Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Curso de Doutorado em Ciências da Computação

Alexandre Silva Cavalcante

Sistemas Esquemáticos de Dedução Natural

Um Estudo Prova-Teórico

Fortaleza

2010

Alexandre Silva Cavalcante

Sistemas Esquemáticos de Dedução Natural

Um Estudo Prova-Teórico

Tese apresentada como parte do curso de Doutorado em Ciências da Computação.

Orientadora: Ana Teresa de Castro Martins

Doutor

Fortaleza

2010

Alexandre Silva Cavalcante

Sistemas Esquemáticos de Dedução Natural

Um Estudo Prova-Teórico

Tese apresentada como parte do curso de Doutorado em Ciências da Computação.

BANCA EXAMINADORA

Ana Teresa de Castro Martins

Doutor

Luiz Carlos Pereira

Doutor

Ruy de Queiroz

Doutor

Mário Benevides

Doutor

Marcelino Pequeno

Doutor

À minha esposa, ao meu filho, aos meus pais e aos meus sogros.

Resumo

O termo Teoria da Prova foi introduzido por Hilbert para identificar o estudo sobre provas formais. Pesquisas nessa área podem ser classificadas em: a) Teoria da Prova Redutiva ou Interpretacional, cujo objetivo é demonstrar, entre outras coisas, a consistência da matemática utilizando somente métodos finitistas, e b) Teoria da Prova Estrutural, onde características estruturais das provas formais são investigadas por meio de sistemas dedutivos como Dedução Natural e Cálculo de Sequentes. Prawitz, por meio da Teoria da Prova, definiu uma Teoria dos Significados para constantes lógicas e propôs regras esquemáticas de introdução e de eliminação para caracterizar os conectivos proposicionais. Schroeder-Heister estendeu as definições de Prawitz e formalizou o uso de regras como hipóteses, tornando possível a utilização de cálculos para suposições separados de cálculos para constantes lógicas. Não estamos interessados na investigação de regras esquemáticas para dar significado a constantes lógicas. Pretendemos, na verdade, definir procedimentos de normalização esquemáticos, baseados em tais regras esquemáticas, com objetivo de identificar condições suficientes para um sistema ser normalizável. Tais resultados são pertinentes à Teoria Abstrata da Prova, termo usado para identificar o estudo das condições abstratas e gerais para a análise prova-teórica de sistemas formais. Teoria Abstrata da Prova não estuda cálculos lógicos específicos, mas famílias de cálculos instâncias de regras esquemáticas. A nossa proposta, portanto, baseia-se em regras esquemáticas que podem ser instanciadas por regras concretas, em particular, por regras que introduzem operadores modais. Provamos, também, Teoremas de Normalização Fraca e Forte para sistemas esquemáticos definidos em função de nossas regras esquemáticas, obtemos condições suficientes para que um sistema instância destas regras seja normalizável, definimos um procedimento que normaliza deduções concretas e comparamos nossas provas de normalização esquemática com provas de normalização para sistemas definidos na literatura.

Palavras-chaves: Teoria da Prova. Teoria Abstrata da Prova. Sistemas de Dedução Natural. Sistemas Esquemáticos de Dedução Natural. Teoremas de Normalização.

Agradecimento

A DEUS, pela força de superação concedida.

À minha esposa pelo incentivo sempre presente e pela compreensão.

À professora Ana Teresa pela orientação, dedicação e cessão do conhecimento.

Ao professor Luiz Carlos Pereira pelas contribuições.

Aos professores participantes da banca.

A todas as pessoas que de alguma maneira me incentivaram a concluir este trabalho.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O termo Teoria da Prova foi introduzido por Hilbert [20] para identificar o estudo das provas formais. Pesquisas nesta área podem ser classificadas em: a) Teoria da Prova Redutiva ou Interpretacional, cujo objetivo é demonstrar, dentre outras coisas, a consistência de teorias matemáticas utilizando somente métodos finitários; e b) Teoria da Prova Estrutural ou Geral, onde características estruturais das provas formais são investigadas por meio de sistemas dedutivos tais como sistemas de Dedução Natural e Cálculo de Sequentes [14].

No contexto da Teoria da Prova Estrutural, as análises de propriedades estruturais de provas lidam, dentre outras coisas, com o estudo do tamanho de provas, provas de confluência para deduções, existência de provas e equivalências entre elas, como também com provas de Teorema de Normalização [49].

A Dedução Natural, definida em 1935 [14] por Gentzen, foi um dos trabalhos pioneiros realizados na Teoria Estrutural da Prova[1]. A fim de definir um formalismo que refletisse o raciocínio matemático, Gentzen isolou as operações dedutivas essenciais e as desmembrou até obter um conjunto de inferências consideradas atômicas. Ainda no ano de 1935, Gentzen [14] definiu o Cálculo de Sequentes, um metacálculo para a relação de derivabilidade no sistema de Dedução Natural.

Dizemos que uma dedução está na forma normal se não ocorrem certos tipos de desvios, os segmentos máximos. A eliminação de segmentos máximos é consequência do Princípio da Inversão definido por Prawitz [38] que diz que "nada se ganha se inferimos uma fórmula através de introdução para usá-la como premissa maior de uma eliminação".

O Teorema da Forma Normal atesta que toda dedução em Dedução Natural possui uma forma normal. O Teorema de Normalização Fraca afirma que obtemos a forma normal de deduções por meio de operações denominadas de reduções. Por fim, o Teorema de Normalização Forte diz que a forma normal de uma dedução é obtida após

[1]Conforme Prawitz menciona em sua tese [38], Lukasiewics foi quem primeiro expressou a idéia de construir um sistema de Dedução Natural. Ele sugeriu que o raciocínio informal matemático deveria ser levado em consideração em sistemas lógicos. Os primeiros resultados obtidos nessa direção são creditados a Jáskowski [22].

um número finito de reduções independentemente da ordem em que são aplicadas. Atualmente, a propriedade da Unicidade da Forma Normal, que afirma que duas sequências de reduções quaisquer levam uma dedução a uma mesma forma normal, é provada à parte do Teorema de Normalização Forte. A propriedade da Unicidade também é conhecida como propriedade de Church-Rosser.

Prawitz, por meio da Teoria da Prova, definiu uma Teoria dos Significados para as constantes lógicas da lógica proposicional intuicionística [40]. Em sua opinião, as regras de introdução de Dedução Natural dão o significado de tais constantes lógicas. Ele definiu, também, regras esquemáticas de introdução e de eliminação em Dedução Natural com intuito de investigar se sentenças definidas em função de operadores introduzidos por regras instâncias de sua regra esquemática de introdução são equivalentes a sentenças definidas exclusivamente pelos operadores usuais proposicionais $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Ou seja, na sua terminologia, ele investigou por meio de suas regras esquemáticas a Completude dos operadores usuais $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ com relação aos demais operadores introduzidos por regras instâncias de suas regras esquemáticas.

Schroeder-Heister, em [43], estendeu as definições de Prawitz e propôs esquemas que permitem o uso de regras como hipóteses, possibilitando que um cálculo para suposições seja utilizado de forma separada do cálculo para constantes lógicas.

Em [7], Chi introduziu regras esquemáticas no estilo das regras de Prawitz. Sua regra esquemática de introdução é a mesma de Prawitz, como podemos verificar em [40]. Entretanto, Chi propõe uma nova regra esquemática de eliminação visto que a regra usual de eliminação da implicação, como definida por exemplo em [38], não é instância da regra esquemática de eliminação de Prawitz.

Não estamos interessados na definição de regras esquemáticas para estudar o significado de constantes lógicas. Pretendemos, na realidade, definir procedimentos de normalização baseados em regras esquemáticas com o objetivo principal de identificar condições suficientes para um sistema de Dedução Natural ser normalizável.

No nosso entendimento, tais resultados são pertinentes à Teoria Abstrata da Prova, termo que foi utilizado no *First World Congress and School on Universal Logic* [36], em 2005, para identificar o estudo de condições abstratas para análises estruturais de provas formais. Métodos prova-teóricos foram apresentados naquele Congresso sob um ponto de vista abstrato e destacamos duas de suas questões que mais de perto se vinculam aos objetivos deste trabalho:

(1) Como definir uma estratégia geral para eliminação do corte?

(2) Como definir um procedimento de normalização geral para as regras esquemáticas de introdução e eliminação de Schröder-Heister [43]?

Nesta tese, seguiremos de perto a ordem de apresentação dos conceitos da tese de Prawitz [38], pois consideramos ser a estratégia mais adequada. Assim, em conformidade com os objetivos da Teoria da Prova, as deduções esquemáticas serão objeto de estudo em si.

Os sistemas esquemáticos servem de modelo para definição de outros sistemas de Dedução Natural encontrados na literatura, denominados, nesta tese, de sistemas concretos. Na nossa visão, será necessário que nossas definições esquemáticas sejam independentes de definições relacionadas com sistemas concretos, pelos motivos que exporemos nos capítulos a seguir. Ressaltamos, também, que resultados obtidos no nível esquemático são válidos para sistemas concretos de Dedução Natural, por serem estes sistemas casos particulares daqueles. Para ilustrar, citamos a prova do Teorema de Normalização Forte. Provamos o Teorema de Normalização Forte para um sistema esquemático definido neste trabalho e, dessa forma, sistemas de Dedução Natural definidos em função de regras instâncias ou definidos em função de regras equivalentes a instâncias das regras esquemáticas são garantidamente normalizáveis fortemente.

Abaixo enumeramos exemplos de sistemas modais cuja provas de normalização forte são válidas a partir de nossa prova esquemática:

a) O sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva [4] para a lógica modal intuicionística $S4$ com a constante $\Box$.

b) O sistema $CS4$ de Martins e Martins [28] para a lógica modal clássica $S4$ com as constantes $\Box$ e $\Diamond$.

c) O sistema C_{S4} de Prawitz [38] para a lógica modal clássica $S4$ com a constante lógica $\Box$.

d) O sistema $NS4$ de Medeiros [31] para a lógica modal clássica $S4$ com a constante $\Box$.

Escolhemos os sistemas de Biermann e de Paiva [4], de Prawitz [38] e de Medeiros [31] por serem referências no assunto e frequentemente citados na literatura. Com relação ao sistema de Martins e Martins, o escolhemos por ser um sistema de Dedução Natural para a lógica modal clássica com as constantes $\Box$ e $\Diamond$ para o qual a normalização fraca foi provada em [28].

Com base em nossas provas de normalização e na equivalência entre sistemas construídos a partir de nossas regras esquemáticas e sistemas definidos na literatura, mostraremos na seção 7.2 que algumas provas de normalização para estes últimos sistemas devem ser corrigidas. Como exemplo, citamos a prova da normalização fraca para o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28], a prova de normalização fraca da versão do sistema C_{S4} de Prawitz com as constantes $\Box$ e $\Diamond$ e a prova de normalização forte do sistema I de Prawitz [39].

Quanto a resultados já obtidos na Teoria Abstrata da Prova, relacionados ao tema desta tese, citamos, além do trabalho de Schroeder-Heister [43], os seguintes:

- Em [42], Schroeder-Heister propôs regras esquemáticas de introdução e de eliminação para tratamento de quantificadores arbitrários. As regras de introdução e de eliminação para os quantificadores universal e existencial são instâncias de suas regras.

- Em [7], Chi definiu sistemas abstratos em Dedução Natural, Cálculo de Sequentes e Lâmbda-Cálculo. Ela provou, também, dentre outras coisas, o Princípio da Inversão para suas regras esquemáticas, o Teorema da Normalização Fraca em Lâmbda-Cálculo e uma versão esquemática do isomorfismo de Curry-Howard.

