



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO EM LOGÍSTICA E PESQUISA OPERACIONAL

NÚBIA DA SILVA BATISTA BRANDÃO

**EFICIÊNCIA ENTRE OS GRÁFICOS DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING E OS
GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS SIMULTÂNEOS PARA A MÉDIA EM
PROCESSOS MULTIVARIADOS**

FORTALEZA

2014

NÚBIA DA SILVA BATISTA BRANDÃO

**EFICIÊNCIA ENTRE OS GRÁFICOS DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING E OS
GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS SIMULTÂNEOS PARA A MÉDIA EM
PROCESSOS MULTIVARIADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Logística e Pesquisa Operacional da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Logística e Pesquisa Operacional.

Área de concentração: Gestão logística.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Silvia Maria de Freitas.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia

B818e Brandão, Núbia da Silva Batista
Eficiência entre os gráficos de controle T^2 de Hotelling e os gráficos de \bar{X} univariados simultâneos para a
média em processos multivariados / Núbia da Silva Batista Brandão - 2014.
70 f.: il. color. enc. ; 30cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação,
Programa de Pós Graduação em Logística e Pesquisa Operacional, Fortaleza, 2014.

Área de concentração: Gestão Logística

Orientação: Profa. Dra. Silvia Maria de Freitas

1. Logística. 2. Controle de processo. 3. Desempenho. I Título

CDD 658.78

NÚBIA DA SILVA BATISTA BRANDÃO

**EFICIÊNCIA ENTRE OS GRÁFICOS DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING E OS
GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS SIMULTÂNEOS PARA A MÉDIA EM
PROCESSOS MULTIVARIADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Logística e Pesquisa Operacional da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Logística e Pesquisa Operacional.
Área de concentração: Gestão logística.

Aprovado em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Silvia Maria de Freitas (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. João Welliandre Carneiro Alexandre (Examinador Interno)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa (Examinador Externo)
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Aos meus pais e meu esposo. Sem eles, não seria possível.

Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

- À Deus, por ter interferido em minhas decisões, mesmo que de forma dolorosa, mas que me fez permanecer em Fortaleza e dar início ao mestrado em Logística e Pesquisa Operacional;
- aos meus Pais, João Francisco e Josy Batista, pela educação e apoio. E principalmente, pela amizade que construímos que vai muito além do relacionamento de pais e filha;
- ao meu marido e amigo, Max Brandão, pela companhia, paciência (muita paciência) e amor durante esses dois anos. Pelo tempo dedicado me orientando na dissertação, tirando dúvidas e participando ativamente deste meu momento.
- à Prof^a. Dr^a. Silvia Maria de Freitas, sou grata pela orientação;
- ao Prof. Dr. João Welliandre Carneiro Alexandre, pela orientação de trabalhos durante esse período, e principalmente pelos ensinamentos na disciplina Estágio à Docência, que me proporcionou grande crescimento profissional e pessoal.
- à indústria de tintas, por abrir as portas de sua casa para que o estudo pudesse ser realizado em seus processos produtivos, e por depositar confiança em nosso trabalho;
- ao Roberto Campos Leoni, pela mão estendida num momento decisivo, o qual identificou o problema que estava dificultando os resultados do algoritmo;
- à CAPES pelo apoio financeiro, durante os 24 meses;
- aos professores participantes da Banca examinadora, Dr João Welliandre e Dr. Antônio Fernando Branco Costa, que participaram não somente da defesa, mas da qualificação dando ótimas sugestões;
- finalmente, à todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a efetivação deste trabalho. Certamente, sozinha seria bem mais difícil chegar até aqui, atingindo mais um objetivo e dando continuidade a esta longa caminhada.

RESUMO

Este estudo tem por objetivo comparar o desempenho na detecção de mudanças no vetor de médias do processo, quando sujeitos a perturbações em uma ou mais características, de dois tipos de gráficos de controle, para processos bivariados e trivariados, sendo estes, o Gráfico de Controle Multivariado (GCM) T^2 de Hotelling e os Gráficos de \bar{X} Univariados Simultâneos ($SU\bar{X}$). Para tanto, foi elaborado um algoritmo, através do *software* R, que utiliza o método de Monte Carlo, capaz de gerar dados multivariados e fazer todo procedimento de análise para o cálculo do Número Médio de Amostras até a ocorrência de um sinal (NMA_0), que é utilizado para medir o desempenho dos gráficos. Foram utilizadas as estimativas do vetor de médias e da matriz de covariâncias de um processo real de uma indústria de tintas, o qual teve 44 amostras coletadas em julho de 2013 pela própria empresa. A análise ocorreu em duas etapas, a primeira onde o processo é trivariado e apenas duas características são significativamente correlacionadas, neste caso Densidade e Viscosidade, e o pH não se correlaciona com nenhuma das duas, e a segunda onde apenas estas variáveis correlacionadas são analisadas, com coeficiente de correlação igual a 0,5. Os resultados obtidos mostram que, para o caso trivariado, se a perturbação ocorrer nas características Densidade ou Viscosidade, o T^2 de Hotelling apresenta-se mais eficiente, porém quando pH sofre deslocamentos, em geral, o gráfico $SU\bar{X}$ possui melhor desempenho, principalmente para grandes deslocamentos. Quando Viscosidade e pH ou Densidade e pH sofrem deslocamento, o gráfico T^2 possui melhor desempenho, enquanto que tratando-se de Densidade e Viscosidade o $SU\bar{X}$ é mais eficiente. Se as três características são expostas a perturbações, quase não há diferença entre os dois gráficos. Quando o processo é bivariado, se apenas uma das características sofre deslocamento, o T^2 é a melhor opção, quando as duas características são alteradas, o $SU\bar{X}$ é mais eficiente. Foram apresentadas aplicações das técnicas discutidas neste estudo. Através do GCM T^2 de Hotelling, tanto o processo trivariado como o bivariado apresentaram-se sob controle, o mesmo ocorreu quando aplicados os gráficos $SU\bar{X}$, enquanto que com a atual metodologia da empresa, os gráficos de Shewhart tradicionais, a variável Densidade apresenta pontos fora de controle, o que não ocorre quando levada em consideração a correlação existente com Viscosidade. Deste estudo, concluímos que, quando as variáveis não são todas correlacionadas a estratégia de agrupá-las num gráfico T^2 não é a melhor, desta forma a utilização dos gráficos, multivariados e univariados, de forma conjunta é vista como mais adequada.

Palavras-chave: Controle de processos multivariados. Gráficos T^2 de Hotelling. Gráficos de \bar{X} univariado simultâneo.

ABSTRACT

This study aims to compare the performance in detecting changes in the mean vector of the process, when subjected to disturbances in one or more characteristics of two types of control charts for bivariate and trivariate processes, being these the Control Chart multivariate (GCM) T^2 Hotelling and graphs \bar{X} univariate concurrent ($SU\bar{X}$). For this, an algorithm was developed by the *R* software, which uses the Monte Carlo method, able to generate multivariate data and make the whole analysis procedure for calculating the average run length to the occurrence of a signal (NMA_0), which is used for measuring the graphics performance. Estimates of the mean vector and the covariance of a real process of a paint industry, which had 44 samples collected in July 2013 by the company itself matrix were used. The analysis took place in two stages, where the first process is trivariate and only two features are significantly correlated in this case Density and Viscosity and pH does not correlate with any of them, where only the second of these correlated variables are analyzed, with a coefficient correlation equal to 0,5. The results show that for the trivariate case, if the disturbance occurs in the density or viscosity characteristics, T^2 Hotelling has become more efficient, but when pH undergoes displacement, in general, the graphic $SU\bar{X}$ has better performance, especially for large displacements. When viscosity and pH or pH and density suffer displacement, the graph T has better performance, while in the case of the Density and Viscosity $SU\bar{X}$ is more efficient. If the three characteristics are exposed to disturbances, there is almost no difference between the two graphs. When the process is bivariate, if only one of the features suffers displacement T^2 is the best option when the two characteristics are altered, the $SU\bar{X}$ is more efficient. Applications of the techniques discussed in this study were presented. Through the GCM T^2 Hotelling, both the trivariate process as bivariate presented under control, the same happened when applied graphics $SU\bar{X}$, whereas with the current methodology of the company, traditional Shewhart charts, the Density variable is out of control points, which does not occur when taken into account the correlation with Viscosity. In this study, we conclude that when all the variables are not correlated strategy of grouping them into a graph T^2 is not the best, thus the use of graphs, univariate and multivariate, jointly is seen as more appropriate.

Keywords Controle de qualidade estatístico. Gráficos de controle multivariados. Gráfico T^2 de Hotelling.

LISTA DE FIGURAS

1	Estrutura do Gráfico de Controle - GC	p. 20
2	Gráfico de \bar{X} : ocorrência de um alarme falso	p. 31
3	Gráfico de \bar{X} : ocorrência de um alarme verdadeiro	p. 31
4	Etapas que compõem o estudo	p. 36
5	Determinação do NMA do GCM T^2 de Hotelling	p. 38
6	NMA_1 após perturbação δ em X_1 ($p = 3$)	p. 43
7	NMA_1 após perturbação δ em X_2 ($p = 3$)	p. 43
8	NMA_1 após perturbação δ em X_3 ($p = 3$)	p. 44
9	Eficiência relativa após perturbação δ em uma variável ($p = 3$)	p. 45
10	NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_2 ($p = 3$)	p. 47
11	NMA_1 após perturbação δ em X_2 e X_3 ($p = 3$)	p. 47
12	NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_3 ($p = 3$)	p. 48
13	Eficiência relativa após perturbação δ em duas variáveis ($p = 3$)	p. 48
14	NMA_1 após perturbação δ em X_1 , X_2 e X_3	p. 50
15	Eficiência relativa após perturbação δ em três variáveis	p. 50
16	NMA_1 após perturbação δ em X_1 ($p = 2$)	p. 52
17	NMA_1 após perturbação δ em X_2 ($p = 2$)	p. 52
18	Eficiência relativa após perturbação δ em uma variável ($p = 2$)	p. 53
19	NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_2 ($p = 2$)	p. 54
20	Eficiência relativa após perturbação δ em duas variáveis ($p = 2$)	p. 54
21	Exemplo de composição básica de tintas à base água	p. 56
22	Instrumento de medição da viscosidade - Viscosímetro Brookfield KU-2	p. 57

23	Instrumento de medição da densidade - Picnômetro Fechado	p. 58
24	Instrumento de medição do pH - pHmetro	p. 58
25	GCM T^2 de Hotelling para o processo trivariado	p. 60
26	Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Densidade ($p = 3$)	p. 61
27	Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Viscosidade ($p = 3$)	p. 61
28	Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica pH ($p = 3$)	p. 62
29	GCM T^2 de Hotelling para o processo bivariado	p. 63
30	Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Densidade ($p = 2$)	p. 63
31	Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Viscosidade ($p = 2$)	p. 64
32	GC de Shewhart para a característica pH	p. 64
33	GC de Shewhart para a característica Densidade	p. 65
34	GC de Shewhart para a característica Viscosidade	p. 65

LISTA DE TABELAS

1	Esquema de montagem geral do GC tradicional para a média, amplitude e desvio-padrão	p. 21
2	Matriz de dados para o GCM T^2 de Hotelling para subgrupos	p. 28
3	Matriz de dados para o GCM T^2 de Hotelling para observações individuais	p. 29
4	Comparação do NMA_1 exato e simulado	p. 39
5	NMA_1 para alteração na média de uma variável ($p = 3$)	p. 42
6	NMA_1 para alteração na média de duas variáveis ($p = 3$)	p. 46
7	NMA_1 para alteração na média de três variáveis	p. 49
8	NMA_1 para alteração na média de uma variável ($p = 2$)	p. 51
9	NMA_1 para alteração na média de duas variáveis ($p = 2$)	p. 53
10	Dados coletados, julho de 2013	p. 57
11	Estatísticas descritivas dos dados	p. 59
12	Estatísticas T^2	p. 60

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 12
1.1	Introdução ao tema	p. 12
1.2	Justificativa e importância	p. 14
1.3	Problema de pesquisa	p. 16
1.4	Objetivos	p. 17
1.4.1	Objetivo geral	p. 17
1.4.2	Objetivos específicos	p. 17
1.5	Estrutura da dissertação	p. 17
2	Gráficos de Controle	p. 19
2.1	Considerações iniciais	p. 19
2.2	Gráficos de controle univariados	p. 20
2.2.1	Gráficos de controle \bar{X} univariados simultâneos	p. 21
2.3	Gráficos de controle multivariados	p. 23
2.3.1	Conceitos gerais e estimação de parâmetros	p. 23
2.3.2	GCM T^2 de Hotelling	p. 27
2.3.3	Decomposição do GCM T^2 de Hotelling	p. 29
2.4	Alarmes do gráfico de controle	p. 30
2.5	Desempenho e eficiência dos gráficos de controle	p. 32
3	Procedimentos metodológicos	p. 34
3.1	O método utilizado	p. 34
3.2	A metodologia da pesquisa	p. 35

3.3	Construção do programa de simulação	p. 35
3.3.1	Validação do programa	p. 37
4	Desempenho e eficiência entre o GC multivariado e o GC univariado para o monitoramento do vetor de médias do processo	p. 40
4.1	Desempenho do GCM T^2 de Hotelling	p. 40
4.1.1	Análise do desempenho do GCM T^2 de Hotelling para um processo trivariado	p. 41
4.1.2	Análise do desempenho do GCM T^2 de Hotelling para um processo bivariado	p. 50
5	Aplicação	p. 55
5.1	O processo produtivo e a coleta de dados	p. 55
5.1.1	A coleta de dados	p. 56
5.2	Aplicação das ferramentas	p. 59
6	Conclusões e considerações finais	p. 66
6.1	Conclusões	p. 66
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	p. 67
	Referências	p. 68

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será realizada uma breve introdução a respeito da área de interesse do trabalho, pontuando alguns trabalhos relevantes sobre o tema. A justificativa e importância do estudo, o problema de pesquisa e os objetivos geral e específicos, também compõem este capítulo.

1.1 Introdução ao tema

A necessidade crescente pela melhoria da qualidade de processos e o aumento de esforços para alcançar este objetivo, transformaram a qualidade em um fator crítico de sucesso para as organizações. Grandes investimentos vêm sendo feitos com relação a esta melhoria, visando a redução de custos e a conquista de novos clientes, bem como o aumento da produtividade.

Desta forma, as empresas têm buscado ferramentas cada vez mais eficazes, capazes de fornecer a melhoria contínua com a garantia de qualidade que elas buscam. O controle permanente dos processos é condição básica para a manutenção da qualidade de bens e serviços (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2010). Nesse contexto, o Controle Estatístico do Processo (CEP) é visto como uma poderosa técnica, sendo capaz de monitorar e avaliar as variáveis responsáveis por processos dentro da empresa e solucionar problemas práticos. Segundo Montgomery (2009), o CEP possui ferramentas que formam uma estrutura para esta melhoria, como a apresentação de dados em histogramas ou ramo-e-folhas, folha de controle, gráfico de Pareto, diagrama causa-e-efeito, diagrama de concentração de defeito, diagrama de dispersão e gráficos de controle, sendo estes últimos, provavelmente, os mais sofisticados.

Os gráficos de controle (GC) são ferramentas utilizadas no gerenciamento da qualidade total. Foram introduzidos por Shewhart, em 1931, quando criou o conceito de gráficos de controle estatístico como técnica de monitoramento de um processo produtivo e publicou o livro *Economic Control of Quality of Manufactured Product* (SHEWHART, 1931). Desde então,

uma variedade de gráficos de controle vem sendo elaborados e utilizados como ferramentas auxiliares no controle de processos e qualidade.

Com a crescente automação dos processos, o monitoramento, em tempo real e simultâneo, de duas ou mais características de qualidade, vem sendo permitido. Neste sentido, a utilização dos gráficos de controle univariados de Shewhart pode se tornar inviável, pois demandaria muito tempo e recursos, visto que seria necessária a construção de diversos gráficos, sendo que para cada característica haveria a necessidade de um gráfico para monitorar a média e outro para a variabilidade. Outro fator importante a ser considerado no monitoramento simultâneo de várias características é a correlação entre elas, uma vez que os GCs univariados, geralmente, não consideram este tipo de medida. Uma alternativa, segundo Jackson (1991), seria transformar os dados a partir da utilização de componentes principais, para eliminar esta correlação. Contudo, tal procedimento pode resultar numa “inflamação do erro tipo I à medida que o número de cartas utilizadas aumenta” (PAULA; FOGLIATTO; ROSA, 2001), onde o erro do tipo I acontece quando diz-se que um processo está fora de controle quando na verdade ele não está.

Outra alternativa seria trabalhar com os gráficos \bar{X} com limites de Bonferroni. Souza e Rigao (2005) utilizam esta técnica quando as variáveis são fracamente correlacionadas, enquanto que Serel, Moskowitz e Tang (2000) utilizam os gráficos \bar{X} univariados simultâneos ($SU\bar{X}$), que conseguem incorporar as informações da correlação existente entre as características nos limites de controle, e ainda podem considerar a importância de cada variável nestes limites.

Visando o aprimoramento do monitoramento de processos multivariados, técnicas relacionadas aos gráficos de controle multivariado vem sendo desenvolvidas ao longo do tempo, o primeiro estudo foi introduzido por Hotelling (1947), posteriormente outros artigos discutem o assunto, por exemplo, Machado e Costa (2008), Costa e Machado (2011), entre outros.

Além do Gráfico de Controle Multivariado (GCM) T^2 de Hotelling, que é baseado somente na observação mais recente e insensível a pequenas e moderadas mudanças no vetor médio, existem outros tipos de gráficos utilizados para monitoramento de processos multivariados, sendo eles o MCUSUM (gráfico de controle multivariado para somas acumuladas) e o MEWMA (gráfico de controle multivariado para a média móvel ponderada exponencialmente), que aparecem na literatura desde a revisão de Jackson (1985). Diferente do T^2 de Hotelling, que detecta grandes variações, os outros dois conseguem detectar pequenas mudanças no processo (KONRATH, 2002).

Uma vez que os dados do processo são multivariados e possuem correlação signi-

ficativa entre as características, uma estratégia multivariada deve ser utilizada para a correta análise desses dados. Sendo assim, o objetivo da dissertação é comparar o desempenho do gráfico multivariado T^2 de Hotelling com o desempenho dos gráficos \bar{X} univariados simultâneos ($SU\bar{X}$).

1.2 Justificativa e importância

A qualidade vem sendo um dos fatores de decisão fundamentais na escolha de produtos e serviços pelos clientes, o que leva as organizações a reestruturarem seus processos visando a melhoria contínua da qualidade. Para tanto, é necessária a utilização de técnicas específicas e eficientes, de forma que os processos sejam monitorados para trabalharem com o mínimo de variabilidade. É neste sentido que o CEP vem atuando, através do uso cada vez maior dos gráficos de controle.

As ferramentas mais utilizadas do CEP são os Gráficos de Controle Univariados (GCU), principalmente os Gráficos de Controle de Shewhart (GCS), devido sua simplicidade e facilidade de operacionalização, além de terem uma grande divulgação na literatura. Porém, com o avanço da tecnologia, tornou-se possível agilizar os processos e obter informações com mais velocidade e de forma mais abundante, muitas vezes tornando necessário o controle de vários fatores do processo e diversas características do produto. Neste caso, gráficos de controle que sejam capazes de combinar essas características são necessários, estes gráficos são conhecidos como Gráficos de Controle Multivariados (GCM).

Os GCM, apesar de terem seu início em 1947 por Harold Hotelling, que desenvolveu o GCM T^2 de Hotelling, ainda não são muito utilizados nos processos industriais. Um dos principais motivos para sua pouca utilização é a implementação computacional insuficiente, além da dificuldade de interpretação dos sinais, ou seja, da identificação de possíveis variáveis que sejam motivo de causas especiais (KONRATH, 2002).

