



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ARTHUR LIMA QUINTINO

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS DE GRAFOS ARESTA-COLORIDOS
EM CAMINHOS E CICLOS MONOCROMÁTICOS

FORTALEZA

2016

ARTHUR LIMA QUINTINO

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS DE GRAFOS ARESTA-COLORIDOS EM
CAMINHOS E CICLOS MONOCROMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- Q74v Quintino, Arthur Lima.
Vértice-particionamentos de grafos aresta-coloridos em caminhos e ciclos monocromáticos / Arthur Lima Quintino. – 2016.
59 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.
1. Partições de vértices. 2. Colorações de arestas. 3. Grafos multipartidos completos. I. Título.
CDD 510
-

ARTHUR LIMA QUINTINO

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS DE GRAFOS ARESTA-COLORIDOS EM
CAMINHOS E CICLOS MONOCROMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Aprovada em: 15/07/2016.

BANCA EXAMINADORA

Fabício Siqueira Benevides

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Júlio César Silva Araújo

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Victor Campos

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A todas as pessoas que de alguma forma torceram para que este trabalho fosse realizado com sucesso.

AGRADECIMENTOS

Ao longo da minha vida, não foram poucas as horas que passei estudando sozinho, seja na frente de um livro ou de um computador. Mas, como diria John Donne, ninguém é uma ilha. Por isso, é com muita satisfação que venho dividir aqui os méritos deste trabalho.

Com toda a minha família. Com meu pai Artur e com minha mãe Lucirene por terem me ensinado desde muito cedo a importância dos estudos, ao me garantirem uma educação de qualidade. Com minhas irmãs Laís e Lígia por terem me servido de exemplo, ao serem ótimas alunas. Com todos os meus primos, tios e avós por multiplicarem tudo de bom que já recebo em primeiro grau. E com minhas segundas mães Danúbia, Didi, Chaguinha e Uiba por terem cuidado de mim com tanto carinho.

Com toda a família da minha esposa Lorena. Com ela por ter sido uma companheira incrível esse tempo todo, ao assumir responsabilidades minhas para que eu pudesse me dedicar aos estudos e ao adiar seus próprios sonhos para que eu pudesse realizar o meu. Com meu sogro Maia, minha sogra Sônia e minhas cunhadas Sabrina, Monalisa, Julie[†], Miúda[†], Belinha, Meg, Madalena, Jane e Raquéis por terem contribuído diretamente para que eu passasse na prova de seleção, ao me hospedarem durante toda a minha preparação. E com todos os seus demais familiares por me tratarem tão bem a ponto de eu sentir que também faço parte da família.

Com todos os meus amigos por estarem presentes em tantos momentos marcantes da minha vida. Em especial, com meus amigos de infância do Iguatu, com meus amigos do 7 de Setembro e com meus amigos da Matemática da UFC.

Com todos os meus colegas de classe, colegas de trabalho e professores (não só de Matemática) por tudo que me ensinaram. Em especial, com meu professor Márcio da Escola Modelo por ter sido o primeiro a me fazer pensar em seguir a profissão. Com meus amigos de Olimpíada do C7S por terem transformado a Matemática (tão chata para tantos) em um verdadeiro hobby para mim. E com meu mestre Júnior por sempre ter me incentivado a estudar Matemática e a acreditar que sou um ‘bixinvocado’.

Com todos os funcionários do Departamento de Matemática da UFC. Em especial, com meu orientador Fabrício por todos os conselhos e por todas as dicas valiosas na escrita desta dissertação. E com os professores Júlio e Victor por se disponibilizarem a participar da banca examinadora.

Meu muito obrigado a todos!

[†]In memoriam.

“A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

– Bertrand Russell

RESUMO

Em 1989, Gyárfás conjecturou que, para todo r natural, r caminhos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo completo r -aresta-colorido. Mais tarde, Erdős, Gyárfás e Pyber propuseram uma versão mais forte dessa conjectura, na qual r ciclos monocromáticos são procurados em vez de r caminhos monocromáticos. Nesta dissertação, apresentamos vários problemas e resultados relacionados com tais conjecturas, incluindo problemas onde o grafo a ser colorido não é um grafo completo, mas sim um grafo multipartido completo. Destacamos ainda como o Lema da regularidade de Szemerédi pode ser aplicado nesse contexto. Além disso, provamos dois resultados originais. No primeiro deles, estendemos alguns argumentos introduzidos por Gyárfás e Lehel a fim de obtermos uma prova alternativa, mais simples, para um resultado devido a Pokrovskiy. Enquanto que no segundo, mostramos que 4 ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo bipartido completo balanceado 2-aresta-colorido, reduzindo assim o número de 12 ciclos monocromáticos que havia sido obtido anteriormente por Schaudt e Stein. Por fim, discutimos algumas estratégias que podem ser seguidas em trabalhos futuros a fim de reduzir a quantidade de ciclos monocromáticos necessários nesse caso de 4 para 3, o que é o mínimo possível para tal caso.

Palavras-chave: Partições de vértices. Colorações de arestas. Grafos multipartidos completos.

ABSTRACT

In 1989, Gyárfás conjectured that, for every natural r , r monochromatic paths are sufficient to vertex-partition any r -edge-coloured complete graph. Later, Erdős, Gyárfás and Pyber proposed a stronger version of this conjecture, in which r monochromatic cycles are wanted instead of r monochromatic paths. In this dissertation, we present many problems and results related to such conjectures, including problems where the graph to be coloured is not a complete graph, but a complete multipartite graph. We also highlight how the Szemerédi's regularity lemma may be applied in this context. Furthermore, we prove two original results. In the first one, we extend some arguments introduced by Gyárfás and Lehel in order to obtain an alternative, simpler, proof for a result due to Pokrovskiy. Whereas in the second, we show that 4 monochromatic cycles are sufficient to vertex-partition any 2-edge-coloured balanced complete bipartite graph, thereby reducing the number of 12 monochromatic cycles that had been previously obtained by Schaudt and Stein. Lastly, we discuss some strategies that may be followed in future works in order to reduce the quantity of monochromatic cycles needed in this case from 4 to 3, which is the minimum possible for such case.

Keywords: Vertex-partitions. Edge-colourings. Complete multipartite graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Um caminho simples.	11
Figura 1.2:	Um ciclo simples.	12
Figura 1.3:	Uma coloração split.	13
Figura 3.1:	Caso (A) da prova do Teorema 3.1.	32
Figura 3.2:	Caso (B) da prova do Teorema 3.1.	33
Figura 3.3:	Caso (C) da prova do Teorema 3.1.	33
Figura 3.4:	A vértice-partição \mathcal{P} de $G[V(P) \cup \{y\}]$	34
Figura 3.5:	Um grafo zigzag vermelho.	37
Figura 3.6:	Os casos (a) e (b) da Observação 3.6.	38
Figura 3.7:	O ciclo azul $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t)$	39
Figura 3.8:	(a) $G[S_7]$. (b) H_7^I e H_7^P	40
Figura 3.9:	Os casos (a), (b), (c) e (d) da Observação 3.13.	41
Figura 3.10:	O caso em que as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ são azuis.	43
Figura 3.11:	O caso em que a aresta $x_{k+1}y_1$ é vermelha.	43
Figura 3.12:	O caso em que a aresta $x_{j+1}y_1$ é vermelha.	44
Figura 3.13:	O caso em que a aresta x_2y_{j+2} é vermelha.	44
Figura 3.14:	O caso em que a aresta x_jy_{k+2} é vermelha.	45
Figura 3.15:	O caso em que a aresta $x_{k+2}y_k$ é vermelha.	46
Figura 3.16:	Um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+2}]$	46
Figura 3.17:	O caso em que a aresta x_jy_{k+1} é vermelha.	47
Figura 3.18:	Um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+1} \setminus \{x_{k+1}, y_k\}]$	48
Figura 3.19:	O caso em que a aresta $x_{k+1}y_{k+3}$ é vermelha.	48
Figura 3.20:	O caso em que as arestas x_1y_k e $x_{k+1}y_2$ são azuis.	49
Figura 3.21:	O caso em que a aresta x_2y_{k+2} é vermelha.	49
Figura 3.22:	O caso em que a aresta $x_{k+3}y_{k+1}$ é vermelha.	50
Figura 3.23:	O caso em que a aresta $x_{k+4}y_k$ é vermelha.	51
Figura 3.24:	O caso em que a aresta $x_{k+2}y_{k+4}$ é vermelha.	51
Figura 3.25:	O caso em que a aresta $x_{k+1}y_2$ é vermelha.	52
Figura 3.26:	O caso em que a aresta $x_{j+1}y_2$ é vermelha.	53
Figura 3.27:	O caso em que a aresta x_1y_{j+2} é vermelha.	53
Figura 3.28:	O caso em que a aresta x_1y_{k+2} é vermelha.	54
Figura 4.1:	Um grafo zigzag que não pode ser particionado em menos de 3 ciclos.	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1:	Resumo dos resultados da Seção 1.1.	15
Tabela 1.2:	Resumo dos resultados das Seções 1.2, 1.3 e 1.4.	20

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Caminhos simples hamiltonianos	11
1.2	Vértice-particionamentos em caminhos monocromáticos	15
1.3	Vértice-particionamentos em ciclos monocromáticos	17
1.4	Colorações locais	19
2	O MÉTODO DA REGULARIDADE	21
2.1	Preliminares	21
2.2	Exemplo de aplicação no nosso contexto	22
3	ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES	32
3.1	Completando uma prova de Gyárfás e Lehel	32
3.2	Vértice-particionando grafos bipartidos completos balanceados 2- aresta-coloridos	35
3.2.1	<i>Prova do Lema 3.3</i>	36
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	57
	ÍNDICE REMISSIVO	59

1 INTRODUÇÃO

Há cerca de cinquenta anos, em um estudo sobre problemas do tipo Ramsey, Gerencsér e Gyárfás (1967) afirmaram em uma nota de rodapé (e Gyárfás (1983) formalizou uma prova anos mais tarde) que em todo grafo completo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul é possível encontrar um par de caminhos de cores distintas que compartilham apenas uma extremidade e cobrem todos os seus vértices.¹ Tal resultado, embora tenha recebido pouco destaque a priori, possui uma grande importância histórica por ser um dos primeiros e mais elementares de uma série de problemas relacionados com o objeto de estudo desta dissertação: a cobertura ou o particionamento do conjunto de vértices de grafos aresta-coloridos através de caminhos e/ou ciclos monocromáticos.

Nesse nosso contexto, é comum que uma aresta, um vértice e o conjunto vazio sejam considerados como um caminho ou um ciclo. Isso evita que certas exceções desnecessárias sejam criadas e permite que os problemas sejam enunciados e provados de uma forma mais compacta e abrangente.

1.1 Caminhos simples hamiltonianos

Será conveniente iniciarmos esta seção estabelecendo a seguinte definição relativa à estrutura mencionada acima.

Definição 1.1. Um caminho P em um grafo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul é *simples* quando é a união de dois caminhos de cores distintas que compartilham apenas uma extremidade. Seu subcaminho vermelho (resp. azul) é denotado por P_R (resp. P_B), seu *ponto médio* é o seu único vértice que pertence tanto a P_R quanto a P_B e sua *extremidade vermelha* (resp. *azul*) é a sua extremidade que pertence a P_R (resp. P_B). (Veja a Figura 1.1.)

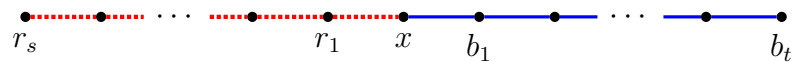


Figura 1.1: Um caminho simples P que é a união do caminho vermelho $P_R = (x, r_1, \dots, r_s)$ e do caminho azul $P_B = (x, b_1, \dots, b_t)$. Seu ponto médio é x e suas extremidades vermelha e azul são r_s e b_t respectivamente.

Utilizando a linguagem dessa definição, a afirmação feita por Gerencsér e Gyárfás se traduz no teorema abaixo. Como uma forma de familiarizarmos o leitor com algumas técnicas que utilizaremos na Seção 3, apresentaremos uma prova para esse e para

¹Eles utilizaram esse fato para concluir que todo grafo completo com pelo menos $k + l$ vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul possui um caminho vermelho de comprimento k ou um caminho azul de comprimento l .

outros resultados sempre que considerarmos oportuno.

Teorema 1.2 (Gerencsér e Gyárfás; 1967). *Se G é um grafo completo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G possui um caminho simples hamiltoniano.*

Prova. Seja $P = (r_s, \dots, r_1, x, b_1, \dots, b_t)$ um caminho simples de tamanho máximo de G , onde x é seu ponto médio e r_s e b_t são suas extremidades vermelha e azul respectivamente. Suponha por contradição que P não é hamiltoniano. Daí, seja y um vértice que não pertence a P . Podemos assumir sem perda de generalidade que a aresta xy é vermelha. Daí, o caminho simples $(r_s, \dots, r_1, x, y, b_1, \dots, b_t)$ é maior que P , uma contradição. Logo, o resultado segue. \square

É válido observarmos que Gyárfás (1983) apresentou um algoritmo capaz não só de provar a existência como também de construir explicitamente em tempo $O(n)$ um caminho simples hamiltoniano em um grafo completo com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul.

Similarmente à Definição 1.1, um ciclo em um grafo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul é *simples* quando é a união de dois caminhos de cores distintas que compartilham apenas suas duas extremidades (veja a Figura 1.2). Naturalmente, basta adicionarmos a aresta que liga as duas extremidades de um caminho simples para obtermos um ciclo simples. Assim, um corolário imediato para o Teorema 1.2 pode ser obtido substituindo-se caminho por ciclo no seu enunciado. Outro corolário possível é o seguinte.

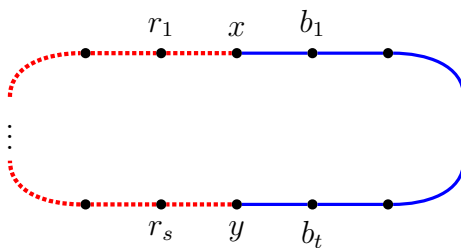


Figura 1.2: Um ciclo simples que é a união do caminho vermelho (x, r_1, \dots, r_s, y) e do caminho azul (x, b_1, \dots, b_t, y) .

Corolário 1.3. *Se G é um grafo completo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G pode ser vértice-particionado em um caminho monocromático e um ciclo monocromático de cores distintas.*

Prova. Seja C um ciclo simples hamiltoniano de G , onde (x, r_1, \dots, r_s, y) e (x, b_1, \dots, b_t, y) são seus caminhos vermelho e azul respectivamente. Podemos assumir sem perda de generalidade que a aresta xy é azul. Daí, segue que G pode ser vértice-particionado no caminho vermelho (r_1, \dots, r_s) e no ciclo azul (x, b_1, \dots, b_t, y) . \square

Naturalmente, podemos nos questionar se é possível estendermos esses resultados para outras classes de grafos hospedeiros. Nesse sentido, a fim de estendermos o Teorema 1.2 para grafos bipartidos completos, é natural exigirmos que tais grafos sejam *balanceados*, i.e. que suas classes de partição tenham o mesmo tamanho. De fato, se uma de suas classes de partição tivesse pelo menos dois vértices a mais do que a outra, não seria possível encontrarmos nem mesmo um caminho hamiltoniano qualquer. Já se uma de suas classes de partição tivesse apenas um vértice a mais do que a outra, até conseguiríamos encontrar um caminho hamiltoniano, mas ainda assim não seria possível encontrarmos um ciclo hamiltoniano qualquer e, como vimos acima, isso também é relevante. Além disso, é necessário exigirmos que a coloração desses grafos não pertença ao tipo de coloração descrita na seguinte definição.

Definição 1.4. Seja G um grafo bipartido, com classes de partição X e Y , cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. A coloração de G é *split* quando existem conjuntos disjuntos e não-vazios X_1, X_2, Y_1 e Y_2 tais que $X = X_1 \cup X_2, Y = Y_1 \cup Y_2$ e as arestas entre X_i e Y_j são vermelhas se e somente se $i = j$. (Veja a Figura 1.3.)

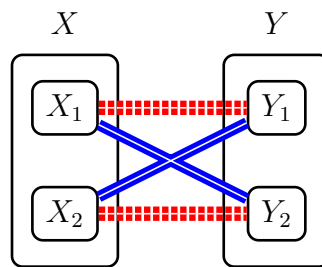


Figura 1.3: Uma coloração split.

De fato, considere um grafo bipartido cujas arestas são coloridas de vermelho e azul e assumamos que sua coloração é split. É fácil verificar que qualquer caminho simples desse grafo cobre no máximo três dos quatro conjuntos que satisfazem as condições da Definição 1.4.

Em outro estudo sobre problemas do tipo Ramsey, Gyárfás e Lehel (1973) provaram implicitamente² o teorema a seguir, o qual foi devidamente enunciado por Gyárfás (1983) apenas anos mais tarde.

Teorema 1.5 (Gyárfás e Lehel; 1973). *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se a coloração de G não é split, então G possui um caminho simples que cobre todos exceto no máximo um de seus vértices.*

Cerca de quarenta anos se passaram até que finalmente, ao provar o teorema

²Originalmente, eles provaram que se k e l são números naturais ímpares, então todo grafo bipartido completo balanceado com $k+l$ vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul possui um caminho vermelho de comprimento k ou um caminho azul de comprimento l .

abaixo, Pokrovskiy (2014) retirasse do enunciado do Teorema 1.5 a possibilidade de um dos vértices ficar descoberto.

Teorema 1.6 (Pokrovskiy; 2014). *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se a coloração de G não é split, então G possui um caminho simples hamiltoniano.*

Uma vez que o Teorema 1.6 é apenas uma ligeira extensão do Teorema 1.5, é razoável esperar que a prova apresentada por Pokrovskiy (2014) também fosse uma extensão da prova apresentada por Gyárfás e Lehel (1973), mas esse não é o caso. A prova apresentada por Pokrovskiy é mais engenhosa: ele inicia provando alguns lemas poderosos que já garantem uma boa estrutura inicial e depois finaliza com algumas análises mais simples. Enquanto que a prova apresentada por Gyárfás e Lehel é mais natural: eles tomam um caminho simples de tamanho máximo e mostram que no máximo um vértice fica de fora dele.

Levando-se em conta o tempo que passou sem que o Teorema 1.5 fosse melhorado e a maneira independente como o Teorema 1.6 foi provado, seria interessante descobrirmos se é possível estendermos os argumentos utilizados por Gyárfás e Lehel até provarmos o Teorema 1.6 ou se realmente a estratégia utilizada por eles é capaz de provar apenas o Teorema 1.5. Na Seção 3.1, veremos que é possível sim provarmos o Teorema 1.6 apenas tomando um caminho simples de tamanho máximo e mostrando que ele é hamiltoniano.