- Em [44], Schroeder-Heister definiu regras esquemáticas utilizando Cálculo de Sequentes.

- Em [18], Haeusler definiu um Gerador de Provadores de Teoremas corretos e completos baseado em regras esquemáticas.

- Em [37], Poupel e Pereira formalizaram as regras de Schroeder-Heister definidas em [43] utilizando Teoria das Categorias.

- Em [19], Haeusler e Pereira definiram um sistema esquemático em Lâmbda-Cálculo isomorfo ao sistema de Schroeder-Heister definido em [43].

- [2]: Avron formalizou a idéia de regras-hipóteses em Cálculo de Sequentes.

Da lista de referências apresentada acima, destacamos o trabalho de Haeusler [18]. Ele definiu um sistema de Dedução Natural em função de uma versão das regras esquemáticas de Chi para especificar um Gerador de Provadores de Teoremas. Hauesler definiu uma linguagem de programação para especificar o seu provador e fez isso no nível esquemático, de modo que é possível construir um provador para sistemas definidos a partir de regras instâncias de suas regras esquemáticas baseando-se no caso esquemático geral.

Outro trabalho que não utiliza regras esquemáticas no estilo proposto por Prawitz mas que se relaciona com objetivos desta tese é o artigo de Paulson [33],[34] no qual ele expõe uma metalógica que fundamenta o provador de teoremas Isabelle. Ele utiliza um fragmento da lógica de alta ordem (HOL) [33] como base para o provador de teoremas e propõe uma generalização da estratégia de resolução. A sua metalógica permite que regras de inferência de lógicas denominadas de lógicas-objeto sejam tratadas como axiomas. Ele prova também a corretude e completude do seu provador com relação às lógicas-objeto. Assim, exibindo, sob certo aspecto, uma estratégia similar ao que pretendemos e expomos nesta tese, a sua aplicação permite trabalhar com lógicas que se beneficiam da especificação de um método de resolução único, no seu caso, definido em uma metalógica de alta ordem.

No nosso caso, conforme mostraremos na seção 6.2, proporemos um normalizador de deduções em sistemas de Dedução Natural definidos em função de regras instâncias de nossas regras esquemáticas. Primeiramente definiremos um mapeamento entre as fórmulas da dedução apresentada ao normalizador e as fórmulas esquemáticas. Depois construiremos uma dedução esquemática correspondente à dedução apresentada ao normalizador. Por fim, se valendo de nossa prova de normalização fraca para um dos sistemas esquemáticos definidos nesta tese, encontraremos uma prova normal para a dedução esquemática e construiremos uma dedução normal correspondente à prova originalmente apresentada ao normalizador por meio do mapeamento comentado acima.

A seguir, destacamos os objetivos principais desta tese e descrevemos como este trabalho está organizado. Os objetivos principais são:

a) Definir regras esquemáticas.

b) Definir sistemas de Dedução Natural baseando-se nas regras esquemáticas e, exclusivamente, em conceitos esquemáticos.

c) Provar os Teoremas de Normalização Fraca e Forte para os sistemas esquemáticos propostos.

d) Determinar condições suficientes para a normalização de sistemas de Dedução Natural concretos.

e) Comparar as provas de normalização forte e fraca de sistemas concretos definidos a partir de instâncias de nossas regras esquemáticas com provas de sistemas concretos equivalentes encontradas na literatura.

f) Definir um procedimento que normaliza deduções em sistemas concretos definidos a partir de regras instâncias de nossas regras esquemáticas.

Finalizando, expomos como esta tese está organizada. No capítulo 2, definiremos conceitos preliminares utilizados no restante da tese, apresentaremos as regras esquemáticas definidas por Prawitz em [40] e por Chi em [7] e definiremos os sistemas esquemáticos de Dedução Natural S e S'. No capítulo 3, mostraremos exemplos de sistemas de Dedução Natural concretos definidos em função de regras instâncias das regras que definem S. No capítulo 4, provaremos a normalização fraca para os sistemas S e S' e, no capítulo 5, provaremos um Teorema de Normalização Forte para o sistema S. No capítulo 6, apresentaremos um procedimento para normalizar deduções que se baseia na prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema S' e, no capítulo 7, analisaremos condições suficientes para normalização de sistemas e relacionaremos resultados encontrados na literatura com nossos resultados esquemáticos. Na conclusão, sumarizaremos esta tese e exporemos trabalhos futuros.

2 SISTEMAS ESQUEMÁTICOS DE DEDUÇÃO NATURAL

Neste capítulo, apresentaremos, na seção 2.1, definições que serão utilizadas no decorrer desta tese. O nosso roteiro seguirá, de certo modo, o exposto na tese de Prawitz [38]. As definições terão como objetivo final a especificação de dois sistemas esquemáticos de Dedução Natural com base nas regras esquemáticas de Dedução Natural definidas nas seções 2.3 e 2.4.

Na seção 2.2, apresentaremos as regras esquemáticas de Prawitz [40] e de Chi [7] que servirão de base para a definição de nossas regras introduzidas nas definições 2.5 e 2.14.

Na seção 2.3, definiremos o que é o sistema esquemático de Dedução Natural S. Na seção 2.4, definiremos o sistema esquemático S' cujas regras são versões simplificadas das regras que definem o sistema S. O sistema S' servirá de base para a construção de um procedimento, apresentado na seção 6.2, que tem por objetivo normalizar deduções realizadas em sistemas de Dedução Natural concretos.

Por fim, na conclusão deste capítulo, sumarizaremos os principais resultados obtidos.

2.1 Definições Preliminares

Consideramos que algo é esquemático se ele pode ser utilizado como modelo para construção de outras entidades. As entidades construídas são denominadas concretas e herdam as propriedades do modelo esquemático utilizado. O modelo esquemático, portanto, abstrai propriedades de várias entidades concretas. Dito de outro modo, as entidades concretas são instâncias do modelo esquemático.

Como exemplo, considere C um modelo esquemático para construção de uma cadeira e que especificamos, por meio do modelo C, que uma cadeira tem, obrigatoriamente, um assento e quatro pernas para sua sustentação, e, opcionalmente, um encosto. O modelo esquemático C tem as mesmas propriedades de um subconjunto de todos os tipos de cadeiras concretas. Todas as instâncias deste modelo terão exatamente um assento e quatro pernas para sua sustentação e, além disso, poderão ou não ter um encosto.

Na nossa terminologia, o ato de instanciar regras permite a construção de regras de inferência de Dedução Natural utilizando uma linguagem dita concreta e tendo como modelo regras esquemáticas. Dizemos, nesse caso, que a regra esquemática tem um nível de abstração maior do que a regra concreta construída. Dizemos que uma regra é concreta se ela não é modelo para construção de outras regras. Dizemos que uma regra é esquemática se ela pode ser utilizada como modelo para construção de regras concretas.

Prawitz, em [38], introduz uma definição de instância diferente da que propomos nos parágrafos acima. Ele diz, por exemplo, que $(A_1, ..., A_n/A)$ é uma instância da regra de introdução da conjunção, se $(A_1, ..., A_n/A)$ tem a forma indicada pela figura da regra de introdução da conjunção. Portanto, segundo ele, $(A_1, ..., A_n/B)$ é uma instância da regra de introdução da conjunção, se $n = 2$ e B é $A_1 \wedge A_2$. No caso desta definição de Prawitz, o resultado do ato de instanciar é uma regra especificada na mesma linguagem da regra de inferência original. Dizemos que regras construídas dessa forma são instâncias horizontais e denominamos de instâncias verticais as regras concretas construídas tendo como modelo regras esquemáticas.

Sistemas esquemáticos de Dedução Natural são definidos em função de regras de inferência esquemáticas que utilizam uma linguagem esquemática. Sistemas concretos de Dedução Natural são definidos em função de regras concretas instanciadas verticalmente a partir de regras esquemáticas e utilizam linguagem concreta. Citamos, como exemplo de um sistema concreto de Dedução Natural, o sistema de Dedução Natural para a lógica intuicionística definido por Prawtiz em [38].

Informalmente, deduções esquemáticas são obtidas de modo semelhante ao modo como deduções são obtidas nos sistemas definidos por Prawitz em [38]. Iniciamos uma dedução esquemática inferindo uma consequência a partir de hipóteses por meio de uma regra esquemática. Assim como Prawitz, indicamos esta inferência escrevendo as hipóteses sobre uma linha horizontal e a fórmula inferida imediatamente abaixo desta linha. A partir desta fórmula inferida e de outras fórmulas inferidas de modo similar, ou mesmo de outras hipóteses, inferimos uma nova consequência aplicando uma regra de inferência esquemática. Continuando desta forma, obtemos uma configuração final que tem o formato de uma árvore de fórmulas onde as folhas são chamadas de hipóteses e a raiz é a conclusão da dedução. Nas seções 2.3 e 2.4, formalizaremos os conceitos de dedução esquemática para os sistemas S e S', respectivamente.

As noções de ocorrência de fórmulas esquemáticas, de fórmulas esquemáticas ocorrendo imediatamente acima de uma fórmula, de fórmulas esquemáticas ocorrendo imediatamente abaixo de uma fórmula, de fórmula esquemática acima de uma fórmula, de fórmula esquemática abaixo de uma fórmula são obtidas diretamente da explicação informal de dedução esquemática.

Usaremos a letra grega Π para representar uma árvore de fórmulas e Σ para uma sequência de árvores de fórmulas.

Duas ocorrências de fórmula esquemática têm o mesmo formato (*shape*) se elas são ocorrências da mesma fórmula esquemática. Dizemos que dois conjuntos de fórmulas esquemáticas têm o mesmo formato, se suas fórmulas têm o mesmo formato.

As definições de descarte e de dependência de hipóteses são similares as de Prawitz [38]. Conjuntos de fórmulas esquemáticas podem ser descartados. Neste caso, todas as fórmulas esquemáticas que os compõem são descartadas na aplicação de uma mesma regra.

'$[\alpha]$' significa uma ou mais hipóteses ou conjunto de hipóteses de mesmo formato de α, no caso de α ser uma fórmula, ou de mesmo formato das fórmulas que pertencem a α, no caso de α ser um conjunto de fórmulas. Hipóteses ou conjuntos de hipóteses marcados com um rótulo a como, por exemplo, em '$[\alpha]^a$' são descartados na aplicação de uma regra marcada também com a letra a.

Uma fórmula esquemática folha é uma ocorrência de fórmula que não está imediatamente abaixo de nenhuma outra. Uma fórmula esquemática final é uma ocorrência de fórmula esquemática que não está imediatamente acima de nenhuma outra.

Por fim, se E é uma fórmula esquemática em Π, a subdedução esquemática de Π determinada por E é a árvore obtida de Π a partir da remoção de suas ocorrências de fórmulas esquemáticas com exceção de E e das demais fórmulas esquemáticas acima de E.

2.2 Regras Esquemáticas de Prawitz e de Chi

Nesta seção, mostraremos as regras esquemáticas de Prawitz e de Chi. Prawitz pretendia, prioritariamente, provar a completude dos operadores proposicionais intuicionísticos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ com relação aos que podiam ser caracterizados pelas regras esquemáticas que ele definiu [40], conforme comentamos na introdução desta tese. O seu esquema de eliminação, porém, não era forte o suficiente para ter a regra de eliminação da implicação como instância, como Schroeder-Heister expôs em [41].