O GCM T^2 de Hotelling é o mais conhecido na literatura, sendo o mais recomendado para processos que possuam várias características da qualidade a serem investigadas, uma vez que estas características sejam correlacionadas. Ele possui a capacidade de levar em conta esta correlação em seu monitoramento, o que não ocorre com os gráficos univariados tradicionais de Shewhart, que analisam cada característica separadamente.

Alguns trabalhos vem sendo realizados em relação a aplicação do GCM T^2 de Hotelling, Tavares (2003) aplica o gráfico citado em uma das etapas do processo de produção de uma companhia de alumínio e realiza sua decomposição; Melo (2008), que utiliza o T^2 de Ho-

telling para monitorar e avaliar o controle de processos internos de agências bancárias, com a finalidade de auxiliar a administração dos bancos analisados.

Outros autores vem melhorando o campo computacional da ferramenta, uma vez que esta área é bastante carente. Konrath (2002) apresenta a decomposição da estatística T^2 de Hotelling por meio de um algoritmo computacional, onde o método de decomposição utilizado é de Mason, Tracy e Young (1995), que sugerem que a estatística seja dividida em componentes independentes, de forma que cada uma reflita a contribuição da variável individual. Já Gorayeb (2010) desenvolve uma ferramenta computacional para geração do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling, utilizando a linguagem de programação Java.

Porém, é necessário verificar a eficiência do GCM. Sendo assim, alguns estudiosos vem tentando provar seu desempenho e eficiência. Lowry *et al.* (1992) realizam um estudo comparativo entre quatro gráficos de controle multivariados, sendo eles o χ^2 de Hotelling, MCUSUM e o MEWMA que utiliza a matriz covariância desenvolvida por Tsui e Woodall, em 1991, e o gráfico MEWMA no qual se utiliza a matriz de covariância desenvolvida por MacGregor e Harris, em 1990, utilizando o Número Médio de Amostras - *NMA* como medida de desempenho.

Javaheri e Houshmand (2001) apresentam um estudo comparativo do desempenho de cinco métodos através da metodologia de simulação de Monte Carlo e utilizando o Número Médio de Amostras como medida de desempenho.

Ghute e Shirke (2008) apresentam o gráfico T^2 sintético e o comparam com outros GCM, dentre eles o T^2 de Hotelling, também através dos valores de *NMA*, que no caso do T^2 sintético são determinados através de um programa computacional elaborado no *software* Matlab e os valores do T^2 de Hotelling são dados por Aparisi, Champ e Garcia-Diaz (2004).

Serel, Moskowitz e Tang (2000) utilizam gráficos \bar{X} univariados para controlar as características de qualidade de um processo normal multivariado sob uma perspectiva econômica, onde eles criaram uma abordagem para obtenção do Erro do Tipo I - ETI geral do processo, onde o Erro do Tipo I de cada gráfico reflete a importância relativa das variáveis monitoradas. Machado e Costa (2008) avaliam o desempenho do gráfico T^2 baseado em componentes principais e os gráficos de controle univariados simultâneos baseados nas variáveis originais ou com base nas componentes principais. Machado (2009) propõe uma nova estatística quando se trata do monitoramento da matriz de covariância e, por conseguinte, um novo gráfico para essa matriz, o VMAX, medindo seu desempenho quando comparado com o gráfico da variância amostral generalizada $|S|$.

Recentemente, Neves (2010) desenvolve uma metodologia para comparação entre o desempenho de dois gráficos de controle multivariados, o T^2 de Hotelling e o *Dynamic Principal Component Analysis* - DPCA, baseada na análise de componentes principais dinâmicas, através de simulação e utilizando como medida de desempenho o *NMA*.

Este estudo busca realizar a medição da eficiência do GCM T^2 de Hotelling, quando comparado aos gráficos de \bar{X} univariados simultâneos (*SU \bar{X}*), através do monitoramento de um processo real, ou seja, utilizando os estimadores do vetor de médias e matriz de correlações. O indicador de desempenho é o Número Médio de Amostras (*NMA*), sendo os indicadores do gráfico T^2 obtidos por meio de um programa de simulação, feito no *software* R, e os indicadores dos gráficos \bar{X} obtidos de forma exata quando o processo é bivariado e por meio de um algoritmo quando é trivariado. São analisados diversos cenários, considerando o processo trivariado e bivariado, pelo fato de que uma das características não mostrou-se correlacionada com as demais, e com deslocamento em uma, duas e três variáveis, adotando $\delta = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0$ e $\alpha = 0,0027$.

1.3 Problema de pesquisa

A realização desta dissertação baseia-se no levantamento de uma hipótese de superioridade dos gráficos de controle T^2 de Hotelling em relação aos gráficos de \bar{X} univariados simultâneos, quando se trata de processos multivariados. O T^2 de Hotelling é capaz de condensar as informações das p variáveis num único gráfico, levando em consideração a correlação existente entre as mesmas, enquanto o \bar{X} necessita de p gráficos univariados, considerando ou não a correlação, ocasionando uma diminuição do nível de significância dos gráficos de controle univariados e aumentando a amplitude de seus limites, tornando a detecção de causas especiais mais difícil.

Neste sentido o problema de pesquisa deste estudo é dado por: Qual ferramenta é mais eficiente na detecção de mudanças no vetor de médias em processos multivariados, o Gráfico de Controle Multivariado T^2 de Hotelling ou os Gráficos de \bar{X} univariados simultâneos?

Objetivos foram traçados para verificar a resposta da pergunta de pesquisa levantada, estes objetivos estão expostos na seção seguinte.

1.4 Objetivos

Os objetivos deste trabalho estão divididos em dois grupos. O primeiro aborda o objetivo geral e o segundo os objetivos específicos. Nesta seção eles serão apresentados e detalhados.

1.4.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste estudo consiste em verificar a eficiência do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling em relação aos de \bar{X} univariados simultâneos ($SU \bar{X}$), na detecção de mudanças no vetor de médias do processo.

1.4.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral estabelecido acima, os seguintes objetivos específicos são necessários:

1. Apresentar a metodologia de construção do Gráfico Multivariado T^2 de Hotelling e dos gráficos $SU \bar{X}$;
2. Elaborar um algoritmo capaz de gerar dados multivariados e fazer todo procedimento de análise para o cálculo do indicador utilizado, Número Médio de Amostras até a ocorrência de um sinal (NMA), através do *software* R;
3. Calcular o desempenho dos gráficos multivariados T^2 de Hotelling e dos gráficos $SU \bar{X}$ simultâneos na presença de perturbações no vetor de médias;
4. Determinar a eficiência entre o gráfico multivariado T^2 de Hotelling e os gráfico de \bar{X} univariados simultâneos;
5. Realizar uma aplicação das técnicas apresentadas.

1.5 Estrutura da dissertação

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo foi feita uma breve introdução a respeito da área de interesse do trabalho, além dos objetivos geral e específicos, as delimitações do trabalho, a justificativa para a escolha do tema e importância deste estudo.

O Capítulo 2 é dedicado a explanação dos conceitos mais básicos dos gráficos de controle univariados e multivariados, necessários para um melhor entendimento do tema, além de englobar os aspectos mais relevantes sobre os gráficos de controle \bar{X} univariados simultâneos e do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling, sendo estes os gráficos utilizados no estudo, bem como a demonstração do indicador utilizado para obter a eficiência do GCM em questão.

No Capítulo 3 encontram-se os procedimentos metodológicos empregados no desenvolvimento deste trabalho, detalhando os métodos utilizados, o processo produtivo em estudo e a elaboração do programa de simulação.

O Capítulo 4 trata dos resultados obtidos através dos conceitos dos capítulos anteriores, incluindo o cálculo do desempenho do GCM T^2 de Hotelling e comparando-o com os gráficos de \bar{X} univariados simultâneos.

O Capítulo 5 trás a aplicação da metodologia estudada, com o intuito de aproximar o leitor à prática.

As conclusões e sugestões para futuras pesquisas são apresentadas no Capítulo 6.

2 GRÁFICOS DE CONTROLE

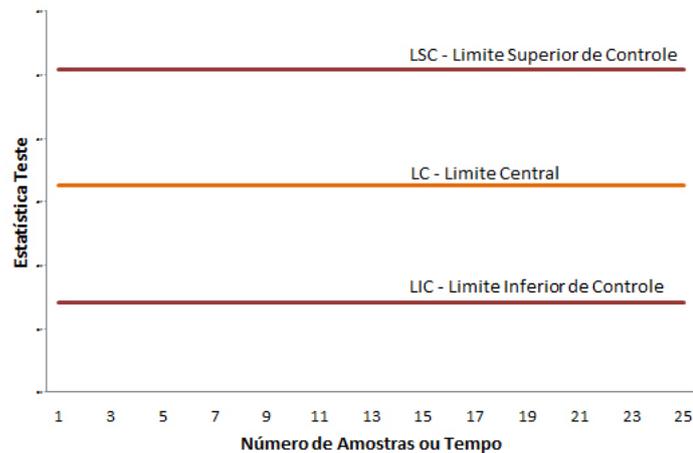
Nesta seção serão abordados os tipos de gráficos de controle univariados e multivariados, a fim de introduzir conceitos básicos sobre os mesmos. De forma mais detalhada, o leitor poderá conhecer o GCM T^2 de Hotelling, sendo este o conteúdo central do estudo, dando suporte a sua aplicação, apresentação do desenvolvimento teórico da técnica, além das opções para interpretação desta carta de controle.

2.1 Considerações iniciais

Considerando que o cliente torna-se cada vez mais exigente, os produtos devem corresponder aos mesmos, ou seja, serem produzidos por processos onde se espera que a variabilidade seja pequena em relação as características da qualidade do produto. Neste sentido, o CEP possui uma gama de ferramentas capazes de auxiliar na resolução de problemas desta natureza, as mais conhecidas e utilizadas são os Gráficos de Controle (GC). Segundo Shewhart (1931), o GC é uma representação gráfica de determinado processo ao longo do tempo, sendo formado pela linha central (LC) representando o nível da distribuição do processo, e por duas linhas que representam os limites superior (LSC) e inferior (LIC) de controle, como na Figura 1.

Considere a variável mensurável X , onde em cada intervalo de tempo h , são retiradas amostras de tamanho n . Para cada amostra um valor de uma estatística é determinado, por exemplo \bar{X} , então estes valores são plotados nos GC, onde estão especificados os limites calculados previamente com base nas medidas de X quando o processo estava sob controle. A interpretação dos GC é simples, uma vez que a estatística calculada esteja fora dos limites de controle, assume-se que uma causa especial possa ter ocorrido. Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2010), quando diagnosticadas causas especiais, é necessário eliminá-las, pois estas podem alterar a distribuição da variável aleatória X , tirando sua média do valor-alvo e/ou aumentando a sua variabilidade, ou seja, estas causas especiais fazem com que a estatística calculada caia fora dos limites de controle. Porém, quando as estatísticas estão perto na linha

Figura 1: Estrutura do Gráfico de Controle - GC



Fonte: Produção do próprio autor

central não significa que o processo esteja sob controle, esta situação também pode ser gerada pela ocorrência de má formação das amostras.

Os GC são classificados de acordo com os tipos de características da qualidade que são monitoradas, os primeiros são os GC por variáveis, onde todas as características podem ser expressas como valor contínuo, por exemplo, peso, temperatura e altura. Outros tipos são conhecidos como GC por atributos, ao contrário do anterior, estas características não podem ser expressas numa escala contínua, ou seja, são decorrentes de processos qualitativo nominal ou discretos, por exemplo, número de erros.

2.2 Gráficos de controle univariados

Shewhart, em 1931, publica a obra *Economic Control of Quality Manufactured Products*, onde apresenta uma ferramenta com a capacidade de avaliar o processo através de gráficos, estes conhecidos como gráficos ou cartas de controle. E desde então os GC são amplamente utilizados, pois servem de apoio ao controle da qualidade, uma vez que auxiliam na identificação e rastreamento de causas de defeitos no processo produtivo. Sendo assim, esta ferramenta permite um controle contínuo do processo, que leva à produção consciente, com qualidade e custos adequados.

Um GC pode ser definido como um gráfico que apresenta uma evolução ao longo do tempo de determinada estatística para certa característica da qualidade. Além dos valores desta característica, os limites central, inferior e superior, também constituem o gráfico. Segundo Shewhart (1931), existe a suposição de normalidade desta estatística, com média μ e desvio

padrão σ .

Uma forma geral para a construção dos GC foi elaborada e construída em função dos parâmetros j , h e L , onde j representa o tamanho dos subgrupos racionais, para $j = 1, \dots, m$; h o intervalo entre as amostras; e L a largura do intervalo, conforme apresentada na Tabela 1.

Tabela 1: Esquema de montagem geral do GC tradicional para a média, amplitude e desvio-padrão

Subgrupo Racional	Descrição das amostras				\bar{X}	R	S
1	\bar{X}_{11}	\bar{X}_{12}	\cdots	\bar{X}_{1n}	\bar{X}_1	R_1	S_1
2	\bar{X}_{21}	\bar{X}_{22}	\cdots	\bar{X}_{2n}	\bar{X}_2	R_2	S_2
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	\bar{X}_{m1}	\bar{X}_{m2}	\cdots	\bar{X}_{mn}	\bar{X}_m	R_k	S_k

Considere uma estatística qualquer, X , o modelo geral dos limites de controle do GC de Shewhart são dados por,

$$LIC = E(X) - L\sigma_X \quad (1)$$

$$LC = E(X) \quad (2)$$

$$LSC = E(X) + L\sigma_X. \quad (3)$$

Os principais gráficos de Shewhart utilizados no monitoramento de características da qualidade são, o gráfico da média \bar{X} , o da amplitude R , o da variância S^2 e o do desvio-padrão S (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2010). Os limites para todos os gráficos são análogos ao modelo geral, por exemplo, para o gráfico de \bar{X}

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \quad (4)$$

$$LC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \quad (5)$$

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}. \quad (6)$$

Shewhart (1931) propõe que os limites de controle possuam três desvios-padrão de afastamento em relação à linha média, pois o intervalo de $\pm 3\sigma_{\bar{X}}$ em torno de μ , enquanto o processo está sob controle, contém 99,73% dos valores de \bar{X} , gerando uma forte proteção contra alarmes falsos (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2010).

2.2.1 Gráficos de controle \bar{X} univariados simultâneos

Os GC \bar{X} univariados simultâneos nada mais são do que os GC de Shewhart usados de forma simultânea para várias características da qualidade, podendo utilizar os limites de

Bonferroni, os quais conseguem manter o Erro do Tipo I (α') geral pré-estabelecido fixo. O método da desigualdade de Bonferroni aplicado em p gráficos univariados, permite manter um ETI idêntico para cada gráfico (α_i), onde cada um é igual ao ETI geral dividido pelo número de variáveis monitoradas, isto é, $\alpha_i = \alpha'/p$, para todo $i = 1, 2, \dots, p$ (SEREL; MOSKOWITZ; TANG, 2000).

Por exemplo, considere que duas características são independentes e foram construídos dois gráficos univariados de \bar{X} , com $\alpha = 0,0027$, ou seja, $L = 3$. A probabilidade de que as médias estejam dentro dos limites de controle é dada por $(1-0,0027)(1-0,0027)$, então a probabilidade do Erro do Tipo I conjunto (α') é igual a $\alpha' = 0,005393$. De forma geral,

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p. \quad (7)$$

A partir de 7 é possível calcular a probabilidade do ETI para cada gráfico, de forma que esta probabilidade, para um processo p -variado com variáveis independentes possa ser mantida fixa. Por exemplo, para manter $\alpha' = 0,0027$, num processo bivariado, tem-se $\alpha = 0,00135$. Segundo Serel, Moskowitz e Tang (2000), o sistema baseado na desigualdade de Bonferroni é conservador, pois ele não usa a estrutura de dependência das variáveis monitoradas.

De acordo com Serel, Moskowitz e Tang (2000), se as variáveis são independentes, ou seja, a matriz de correlação é uma matriz diagonal, os limites podem ser encontrados a partir de α_1 (e por sua vez, α_i , $i = 2, \dots, p$), onde $(1 - \alpha_1)(1 - r_2\alpha_1)\dots(1 - r_p\alpha_1) = 1 - \alpha$, onde $r_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, para $i = 2, \dots, p$, r é igual ao risco do erro do tipo I, é utilizado para determinar a importância das características para o processo em termos de suas taxas de risco, se r é assumido igual a 1 para todos os p gráficos, volta-se para (7), e todos os α_i 's serão iguais. No entanto, uma solução não é tão simples quando as variáveis são dependentes.

Considerando X_1 e X_2 , e seu coeficiente de correlação ρ , tem-se

$$B(x_1, x_2; \rho) = P(X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2; \rho) \quad (8)$$

denotando a função de densidade acumulada normal bivariada, com vetor de médias zero e correlação ρ . Usando a (8), obtém-se

$$1 - \alpha = B(-L_1, -L_2; \rho) - B(-L_1, L_2; \rho) - B(L_1, -L_2; \rho) + B(L_1, L_2; \rho) \quad (9)$$

onde L representa o número de desvios do limite do gráfico de Shewhart. Já para o caso trivariado, tem-se

$$G(x_1, x_2, x_3; \mathbf{R}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3; \mathbf{R}), \quad (10)$$

que é a função de distribuição de probabilidade normal trivariada, com vetor de médias zero e matriz de correlação \mathbf{R} . De acordo com Serel, Moskowitz e Tang (2000), desde o *International Mathematical and Statistical Libraries* de 1989, não há uma subrotina para calcular $G(\cdot)$, para $p > 2$, que vá fornecer um método exato para calcular a função de distribuição de probabilidade normal trivariada. Desta forma, seu algoritmo é baseado no método investigado por Rice *et al.* (1979), para calcular uma probabilidade de $G(-x_1, -x_2, \dots, -x_p)$ aproximadamente. Para mais detalhes ver Serel, Moskowitz e Tang (2000).

Esse tipo de ajuste pode vir acompanhado de um problema, pois uma vez que ocorre a diminuição do nível de significância dos gráficos de controle univariados, a amplitude de seus limites é ampliada, tornando a detecção de sinais mais difícil (GLÓRIA, 2006). Desta forma, quanto maior a quantidade de características a serem monitoradas, menor a eficiência da técnica.

2.3 Gráficos de controle multivariados

Os gráficos de controle multivariados são capazes de monitorar mais de uma característica de qualidade, de forma simultânea, levando em consideração a correlação existente entre as várias características que são monitoradas de forma conjunta, permitindo uma otimização dos processos devido à maior rapidez na detecção de possíveis problemas.

Três dos mais populares gráficos de controle multivariados são o T^2 de Hotelling, que será abordado neste estudo, o Gráfico MCUSUM (Soma Cumulativa Multivariada) e o gráfico MEWMA (Média Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada), que são mais sensíveis do que a carta T^2 em relação à detecção de pequenas alterações no vetor de médias (KONRATH, 2002).

O primeiro estudo foi realizado por Hotelling (1947), posteriormente outros autores deixaram suas contribuições: Jackson (1985), Lowry *et al.* (1992), Mason, Tracy e Young (1992), Lowry e Montgomery (1995), Mason, Tracy e Young (1995), Sullivan e Woodall (1996), Aparisi (1996), Serel, Moskowitz e Tang (2000), Mason e Young (2002), Machado e Costa (2008), Costa e Machado (2011), dentre outros.

2.3.1 Conceitos gerais e estimação de parâmetros

Antes de abordar o conceito dos GCM, neste caso principalmente o Gráfico T^2 de Hotelling, é necessária a apresentação de alguns conceitos básicos sob o enfoque multivariado. Inicialmente considere um um vetor \mathbf{X} contendo p características, onde cada característica é

uma variável aleatória (*v.a.*), ou seja, X_i com $i = 1, 2, \dots, p$. Neste caso \mathbf{X} pode ser chamado de vetor aleatório, sendo denotado por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}.$$

No caso de vetores aleatórios, as *v.a.'s* podem ser analisadas individualmente, porém torna-se interessante analisar o vetor como um todo, considerando os possíveis relacionamentos entre as p -variáveis, sendo estes relacionamentos descritos por medidas de correlação (MINGOTI, 2005).

