bastante influenciadas pelas atuações dos hormônios, especialmente se analisarmos seu ciclo ovulatório. Determinadas mulheres, inspecionam a variação da temperatura corporal basal para saber o período de um pico de fertilidade, com o intuito de maximizar (ou minimizar) a probabilidade de uma possível gravidez, no entanto, este tipo de conduta não é aconselhável. O pico de fertilidade esta associado ao maior aumento da temperatura basal .

Figura 6: tabela temperatura no ciclo menstrual



Fonte: Próprio Autor.

A figura acima representa o gráfico da temperatura basal aferida no mesmo horário de cada dia, durante o período de um ciclo de 28 dias de uma mulher. O polinômio que ajusta melhor ao gráfico obtido através da interpolação de Lagrange fazendo uso dos pontos fornecidos é dada por:

$$T(t) = -0{,}0002762t^3 + 0{,}01175t^2 - 0{,}1121t + 36{,}41$$

Onde $T(t)$ representa a temperatura em graus Celsius e t o tempo, em dias.

Partindo do estudo da curva acima relacionada, podemos descobrir a máxima e a mínima temperatura, e daí, determinar o pico de fertilidade. A temperatura mais alta e mais baixa ocorrem onde o coeficiente angular da reta tangente é 0, isto é, a derivada é nula. Restando-nos derivar $T(t)$, encontrando:

$$T'(t)=\frac{d}{dt}(-0{,}0002762t^3+0{,}01175t^2-0{,}1121t+36{,}41) \quad ,$$

$$T'(t)=-0{,}0002762\frac{d}{dt}(t^3)+0{,}01175\frac{d}{dt}(t^2)-0{,}1121\frac{d}{dt}(t)+\frac{d}{dt}(36{,}41)$$

$$T'(t)=-0{,}0002762(3t^2)+0{,}01175(2t)-0{,}1121$$

$$T'(t)=-0{,}0008286t^2+0{,}02350t-0{,}1121$$

Logo, basta-nos determinar as raízes de $T'(t)=-0{,}0008286t^2+0{,}02350t-0{,}1121$, quando $T'(t)=0$ para encontrar os valores onde ocorrerão o máximo e o mínimo, encontrando $t_1=6{,}069$ dias e $t_2=22{,}29$ dias.

Avaliando as imagens de $t_1 e t_2$ no polinômio $T(t)$ observamos que a a menor temperatura ocorre em:

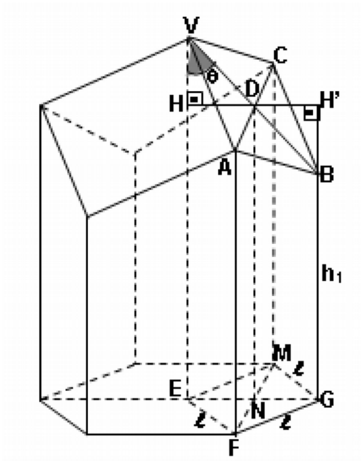
$T_1(6{,}069)=36{,}1°$

e a máxima temperatura em:

$T_2(22{,}29)=36{,}7°$

PROBLEMA 7 (Área do alvéolo da abelha). Utilizando Estudos (ALANO, 2013) sabemos que um alvéolo de abelha tem o formato de um poliedro de base hexagonal, com faces laterais na forma de trapézios retângulos, ortogonais a base e culminando por um ápice triédrico.

Figura 7: Vista geométrica do alvéolo da abelha



Fonte: ALANO, 2013

Analises mostram que a área de cada alvéolo aberto de abelha é dada por

$$A=6l\,h_2+\frac{3l^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)$$

Onde, AF é h_2 ; EG é l e θ é o angulo em v formado por EV e VB

Tomando l e h_2 como valores dados, então esta área se encontra em função de θ , e terá menor valor quando $T(\theta)$ for mínimo para um θ variando entre 0 e $90°$ $(0<\theta<90°)$ onde $T(\theta)$ é dada por:

$$T(\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-\frac{cos\theta}{sen\theta}=\frac{\sqrt{3}-cos\theta}{sen\theta}>0,$$

Pois no intervalo citado , $sen\theta>0\,e\,0<cos\theta<1$, ou seja, $\sqrt{3}-cos\theta>0$ e portanto o quociente é positivo.