Em [43], Schroeder-Heister modificou as regras esquemáticas de Prawitz, possibilitou o uso de regras como hipóteses, estendendo o formalismo de Dedução Natural, e provou a completude dos operadores intuicionísticos. Além disso, a regra de eliminação da implicação usual é instância de sua regra esquemática de eliminação. Chi, em [7], propôs regras esquemáticas de introdução e de eliminação que não utilizam regras como hipóteses, mas que são instanciadas corretamente pela regra de eliminação da implicação. Ela provou também a completude dos operadores intuicionísticos para uma versão do sistema proposto por Schroeder-Heister [43] que utiliza regras como hipóteses. Mostraremos abaixo as regras de introdução e eliminação de Prawitz, o problema com sua regra esquemática de eliminação e a regra esquemática de eliminação de Chi.

Prawitz formalizou s regras esquemáticas de introdução e uma regra esquemática de eliminação para o operador esquemático Φ. As s regras de introdução, para $s \geq 0$, são da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{ccccc} [H^i_{1,1}]^a..[H^i_{1,l}]^a..[H^i_{1,h^i_1}]^a & & [H^i_{j,1}]^a..[H^i_{j,l}]^a..[H^i_{j,h^i_j}]^a & & [H^i_{p_i,1}]^a..[H^i_{p_i,l}]^a..[H^i_{p_i,h^i_{p_i}}]^a \\ \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} & .. & \dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j} & .. & \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}} \end{array}}{\Phi(F_1, .., F_k, .., F_n)} \Phi I_{(a)} \qquad (1),$$

onde $i = 1, .., s$, j=1,..,p_i e l=1,..,h^i_j, e F_i, G^i_j e $H^i_{j,k}$ são fórmulas esquemáticas definidas por variáveis sintáticas para sentenças e por operadores sentenciais. Note que, diferentemente de nossa definição introduzida em 2.2, na abordagem de Prawitz, operadores sentenciais fazem parte da definição de suas fórmulas esquemáticas. No nosso entendimento, esta abordagem de Prawitz mistura noções esquemáticas e concretas dentro do contexto esquemático. Com relação ao nossos objetivos, em especial com relação ao estudo prova-teórico de sistemas esquemáticos de Dedução Natural definidos com base em noções exclusivamente esquemáticas, optamos por definições de fórmulas esquemáticas mais precisas e diferentes destas apresentadas por Prawitz, conforme introduziremos na definição 2.2. Vale ressaltar, porém, que para os resultados de completude de operadores pretendidos por Prawitz suas definições nos parece a mais adequada.

A regra

$$\frac{\alpha_1^1 \quad \alpha_2^1}{\wedge(\alpha_1^1, \alpha_2^1)} \wedge I \qquad (2)$$

é uma regra de inferência que está, na terminologia de Prawtiz [40], *de acordo* com a regra esquemática de introdução (1), onde Φ=$\wedge$, s=1, p_1=2, $h_1^1 = h_2^1$=0, G_1^1=F_1=α_1^1 e G_2^1=F_2=α_2^1. Chi diz que a regra (2) é uma instância da regra (1). Apesar de não ficar claro, no nosso entendimento, o que Chi denomina de *instanciar* e o que Prawitz quer dizer quando menciona que uma determinada regra está *de acordo* com outra, utilizamos no restante deste capítulo o termo instanciar para a construção de regras do tipo (2) a partir de regras do tipo (1). Ressaltamos também, que, conforme comentamos na introdução, na nossa terminologia, a regra (2) é uma instância concreta da regra (1) e definimos o conceito de regra concreta na seção 3.1.

O esquema de introdução de Prawitz, de um modo geral, mostra que a introdução de operadores proposicionais segue de premissas que podem ser deduzidas de hipóteses descartadas ou não pela aplicação de uma regra. A regra de introdução da implicação definida usualmente, como por exemplo em Prawitz [38], é um exemplo de regra cujo formato está de acordo com formato da regra esquemática de introdução.

Com relação à regra esquemática de eliminação definida por Prawitz, nos parece razoável afirmar que ela teve como modelo inspirador a regra de eliminação da disjunção, definida como por exemplo em Prawitz [38]. Mostramos abaixo a regra esquemática de eliminação de Prawitz:

$$\frac{\Phi(F_1, \ldots\ldots, F_n) \quad \begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \hline F\end{array} \ldots\ldots \begin{array}{c}\Gamma_i\\ \Sigma_i\\ \hline F\end{array} \quad \ldots\ldots \quad \begin{array}{c}\Gamma_s\\ \Sigma_s\\ \hline F\end{array}}{F} \Phi E \qquad (3).$$

Na regra (3) mostrada acima, cada uma das s deduções que concluem a ocorrência de fórmula F está vinculada a uma regra de introdução de $\Phi(F_1, \ldots., F_n)$ da seguinte forma: hipóteses que ocorrem sobre a i-ésima ocorrência de fórmula F podem ser descartadas se forem da forma $\bigwedge_{k\leq h_1^i} H_{1,k}^i \rightarrow G_1^i, ..., \bigwedge_{k\leq h_{p_i}^i} H_{p_i,k}^i \rightarrow G_{p_i}^i$, para $G_{p_i}^i$ e $H_{p_i,h_{p_i}^i}^i$ definidos como em (1) e onde $\bigwedge$ é uma iteração de conjunções. Além disso, se $h_j^i = 0$, então a iteração de conjunções de implicações é substituída pelo consequente G_j^i da implicação.

Abaixo, mostramos uma regra instância de (3):

$$\cfrac{\wedge(\alpha_1^1, \alpha_2^1) \qquad \begin{array}{c} [\alpha_1^1]^a \quad [\alpha_2^1]^a \\ \Sigma_1 \\ \hline \beta \end{array}}{\beta} \wedge E_{(a)},$$

onde $s = 1$, $p_1 = 2$, $h_1^1 = h_2^1 = 0$, $G_1^1 = F_1 = \alpha_1^1$, $G_2^1 = F_2 = \alpha_2^1$ e $F = \beta$.

Note, entretanto, que a regra de eliminação da implicação obtida como instância da regra esquemática de eliminação mostrada em (3) não é uma regra de eliminação propriamente dita, mas uma versão em Dedução Natural da regra do corte:

$$\cfrac{\rightarrow(\alpha_{1,1}^1, \alpha_1^1) \qquad \begin{array}{c} [\rightarrow(\alpha_{1,1}^1, \alpha_1^1)]^a \\ \Sigma \\ \hline \beta \end{array}}{\beta} \rightarrow E_{(a)}.$$

Em [7], Chi define regras esquemáticas de modo que todas as regras de inferência de um sistemas de Dedução Natural para a lógica proposicional intuicionística são suas instâncias, incluindo a eliminação da implicação. A sua regra esquemática de introdução é igual à definida por Prawitz, enquanto sua regra esquemática de eliminação é formalizada por:

$$\cfrac{\Phi(F_1, ., F_k, .., F_n) \quad H_{1,1}^1 .. H_{j,h_j^i}^i .. H_{p_s,h_{p_s}^s}^s \quad \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \hline F \end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c} \Gamma_i \\ \Sigma_i \\ \hline F \end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c} \Gamma_s \\ \Sigma_s \\ \hline F \end{array}}{F} \Phi E,$$

onde as fórmulas F_k, $H_{j,h_j^i}^i$, F e os índices i, k, j e l são definidos como na regra esquemática de introdução (1) e as hipóteses G_j^i que podem ocorrer em Γ_i são descartáveis pela aplicação da regra.

A regra de eliminação de Chi tem o formato usual da regra de eliminação da implicação e da regra de eliminação da disjunção, como definidas, por exemplo, em [38]. Note que a regra esquemática de eliminação de Chi tem como instância a regra de eliminação da implicação apresentada abaixo que é equivalente à regra de mesmo nome definida por Prawitz em [38]:

$$\dfrac{\to(\alpha^1_{1,1},\alpha^1_1) \quad \alpha^1_{1,1} \quad \begin{matrix}[\alpha^1_1]^a \\ \Sigma \\ \beta\end{matrix}}{\beta} \to E_{(a)}.$$

2.3 Sistema Esquemático de Dedução Natural S

Nesta seção, estenderemos as regras esquemáticas de Chi e proporemos três grupos de regras esquemáticas: a) regras de introdução; b) regras de eliminação; e c) regras para o absurdo.

Utilizaremos as regras de Chi como base para nossa proposta, pois a formalização de Schroeder-Heister é mais complexa por usar regras como hipóteses e por buscar resultados de completude de operadores, o que não é o nosso propósito. Lembramos, também, que sistemas de Dedução Natural usualmente não permitem o uso de regras como hipóteses e, portanto, utilizar o padrão de Chi, de certo modo, facilitará comparações entre sistemas concretos definidos em função de nossas regras esquemáticas e sistemas definidos na literatura.

A linguagem esquemática L_E será utilizada na especificação das regras esquemáticas. Ela contém, como constantes lógicas, os conectivos esquemáticos sentenciais Φ e ξ de aridades, respectivamente, n e 1 e a constante sentencial para o absurdo esquemático τ. Além disso, ela inclui símbolos proposicionais esquemáticos K, com e sem índices.

Em nossa abordagem, conforme comentamos na introdução, as definições esquemáticas são independentes das definições concretas. Por este motivo optamos por utilizar uma notação sintática diferente do $\perp$ para o absurdo esquemático porque o $\perp$, como veremos à frente neste capítulo, é uma constante sentencial para o absurdo que pode fazer parte de uma linguagem concreta.

Fórmulas esquemáticas atômicas e fórmulas esquemáticas são definidas do seguinte modo:

Definição 2.1. ***(Fórmula Esquemática Atômica)*** *E é uma fórmula esquemática atômica em L_E se, e somente se, E é um símbolo proposicional ou E é τ.*

Definição 2.2. ***(Fórmula Esquemática)*** *Uma fórmula esquemática E é definida indutivamente por:*

a) Uma fórmula atômica em L_E é uma fórmula esquemática.

b) Se E é uma fórmula esquemática, então ξE é uma fórmula esquemática.

c) Se $E_1, .., E_n$ são fórmulas esquemáticas, então $\Phi(E_1, .., E_n)$ é uma fórmula esquemática.

As letras E, F, G, H, I e J, com ou sem índices, são utilizadas para representar fórmulas esquemáticas. As letras gregas Δ, Γ, Ξ e Λ representam conjuntos de fórmulas esquemáticas.

Seja E uma fórmula esquemática não atômica. Então E é da forma ξE_1 ou da forma $\Phi(E_1, .., E_n)$ e ξ e Φ, respectivamente, são suas constantes lógicas principais. Se ξ é a constante lógica principal de uma fórmula esquemática E, então dizemos que E é uma fórmula esquemática negativa. Se a constante lógica Φ é a constante lógica principal de uma fórmula esquemática E, então dizemos que E é uma fórmula esquemática positiva.

Definição 2.3. ***(Subfórmula Esquemática)*** *A noção de subfórmula esquemática é definida indutivamente por:*

a) Seja E uma fórmula esquemática, então E é subfórmula esquemática de E.

b) Se $\Phi(E_1, .., E_k, .., E_n)$ é subfórmula esquemática de E, então $E_1, .., E_k, .., E_n$ são subfórmulas esquemáticas de E.

c) Se ξE é subfórmula esquemática de E_1, então E é subfórmula esquemática de E_1.

O conjunto das subfórmulas esquemáticas próprias de uma fórmula esquemática E é o conjunto das subfórmulas esquemáticas de E menos E.