Assim como o Teorema 1.2, o Corolário 1.3 também se estende para grafos bipartidos completos balanceados cujas colorações não são split. Uma prova para o corolário a seguir pode ser encontrada na Seção 3.2.

Corolário 1.7. *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se a coloração de G não é split, então G pode ser vértice-particionado em um caminho monocromático e um ciclo monocromático de cores distintas.*

Com o auxílio do Teorema 1.6, Schaudt e Stein (2015) provaram o teorema abaixo, o qual generaliza o Teorema 1.2 para grafos k -partidos completos, com $k \geq 3$. Pela mesma razão do caso bipartido, eles exigiram que tais grafos fossem *justos*, i.e. que cada uma de suas classes de partição contivesse no máximo a metade de seus vértices. Por outro lado, observe que nesse caso não há nenhuma restrição quanto ao tipo de coloração desses grafos.

Teorema 1.8 (Schaudt e Stein; 2015). *Se G é um grafo k -partido completo justo, com $k \geq 3$, cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G possui um caminho simples hamiltoniano.*

Schaudt e Stein (2015) ainda afirmaram parecer plausível que o Corolário 1.3

também possa ser generalizado para grafos k -partidos completos justos, com $k \geq 3$. Ademais, eles provaram a seguinte versão ligeiramente mais fraca.

Corolário 1.9 (Schaudt e Stein; 2015). *Se G é um grafo k -partido completo justo, com $k \geq 3$, cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então existem um caminho monocromático e um ciclo monocromático disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo um dos vértices de G .*

Na Tabela 1.1, resumimos os principais resultados apresentados nesta seção.

Classe do grafo hospedeiro	Caminho simples hamiltoniano	Caminho + Ciclo
Completo	✓	✓
Bipartido não-split	✓	✓
Multipartido	✓	exceto um vértice

Tabela 1.1: Resumo dos resultados da Seção 1.1.

1.2 Vértice-particionamentos em caminhos monocromáticos

Naturalmente, todo grafo que possui um caminho simples hamiltoniano pode ser vértice-particionado em no máximo dois caminhos monocromáticos. Sob essa perspectiva, a conjectura a seguir procura generalizar o Teorema 1.2 para um número arbitrário de cores.

Conjectura 1.10 (Gyárfás; 1989). *Todo grafo completo r -aresta-colorido pode ser vértice-particionado em no máximo r caminhos monocromáticos.*

Erdős, Gyárfás e Pyber (1991) afirmaram que essa conjectura não pode ser melhorada e apresentaram uma ideia de como construir, para todo r , grafos completos r -aresta-coloridos que não podem ser vértice-particionados em menos de r caminhos monocromáticos. Tal ideia consiste no seguinte. Considere um grafo completo G e particione seu conjunto de vértices em r subconjuntos A_1, \dots, A_r . Para todos $i, j \in \{1, \dots, r\}$ com $i \leq j$, pinte a aresta xy com a cor i sempre que $x \in A_i$ e $y \in A_j$. Daí, eles observaram que se $|A_i|$ cresce suficientemente rápido com i , então G não pode ser vértice-particionado em menos de r caminhos monocromáticos. Por exemplo, Gyárfás (2016) mostrou que é suficiente tomar $|A_i| = 2^i - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Como vimos na Seção 1.1, o caso $r = 2$ da Conjectura 1.10 pode ser provado em poucas linhas e isso já foi feito há bastante tempo. Por outro lado, o caso $r = 3$ dessa conjectura foi provado apenas recentemente por Pokrovskiy (2014) e isso envolveu não só uma boa quantidade de páginas como também vários outros resultados, dentre eles o

Teorema 1.6. Para $r \geq 4$, a Conjectura 1.10 continua em aberto.

Para grafos bipartidos completos balanceados cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, é fácil verificar que se suas colorações forem split, então tais grafos podem ser vértice-particionados em no máximo 3 caminhos monocromáticos (veja o Lema 3.2). Assim, o corolário abaixo segue de qualquer um dos Teoremas 1.5 ou 1.6.

Corolário 1.11 (Pokrovskiy; 2014). *Se G é um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 caminhos monocromáticos.*

A fim de generalizar esse corolário para um número arbitrário de cores, Pokrovskiy (2014) fez a seguinte conjectura.

Conjectura 1.12 (Pokrovskiy; 2014). *Todo grafo bipartido completo balanceado r -aresta-colorido pode ser vértice-particionado em no máximo $2r - 1$ caminhos monocromáticos.*

Ademais, Pokrovskiy (2014) afirmou que essa conjectura não pode ser melhorada, uma vez que, para todo r , existem grafos bipartidos completos balanceados r -aresta-coloridos que não podem ser vértice-particionados em menos de $2r - 1$ caminhos monocromáticos. Embora o exemplo apresentado por ele no artigo citado acima esteja incorreto, é possível aproveitar a sua ideia para construir infinitos exemplos que mostram que a sua afirmação é realmente válida. De fato, considere um grafo bipartido completo balanceado G com classes de partição X e Y . Particione X e Y em r subconjuntos X_1, \dots, X_r e Y_1, \dots, Y_r respectivamente de modo que $|X_i| = x_i$, onde x_i é um natural qualquer, para todo $i \in \{1, \dots, r - 1\}$, $|Y_j| = \sum_{i=1}^{r-1} x_i + r$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ e $|X_r| = |Y| - \sum_{i=1}^{r-1} x_i$. Para todos $i, j \in \{1, \dots, r\}$, pinte as arestas entre X_i e Y_j com a cor $i + j \pmod{r}$. Daí, observe que todo caminho monocromático de G contém vértices de no máximo um dos subconjuntos de cada classe e portanto são necessários $r - 1$ caminhos monocromáticos para cobrirmos os vértices de $X \setminus X_r$. Para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, observe ainda que existe pelo menos um vértice de Y_j que não está coberto pela união de tais caminhos e portanto são necessários mais r caminhos monocromáticos para cobrirmos os vértices restantes. Logo, segue que G não pode ser vértice-particionado em menos de $2r - 1$ caminhos monocromáticos.

Por outro lado, em analogia ao Teorema 1.8, Schaudt e Stein (2015) observaram que talvez todo grafo k -partido completo justo r -aresta-colorido, com $k \geq 3$, possa ser vértice-particionado em menos de $2r - 1$ caminhos monocromáticos, inclusive até em no máximo r deles.

1.3 Vértice-particionamentos em ciclos monocromáticos

Em todos os problemas acima, podemos nos questionar se é possível substituímos caminhos por ciclos. Tendo em mente a Definição 1.1, observe que o teorema a seguir está diretamente relacionado com o Teorema 1.2.

Teorema 1.13 (Gyárfás; 1983). *Se G é um grafo completo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então existem dois ciclos monocromáticos de cores distintas que compartilham no máximo um vértice e cobrem todos os vértices de G .*

Prova. Pela prova do Corolário 1.3, podemos assumir sem perda de generalidade que G pode ser vértice-particionado em um caminho vermelho $P = (r_1, \dots, r_s)$ e um ciclo azul $C = (x, b_1, \dots, b_t, y)$ de modo que as arestas r_1x e r_sy sejam vermelhas. Podemos assumir ainda que o ciclo C tem tamanho máximo. Agora, observe que as arestas r_1r_s , r_1y e r_sx não podem ser todas azuis, pois nesse caso G poderia ser vértice-particionado no caminho vermelho (r_2, \dots, r_{s-1}) e no ciclo azul $(r_s, x, b_1, \dots, b_t, y, r_1)$, o qual é maior que C . Daí, o resultado segue diretamente. \square

Novamente observamos que Gyárfás (1983) apresentou um algoritmo capaz não só de provar a existência como também de construir explicitamente em tempo $O(n)$ dois ciclos satisfazendo as condições do teorema acima em um grafo completo com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul.

O Teorema 1.13 é uma versão ligeiramente mais fraca de um problema que costumava ser conhecido como Conjectura de Lehel, o qual não permitia a possibilidade dos ciclos compartilharem um vértice. No entanto, essa conjectura acabou se revelando bem mais difícil de ser provada do que o Teorema 1.13. Primeiramente, Ayel (1979) a provou apenas para alguns tipos especiais de colorações. Mais tarde, Łuczak, Rödl e Szemerédi (1998) a provaram para todos os tipos de colorações, porém apenas para grafos suficientemente grandes. Depois, Allen (2008) também provou o mesmo resultado, mas com um limite melhor para o tamanho dos grafos. Embora tenham utilizado estratégias semelhantes, Allen conseguiu melhorar esse limite por ter aplicado o Teorema de Ramsey enquanto que Łuczak, Rödl e Szemerédi aplicaram o Lema da regularidade de Szemerédi. Finalmente, apenas cerca de trinta anos após a Conjectura de Lehel ser primeiro citada por Ayel (1979), Bessy e Thomassé (2010) a transformaram no teorema a seguir por meio de uma prova elementar e relativamente curta.

Teorema 1.14 (Bessy e Thomassé; 2010). *Se G é um grafo completo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G pode ser vértice-particionado em um ciclo vermelho e um ciclo azul.*

Com o teorema acima, Bessy e Thomassé provaram não só a Conjectura de

Lehel como também o caso $r = 2$ da conjectura a seguir, a qual é uma versão mais forte da Conjectura 1.10.

Conjectura 1.15 (Erdős, Gyárfás e Pyber; 1991). *Todo grafo completo r -aresta-colorido pode ser vértice-particionado em no máximo r ciclos monocromáticos.*

Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi (2011) provaram o caso $r = 3$ dessa conjectura em uma versão assintótica, a qual permite $o(n)$ vértices descobertos em um grafo com n vértices. Utilizando esse resultado, eles provaram ainda que 17 ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo completo 3-aresta-colorido suficientemente grande. Mais tarde, Lang, Schaudt e Stein (2015) mostraram como reduzir esse número para 10 com uma ligeira modificação do método aplicado originalmente.

Embora a versão assintótica obtida por Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi indicasse que o caso $r = 3$ da Conjectura 1.15 provavelmente seria válido, Pokrovskiy (2014) acabou refutando essa conjectura para todo $r \geq 3$ através da construção de infinitos contraexemplos.

Para r arbitrário, não é sequer óbvio que o número de ciclos monocromáticos suficiente para vértice-particionar qualquer grafo completo r -aresta-colorido com n vértices independe de n . No entanto, Erdős, Gyárfás e Pyber (1991) provaram que esse número é de fato uma função apenas de r , a qual é $O(r^2 \log r)$. Para grafos suficientemente grandes, o melhor limite superior conhecido para essa função é devido a Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi (2006a), que provaram que $100r \log r$ ciclos monocromáticos são suficientes.

Para o caso bipartido, Schaudt e Stein (2015) mencionaram que talvez a seguinte versão mais forte da Conjectura 1.12 possa ser válida.

Conjectura 1.16. *Todo grafo bipartido completo balanceado r -aresta-colorido pode ser vértice-particionado em no máximo $2r - 1$ ciclos monocromáticos.*

Schaudt e Stein (2015) provaram o caso $r = 2$ dessa conjectura em uma versão assintótica, a qual permite $o(n)$ vértices descobertos em um grafo com n vértices. Em compensação, essa versão também é válida para grafos k -partidos completos justos, com $k \geq 3$. Daí, utilizando esse resultado, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 1.17 (Schaudt e Stein; 2015). *Seja G um grafo k -partido completo justo suficientemente grande cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se $k \geq 3$, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 14 ciclos monocromáticos. Se $k = 2$, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 12 ciclos monocromáticos.*

Schaudt e Stein (2015) afirmaram acreditar que o número de ciclos monocromáticos desse teorema possa ser reduzido. De fato, provaremos na Seção 3.2 que 4 ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo bipartido

completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, melhorando assim não só o número de ciclos monocromáticos como também o limite para o tamanho do grafo no caso $k = 2$ desse teorema. Observe que nosso resultado utiliza apenas um ciclo monocromático a mais do que o mínimo possível previsto pela Conjectura 1.16.

Assim como no caso de grafos completos, também não é óbvio que existe uma função $f(r)$ tal que $f(r)$ ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo bipartido completo balanceado r -aresta-colorido. No entanto, Haxell (1997) provou que essa função de fato existe. Ademais, ela concluiu que essa função é $O((r \log r)^2)$ para r suficientemente grande e que $f(3) \leq 1695$. Mais tarde, Peng, Rödl e Ruciński (2002) afirmaram que o limite superior para $f(r)$ pode ser melhorado para $O(r^2 \log r)$ substituindo-se um resultado utilizado por Haxell por um resultado obtido por eles. Para $r = 3$, Lang, Schaudt e Stein (2015) melhoraram o limite superior para 18. Para isso, assim como no caso $r = 2$, eles primeiro provaram uma versão assintótica do caso $r = 3$ da Conjectura 1.16, a qual permite $o(n)$ vértices descobertos em um grafo com n vértices.

1.4 Colorações locais

Um grafo é *localmente* r -aresta-colorido quando as arestas incidentes em cada um de seus vértices são coloridas com no máximo r cores. Apesar dessa restrição, observe que o número total de cores utilizadas para colorir as arestas de um grafo localmente r -aresta-colorido pode ser arbitrário. Naturalmente, podemos nos questionar se é possível generalizarmos os problemas acima para colorações locais.

Com o auxílio do Teorema 1.14, Conlon e Stein (2016) provaram a generalização da Conjectura de Lehel, i.e. eles provaram que todo grafo completo localmente 2-aresta-colorido pode ser vértice-particionado em 2 ciclos monocromáticos de cores distintas. Para r arbitrário, eles provaram que $O(r^2 \log r)$ ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo completo localmente r -aresta-colorido, generalizando assim o resultado obtido por Erdős, Gyárfás e Pyber (1991). Mais tarde, Lang e Stein (2015) mostraram que para grafos suficientemente grandes $2r^2$ ciclos monocromáticos são suficientes.

Para o caso bipartido, Lang e Stein (2015) generalizaram o Corolário 1.11, i.e. eles provaram que todo grafo bipartido completo balanceado localmente 2-aresta-colorido pode ser vértice-particionado em no máximo 3 caminhos monocromáticos. Ademais, eles provaram que $4r^2$ ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo bipartido completo balanceado localmente r -aresta-colorido suficientemente grande, não só generalizando como também melhorando assim os resultados obtidos por Haxell (1997) e por Peng, Rödl e Ruciński (2002).

Na Tabela 1.2, resumimos os principais resultados apresentados nas Seções 1.2, 1.3 e 1.4.

Classe do grafo hospedeiro	Número de cores	Número de caminhos	Número de ciclos
Completo	2	2	2
	3	3	$[4, 10]^*$
	$r \geq 4$	$[r, 100r \log r]^*$	$[r + 1, 100r \log r]^*$
Bipartido	2	3	$[3, 4]$
	3	$[5, 18]^*$	$[5, 18]^*$
	$r \geq 4$	$[2r - 1, 4r^2]^*$	$[2r - 1, 4r^2]^*$
Multipartido	2	2	$[2, 14]^*$

Tabela 1.2: Resumo dos resultados das Seções 1.2, 1.3 e 1.4.

Uma última referência. Para leitores interessados em conhecer mais problemas relacionados com os que apresentamos aqui, recomendamos um artigo recente de um dos precursores do tema estudado nesta dissertação: Gyárfás (2016). Lá, ele aborda diversos outros tipos de variações desses problemas, nas quais outras classes de grafos hospedeiros são consideradas e/ou outros tipos de estruturas monocromáticas são procuradas.

*Limite superior para grafos suficientemente grandes.

2 O MÉTODO DA REGULARIDADE

Desde que Szemerédi provou o seu famoso Lema da regularidade há cerca de quarenta anos, tal ferramenta foi se mostrando cada vez mais importante à medida que ela foi sendo utilizada para resolver os mais diversos tipos de problemas, dentre os quais está o tipo estudado nesta dissertação. De fato, muitos dos resultados que vimos na Seção 1 foram obtidos a partir de aplicações do Lema da regularidade de Szemerédi e de outras ferramentas relacionadas a ele. Como um exemplo disso, reproduziremos na Seção 2.2 a prova do Teorema 1.17.

2.1 Preliminares

A fim de enunciarmos o Lema da regularidade de Szemerédi, é preciso estabelecermos algumas definições. As duas primeiras delas são as seguintes.

Definição 2.1. Sejam G um grafo e $A, B \subseteq V(G)$ subconjuntos disjuntos. O número de arestas de G que possuem uma extremidade em A e outra em B é denotado por $\|A, B\|$. A *densidade* do par (A, B) , denotada por $d_G(A, B)$, é o número real entre 0 e 1 dado por $\frac{\|A, B\|}{|A||B|}$.

Definição 2.2. Sejam G um grafo e $A, B \subseteq V(G)$ subconjuntos disjuntos. Dado $\varepsilon > 0$, o par (A, B) é ε -regular quando para quaisquer subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ vale que $|d_G(X, Y) - d_G(A, B)| \leq \varepsilon$.

Observe que se (A, B) é um par ε -regular em relação a um grafo G , então (A, B) também é ε -regular em relação ao seu complemento \overline{G} , uma vez que $d_{\overline{G}}(A, B) = 1 - d_G(A, B)$. Além disso, observe que quanto menor for o valor de ε , mais uniformemente serão distribuídas as arestas de um par ε -regular.

A última definição que precisaremos é a seguinte.

Definição 2.3. Seja $\mathcal{P} = \{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ uma partição do conjunto de vértices de um grafo G . Dado $\varepsilon > 0$, a partição \mathcal{P} é ε -regular quando satisfaz as três seguintes condições.

- (i) $|W_0| \leq \varepsilon|V(G)|$.
- (ii) $|W_1| = \dots = |W_t|$.
- (iii) Todos exceto no máximo εt^2 dos pares (W_i, W_j) com $1 \leq i < j \leq t$ são ε -regulares.

Observe que se (W_i, W_j) é um par ε -regular de um grafo G , então (W_i, W_j) também é um par ε' -regular de G para todo $\varepsilon' \geq \varepsilon$. Assim, se \mathcal{P} é uma partição ε -regular de G , então \mathcal{P} também é uma partição ε' -regular de G para todo $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Ao longo dos anos, diversas versões do Lema da regularidade de Szemerédi foram desenvolvidas a fim de que ele se adequasse às diversas situações em que seria

aplicado. No nosso caso, como pretendemos aplicá-lo para grafos multipartidos, será conveniente o enunciarmos na seguinte versão.

Lema 2.4 (Lema da regularidade com partição). *Para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $m_0, s \in \mathbb{N}$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo G com pelo menos m_1 vértices e toda partição $\{V_1, \dots, V_s\}$ de seu conjunto de vértices, existe uma partição ε -regular $\{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ de G satisfazendo as duas seguintes condições.*

(i) $m_0 \leq t \leq m_1$.