Fazendo uso de uma calculadora, temos a possibilidade de calcular alguns valores de T. Construindo a tabela:

θ	$T(\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)$
10	4,3032
20	2,3167
30	1,7320

40	1,5028
50	1,4219
60	1,4226
70	1,4792
80	1,5824
90	1,7320

Observamos que o menor valor de T ocorre para um valor de θ no intervalo entre $50° e\, 60°$.

Para determinarmos o valor de θ iremos utilizar os conceitos de derivada.

Problemática: Qual a área mínima de um alvéolo de abelha, para que esta gaste o mínimo possível de material dado l e h_2 ?

Solução:

Seja,

$$A(\theta)=6l\,h_2+\frac{3l^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)$$

Como l e h_2 são dados, o problema passa a ser a determinação de θ , $0°<\theta<90°$, para qual a expressão $T(\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)$ atinge um mínimo.

Isso é garantido pela proposição: dada uma função $f:A\subset R\rightarrow R, x\mapsto f(x)$, contínua e diferencial, tal que $f'(x_0)=0$, então x_0 é candidato a extremo (máximo ou mínimo) local da função. A comprovação é feita utilizando a derivada segunda da função analisada.

Se $f''(x_0)<0$, x_0 é ponto de máximo e se $f''(x_0)>0$, x_0 é ponto de mínimo.

Assim, minimizar a área da superfície do alvéolo, resta-nos calcular um $\theta^{¿}$ tal que $f'(\theta^{¿})=0\, e\, f''(\theta^{¿})<0$.

$$T(\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}-cot\theta\right)=\left(\frac{\sqrt{3-cos\theta}}{sen\theta}\right)$$

$$T'(\theta)=\frac{(\sqrt{3}-cos\theta)'.sen\theta-(sen\theta)'.(\sqrt{3}-cos\theta)}{(sen\theta)^2}$$

$$T'(\theta)=\frac{(sen\theta).sen\theta-(cos\theta)'.(\sqrt{3}-cos\theta)}{sen^2\theta}$$

$$T'(\theta)=\frac{sen^2\theta-\sqrt{3}cos\theta+\cos^2\theta}{sen^2\theta}$$

$$T'(\theta)=\frac{1-\sqrt{3}cos\theta}{sen^2\theta}$$

Como $0°<\theta<90°$ e $sen\theta>0$, então:

$$T'(\theta^{¿})=0\Rightarrow\frac{1-\sqrt{3}c\,os\theta^{¿}}{sen^2\theta^{¿}}=0\Rightarrow 1-\sqrt{3}\cos\theta^{¿}=0\Rightarrow\cos\theta^{¿}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\theta^{¿}=54{,}7356°$$

É válido notar que

$$sen$$
$$(¿¿2\theta)^2$$
$$T''(\theta)=\frac{(1-\sqrt{3}cos\theta)'.sen^2\theta-(sen^2\theta)'.(1-\sqrt{3}cos\theta)}{¿}$$

$$T''(\theta)=\frac{(\sqrt{3}sen\theta).sen^2\theta-(2sen\theta cos\theta).(1-\sqrt{3}cos\theta)}{sen^4\theta}$$

$$T''(\theta)=\frac{\sqrt{3}sen^2\theta-2cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta}{sen^3\theta}$$

$$T''(\theta)=\frac{\sqrt{3}\cos^2\theta+\sqrt{3}sen^2\theta-2cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta}{sen^3\theta}$$

$$T''(\theta)=\frac{\sqrt{3}-2cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta}{sen^3\theta}$$

Logo, $T''(\theta^{¿})=T(54{,}7356°)\approx 2{,}1213>0$. Portanto, temos que a segunda derivada nesse ponto é positiva, o que confirma que nesse ponto $\theta^{¿}$ minimiza a função $T(\theta)$.