Definição 2.4. ***(Grau de uma Fórmula)*** *O grau de uma fórmula E é definido como o número de constantes lógicas esquemáticas em E, excetuando-se a constante lógica τ.*

As figuras de regras esquemáticas consistem de uma introdução e de uma eliminação para as constantes esquemáticas Φ e ξ. Além disso, há duas figuras de regras para o absurdo esquemático τ, uma para permitir que sistemas de Dedução Natural concretos para a lógica clássica sejam instâncias de nosso sistema esquemático e outra para permitir que sistemas de Dedução Natural concretos para a lógica intuicionística sejam instâncias de nosso sistema esquemático. Assim, conforme introduziremos na definição 2.9, o sistema esquemático de Dedução Natural S será definido em função das seguintes figuras de regras esquemáticas mostradas abaixo:

Definição 2.5. ***(Regras Esquemáticas)*** *As regras são indicadas abaixo pelas figuras 1 a 6:*

a) regras de introdução:

1) s regras esquemáticas de introdução, onde o índice i varia de 1 *a s. Abaixo mostramos a i-ésima regra:*

$$\dfrac{\Delta_1^i \quad .. \quad \Delta_{p_i}^i \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_1^i]^a\,[\Delta_1^i]^a \\ \Sigma_1^i\end{matrix}}{G_1^i} \qquad .. \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_j^i]^a\,[\Delta_j^i]^a \\ \Sigma_j^i\end{matrix}}{G_j^i} \qquad .. \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_{p_i}^i]^a\,[\Delta_{p_i}^i]^a \\ \Sigma_{p_i}^i\end{matrix}}{G_{p_i}^i}}{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_s,h_{p_s}^s}^s, G_1^1, .., G_{p_s}^s)}\ \Phi I_{(a)} \qquad (4).$$

A regra i tem p_i premissas e, além disso:

a) Ξ_j^i é um conjunto finito de fórmulas esquemáticas $H_{j,1}^i, .., H_{j,l_1}^i, .., H_{j,h_j^i}^i$, para $h_j^i \geq 0$, que podem ser descartadas pela aplicação da regra;

b) Δ_j^i é um conjunto finito de fórmulas esquemáticas $E_{j,1}^i, .., E_{j,l_2}^i, .., E_{j,e_j^i}^i$, para $e_j^i \geq 0$, que também podem ser descartadas pela aplicação da regra.

2) Regra esquemática de introdução da negação:

$$\dfrac{\begin{matrix}[H]^a \\ \Sigma \\ \top\end{matrix}}{\xi H}\ \xi I_{(a)}.$$

b) Regras de eliminação:

3) Regra esquemática de eliminação:

$$\dfrac{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_s,h_{p_s}^s}^s, G_1^1, .., G_{p_s}^s) \quad \Lambda^1..\Lambda^s\Xi_1^1..\Xi_{p_s}^s \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^1]^a[G_1^1]^a..[G_{p_1}^1]^a \\ \Sigma^1\end{matrix}}{F} \qquad .. \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^s]^a[G_1^s]^a..[G_{p_s}^s]^a \\ \Sigma^s\end{matrix}}{F}}{F}\ \Phi E_{(a)}\ (5),$$

onde:

a) Λ^i *é um conjunto finito de fórmulas esquemática* $M_1^i, .., M_{l_5}^i, .., M_{m^i}^i$*, para* $m^i \geq 0$*, que podem ser descartadas pela aplicação da regra.*

4) Regra esquemática de eliminação da negação:

$$\frac{\xi H \quad H}{\tau} \; \xi E_{(a)}.$$

c) Regras para o absurdo:

5) Regra esquemática para o absurdo clássico:

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\xi H]^a \\ \Sigma \\ \tau\end{array}}{H} \; \tau_{c_{(a)}}.$$

6) Regra esquemática para o absurdo intuicionístico:

$$\frac{\tau}{H} \; \tau_i.$$

Denominamos de premissas esquemáticas intermediárias as fórmulas esquemáticas do conjunto Δ_j^i da regra esquemática de introdução. As demais ocorrências de fórmulas que ocorrem imediatamente acima da linha de inferência denominamos de premissas. Dizemos que as premissas intermediárias dos conjuntos Δ_j^i estão associadas à premissa j da regra i. As premissas G_j^i das regras esquemáticas de introdução podem depender das fórmulas esquemáticas dos conjuntos Ξ_j^i e Δ_j^i e de outras hipóteses denominadas hipóteses permissíveis. Cada regra esquemática de introdução é composta de quantidades finitas não definidas de premissas intermediárias, de hipóteses intermediárias, de premissas, de hipóteses permissíveis e de hipóteses que podem ser descartadas pela aplicação da regra. Conforme podemos verificar no item $a.1$) da definição 2.5 introduizida acima, existe uma quantidade s finita não definida de regras esquemáticas de introdução.

A conclusão de nossa regra esquemática de introdução, a fórmula esquemática $\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_s,h_{p_s}^s}^s, G_1^1, .., G_{p_s}^s)$, é diferente da conclusão da regra esquemática de introdução de Prawitz [40] e Chi [7], nestes casos, a fórmula esquemática $\Phi(F_1, .., F_n)$. Diferentemente de nossa abordagem, Chi [7] e Prawitz [40] garantiram que as premissas e hipóteses de sua regra esquemática de introdução, vide item $a.1$) da definição 2.5 acima, são subfórmulas da conclusão por meio da checagem do resultado da instanciação de fórmulas esquemáticas. Ou seja, eles definiram uma relação de subfórmula que existe entre a conclusão de sua regra esquemática de introdução e as premissas e hipóteses utilizando níveis de abstração distintos [1]. Com o nosso formato, garantimos que as hipóteses esquemáticas que podem ser descartadas e as premissas esquemáticas utilizadas na i-ésima regra esquemática de introdução são subfórmulas esquemáticas próprias da conclusão. Além disso, o grau da fórmula esquemática que é conclusão da aplicação da regra é maior do que os graus das premissas e das hipóteses descartáveis. Esses fatos possibilitaram o estudo prova-teórico de sistemas esquemáticos em um nível de abstração que independem de conceitos que pertencem ao contexto do estudo prova-teórico de sistemas instâncias de regras esquemáticas, pois, do contrário, não teríamos, por exemplo, como garantir que o Índice de uma Dedução[2] diminuirá após a aplicação de uma redução, como mostraremos na prova do Lema 4.23 na seção 4.2.

Todas as premissas e hipóteses de todas as s regras esquemáticas fazem parte da definição da fórmula $\Phi(H^1_{1,1}, .., H^s_{p_s,h^s_{p_s}}, G^1_1, .., G^s_{p_s})$ que é conclusão de uma i-ésima regra esquemática de introdução qualquer. A regra para introdução da disjunção do sistema intuicionístico definido por Prawitz [38], por exemplo, é um exemplo concreto onde isto também ocorre.

No nosso esquema de introdução, mantemos a mesma intuição por trás das regras esquemáticas de introdução de Prawitz, ou seja, a introdução de conectivos lógicos segue de premissas que podem ser deduzidas de hipóteses descartadas ou não pela aplicação de uma regra. Além disso, o padrão de nossas regras esquemáticas de introdução assemelha-se ao padrão da regra *Promotion* definida por Bierman em [5] para um sistema de Dedução Natural para a lógica linear e da regra definida por Bierman e de Paiva [4] de introdução do operado modal para a necessidade, o operador $\Box$. Mostramos abaixo estas duas regras. Acreditamos que, dessa forma, obtemos uma quantidade maior de sistemas instâncias de nossas regras esquemáticas do que, por exemplo, a quantidade obtida a partir da instanciação das regras de Chi [7].

[1] Conforme já comentamos, Prawitz não define de modo claro, no nosso entendimento, o que é uma instância de sua regra esquemática. A nossa interpretação do seu texto descrito em [40] nos levou a conclusão descrita nesse parágrafo.

[2] A noção de Índice de uma Dedução será introduzida na definição 4.19.

Regra de Bierman:

$$\dfrac{!A^1_{1,1} \quad \ldots !A^1_{1,e^1_1} \qquad \begin{array}{c}[!A^1_{1,1}]^a \ldots [!A^1_{1,e^1_1}]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \hline A\end{array}}{!A}\ Promotion_{(a)}$$

Regra de Bierman e de Paiva:

$$\dfrac{\Box A^1_{1,1} \quad \ldots \Box A^1_{1,e^1_1} \qquad \begin{array}{c}[\Box A^1_{1,1}]^a \ldots [\Box A^1_{1,e^1_1}]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \hline A\end{array}}{\Box A}\ \Box I_{(a)}$$

Como consequência de nossa abordagem descrita acima, regras concretas instanciadas com base em nossa regra esquemática de introdução podem utilizar premissas que dependem exclusivamente de fórmulas de determinados formatos. A regra $\Box I$ mostrada acima é um exemplo de regra que pode ser construída a partir de nossas regras esquemáticas e cujas premissas dependem exclusivamente de ocorrências de fórmula de formato $\Box A$, para uma fórmula A qualquer. Na seção 3.2.3, mostraremos outros exemplos de regras que têm esta característica descrita nesse parágrafo.

Com relação à regra esquemática de introdução da negação, denominamos a fórmula esquemática H de hipótese descartada pela aplicação da regra, τ de premissa e ξH de conclusão da aplicação da regra.

De forma similar ao que foi dito para a regra esquemática de introdução, utilizamos nas regras esquemáticas de eliminação, além dos formatos usuais da eliminação da disjunção e da eliminação da implicação como definidas por Prawitz em [38], o padrão da regra *Promotion* de Bierman e de Paiva [5]. Regras instâncias construídas com base na regra esquemática de eliminação podem utilizar premissas que dependem de fórmulas de determinados formatos, como por exemplo, a regra de eliminação do operador modal $\Diamond$ de Bierman e de Paiva [4] mostrada abaixo:

$$\dfrac{\Diamond A \quad \Box B^1_1, .., \Box B^1_{m^1} \qquad \begin{array}{c}[\Box B^1_1]^a \ldots [\Box B^1_{m^1}]^a \quad [A]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \hline B\end{array}}{B}\ \Diamond E_{(a)}$$

Também como ocorre com relação à regra esquemática de introdução, a utilização do padrão da regra *Promotion* na regra esquemática de eliminação implica que o formato de suas instâncias são diferentes dos formatos das regras de eliminação usuais e obtemos, provavelmente, uma quantidade maior de sistemas instâncias de nossas regras esquemáticas do que, por exemplo, obtemos a partir das regras de Chi.

Denominamos a fórmula esquemática $\Phi(H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},G^1_1,..,G^s_{p_s})$ da regra esquemática de eliminação de premissa maior. Denominamos as fórmulas $M^i_1,..,M^i_{l_5},..,M^i_{m^i}$ do conjunto Λ^i de premissas esquemáticas intermediárias. Dizemos que as premissas intermediárias do conjunto Λ^i estão associados a i-ésima premissa menor. As fórmulas esquemáticas do conjunto Λ^i podem ser descartadas pela aplicação da regra e são denominadas de hipóteses intermediárias. Denominamos as fórmulas esquemáticas dos conjuntos $\Xi^i_{p_i}$ de premissas menores vinculadas e as fórmulas F de premissas menores. As premissas menores da regra esquemática de eliminação não podem depender de outras fórmulas esquemáticas, além das hipóteses $G^i_{p_i}$ e das hipóteses intermediárias. A noção de Regras de Dedução para a regra esquemática de eliminação introduzida na definição 2.8 explicita esta restrição.