A partir do vetor aleatório, tem-se o vetor $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$, chamado de vetor de médias de \mathbf{X} , dado por:

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix},$$

sendo $\mu_i = E(X_i)$ é a média ou esperança da *v.a.* X_i , $i = 1, 2, \dots, p$.

Outra definição importante é a de variância, onde a variância do i -ésimo componente de \mathbf{X} é dada por $Var(X_i) = \sigma_i^2 = \sigma_{ii}$. A partir desta medida o desvio-padrão pode ser calculado, fornecendo informações a respeito da disposição dos valores da variável X_i em relação a μ_i , indicando o nível de dispersão dos valores (MINGOTI, 2005).

Uma medida que é utilizada para medir o grau de relacionamento entre *v.a.'s* é conhecida como covariância. De acordo com Härdle e Simar (2007), esta é uma medida de dependência entre variáveis aleatórias, onde dadas duas *v.a.'s*, X_i e X_j , sua covariância teórica é dada por:

$$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)].$$

Se X_i e X_j são independentes, $Cov(X_i, X_j)$ é necessariamente igual a zero, mas o contrário não é verdadeiro. A covariância de uma *v.a.* com ela mesma, por exemplo, $Cov(X_i, X_i)$, é a própria variância:

$$\sigma_{ii} = Cov(X_i, X_i) = Var(X_i).$$

Geralmente, os valores de σ_{ij} são apresentados no formato de matriz. A matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório \mathbf{X} , de acordo com Johnson e Wichern (2007) e Mingoti (2005), é uma matriz quadrada e simétrica, é dada por:

$$Cov(\mathbf{X}) = \Sigma_{p \times p} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

Apesar da covariância possuir informação a respeito do relacionamento entre as variáveis, é complicado avaliar o quão forte é essa relação, uma vez que não se tem um valor de referência para comparar os valores obtidos σ_{ij} , assim, esta deficiência pode ser corrigida utilizando a correlação entre as variáveis.

O coeficiente de correlação linear entre a i -ésima e j -ésima variáveis (ρ_{ij}) do vetor \mathbf{X} é definido em termos da covariância σ_{ij} e das variâncias σ_{ii} e σ_{jj} , onde

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}, \quad (11)$$

onde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, para $i = j$ tem-se $\rho_{ij} = 1$.

De acordo com Johnson e Wichern (2007) esta medida mede a quantidade de associação linear entre as variáveis aleatórias X_i e X_j . Sendo esta medida mais apropriada para este tipo de associação do que a covariância, pois além da mesma ser adimensional, possui valores de referência entre -1 e 1, o que ocasiona um melhor entendimento, uma vez que quanto mais próximo de 1, mais indicação de relacionamento linear positivo entre as variáveis analisadas, e quanto mais próximo de -1, mais indicação de relacionamento linear negativo. Quando a correlação é próxima de zero, pode indicar uma inexistência de relacionamento linear entre as variáveis.

Desta forma, a matriz de correlação populacional do vetor aleatório \mathbf{X} é dada por:

$$\rho_{p \times p} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta apresentação dos valores de ρ_{ij} , geralmente é dada quando se tem muitas variáveis, assim facilita a visualização.

Em situações práticas, o vetor de médias e as matrizes de covariância e correlação precisam ser estimadas por meio de dados amostrais. Sendo assim, considere uma amostra de tamanho n , e que para cada elemento da amostra tenham sido observadas p variáveis aleatórias, neste caso têm-se n vetores aleatórios independente e identicamente distribuídos (*i.i.d.*). Assim, o vetor de médias μ será estimado pelo vetor de médias amostrais \bar{X} , dado por:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix},$$

onde \bar{X}_i é a média amostral da i -ésima variável, $i = 1, 2, \dots, p$. A matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$ será estimada pela matriz de covariâncias amostrais $S_{p \times p}$, definida por:

$$S_{p \times p} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix},$$

com $S_{ij} = S_{ji}$, $j \neq i$ e S_{ii} é a variância amostral da i -ésima variável, dada por:

$$S_{ii} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)^2}{n - 1},$$

e

$$S_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)(X_{jl} - \bar{X}_j)}{n - 1}$$

a covariância amostral da i -ésima e j -ésima variáveis. Finalmente, a matriz de correlação $\rho_{p \times p}$ será estimada pela matriz de correlação amostral $R_{p \times p}$:

$$R_{p \times p} = \begin{bmatrix} 1 & R_{12} & \cdots & R_{1p} \\ R_{21} & 1 & \cdots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

em que

$$R_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}},$$

é o coeficiente de correlação linear amostral entre a i -ésima e j -ésima variáveis. Este coeficiente é conhecido como coeficiente de correlação linear amostral de Pearson (JOHNSON; WICHERN, 2007).

2.3.2 GCM T^2 de Hotelling

O GCM T^2 foi desenvolvido por Hotelling (1947), pioneiro na pesquisa sobre os GCM. Os gráficos de controle multivariados T^2 de Hotelling são os mais conhecidos e empregados para o monitoramento do vetor de médias de processos que contenham duas ou mais variáveis, sendo considerados gráficos do tipo Shewhart, pouco sensíveis a pequenos e moderados deslocamentos dos parâmetros do processo. Seu funcionamento se dá a partir do controle simultâneo destas características correlacionadas, servindo para indicar a qualidade de um único processo produtivo.

A estatística T^2 de Hotelling é uma generalização da estatística univariada t , baseada em estimativas amostrais da matriz de covariância, dada por

$$\mathbf{T}^2 = n[\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0]' \mathbf{S}^{-1} [\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0]. \quad (12)$$

Sendo $\bar{\mathbf{X}}$, o vetor de média amostrais, e a matriz de covariância amostrais, $\mathbf{S}_{p \times p}$, utilizados para estimar $\boldsymbol{\mu}$ e *Sigma*.

O T^2 de Hotelling pode ser utilizado em dois tipos de dados, em subgrupos e observações individuais. De uma forma geral, o GCM T^2 pode ser utilizado para monitoramento de subgrupos racionais, onde a matriz de dados é apresentada na Tabela 2.

onde X_{ijk} refere-se a k -ésima observação no j -ésimo subgrupo racional da i -ésima variável, com $k = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, p$.

Lowry e Montgomery (1995) apresentam duas fases para a construção dos gráficos. A Fase I utiliza os GC para testar se o processo estava sob controle quando a primeira amostra foi retirada, possibilitando um conjunto de dados sob controle para estabelecer os limites de controle, e a Fase II, onde os limites de controle da Fase I são utilizados para testar se o controle permanece, considerando novas amostras.

Tabela 2: Matriz de dados para o GCM T^2 de Hotelling para subgrupos

Subgrupo Racional	Amostra	Descrição das amostras		
		X_1	\dots	X_p
1	1	X_{111}	\dots	X_{p11}
	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
	n	X_{11n}	\dots	X_{p1n}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
m	1	X_{1m1}	\dots	X_{pm1}
	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
	n	X_{1mn}	\dots	X_{pmn}

Tendo p como o número de características de qualidade analisadas de forma simultânea, n o tamanho de cada subgrupo, m o número de subgrupos e F o valor tabelado da estatística com o nível de significância determinado, estabelecem-se os limites de controle conforme descrito abaixo.

Para Lowry e Montgomery (1995), os limites de controle do gráfico T^2 de Hotelling são dados por

$$LSC_{faseI} = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1}. \quad (13)$$

Enquanto que na Fase II os novos limites de controle são,

$$LSC_{faseII} = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (14)$$

Os limites inferiores de controle para o GCM T^2 de Hotelling são sempre zero ($LIC = 0$), tanto para fase I como para a fase II, pois a estatística T^2 é positiva.

Outra forma de utilização do T^2 de Hotelling é para observações individuais, ou seja, quando n é igual a 1. A matriz de dados do GCM T^2 de Hotelling para observações individuais é dada na Tabela 3.

onde X_{ij} refere-se a amostra do j -ésimo subgrupo racional da i -ésima variável, com $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, m$.

De acordo com Mason e Young (2002), a estatística T^2 de Hotelling para observações individuais é análoga a (12), e estabelecem que o limite da primeira fase é

Tabela 3: Matriz de dados para o GCM T^2 de Hotelling para observações individuais

Subgrupo Racional	Descrição das amostras		
	X_1	\cdots	X_p
1	X_{11}	\cdots	X_{p1}
2	X_{12}	\cdots	X_{p2}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
m	X_{1m}	\cdots	X_{pm}

$$LSC_{faseI} = \frac{(m-1)^2}{m} Beta_{(\alpha; \frac{p}{2}; \frac{(m-p-1)}{2})},$$

sendo $Beta_{(\alpha; \frac{p}{2}; \frac{(m-p-1)}{2})}$ o α -ésimo quantil superior da distribuição beta, $Beta_{(\frac{p}{2}; \frac{(m-p-1)}{2})}$.

Quando novas observações são extraídas do processo, na Fase II, o limite é calculado da seguinte forma:

$$LSC_{faseII} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{(\alpha, p, m-p)},$$

sendo $F_{(\alpha, p, m-p)}$ o α -ésimo quantil da distribuição $F_{(p, n-p)}$.

Assim, como para os GCM para subgrupos, quando se trata de observações individuais, os limites inferiores de controle também são nulos.

Segundo Montgomery (2009), quando os parâmetros μ e Σ são estimados a partir de um número de amostras elevado, o limite superior é dado por

$$LSC_{T^2} = \chi_{(\alpha, p)}^2, \quad (15)$$

sendo $\chi_{(\alpha, p)}^2$ o α -ésimo quantil superior da distribuição qui-quadrado, tendo p graus de liberdade.

No GCM T^2 de Hotelling, assim como nas cartas univariadas, vistas na Seção 2.2, um ponto é identificado fora dos limites de controle quando um valor de T^2 ou χ^2 excede o limite superior de controle.

2.3.3 Decomposição do GCM T^2 de Hotelling

Após a identificação de pontos fora de controle, na etapa de construção dos gráficos, é necessário estudar estes sinais para avaliar quais possíveis variáveis que estão causando esse comportamento. A ocorrência de um sinal se dá quando pelo menos uma das p variáveis estiver

fora dos limites, devido ao relacionamento entre as variáveis, ou à combinação destas situações (MASON; TRACY; YOUNG, 1995).

Diversas formas de decomposição são sugeridas: Jackson (1985) e Pignatiello e Runger (1990) indicam uso de componentes principais; Wade e Woodall (1993) utilizam ajustes de regressão em variáveis individuais para melhorar o poder do diagnóstico do gráfico (GORAYEB, 2010); e Mason, Tracy e Young (1995) decompõem a estatística T^2 em componentes independentes.

2.4 Alarmes do gráfico de controle

A utilização dos GC está associada a dois tipos de riscos, o risco α de sinalizar indevidamente uma causa especial, ou seja, um valor cair fora dos limites de controle e na verdade ser apenas um alarme falso, e o risco β , que ocorre quando os pontos caem dentro dos limites de controle, no entanto está sob a influência de uma causa especial, assim a causa especial não será sinalizada.

Desta forma é possível perceber que há uma relação muito estreita entre os GC e teste de hipóteses, por exemplo, que suponha na Figura 2 o eixo vertical é referente às médias amostrais. O processo estará sob controle caso todos os valores das médias estiverem dentro dos limites de controle.

Trabalhando no formato de hipóteses pode-se ter

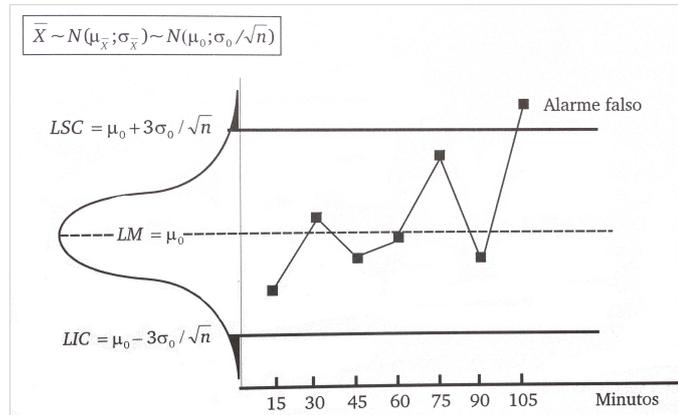
H_0 : Processo em controle

H_1 : Processo fora de controle

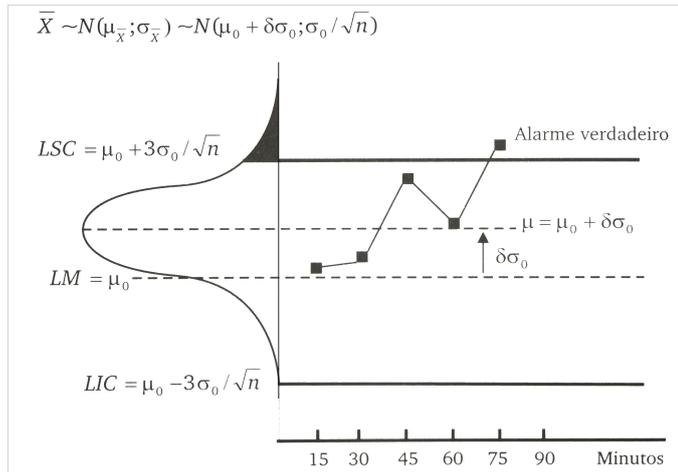
onde a interpretação seria, caso um ponto estivesse entre os limites de controle não haveria rejeição da hipótese nula, e quando estivesse fora destes limites a hipótese nula seria rejeitada.

As Figuras 2 e 3 retratam a ocorrência de um alarme falso, onde a hipótese nula não é rejeitada, pois a média da variável aleatória \bar{X} é igual ao valor-alvo μ_0 ; e um alarme verdadeiro, onde H_1 é verdadeira pois a média $\mu_{\bar{X}}$ da variável aleatória \bar{X} é diferente de μ_0 , respectivamente.

Referente à tomada de decisão, em relação às hipóteses, dois tipos de erros estão associados. Na estatística tais erros são conhecidos como, Erro do Tipo I (ETI), que ocorre quando rejeita-se a hipótese nula, visto que ela é verdadeira, e o Erro do Tipo II (ETII), que é o

Figura 2: Gráfico de \bar{X} : ocorrência de um alarme falso

Fonte: Costa, Epprecht e Carpinetti (2010)

Figura 3: Gráfico de \bar{X} : ocorrência de um alarme verdadeiro

Fonte: Costa, Epprecht e Carpinetti (2010)

erro ocorrido quando não rejeita-se a hipótese nula, quando de fato ela é falsa. As probabilidades desses erros podem ser denotadas por:

$$P(ETI) = P(\bar{X} \notin [LIC, LSC] \mid \mu = \mu_0)$$

$$P(ETII) = P(\bar{X} \in [LIC, LSC] \mid \mu = \mu^*), \forall \mu^* \neq \mu_0.$$

Em relação ao CEP, ambos os erros podem gerar perda de tempo, de dinheiro, de material, além de sérios problemas ao processo. Estes problemas ocorrem quando um processo é interrompido para realizar a vistoria de variações inexistentes, e quando não é interrompido uma vez constatado que o processo está sob controle, porém as variações existam.

2.5 Desempenho e eficiência dos gráficos de controle

Durante o período em controle o número médio de amostras até o sinal é denominado NMA_0 , enquanto que durante o período fora de controle, o número médio de amostras até o próximo sinal é conhecido por NMA_1 . Sendo assim, quanto maior o NMA_0 , maior é a possibilidade do processo se encontrar sob controle, de forma a minimizar o número de falsos alarmes, por outro lado, quando o processo está fora de controle, os valores do NMA_1 deverão ser menores, para que seja possível detectar rapidamente uma alteração no parâmetro do processo.

Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2010), o NMA_0 e NMA_1 são determinados, respectivamente, em função de α e β , ou seja, em função do Erro do Tipo I (ETI) e Erro do Tipo II (ETII), onde

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{P(ETI)}$$

e, sob a hipótese H_1 verdadeira,

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - P(ETII)} = \frac{1}{1 - P(\text{erro negligenciado})}. \quad (16)$$

Uma forma de analisar o desempenho do GC está associado à detecção rápida de um deslocamento na média, isto é, $\mu^* = \mu_0 + \delta\sigma_X$, com $\delta \neq 0$ e $\mu^* \neq \mu_0$. Desta forma é possível calcular o Número Médio de Amostras até a detecção de um alarme falso no processo, que se baseia na probabilidade

$$P(ETI_1) = P(\bar{X} \notin (LIC; LSC) | \mu = \mu^*) = 1 - P(LIC < \bar{X} < LSC | \mu = \mu^*). \quad (17)$$

Desenvolvendo (17) tem-se

$$P(ETI_1) = 1 - \left[P\left(Z < \frac{\mu_0 + \frac{L\sigma_X}{\sqrt{n}} - \mu_0 - \delta\sigma_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \right) - P\left(Z < \frac{\mu_0 - \frac{L\sigma_X}{\sqrt{n}} - \mu_0 - \delta\sigma_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \right) \right],$$

logo,

$$P(ETI_1) = 1 - [\Phi(-\delta\sqrt{n} + L) - \Phi(-\delta\sqrt{n} - L)]. \quad (18)$$

Já o NMA_0 conjunto para p gráficos univariados com observações individuais, análogo a (18), é dado por

$$P(ETI_1) = 1 - [\Phi(-L_1 - \delta_1 < X_1 \leq L_1 - \delta_1, \dots, -L_p - \delta_p < X_p \leq L_p - \delta_p)]^p. \quad (19)$$

A probabilidade conjunta de (19), deve ser calculada com X_i seguindo uma distribuição normal multivariada com vetor de médias zero e estrutura de covariância conhecida.

O NMA_1 é a medida mais utilizada para comparar o desempenho de vários gráficos de controle, tanto univariados como multivariados. Para tanto, os limites de controle devem estar ajustados de modo a obter o mesmo valor de NMA_0 sob controle estatístico, para desta forma estabelecer uma comparação de NMA_1 's para várias dimensões do desvio do processo (δ).

Em relação ao GCM T^2 de Hotelling, tem-se a seguinte alteração em (16),

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - P(\chi_p^2(\lambda_d) < LSC)}, \quad (20)$$

onde $\mathbf{d} = \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)}$, sendo $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ o vetor de médias e a matriz de covariâncias das p características de qualidade após a ocorrência da causa especial, respectivamente. Então, T_i^2 , após a causa especial, tem distribuição qui-quadrado não-central com parâmetro de não-centralidade $\lambda_d = nd^2$, sendo n o tamanho da amostra (para maiores detalhes ver Aparisi (1996)). Como a estatística T^2 possui distribuição de qui-quadrado, $LC = \chi_{(p,\alpha)}^2$, onde α é a probabilidade de alarmes falsos.

A eficiência relativa se diz respeito a comparação do desempenho entre gráficos de controle, onde, mantendo uma mesma taxa de número médio de amostras até um alarme falso, NMA_0 , para ambos os gráficos, o mais eficiente será aquele que apresentar o menor NMA_1 , ou seja, aquele que detecte mais rapidamente a próxima causa especial.

De acordo com Costa e Machado (2011), a eficiência relativa é dada por

$$ER\% = 100 \left[\frac{NMA_{GC_1} - NMA_{GC_2}}{NMA_{GC_1}} \right], \quad (21)$$

onde NMA_{GC_1} é referente ao gráfico normalmente utilizado ou já existente, e o NMA_{GC_2} é referente ao gráfico proposto.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo é destinado a descrição da metodologia de pesquisa utilizada neste estudo, sendo necessária uma descrição do método de simulação e um esquema que permite indicar as etapas que o algoritmo executa para alcançar o resultado.