Desta maneira, concluímos que a função área da superfície do alvéolo é minimizada, no intervalo referido, quando o angulo formado entre o eixo central e uma das diagonais do losango da face superior do alvéolo é aproximadamente igual a $54{,}7356°$.

PROBLEMA 8 (Farmacologia).

A reação do organismo na administração de um medicamento é frequentemente representada por uma função da forma

$$R(D)=D^2\left(\frac{C}{2}-\frac{D}{3}\right)$$

onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R em relação a D é chamada de sensibilidade. Qual seria o valor de D para a máxima sensibilidade?

Solução:

Para encontrar a taxa de variação de R em relação a D devemos derivar a função R :

$R'(D)=CD-D^2$

Para encontrar a taxa máxima de sensibilidade devemos aplicar o teste da derivada segunda, obtendo:

$R''(D)=0$

$R''(D)=C-2D=0 \Leftrightarrow 2D=C \Leftrightarrow D=\frac{C}{2}.$

Concluindo que a sensibilidade será máxima quando a dose for metade da dose máxima que pode ser administrada.

Capítulo 5: INTEGRAIS

Exemplo 1:

Uma loja de plantas vende um certo tipo de arbusto depois de cria-lo durante 5 anos. A taxa de crescimento do arbusto durante esses 5 anos pode ser modelada pela função:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{17{,}6t}{\sqrt{17{,}6t^2+1}}$$

Onde t é o tempo em anos e h a altura em centímetros. As mudas são plantadas com $6cm$ de altura $(t=0)$.

Qual a função da altura? E qual a altura dos arbustos quando são vendidos?

Solução:

Nesse caso precisamos encontrar uma primitiva de $\frac{dh}{dt}$, tal que para t=0 tem-se que h=6. Nesse sentido temos que:

$$\int \frac{17{,}6t}{\sqrt{17{,}6t^2+1}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{35{,}2t}{\sqrt{17{,}6t^2+1}}dt$$

Fazendo:

$u=17{,}6t^2+1$ vem, $du=35{,}2t\,dt$. Utilizando essa mudança de variável, temos,

$$\int \frac{17{,}6t}{\sqrt{17{,}6t^2+1}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+K=u^{\frac{1}{2}}+k, k\in R$$

Assim,

$$\int \frac{17{,}6t}{\sqrt{17{,}6t^2+1}}dt=\sqrt{17{,}6t^2+1}+k\,,k\in R$$

Dessa forma:

$$h(t)=\sqrt{17{,}6t^2+1}+k$$

Como, pelo enunciado do problema, $h(0)=6$, é imediato que $k=5$. Finalmente a função da altura é:

$$h(t)=\sqrt{17{,}6t^2+1}+5$$

Como os arbustos são vendidos após 5 anos de criação, então a altura deles depois desse tempo é,

$$h(5)=\sqrt{17{,}6.\,5^2+1}+5=26$$

Isto é, os arbustos são vendidos quando atingem a altura de 26 cm.

Exemplo 2:

Uma vez que pingos de chuva crescem a medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência a sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a=\begin{cases} 9-0{,}9t\ se\ 0\le t\le 10 \\ 0\,se\ t>10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver incialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levara para cair?

Exemplo 3:

Suponha que uma bola de neve derrete de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional a área da sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade do seu volume original, quanto demorará para a bola de neve derreter por completo?

Exemplo 4:

Um tanque para criação de peixes tem a água escoada pelo fundo a fim de irrigar uma determinada plantação, a uma taxa de escoamento é de $q'(t)=200-4t$ litros por minutos, onde $0 \le t \le 50$. Qual a quantidade de agua que foi reaproveita ao final dos 10 primeiros minutos?

Exemplo 5:

Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é:

$R(t)=85-0{,}18\cos(\pi t/12)$

Em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem em um período de 24 horas?