Na regra esquemática de eliminação da negação, denominamos a fórmula esquemática ξH de premissa maior, H de premissa menor e o τ de conclusão da aplicação da regra.

Conforme comentaremos na seção 3.1, instanciar, no nosso entendimento, significa construir uma regra concreta cujas fórmulas são definidas em uma linguagem diferente da linguagem das fórmulas da regra esquemática que serviu de modelo para sua construção. Dizemos que instâncias construídas desta forma são instancias verticais. Conforme já comentamos na seção 2.1, Prawitz, em [38], definiu um outro tipo de instanciação que utiliza a mesma linguagem das regras originais. Denominamos as instâncias definidas deste modo de instâncias horizontais e mostraremos, na seção 3.2, exemplos de tais instâncias para alguns sistemas concretos.

Definiremos abaixo como instâncias horizontais da figura da regra esquemática de introdução introduzidas na definição 2.5, item $a.1$), devem ser apresentadas e, na seção 3.1, definiremos procedimentos para construção de suas instâncias verticais. A definição de instâncias horizontais para as demais regras esquemáticas é feita de modo similar.

Definição 2.6. ***(Instância Horizontal da Regra esquemática de Introdução)*** *Dizemos que* $(E_1,....,E_n/E)$ *é uma instância horizontal de uma regra esquemática de* *introdução, a i-ésima regra, por exemplo, para* $n = n_1 + p_i$, $n_1 = \sum_{j=1}^{p_i} e_j^i$, E_i *e* E *fórmulas esquemáticas, se* $(E_1, ..., E_n/E)$ *tem a forma da figura da regra esquemática de introdução. Portanto, dizemos que* $(E_1, ..., E_n/E)$ *é uma instância da regra esquemática de introdução se:*

a) $E_1, .., E_{n_1}$ *são premissas intermediárias esquemáticas;*

b) $E_{n_1+1}, .., E_{n_1+p_i}$ *são premissas esquemáticas.*

c) E *é uma fórmula esquemática e tem a forma* $\Phi(E_1^{'}, .., E_{m'}^{'}, E_1^{''}, .., E_{m''}^{''}, E_{n_1+1}, .., E_{n_1+p_i}, E_1^{'''}, .., E_{m'''}^{'''})$, *onde:*

c.1) $E_1^{'}, .., E_{m'}^{'}$ *são fórmulas esquemáticas que podem ou não ser descartadas por todas as s regras que são instâncias horizontais da regra esquemática de introdução que tem como conclusão* E*.*

c.2) $E_1^{''}, .., E_{m''}^{''}$ *são as premissas esquemáticas das regras* $1,..,i-1$ *que são instâncias horizontais da regra esquemática de introdução e que tem como conclusão* E*.*

c.3) $E_1^{'''}, .., E_{m'''}^{'''}$ *são as premissas esquemáticas das regras* $i+1,..,s$ *que são instâncias horizontais da regra esquemática de introdução e que tem como conclusão* E*.*

Dizemos que as fórmulas E_1,..,E_n, para $n > 0$, que são premissas de uma instância horizontal de uma regra esquemática introduzida na definição 2.5, são vizinhas uma das outras, ou seja, A_i é vizinha de A_j, para $i, j \leq n$ e i diferente de j.

As instâncias horizontais da regra esquemática de introdução têm uma quantidade fixa não definida de premissas intermediárias e de premissas. O mesmo ocorre nas instâncias da regra esquemática de eliminação com relação a premissas menores vinculadas, premissas menores e premissas intermediárias.

As hipóteses que podem ser descartadas e premissas de todas as instâncias horizontais da regra esquemática de introdução que concluem uma fórmula esquemática E fazem parte da definição da fórmula esquemática E. Exemplificamos abaixo como isso ocorre, utilizando regras concretas para facilitar a explicação.

Considere as instâncias horizontais concretas, $(A_1/ \vee (A_1, A_2))$ e $(A_2/ \rightarrow (A_1, A_2))$, respectivamente, das regras de introdução da disjunção e da implicação, como definidas em Prawitz [38]. Com relação à instância $(A_1/\vee(A_1, A_2))$, observe que a fórmula

A_2 está na definição de sua conclusão, mas também é premissa desta outra instância $(A_2/\vee(A_1, A_2))$ da regra de introdução de $A_1 \vee A_2$.

Com relação à instância $(A_2/\to(A_1, A_2))$ da introdução da implicação, note que não temos como saber se a hipótese A_1 foi descartada ou não pela aplicação da regra.

Considere, neste outro exemplo apresentado a seguir, que exista na linguagem de uma lógica concreta qualquer, o conectivo lógico concreto $\longmapsto$ definido por estas duas figuras de regra de introdução:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^a\\ \Sigma\\ C\end{array}}{\longmapsto(A,B,C,D)} \longmapsto I_{(a)} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[B]^a\\ \Sigma\\ D\end{array}}{\longmapsto(A,B,C,D)} \longmapsto I_{(a)}.$$

Sejam, respectivamente, $(B_1/\longmapsto(A_1, A_2, B_1, B_2))$ e $(B_2/\longmapsto(A_1, A_2, B_1, B_2))$ duas instâncias horizontais. De modo similar ao que comentamos com relação às regras para introdução da disjunção e da implicação, a premissa B_2 e a hipótese A_2 da segunda instância também faz parte da definição da fórmula que é conclusão da primeira instância. Fato semelhante ocorre com relação a B_1 e A_1. Além disso, não é possível sabermos se as hipóteses A_1, na primeira instância, e A_2, na segunda instância, foram ou não descartadas pela aplicação da regra.

Explicação semelhante pode ser realizada com relação às instâncias horizontais das regras esquemáticas de introdução. Por este motivo, dizemos que as regras esquemáticas de introdução são regras esquemáticas impróprias porque podem descartar hipóteses, porém esta informação não pode ser recuperada a partir da análise de suas instâncias horizontais.

Além da regra esquemática de introdução, as regras esquemáticas de eliminação, do absurdo clássico e a regra para introdução da negação também são impróprias. As regras esquemáticas para eliminação da negação e absurdo intuicionístico não descartam hipóteses, portanto, suas instâncias horizontais as definem completamente e são denominadas de regras esquemáticas próprias.

Note, porém, que uma regra concreta pode ser própria mesmo sendo uma instância vertical de uma regra esquemática imprópria. Para tanto, basta que ela tenha sido construída sem que haja descarte de hipóteses utilizadas em deduções de suas premissas.

Por existirem regras de inferências impróprias, conforme explicamos nos parágrafos acima, definimos o conceito de regras de dedução esquemáticas. Uma regra de dedução esquemática é uma regra que permite que uma fórmula esquemática seja concluída a partir de premissas que também são deduções. Lembramos que na definição 2.5 introduzimos as definições de *figuras* de regras esquemáticas. De modo similar ao feito por Prawitz em [38] com relação às suas regras de inferência, a partir das figuras das regras definimos suas instâncias esquemáticas horizontais e, conforme explicamos nos parágrafos acima, não é possível, a partir das instâncias esquemáticas horizontais associadas às figuras de algumas regras, inferir a dependência entre sua conclusão e suas hipóteses.

Abaixo definimos como instâncias de regras de dedução esquemáticas para a regra de introdução e de eliminação devem ser especificadas. Definimos instâncias de regras de dedução esquemáticas para as regras esquemáticas de introdução da negação e absurdo clássico de modo similar. Denominamos as regras de dedução esquemáticas para a regra de introdução de regras de dedução esquemáticas de introdução. De modo similar, denominamos as regras de dedução esquemáticas para a regra de eliminação de regras de dedução esquemáticas de eliminação.

Definição 2.7. ***(Instância de uma Regra de Dedução esquemática de Introdução)***

A forma de uma instância da regra de dedução esquemática de introdução deve ser especificada por:

ΦI:$<< \Gamma_1,\Delta_1^i >,..,< \Gamma_{p_i},\Delta_{p_i}^i >,< \Gamma_1^i,G_1^i >,..,< \Gamma_{p_i}^i,G_{p_i}^i >,$
$< \Delta,\Phi(H_{1,1}^1,..,H_{p_s,h_{p_s}^s}^s,G_1^1,..,G_{p_s}^s) >>$, *onde* $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{p_i} \cup (\Gamma_1^i - \{\Xi_1^i,\Delta_1^i\}) \cup .. \cup (\Gamma_{p_i}^i - \{\Xi_{p_i}^i,\Delta_{p_i}^i\})$ *e* G_j^i *não é igual a* τ, *para* $1 \leq j \leq p_i$.

Definição 2.8. ***(Instância de uma Regra de Dedução esquemática de Eliminação)***

A forma de uma instância de uma regra de dedução esquemática de eliminação deve ser especificada por:

ΦE: $<< \Gamma,\Phi(H_{1,1}^1,..,H_{p_s,h_{p_s}^s}^s,G_1^1,..,G_{p_s}^s) >,< \Gamma'^1,\Lambda^1 >,..,< \Gamma'^s,\Lambda^s >,< \Gamma_1^1,\Xi_1^1 >,..,< \Gamma_{p_s}^s,\Xi_{p_s}^s >,< \Gamma^1,F >,..,< \Gamma^s,F >< \Delta,F >>$, *onde* $\Delta = \Gamma \cup \Gamma'^1,..,\Gamma'^s \cup \Gamma_1^1 \cup .. \cup \Gamma_{p_s}^s$

$\Delta = \Gamma \cup \Gamma'^1,..,\Gamma'^s \cup \Gamma_1^1 \cup .. \cup \Gamma_{p_s}^s$ implica que as premissas da regra esquemática de eliminação dependem exclusivamente das hipóteses, intermediárias ou não, descartáveis.

Isto ocorre, também, em todas as instâncias horizontais de suas regras concretas. Note, entretanto, que pode ser o caso de uma premissa menor de uma instância de uma regra de dedução concreta de eliminação não utilizar nenhuma hipótese intermediária ou mesmo não utilizar nenhuma hipótese. De modo análogo, é possível que uma instância de uma regra de dedução concreta de introdução não utilize nenhuma hipótese intermediária, assim como é possível que uma outra instância desta mesma regra concreta de dedução dependa exclusivamente de hipóteses intermediárias descartáveis.

Finalizamos este capítulo introduzindo as definições de sistema esquemático de Dedução Natural e de dedução esquemática:

Definição 2.9. ***(Sistema Esquemático de Dedução Natural** S**)***

O sistema esquemático de Dedução Natural S considerado neste trabalho é determinado pelas regras de dedução esquemáticas de introdução, de introdução da negação, de eliminação e do absurdo clássico, além das regras esquemáticas próprias de eliminação da negação e do absurdo intuicionístico. As regras de dedução esquemáticas de introdução, de introdução da negação, de eliminação e do absurdo clássico e as regras esquemáticas próprias de eliminação da negação e do absurdo intuicionístico são definidas em função das figuras de regra introduzidas na definição 2.5.

Definição 2.10. ***(Dedução esquemática)***

Dizemos que Π é uma dedução esquemática em S que depende das fórmulas de um conjunto Γ e que conclui E, se:

a) E é uma dedução de E que depende do conjunto $\{E\}$.

b) Se Π_i, para $1 \leq i \leq n$, é uma dedução de E_i que depende de Γ_i, então Π igual $\dfrac{\Pi_1..\Pi_n}{E}$ é uma dedução de E que depende de Δ, caso um dos itens abaixo sejam verdadeiros:

b.1) $(E_1, ..., E_n/E)$ é uma instância horizontal de uma regra esquemática própria e $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_n$.

b.2) $<< \Gamma_1, E_1 >, .., < \Gamma_n, E_n >, < \Delta, E >>$ é uma instância de uma regra de dedução esquemática.