(ii) Para cada $i \in \{1, \dots, t\}$, existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $W_i \subseteq V_j$.

Por fim, iremos apresentar um resultado auxiliar que deverá ser aplicado depois que tivermos obtido uma partição ε -regular do grafo através do lema acima. Para isso, precisaremos das seguintes definições.

Definição 2.5. Seja G um grafo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Um emparelhamento vermelho (resp. azul) de G é *conexo* quando está contido em uma componente conexa do subgrafo induzido pelas arestas vermelhas (resp. azuis) de G .

Definição 2.6. Seja $\mathcal{P} = \{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ uma partição ε -regular de um grafo G . O *grafo reduzido* de G relativo a \mathcal{P} é o grafo que tem $\{W_1, \dots, W_t\}$ como conjunto de vértices e onde $W_i W_j$ é uma aresta se e somente se o par (W_i, W_j) é ε -regular.

O lema a seguir nos mostra que para encontrarmos ciclos monocromáticos grandes em um grafo basta encontrarmos emparelhamentos monocromáticos conexos grandes em seu grafo reduzido. Esse tipo de abordagem é devida originalmente a Łuczak (1999). Porém, a versão que apresentaremos aqui foi retirada, com algumas adaptações, de um artigo de Benevides (2013).

Lema 2.7. *Sejam G um grafo multipartido completo justo cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, $\mathcal{P} = \{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ uma partição de G que é ε -regular nas duas cores e refina suas classes de partição e R o grafo reduzido de G relativo a \mathcal{P} . Assuma que as arestas de R são coloridas de vermelho e azul de modo que para cada aresta vermelha (resp. azul) $W_i W_j$ de R vale que a densidade em vermelho (resp. azul) do par (W_i, W_j) em G é pelo menos ρ , onde $\varepsilon/\rho < 1/20$. Dado $0 < \lambda < 1/4$, se existem dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $\lambda|V(R)|$ vértices de R , então existem dois ciclos monocromáticos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $(\lambda + 10\varepsilon/\rho)|V(G)|$ vértices de G .*

2.2 Exemplo de aplicação no nosso contexto

Iniciaremos esta seção com um lema simples e bastante útil, o qual nos mostra que para provarmos o caso $k \geq 3$ do Teorema 1.17 basta analisarmos o caso tripartido.

Lema 2.8 (Schaudt e Stein; 2015). *Se G é um grafo k -partido completo justo, com $k \geq 3$, então G possui um subgrafo gerador tripartido completo justo.*

Prova. A prova é por indução em k . Para $k = 3$, o resultado segue trivialmente. Para $k \geq 4$, considere o subgrafo de G obtido deletando-se as arestas entre suas duas menores classes de partição. Observe que tal subgrafo é $(k - 1)$ -partido completo e justo, pois caso contrário as duas menores classes de partição de G juntas conteriam mais da metade de seus vértices e daí o mesmo se aplicaria também para suas duas maiores classes de partição juntas, o que é uma contradição. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução para esse subgrafo, donde o resultado segue. \square

Como pretendemos utilizar o Lema 2.7 adiante, primeiro precisaremos provar os dois seguintes lemas.

Lema 2.9 (Schaudt e Stein; 2015). *Seja G um grafo tripartido justo com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, onde n é um natural par. Sejam ainda V_1, V_2 e V_3 as classes de partição de G . Dado $\varepsilon > 0$, se para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e cada $v \in V_i$ vale que $|V_i| > 3\varepsilon n$ e $d(v) > (1 - \varepsilon)(n - |V_i|)$, então existem dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $36\varepsilon n$ vértices de G .*

Prova. Sejam M_R e M_B dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem o maior número possível de vértices de G de modo que o subgrafo $G' = G - V(M_R \cup M_B)$ é justo. Digamos que M_R é vermelho e, portanto, que M_B é azul. Sejam ainda V_R o conjunto de vértices da componente conexa vermelha que contém M_R , V_B o conjunto análogo para a cor azul e $V_\varepsilon = V(G) \setminus (V_R \cup V_B)$.

Afirmamos que existem $l \in \{1, 2, 3\}$ e $X \in \{R, B\}$ para os quais as duas seguintes condições são satisfeitas.

- (i) $V_X \supseteq V(G) \setminus (V_\varepsilon \cup V_l)$.
- (ii) $|V_\varepsilon \cap V_i| < \varepsilon n$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ com $i \neq l$.

De fato, primeiro suponha que existe $l \in \{1, 2, 3\}$ tal que $|V_\varepsilon \cap V_l| \geq \varepsilon n$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $l = 1$. Pela condição imposta pelo enunciado no grau dos vértices, vemos que todo vértice de G possui menos de εn não-vizinhos nas classes de partição às quais não pertence. Daí, como não podem existir arestas entre V_ε e $V_R \cap V_B$, segue que $(V_R \cap V_B) \subseteq V_1$. Conseqüentemente, temos que $|V_\varepsilon \cap V_2| < \varepsilon n$ e $|V_\varepsilon \cap V_3| < \varepsilon n$. Como $|V_2| > 3\varepsilon n$, temos que $|V_2 \setminus V_\varepsilon| > 2\varepsilon n$. Daí, podemos assumir sem perda de generalidade que $|V_2 \cap V_B| > \varepsilon n$. Observe que não podem existir arestas entre $V_2 \cap V_B$ e $V_3 \cap V_R$, pois caso contrário teríamos $(V_R \cap V_B) \cap (V_2 \cup V_3) \neq \emptyset$. Daí, vemos que $(V_3 \setminus V_\varepsilon) \subseteq V_B$. Invertendo os papéis de V_2 e V_3 , vemos também que $(V_2 \setminus V_\varepsilon) \subseteq V_B$. Assim, temos que as condições (i) e (ii) são satisfeitas para $l = 1$ e

$X = B$.

Agora suponha que $|V_\varepsilon \cap V_i| < \varepsilon n$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Se $|V(G')| > 36\varepsilon n$, então temos que suas duas maiores classes de partição V'_1 e V'_2 contêm mais de $9\varepsilon n$ vértices cada. Daí, pela condição imposta pelo enunciado no grau dos vértices, temos que o grau médio de $G[V'_1 \cup V'_2]$ é maior que $8\varepsilon n$. Podemos então assumir sem perda de generalidade que o grau médio do subgrafo de $G[V'_1 \cup V'_2]$ induzido pelas arestas vermelhas é maior que $4\varepsilon n$. Aplicaremos para esse subgrafo um fato bastante conhecido que diz que todo grafo H possui um subgrafo H' cujo grau mínimo é pelo menos metade do grau médio de H . Assim, obtemos dois subconjuntos $U_1 \subseteq V'_1$ e $U_2 \subseteq V'_2$ tais que o grau mínimo do subgrafo de $G[U_1 \cup U_2]$ induzido pelas arestas vermelhas é maior que $2\varepsilon n$. Em particular, temos que U_1 e U_2 contêm mais de $2\varepsilon n$ vértices cada. Pela maximalidade de M_R e pelo fato de que o subgrafo $G' - V(e)$ é justo para toda aresta vermelha e entre U_1 e U_2 , temos que as arestas entre $U_1 \cup U_2$ e V_R são azuis. Em particular, as arestas entre $U_1 \cup U_2$ e algum $x \in V_R \cap V_B$ fixo são azuis. Podemos assumir sem perda de generalidade que $U_1 \subseteq V_1$ e que $x \notin V_1$. Como $|U_1| > 2\varepsilon n$, temos que x possui mais de εn vizinhos em U_1 , donde segue que $|V_1 \cap V_B| > \varepsilon n$. Daí, vemos que $V(G) \setminus (V_\varepsilon \cup V_1) \subseteq V_B$. Assim, temos que as condições (i) e (ii) são satisfeitas para $l = 1$ e $X = B$.

Em todo caso, nossa afirmação segue e portanto podemos assumir sem perda de generalidade que as condições (i) e (ii) são satisfeitas para $l = 1$ e $X = B$.

Agora, sejam $V'_\varepsilon = V_\varepsilon \setminus V_1$ e M'_B um emparelhamento azul que cobre o maior número possível de vértices de $G - V'_\varepsilon$ de modo que o subgrafo $G'' = G - V(M'_B)$ é justo. Por (i), sabemos que M'_B é conexo. Pela maximalidade de M'_B , se e é uma aresta azul de $G'' - V'_\varepsilon$, então o subgrafo $G'' - V(e)$ não é justo. Isso significa que ambas as extremidades de e não pertencem à maior classe de partição de G'' e que tal classe de partição contém metade dos vértices de G'' . Assim, vemos que as arestas de $G'' - V'_\varepsilon$ são todas vermelhas ou G'' possui um subgrafo gerador bipartido balanceado H tal que toda aresta azul de H é incidente em algum vértice de V'_ε . Daí, seja M'_R um emparelhamento conexo vermelho que cobre o maior número possível de vértices de $G'' - V'_\varepsilon$ ou de $H - V'_\varepsilon$ de modo que o subgrafo $G''' = G'' - V(M'_R)$ ou $G''' = H - V(M'_R)$ é justo. Seja ainda $xy \in M'_R$ e observe que as arestas entre $\{x, y\}$ e $G''' - V'_\varepsilon$ são vermelhas. Daí, suponha por contradição que $|V(G''')| > 36\varepsilon n$. Nesse caso, temos que as duas maiores classes de partição de G''' contêm mais de $9\varepsilon n$ vértices cada. Daí, por (ii) e pela condição imposta pelo enunciado no grau dos vértices, vemos que as vizinhanças de x e de y nas duas maiores classes de partição de $G''' - V'_\varepsilon$ são grandes o suficiente para induzir pelo menos uma aresta, a qual é vermelha. Assim, pela maximalidade de M'_R , obtemos uma contradição. Logo, o resultado segue. \square

Lema 2.10 (Schaudt e Stein; 2015). *Seja G um grafo bipartido balanceado com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Assuma que a coloração de G não é split. Sejam ainda V_1 e V_2 as classes de partição de G . Dado $\varepsilon > 0$, se para cada $v \in V(G)$*

vale que $d(v) > (1 - \varepsilon)n/2$, então existem dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $6\varepsilon n$ vértices de G .

Prova. Sejam M_R e M_B dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem o maior número possível de vértices de G . Digamos que M_R é vermelho e, portanto, que M_B é azul. Sejam ainda V_R o conjunto de vértices da componente conexa vermelha que contém M_R , V_B o conjunto análogo para a cor azul e $V_\varepsilon = V(G) \setminus (V_R \cup V_B)$. Dividiremos o restante da prova em dois casos. Mas antes, observamos que, pela condição imposta pelo enunciado no grau dos vértices, todo vértice de G possui menos de εn não-vizinhos na classe de partição à qual não pertence.

No primeiro caso, suponha que

$$|V_i \setminus V_X| > 2\varepsilon n \text{ para todo } i \in \{1, 2\} \text{ e todo } X \in \{R, B\}. \quad (2.1)$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que existe $x \in (V_R \cap V_B) \cap V_2$. Daí, como não podem existir arestas entre x e $V_\varepsilon \cap V_1$, temos que

$$|V_\varepsilon \cap V_1| < \varepsilon n. \quad (2.2)$$

Como não podem existir arestas entre $V_R \setminus V_B$ e $V_B \setminus V_R$, temos que existem $j \in \{1, 2\}$ e $Y \in \{R, B\}$ tais que $|V_j \cap (V_Y \setminus V_Z)| < \varepsilon n$, onde $Z \in \{R, B\}$ é tal que $Y \neq Z$. Em outras palavras, temos que $|V_j \setminus (V_\varepsilon \cup V_Z)| < \varepsilon n$. Por (2.1), isso implica que $|V_\varepsilon \cap V_j| > \varepsilon n$. Por (2.2), vemos então que $j = 2$. Daí, segue que $(V_R \cap V_B) \cap V_1 = \emptyset$. Assim, temos que $V_1 \setminus V_\varepsilon$ pode ser particionado nos subconjuntos $V_{1R} = V_R \setminus V_B$ e $V_{1B} = V_B \setminus V_R$. Por (2.1) e (2.2), vemos que V_{1R} e V_{1B} contêm mais de εn vértices cada, donde segue que $V_2 \setminus V_\varepsilon = V_R \cap V_B$. Daí, observe que as arestas entre $V_2 \setminus V_\varepsilon$ e V_{1R} são vermelhas, enquanto que as arestas entre $V_2 \setminus V_\varepsilon$ e V_{1B} são azuis. Pela definição de V_ε , observe ainda que as arestas entre $V_\varepsilon \cap V_2$ e V_{1R} são azuis, enquanto que as arestas entre $V_\varepsilon \cap V_2$ e V_{1B} são vermelhas. Daí, vemos que $V_\varepsilon \cap V_1 \neq \emptyset$, pois caso contrário a coloração de G seria split. Como não podem existir arestas entre $V_\varepsilon \cap V_1$ e $V_2 \setminus V_\varepsilon = V_R \cap V_B$, temos que $|V_2 \setminus V_\varepsilon| < \varepsilon n$. Assim, podemos encontrar facilmente dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $6\varepsilon n$ vértices de G .

No segundo caso, suponha que existem $i \in \{1, 2\}$ e $X \in \{R, B\}$ tais que o conjunto $V'_i = V_i \setminus V_X$ contém no máximo $2\varepsilon n$ vértices. Podemos assumir sem perda de generalidade que $i = 1$ e $X = B$. Daí, seja M'_B um emparelhamento azul que cobre o maior número possível de vértices de $G - V'_1$. Observe que M'_B é conexo e que todas as arestas de $G - (V'_1 \cup V(M'_B))$ são vermelhas. Assim, podemos encontrar facilmente um emparelhamento conexo vermelho M'_R que cobre todos exceto no máximo $4\varepsilon n$ vértices de $G - V(M'_B)$. \square

Agora, já temos todas as ferramentas necessárias para provarmos o resultado

em que o método da regularidade será diretamente aplicado. Porém, precisaremos ainda da seguinte definição.

Definição 2.11. Seja G um grafo multipartido com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. A coloração de G é δ -próxima de uma coloração split quando é possível fazer com que G seja bipartido e sua coloração seja split deletando-se no máximo δn^2 arestas de G .

O teorema a seguir é uma versão aproximada do problema de vértice-particionar grafos multipartidos completos justos 2-aresta-coloridos em ciclos monocromáticos.

Teorema 2.12 (Schaudt e Stein; 2015). *Para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo k -partido completo justo G com n vértices, onde $k \geq 2$ e $n \geq n_0$, cujas arestas são coloridas de vermelho e azul vale o seguinte: se a coloração de G não é δ -próxima de uma coloração split, então existem dois ciclos monocromáticos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo δn vértices de G .*

Prova. Dado $\delta > 0$, podemos aplicar o Lema 2.4 com parâmetros $\varepsilon \ll \delta^2$ (i.e. ε suficientemente menor que δ^2), $m_0 = 1/\varepsilon$ e $s = 2$ ou $s = 3$ a fim de obtermos dois valores de m_1 , dentre os quais tomamos o maior. Daí, seja G um grafo k -partido completo justo com n vértices, onde $k \geq 2$ e $n \geq m_1$, cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Dividiremos o restante da prova em três casos.

No primeiro caso, suponha que $k = 2$. Daí, sejam V_1 e V_2 as classes de partição de G . Pelo Lema 2.4, sabemos que existe uma partição $\mathcal{P} = \{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ de G que é ε -regular nas duas cores, refina $\{V_1, V_2\}$ e satisfaz $m_0 \leq t \leq m_1$. Observe que $|W_1| \leq n/t$ e $t \geq (1 - \varepsilon)n/|W_1| \geq \sqrt{\varepsilon}n/|W_1|$. Daí, seja R o grafo reduzido bipartido de G relativo a \mathcal{P} . Como \mathcal{P} é ε -regular, sabemos que existem no máximo εt^2 não-arestas entre as classes de partição de R . Daí, vemos que existem no máximo $\sqrt{\varepsilon}t$ vértices de R que possuem pelo menos $\sqrt{\varepsilon}t$ não-vizinhos na classe de partição à qual não pertence. Assim, podemos deletar no máximo $\sqrt{\varepsilon}t$ vértices de R de modo que todo vértice do subgrafo obtido R' possua menos de $\sqrt{\varepsilon}t$ não-vizinhos na classe de partição à qual não pertence. Sejam U'_1 e U'_2 as classes de partição de R' . Para cada $i \in \{1, 2\}$, observe que

$$\frac{|V_i|}{|W_1|} \geq |U'_i| \geq \frac{|V_i| - \varepsilon n}{|W_1|} - \sqrt{\varepsilon}t \geq \frac{|V_i|}{|W_1|} - 2\sqrt{\varepsilon}t.$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que U'_1 é a maior classe de partição de R' . Como G é balanceado, segue que

$$|U'_1| \leq \frac{|V_1|}{|W_1|} = \frac{|V_2|}{|W_1|} \leq |U'_2| + 2\sqrt{\varepsilon}t.$$

Daí, podemos deletar no máximo $2\sqrt{\varepsilon}t$ vértices de R' de modo que o subgrafo obtido R'' seja balanceado. Seja $t'' = |V(R'')|$. Observe que $t \geq t'' \geq (1 - 3\sqrt{\varepsilon})t \geq 2t/3$.

Daí, temos que para cada $v \in V(R'')$ vale que $d(v) > t''/2 - \sqrt{\varepsilon}t \geq (1 - 3\sqrt{\varepsilon})t''/2$. Agora, podemos colorir as arestas de R'' de vermelho e azul de modo que para cada aresta vermelha (resp. azul) W_iW_j de R'' valha que a densidade em vermelho (resp. azul) do par (W_i, W_j) em G é pelo menos $\delta/2$. Daí, assuma que a coloração de G não é δ -próxima de uma coloração split. A despeito disso, observe que a coloração de R'' ainda pode ser split. Se esse for o caso, observe também que basta mudarmos a cor de uma única aresta de R'' para que sua coloração deixe de ser split. Daí, afirmamos que existe pelo menos uma aresta W_iW_j de R'' tal que a densidade do par (W_i, W_j) em G é pelo menos $\delta/2$ em ambas as cores. De fato, caso contrário, seja G' o subgrafo de G obtido tomando-se apenas as arestas da cor majoritária de cada par (W_i, W_j) de G tal que W_iW_j é uma aresta de R'' . Daí, observe que a coloração de G' é split e que $|E(G) \setminus E(G')| \leq \varepsilon n^2 + (\varepsilon t^2 + 3\sqrt{\varepsilon}t^2 + t''^2\delta/2)|W_1|^2 \leq \varepsilon n^2 + (\varepsilon t^2 + 3\sqrt{\varepsilon}t^2 + t^2\delta/2)(n/t)^2 = (2\varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon} + \delta/2)n^2 \leq \delta n^2$, uma contradição. Assim, podemos assumir que a coloração de R'' não é split. Daí, pelo Lema 2.10, sabemos que existem dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $18\sqrt{\varepsilon}t''$ vértices de R'' . Observe que esses dois emparelhamentos cobrem todos exceto no máximo $21\sqrt{\varepsilon}t$ vértices de R . Daí, pelo Lema 2.7, temos que existem dois ciclos monocromáticos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $(21\sqrt{\varepsilon} + 20\varepsilon/\delta)n \leq \delta n$ vértices de G .