Exemplo 6:

A respiração é cíclica, um ciclo completo que começa pela inalação e acaba pela exalação, durando cerca de 5s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica em parte, por que a função:

$$f(t)=\frac{1}{2}sen\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

Tem sido muito usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Usando este modelo, qual o volume de ar inalado nos pulmões no instante t?

Exemplo 7:

Em uma certa cidade a temperatura (em ℃) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função:

$$T(t)=20+6\,sen\left(\frac{\pi t}{12}\right).$$

Qual a temperatura média durante o período entre 9h e 21h

Exemplo 8:

A velocidade v do sangue que circula em uma veia com raio R e comprimento l a uma distancia r do eixo central é:

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

Em que P é a diferença de pressão entre as extremidades da veia e η é a viscosidade do sangue. Encontre a velocidade média (em relação a r) no intervalo $0 \le r \le R$. Compare a velocidade média com a velocidade máxima.

Exemplo 9:

De acordo com o exemplo anterior, a lei do fluxo laminar estabelece que:

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

Agora para determinar a taxa da circulação sanguínea, ou fluxo (volume por unidade de tempo), calculamos a integral: $F=\int_0^R 2\pi r v(r)\,dr$.

Mostre que:

$$F=\frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

A equação resultante, denominada Lei de Poiseuille, mostra que o fluxo é proporcional a quarta potência do raio do vaso sanguíneo.

Exemplo 10:

A pressão alta resulta da constrição das artérias. Para manter uma taxa normal de circulação (fluxo), o coração tem que bombear mais forte, aumentando assim a pressão sanguínea. Use a Lei de Poiseuille para mostrar que se R_0 e P_0 são valores normais para o raio e a pressão em uma artéria, e R e P , os valores para a artéria constrita, então, para o fluxo permanecer constante, P e R estão relacionados pela equação:

$$\frac{P}{P_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

Deduza que se o raio de uma artéria é reduzido para três quartos de seu valor normal, então a pressão é mais que triplicada.

Capítulo 6: EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

Exemplo 1:

(vunesp/97) Suponhamos que uma represa de área igual a $128\,km^2$ tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8k m^2 e que este estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições:

a) Qual seria a área infestada n anos depois do estudo, caso não se tomasse nenhuma providência?

Solução:

Tomando $S(n)$ como a área da superfície tomada pelo vegetal em *n* anos. Podemos relacionar $S(n)$ com n da seguinte maneira:

$$S(n+1)=S(n)+\frac{1}{2}S(n)=\frac{3}{2}S(n)$$

Assim, temos:

$$S(0)=8$$
$$S(1)=\left(\frac{3}{2}\right)S(0)=\left(\frac{3}{2}\right)8$$
$$S(2)=\left(\frac{3}{2}\right)S(1)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)8=\left(\frac{3}{2}\right)^2 8$$
$$\vdots$$
$$S(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^n 8$$

b) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda superfície da represa? Use os valores aproximados $\log_{10}^{2}=0{,}3\, e\, \log_{10}^{3}=0{,}48.$

Solução:

Precisamos determinar um n para que $S(n)=128.$

$$S(n)=128 \Longrightarrow 8.\left(\frac{3}{2}\right)^n=128 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{128}{8}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n=16 \Longrightarrow \log_{10}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\log_{10}^{16}$$

Fazendo uso das propriedades dos logaritmos temos:

$$n\,.\log_{10}^{\frac{3}{2}}=\log_{10}^{2^4} \Longrightarrow n\,.(\log_{10}^{2}-\log_{10}^{3})=4.\log_{10}^{2}$$
$$(0{,}48-0{,}30)\,.\,n=4.(0.30) \Longrightarrow n=6{,}666\ldots$$

Assim, a vegetação aquática ocupará toda a represa em 6,666... anos, aproximadamente 6 anos e 8 meses.