Π é uma dedução esquemática no sistema S de E a partir de Γ, se, e somente se, Π é uma dedução em S de E que depende de Γ ou de um subconjunto de Γ. E é dedutível a partir de Γ no sistema S, se, e somente se, existe uma dedução em S de E a partir de Γ. Nesse caso escrevemos $\Gamma \vdash_S E$ para indicar que E é dedutível a partir de Γ em S. Por fim, uma dedução de E que depende de Γ onde Γ é um conjunto vazio é uma prova de E.

2.4 Sistema Esquemático de Dedução Natural S'

Nesta seção, definiremos o sistema esquemático de Dedução Natural S' que servirá de base para a especificação de um procedimento que normaliza deduções, conforme mostraremos na seção 6.2. Não utilizaremos o sistema S como base para a definição deste procedimento pelos motivos expostos abaixo.

A nossa prova de normalização fraca para o sistema esquemático S' se baseará em uma abordagem semelhante a que Prawitz utilizou na prova de normalização fraca para o sistema I de Dedução Natural para a lógica intuicionística [38]. A diferença entre a prova para o sistema S' e a prova para S é que, na prova da normalização para o sistema S', definimos uma ordem de escolha dos desvios que serão removidos e, portanto, uma estratégia para encontrar uma sequência de redução específica que normaliza uma dedução em S'. Por um outro lado, na prova de normalização fraca para S, mostramos apenas que *existe* uma sequência de reduções que normaliza deduções em S, mas não definimos uma estratégia de escolha de desvios a serem eliminados.

A prova da normalização do sistema S' e a identificação de uma sequência específica que normaliza uma dedução em S', portanto, possibilitará a definição do procedimento apresentado na seção 6.2 que normaliza deduções realizadas em sistemas concretos definidos em função de regras instâncias das regras que definem o sistema S'. Como trabalho futuro, pretendemos modificar a prova de normalização do sistema S para utilizar uma estratégia semelhante à utilizada na prova de normalização de S' e adaptaremos o normalizador de deduções para se basear nesta nova normalização do sistema S.

A linguagem esquemática L'_E é utilizada na especificação das regras esquemáticas do sistema S'. De modo diferente da linguagem L_E do sistema S, ela contém somente o conectivo esquemático sentencial Φ como constante lógica, além de símbolos proposicionais esquemáticos. Não há, portanto, um conectivo esquemático sentencial específico para a negação esquemática.

Fórmulas esquemáticas atômicas e fórmulas esquemáticas são definidas para o sistema S' do seguinte modo:

Definição 2.11. ***Fórmula Esquemática Atômica*** *E é uma fórmula esquemática atômica em L'_E se, e somente se, E é um símbolo proposicional esquemático ou é τ.*

Definição 2.12. ***(Fórmula esquemática)*** *Uma fórmula esquemática E é definida indutivamente por:*

a) Uma fórmula atômica em L'_E é uma fórmula esquemática.

b) Se $E_1, .., E_n$ são fórmulas esquemáticas, então $\Phi(E_1, .., E_n)$ é uma fórmula esquemática.

Definição 2.13. ***(Grau de uma Fórmula)*** *O grau de uma fórmula E é definido como o número de constantes lógicas esquemáticas em E, excetuando-se a constante lógica τ.*

As figuras de regras do sistema esquemático S', mostradas abaixo, são versões das figuras das regras esquemáticas de introdução e de eliminação do sistema S, expostas no capítulo 2, definição 2.5.

Definição 2.14. ***(Regras esquemáticas para Definição do Sistema*** S'***)*** *As regras são indicadas abaixo pelas figuras 1) e 2):*

1) s regras esquemáticas de introdução, onde o índice i varia de 1 a s. Abaixo mostramos a i-ésima regra:

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}[\Xi_1^i]^a\\ \Sigma_1^i\end{array}}{G_1^i} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi_j^i]^a\\ \Sigma_j^i\end{array}}{G_j^i} \; \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi_{p_i}^i]^a\\ \Sigma_{p_i}^i\end{array}}{G_{p_i}^i}}{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_s,h_{p_s}^s}^s, G_1^1, .., G_{p_s}^s)} \; \Phi I_{(a)}.$$

A regra i tem p_i premissas e Ξ_j^i é um conjunto finito de fórmulas esquemáticas $H_{j,1}^i, .., H_{j,l_1}^i, .., H_{j,h_j^i}^i$ que podem ser descartadas pela aplicação da regra.

2) Regra esquemática de eliminação:

$$\frac{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_s,h_{p_s}^s}^s, G_1^1, .., G_{p_s}^s) \quad \Xi_1^1..\Xi_{p_s}^s \quad \dfrac{\begin{array}{c}[G_1^1]^a..[G_{p_1}^1]^a\\ \Sigma^1\end{array}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[G_1^s]^a..[G_{p_s}^s]^a\\ \Sigma^s\end{array}}{F}}{F} \; \Phi E_{(a)}.$$

As definições de instâncias horizontais, de instâncias das regras de dedução para ΦI e ΦE e de regras esquemáticas impróprias são similares às respectivas definições para o sistema S. A diferença principal entre a forma das instâncias da regra de dedução para a regra ΦE de S e a forma das instâncias da regra de dedução para a regra ΦE de $S^{'}$ é que, neste caso, não é exigida dependência exclusiva de suas premissas menores com relação às hipóteses descartadas na aplicação da regra. O sistema esquemático de Dedução Natural $S^{'}$ é definido do seguinte modo:

Definição 2.15. ***(Sistema Esquemático de Dedução Natural*** $S^{'}$***)***

O sistema esquemático de Dedução Natural $S^{'}$ *é determinado pelas regras de dedução esquemáticas de introdução e de eliminação definidas em função das figuras de regras introduzidas na definição 2.14*

Por fim, salientamos que a definição de dedução esquemática em $S^{'}$ é similar à introduzida na definição 2.10 para o sistema S.

2.5 Conclusão

Neste capítulo, introduzimos a definição de nossas regras esquemáticas e, seguindo o mesmo roteiro de Prawitz [38] para definição de sistemas de Dedução Natural, apresentamos formalmente dois sistemas esquemáticos de Dedução Natural. A principal vantagem desta nossa abordagem é que, visto que nos baseamos em uma sequência de definições bem conhecida na literatura, futuros resultados prova-teórico relacionados a sistemas esquemáticos do tipo definidos nesta tese e novos resultados dentro da Teoria Abstrata da Prova serão, na nossa opinião, facilitados.

Nossas definições esquemáticas são independentes de definições relacionadas a sistemas concretos. Consideramos este fato uma vantagem devido ao que explicamos a seguir. Prawitz, no artigo [40], define suas regras esquemáticas com objetivo de provar uma completude dos operadores proposicionais usuais com relação aos que podiam ser definidos em função de suas regras esquemáticas. Diferentemente de nossa abordagem e na nossa opinião de modo apropriado para suas intenções, ele define conceitos esquemáticos baseando-se, também, em conceitos concretos. Como exemplo, lembramos que a sua definição informal de fórmula esquemática considera a utilização de conectivos sentenciais. Além disso, ele tentou provar esta completude comentada acima em um sistema que é definido, conjuntamente, em função de regras esquemáticas e regras proposicionais usuais. Porém a regra de eliminação da impliacação não era instância de sua regra esquemática de eliminação. No nosso caso, definimos fórmulas esquemáticas baseando-se exclusivamente em constantes lógicas esquemáticas. Isto, no nosso entendimento, torna os sistemas esquemáticos independentes de suas instâncias. A importância deste último fato é que, se aceitarmos que um sistema tenha regras de nível de abstração distintos, como será o método de instanciar regras? Utilizaremos somente as regras esquemáticas? E se o sistema esquemático, definido conjuntamente por regras esquemáticas e regras proposicionais usuais, incluir regras para a introdução da disjunção usual, como instanciaremos um sistema proposicional modal sem a disjunção? Para quais propósitos utilizaremos regras em conjunto e para quais objetivos não utilizaremos regras esquemáticas e concretas em conjunto? Como definiremos conceitos utilizados em uma Teoria da Prova Esquemática, como por exemplo, como definiremos o conceito de instâncias de regras de inferência? A necessidade de responder a estas perguntas nos indica, no nosso entendimento e para os nossos objetivos, que a separação de conceitos é a estratégia mais adequada. O que comentamos neste parágrafo exemplifica o queremos dizer com o ato de definir de modo autocontido uma Teoria da Prova para sistemas esquemáticos de Dedução Natural.

Um outro exemplo que podemos citar é o seguinte. Chi, em [7], define o conceito de subfórmula baseando-se em instâncias de sua regra concreta. Caso adotássemos esta definição de Chi, a justificativa, na prova de normalização para o sistema esquemático S, especificamente na prova do Lema 4.23, de que após a eliminação da fórmula máxima do tipo $a.i.1$ diminuiremos o grau da fórmula máxima teria que ser feita com base no argumento de que as premissas e hipóteses das aplicações de regras concretas de introdução que são instâncias de nossas regras esquemáticas são subfórmulas das conclusões das respectivas aplicações destas mesmas regras. Argumento semelhante deveria ser utilizado, caso utilizássemos as definições de regras esquemáticas de Prawitz [40]. Ressaltamos, também, que as regras esquemáticas de Chi e de Prawitz possibilitam que regras instâncias obedeçam ou não à restrição da subfórmula que comentamos acima. Isto implica que, dependendo da propriedade que estivéssemos tentando obter para um sistema esquemático, teríamos que optar por alguma das possíveis relações que existem entre a conclusão de regras concretas e premissas e hipóteses. Devido a esta dificuldade, principalmente, entendemos que a definição de conceitos independentes torna o sistema esquemático mais bem definido quando comparamos com as abordagens de Chi e de Prawitz especialmente quando buscamos provas de propriedades no contexto esquemático.

Além do que está exposto nos parágrafos anteriores, na abordagem de Prawitz, assim como também ocorre na abordagem de Chi [7], não fica claro o que é instanciar uma regra esquemática. Novamente, se o objetivo de regras esquemáticas é o estudo de completude de operadores, então entendemos que tal abordagem é a mais adequada. Porém, se considerarmos que a definição de regras esquemáticas tem por objetivo a definição de sistemas esquemáticos, a prova de propriedades para estes sistemas e a consequente garantia da validade destas propriedades para sistemas instâncias, então é necessário definirmos precisamente como suas instâncias são construídas. Isto é importante, no nosso modo de ver, para que não haja dúvidas do tipo se uma regra é ou não instância das regras esquemáticas, como ocorre, por exemplo, com relação à regra para o absurdo intuicionístico. Caso contrário como poderemos nos certificar se um determinado sistema intuicionístico herda ou não propriedades provadas para um sistema esquemático? Outra vantagem de definirmos precisamente procedimentos que instanciam regras esquemáticas, conforme comentamos novamente na conclusão do capítulo 3, é que tais procedimentos possibilitam a automatização da construção de regras concretas.

Por fim, ressaltamos que, diferentemente de nossa abordagem, as regras esquemáticas de Chi e de Prawitz não são instanciadas por sistemas modais. Dessa forma, além da importância da lógica modal para a Ciência da Computação conforme exemplificaremos na seção 3.2.3, lembramos que a quantidade de sistemas que herdarão propriedades prova-teóricas obtidas no contexto esquemático será, provavelmente, maior do que a quantidade de sistemas que herdariam propriedades caso nosso estudo tivesse por base as regras esquemáticas de Chi ou as de Prawitz.