3.1 O método utilizado

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre o referencial teórico a partir de pesquisa documental e bibliográfica, tendo em vista que foram utilizados documentos, artigos, teses e outros trabalhos disponíveis.

A revisão do referencial teórico “consiste em uma síntese, a mais completa possível, referente ao trabalho e aos dados pertinentes ao tema, dentro de uma sequência lógica” (MARCONI; LAKATOS, 2001, p. 248). A pesquisa bibliográfica abrange a bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto (MARCONI; LAKATOS, 2001).

Este estudo possui caráter descritivo, pois tem o objetivo de descrever completamente determinado fenômeno, através de observação, registros e análise, além de correlacionar fatos ou fenômenos sem manipulá-los. De acordo com Gil (1991), o foco das pesquisas descritivas são a descrição das características de uma determinada população ou fenômeno, ou o estabelecimento de relação entre as variáveis.

Trata-se de um estudo de caso, uma vez que estuda determinado indivíduo, de forma representativa do seu universo, com o intuito de examinar aspectos de sua vida, especificamente neste trabalho o indivíduo será uma fábrica de tintas localizada na região metropolitana de Fortaleza. Neste sentido é possível afirmar que este estudo tem características de uma pesquisa exploratória, que segundo Mattar (1999), é baseada na utilização de levantamento de dados secundários, observação informal, levantamento de experiências e estudo de caso. Além da

característica de simulação, a qual se destina a representar uma realidade através de variáveis abstratas.

Para a realização da aplicação da técnica aos dados coletados, foi utilizado o *software* de código aberto R, e também para o cálculo do indicador sugerido, *NMA*, pois o mesmo conta com a possibilidade de programação de acordo com a necessidade e também possui funções estatísticas prontas para uso.

3.2 A metodologia da pesquisa

O estudo consiste em analisar o comportamento de dois tipos de gráficos de controle em diferentes cenários, o GCM T^2 de Hotelling e os gráficos simultâneos de \bar{X} univariados ($SU\bar{X}$).

Neste sentido, quatro etapas são realizadas (Figura 4): (i) Coleta, onde é feita a coleta de dados e o cálculo dos estimadores, (ii) Simulação, onde os dados são gerados a partir de estimadores do processo real em questão, e posteriormente expostos à perturbações para investigar o tipo de comportamento, (iii) Comparação, nesta etapa os gráficos serão comparados através do indicador Número Médio de Amostras - *NMA*, que mede o desempenho individual de cada gráfico (ver Seção 2.5), e (iv) Aplicação, onde uma aplicação das ferramentas apresentadas no estudo é realizada.

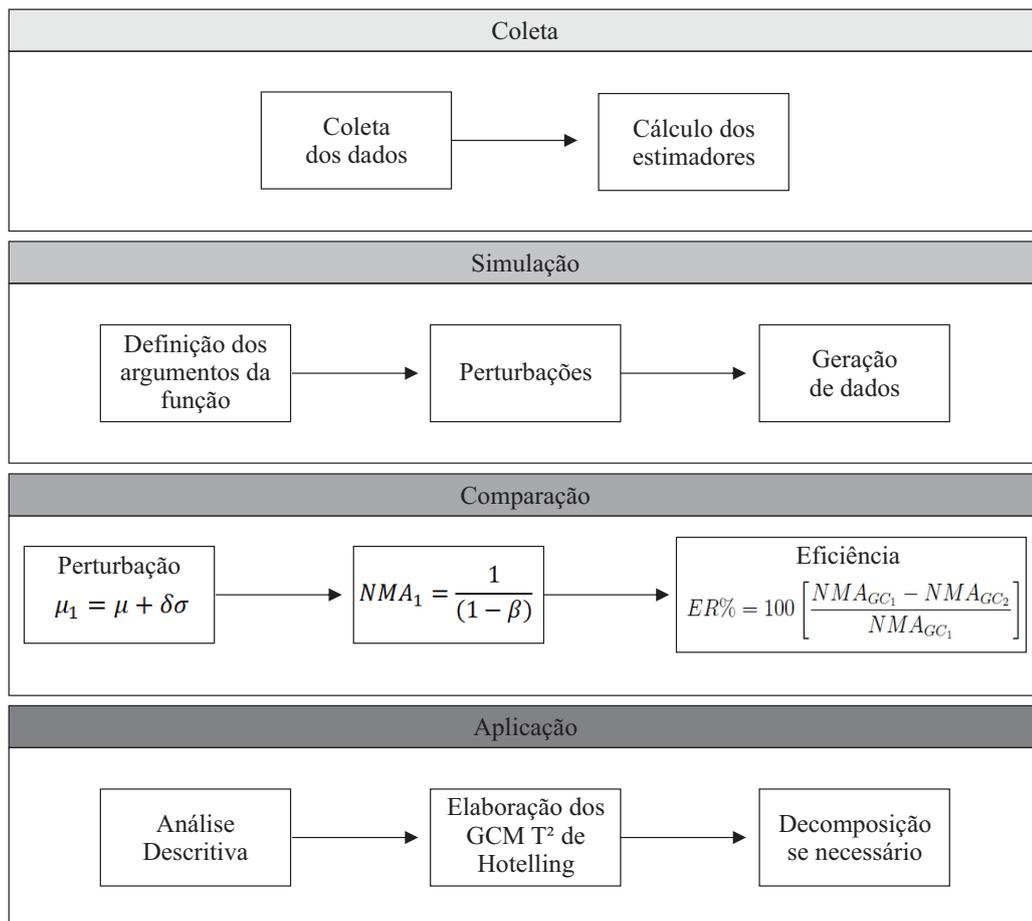
Os indicadores do GCM T^2 de Hotelling são calculados através de simulação e de informações obtidas na literatura, enquanto os indicadores do $SU\bar{X}$ são calculados de forma exata para o processo bivariado e por meio de um algoritmo para o processo trivariado. O programa de simulação foi elaborado no *software* R, principalmente por possuir código aberto, possibilitando a programação de funções próprias e provavelmente mais adequadas ao estudo.

3.3 Construção do programa de simulação

Pode-se entender a palavra simular como imitar, tratando a simulação como um instrumento para atingir determinados objetivos. A simulação do comportamento das variáveis aleatórias envolvidas geram, em computadores, sequências de valores que têm comportamentos similares às distribuições, e a partir destes valores é possível analisar o comportamento dessas variáveis.

A técnica de simulação utilizada neste estudo baseia-se no Método de Monte Carlo

Figura 4: Etapas que compõem o estudo



Fonte: Elaboração do próprio autor

(MMC), que consiste na utilização de probabilidades e números aleatórios para analisar situações, utilizando a geração de valores aleatórios que são atribuídos às variáveis do cenário real que deseja investigar (LUSTOSA; PONTE; DOMINAS, 2004).

Lustosa, Ponte e Dominas (2004) sugerem um número de replicações superior a cem, desta forma justificam a obtenção de uma amostra representativa, não especificando um número máximo de simulações. Já Escudero (1973) recomenda aplicar o máximo de simulações possíveis, ao levar em conta a capacidade de processamento da máquina utilizada, para desta forma o tempo e a precisão das simulações serem compatíveis.

O método de coleta de dados foi baseado na Tabela 3, a partir daí foi elaborado um algoritmo no *software* R capaz de reproduzir tal cenário. Este algoritmo é baseado no estudo de Oliveira (2013), que realizou procedimento análogo para os Gráficos de Controle por Grupos.

A função calcula o NMA do processo, tendo como argumentos, o número de características (p), o tamanho da amostra (n), o vetor de médias amostrais (\bar{X}), a matriz de cova-

riâncias amostrais (S) e o deslocamento na média do processo (δ). Seu funcionamento é dado da seguinte forma (ver Figura 5):

- i. Estabelecidos os valores dos argumentos, um vetor vazio (v) é gerado, este vetor é responsável pelo armazenamento do contador;
- ii. através do Método de Monte Carlo, um laço externo de tamanho 500 é iniciado, tendo como contador inicializado com zero em cada iteração iniciada;
- iii. dentro do laço externo, uma amostra é gerada baseada no cenário, ou seja, nos argumentos da função, e os limites de controle e as estatísticas T^2 são calculadas;
- iv. ainda no laço externo, inicia-se o laço interno, que avalia se os valores calculados de T^2 estão dentro dos limites de controle calculados na etapa anterior, esta quantidade estando dentro dos limites o contador é acrescido em um e o laço interno reiniciado, se pelo menos um valor estiver além dos limites o laço é finalizado e essa quantidade é armazenada no vetor v ;
- v. quando o vetor v contiver 500 observações referentes ao contador da etapa anterior, é calculada a média que será utilizada como o indicador NMA .

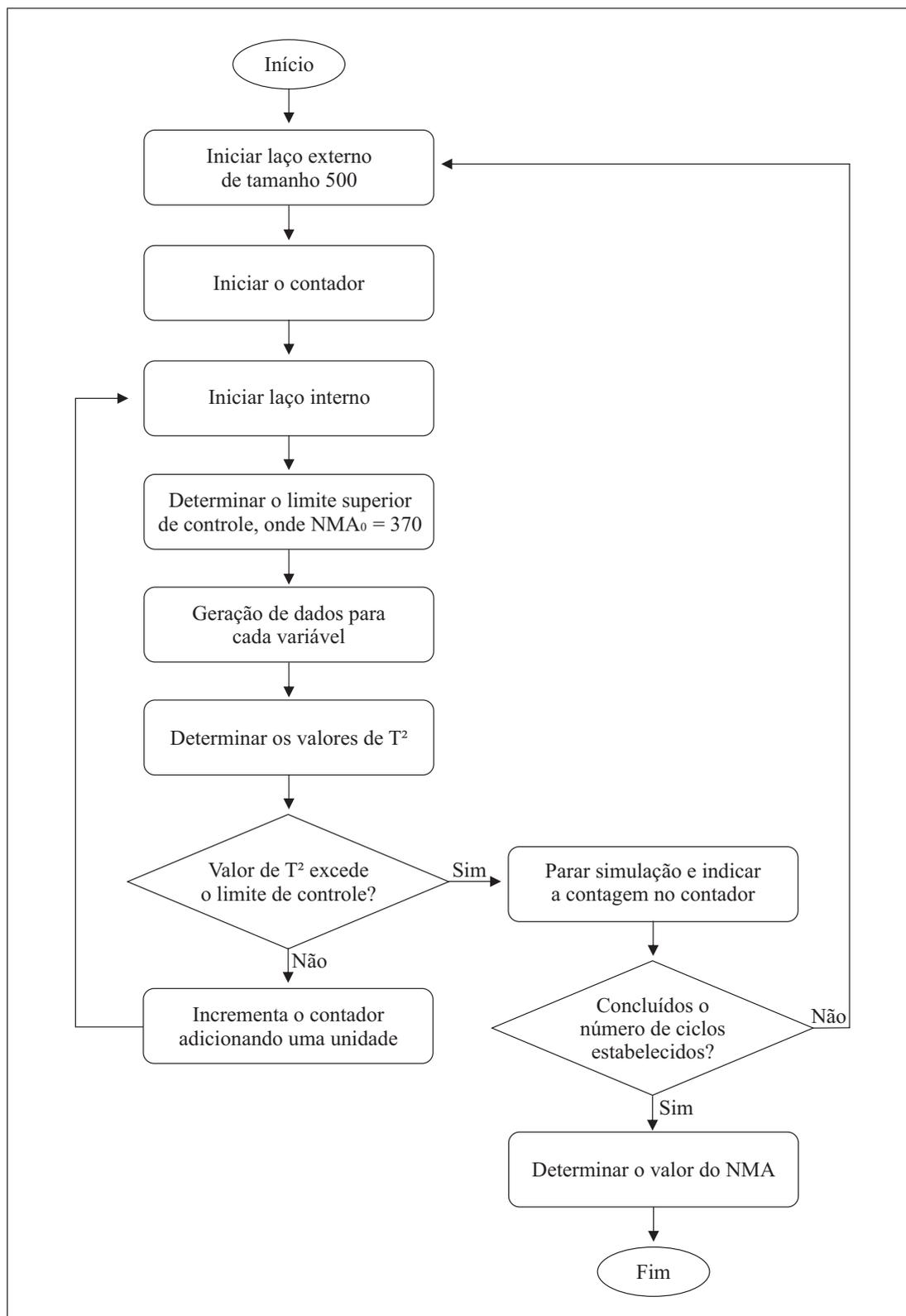
As amostras geradas neste estudo, seguem uma distribuição normal multivariada com média e variância estimados a partir do processo produtivo em questão. Os valores dos argumentos, p , n , \bar{X} , S e δ , são baseados nas estimativas dos dados do processo real e na literatura consultada, que dispõe de resultados previamente calculados para possibilitar uma comparação.

Segundo Oliveira (2013), o número de iterações (500) é suficiente, pois de acordo com o Teorema Central do Limite, por conta dos dados seguirem uma distribuição normal e a média ser um parâmetro de primeira ordem, os resultados convergem rapidamente, o que justifica a utilização de ciclos relativamente pequenos.

3.3.1 Validação do programa

Para avaliar a precisão do algoritmo alguns resultados do estudo *The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes* de Machado e Costa (2008), foram comparados aos resultados obtidos através do algoritmo.

Machado e Costa (2008) calculam o NMA_1 de forma exata, e este será o parâmetro de comparação com o NMA_1 calculado através de simulação. A Tabela 4 mostra o valor

Figura 5: Determinação do NMA do GCM T^2 de Hotelling

Fonte: Elaboração do próprio autor

do NMA_1 exato e o respectivo valor simulado, considerando $\alpha = 0,005$, de forma que o $NMA_0 = 200$; onde δ_i , $i = 1, 2, 3$ é o deslocamento na i -ésima variável.

Nota-se que todos os valores simulados encontram-se dentro do intervalo de confiança de 95%. Neste sentido, o estudo em questão pode ter continuidade.

Tabela 4: Comparação do NMA_1 exato e simulado

Deslocamento			NMA_1	
δ_1	δ_2	δ_3	T^2 exato	T^2 simulado
0,0	0,0	0,0	200,00	202,52
0,0	0,0	1,5	10,69	10,35
0,0	0,5	1,5	5,14	5,05
0,0	1,0	1,5	2,40	2,28
0,0	1,5	1,5	1,42	1,42
0,5	1,0	0,0	41,37	41,89
0,5	1,0	0,5	27,64	26,18
0,5	1,0	1,0	13,02	13,28
0,5	1,0	1,5	5,89	5,96
1,0	0,0	0,0	8,24	8,10
1,0	0,5	0,5	40,24	41,25
1,0	1,0	1,0	29,41	28,23
1,0	1,5	1,5	5,54	5,59
1,5	0,0	0,0	2,40	2,42
1,5	0,0	0,5	3,28	3,17
1,5	0,0	1,0	4,10	4,26
1,5	0,0	1,5	4,37	4,30

Fonte: Machado e Costa (2008); Elaboração do próprio autor

4 DESEMPENHO E EFICIÊNCIA ENTRE O GC MULTIVARIADO E O GC UNIVARIADO PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS DO PROCESSO

Neste capítulo serão abordados o desempenho e a eficiência do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling quando ocorre uma perturbação no vetor de médias do processo, para processos bivariados e trivariados.

4.1 Desempenho do GCM T^2 de Hotelling

Nesta seção são realizadas comparações entre o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling e os gráficos simultâneos de \bar{X} univariados com limites que incorporam a correlação entre as características ($SU\bar{X}$), ou seja, consideram a correlação existente entre as variáveis, para processos bivariados e trivariados. A comparação destes desempenhos é feita através do indicador Número Médio de Amostras (NMA), considerando iguais taxas de alarmes falsos. Adota-se $NMA_0 = 370$, ou seja, $\alpha' = 0,0027$.

A análise da eficiência relativa é realizada através da Equação 21, apresentada na Seção 2.5, de tal forma que, se $ER\% = 0$, os gráficos comparados possuem igual eficiência, enquanto que se $ER\% > 0$, o gráfico T^2 de Hotelling será mais eficiente do que o comparado, e caso contrário, quando $ER\% < 0$, o GCM T^2 é menos eficiente. Lembrando que para análise da eficiência o indicador Número Médio de Amostras até o próximo sinal (NMA_1), é utilizado, ou seja, quanto menor o valor do NMA_1 mais eficiente o gráfico.

Os indicadores do GCM T^2 foram calculados a partir de simulações, levando em consideração a estimativa do vetor de médias e a matriz de correlações amostrais (densidade, viscosidade e pH, respectivamente), onde

$$\mu_0 = [1, 3024; 98; 8, 62] \text{ e}$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0,49 & 0,03 \\ 0,49 & 1 & 0,15 \\ 0,03 & 0,15 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após a realização de testes de associação de amostras pareadas, com o intuito de verificar a significância das correlações acima (r), foi possível confirmar que apenas a correlação existente entre as características Densidade e Viscosidade é significativa, considerando $\alpha = 5\%$ e obtendo $p\text{-valor} = 0,00065$, logo a hipótese nula ($H_0 =$ a correlação é igual a zero) foi rejeitada. Isso justifica a realização da Seção 4.1.2. Mesmo com a variável pH mostrando-se não correlacionada com as demais, o estudo trivariado foi realizado pois inicialmente, antes do estudo das correlações, para a indústria o processo era visto como trivariado.

As variáveis Densidade, Viscosidade e pH, a partir daqui são representadas como X_1 , X_2 e X_3 , respectivamente.

O formato atual de análise do controle da qualidade, do processo em questão, é realizado de forma univariada, onde três gráficos do tipo Shewhart para a média são construídos. Este tipo de GC não faz parte deste capítulo, por não ser possível manter a mesma taxa de alarme que o GCM T^2 e o $SU\bar{X}$, uma vez que cada gráfico se mantém com $\alpha = 0,0027$, que totaliza um α' geral de 0,0081 e um $NMA_0 \cong 123$.

4.1.1 Análise do desempenho do GCM T^2 de Hotelling para um processo trivariado

Nesta seção apresenta-se o estudo do desempenho e eficiência dos gráficos para processos trivariados. Com o propósito de determinar a eficiência entre o GCM T^2 e os GC \bar{X} univariados, determinou-se o NMA_1 para os gráficos T^2 , com $p = 3$ e os estimadores do vetor de médias e matriz de correlações do processo real, através do algoritmo desenvolvido. Considerando δ_1, δ_2 e $\delta_3 = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0$.

O resultado é apresentado na Tabela 5 mostra o comportamento do NMA_1 quando apenas uma das características sofre perturbação. Quando o deslocamento é realizado em X_1 ou X_2 o GCM T^2 mostra-se mais eficiente até 33% em relação aos gráficos de \bar{X} univariados. Enquanto que, ao deslocamento ser aplicado em X_3 , principalmente para grandes perturbações, o T^2 chega a ser menos 17% eficiente.

As Figuras 6, 7 e 8 representam os valores da Tabela 5, e deixam clara a convergência do NMA_1 para 1 a medida que a perturbação aumenta. Mantendo p e r fixos e variando δ , percebe-se que o modelo do GCM T^2 detecta mais rápido o deslocamento no vetor de médias

quando a perturbação é realizada nas variáveis X_1 e X_2 , quando realizada em X_3 , praticamente não há superioridade aos outros gráficos, e o único momento em que o NMA_1 do T^2 de Hotelling aparenta ser pouco melhor é quando há deslocamentos de 0, 5 e 0, 6.