Exemplo 2:

(Portal Positivo – Adaptada) Em uma experiência de laboratório, verifica-se que uma população de um certo micro-organismo cresce segundo a relação:

$N(t)=x_0(-1+2^{0,1t})$, onde $N(t)$ é o numero de micro organismos t meses após o início da experiência e x_0 é o número de micro-organismos no início da experiência. Quantos anos devem se passar para que se tenha uma população 63 vezes a população inicial de micro-organismos?

Solução:

Logo queremos saber para que t o valor de $N(t)=63x_0$ assim temos:

$$63\,x_0=x_0(-1+2^{0,1t})\Longrightarrow 63=-1+2^{0,1t}\Longrightarrow$$

$$2^{0,1t}=64\Longrightarrow 2^{0,1t}=2^6\Longrightarrow 0,1t=6\Longrightarrow$$

$$t=60\,meses\,ou\,5\,anos$$

Exemplo 3:

O pH do suco gástrico presente no estômago humano varia no intervalo de 1 a 3. O valor do pH está relacionado com a concentração de íons de hidrogênio através da

equação
$$+¿$$
$$H^{¿}$$
$$¿$$
$$¿$$
$$pH=-\log_{10}^{¿}$$
Quantas vezes a concentração de íons hidrogênio diminui quando o pH aumenta de 1 para 3?

Solução:

Para $pH=1$ temos:

$$+¿$$
$$H^{¿}$$
$$¿$$
$$+¿=0,1$$
$$+¿=10^{-1}\Longrightarrow H^{¿}$$
$$¿$$
$$1=-\log_{10}^{¿}$$

Para $pH=3$ temos:

$+¿$
$H^{¿}$
$¿$
$+¿=0{,}001$
$+¿=10^{-3}\Longrightarrow H^{¿}$
$¿$
$3=-\log_{10}^{¿}$

Concluindo que a concentração de $\overset{+¿}{H^{¿}}$ diminui 1000 vezes.

Exemplo 4:

Um médico após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 10 anos, obteve a fórmula:

$h(i)=\log_{10}^{\left(10^{0,7}\times\sqrt{i}\right)}$, onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela formula obtida pelo médico, qual a variação em centímetros das alturas das crianças?

Solução:

Como o intervalo de anos vai de 1 a 10, temos que:

Para i=1

$$h(1)=\log_{10}^{\left(10^{0,7}\times\sqrt{1}\right)}=\log_{10}^{\left(10^{0,7}\right)}=0{,}7\,metros$$

Para i=12

$$h(10)=\log_{10}^{\left(10^{0,7}\times\sqrt{10}\right)}=log_{10}^{\left(10^{1,2}\right)}=1{,}2\,metros$$

Concluindo que as crianças tem uma variação de 0,5 metros ou 50 centímetros.

Exemplo 5:

O nível de álcool presente no sangue de uma pessoa que ingeriu uma certa quantidade de bebida alcoólica decresce de acordo com a relação:

$N(t)=t_0\times 2^{-t}$ sendo t o tempo decorrido em horas a partir do momento t_0 , onde o nível foi constatado. Sabendo-se que o CTB (Código de Transito Brasileiro) estabelece 0,6 gramas por litro como limite máximo de álcool no sangue, para quem dirige, e considerando-se $\log_{10}^{2}=0{,}3$, quanto tempo, no mínimo, essa pessoa deve aguardar, antes de dirigir?

Solução:

Calculando N(t) para o t inicial (t=0) temos:

$N(0)=3\times 2^{-0}=3$

Pede-se o valor de t para que N(t) seja pelo menos igual a 0,6 assim:

$0{,}6=3\times 2^{-t}\Longrightarrow 0{,}2=2^{-t}\Longrightarrow -t=\log_{2}^{0,2}$

$t=-\log_{10}^{\frac{2}{10}}\Longrightarrow t=\log_{10}^{\frac{10}{2}}=\log_{10}^{10}-\log_{10}^{2}=1-0{,}3\Longrightarrow$

$\Longrightarrow t=0{,}7\,horas$

Exemplo 6:

Em uma experiência realizada em laboratório, o pesquisador observou que decorrendo t horas, a população P de uma certa bactéria crescia segundo a função $P(t)=25\times 2^{t}$. Nessa experiência, sabendo que $\log_{2}^{5}=2{,}32$, quanto tempo levou para a população atingir 625 bactérias?