Para os dois últimos casos, iremos considerar que $k \geq 3$. Daí, podemos aplicar o algoritmo da prova do Lema 2.8 a fim de obtermos um subgrafo gerador tripartido completo justo \tilde{G} de G . Sejam V_1, V_2 e V_3 as classes de partição de \tilde{G} , onde $|V_1| \geq |V_2| \geq |V_3|$.

No segundo caso, suponha que $|V_3| \leq \delta n/4$. Como \tilde{G} é justo, temos que $|V_1| \leq |V_2| + \delta n/4$. Daí, seja G' um subgrafo bipartido completo balanceado de \tilde{G} obtido deletando-se os vértices de V_3 e $|V_1| - |V_2|$ vértices de V_1 . Observe que deletamos no máximo $\delta n/2$ vértices de G . Pelo algoritmo da prova do Lema 2.8, observe ainda que V_1 e V_2 são classes de partição originais de G . Assim, temos que $|E(G) \setminus E(G')| \leq \delta n^2/2$. Agora, assuma que a coloração de G não é δ -próxima de uma coloração split. Daí, afirmamos que a coloração de G' não é $\delta/2$ -próxima de uma coloração split. De fato, caso contrário, poderíamos deletar no máximo $\delta n^2/2$ arestas de G' de modo que a coloração do subgrafo obtido G'' fosse split. Daí, teríamos que $|E(G) \setminus E(G'')| \leq \delta n^2/2 + \delta n^2/2 = \delta n^2$, uma contradição. Assim, pelo caso anterior, sabemos que existem dois ciclos monocromáticos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $\delta n/2$ vértices de G' . Daí, temos que esses dois ciclos cobrem todos exceto no máximo $\delta n/2 + \delta n/2 = \delta n$ vértices de G .

No terceiro caso, suponha que $|V_3| > \delta n/4$. Pelo Lema 2.4, sabemos que existe uma partição $\mathcal{P} = \{W_0, W_1, \dots, W_t\}$ de \tilde{G} que é ε -regular nas duas cores, refina $\{V_1, V_2, V_3\}$ e satisfaz $m_0 \leq t \leq m_1$. Observe que $n/|W_1| \geq t \geq (1-\varepsilon)n/|W_1| > \sqrt{\varepsilon}n/|W_1|$. Daí, seja R o grafo reduzido tripartido de \tilde{G} relativo a \mathcal{P} . Como \mathcal{P} é ε -regular, sabemos

que existem no máximo εt^2 não-arestas entre as classes de partição de R . Daí, vemos que existem no máximo $\sqrt{\varepsilon t}$ vértices de R que possuem pelo menos $\sqrt{\varepsilon t}$ não-vizinhos nas classes de partição às quais não pertence. Assim, podemos deletar no máximo $\sqrt{\varepsilon t}$ vértices de R de modo que todo vértice do subgrafo obtido R' possua menos de $\sqrt{\varepsilon t}$ não-vizinhos nas classes de partição às quais não pertence. Sejam U'_1 , U'_2 e U'_3 as classes de partição de R' . Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, observe que

$$\frac{|V_i|}{|W_1|} \geq |U'_i| \geq \frac{|V_i| - \varepsilon n}{|W_1|} - \sqrt{\varepsilon t} > \frac{|V_i|}{|W_1|} - 2\sqrt{\varepsilon t}.$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que U'_1 é a maior classe de partição de R' . Como \tilde{G} é justo, segue que

$$|U'_1| \leq \frac{|V_1|}{|W_1|} \leq \frac{|V_2| + |V_3|}{|W_1|} < |U'_2| + |U'_3| + 4\sqrt{\varepsilon t}.$$

Daí, podemos deletar no máximo $4\sqrt{\varepsilon t}$ vértices de R' de modo que o subgrafo obtido R'' seja justo e possua um número par de vértices. Sejam $t'' = |V(R'')|$ e U''_1 , U''_2 e U''_3 as classes de partição de R'' . Observe que $t \geq t'' \geq (1 - 5\sqrt{\varepsilon})t$. Como R'' é justo, observe ainda que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ vale que $t'' - |U''_i| \geq t''/2 \geq (1 - 5\sqrt{\varepsilon})t/2 \geq t/3$. Daí, temos que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e cada $v \in U''_i$ vale que $d(v) > t'' - |U''_i| - \sqrt{\varepsilon t} \geq (1 - 3\sqrt{\varepsilon})(t'' - |U''_i|)$. Ademais, temos que

$$|U''_i| \geq |U'_i| - 4\sqrt{\varepsilon t} > \frac{|V_i|}{|W_1|} - 6\sqrt{\varepsilon t} > \frac{\delta n}{4|W_1|} - 6\sqrt{\varepsilon t} \geq (\delta/4 - 6\sqrt{\varepsilon})t \geq 9\sqrt{\varepsilon t}.$$

Agora, podemos colorir as arestas de R'' de vermelho e azul de modo que para cada aresta vermelha (resp. azul) $W_i W_j$ de R'' valha que a densidade em vermelho (resp. azul) do par (W_i, W_j) em G é pelo menos $1/2$. Daí, pelo Lema 2.9, sabemos que existem dois emparelhamentos monocromáticos conexos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $108\sqrt{\varepsilon}t''$ vértices de R'' . Observe que esses dois emparelhamentos cobrem todos exceto no máximo $113\sqrt{\varepsilon}t$ vértices de R . Daí, pelo Lema 2.7, temos que existem dois ciclos monocromáticos disjuntos e de cores distintas que cobrem todos exceto no máximo $(113\sqrt{\varepsilon} + 20\varepsilon)n \leq \delta n$ vértices de G . \square

Observe que se G é um grafo bipartido completo balanceado com n vértices cuja coloração é δ -próxima de uma coloração split, então existem três ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos exceto no máximo $14\sqrt{\delta}n$ vértices de G . De fato, pela Definição 2.11, podemos deletar no máximo δn^2 arestas de G de modo que a coloração do subgrafo obtido G' seja split. Ademais, podemos deletar no máximo $\sqrt{\delta}n$ vértices de cada classe de partição de G' de modo que cada vértice do subgrafo obtido G'' possua menos de $\sqrt{\delta}n$ não-vizinhos na classe de partição à qual não pertence. Daí, podemos vértice-

particionar G'' em no máximo três subgrafos bipartidos balanceados monocromáticos. Por fim, podemos encontrar em cada um desses subgrafos um ciclo monocromático que cobre todos exceto no máximo $4\sqrt{\delta n}$ de seus vértices.

A fim de cobrirmos os vértices que sobram após a aplicação do Teorema 2.12, será preciso reservarmos primeiro subgrafos que possuam a propriedade descrita na seguinte definição.

Definição 2.13. Um grafo bipartido balanceado H com $2n$ vértices é ε -hamiltoniano quando todo subgrafo bipartido balanceado de H com pelo menos $(1 - \varepsilon)2n$ vértices é hamiltoniano.

As últimas ferramentas que precisaremos para provar o Teorema 1.17 são os dois lemas abaixo. O primeiro nos garantirá a existência de subgrafos ε -hamiltonianos suficientemente grandes. O segundo nos permitirá utilizar esses subgrafos para cobrir os vértices que sobram após a aplicação do Teorema 2.12.

Lema 2.14 (Lang, Schaudt e Stein; 2015). *Para todo $0 < \gamma < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo bipartido balanceado com pelo menos $2n$ vértices, onde $n \geq n_0$, e pelo menos γn^2 arestas possui um subgrafo $\gamma/4$ -hamiltoniano com pelo menos $\gamma^{3024/\gamma} n/3$ vértices.*

Lema 2.15 (Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi; 2006b). *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n \geq n_0$ e $m \leq \frac{n}{(8r)^{8(r+1)}}$ vale o seguinte: se G é um grafo bipartido completo r -aresta-colorido cujas classes de partição contêm n e m vértices respectivamente, então existem $2r$ ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos os m vértices da menor classe de partição de G .*

Finalmente, podemos provar o resultado que havíamos prometido.

Prova do Teorema 1.17. Seja G um grafo k -partido completo justo com n vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Pelo Lema 2.8, podemos assumir que $2 \leq k \leq 3$. Daí, sejam V_1, V_2 e, possivelmente, V_3 as classes de partição de G , onde $|V_1| \geq |V_2| \geq |V_3|$. Ademais, tome $\delta = 2^{-12302}$. Por questões técnicas, dividiremos o restante da prova em três casos.

No primeiro caso, suponha que

$$|V_1| \leq |V_2| + |V_3| - \delta n. \quad (2.3)$$

Observe que nesse caso $|V_3| \geq \delta n$ e, portanto, G é tripartido. Daí, para cada índice $i \in \{1, 2, 3\}$, tome subconjuntos disjuntos $U_i^j, U_i^k \subseteq V_i$ com $\lfloor \delta n/4 \rfloor$ vértices cada, onde j e k são os outros dois índices. Agora, seja $G_i = G[U_j^i, U_k^i]$. Assumindo que n é suficientemente grande, podemos aplicar o Lema 2.14 com $\gamma = 1/2$ para o subgrafo de G_i induzido pelas arestas da cor majoritária a fim de obtermos um subgrafo monocromático

1/8-hamiltoniano H_i de G_i com pelo menos $\delta n/2^{6053}$ vértices em cada uma de suas classes de partição W_j^i e W_k^i . Daí, seja $H = G - \bigcup_{i=1}^3 V(H_i)$. Por (2.3) e pelo tamanho dos subconjuntos U_i^j tomados inicialmente, observe que H é justo e que cada uma de suas classes de partição contém pelo menos $\delta n/2$ vértices. Daí, tome $\delta' = \delta/2^{6148}$. Assumindo que n é suficientemente grande, sabemos que a coloração de H não é δ' -próxima de uma coloração split. Nesse caso, pelo Teorema 2.12, sabemos que existem dois ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos exceto no máximo $\delta'n$ vértices de H . Daí, seja X o conjunto dos vértices de H que não foram cobertos por esses dois ciclos monocromáticos. Se $|X|$ é ímpar, então podemos tomar um dos vértices de X como um ciclo monocromático, de modo que o número de vértices descobertos de H se torna par. Assim, assumiremos de agora em diante que $|X|$ é par. Sem perda de generalidade, podemos assumir ainda que $|X \cap V_3| \geq \max\{|X \cap V_1|, |X \cap V_2|\}$. Nesse caso, podemos particionar X em dois subconjuntos de mesmo tamanho X_1 e X_2 de modo que $X \cap V_1 \subseteq X_1$ e $X \cap V_2 \subseteq X_2$. Daí, observe que $|X_1| \leq \delta'n/2 = \delta n/2^{6149} \leq |W_2^3|/16^{24}$. Assumindo que n é suficientemente grande, podemos aplicar o Lema 2.15 para o subgrafo $G[X_1, W_2^3]$ a fim de obtermos 4 ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos os vértices de X_1 e $|X_1|$ vértices de W_2^3 . Analogamente, podemos obter 4 ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos os vértices de X_2 e $|X_2|$ vértices de W_1^3 . Daí, como H_3 é 1/8-hamiltoniano, sabemos que os vértices restantes de H_3 podem ser cobertos por um ciclo monocromático. Ademais, como H_1 e H_2 também são 1/8-hamiltonianos, sabemos que H_1 e H_2 possuem um ciclo monocromático hamiltoniano. Logo, concluímos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 14 ciclos monocromáticos.

No segundo caso, suponha que G ainda é tripartido mas (2.3) não é satisfeita. Temos então que

$$|V_1| > |V_2| + |V_3| - \delta n. \quad (2.4)$$

Tome um subconjunto $X \subseteq V_3$ com $|V_2| + |V_3| - |V_1|$ vértices. Por (2.4), observe que $|X| < \delta n$. Daí, seja G' o grafo bipartido completo balanceado cujas classes de partição são V_1 e $V_2' = V_2 \cup (V_3 \setminus X)$. Tome subconjuntos $U_1 \subseteq V_1$ e $U_2 \subseteq V_2'$ com $\lceil n/4 \rceil$ vértices cada. Daí, seja $G_1 = G[U_1, U_2]$. Assumindo que n é suficientemente grande, podemos aplicar o Lema 2.14 com $\gamma = 1/2$ para o subgrafo de G_1 induzido pelas arestas da cor majoritária a fim de obtermos um subgrafo monocromático 1/8-hamiltoniano H_1 de G_1 com pelo menos $n/2^{6052}$ vértices em cada uma de suas classes de partição W_1 e W_2 . Daí, seja $H = G' - V(H_1)$. Pela observação que fizemos logo após o Teorema 2.12 e pelo próprio teorema, sabemos que se n é suficientemente grande, então existem no máximo três ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos exceto no máximo $14\sqrt{\delta}n$ vértices de H . Daí, seja X' o conjunto dos vértices de H que não foram cobertos por esses três ciclos monocromáticos. Observe que $|X'|$ é par. Daí, se $|X|$ é ímpar, então podemos

tomar um dos vértices de X como um ciclo monocromático, de modo que o número de vértices descobertos de $G - V(H_1)$ se torna par. Assim, assumiremos de agora em diante que $|X \cup X'|$ é par. Nesse caso, podemos particionar $X \cup X'$ em dois subconjuntos de mesmo tamanho X_1 e X_2 de modo que $(X \cup X') \cap V_1 \subseteq X_1$ e $(X \cup X') \cap V_2 \subseteq X_2$. Daí, observe que $|X_1| \leq 8\sqrt{\delta}n = n/2^{6148} \leq |W_2|/16^{24}$. Assumindo que n é suficientemente grande, podemos aplicar o Lema 2.15 para o subgrafo $G[X_1, W_2]$ a fim de obtermos 4 ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos os vértices de X_1 e $|X_1|$ vértices de W_2 . Analogamente, podemos obter 4 ciclos monocromáticos disjuntos que cobrem todos os vértices de X_2 e $|X_2|$ vértices de W_1 . Daí, como H_1 é $1/8$ -hamiltoniano, sabemos que os vértices restantes de H_1 podem ser cobertos por um ciclo monocromático. Logo, concluímos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 13 ciclos monocromáticos.

No terceiro e último caso, suponha que G é bipartido. Daí, observe que podemos proceder exatamente como no caso anterior, mas com a vantagem de sabermos que $X = \emptyset$ e, portanto, que $|X \cup X'|$ é par. Assim, podemos evitar um dos ciclos monocromáticos obtidos anteriormente. Logo, concluímos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 12 ciclos monocromáticos. \square

3 ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES

Esta seção é dedicado à apresentação de alguns resultados originais obtidos pelo autor durante a preparação dessa dissertação.

3.1 Completando uma prova de Gyárfás e Lehel

Nesta seção, apresentaremos uma prova para o Teorema 1.6 que é uma extensão da prova apresentada por Gyárfás e Lehel (1973) para o Teorema 1.5. Para seguirmos a estratégia utilizada por eles, provaremos de forma equivalente o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se G não possui um caminho simples hamiltoniano, então a coloração de G é split.*

Prova. Seja $P = (r_s, \dots, r_1, x, b_1, \dots, b_t)$ um caminho simples de tamanho máximo de G , onde x é seu ponto médio e r_s e b_t são suas extremidades vermelha e azul respectivamente. Se P não é hamiltoniano, então temos os três seguintes casos para analisar.

(A) *Suas extremidades pertencem a classes de partição distintas. (Veja a Figura 3.1.)*

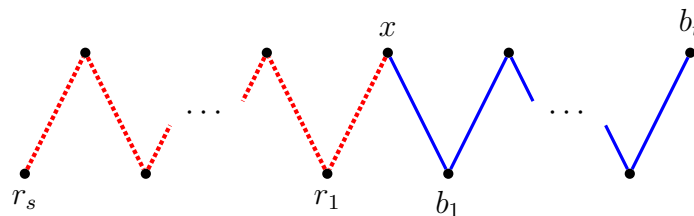


Figura 3.1: Caso (A).

Como G é balanceado, sabemos que existe pelo menos um vértice que não pertence a P em cada classe de partição. Daí, seja $y \notin V(P)$ um vértice que pertence à classe de partição diferente da de x . Podemos assumir sem perda de generalidade que a aresta xy é vermelha. Daí, o caminho simples $(y, x, r_1, \dots, r_s, b_t, \dots, b_1)$ é maior que P , uma contradição.

(B) *Suas extremidades e seu ponto médio pertencem à mesma classe de partição. (Veja a Figura 3.2.)*

Seja $y \notin V(P)$ um vértice que pertence à outra classe de partição. Podemos assumir sem perda de generalidade que a aresta xy é vermelha. Daí, o caminho simples $(r_s, \dots, r_1, x, y, b_t, \dots, b_1)$ é maior que P , uma contradição.

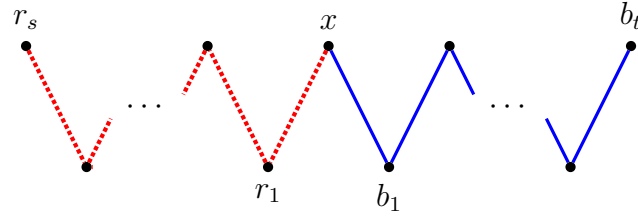


Figura 3.2: Caso (B).

(C) *Suas extremidades pertencem à mesma classe de partição e seu ponto médio pertence à outra. (Veja a Figura 3.3.)*

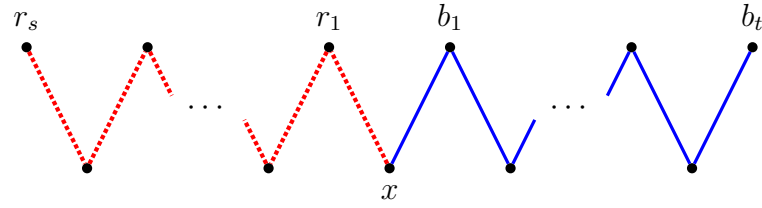


Figura 3.3: Caso (C).