3 SISTEMAS CONCRETOS DE DEDUÇÃO NATURAL

Neste capítulo, apresentaremos sistemas, ditos concretos, de Dedução Natural definidos em função de regras construídas pela execução dos procedimentos introduzidos na seção 3.1.

Regras concretas são especificadas tendo por base as regras esquemáticas dos sistemas S e S' introduzidas nas definições 2.5 e 2.14. Focaremos nas regras concretas construídas a partir do sistema S por possibilitar uma quantidade maior de comparações com importantes sistemas encontrados na literatura, conforme faremos seção 3.3. Denominaremos o ato de construir regras concretas, a partir de regras esquemáticas, de instanciar verticalmente. Denominaremos, também, regras concretas de instâncias verticais.

Na seção 3.2, mostraremos exemplos de sistemas concretos de Dedução Natural definidos em função de regras concretas construídas a partir das regras de S. Isto evidencia a abrangência das regras esquemáticas propostas por esta tese, no sentido de que elas são instanciadas por regras equivalentes a regras que definem importantes sistemas de Dedução Natural encontrados na literatura. Apresentaremos na seção 3.3 estas provas de equivalência que garantem que os sistemas instâncias de nossas regras esquemáticas são corretos e completos com relação às respectivas lógicas para as quais eles foram definidos.

Por fim, na conclusão, apresentaremos os principais resultados atingidos neste capítulo.

3.1 Regras Concretas

Regras concretas são especificadas em uma linguagem, dita concreta, diferente da linguagem das regras esquemáticas nas quais elas se basearam para serem construídas. Uma linguagem concreta L_C contém constantes lógicas que dependem de cada lógica para a qual um sistema de dedução natural será definido, além de símbolos proposicionais concretos. O conjunto das constantes lógicas é constituído de conectivos sentenciais e, se for o caso, da constante sentencial $\perp$ para o absurdo.

Utilizaremos a notação sintática P e Q, com e sem índices, para símbolos proposicionais de uma linguagem concreta L_C. Utilizaremos as letras A, B e C, com e sem índices, como notação sintática para fórmulas concretas. A é uma fórmula atômica concreta, se, e somente se, ela é um símbolo proposicional ou é o $\perp$, caso o $\perp$ faça parte da linguagem concreta. Abaixo definimos formalmente os conceitos de fórmulas concretas e de subfórmula concreta.

Definição 3.1. ***(Fórmula Concreta)*** *A noção de fórmula concreta é definida indutivamente com segue:*

a) Uma fórmula atômica concreta em L_C é uma fórmula concreta.

b) Se A_1,..,A_n, para $n \geq 1$, são fórmulas concretas em L_C, então $\lambda(A_1, .., A_n)$ também é uma fórmula concreta. λ é uma constante lógica concreta de aridade n, com exceção do $\perp$, caso esta faça parte de L_C.

Fórmulas concretas que têm o operador de negação $\neg$ como operador mais externo são denominadas fórmulas concretas negativas. Fórmulas concretas que não têm o operador de negação $\neg$ como operador mais externo são denominadas de fórmulas concretas positivas. Além disso, na apresentação de fórmulas concretas da forma $\lambda(A_1, .., A_n)$, omitiremos os parênteses, no caso em que $n = 1$.

Abaixo introduzimos a definição de subfórmula:

Definição 3.2. ***(Subfórmula Concreta)*** *A noção de subfórmula concreta é definida indutivamente por:*

a) A é subfórmula concreta de A.

b) Se $\lambda(A_1, .., A_n)$ é subfórmula concreta de A, então $A_1, .., A_n$ são subfórmulas concretas de A.

Dizemos que uma fórmula concreta A é subfórmula concreta própria de A_1, se, e somente se, A e A_1 são fórmulas concretas distintas.

Definiremos, agora, instanciar verticalmente. O resultado da execução dos procedimentos introduzidos nas definições 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 são *figuras* de regras concretas. Apresentaremos definições para construção de instâncias verticais para cada uma das seis regras esquemáticas introduzidas na definição 2.5.

Definição 3.3. ***(Instanciar Verticalmente Regras esquemáticas de Introdução)*** *Instanciar verticalmente as regras esquemáticas de introdução significa construir uma ou mais figuras de regras concretas utilizando como modelo as s figuras de regras esquemáticas de introdução. Nesse caso, os seguintes passos devem ser seguidos:*

a.1) Define-se a quantidade de regras de introdução que serão construídas atribuindo um valor maior do que zero para s.

a.2) Opcionalmente, para cada regra i, $1 \leq i \leq s$, define-se a quantidade de premissas atribuindo um valor para p_i. Caso um valor não seja atribuído para p_i, a i-ésima regra terá a mesma quantidade de premissas da regra esquemática que serviu de modelo. Ou seja, a i-ésima regra construída terá um valor p_i fixo não definido de premissas. Além disso, cada regra concreta a ser construída utilizará fórmulas concretas diferentes do $\perp$ como premissas.

a.3) Opcionalmente, em cada regra i e para cada premissa j, define-se a quantidade de hipóteses, todas com formas (shape) diferentes, que poderão ser descartadas pela aplicação da regra atribuindo um valor para h^i_j. Caso um valor não seja atribuído para uma premissa j da regra i, a quantidade de hipóteses será igual à quantidade de hipóteses da regra esquemática que serviu de modelo. Ou seja, a j-ésima premissa da i-ésima regra terá um valor h^i_j fixo não definido de hipóteses. Além disso, cada regra concreta a ser construída utilizará fórmulas concretas como hipóteses.

a.4) Opcionalmente, em cada regra i e para cada premissa j, define-se a quantidade de premissas intermediárias atribuindo um valor para e^i_j. Caso um valor não seja atribuído para e^i_j, a quantidade de premissas intermediárias associadas à j-ésima premissa da i-ésima regra a ser construída será igual à quantidade de premissas intermediárias da regra esquemática que serviu de modelo. Ou seja, a j-ésima premissa da i-ésima regra terá um quantidade e^i_j fixa não definida de premissas intermediárias associadas. Além disso, cada regra concreta utilizará fórmulas concretas como premissas intermediárias e deve existir uma quantidade de hipóteses intermediárias igual à quantidade de premissas intermediárias.

a.5) *Cada regra i terá uma fórmula concreta positiva $\lambda(A_1, .., A_n)$ como conclusão de modo que o conjunto formado pelas hipóteses descartáveis e pelas premissas de todas as s regras que introduzem $\lambda(A_1, .., A_n)$ é igual ao conjunto das subfórmulas próprias de $\lambda(A_1, .., A_n)$. Nesse caso, dizemos que a regra concreta construída introduz a constante lógica λ principal da conclusão.*

Especificamos regras esquemáticas de introdução e de eliminação da negação, conforme pode ser verificado na definição 2.5. Observe que, admitindo $\neg A$ como abreviação para $A \rightarrow \perp$, como especificado por exemplo em [38] por Prawitz, o passo $a.2$ da definição 3.3 implica que a figura da regra concreta de introdução da negação usual não é instância vertical da regra esquemática de introdução. Além disso, a restrição 3.10, descrita à frente neste capítulo, impossibilita que o $\perp$ seja premissa de uma instância da regra de dedução para qualquer regra concreta de introdução, com exceção da regra de introdução da negação. Em especial, o $\perp$ não é premissa de uma instância da regra de dedução para a $\rightarrow I$ na forma usual conhecida. Essas restrições descritas neste parágrafo foram definidas devido ao fato que especificamos reduções distintas para o caso onde uma fórmula máxima é consequência de uma aplicação da regra esquemática de introdução da negação ou consequência de uma aplicação da regra esquemática de introdução, conforme pode ser verificado nas reduções introduzidas nas definições 4.15 e 4.16.

Na sequência, mostramos definições que permitem instanciar verticalmente as regras esquemáticas de introdução da negação, de eliminação, de eliminação da negação, do absurdo clássico e do absurdo intuicionístico.

Definição 3.4. ***(Instanciar Verticalmente a Regra esquemática de Introdução da Negação)*** *Instanciar verticalmente a regra esquemática de introdução da negação significa construir uma figura de regra concreta de introdução da negação utilizando uma fórmula concreta A como hipótese descartável pela aplicação da regra, uma fórmula concreta negativa $\neg A$ como conclusão da aplicação da regra e a fórmula concreta $\perp$ como premissa.*

A regra esquemática de eliminação é definida em função das s regras esquemáticas de introdução. A definição a seguir permite que construamos uma regra concreta de eliminação utilizando como modelo a regra esquemática de eliminação e as hipóteses e premissas das regras concretas de introdução que tem como conclusão uma fórmula igual a sua premissa maior.

Definição 3.5. ***(Instanciar Verticalmente a Regra esquemática de Eliminação)*** *Instanciar verticalmente a regra esquemática de eliminação significa construir uma figura de regra concreta de eliminação utilizando como modelo a regra esquemática de eliminação e a conclusão de uma regra concreta R de introdução, seguindo os passos abaixo:*

a.1) A premissa maior é a conclusão da regra concreta R de introdução, para a qual será construída a regra de eliminação.

a.2) As premissas menores vinculadas são todas as hipóteses utilizadas na definição da fórmula que é a premissa maior.

a.3) A regra concreta de eliminação a ser construída deverá ter um número de deduções de premissas menores igual à quantidade s de regras concretas de introdução construídas para introduzir a premissa maior. Cada dedução i, para $1 \leq i \leq s$, de uma premissa menor utilizará como hipóteses as premissas da i-ésima regra de introdução da premissa maior e poderão ser descartadas pela aplicação da regra.

a.4) Opcionalmente, em cada dedução i de uma premissa menor, define-se a quantidade de premissas e hipóteses intermediárias associadas atribuindo um valor para m^i. Caso um valor não seja atribuído para m^i, a quantidade de premissas intermediárias associadas a i-ésima dedução de uma premissa menor será igual à quantidade de premissas esquemáticas intermediárias da regra que serviu de modelo. Ou seja, a dedução da i-ésima premissa terá um valor m^i fixo não definido de premissas intermediárias associadas. A regra concreta a ser construída utilizará fórmulas concretas como premissas intermediárias e deve existir uma quantidade de hipóteses intermediárias igual à quantidade de premissas intermediárias.