Solução:

Dado que $P(t)=625$, temos que:

$625=25\times 2^{t}\Longrightarrow 2^{t}=25\Longrightarrow t=\log_{2}^{25}$

$t=2.\log_{2}^{5}\Longrightarrow t=4{,}64\,horas\,.$

Exemplo 7:

(UNEMAT-2009) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção da espécie animal é inevitável. A população de uma determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo uma função exponencial do tipo $f(t)=k.a^{t}$, na qual k e a são números reais e $f(t)$ indica o numero de indivíduos dessa espécie no instante t (em anos). Atualmente (instante t=0) existem 1500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram irreversível para a extinção?

n	2	3	5	10
log n	0,30	0,47	0,70	1

Solução:

Dos valores fornecidos temos o seguinte:

Para t=0

$$1500 = k.a^0 \Longrightarrow k = 1500$$

Para t=10

$$750 = 1500.a^{10} \Longrightarrow a^{10} = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$$

Logo a função de decrescimento exponencial pode ser reescrita como:

$$f(t) = 1500.\left(\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\right)^t = 1500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = 1500.(2)^{\frac{-t}{10}}$$

Assim, queremos descobrir o valor de t que torna irreversível a extinção da espécie, logo temos:

$$100 = 1500.2^{\frac{-t}{10}} \Longrightarrow 2^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{15} \Longrightarrow \frac{-t}{10} = \log_2^{\frac{1}{15}}$$

$$t = -10.\log_2^{(3\times 5)^{-1}}$$

Fazendo uso das propriedades dos logaritmos temos:

$$t = -10 \times (-1) \times \left(\frac{\log_{10}^3 + \log_{10}^5}{\log_{10}^2}\right) = 10 \times (0{,}47 + 0{,}70) \div 0{,}30 = 11{,}7 \div 0{,}3 = 39\,anos$$

Exemplo 8:

Sob condições ideais, sabe-se que certa população de bactérias dobra a cada três horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias: Qual a população após t horas? É possível estimar o tempo para a população atingir 50.000 bactérias? Qual o significado da função inversa da função população?

Solução:

É fácil ver que a lei que relaciona o número *N* de bactérias com o tempo *t* em horas é,

$$N(t)=100.2^{\frac{t}{3}}$$

Para que atinja 50000 bactérias devemos ter,

$$50000=100.\,2^{\frac{t}{3}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{t}{3}}=500$$

$$\Rightarrow \frac{t}{3}=\log_2 500$$

$$\Rightarrow t=3.\log_2 500\approx 27h$$

Exemplo 9:

A função $C(t)=K(e^{-at}-e^{-bt})$, onde $a, b\, e\, K$ são constantes positivas e $b>a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante t.

a) Mostre que $\lim_{t\to\infty} C(t)=0$
b) Encontre a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
c) Quando esta taxa é igual a zero?

Exemplo 10:

O numero de células de levedura em uma certa cultura de laboratório aumenta rapidamente no inicio, mas eventualmente se estabiliza. A população é modelada pela função:

$$n=f(t)=\frac{a}{1+b\,e^{-0,7t}}$$

Em que t é medido em horas. No instante $t=0$ a população é de 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de $a\, e\, b$. De acordo com este modelo, oque ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

Exemplo 11:

Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,7944 membros por dia. No dia 0, a população consistia de dois membros. Encontre o tamanho da população depois de seis dias.
(Obs.: A taxa de crescimento relativa, é a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população)

Exemplo 12:

Uma cultura de bactérias inicialmente contem 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.

e) Encontre a expressão para o numero de bactérias depois de t horas
f) Qual o numero de bactérias após 3 horas
g) Qual a taxa de crescimento depois de 3 horas
h) Quando a população atingirá 10.000 células?