Sejam X e Y as classes de partição de G . A fim de provarmos que a coloração de G é split, definiremos a seguir conjuntos X_1 , X_2 , Y_1 e Y_2 satisfazendo todas as condições da Definição 1.4. Para isso, iremos assumir sem perda de generalidade que $x \in X$. Primeiramente, sejam $X_1 = X \cap V(P)$, $Y'_1 = Y \cap V(P_R)$ e $Y'_2 = Y \cap V(P_B)$. Queremos mostrar que as arestas entre X_1 e Y'_1 são vermelhas, enquanto que as arestas entre X_1 e Y'_2 são azuis. De fato, a aresta $r_s x$ é vermelha, pois caso contrário o caminho simples $(r_1, \dots, r_s, x, b_1, \dots, b_t)$ satisfaria o caso (B), com ponto médio r_s . Daí, temos que

$$\text{para cada } r_i \in X_1, \text{ a aresta } r_i b_t \text{ é azul,} \quad (3.1)$$

pois caso contrário o caminho simples $(r_{i-1}, \dots, r_1, x, r_s, \dots, r_i, b_t, \dots, b_1)$ satisfaria o caso (B), com ponto médio b_t . Agora, suponha por contradição que a aresta $r_j x$ é azul para algum $r_j \in Y'_1$ fixo, com $1 < j < s$. Daí, seja $y \in X \setminus V(P)$. Temos que

$$\text{para cada } r_i \in Y'_1, \text{ a aresta } y r_i \text{ é azul,} \quad (3.2)$$

pois caso contrário o caminho simples $(y, r_i, \dots, r_1, x, r_s, \dots, r_{i+1}, b_1, \dots, b_t)$ seria maior que P . Em particular, sabemos por (3.1) que a aresta $r_{j-1} b_t$ é azul e por (3.2) que as arestas $y r_1$ e $y r_j$ também são azuis. Daí, vemos que $G[V(P) \cup \{y\}]$ pode ser vértice-particionado em um caminho vermelho de tamanho par e um ciclo simples cujos caminhos vermelho e azul também têm tamanho par, a saber no caminho vermelho (r_{j+1}, \dots, r_s) e no ciclo simples cujos caminhos vermelho e azul são

(r_1, \dots, r_{j-1}) e $(r_1, y, r_j, x, b_1, \dots, b_t, r_{j-1})$ respectivamente. Agora, considere uma tal vértice-partição \mathcal{P} de $G[V(P) \cup \{y\}]$ em que o tamanho do caminho azul do ciclo simples é máximo. Sejam (u_1, \dots, u_k) o caminho vermelho e (v_1, \dots, v_l) e $(v_l, w_1, \dots, w_m, v_1)$ respectivamente os caminhos vermelho e azul do ciclo simples de \mathcal{P} (veja a Figura 3.4). Como todos os caminhos têm tamanho par, sabemos que cada um deles possui uma extremidade em cada classe de partição de G . Sem perda de generalidade, podemos assumir então que u_1 e v_1 pertencem à mesma classe de partição e, portanto, que u_k e v_l pertencem à outra. As arestas u_1v_l e u_kv_1 não podem ser ambas azuis, pois nesse caso $G[V(P) \cup \{y\}]$ poderia ser vértice-particionado no caminho vermelho (v_2, \dots, v_{l-1}) e no ciclo simples $(u_1, \dots, u_k, v_1, w_m, \dots, w_1, v_l)$, cujo caminho azul é maior do que o do ciclo simples de \mathcal{P} . Sem perda de generalidade, podemos assumir então que a aresta u_kv_1 é vermelha. Daí, o caminho simples $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m)$ é maior que P , uma contradição. Logo, para cada $r_i \in Y'_1$, a aresta r_ix é vermelha. Analogamente, para cada $b_i \in Y'_2$, a aresta b_ix é azul. Em outras palavras, acabamos de mostrar que as arestas entre x e Y'_1 são vermelhas, enquanto que as arestas entre x e Y'_2 são azuis. Ademais, sabemos por (3.1) que cada $r_i \in X_1$ é o ponto médio de um caminho simples Q tal que $X_1 = X \cap V(Q)$, $Y'_1 = Y \cap V(Q_R)$ e $Y'_2 = Y \cap V(Q_B)$, a saber do caminho simples $Q = (r_{i-1}, \dots, r_1, x, r_s, \dots, r_i, b_t, \dots, b_1)$. Analogamente, sabemos que cada $b_i \in X_1$ também é o ponto médio de um caminho simples com tal propriedade. Daí, podemos concluir que as arestas entre X_1 e Y'_1 são vermelhas, enquanto que as arestas entre X_1 e Y'_2 são azuis, como queríamos.

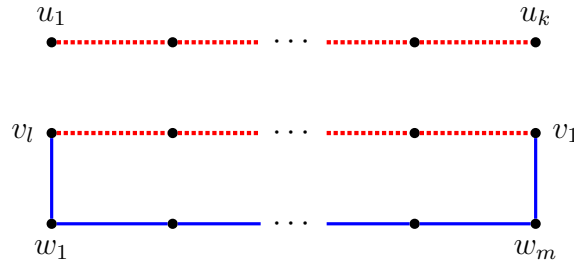


Figura 3.4: A vértice-partição \mathcal{P} de $G[V(P) \cup \{y\}]$.

Agora, sejam $X_2 = X \setminus V(P)$, $Y''_1 = \{z \in Y \setminus V(P) : \text{a aresta } xz \text{ é vermelha}\}$ e $Y''_2 = \{w \in Y \setminus V(P) : \text{a aresta } xw \text{ é azul}\}$. Por (3.2), sabemos que para cada $y \in X_2$ e cada $r_i \in Y'_1$, a aresta yr_i é azul. Analogamente, para cada $y \in X_2$ e cada $b_i \in Y'_2$, a aresta yb_i é vermelha. Para cada $y \in X_2$ e cada $z \in Y''_1$, a aresta yz é azul, pois caso contrário o caminho simples $(y, z, x, r_1, \dots, r_s, b_2, \dots, b_t)$ seria maior que P . Analogamente, para cada $y \in X_2$ e cada $w \in Y''_2$, a aresta yw é vermelha. Para cada $z \in Y''_1$ e cada $r_i \in X_1$, a aresta r_iz é vermelha, pois caso contrário o caminho simples $(r_s, \dots, r_{i+1}, r_{i-2}, \dots, r_1, x, z, r_i, b_1, \dots, b_t)$ satisfaria o caso (B), com ponto médio z . Analogamente, para cada $w \in Y''_2$ e cada $b_i \in X_1$, a aresta b_iw é azul. Para

cada $z \in Y_1''$ e cada $b_i \in X_1$, a aresta $b_i z$ é vermelha, pois caso contrário o caminho simples $(r_s, \dots, r_1, x, z, b_i, \dots, b_1, b_{i+2}, \dots, b_t)$ satisfaria o caso (B), com ponto médio z . Analogamente, para cada $w \in Y_2''$ e cada $r_i \in X_1$, a aresta $r_i w$ é azul.

Assim, temos que os conjuntos $X_1, X_2, Y_1 = Y_1' \cup Y_1''$ e $Y_2 = Y_2' \cup Y_2''$ satisfazem todas as condições da Definição 1.4, donde segue que a coloração de G é split.

□

3.2 Vértice-particionando grafos bipartidos completos balanceados 2-aresta-coloridos

Nesta seção, provaremos que todo grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul pode ser vértice-particionado em no máximo 4 ciclos monocromáticos, melhorando assim o caso $k = 2$ do Teorema 1.17. Para isso, analisaremos dois casos separadamente dependendo se a coloração do grafo é split ou não.

O caso em que a coloração do grafo é split é bem mais simples de ser provado. De fato, o lema a seguir nos mostra que na verdade 3 ciclos monocromáticos já são suficientes para esse caso.

Lema 3.2. *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se a coloração de G é split, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.*

Prova. Sejam X e Y as classes de partição de G . Como a coloração de G é split, sabemos que existem conjuntos X_1, X_2, Y_1 e Y_2 que satisfazem todas as condições da Definição 1.4. Podemos assumir sem perda de generalidade que $|X_1| \geq |Y_1|$. Como $|X| = |Y|$, temos que $|X_1| - |Y_1| = |Y_2| - |X_2|$ e, portanto, $|X_2| \leq |Y_2|$. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em um ciclo vermelho que cobre todos os vértices de Y_1 e $|Y_1|$ vértices de X_1 , um ciclo vermelho que cobre todos os vértices de X_2 e $|X_2|$ vértices de Y_2 e um ciclo azul que cobre todos os vértices restantes de X_1 e Y_2 . □

Para o caso em que a coloração do grafo não é split, nossa estratégia se divide nas duas seguintes etapas. Primeiro, aplicamos o Corolário 1.7 para esse grafo a fim de obtermos uma partição de seu conjunto de vértices em um caminho monocromático e um ciclo monocromático. Depois, provamos que o subgrafo induzido pelo caminho monocromático da partição obtida pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.

Por completude, começaremos provando o Corolário 1.7.

Prova do Corolário 1.7. Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Pelo Teorema 1.6, sabemos que se a coloração de G não é

split, então G possui um caminho simples hamiltoniano, digamos $P = (r_s, \dots, r_1, x, b_1, \dots, b_t)$, onde x é seu ponto médio e r_s e b_t são suas extremidades vermelha e azul respectivamente. Podemos assumir que o tamanho de P_R é máximo. Daí, primeiro suponha que x e b_t pertencem a classes de partição distintas. Temos então que a aresta xb_t é azul, pois caso contrário o subcaminho vermelho do caminho simples hamiltoniano $(r_s, \dots, r_1, x, b_t, \dots, b_1)$ seria maior que P_R . Assim, vemos que G pode ser vértice-particionado no caminho vermelho (r_s, \dots, r_1) e no ciclo azul (x, b_1, \dots, b_t) . Agora, suponha que x e b_t pertencem à mesma classe de partição. Como G é balanceado, observe que r_s pertence à outra classe de partição. Temos então que a aresta $r_s b_t$ é azul, pois caso contrário o subcaminho vermelho do caminho simples hamiltoniano $(b_t, r_s, \dots, r_1, x, b_1, \dots, b_{t-1})$ seria maior que P_R . Daí, se a aresta $r_s x$ também é azul, então G pode ser vértice-particionado no caminho vermelho (r_{s-1}, \dots, r_1) e no ciclo azul $(r_s, x, b_1, \dots, b_t)$. Por outro lado, se a aresta $r_s x$ é vermelha, então G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho (r_s, \dots, r_1, x) e no caminho azul (b_1, \dots, b_t) . Em todo caso, o resultado segue. \square

O lema a seguir nos dá o outro resultado que precisamos.

Lema 3.3. *Seja G um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul. Se G possui um caminho hamiltoniano monocromático, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.*

A prova desse lema é bem mais elaborada e envolve uma série de resultados preliminares. Assim, será mais adequado a apresentarmos separadamente na Seção 3.2.1.

Por fim, formalizaremos o resultado principal desta seção no seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Se G é um grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 4 ciclos monocromáticos.*

Prova. Pelo Lema 3.2, podemos assumir que a coloração de G não é split, pois caso contrário não haveria mais nada a fazer. Daí, pelo Corolário 1.7, sabemos que G pode ser vértice-particionado em um caminho monocromático P e um ciclo monocromático. Pelo Lema 3.3, sabemos ainda que $G[V(P)]$ pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos. Logo, o resultado segue. \square

3.2.1 Prova do Lema 3.3

Ao longo desta seção, iremos lidar com grafos bipartidos completos balanceados cujas arestas são coloridas de vermelho e azul que possuem um caminho hamiltoniano

monocromático. Assim, a fim de evitarmos repetições exaustivas, será conveniente estabelecermos a seguinte definição.

Definição 3.5. Um grafo bipartido completo balanceado com $2n$ vértices cujas arestas são coloridas de vermelho e azul é um *grafo zigzag vermelho* quando suas classes de partição são $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ e o caminho hamiltoniano $P = (x_1, y_2, x_3, \dots, y_3, x_2, y_1)$ é vermelho. (Veja a Figura 3.5.)

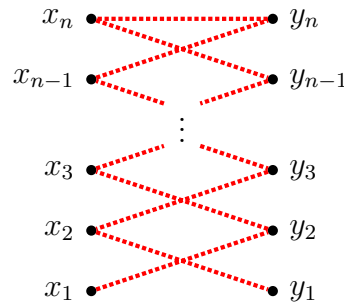


Figura 3.5: O caminho hamiltoniano vermelho $P = (x_1, y_2, x_3, \dots, y_3, x_2, y_1)$ de um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices.

Para todo $k \leq n$, definiremos ainda os conjuntos $X_k = \{x_1, \dots, x_k\}$, $Y_k = \{y_1, \dots, y_k\}$, $S_k = X_k \cup Y_k$ e $\widetilde{S}_k = S_n \setminus S_k$.

Além dessas e de outras definições que aparecerão adiante, iremos estabelecer também alguns fatos simples que nos auxiliarão nas provas dos resultados principais desta seção. Tais fatos serão apenas enunciados como observações, uma vez que eles são imediatos ou podem ser facilmente verificados.

A primeira observação que faremos é a seguinte.

Observação 3.6. Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Para $i \leq n$, temos que:

- (a) se a aresta $x_i y_i$ é vermelha, então o subgrafo $G[\widetilde{S}_{i-1}]$ possui um ciclo hamiltoniano vermelho, a saber $(x_i P y_i)$. (Veja a Figura 3.6a.)
- (b) se a aresta $x_i y_{i+2}$ (resp. $x_{i+2} y_i$) é vermelha, então o subgrafo $G[\widetilde{S}_{i-1}]$ pode ser vértice-particionado em dois ciclos vermelhos, a saber no ciclo vermelho $(x_i, y_{i+2} P x_{i+2}, y_{i+1})$ (resp. $(x_{i+1}, y_{i+2} P x_{i+2}, y_i)$) e no ciclo-aresta (x_{i+1}, y_i) (resp. (x_i, y_{i+1})). (Veja a Figura 3.6b.)

Observe também que provar o Lema 3.3 é equivalente a provar que todo grafo zigzag vermelho pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos. Daí, vemos que o lema a seguir é uma versão mais fraca do Lema 3.3, a qual permite que um ciclo monocromático extra seja utilizado. Como compensação, essa versão nos dá algumas informações adicionais sobre os ciclos monocromáticos da partição obtida.

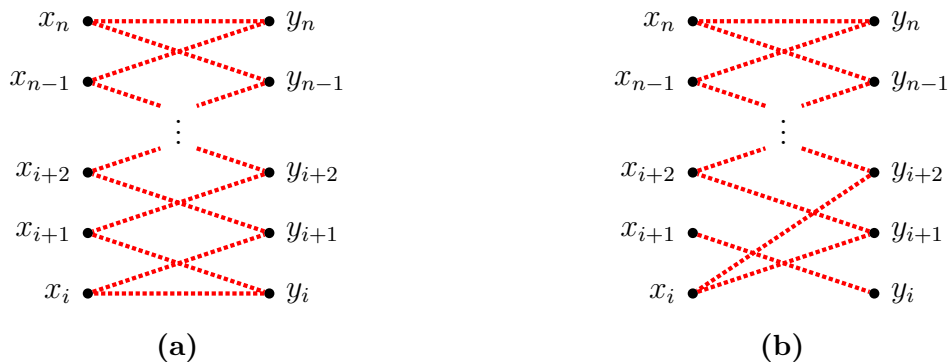


Figura 3.6: O subgrafo $G[\widetilde{S}_{i-1}]$ de acordo com os casos (a) e (b) da Observação 3.6.

Lema 3.7. *Se G é um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices, então G pode ser vértice-particionado em no máximo t ciclos monocromáticos satisfazendo uma das seguintes condições.*

- (i) $t = 2$.
- (ii) $t = 3$ e a aresta x_1y_1 é usada em algum ciclo azul da partição.
- (iii) $t = 4$ e as arestas x_1y_1 e x_2y_2 são usadas em ciclos azuis distintos da partição.

Prova. A prova é por indução em n . Para $n \leq 2$, temos que G satisfaz a condição (i) trivialmente. Para $n \geq 3$, podemos assumir que G não satisfaz a condição (i), pois caso contrário não haveria mais nada a fazer. Daí, pela Observação 3.6, sabemos que as arestas x_1y_1 , x_1y_3 e x_3y_1 são azuis. Agora, aplicamos a hipótese de indução para o subgrafo $G[\widetilde{S}_1]$. Se $G[\widetilde{S}_1]$ satisfaz as condições (i) ou (ii), então podemos simplesmente tomar a aresta x_1y_1 como um ciclo azul e daí vemos que G satisfaz as condições (ii) ou (iii) respectivamente. Por outro lado, se $G[\widetilde{S}_1]$ satisfaz a condição (iii), então podemos usar as arestas x_1y_1 , x_1y_3 e x_3y_1 para estender o ciclo azul da partição de $G[\widetilde{S}_1]$ que usa a aresta x_3y_3 e daí vemos que G também satisfaz a condição (iii). Em todo caso, o resultado segue. \square

Tendo em mente a prova do Teorema 3.4, observe que o lema acima possui certa relevância por si só, uma vez que ele implica que 5 ciclos monocromáticos são suficientes para vértice-particionar qualquer grafo bipartido completo balanceado cujas arestas são coloridas de vermelho e azul, o que já melhora o caso $k = 2$ do Teorema 1.17. Porém, felizmente o Lema 3.7 é apenas o primeiro passo para obtermos um resultado ainda mais forte.

O próximo passo será provarmos um caso particular do Lema 3.3. Para isso, precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.8. Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Para $k \leq n$, o conjunto S_k é um *conjunto especial azul* quando as duas seguintes condições são satisfeitas.

- (i) Os subgrafos $G[S_{k-2}]$ e $G[S_{k-1}]$ possuem um ciclo hamiltoniano azul.

- (ii) O subgrafo $G[S_k]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k-1}y_{k-1}$ e $x_k y_k$.

Ademais, precisaremos da seguinte observação.

Observação 3.9. Sejam G um grafo zigzag vermelho e $C_1 = (u_1, \dots, u_s)$ e $C_2 = (v_1, \dots, v_t)$ dois ciclos azuis disjuntos de G , onde $u_1, v_1 \in X$. Se as arestas $u_1 v_t$ e $v_1 u_s$ são azuis, então existe um ciclo azul de G que passa por todas as arestas de C_1 e C_2 exceto $u_1 u_s$ e $v_1 v_t$ e cobre todos os vértices de C_1 e C_2 , a saber $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t)$. (Veja a Figura 3.7.)

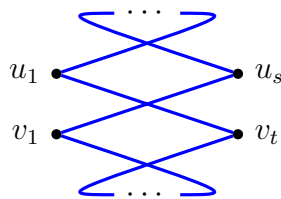


Figura 3.7: O ciclo azul $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t)$.

O lema a seguir nos mostra que a existência de um conjunto especial azul em um grafo zigzag vermelho é uma condição extra suficiente para que o Lema 3.3 seja válido.