Tabela 5: NMA_1 para alteração na média de uma variável ($p = 3$)

Deslocamento			Gráficos		$EF\%$
δ_1	δ_2	δ_3	T^2	$SU\bar{X}$	
0,0	0,0	0,0	369,248	367,853	-0,4
0,5	0,0	0,0	199,466	234,999	15,1
0,6	0,0	0,0	155,646	199,420	22,0
0,7	0,0	0,0	118,852	163,965	27,5
0,8	0,0	0,0	106,750	132,524	19,4
0,9	0,0	0,0	83,576	105,203	20,6
1,0	0,0	0,0	68,298	84,815	19,5
1,5	0,0	0,0	19,890	27,903	28,7
2,0	0,0	0,0	7,650	10,560	27,6
2,5	0,0	0,0	3,746	4,827	22,4
3,0	0,0	0,0	2,018	2,665	24,3
0,0	0,5	0,0	209,212	237,649	12,0
0,0	0,6	0,0	155,710	199,046	21,8
0,0	0,7	0,0	117,084	162,550	28,0
0,0	0,8	0,0	102,908	132,330	22,2
0,0	0,9	0,0	79,822	106,246	24,9
0,0	1,0	0,0	61,382	84,727	27,6
0,0	1,5	0,0	20,528	27,893	26,4
0,0	2,0	0,0	7,064	10,562	33,1
0,0	2,5	0,0	3,806	4,828	21,2
0,0	3,0	0,0	2,038	2,665	23,5
0,0	0,0	0,5	215,444	238,808	9,8
0,0	0,0	0,6	179,366	198,190	9,5
0,0	0,0	0,7	166,024	162,191	-2,4
0,0	0,0	0,8	125,904	132,031	4,6
0,0	0,0	0,9	105,328	105,052	-0,3
0,0	0,0	1,0	79,072	84,113	6,0
0,0	0,0	1,5	29,372	27,792	-5,7
0,0	0,0	2,0	12,232	10,537	-16,1
0,0	0,0	2,5	5,428	4,823	-12,5
0,0	0,0	3,0	3,124	2,664	-17,3

Fonte: Elaboração do próprio autor

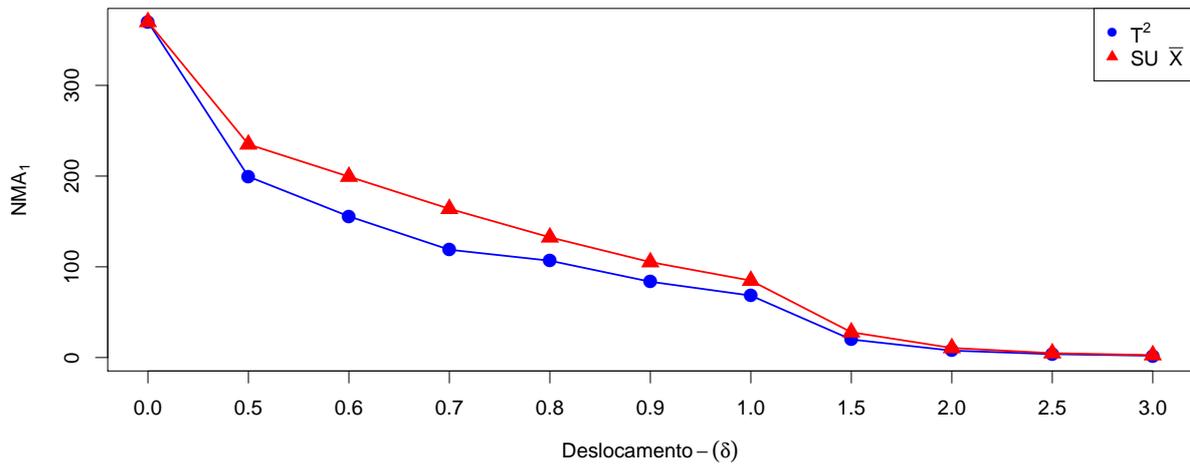
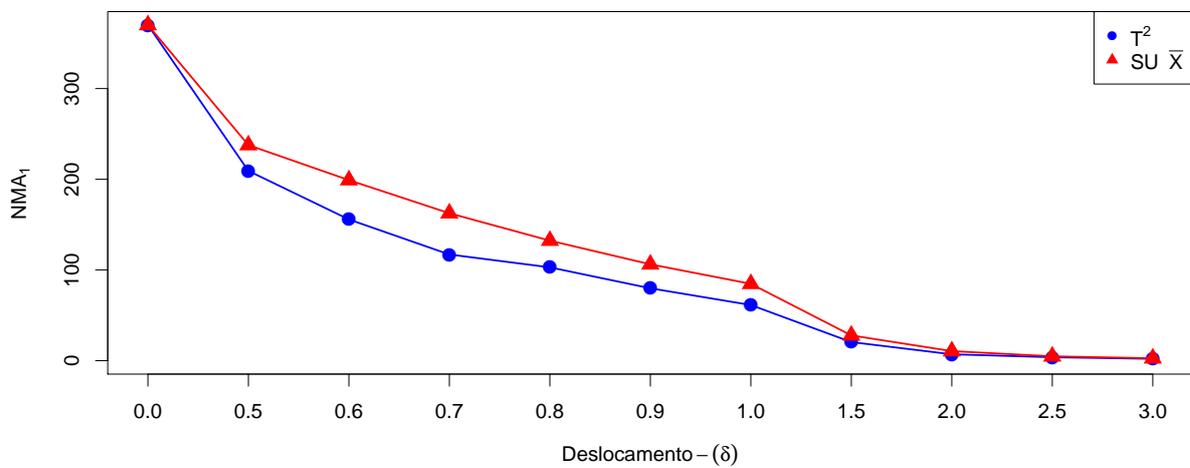
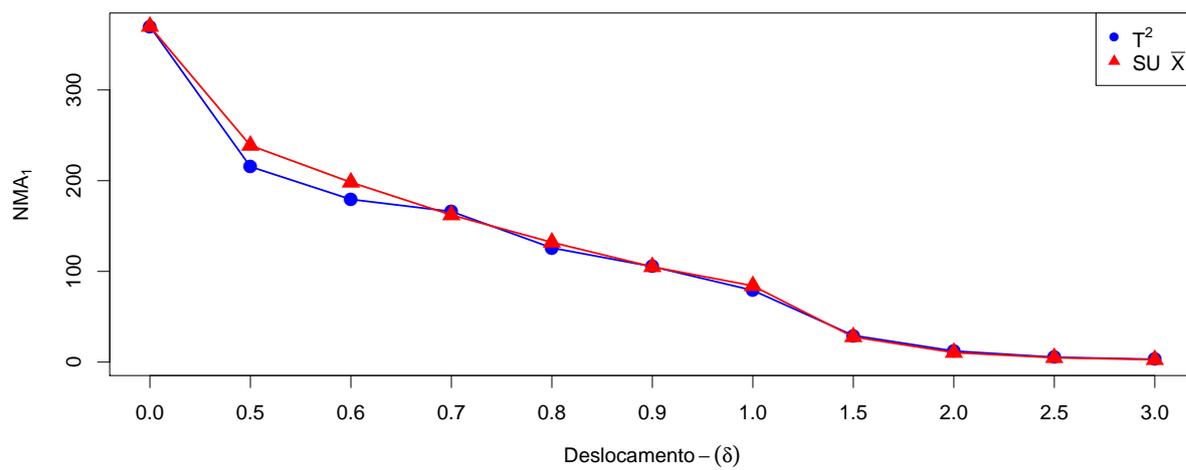
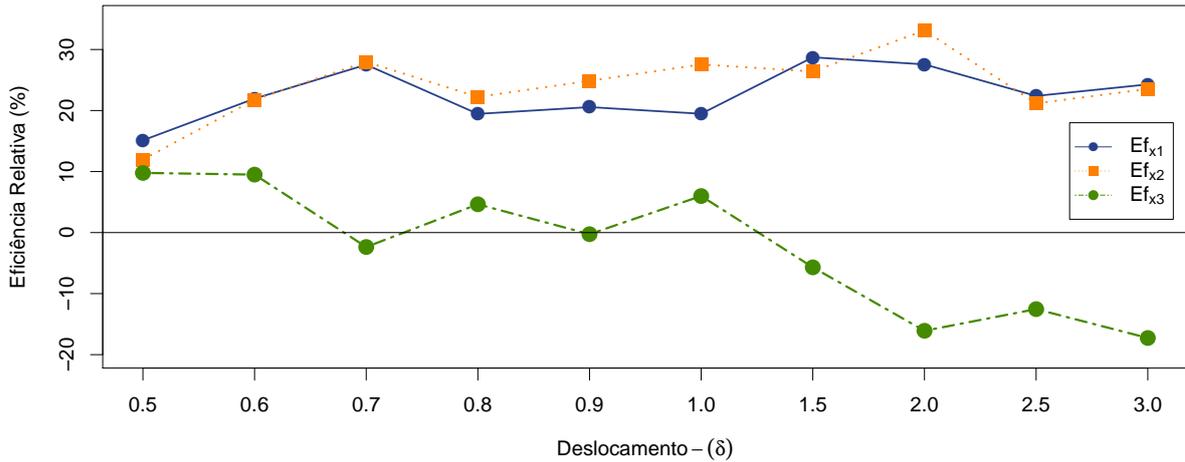
Figura 6: NMA_1 após perturbação δ em X_1 ($p = 3$)Figura 7: NMA_1 após perturbação δ em X_2 ($p = 3$)

Figura 8: NMA_1 após perturbação δ em X_3 ($p = 3$)

A Figura 9, confirma o que o T^2 é mais eficiente do que os gráficos $SU\bar{X}$ quando o deslocamento ocorre em X_1 e X_2 , enquanto que se a perturbação for apenas em X_3 o GCM é mais eficiente apenas para deslocamentos 0, 5; 0, 6; 0, 8 e 1, 0.

Figura 9: Eficiência relativa após perturbação δ em uma variável ($p = 3$)



Quando a perturbação é feita em duas variáveis, percebe-se que, quando as variáveis envolvidas são X_1 e X_2 , independente do nível de perturbação os gráficos $SU\bar{X}$ são mais eficientes. Se o deslocamento for em X_2 e X_3 , o gráfico T^2 de Hotelling possui um melhor desempenho para qualquer tipo de perturbação, chegando até 35% de eficiência em relação ao $SU\bar{X}$. O mesmo ocorre quando as variáveis X_1 e X_3 são perturbadas, o desempenho do gráfico multivariado T^2 é melhor. Ver Tabela 6.

Na Figura 10 é possível notar que o gráfico $SU\bar{X}$ apresenta um melhor desempenho, quando as características Densidade e Viscosidade sofrem perturbações. Na Figura 11, nota-se um melhor desempenho do gráfico T^2 para qualquer nível de perturbação em X_2 e X_3 , o mesmo ocorre quando as características X_1 e X_3 sofrem deslocamentos, o gráfico multivariado apresenta um melhor desempenho (Figura 12).

Tabela 6: NMA_1 para alteração na média de duas variáveis ($p = 3$)

Deslocamento			Gráficos		$EF\%$
δ_1	δ_2	δ_3	T^2	$SU\bar{X}$	
0,0	0,0	0,0	369,248	367,853	-0,4
0,5	0,5	0,0	195,736	177,530	-10,3
0,6	0,6	0,0	154,710	138,650	-11,6
0,7	0,7	0,0	116,604	107,641	-8,3
0,8	0,8	0,0	100,784	82,972	-21,5
0,9	0,9	0,0	78,724	64,504	-22,0
1,0	1,0	0,0	58,950	50,187	-17,5
1,5	1,5	0,0	18,620	16,017	-16,3
2,0	2,0	0,0	7,272	6,317	-15,1
2,5	2,5	0,0	3,586	3,103	-15,6
3,0	3,0	0,0	2,004	1,876	-6,8
0,0	0,5	0,5	164,204	173,869	5,6
0,0	0,6	0,6	111,456	134,990	17,4
0,0	0,7	0,7	82,800	104,546	20,8
0,0	0,8	0,8	61,526	80,526	23,6
0,0	0,9	0,9	49,828	61,899	19,5
0,0	1,0	1,0	39,000	48,042	18,8
0,0	1,5	1,5	11,148	14,910	25,2
0,0	2,0	2,0	3,716	5,755	35,4
0,0	2,5	2,5	1,904	2,800	32,0
0,0	3,0	3,0	1,302	1,703	23,5
0,5	0,0	0,5	129,906	173,333	25,1
0,6	0,0	0,6	98,048	135,337	27,6
0,7	0,0	0,7	69,852	103,467	32,5
0,8	0,0	0,8	54,280	80,051	32,2
0,9	0,0	0,9	37,602	61,690	39,0
1,0	0,0	1,0	26,782	47,605	43,7
1,5	0,0	1,5	6,580	14,711	55,3
2,0	0,0	2,0	2,642	5,627	53,0
2,5	0,0	2,5	1,504	2,719	44,7
3,0	0,0	3,0	1,122	1,653	32,1

Fonte: Elaboração do próprio autor

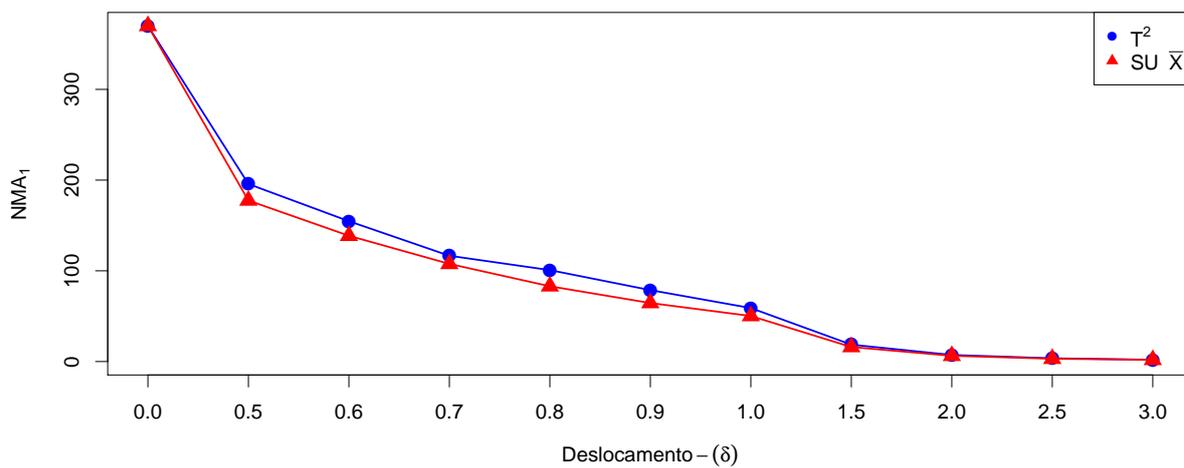
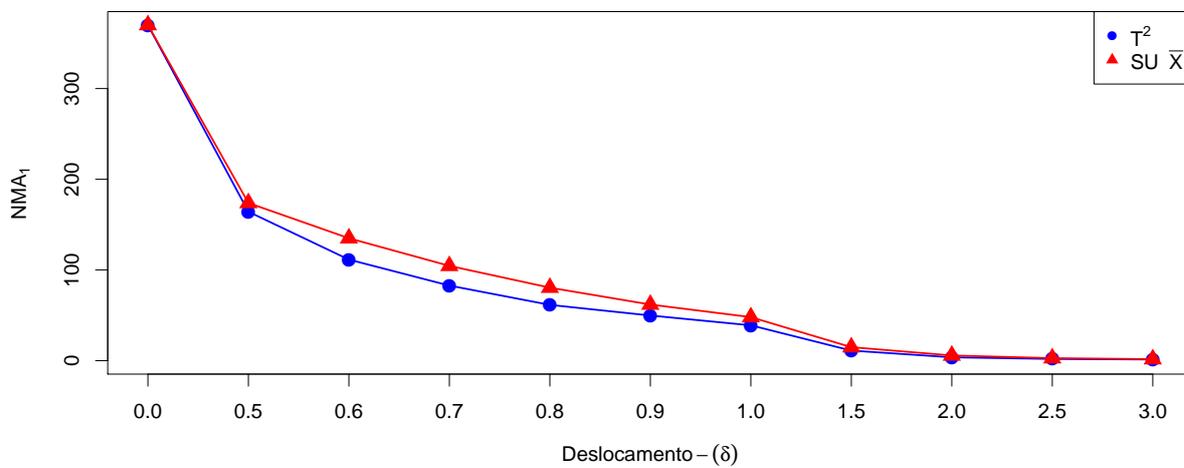
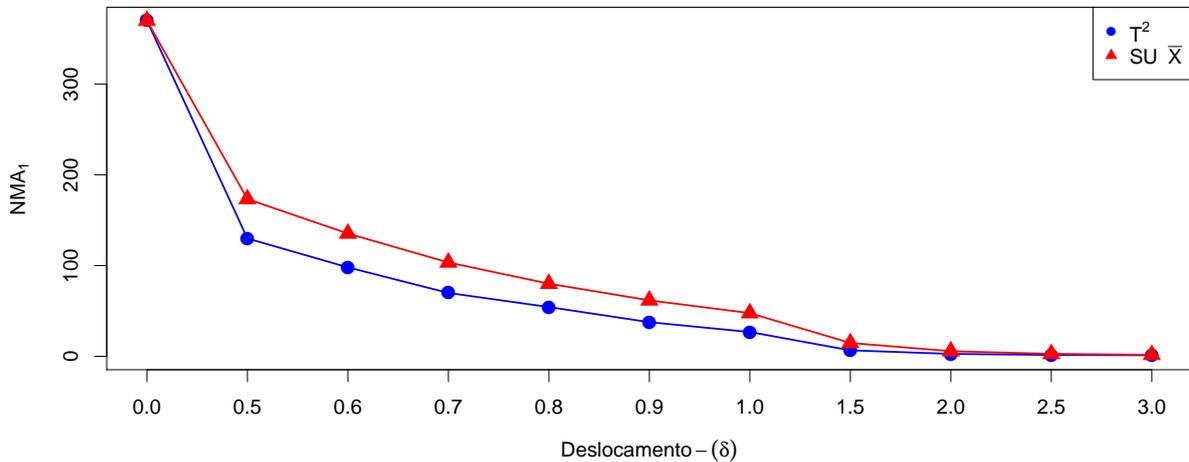
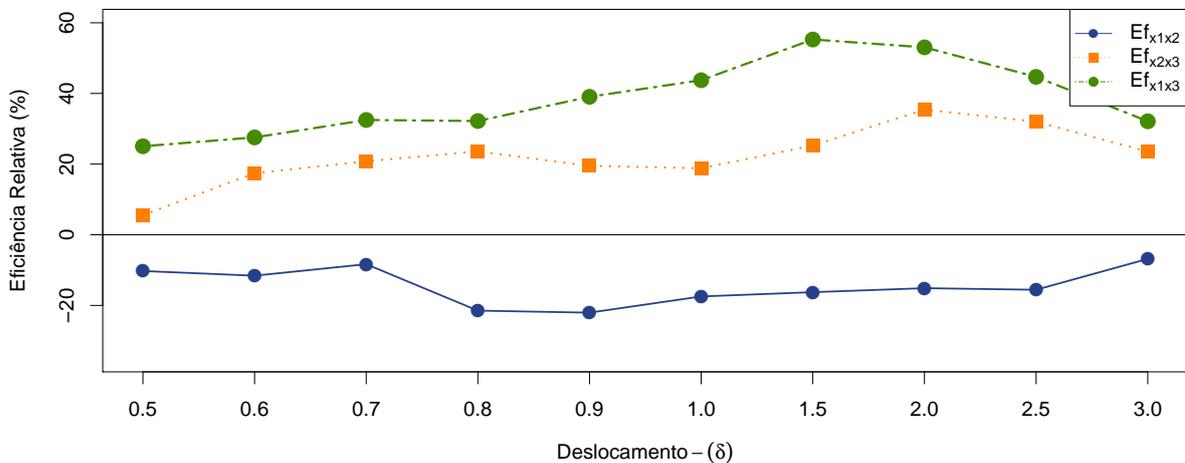
Figura 10: NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_2 ($p = 3$)Figura 11: NMA_1 após perturbação δ em X_2 e X_3 ($p = 3$)

Figura 12: NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_3 ($p = 3$)

A Figura 13 apresenta a eficiência do gráfico T^2 em relação aos gráficos $SU \bar{X}$, quando as variáveis X_1 e X_2 sofrem perturbação, os gráficos \bar{X} apresentam uma eficiência melhor, chegando até 22% de eficiência em relação ao T^2 . Quando o deslocamento é em X_2 e X_3 , o T^2 é mais eficiente em até 35%, o mesmo vai ocorrer quando a perturbação é em X_1 e X_3 , porém neste caso a eficiência do T^2 é ainda maior apresentando um pico de 55% quando $\delta = 1,5$.