Exemplo 13:

Uma determinada amostra é tirada da estufa e sua temperatura alcança $85℃$ e esta amostra é colocada em uma bancada em um ambiente onde a temperatura é de $22℃$. Se $T(t)$ for a temperatura da amostra apos t minutos, então a Lei de resfriamento de Newton implica que:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-22)k<0,k\,constante$$

c) Se a temperatura da amostra for $65℃$ depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 min?
d) Quando a amostra esfriará a $40℃$?

Exemplo 14:

Seja $C(t)$ a concentração de uma droga na corrente sanguínea. A medida que o corpo elimina a droga, $C(t)$ diminui a uma taxa proporcional a quantidade da droga presente naquele instante. Assim, $C'(t)=-kC(t)$, em que k é uma numero positivo chamado de constante de eliminação da droga.

c) Se C_0 for a concentração no instante $t=0$, encontre a concentração no instante t.
d) Se o corpo eliminar a metade da droga em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% da droga?

Exemplo 15:

Uma solução de glicose administrada por via intravenosa na corrente sanguínea a uma taxa constante r. A medida que a glicose é adicionada ela é convertida em outras substancias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional a concentração naquele instante. Então um modelo para a concentração $C=C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é:

$$\frac{dC}{dt}=r-kC$$

Onde k é uma constante positiva.

c) Suponha que a concentração no tempo $t=0$ é C_0. Determine a concentração em um tempo qualquer t resolvendo a equação diferencial.
d) Assumindo que $C_0<\frac{r}{k}$, qual a interpretação de $\lim_{t\to\infty} C(t)$

Exemplo 16:

Em um modelo de crescimento sazonal, uma função periódica do tempo é introduzida para considerar variações sazonais da taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.

c) encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt}=kPcos(rt-\phi)P(0)=P_0$$

Onde $k, r e \phi$ são constantes positivas

d) O que se pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

Exemplo 17:

O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento $L(t)$ de um peixe em um período de tempo. Se L_∞ for o maior comprimento para a espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento do comprimento seja proporcional a $L_\infty-L$, o comprimento que o peixe ainda pode crescer.

c) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para $L(t)$

d) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que $L_{\infty}=53\,cm$, $L(0)=10\,cm$ e a constante de proporcionalidade é 0,2. Como é a expressão para $L(t)$ deixe peixe?

Exemplo 18:

O transporte de uma substância através de uma parede capitar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

Onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Qual a relação entre $h e t$?

Exemplo 19: (decaimento radioativo)

O isótopo radioativo tório desintegra-se em uma taxa proporcional a quantidade presente. Se 100 gramas deste material são reduzidos a 80 gramas em uma semana, qual a expressão para a quantidade de tório em qualquer tempo? Qual o tempo necessário para a massa decair a metade de seu valor original, a dita meia-vida?

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade de tório em um determinado instante t (em dias). Sabendo-se que o tório desintegra-se em uma taxa proporcional a quantidade presente temos que:

$$\frac{dQ}{dt}=kQ$$

Onde $k<0$, pois $Q(t)$ é decrescente. Introduzindo a solução da equação diferencial acima, temos que:

$$Q(t)=c\,e^{kt}$$

Admitindo a informação inicial $Q(0)=100$, então:

$$Q(t)=100\,e^{kt}$$

Para determinarmos o valor da constante k, utilizamos o fato que o isótopo é reduzido a 80 gramas em 7 dias, ou seja,

$$Q(7)=c\,e^{7k}=80 \Longrightarrow k=\frac{1}{7}\ln 0{,}8 \cong -0{,}031$$

Assim,

$$Q(t)=100\,e^{-0{,}031\,t}$$

Para determinarmos a meia vida M do tório, temos que:

$$Q(M)=\frac{1}{2}Q(0) \Longrightarrow 100\,e^{-0{,}031\,M}=50 \Longrightarrow M=\frac{\ln 2}{0{,}031} \cong 21{,}74\,dias$$