Lema 3.10. *Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Se G possui um conjunto especial azul, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.*

Prova. Seja S_k um conjunto especial azul de G para algum $k \leq n$. Pela Definição 3.8(ii), temos que $G[S_k]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k-1}y_{k-1}$ e $x_k y_k$. Daí, podemos assumir que $n > k + 2$, pois caso contrário não haveria mais nada a fazer. Pela Observação 3.6(b) e pela Definição 3.8(i), podemos assumir ainda que as arestas $x_{k-1}y_{k+1}$, $x_{k+1}y_{k-1}$, $x_k y_{k+2}$ e $x_{k+2}y_k$ são azuis. Agora, aplicamos o Lema 3.7 para o subgrafo $G[\widetilde{S}_k]$. Se $G[\widetilde{S}_k]$ satisfaz a condição (i), então podemos simplesmente tomar um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_k]$ para obtermos uma partição desejada de G . Pela Observação 3.9, se $G[\widetilde{S}_k]$ satisfaz a condição (ii), então podemos usar as arestas $x_{k-1}y_{k+1}$ e $x_{k+1}y_{k-1}$ para construir um ciclo azul de G que cobre todos os vértices de $G[S_k]$ e do ciclo azul da partição de $G[\widetilde{S}_k]$ que usa a aresta $x_{k+1}y_{k+1}$, obtendo assim uma partição desejada de G . Observe que o ciclo azul construído anteriormente passa pela aresta $x_k y_k$. Daí, se $G[\widetilde{S}_k]$ satisfaz a condição (iii), então podemos primeiro proceder novamente como no caso anterior e depois podemos usar as arestas $x_k y_{k+2}$ e $x_{k+2}y_k$ para construir um ciclo azul de G que cobre todos os vértices de $G[S_k]$ e dos dois ciclos azuis distintos da partição de $G[\widetilde{S}_k]$ que usam as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$ e $x_{k+2}y_{k+2}$, obtendo assim uma partição desejada de G . Em todo caso, o resultado segue. \square

Para provarmos o próximo lema, será necessário fazermos uma análise bem mais profunda das arestas do grafo do que as que fizemos para provar os Lemas 3.7 e 3.10. Assim, como uma forma de facilitar o nosso trabalho e a compreensão do leitor, faremos algumas considerações primeiro.

Uma aresta $x_i y_j$ em um grafo zigzag vermelho é *par* quando i e j têm a mesma paridade, i.e. quando $i + j$ é par. Observe que quanto menores forem os índices i e j de uma aresta par vermelha $x_i y_j$, maior será o número de vértices cobertos pelo ciclo $(x_i P y_j)$. Assim, a fim de encontrarmos uma vértice-partição de um grafo zigzag vermelho no menor número de ciclos monocromáticos possível, uma estratégia natural seria procurarmos primeiro por uma aresta par vermelha $x_i y_j$ cujos índices i e j são os menores possíveis. Isso lida diretamente com a estrutura descrita na seguinte definição.

Definição 3.11. Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Para $k \leq n$, o subgrafo $G[S_k]$ é um *trançado par azul* quando todas as suas arestas pares são azuis. (Veja um exemplo na Figura 3.8a.)

Observe que as arestas pares de um trançado par azul $G[S_k]$ induzem uma vértice-partição de $G[S_k]$ em dois subgrafos bipartidos completos balanceados azuis, um formado pelos vértices de índice ímpar e outro formado pelos vértices de índice par, os quais serão denotados por H_k^I e H_k^P respectivamente (veja um exemplo na Figura 3.8b). Em relação a esses subgrafos, faremos as seguintes observações.

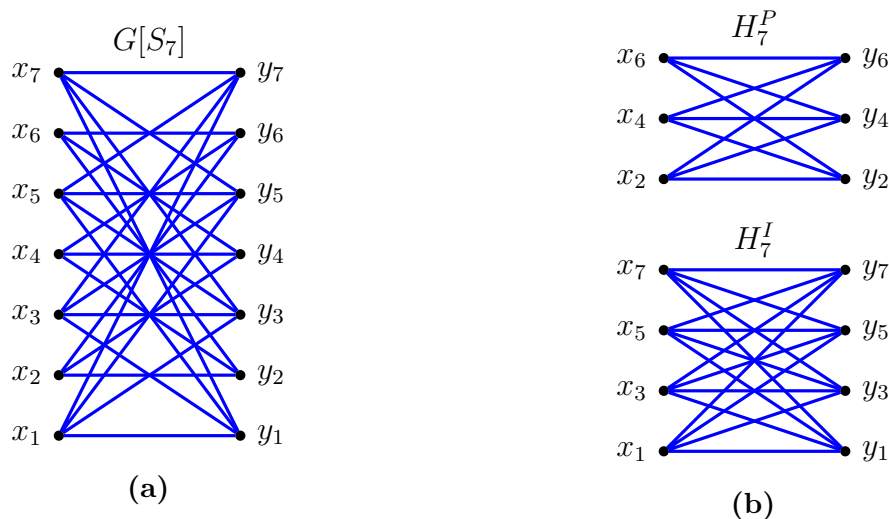


Figura 3.8: (a) O trançado par azul $G[S_7]$. (b) Os subgrafos bipartidos completos balanceados azuis H_7^I e H_7^P .

Observação 3.12. Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Para $k \leq n$, temos que se o subgrafo $G[S_k]$ é um trançado par azul, então $G[S_k]$ pode ser vértice-particionado em dois ciclos azuis, a saber em um ciclo hamiltoniano azul de H_k^I e em um ciclo hamiltoniano azul de H_k^P .

Observação 3.13. Sejam G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices e $G[S_k]$ um trançado par azul de G para algum $k \leq n$. Sejam ainda $Q = (u_1, \dots, u_s)$ e $R = (v_1, \dots, v_t)$ dois caminhos azuis disjuntos de G tais que $u_1, v_1 \in V(H_k^I)$, $u_s, v_t \in V(H_k^P)$ e os demais vértices de Q e R não pertencem a $G[S_k]$. Temos que:

- se $u_1, v_t \in X$ e $v_1, u_s \in Y$, então para cada aresta $e \in (E(H_k^I) \setminus \{u_1v_1\}) \cup (E(H_k^P) \setminus \{u_s v_t\})$ existe um ciclo azul de G que passa pela aresta e e cobre todos os vértices de Q , R e $G[S_k]$. (Veja um exemplo na Figura 3.9a.)
- se $u_1, v_1 \in X$ (resp. Y) e $u_s, v_t \in Y$ (resp. X), então para cada vértice $z \in V(H_k^I) \cap Y$ (resp. X), cada vértice $w \in V(H_k^P) \cap X$ (resp. Y) e cada aresta $e \in E(H_k^I - z) \cup E(H_k^P - w)$ existe um ciclo azul de G que passa pela aresta e e cobre todos os vértices de Q , R e $G[S_k]$ exceto z e w . (Veja um exemplo na Figura 3.9b.)
- se $u_1, u_s \in X$ e $v_1, v_t \in Y$, então para cada aresta $e \in (E(H_k^I) \setminus \{u_1v_1\}) \cup (E(H_k^P) \setminus \{u_s v_t\})$ existe um ciclo azul de G que passa pela aresta e e cobre todos os vértices de Q , R e $G[S_k]$. (Veja um exemplo na Figura 3.9c.)
- se $u_1, u_s, v_t \in X$ e $v_1 \in Y$, então para cada vértice $z \in V(H_k^P) \cap Y$ e cada aresta $e \in (E(H_k^I) \setminus \{u_1v_1\}) \cup E(H_k^P - z)$ existe um ciclo azul de G que passa pela aresta e e cobre todos os vértices de Q , R e $G[S_k]$ exceto z . (Veja um exemplo na Figura 3.9d.)

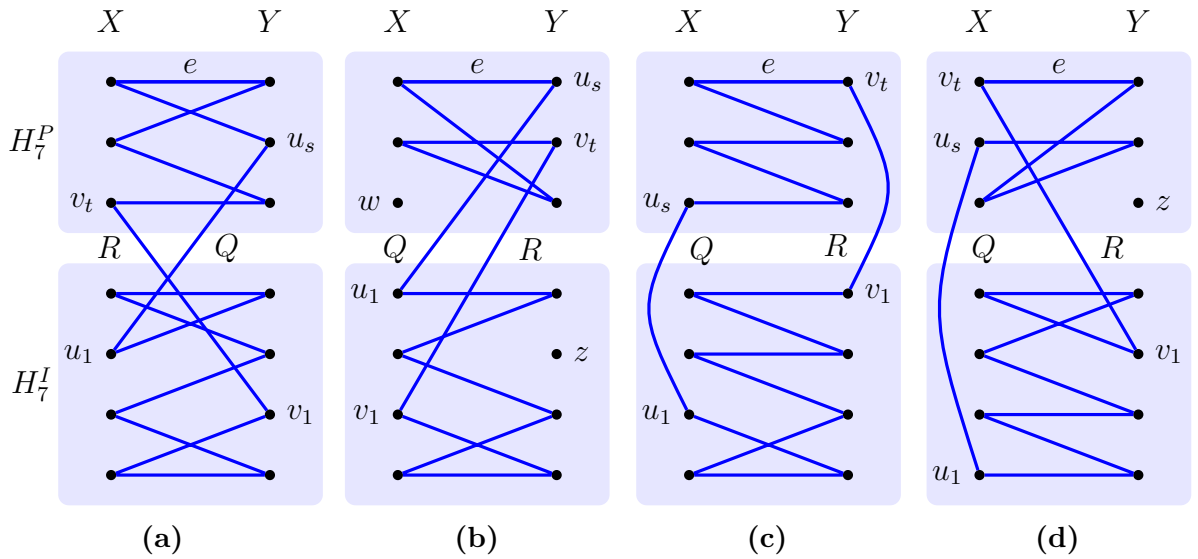


Figura 3.9: Os casos (a), (b), (c) e (d) da Observação 3.13.

Feitas essas considerações, podemos passar então para o nosso próximo resultado. Como veremos adiante, o Lema 3.3 segue quase diretamente do lema abaixo.

Lema 3.14. *Seja G um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices. Se o subgrafo $G[S_k]$ é um trançado par azul para algum $k < n$, então pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita.*

- G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.
- $G[S_{k+1}]$ também é um trançado par azul.

Prova. Podemos assumir que a condição (i) não é satisfeita, pois caso contrário não haveria mais nada a fazer. Daí, pelas Observações 3.6(a) e 3.12, vemos que a aresta $x_{k+1}y_{k+1}$ é azul. Agora, suponha por contradição que a condição (ii) também não é satisfeita. Daí, pela Definição 3.11, vemos que existe algum natural j menor que k tal que j e $k+1$ têm a mesma paridade e pelo menos uma das arestas $x_{k+1}y_j$ ou x_jy_{k+1} é vermelha. Mostraremos a seguir que isso implica que G possui um conjunto especial azul, o que é uma contradição pelo Lema 3.10.

Dividiremos o restante da prova em dois casos dependendo da paridade de k . Esses casos são tratados bastante similarmente, mas em alguns pontos não são totalmente análogos. Assim, daremos todos os detalhes para ambos os casos sempre que for necessário e apenas orientaremos como fazer a analogia sempre que for possível.

Caso A: k é par.

Afirmção 1A. Seja j um natural ímpar menor que k . Se a aresta $x_{k+1}y_j$ (resp. x_jy_{k+1}) é vermelha, então as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ (resp. x_ky_1 e x_2y_{k-1}) não são ambas azuis.

Prova. Suponha por contradição que as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ são azuis (veja a Figura 3.10). Nesse caso, provaremos que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G . De fato, pela Observação 3.13(b), vemos que a aresta x_ky_j é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_k, y_{k+1}Px_{k+1}, y_j)$ e em um ciclo azul que usa as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_k e y_j . Daí, pela Observação 3.13(a), vemos que o subgrafo $G[S_k]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas x_1y_k e x_ky_j . A aresta $x_{k+1}y_{k-1}$ é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_k, y_{k+1}Px_{k+1}, y_{k-1})$ e em um ciclo azul que usa as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_k e y_{k-1} . A aresta $x_{j+1}y_{k+1}$ também é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{j+1}, y_{k+1}Px_{k+1}, y_j)$ e em um ciclo azul que usa as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_{j+1} e y_j . Daí, vemos que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa a aresta x_1y_k e o caminho $(x_{j+1}, y_{k+1}, x_{k+1}, y_{k-1})$. Pela Observação 3.6(a), segue que a aresta $x_{k+2}y_{k+2}$ é azul. A aresta $x_{k+2}y_k$ é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}, y_{k+2}Px_{k+2}, y_k)$, no ciclo-aresta (x_{j+1}, y_{k+1}) e em um ciclo azul que cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_{j+1} e y_k , o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_k]$ que usa as arestas $x_{k-1}y_2$ e x_ky_j e passa pela aresta $x_{j+1}y_k$; removemos os vértices x_{j+1} e y_k do ciclo tomado; e ligamos as extremidades do caminho obtido. A aresta x_ky_{k+2} também é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_k, y_{k+2}Px_{k+2}, y_{k+1})$, no ciclo-aresta (x_{k+1}, y_{k-1}) e em um ciclo azul que usa as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_k e y_{k-1} . Daí, vemos que o subgrafo $G[S_{k+2}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$ e

$x_{k+2}y_{k+2}$, o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+1}]$ que usa a aresta x_1y_k e o caminho $(x_{j+1}, y_{k+1}, x_{k+1}, y_{k-1})$ e passa pela aresta x_ky_k ; e usamos o caminho $(x_k, y_{k+2}, x_{k+2}, y_k)$ para estender o ciclo tomado. Assim, temos que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G , uma contradição. Logo, o resultado segue.

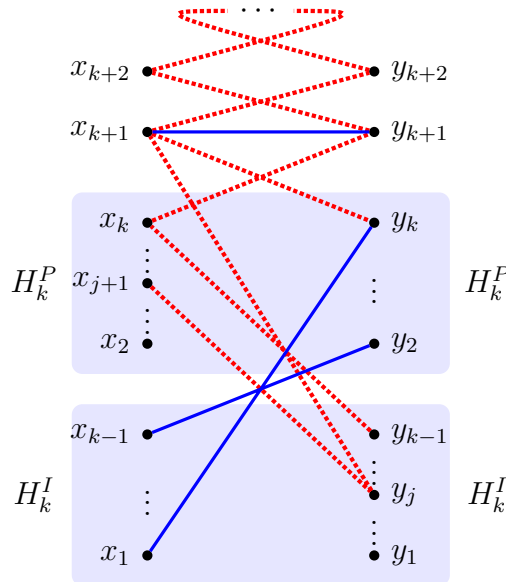


Figura 3.10: O caso em que as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ são azuis.

□

Afirmção 2A. As arestas $x_{k+1}y_1$ e x_1y_{k+1} são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{k+1}y_1$ é vermelha (veja a Figura 3.11). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}Py_1)$ e no caminho vermelho (x_1, y_2Px_{k-1}, y_k) . Pela Afirmção 1A, sabemos que as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta $x_{k+1}y_1$ é azul. Analogamente, a aresta x_1y_{k+1} também é azul. Logo, o resultado segue.

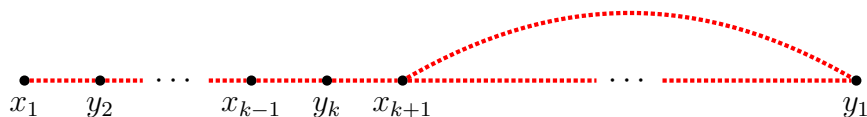


Figura 3.11: O caso em que a aresta $x_{k+1}y_1$ é vermelha.

□

Afirmção 3A. A aresta $x_{k+2}y_{k+2}$ é azul.

Prova. Pela Afirmção 2A, vemos que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ pode ser vértice-particionado em um ciclo hamiltoniano azul de H_k^P e em um ciclo azul que cobre x_{k+1} , y_{k+1} e todos os vértices de H_k^I , o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de H_k^I que usa a aresta x_1y_1 ; e usamos o caminho $(x_1, y_{k+1}, x_{k+1}, y_1)$ para estender o ciclo tomado. Daí, pela Observação 3.6(a), o resultado segue. \square

Afirmção 4A. Seja j um natural ímpar tal que $1 < j < k$. Se a aresta $x_{k+1}y_j$ (resp. x_jy_{k+1}) é vermelha, então as arestas $x_{j+1}y_1$ e x_2y_{j+2} (resp. x_1y_{j+1} e $x_{j+2}y_2$) são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{j+1}y_1$ é vermelha (veja a Figura 3.12). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}Px_{j+1}, y_1Py_j)$ e no caminho vermelho (x_1, y_2Px_{k-1}, y_k) . Pela Afirmção 1A, sabemos que as arestas x_1y_k e $x_{k-1}y_2$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta $x_{j+1}y_1$ é azul.

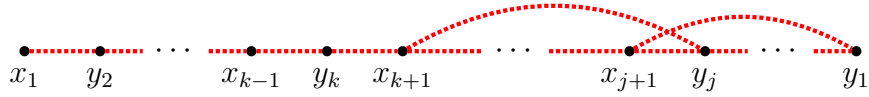


Figura 3.12: O caso em que a aresta $x_{j+1}y_1$ é vermelha.

Agora, suponha por contradição que a aresta x_2y_{j+2} é vermelha (veja a Figura 3.13). Nesse caso, temos que a aresta x_1y_k é azul, pois caso contrário G poderia ser vértice-particionado nos ciclos vermelhos $(x_{k+1}Py_{j+2}, x_2Py_j)$ e (x_1, y_2Px_{k-1}, y_k) e no ciclo-aresta (x_{j+1}, y_1) . Pela Afirmção 1A, segue que a aresta $x_{k-1}y_2$ é vermelha. Observe que as arestas x_1y_1 e $x_{j+1}y_k$ são pares e, portanto, azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado nos ciclos vermelhos $(x_{k+1}Py_{j+2}, x_2Py_j)$ e (y_2Px_{k-1}) e no ciclo azul (x_1, y_k, x_{j+1}, y_1) , uma contradição. Logo, a aresta x_2y_{j+2} é azul.

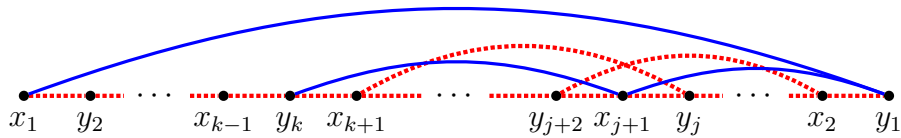


Figura 3.13: O caso em que a aresta x_2y_{j+2} é vermelha.

\square

Para o restante do Caso A, assumiremos sem perda de generalidade que a aresta $x_{k+1}y_j$ é vermelha para algum natural ímpar j fixo tal que $1 < j < k$. Daí, pela

afirmação acima, segue que as arestas $x_{j+1}y_1$ e x_2y_{j+2} são azuis. No caso em que $j = k - 1$, observe que isso significa que as arestas x_ky_1 e x_2y_{k+1} são azuis.