Figura 13: Eficiência relativa após perturbação δ em duas variáveis ($p = 3$)

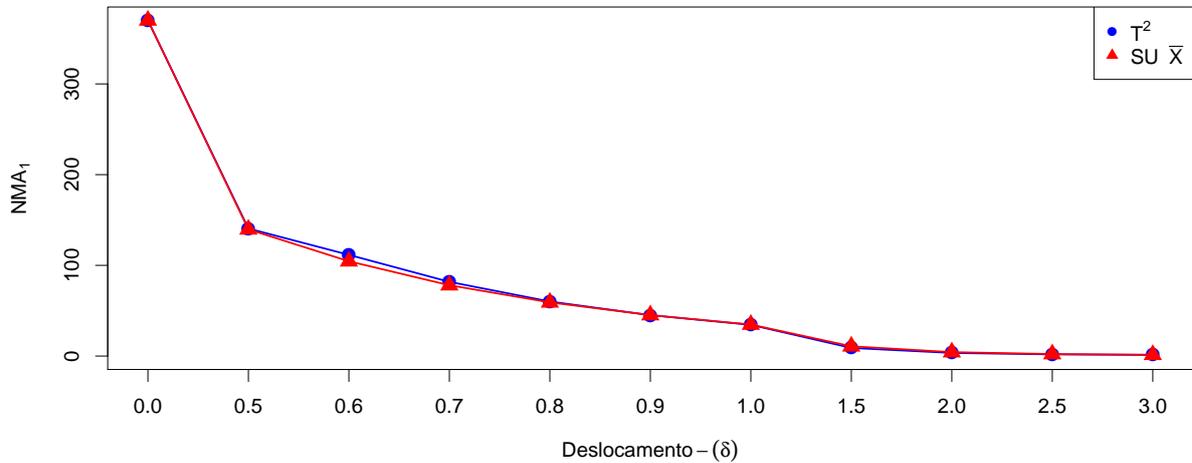
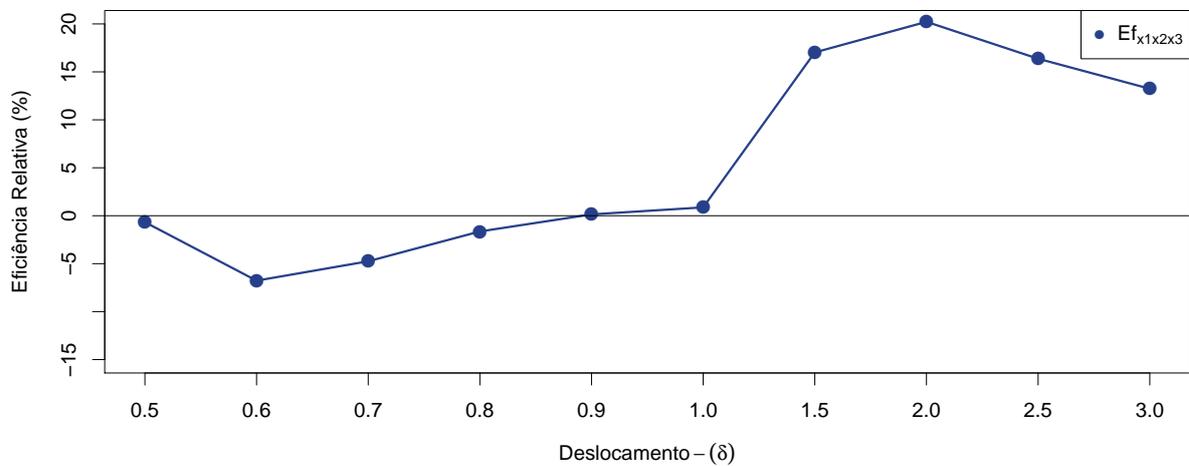
Quando a perturbação é causada nas três características de forma simultânea, e a dimensão dos deslocamentos são pequenas ($\delta = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$) os gráficos univariados mostram-se com melhor desempenho, enquanto que para deslocamentos a partir de $\delta = 0,9$ o gráfico multivariado T^2 apresenta desempenho superior (Tabela 7).

Tabela 7: NMA_1 para alteração na média de três variáveis

Deslocamento			Gráficos		$EF\%$
δ_1	δ_2	δ_3	T^2	$SU\bar{X}$	
0,0	0,0	0,0	369,248	367,853	-0,4
0,5	0,5	0,5	140,598	139,662	-0,7
0,6	0,6	0,6	111,562	104,487	-6,8
0,7	0,7	0,7	81,828	78,119	-4,7
0,8	0,8	0,8	60,134	59,162	-1,6
0,9	0,9	0,9	45,100	45,163	0,1
1,0	1,0	1,0	34,414	34,717	0,9
1,5	1,5	1,5	8,950	10,787	17,0
2,0	2,0	2,0	3,440	4,312	20,2
2,5	2,5	2,5	1,854	2,217	16,4
3,0	3,0	3,0	1,252	1,443	13,2

Fonte: Elaboração do próprio autor

A Figura 14 mostra que o desempenho do gráfico T^2 é menor para baixos deslocamentos, enquanto que para grandes deslocamentos ($\delta = 0,9; \dots; 3,0$), o T^2 possui melhor desempenho. A eficiência do T^2 varia de -6,8% a 0% para pequenos deslocamentos e de 0,1% a 20% para grandes deslocamentos, ou seja, para grandes deslocamentos nas três características o melhor gráfico é o T^2 e para pequenos deslocamentos o melhor é o $SU\bar{X}$ (Figura 15).

Figura 14: NMA_1 após perturbação δ em X_1 , X_2 e X_3 Figura 15: Eficiência relativa após perturbação δ em três variáveis

4.1.2 Análise do desempenho do GCM T^2 de Hotelling para um processo bivariado

Considerando um processo bivariado, com $\rho = 0,5$, neste caso são as variáveis Densidade e Viscosidade, respectivamente X_1 e X_2 . Busca-se identificar qual tipo de gráfico que apresenta melhor desempenho para monitorar o processo da indústria de tintas, o gráfico T^2 de Hotelling ou os gráficos de \bar{X} univariados simultâneos. Assim como para a análise do desempenho para o processo trivariado, $\delta = 0,5; \dots, 3,0$ e $\alpha = 0,0027$.

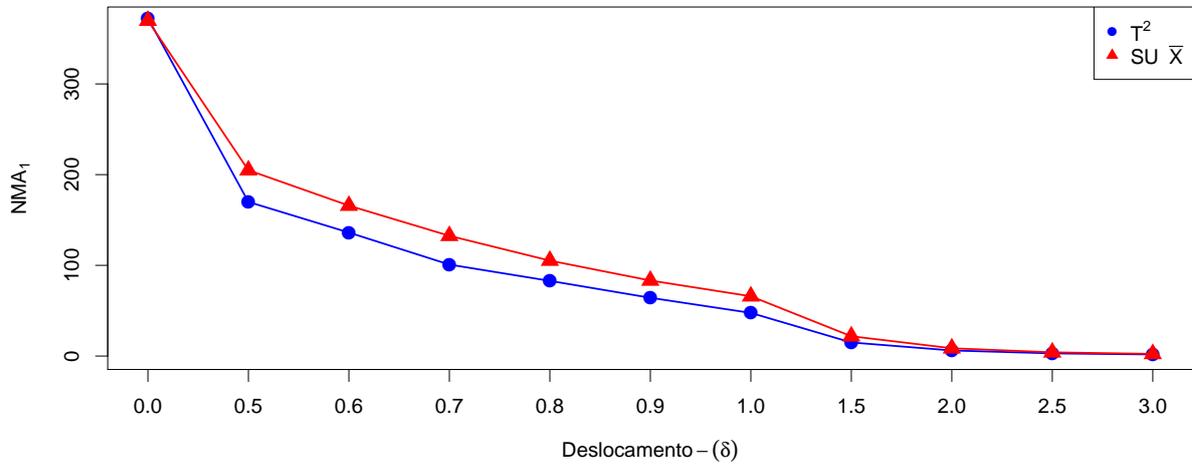
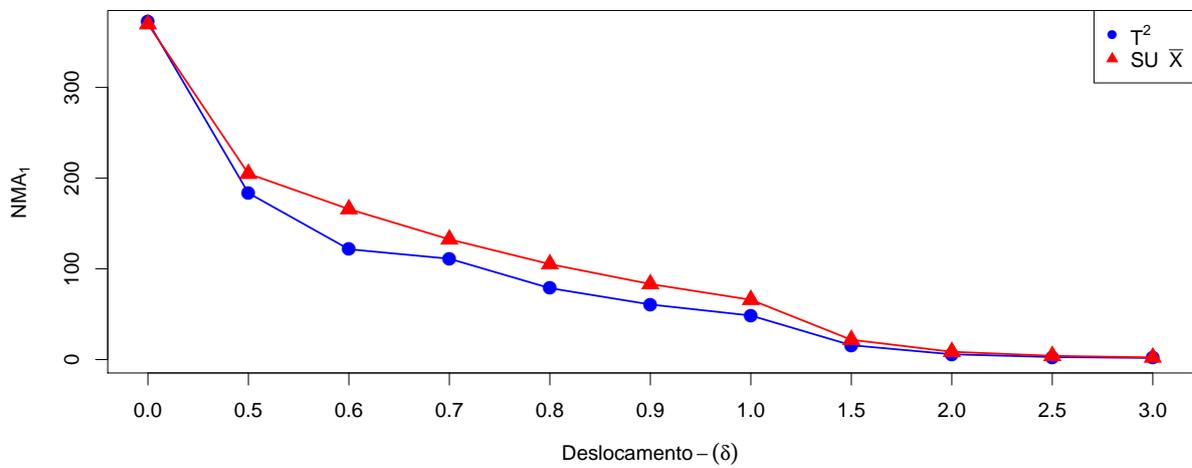
Na Tabela 8, é apresentado o desempenho dos gráficos quando submetidos a perturbações em uma das variáveis. Nota-se que para qualquer δ o GCM T^2 de Hotelling possui melhor desempenho. O mesmo ocorre no estudo de Machado e Costa (2008), que ao utilizar $\alpha = 0,005$ e a mesma correlação ($\rho = 0,5$), obtiveram um melhor desempenho do gráfico T^2 , quando submetem apenas uma das características à perturbação, neste caso utilizando $\delta = 0,5; 1,0; 1,5$.

Tabela 8: NMA_1 para alteração na média de uma variável ($p = 2$)

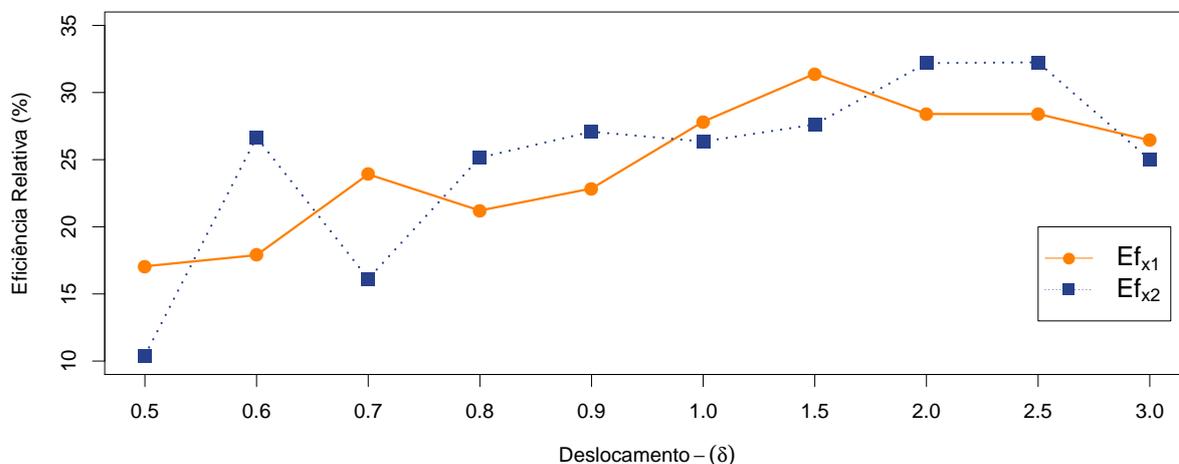
Deslocamento		Gráficos		$EF\%$
δ_1	δ_2	T^2	$SU\bar{X}$	
0,0	0,0	372,546	369,770	-0,8
0,5	0,0	169,910	204,870	17,1
0,6	0,0	136,154	165,829	17,9
0,7	0,0	100,856	132,557	23,9
0,8	0,0	82,898	105,218	21,2
0,9	0,0	64,246	83,276	22,9
1,0	0,0	47,574	65,923	27,8
1,5	0,0	14,982	21,840	31,4
2,0	0,0	6,154	8,595	28,4
2,5	0,0	2,942	4,109	28,4
3,0	0,0	1,742	2,368	26,4
0,0	0,5	183,538	204,870	10,4
0,0	0,6	121,620	165,829	26,7
0,0	0,7	111,174	132,557	16,1
0,0	0,8	78,756	105,218	25,1
0,0	0,9	60,728	83,276	27,1
0,0	1,0	48,552	65,923	26,4
0,0	1,5	15,808	21,840	27,6
0,0	2,0	5,828	8,595	32,2
0,0	2,5	2,784	4,109	32,2
0,0	3,0	1,776	2,368	25,0

Fonte: Elaboração do próprio autor

As Figuras 16 e 17, representam o desempenho dos gráficos, mostrando que o GCM T^2 de Hotelling apresenta um resultado mais satisfatório do que o $SU\bar{X}$, quando apenas uma das características sofre deslocamento.

Figura 16: NMA_1 após perturbação δ em X_1 ($p = 2$)Figura 17: NMA_1 após perturbação δ em X_2 ($p = 2$)

A Figura 18, revela a eficiência dos gráficos, onde o T^2 chega a ser até 32% mais eficiente. É possível notar que para qualquer perturbação em uma das variáveis, o GCM é mais eficiente.

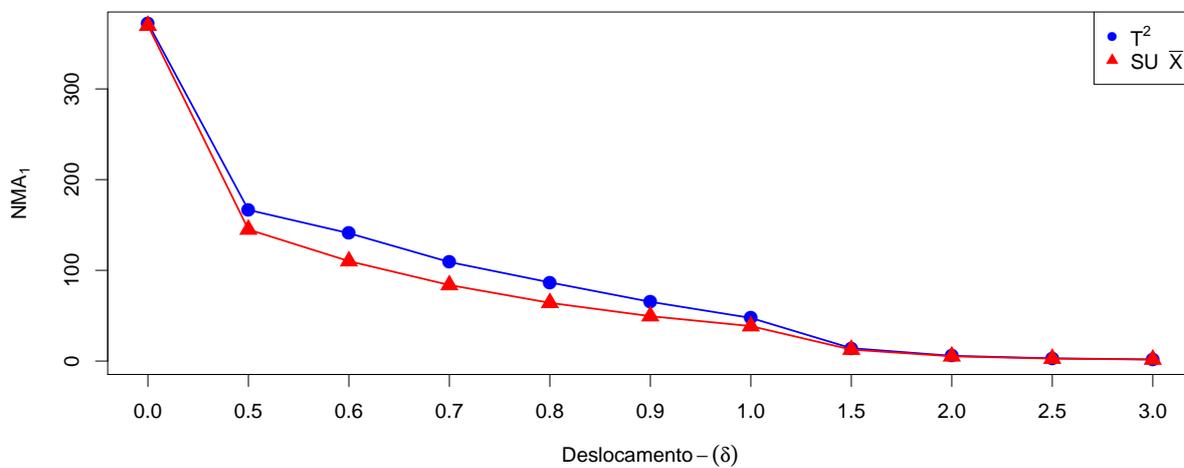
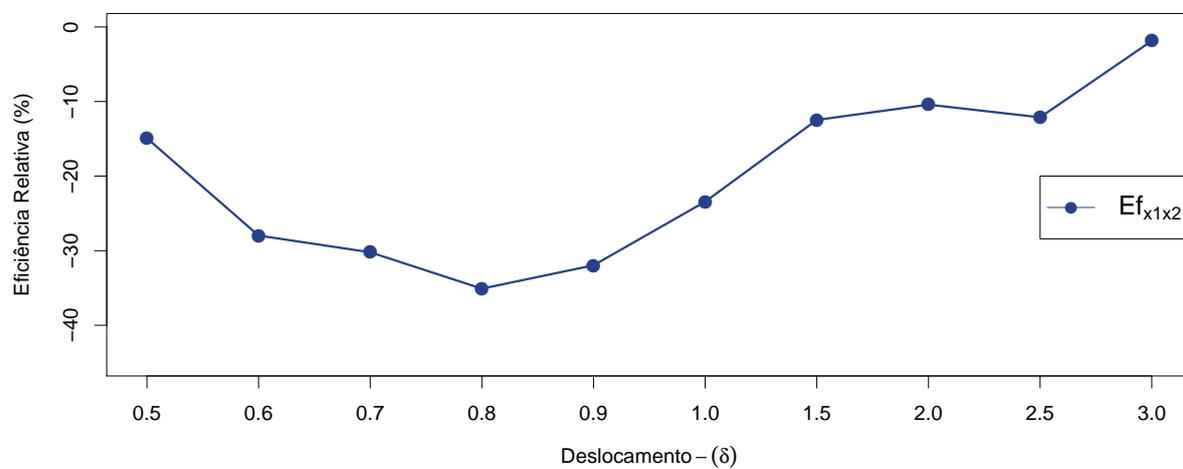
Figura 18: Eficiência relativa após perturbação δ em uma variável ($p = 2$)

A Tabela 9 mostra o comportamento dos gráficos quando ocorre perturbação nas duas características, esse resultado é um cenário totalmente diferente do anterior, uma vez que o gráfico T^2 mostra-se com desempenho inferior aos demais, para $\delta = 0,5$ a eficiência relativa é em torno de 15% mais baixa que o $SU\bar{X}$. Entre deslocamentos de 0,6 e 1,0 a eficiência do T^2 cai ainda mais, e para grandes deslocamentos os gráficos $SU\bar{X}$ apresentam uma eficiência de 2% a 12% aproximadamente maior que a eficiência do T^2 (Figura 20).

Tabela 9: NMA_1 para alteração na média de duas variáveis ($p = 2$)

Deslocamento		Gráficos		$EF\%$
δ_1	δ_2	T^2	$SU\bar{X}$	
0,0	0,0	372,546	369,770	-0,8
0,5	0,5	166,628	145,000	-14,9
0,6	0,6	140,956	110,149	-28,0
0,7	0,7	109,168	83,841	-30,2
0,8	0,8	86,702	64,183	-35,1
0,9	0,9	65,334	49,510	-32,0
1,0	1,0	47,546	38,522	-23,4
1,5	1,5	14,196	12,622	-12,5
2,0	2,0	5,764	5,220	-10,4
2,5	2,5	3,024	2,697	-12,1
3,0	3,0	1,740	1,708	-1,9

Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 19: NMA_1 após perturbação δ em X_1 e X_2 ($p = 2$)Figura 20: Eficiência relativa após perturbação δ em duas variáveis ($p = 2$)

5 APLICAÇÃO

Com o intuito de melhor apresentar as ferramentas abordadas anteriormente, o GCM T^2 de Hotelling e os Gráficos de \bar{X} univariados simultâneos - $SU\bar{X}$, uma aplicação aos dados do processo da indústria de tintas será realizada neste capítulo.