Exemplo 20: (UFG – 2011)

Estudos apontam que o amento de CO_2 na atmosfera intensifica a acidificação dos oceanos, o que pode prejudicar a vida marinha. Nesses estudos, em um determinado experimento (E_1) em água com $PH=8{,}05$, ovos de caracóis (lesma-marinha) geraram embriões que formaram conchas, após certo período de tempo. Em outro experimento (E_2) com ovos deste mesmo tipo, porém em água com $pH=7{,}6$, após o mesmo período de tempo, verificou-se que alguns ovos estavam vazios e os embriões ainda não haviam criado conchas. OCEANOS AMEAÇADOS DE DENTRO PARA FORA. Scientific American Brasil, São Paulo, set 2010, p.64-71. [Adaptado].

Considerando estas informações, Qual a razão entre as concentrações hidrogeniônicas nos experimentos $E_1\,e\,E_2$? (Dado $10^{0{,}45}=3¿$

Solução:

Utilizando a equação do exemplo 3 deste trabalho temos:

+¿
$H^{¿}$
¿
¿
$pH=-\log_{10}^{¿}$

Para $pH=8{,}05$ temos:

+¿
$H^{¿}$
¿
¿
$8{,}05=-\log_{10}^{¿}$

+¿

$H^{¿}$

¿

¿

$-8,05=\log_{10}^{¿}$

$10^{-8,05}=H_1$

Utilizando de um raciocínio análogo para $pH=7,6$ obteremos:

$10^{-7,6}=H_2$

como queremos a razão entre $E_1\, e\, E_2$ temos

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{10^{-8,05}}{10^{-8,05}}=10^{-0,45}=1/3.$$

Exemplo 21: (Crescimento populacional)

(UFLA – 2006) Segundo o modelo Malthusiano para o crescimento populacional, as populações podem crescer sem limites. Apesar desses aspectos, o modelo funciona bem durante certo tempo. Utilizando dados dos censos de 1940 e 1998, o modelo prevê para a população brasileira um crescimento segundo a equação: $P(t)=40e^{0,02t}$, sendo $P(t)$ a população, em milhões de habitantes para cada ano t, e $t=0$ o ano de 1940. De acordo com a projeção malthusiana, determine o ano a partir do qual a população brasileira irá ultrapassar os 200 milhões de habitantes. Considerando $\ln 5=1,6$

Solução:

Queremos encontrar t que satisfaça a inequação abaixo

$$200\leq 40e^{0,02t}\Longleftrightarrow e^{0,02t}\geq 5\Longleftrightarrow 0,02t\geq \ln 5\Longleftrightarrow t\geq 80$$

concluímos que a população irá ultrapassar os 200 000 000 de habitantes 80 anos após 1940, ou seja 2020.

Exemplo 22: (Idade das árvores)

Uma das técnicas para datar a idade das árvores de grande porte da floresta amazônica é medir a quantidade do isótopo radioativo C^{14} presente no centro dos troncos. Ao retirar uma amostra de uma castanheira, verificou-se que a quantidade de C^{14} presente era de 84% da quantidade existente na atmosfera. Sabendo-se que o C^{14} tem decaimento exponencial e sua vida média é de 5730 anos e considerando os valores de $\ln 0,5=-0,69$ e $\ln 0,84=-0,17$, qual a idade aproximada da castanheira que podemos afirmar?

Exemplo 23: (produção de frutos)

Um produtor do interior do estado do Pará decidiu investir no plantio de uma nova variedade de banana, a BRS Conquista, em função das vantagens apresentadas, como por exemplo: a resistência as doenças como o Mal do Panamá, Sigatoka Amarela e Negra. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou uma certa quantidade de bananas. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes maior que a quantidade inicial? $(\log 2 = 0{,}3)$.