Afirmação 5A. As arestas x_jy_{k+2} e $x_{k+2}y_k$ são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta x_jy_{k+2} é vermelha (veja a Figura 3.14). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_jPx_{k+1}, y_jPy_{k+2})$ e no subgrafo $G[S_{j-1}]$. Porém, observe que o subgrafo $G[S_{j-1}]$ é um trançado par azul. Daí, pela Observação 3.12, vemos que G pode ser vértice-particionado em 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta x_jy_{k+2} é azul.

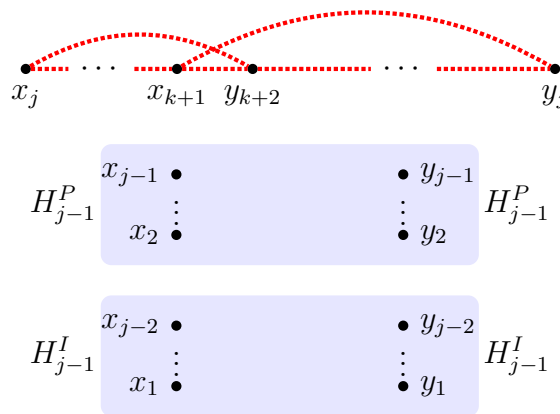


Figura 3.14: O caso em que a aresta x_jy_{k+2} é vermelha.

Agora, suponha por contradição que a aresta $x_{k+2}y_k$ é vermelha. Nesse caso, afirmamos que G também pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos. De fato, se $j = k - 1$, então temos que as arestas x_ky_1 e x_2y_{k+1} são azuis (veja a Figura 3.15a). Daí, pela Observação 3.13(d), vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}, y_{k+2}Px_{k+2}, y_k)$ e em um ciclo azul que usa a aresta x_ky_1 e o caminho (x_1, y_{k+1}, x_2) e cobre y_{k+1} e todos os vértices de $G[S_k]$ exceto y_k . Por outro lado, se $j < k - 1$, então temos que $y_{j+2} \in H_k^I$ (veja a Figura 3.15b). Daí, pela Observação 3.13(b), vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}, y_{k+2}Px_{k+2}, y_k)$, no ciclo-aresta (x_1, y_{k+1}) e em um ciclo azul que usa as arestas $x_{j+1}y_1$ e x_2y_{j+2} e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_1 e y_k . Em todo caso, obtemos uma contradição. Logo, a aresta $x_{k+2}y_k$ é azul.

□

Afirmação 6A. O subgrafo $G[S_{k+2}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$, $x_{k+2}y_{k+2}$ e $x_{k+2}y_k$. Consequentemente, a aresta $x_{k+3}y_{k+3}$ é azul.

Prova. Pela Observação 3.13(a), podemos construir um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+2}]$ que usa as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$, $x_{k+2}y_{k+2}$ e $x_{k+2}y_k$ da seguinte maneira (veja a Figura 3.16):

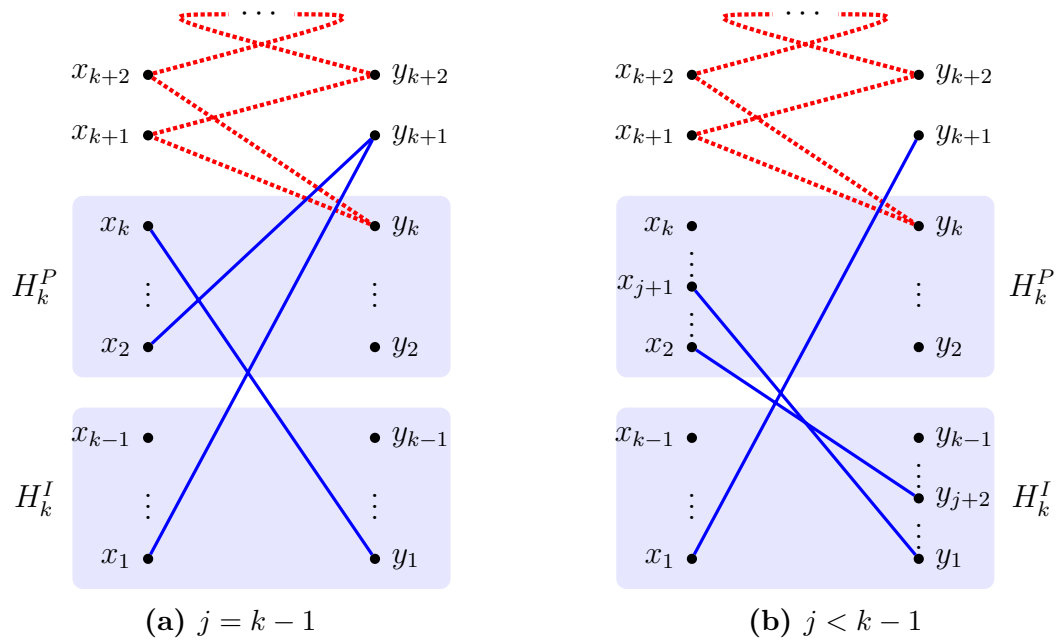


Figura 3.15: O caso em que a aresta $x_{k+2}y_k$ é vermelha.

tomamos um ciclo azul de G que usa a aresta $x_{j+1}y_1$ e o caminho $(x_j, y_{k+2}, x_{k+2}, y_k)$, passa pela aresta x_1y_1 e cobre x_{k+2} , y_{k+2} e todos os vértices de $G[S_k]$; e usamos o caminho $(x_1, y_{k+1}, x_{k+1}, y_1)$ para estender o ciclo tomado. Daí, pela Observação 3.6(a), segue que a aresta $x_{k+3}y_{k+3}$ é azul.

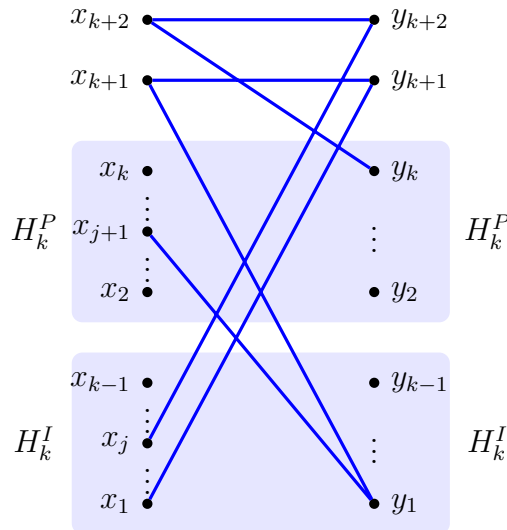


Figura 3.16: Um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+2}]$.

□

Afirmção 7A. A aresta x_jy_{k+1} é azul.

Prova. Suponha por contradição que a aresta x_jy_{k+1} é vermelha. Nesse caso, provaremos

que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G . De fato, pela Afirmação 4A, temos que as arestas x_1y_{j+1} e $x_{j+2}y_2$ são azuis (veja a Figura 3.17). Daí, pela Observação 3.13(a), vemos que o subgrafo $G[S_k]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{j+1}y_1$ e x_1y_{j+1} . Se $j = k - 1$, então temos que as arestas x_2y_{k+1} e $x_{k+1}y_2$ são azuis. Daí, pela Observação 3.13(c), vemos que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa os caminhos (x_1, y_{k+1}, x_2) e (y_1, x_{k+1}, y_2) . Por outro lado, se $j < k - 1$, então temos que $x_{j+2}, y_{j+2} \in H_k^I$. Daí, vemos que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul, o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_k]$ que usa as arestas x_2y_{j+2} e $x_{j+2}y_2$ e passa pela aresta x_1y_1 ; e usamos o caminho $(x_1, y_{k+1}, x_{k+1}, y_1)$ para estender o ciclo tomado. Em todo caso, temos que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul. Daí, pela Afirmação 6A, vemos que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G , uma contradição. Logo, o resultado segue.

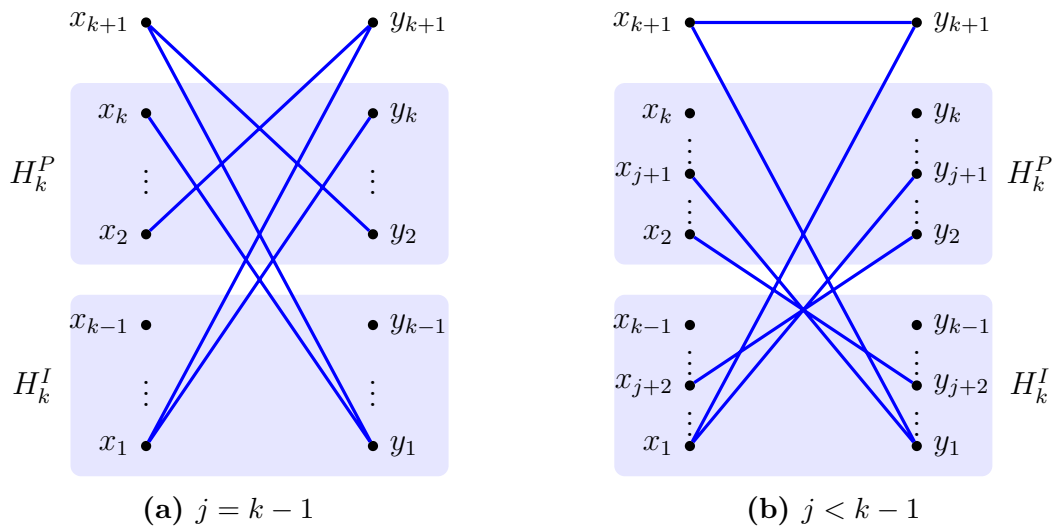


Figura 3.17: O caso em que a aresta $x_j y_{k+1}$ é vermelha.

□

Afirmação 8A. Existe um ciclo azul de G que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k .

Prova. Se $j = k - 1$, então temos que as arestas $x_k y_1$ e $x_2 y_{k+1}$ são azuis (veja a Figura 3.18a). Daí, pela Observação 3.13(d), vemos que G possui um ciclo azul que usa a aresta $x_k y_1$ e o caminho (x_1, y_{k+1}, x_2) e cobre y_{k+1} e todos os vértices de $G[S_k]$ exceto y_k . Por outro lado, se $j < k - 1$, então temos que $y_{j+2} \in H_k^I$ (veja a Figura 3.18b). Daí, pela Observação 3.13(b), vemos que G possui um ciclo azul que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k , o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo azul de G que usa as arestas $x_{j+1} y_1$ e $x_2 y_{j+2}$, passa pela aresta $x_j y_1$ e cobre todos os vértices de $G[S_k]$ exceto x_1 e y_k ; e usamos o caminho (x_j, y_{k+1}, x_1, y_1) para estender o ciclo tomado. Em todo caso, o resultado segue.

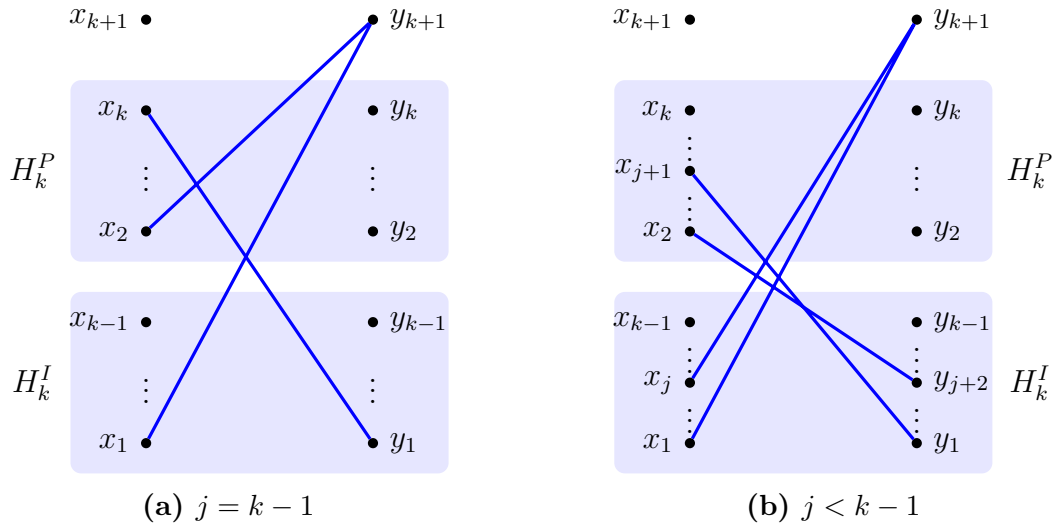


Figura 3.18: Um ciclo azul que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k .

□

Afirmação 9A. A aresta $x_{k+1}y_{k+3}$ é azul.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{k+1}y_{k+3}$ é vermelha (veja a Figura 3.19). Daí, pela Afirmação 8A, vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}, y_{k+3}Px_{k+3}, y_{k+2})$, no ciclo-aresta (x_{k+2}, y_k) e em um ciclo azul que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k , uma contradição. Logo, o resultado segue.

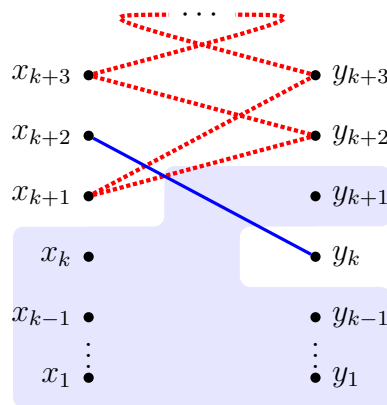


Figura 3.19: O caso em que a aresta $x_{k+1}y_{k+3}$ é vermelha.

□

Afirmação 10A. As arestas x_1y_k e $x_{k+1}y_2$ não são ambas azuis.

Prova. Suponha por contradição que as arestas x_1y_k e $x_{k+1}y_2$ são azuis (veja a Figura 3.20). Nesse caso, provaremos que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G . De fato, pela

Observação 3.13(a), vemos que o subgrafo $G[S_k]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{j+1}y_1$ e x_1y_k . Vemos também que o subgrafo $G[S_{k+1}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa a aresta $x_{j+1}y_1$ e o caminho $(x_1, y_{k+1}, x_{k+1}, y_2)$. Daí, pela Afirmação 6A, vemos que S_{k+2} é um conjunto especial azul de G , uma contradição. Logo, o resultado segue.

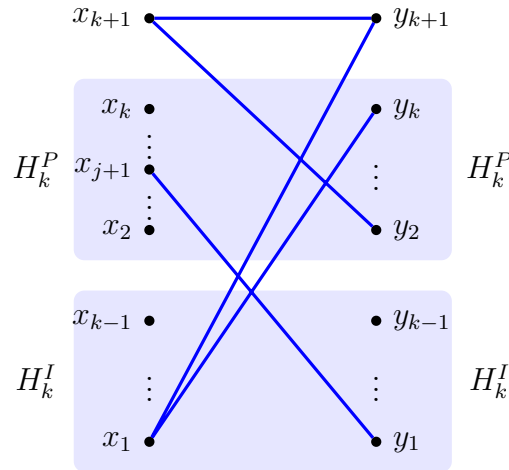


Figura 3.20: O caso em que as arestas x_1y_k e $x_{k+1}y_2$ são azuis.

□

Afirmação 11A. A aresta x_2y_{k+2} é azul.

Prova. Suponha por contradição que a aresta x_2y_{k+2} é vermelha (veja a Figura 3.21). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho (x_2Py_{k+2}) , no caminho vermelho (x_1, y_2Py_k, x_{k+1}) e no vértice y_1 . Pela Afirmação 10A, sabemos que as arestas x_1y_k e $x_{k+1}y_2$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, o resultado segue.

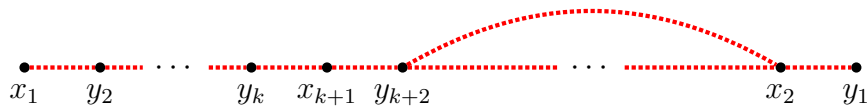


Figura 3.21: O caso em que a aresta x_2y_{k+2} é vermelha.

□

Afirmação 12A. A aresta $x_{k+3}y_{k+1}$ é azul.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{k+3}y_{k+1}$ é vermelha (veja a Figura 3.22). Daí, pela Observação 3.13(d), vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+2}, y_{k+3}Px_{k+3}, y_{k+1})$, no ciclo-aresta (x_{k+1}, y_k) e em um ciclo azul que usa a aresta

$x_{j+1}y_1$ e o caminho (x_2, y_{k+2}, x_j) e cobre y_{k+2} e todos os vértices de $G[S_k]$ exceto y_k , uma contradição. Logo, o resultado segue.

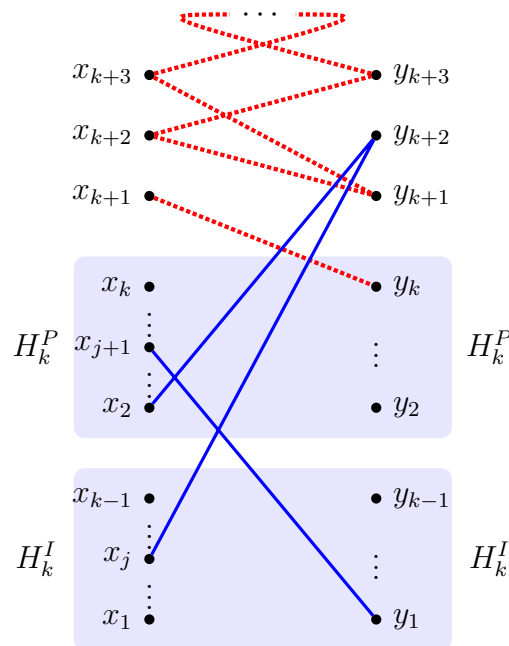


Figura 3.22: O caso em que a aresta $x_{k+3}y_{k+1}$ é vermelha.

□

Afirmção 13A. O subgrafo $G[S_{k+3}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+2}y_k$ e $x_{k+3}y_{k+3}$. Conseqüentemente, a aresta $x_{k+4}y_{k+4}$ é azul.

Prova. Pela Afirmção 6A, podemos construir um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+3}]$ que usa as arestas $x_{k+2}y_k$ e $x_{k+3}y_{k+3}$ da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+2}]$ que usa as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$ e $x_{k+2}y_k$; e usamos o caminho $(x_{k+1}, y_{k+3}, x_{k+3}, y_{k+1})$ para estender o ciclo tomado. Daí, pela Observação 3.6(a), segue que a aresta $x_{k+4}y_{k+4}$ é azul. □

Afirmção 14A. As arestas $x_{k+4}y_k$ e $x_{k+2}y_{k+4}$ são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{k+4}y_k$ é vermelha (veja a Figura 3.23). Daí, pela Afirmção 8A, vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}, y_{k+2}, x_{k+3}, y_{k+4}Px_{k+4}, y_k)$, no ciclo-aresta (x_{k+2}, y_{k+3}) e em um ciclo azul que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k , uma contradição. Logo, a aresta $x_{k+4}y_k$ é azul.