5.1 O processo produtivo e a coleta de dados

A fábrica de tintas, objeto de estudo deste trabalho, teve início com a produção de tintas em pó hidrossolúveis e supercal, tornando-se líder neste mercado nacional. Em 48 anos de mercado a empresa continua em processo de crescimento, ampliando suas instalações e desenvolvendo novos produtos, sempre buscando a satisfação de seus clientes, priorizando produtos de qualidade e melhorando os processos continuamente. A fábrica conta com três unidades fabris localizadas no estado do Ceará.

Geralmente tintas são aplicadas como agentes de proteção ou decoração, e até mesmo com ambos objetivos. As tintas são constituídas por quatro componentes, resinas, pigmentos, solventes e aditivos, no caso da tinta à base água a tinta recebe um quinto componente que é a água, como na Figura 21. As resinas tem destaque, pois são responsáveis pela formação da película protetora, que a tinta se converte depois de seca, além do brilho, aderência, elasticidade, resistência, entre outras. Os pigmentos, conferem cor e poder de cobertura, onde normalmente uma tinta é composta por vários pigmentos. Os solventes por sua vez, possibilitam que a tinta se apresente sempre com o mesmo padrão de viscosidade, proporcionando à tinta condições ideais de pintura, com o intuito de facilitar a aplicação, alastramento, etc. E por fim, os aditivos, que são participantes de pequenas quantidades em sua composição, capazes de modificar as propriedades da tinta, por exemplo, secantes, bactericidas, fungicidas, etc. (IKEMATSU, 2007).

Em reunião com a equipe responsável pela qualidade, foi levantada a hipótese de que as ferramentas utilizadas para o controle de qualidade possam estar sendo mal empregadas,

Figura 21: Exemplo de composição básica de tintas à base água



Fonte: Ikematsu (2007)

uma vez que para processos que possuem mais de uma variável os gráficos tradicionais de Shewhart vem sendo utilizados, sem considerar a correlação existente entre estas variáveis. Para avaliar se a hipótese de má utilização das ferramentas de controle é confirmada, foi selecionado apenas o produto de maior demanda, neste caso a tinta Branco Econômico solúvel em água.

As tintas são fabricadas de acordo com a ordem de serviço, parte do procedimento é automatizado e parte manual, ou seja, alguns compostos são medidos e acrescentados de forma automática e outros não. Para a fabricação, inicialmente é feita a base, que posteriormente é transferida para outro tacho para receber o concentrado de cor ou para um tanque de armazenamento, este concentrado de cor é medido e acrescentado manualmente, após esta mistura a tinta pode ser envasada para venda ou armazenada. Entre a fabricação de uma tinta e outra os tachos são lavados com água. De acordo com a demanda, tachos de 10 mil, 5 mil ou 3 mil litros são utilizados.

5.1.1 A coleta de dados

Com o intuito de controlar possíveis causas de variabilidade, para a coleta de dados, ficou estabelecido que apenas os tachos de 10 mil litros seriam utilizados, sendo estes o tacho 2 e 3, outro fator importante é a cor anterior produzida nestes tachos, para a análise a coleta só ocorre caso a cor fabricada anteriormente seja branca, ou seja, as amostras foram coletadas apenas de tintas brancas precedidas de tintas brancas, uma vez que os tachos passam pelo processo de lavagem, este formato de coleta pode diminuir a chance da cor anterior influenciar na branca.

As amostras são retiradas do produto acabado, ou seja, após a mistura de base, aditivos e concentrado de cor. Estas amostras são coletadas enquanto a tinta é mantida sob mistura

no tacho. Destas amostras são analisadas as características (i) Densidade, (ii) Viscosidade e (iii) pH. A amostra (ver Tabela 10) foi coletada durante o mês de julho de 2013, pela própria empresa. A amostra completa não foi divulgada a pedido da indústria.

Tabela 10: Dados coletados, julho de 2013

Amostra	Descrição das amostras		
	Densidade	Viscosidade	pH
1	1,3008	95	8,35
2	1,3040	100	8,41
⋮	⋮	⋮	⋮
44	1,3166	96	8,90

Fonte: Empresa de tintas, 2013

Segundo Adami (2002), "a viscosidade é a resistência de um fluido ao escoamento, definida como a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento", ou seja, viscosidade é a "grossura" ou consistência da tinta, tal propriedade está ligada diretamente ao processo de aplicação; caso possua uma alta viscosidade podem ocorrer defeitos, por exemplo, textura irregular; caso seja muito baixa a tinta pode escorrer. O aparelho que realiza a medição da viscosidade é o Viscosímetro Brookfield KU-2 (Figura 22), que mede a viscosidade de fluidos em unidades Krebs (KU). O Sensor de Cisalhamento (SDC) tipo pá é rotacionado à 200rpm por um motor de passo. A resposta do torque provocada pelo SDC à 200rpm é convertida em viscosidade na Unidade Krebs. Referências para aplicação podem ser encontradas na ASTM-D562-10 (ASTM, 2003).

Figura 22: Instrumento de medição da viscosidade - Viscosímetro Brookfield KU-2



Fonte: Empresa de tintas, 2013

O aparelho de medição da densidade é o Picnometro Fechado (Figura 23). Sendo esta uma característica importante a ser monitorada, pois é a propriedade que caracteriza o poder de cobertura da tinta, ou seja, é a medida de opacidade, quando mais densa mais opaca.

A mensuração da densidade é realizada com a finalidade de se calcular o rendimento real no processo de envase do produto. A medição é realizada da seguinte forma, (i) verificar a temperatura da amostra e ajustar para 25°C e +/-1°C, utilizar o banho de gelo caso necessite diminuir a temperatura; (ii) pesar o picnômetro com a tampa e tarar a balança; (iii) completar o picnômetro com a amostra até que forme um menisco gerado pela tensão superficial da amostra; (iv) colocar a tampa para que se retire todo o excedente e limpar a área externa com papel toalha; (v) pesar o picnômetro cheio; (vi) calcular a densidade, onde $Densidade = Massa / Volume$, neste caso $Massa = \text{Peso picnômetro} - (\text{Peso picnômetro} + \text{Peso amostra})$ e $Volume = 100$.

Figura 23: Instrumento de medição da densidade - Picnômetro Fechado



Fonte: Empresa de tintas, 2013

O aparelho de medição do Ph é o pHmetro, sendo constituído por um eletrodo e um circuito potenciômetro, após a calibração está pronto para uso, sua leitura é feita em função da leitura de tensão que o eletrodo gera quando está submerso na amostra, essa intensidade de tensão é convertida para a escala de pH.

Figura 24: Instrumento de medição do pH - pHmetro



Fonte: Empresa de tintas, 2013

A coleta foi realizada a cada vez que a tinta branca era produzida dentro das especificações sugeridas para o estudo, após outra tinta branca e nos tachos 2 ou 3, que possuem o mesmo tamanho. Após o produto finalizado e ainda no tacho sob mistura, com uma concha, com capacidade de 40ml, o responsável retira uma amostra de tamanho 1 da superfície e envia para o laboratório, onde são submetidas a análise através dos aparelhos apresentados anteriormente, então os valores das características são armazenados no sistema.

5.2 Aplicação das ferramentas

Foram definidas como variáveis a Densidade, a Viscosidade e o pH, uma vez que estas características definem a qualidade do produto final. A produção de tinta branca varia de acordo com a demanda, por tanto não foi possível estabelecer um período para coleta das amostras, sendo esta realizada a cada produção, respeitando as imposições do tacho e tinta anterior produzida, conforme explicado na Subseção 5.1.1. A medição da amostra é realizada no laboratório da fábrica e imediatamente registrada numa planilha de controle da empresa, pelo próprio responsável. Sendo utilizadas 44 observações individuais, referente ao período de julho de 2013.

A Tabela 11 mostra algumas estatísticas descritivas das variáveis analisadas, apenas como referência para o processo. Foi realizado o teste de Henze-Zirkler, para verificar a normalidade multivariada dos dados, apresenta um $p\text{-valor} = 0,1564$, confirmando que os dados seguem uma distribuição normal multivariada, ao nível de significância de 95%.

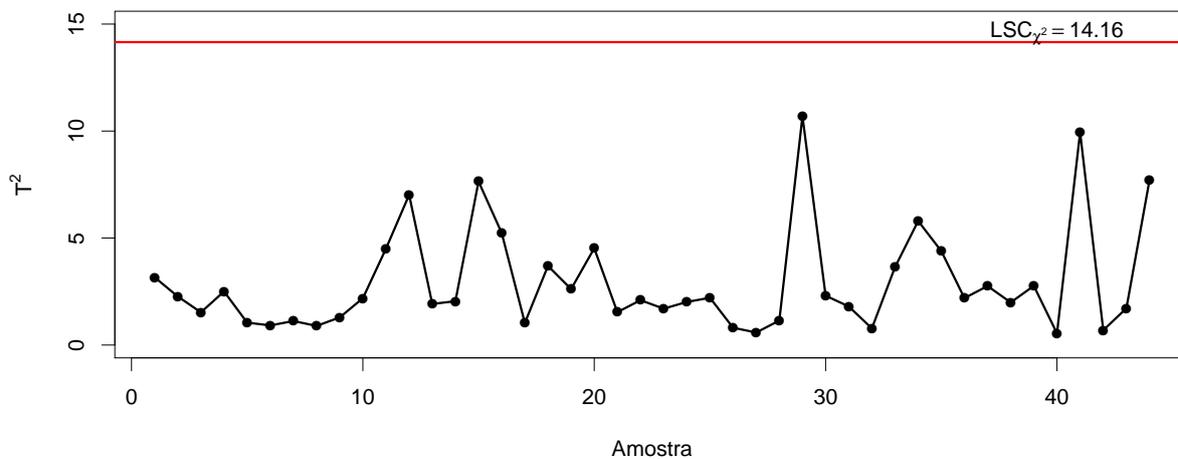
Tabela 11: Estatísticas descritivas dos dados

Estatística	Densidade	Viscosidade	pH
Mínimo	1,2696	95	8,32
Máximo	1,3295	103	9,25
Média	1,3024	98	8,62
Mediana	1,3023	98	8,62
Desvio Padrão	0,0105	2	0,19

Foram calculadas as estatísticas T^2 , conforme a Tabela 12, e em seguida foi realizada a construção do GCM T^2 de Hotelling, apresentado na Figura 25. Nota-se que o gráfico não acusa nenhuma causa assinalável, portando, o processo pode ser considerado sob controle.

Tabela 12: Estatísticas T^2

Amostra	T^2	Amostra	T^2
1	3,17	23	1,70
2	2,27	24	2,01
3	1,53	25	2,21
4	2,50	26	0,81
5	1,05	27	0,59
6	0,92	28	1,15
7	1,12	29	10,69
8	0,89	30	2,31
9	1,29	31	1,80
10	2,19	32	0,78
11	4,51	33	3,64
12	7,02	34	5,80
13	1,92	35	4,39
14	2,05	36	2,19
15	7,64	37	2,76
16	5,24	38	1,99
17	1,03	39	2,77
18	3,70	40	0,55
19	2,62	41	9,94
20	4,52	42	0,69
21	1,54	43	1,72
22	2,10	44	7,71

Figura 25: GCM T^2 de Hotelling para o processo trivariado

Neste processo, os gráficos de \bar{X} univariados simultâneos apresentam um comportamento semelhante ao T^2 , pois nenhuma das características apresentou pontos fora de controle.

O que ocorre é um ponto bem próximo do limite superior de controle na análise da característica pH (Figura 28).

Figura 26: Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Densidade ($p = 3$)

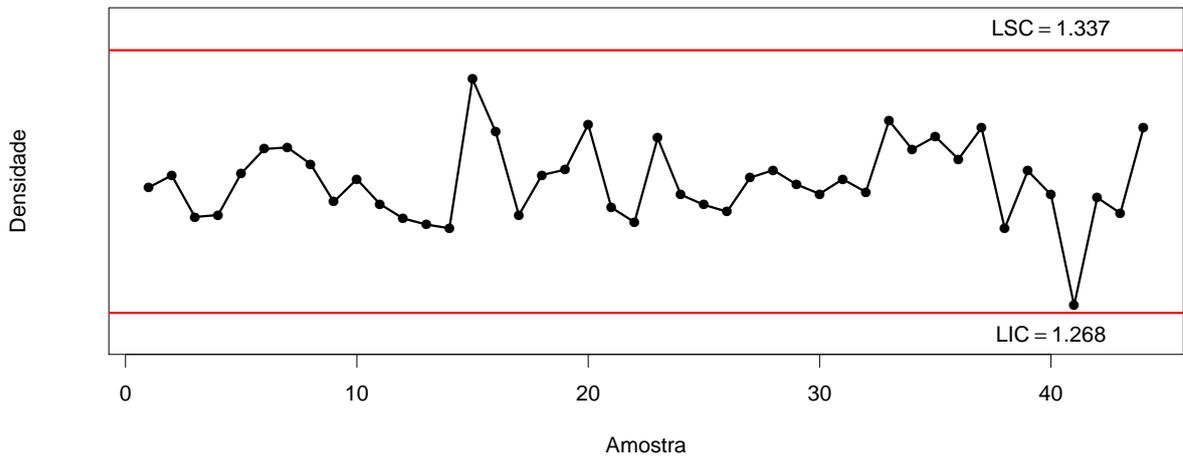


Figura 27: Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Viscosidade ($p = 3$)

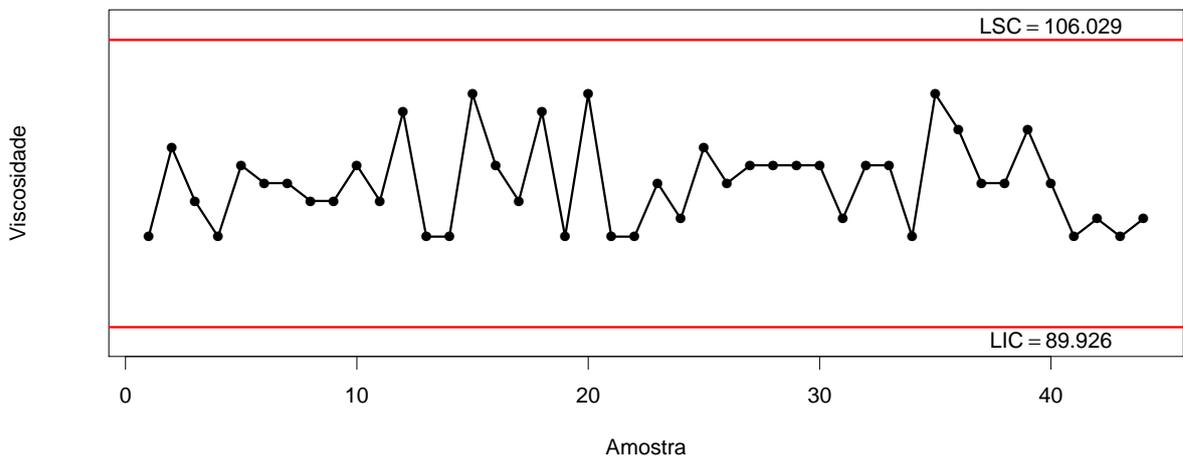
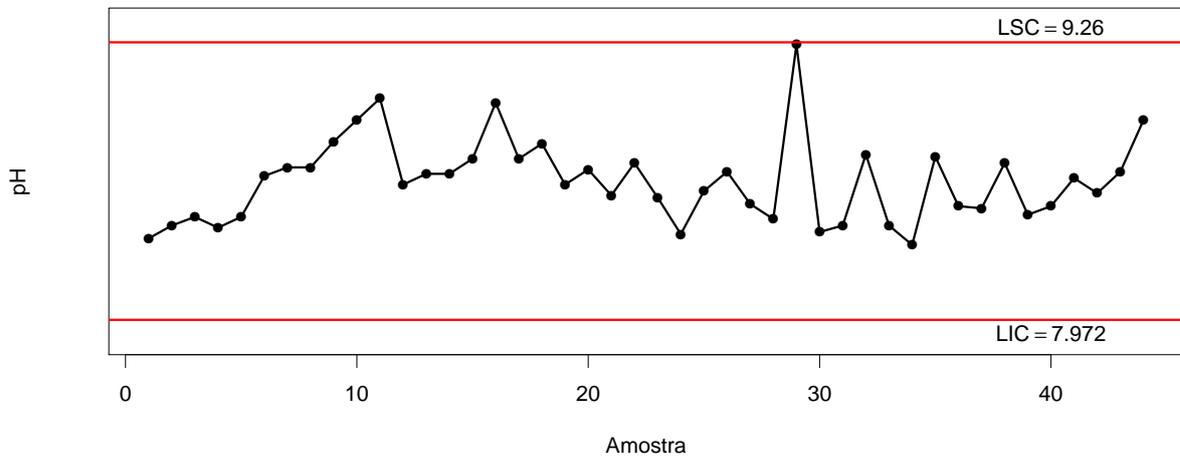


Figura 28: Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica pH ($p = 3$)

Outra possibilidade de análise do controle do processo na indústria de tintas é realizar a análise multivariada das características densidade e viscosidade, pois existe uma correlação estatisticamente significativa entre as mesmas, como mostrado na seção 4.1. Enquanto que para a característica pH, pode ser realizada a análise com o GC Shewhart tradicional para a média.

Nota-se que na Figura 29, são plotadas as estatísticas T^2 do processo bivariado, e que o processo encontra-se sob controle. Outra opção é a análise a partir dos gráficos de \bar{X} univariados simultâneos (Figuras 30 e 31) que, de acordo com Machado (2009), apresentam bom comportamento para baixas correlações e quando há presença de causas especiais nas duas características de forma simultânea, resultado obtido no Capítulo 4.