Agora, suponha por contradição que a aresta $x_{k+2}y_{k+4}$ é vermelha (veja a Figura 3.24). Daí, pela Observação 3.13(d), vemos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+2}, y_{k+4}Px_{k+4}, y_{k+3})$, no ciclo-aresta (x_{k+3}, y_k) e em um ciclo azul

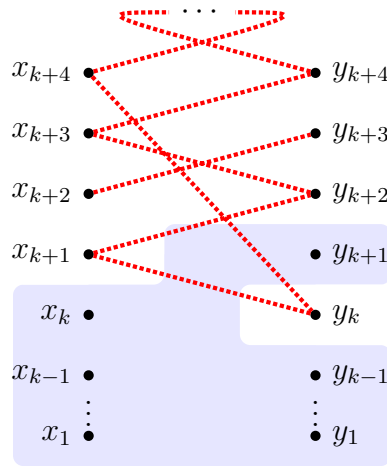


Figura 3.23: O caso em que a aresta $x_{k+4}y_k$ é vermelha.

que cobre y_{k+2} e todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto y_k , o qual pode ser construído da seguinte maneira: tomamos um ciclo azul de G que usa a aresta $x_{j+1}y_1$ e o caminho (x_2, y_{k+2}, x_j) , passa pela aresta x_1y_1 e cobre y_{k+2} e todos os vértices de $G[S_k]$ exceto y_k ; e usamos o caminho $(x_1, y_{k+1}, x_{k+1}, y_1)$ para estender o ciclo tomado. Assim, obtemos uma contradição. Logo, a aresta $x_{k+2}y_{k+4}$ é azul.

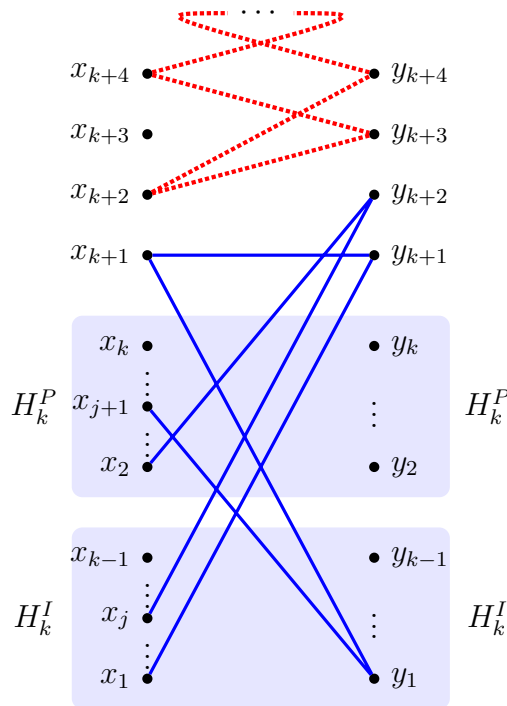


Figura 3.24: O caso em que a aresta $x_{k+2}y_{k+4}$ é vermelha.

□

Afirmção 15A. O subgrafo $G[S_{k+4}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+3}y_{k+3}$ e $x_{k+4}y_{k+4}$.

Prova. Pela Afirmção 13A, podemos construir um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+4}]$ que usa as arestas $x_{k+3}y_{k+3}$ e $x_{k+4}y_{k+4}$ da seguinte maneira: tomamos um ciclo hamiltoniano azul de $G[S_{k+3}]$ que usa as arestas $x_{k+2}y_k$ e $x_{k+3}y_{k+3}$; e usamos o caminho $(x_{k+2}, y_{k+4}, x_{k+4}, y_k)$ para estender o ciclo tomado. \square

Assim, pelas Afirmções 6A, 13A e 15A, vemos que S_{k+4} é um conjunto especial azul de G , o que é nossa contradição final para o Caso A.

Caso B: k é ímpar.

Afirmção 1B. Seja j um natural par menor que k . Se a aresta $x_{k+1}y_j$ (resp. x_jy_{k+1}) é vermelha, então as arestas x_2y_k e $x_{k-1}y_1$ (resp. x_ky_2 e x_1y_{k-1}) não são ambas azuis.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P na prova da Afirmção 1A. \square

Afirmção 2B. As arestas $x_{k+1}y_2$ e x_2y_{k+1} são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{k+1}y_2$ é vermelha (veja a Figura 3.25). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}Py_2)$, no caminho vermelho (y_1, x_2Px_{k-1}, y_k) e no vértice x_1 . Pela Afirmção 1B, sabemos que as arestas x_2y_k e $x_{k-1}y_1$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta $x_{k+1}y_2$ é azul. Analogamente, a aresta x_2y_{k+1} também é azul. Logo, o resultado segue.

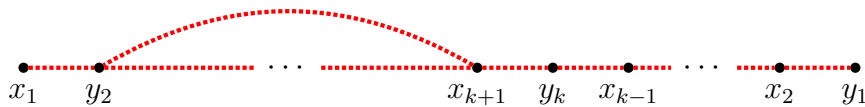


Figura 3.25: O caso em que a aresta $x_{k+1}y_2$ é vermelha.

\square

Afirmção 3B. A aresta $x_{k+2}y_{k+2}$ é azul.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P e substituímos a Afirmção 2A pela 2B na prova da Afirmção 3A. \square

Afirmção 4B. Seja j um natural par tal que $2 < j < k$. Se a aresta $x_{k+1}y_j$ (resp. x_jy_{k+1}) é vermelha, então as arestas $x_{j+1}y_2$ e x_1y_{j+2} (resp. x_2y_{j+1} e $x_{j+2}y_1$) são azuis.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_{j+1}y_2$ é vermelha (veja a Figura 3.26). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}Px_{j+1}, y_2Py_j)$, no caminho vermelho (y_1, x_2Px_{k-1}, y_k) e no vértice x_1 . Pela Afirmação 1B, sabemos que as arestas x_2y_k e $x_{k-1}y_1$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta $x_{j+1}y_2$ é azul.



Figura 3.26: O caso em que a aresta $x_{j+1}y_2$ é vermelha.

Agora, suponha por contradição que a aresta x_1y_{j+2} é vermelha (veja a Figura 3.27). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_{k+1}Py_{j+2}, x_1Py_j)$, no caminho vermelho (y_1, x_2Px_{k-1}, y_k) e no vértice x_{j+1} . Pela Afirmação 1B, sabemos que as arestas x_2y_k e $x_{k-1}y_1$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, a aresta x_1y_{j+2} é azul.

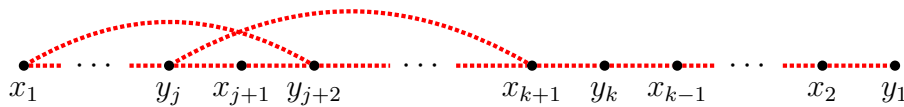


Figura 3.27: O caso em que a aresta x_1y_{j+2} é vermelha.

□

Para o restante do Caso B, assumiremos sem perda de generalidade que a aresta $x_{k+1}y_j$ é vermelha para algum natural par j fixo tal que $2 < j < k$. Daí, pela afirmação acima, segue que as arestas $x_{j+1}y_2$ e x_1y_{j+2} são azuis. No caso em que $j = k - 1$, observe que isso significa que as arestas x_ky_2 e x_1y_{k+1} são azuis.

Afirmação 5B. As arestas x_jy_{k+2} e $x_{k+2}y_k$ são azuis.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 , de H_{j-1}^I e H_{j-1}^P e de H_k^I e H_k^P na prova da Afirmação 5A. □

Afirmação 6B. O subgrafo $G[S_{k+2}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+1}y_{k+1}$, $x_{k+2}y_{k+2}$ e $x_{k+2}y_k$. Consequentemente, a aresta $x_{k+3}y_{k+3}$ é azul.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P na prova da Afirmação 6A. □

Afirmção 7B. A aresta $x_j y_{k+1}$ é azul.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P e substituírmos a Afirmção 4A pela 4B e a 6A pela 6B na prova da Afirmção 7A. \square

Afirmção 8B. Existe um ciclo azul de G que cobre todos os vértices de $G[S_{k+1}]$ exceto x_{k+1} e y_k .

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P na prova da Afirmção 8A. \square

Afirmção 9B. A aresta $x_{k+1} y_{k+3}$ é azul.

Prova. Basta substituírmos a Afirmção 8A pela 8B na prova da Afirmção 9A. \square

Afirmção 10B. As arestas $x_2 y_k$ e $x_{k+1} y_1$ não são ambas azuis.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P e substituírmos a Afirmção 6A pela 6B na prova da Afirmção 10A. \square

Afirmção 11B. A aresta $x_1 y_{k+2}$ é azul.

Prova. Suponha por contradição que a aresta $x_1 y_{k+2}$ é vermelha (veja a Figura 3.28). Nesse caso, temos que G pode ser vértice-particionado no ciclo vermelho $(x_1 P y_{k+2})$ e no caminho vermelho $(x_{k+1}, y_k P x_2, y_1)$. Pela Afirmção 10B, sabemos que as arestas $x_2 y_k$ e $x_{k+1} y_1$ não são ambas azuis. Daí, vemos que G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos, uma contradição. Logo, o resultado segue.

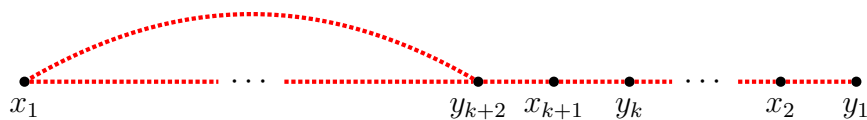


Figura 3.28: O caso em que a aresta $x_1 y_{k+2}$ é vermelha.

\square

Afirmção 12B. A aresta $x_{k+3} y_{k+1}$ é azul.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P na prova da Afirmção 12A. \square

Afirmção 13B. O subgrafo $G[S_{k+3}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+2} y_k$ e $x_{k+3} y_{k+3}$. Conseqüentemente, a aresta $x_{k+4} y_{k+4}$ é azul.

Prova. Basta substituímos a Afirmação 6A pela 6B na prova da Afirmação 13A. \square

Afirmação 14B. As arestas $x_{k+4}y_k$ e $x_{k+2}y_{k+4}$ são azuis.

Prova. Basta invertermos os papéis de x_1 e x_2 , de y_1 e y_2 e de H_k^I e H_k^P e substituímos a Afirmação 8A pela 8B na prova da Afirmação 14A. \square

Afirmação 15B. O subgrafo $G[S_{k+4}]$ possui um ciclo hamiltoniano azul que usa as arestas $x_{k+3}y_{k+3}$ e $x_{k+4}y_{k+4}$.

Prova. Basta substituímos a Afirmação 13A pela 13B na prova da Afirmação 15A. \square

Assim, pelas Afirmações 6B, 13B e 15B, vemos que S_{k+4} é um conjunto especial azul de G , o que é nossa contradição final para o Caso B. \square

Agora, podemos finalmente provar o Lema 3.3. Porém, por uma questão de concordância com a linguagem utilizada ao longo desta seção, provaremos de forma equivalente o seguinte lema.

Lema 3.15. *Se G é um grafo zigzag vermelho com $2n$ vértices, então G pode ser vértice-particionado em no máximo 3 ciclos monocromáticos.*

Prova. Pela Observação 3.6(a), podemos assumir que a aresta x_1y_1 é azul, pois caso contrário não haveria mais nada a fazer. Daí, temos que o subgrafo $G[S_1]$ é um trançado par azul e portanto podemos aplicar o Lema 3.14 repetidas vezes até obtermos o resultado desejado. De fato, observe que o subgrafo $G[S_n]$ não pode ser um trançado par azul, uma vez que a aresta x_ny_n é vermelha por definição. Assim, a condição (i) deve ser satisfeita após no máximo $n - 1$ iterações do Lema 3.14. \square

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao conhecermos as provas dos resultados apresentados nas seções anteriores, fica nítido que qualquer alteração no enunciado, por mais inócua que ela aparente ser, pode elevar bastante o grau de dificuldade do problema. De fato, isso acontece por exemplo quando alteramos a classe do grafo hospedeiro considerada (e.g. do Teorema 1.2 para o Teorema 1.6), o tipo da estrutura monocromática procurada (e.g. de uma versão apropriada do Teorema 1.2 para o Teorema 1.14), o número de cores da coloração (e.g. do caso $r = 2$ para o caso $r = 3$ da Conjectura 1.10) ou o número máximo de estruturas monocromáticas da partição (e.g. do Lema 3.7 para o Lema 3.15).

Nesse sentido, ainda que tenhamos provado o Teorema 3.4, é difícil estimarmos quão próximos estamos de resolver o caso $r = 2$ da Conjectura 1.16. A fim de descobrirmos isso, observe que o Lema 3.15 não pode ser melhorado, uma vez que existem grafos zigzags vermelhos que não podem ser vértice-particionados em menos de 3 ciclos monocromáticos (veja um exemplo na Figura 4.1). Assim, para estendermos os argumentos utilizados na Seção 3.2.1, precisamos considerar também os vértices do ciclo azul obtido pelo Corolário 1.7.

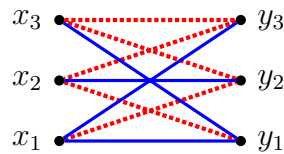


Figura 4.1: Um grafo zigzag vermelho que não pode ser vértice-particionado em menos de 3 ciclos monocromáticos.

Por outro lado, observamos que talvez o caso $r = 2$ da Conjectura 1.16 também possa ser provado de maneira independente. Uma estratégia que nos parece plausível de ser seguida seria tentarmos adaptar os argumentos utilizados por Bessy e Thomassé (2010) na prova do Teorema 1.14.

Por fim, lembramos que, até que se prove o contrário, é possível que existam grafos bipartidos completos balanceados 2-aresta-coloridos que não podem ser vértice-particionados em menos de 4 ciclos monocromáticos. Nesse caso, nosso Teorema 3.4 não poderia ser melhorado. Porém, acreditamos que a Conjectura 1.16 seja realmente válida pelo menos para $r = 2$.

REFERÊNCIAS

- Allen, Peter. *Covering two-edge-coloured complete graphs with two disjoint monochromatic cycles*. *Combinatorics, Probability and Computing*, v. 17, n. 04, p. 471–486, 2008.
- Ayel, Jacqueline. *Sur l'existence de deux cycles supplémentaires unicolores, disjoints et de couleurs différentes dans un graphe complet bicolore*. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1979.
- Benevides, Fabrício S. *Ramsey theory for graphs*. CIMPA school: Modern Methods in Combinatorics, ECOS, 2013. Disponível em: http://www.cimpa-icpam.org/archivesecoles/20140204171100/cursos_menu.html.
- Bessy, Stéphane; Thomassé, Stéphan. *Partitioning a graph into a cycle and an anticycle, a proof of Lehel's conjecture*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 100, n. 2, p. 176–180, 2010.
- Conlon, David; Stein, Maya. *Monochromatic cycle partitions in local edge colorings*. *Journal of Graph Theory*, v. 81, n. 2, p. 134–145, 2016.
- Erdős, Paul; Gyárfás, András; Pyber, László. *Vertex coverings by monochromatic cycles and trees*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 51, n. 1, p. 90–95, 1991.
- Gerencsér, L; Gyárfás, A. *On Ramsey-type problems*. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math*, v. 10, p. 167–170, 1967.
- Gyárfás, A; Lehel, J. *A Ramsey-type problem in directed and bipartite graphs*. *Periodica Mathematica Hungarica*, v. 3, n. 3-4, p. 299–304, 1973.
- Gyárfás, András. *Vertex coverings by monochromatic paths and cycles*. *Journal of Graph Theory*, v. 7, n. 1, p. 131–135, 1983.
- Gyárfás, András. *Covering complete graphs by monochromatic paths*. *Irregularities of partitions*, Springer, p. 89–91. 1989.
- Gyárfás, András. *Vertex covers by monochromatic pieces — a survey of results and problems*. *Discrete Mathematics*, v. 339, n. 7, p. 1970–1977, 2016.
- Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N; Szemerédi, Endre. *An improved bound for the monochromatic cycle partition number*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 96, n. 6, p. 855–873, 2006a.
- Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N; Szemerédi, Endre. *One-sided coverings of colored complete bipartite graphs*. *Topics in Discrete Mathematics*, Springer,

p. 133–144. 2006b.

Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N; Szemerédi, Endre. *Partitioning 3-colored complete graphs into three monochromatic cycles*. Electronic J. of Combinatorics, v. 18, n. 1, 2011.

Haxell, Penny E. *Partitioning complete bipartite graphs by monochromatic cycles*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 69, n. 2, p. 210–218, 1997.

Lang, Richard; Schaudt, Oliver; Stein, Maya. *Almost partitioning a 3-edge-coloured $K_{n,n}$ into 5 monochromatic cycles*. arXiv preprint arXiv:1510.00060, 2015.

Lang, Richard; Stein, Maya. *Local colourings and monochromatic partitions in complete bipartite graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, v. 49, p. 757–763, 2015.

Łuczak, Tomasz. $R(C_n, C_n, C_n) \leq (4 + o(1))n$. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 75, n. 2, p. 174–187, 1999.

Łuczak, Tomasz; Rödl, Vojtech; Szemerédi, Endre. *Partitioning two-coloured complete graphs into two monochromatic cycles*. Combinatorics, Probability and Computing, v. 7, n. 04, p. 423–436, 1998.

Peng, Yuejian; Rödl, Vojtech; Ruciński, Andrzej. *Holes in graphs*. Electron. J. Combin, v. 9, n. 1, p. 1–18, 2002.

Pokrovskiy, Alexey. *Partitioning edge-coloured complete graphs into monochromatic cycles and paths*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 106, p. 70–97, 2014.

Schaudt, Oliver; Stein, Maya. *Partitioning two-coloured complete multipartite graphs into monochromatic paths and cycles*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, v. 50, p. 313–318, 2015.

ÍNDICE REMISSIVO

H_k^I e H_k^P , 40

X_k, Y_k, S_k e \widetilde{S}_k , 37

Aresta par, 40

Caminho simples, 11

Ciclo simples, 12

Coloração

δ -próxima de split, 26

split, 13

Conjunto especial azul, 38

Densidade de um par, 21

Emparelhamento conexo, 22

Grafo

ε -hamiltoniano, 29

k -partido justo, 14

bipartido balanceado, 13

localmente r -aresta-colorido, 19

reduzido, 22

zigzag vermelho, 37

Par ε -regular, 21

Partição ε -regular, 21

Trançado par azul, 40