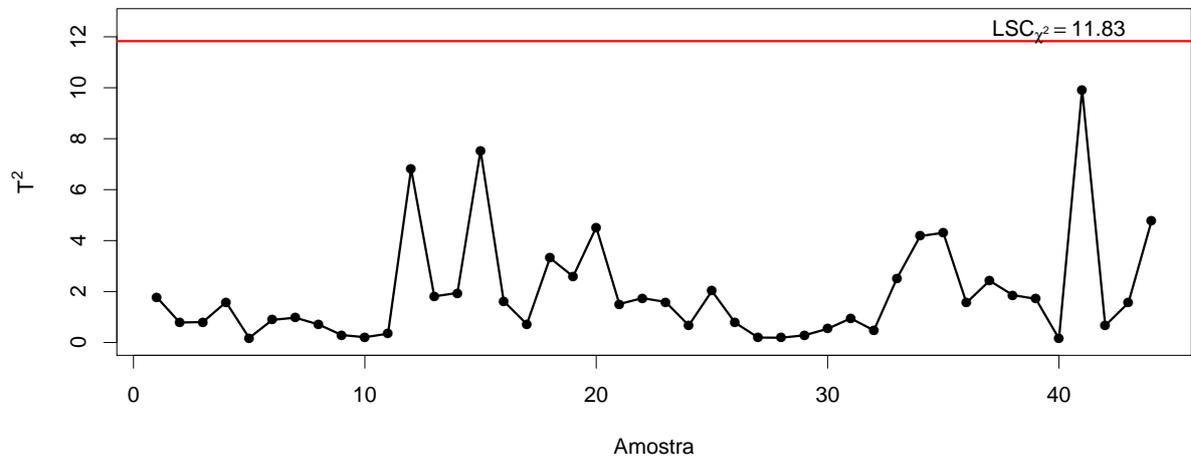
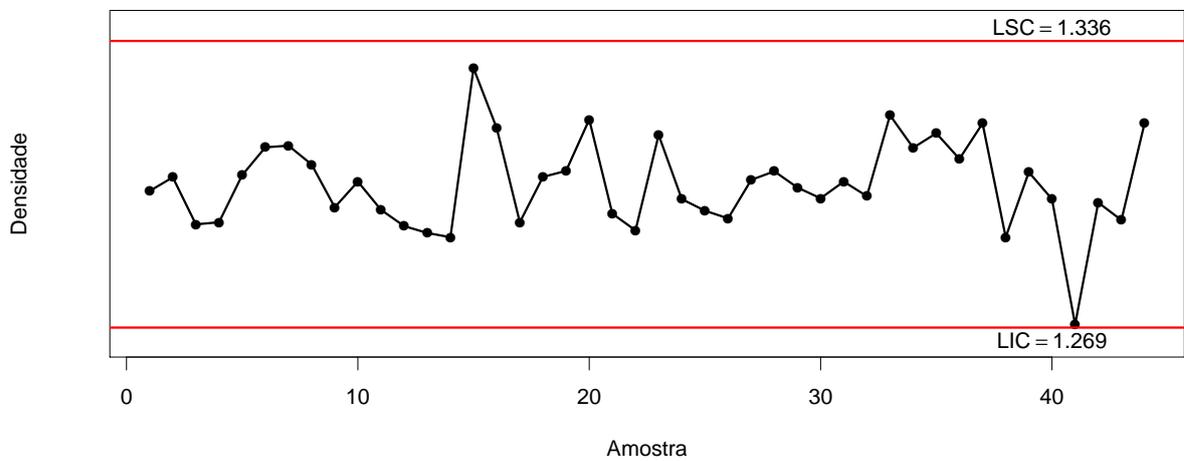
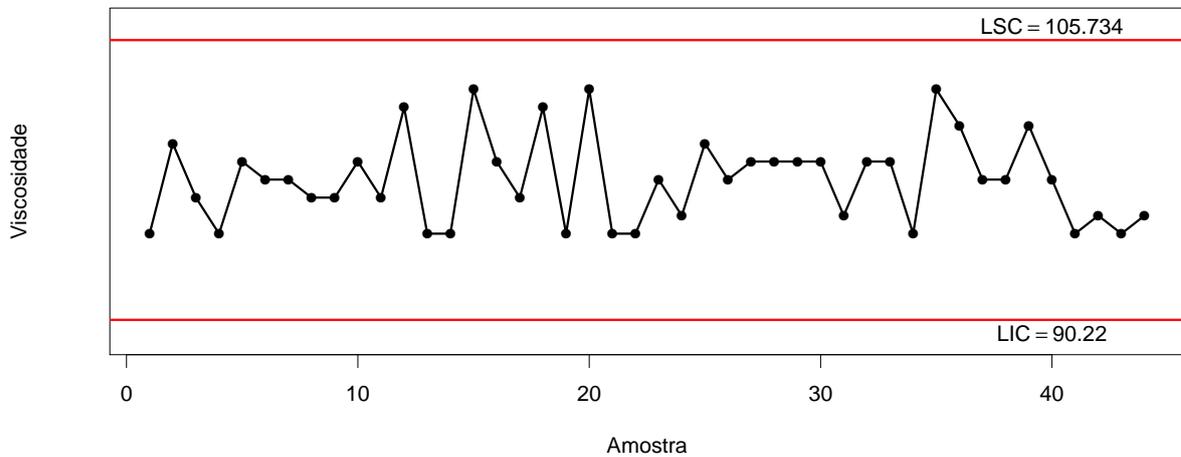
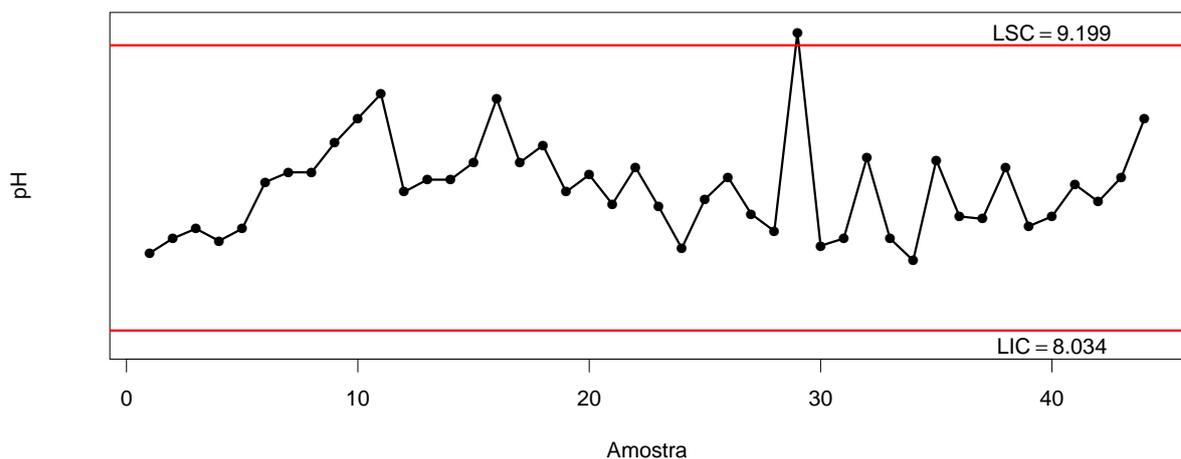
Figura 29: GCM T^2 de Hotelling para o processo bivariadoFigura 30: Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Densidade ($p = 2$)

Figura 31: Gráfico $SU\bar{X}$ para a característica Viscosidade ($p = 2$)

Paralelamente, a análise da característica pH é realizada por meio do GC de Shewhart tradicional. Na Figura 32 nota-se que a amostra 29 encontra-se fora dos limites de controle.

Figura 32: GC de Shewhart para a característica pH



A análise de controle do processo da indústria de tintas, atualmente, é feita através dos GC do tipo Shewhart para a média, como foi comentado na Seção 4.1. Desta forma, as características Densidade e pH seriam consideradas fora de controle em dois pontos, 29 e 41 respectivamente, como mostram as Figuras 32 e 33, o que provavelmente ocasionaria uma perda de tempo corrigindo a variável Densidade, visto que quando analisada sob a influência da

correlação com a variável Viscosidade, ela se encontra sob controle.

Figura 33: GC de Shewhart para a característica Densidade

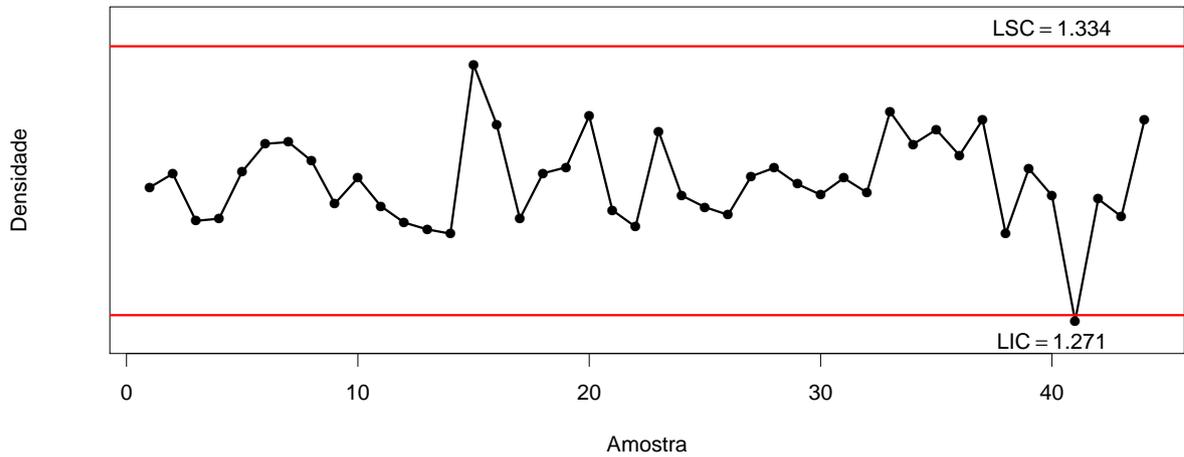
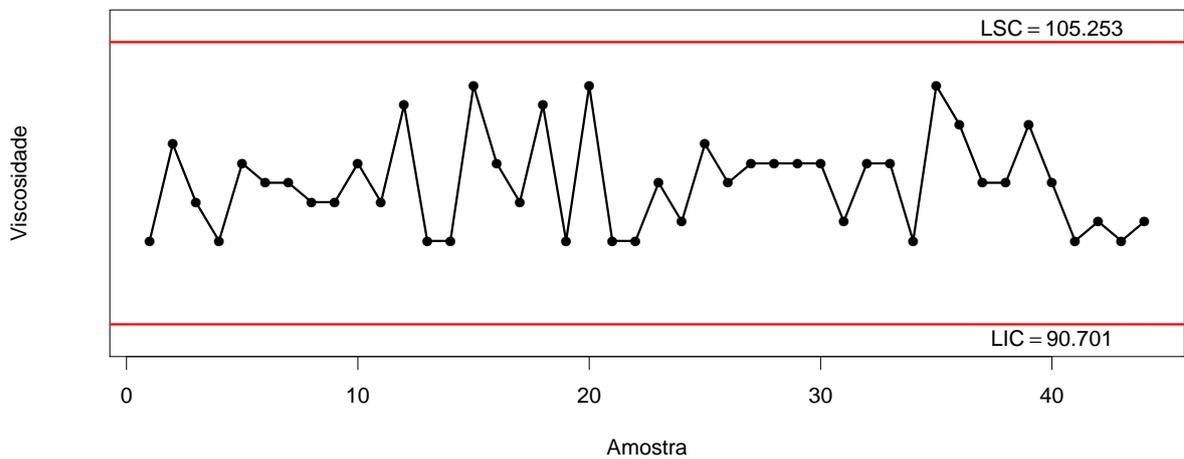


Figura 34: GC de Shewhart para a característica Viscosidade



6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção serão apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

6.1 Conclusões

O Gráfico de Controle Multivariado tem se mostrado um método alternativo para análise de processos multivariados, uma vez que é necessário apenas um gráfico, o qual condensa todas a informação de todas as características envolvidas, enquanto que para o gráfico univariado seriam necessários p gráficos, o que demanda mais tempo para análise. Neste sentido, esta dissertação tratou do monitoramento do vetor de médias, de um processo real da indústria de tintas. Este processo era trivariado, porém uma das características não era significativamente correlacionada com as demais, por este motivo optou-se por realizar, também, um estudo bivariado.

Para tanto uma revisão acerca dos gráficos de controle univariados e multivariados foi realizada, abordando pesquisas tradicionais e mais atuais sobre o assunto. Foram detalhados, tanto o gráfico proposto para estudo do processo, o GCM T^2 de Hotelling, quanto os concorrentes \bar{X} univariados simultâneos, que consideram a correlação envolvida entre as características, e o indicador utilizado, Número Médio de Amostras até o sinal (NMA).

Foram estudados o desempenho e eficiência relativa dos gráficos, não havia na literatura consultada trabalhos similares, ou seja, que realizassem o estudo de desempenho utilizando estimadores do processo real, o que torna esta dissertação um diferencial.

Para o caso do monitoramento do processo trivariado, se a perturbação ocorrer na característica Densidade ou Viscosidade, o GCM T^2 de Hotelling apresenta-se até 33% mais eficiente do que o $SU\bar{X}$, porém quando a característica pH sofre o deslocamento, em geral, o gráfico univariado é mais eficiente, em até 17%, principalmente para grandes deslocamentos. Quando duas características estão sob efeito de perturbação, por exemplo, Densidade e pH ou Viscosidade e pH, o gráfico T^2 tem um melhor desempenho, com $5,5\% \leq ER\% \leq 55,3\%$,

porém quando trata-se da Densidade e Viscosidade o $SU\bar{X}$ é mais eficiente. Se as três características são alteradas por causas especiais, para grandes deslocamentos ($\delta = 0,9; \dots; 3,0$) o GCM T^2 possui melhor desempenho, caso contrário, o $SU\bar{X}$ é mais eficiente.

Quando o processo é analisado sob uma perspectiva bivariada, para $r = 0,5$, o comportamento é bem dividido. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas uma características de cada vez, então o GCM T^2 de Hotelling é a melhor opção, onde $10,4\% \leq ER\% \leq 32,2\%$. Enquanto que, se ambas características sofrem deslocamento, o gráfico $SU\bar{X}$ se mantém em destaque. Este resultado corrobora com os resultados obtidos por Machado (2009), ao chegar a mesma conclusão quando $NMA_0 = 200$.

Foram apresentadas as aplicações das técnicas discutidas neste estudo. Através do GCM T^2 de Hotelling, tanto o processo trivariado como o bivariado apresentaram-se sob controle, o mesmo ocorreu quando aplicados os gráficos de \bar{X} univariados simultâneos. Foi mostrada também que com a atual metodologia da empresa, os GC do tipo Shewhart, as variável Densidade apresenta pontos fora de controle, o que poderia estar gerando perda de tempo e dinheiro para correção da característica Densidade, visto que quando analisada sob a perspectiva que considera sua correlação com a característica Viscosidade, a mesma estava sob controle estatístico.

E finalmente, foi sugerida a utilização das técnicas multivariadas em conjunto com univariadas, podendo ser o GCM T^2 ou $SU\bar{X}$, dependendo de como causas especiais influenciam o processo, se alteram uma ou duas características da qualidade, e utilizando o GC \bar{X} tradicional de Shewhart para a característica pH, pois a mesma não apresentou correlação significativa com as demais variáveis. Vale ressaltar que as conclusões aqui apresentadas levam em consideração apenas alterações no vetor de médias do processo, portanto, para aplicá-la à realidade da indústria de tintas em questão seria necessário um estudo para monitoramento da variabilidade do processo, o que gera uma sugestão de trabalho futuro.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Uma possível extensão deste trabalho é o estudo do monitoramento da matriz de covariâncias, a partir da teoria desenvolvida por Machado (2009). Como mencionado anteriormente, ainda há espaço para uma análise da variabilidade do processo.

Ainda há espaço na literatura quando trata-se de autocorrelação, pouco se tem a respeito de assunto, o que abre portas para novos estudos de desempenho de gráficos de controle para processos reais multivariados autocorrelacionados.

REFERÊNCIAS

- ADAMI, V. S. *Estudo da variabilidade da viscosidade na produção de lotes de tintas: um projeto seis sigma*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.
- APARISI, F. Hotelling's t^2 control chart with adaptive sample sizes. *International journal of production research*, v. 34, p. 2853–2862, 1996.
- APARISI, F.; CHAMP, C. W.; GARCIA-DIAZ, J. C. A performance analysis of hotelling χ^2 control chart with supplementary run rules. *Quality engineering*, v. 16, n. 3, p. 359–368, 2004.
- ASTM, Norma. *Standard Test Method for Consistency of Paints Measuring Krebs Unit (KU) Viscosity Using a Stormer-Type Viscometer*. 2003. Disponível em: <<http://www.astm.org/Standards/D562.htm>>.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. 4. reimp. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes with sample means and sample ranges. *Produção*, v. 21, n. 2, p. 197–208, 2011.
- ESCUADERO, L. F. *La simulación en la empresa*. Bilbao: Ediciones Deusto, 1973.
- GHUTE, V. B.; SHIRKE, D. T. A multivariate synthetic control chart for monitoring process mean vector. *Communications in statistics - theory and methods*, v. 37, n. 13, p. 2136–2148, 2008.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 1991.
- GLÓRIA, F. A. A. *Uma Avaliação do Desempenho de Núcleo-Estimadores no Controle de Processos Multivariados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.
- GORAYEB, S. R. *Ferramenta computacional para geração do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, 2010.
- HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bomb-sights. *Selected techniques of statistical analysis: for scientific and industrial research, and production and management engineering*, McGraw-Hill, New York, p. 111–184, 1947.
- HÄRDLE, W.; SIMAR, L. *Applied multivariate statistical analysis*. 2. ed. New York: Springer, 2007.
- IKEMATSU, P. *Estudo da refletância e sua influência no comportamento térmico de tintas refletivas e convencionais de cores correspondentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

- JACKSON, J. E. Multivariate quality control. *Communications in statistics - theory and methods*, 1985.
- JACKSON, J. E. *A user's guide to principal components*. New York: Wiley, 1991.
- JAVAHERI, A.; HOUSHMAND, A. A. Average run length comparison of multivariate control charts. *Journal of Statistical computation and simulation*, v. 69, n. 2, p. 125–140, 2001.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. *Applied multivariate statistical analysis*. 6. ed. New Jersey: Pearson, 2007.
- KONRATH, A. C. *Decomposição da estatística do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling por meio de um algoritmo computacional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2002.
- LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. *IIE Transactions*, v. 27, p. 800–810, 1995.
- LOWRY, C. A.; WOODALL, W. C.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, v. 34, n. 1, p. 46–53, 1992.
- LUSTOSA, P. R. B.; PONTE, V. M. R.; DOMINAS, W. R. *Pesquisa Operacional para decisão em contabilidade e administração*. São Paulo: Atlas, 2004.
- MACHADO, M. A. G. *Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, São Paulo, 2009.
- MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes. *Pesquisa Operacional*, v. 28, n. 1, p. 173–196, 2008.
- MARCONI, M.; LAKATOS, E. *Fundamentos da metodologia científica*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2001.
- MASON, R.; TRACY, N.; YOUNG, J. Multivariate control charts for individual observations. *Journal of Quality Technology*, v. 24, n. 2, p. 88–35, 1992.
- MASON, R.; TRACY, N.; YOUNG, J. Decomposition of t^2 for multivariate control chart interpretation. *Journal of Quality Technology*, v. 27, n. 2, p. 99–108, 1995.
- MASON, R.; YOUNG, J. *Multivariate statistical process control with industrial applications*. Philadelphia: SIAM, 2002.
- MATTAR, F. N. *Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento*. São Paulo: Atlas, 1999.
- MELO, G. M. *Decomposição da estatística teste do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling para o monitoramento e avaliação do controle de processos de agências bancárias*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, 2008.
- MINGOTI, S. A. *Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada*. Belo Horizonte: UFMG, 2005.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

- NEVES, T. M. M. S. *Análise do desempenho de cartas multivariadas com dados autocorrelacionados: carta T^2 e carta DPCA*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.
- OLIVEIRA, M. B. *Eficiência entre os Gráficos de Controle por Grupos para a média e o tradicional de Shewhart em processos com fluxos correlacionados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2013.
- PAULA, I. C.; FOGLIATTO, F. S.; ROSA, A. F. P. Análise comparativa das cartas de controle de hottelling e cartas baseadas em componentes principais no controle multivariado de processos industriais. In: *XXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção - XXI ENEGEP*. [s.n.], 2001. Disponível em: <<http://www.abepro.org.br>>.
- RICE, J.; REICH, T.; CLONINGER, C. R.; WETTE, R. An approximation to the multivariate normal integral: its application to multifactorial qualitative traits. *Biometrics*, v. 35, p. 451–459, 1979.
- SEREL, D. A.; MOSKOWITZ, H.; TANG, J. Univariate \bar{X} control charts for individual characteristics in a multinormal model. *IIE Transactions*, v. 32, p. 1115–1125, 2000.
- SHEWHART, W. A. *Economic Control Quality of Manufacturing Product*. New York: Van Nostrand, 1931.
- SOUZA, A. M.; RIGAO, M. H. Identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados. *Produção*, 2005.
- SULLIVAN, J.; WOODALL, W. A comparison of multivariate control charts for individual observation. *Journal of Quality Technology*, v. 28, n. 4, p. 398–408, 1996.
- TAVARES, P. S. *O gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling como instrumento de análise da qualidade numa indústria de alumínio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2003.