Definição 3.6. ***(Instanciar Verticalmente a Regra esquemática de Eliminação da Negação)*** *Instanciar verticalmente a regra esquemática de eliminação da negação significa construir uma figura de regra concreta de eliminação da negação utilizando uma fórmula concreta negativa $\neg A$ como premissa maior da regra, uma fórmula concreta A como premissa menor e $\perp$ como conclusão de sua aplicação.*

Pelo mesmo motivo exposto para a regra de introdução da negação, as regras para o absurdo intuicionístico e clássico usuais, como definidos em [38], não são instâncias verticais da regra esquemática de introdução e não são instâncias de regras de dedução para regras concretas de introdução. Visto que nosso procedimento de construção de regras concretas de eliminação depende da existência de regras concretas de introdução, as regras para o absurdo intuicionístico e clássico usuais também não são instâncias da regra esquemática de eliminação. Por esses motivos, propomos regras esquemáticas específicas para o absurdo intuicionístico e clássico na definição 2.5 e definimos abaixo como construir suas instâncias verticais:

Definição 3.7. ***(Instanciar Verticalmente a Regra esquemática para o Absurdo Clássico)*** *Instanciar verticalmente a regra esquemática para o absurdo clássico significa construir uma figura de regra concreta utilizando uma fórmula $\neg A$ como hipótese que pode ser descartada pela aplicação da regra, uma fórmula A como conclusão da aplicação da regra e a fórmula atômica $\perp$ como premissa.*

Definição 3.8. ***(Instanciar Verticalmente a Regra esquemática para o absurdo intuicionístico)*** *Instanciar verticalmente a regra para o absurdo esquemático intuicionístico significa construir uma figura de regra concreta utilizando a fórmula atômica $\perp$ como premissa esquemática e uma fórmula concreta A como conclusão.*

Observe que a construção de regras concretas, conforme procedimentos 3.3 a 3.8 descritos acima, determina um mapeamento entre fórmulas concretas e fórmulas esquemáticas. A restrição descrita abaixo limita o modo como este mapeamento pode ocorrer:

Definição 3.9. ***(Restrição de Instanciação Vertical)***

Na construção de uma regra concreta, a relação $\{(E, A)\}$, para A uma fórmula concreta e E uma fórmula esquemática, é uma função.

O conceito de instância horizontal de uma regra concreta é igual ao de instância de uma regra de inferência definido por Prawitz na página 22 de sua tese [38]. A definição de regras de inferência próprias e impróprias, a noção de regras de dedução e a definição de instâncias de regras de dedução são iguais às respectivas definições e noções introduzidas por Prawitz [38] e apresentaremos alguns exemplos na seção 3.2. Entretanto, as instâncias das regras de dedução definidas para as regras concretas devem ser especificadas seguindo a restrição descrita a seguir:

Definição 3.10. ***(Restrição das Regras de Dedução Concretas)***

a) *As premissas menores de uma instância da regra de dedução para qualquer regra concreta de eliminação devem depender somente das hipóteses e das hipóteses intermediárias descartáveis pela aplicação da regra.*

b) *Caso o $\perp$ faça parte da linguagem L_C, ele não pode ser utilizado como premissa de nenhuma instância de regra de dedução para qualquer regra concreta de introdução, com exceção das instâncias da regra de dedução para a regra de introdução da negação.*

Por fim, introduzimos abaixo o conceito de sistema concreto de Dedução Natural:

Definição 3.11. ***(Sistemas Concretos de Dedução Natural)*** *Sistemas concretos de Dedução Natural são determinados por regras de dedução e por regras de inferência próprias definidos em função das figuras de regras construídas a partir da execução do procedimento definidos em* 3.3 *para cada constante lógica de L_C e, opcionalmente, da execução de um ou mais procedimentos introduzidos nas definições* 3.4*,* 3.5*,* 3.6*,* 3.7 *e* 3.8*.*

Note que, como consequência da definição acima, todos os sistemas concretos tem pelo menos uma regra de introdução para cada constante lógica de L_C.

Finalizando esta seção, fazemos alguns comentários sobre a construção de regras concretas a partir das regras de S'. Construímos regras concretas de introdução e de eliminação a partir das regras de S' de modo similar, respectivamente, ao apresentado nas definições 3.3 e 3.5 introduzidas acima. As diferenças entre os métodos descritos nas definições 3.3 e 3.5 e os que constroem regras a partir das regras de S' são as seguintes:

a) As regras de S' não utilizam premissas intermediárias esquemáticas;

b) A restrição 3.10 não se aplica a instâncias das regras de dedução para as regras concretas construídas a partir das regras de S'.

Como consequência, os sistemas concretos instâncias de S' também terão, obrigatoriamente, pelo menos uma regra de dedução de introdução para cada uma de suas constantes lógicas. Além disso, as regras concretas para o absurdo intuicionístico e para o absurdo clássico, como definidas por exemplo em [38], não são instâncias das regras de S' e a regra para introdução da negação poderá ser instância da regra de dedução definida para qualquer regra concreta de introdução. Por fim, lembramos que o procedimento que normaliza deduções apresentado na seção 6.2 recebe como entrada deduções realizadas em sistemas concretos definidos em função de regras instâncias das regras esquemáticas que definem o sistema esquemático de Dedução Natural S'.

3.2 Exemplos de Sistemas Concretos de Dedução Natural

Nesta seção, definiremos os sistemas concretos de Dedução Natural M_1, I_1 e C_1, para as lógicas minimal, intuicionística e clássica, respectivamente. Além desses, definiremos os sistemas I'_{S4} e I''_{S4} para a lógica modal intuicionística $S4$ e os sistemas C'_{S4}, C''_{S4} e C'''_{S4} para a lógica modal clássica $S4$. Mostraremos, também, como eles são obtidos a partir das regras esquemáticas introduzidas na definição 2.5.

Utilizamos a notação $H \triangleright A$ para indicar que a fórmula A foi utilizada em uma determinada posição de uma regra concreta porque a regra esquemática que serviu de modelo para sua construção possui a fórmula esquemática H naquela mesma posição. Dizemos, nesse caso, que H foi mapeado em A.

Para melhor entendimento, mostramos abaixo um exemplo de execução dos passos do procedimento introduzido na definição 3.3 que constrói figuras de regras de introdução. Veja que iniciamos a construção de uma regra concreta, a partir de uma cópia da regra esquemática que, a cada passo, vai sendo modificada até que a construção da regra concreta será finalizada. Isto justifica considerarmos as regras concretas casos particulares de regras esquemáticas.

Na execução abaixo, considere que a linguagem concreta L_C tem uma única constante lógica $\mapsto$:

a.1) Atribuímos o valor 1 (um) ao índice s. Como resultado temos a única regra apresentada abaixo:

$$\dfrac{\Delta_1^1 \quad .. \quad \Delta_{p_1}^1 \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_1^1]^a\,[\Delta_1^1]^a \\ \Sigma_1^1\end{matrix}}{G_1^1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_j^1]^a\,[\Delta_j^1]^a \\ \Sigma_j^1\end{matrix}}{G_j^1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_{p_1}^1]^a\,[\Delta_{p_1}^1]^a \\ \Sigma_{p_1}^1\end{matrix}}{G_{p_1}^1}}{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_1,h_{p_1}^1}^1, G_1^1, .., G_{p_1}^1)}\ \Phi I_{(a)}.$$

a.2) Atribuímos o valor 3 (três) para p_1. Além disso, conforme passo a.2) da definição 3.3, "cada regra concreta utilizará fórmulas concretas como premissas":

$$\dfrac{\Delta_1^1 \quad \Delta_2^1\Delta_3^1 \quad \begin{matrix}[\Xi_1^1]^a\,[\Delta_1^1]^a \\ \Sigma_1^1 \\ \hline A_1^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Xi_2^1]^a\,[\Delta_2^1]^a \\ \Sigma_2^1 \\ \hline A_2^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Xi_3^1]^a\,[\Delta_3^1]^a \\ \Sigma_3^1 \\ \hline A_3^1\end{matrix}}{\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{3,h_3^1}^1, A_1^1, A_2^1, A_3^1)}\,\Phi I_{(a)}.$$

a.3) Atribuímos o valor 0 (zero) para h_1^1, h_2^1 e h_3^1:

$$\dfrac{\Delta_1^1 \quad \Delta_2^1\Delta_3^1 \quad \begin{matrix}[\Delta_1^1]^a \\ \Sigma_1^1 \\ \hline A_1^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Delta_2^1]^a \\ \Sigma_2^1 \\ \hline A_2^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Delta_3^1]^a \\ \Sigma_3^1 \\ \hline A_3^1\end{matrix}}{\Phi(A_1^1, A_2^1, A_3^1)}\,\Phi I_{(a)}.$$

a.4) Não atribuímos valores para e_1^1, e_2^1 e e_3^1:

$$\dfrac{B_{1,1}^1..B_{1,e_1^1}^1 \quad B_{2,1}^1..B_{2,e_2^1}^1 B_{3,1}^1..B_{3,e_3^1}^1 \quad \begin{matrix}[B_{1,1}^1..B_{1,e_1^1}^1]^a \\ \Sigma_1^1 \\ \hline A_1^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_{2,1}^1..B_{2,e_2^1}^1]^a \\ \Sigma_2^1 \\ \hline A_2^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_{3,1}^1..B_{3,e_3^1}^1]^a \\ \Sigma_3^1 \\ \hline A_3^1\end{matrix}}{\Phi(A_1^1, A_2^1, A_3^1)}\,\Phi I_{(a)}.$$

a.5) Mapeamos a fórmula concreta $\mapsto (A_1^1, A_2^1, A_3^1)$ para $\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_1,h_{p_1}^1}^1, G_1^1, .., G_{p_1}^1)$ e chegamos ao formato final da regra de introdução:

$$\dfrac{B_{1,1}^1..B_{1,e_1^1}^1 \quad B_{2,1}^1..B_{2,e_2^1}^1 B_{3,1}^1..B_{3,e_3^1}^1 \quad \begin{matrix}[B_{1,1}^1..B_{1,e_1^1}^1]^a \\ \Sigma_1^1 \\ \hline A_1^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_{2,1}^1..B_{2,e_2^1}^1]^a \\ \Sigma_2^1 \\ \hline A_2^1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_{3,1}^1..B_{3,e_3^1}^1]^a \\ \Sigma_3^1 \\ \hline A_3^1\end{matrix}}{\mapsto (A_1^1, A_2^1, A_3^1)}\mapsto I_{(a)}.$$

Como resultado final, temos os seguintes mapeamentos: $G_1^1 \triangleright A_1^1$, $G_2^1 \triangleright A_2^1$, $G_3^1 \triangleright A_3^1$, $E_{1,1}^1 \triangleright B_{1,1}^1$,..,$E_{1,e_1^1}^1 \triangleright B_{1,e_1^1}^1$,$E_{2,1}^1 \triangleright B_{2,1}^1$,..,$E_{2,e_2^1}^1 \triangleright B_{2,e_2^1}^1$,$E_{3,1}^1 \triangleright B_{3,1}^1$,..,$E_{3,e_3^1}^1 \triangleright B_{1,e_3^1}^1$ e $\Phi(H_{1,1}^1, .., H_{p_1,h_{p_1}^1}^1, G_1^1, .., G_{p_1}^1)$ para $\mapsto (A_1^1, A_2^1, A_3^1)$.

3.2.1 Sistema Minimal M_1

Definiremos, nesta seção, as regras de inferência do sistema M_1 de Dedução Natural para a lógica minimal. Provaremos, na seção 3.3.1, que o sistema M_1 é equivalente ao sistema M de Dedução Natural para a lógica minimal definido por Prawitz em [38].

Seguem as regras:

a) Introdução da conjunção: $\dfrac{A_1^1 \quad A_2^1}{\wedge(A_1^1, A_2^1)} \wedge I$. Os valores atribuídos às variáveis e os mapeamentos de fórmulas executados pelo procedimento introduzido na definição 3.3 estão descritos a seguir:

$s = 1$, p_1=2, $G_1^1 \triangleright A_1^1$, $G_1^2 \triangleright A_1^2$, $h_1^1 = h_2^1$=0 e $e_1^1 = e_2^1 = 0$,
onde o símbolo "="indica atribuição de um valor a um índice.

Observe que a restrição 3.10 aplica-se a instâncias de regras de dedução e não a instâncias horizontais de regras concretas. Por este motivo, o $\perp$ pode ser premissa de uma instância horizontal da regra de introdução da conjunção, conforme mostramos no exemplo a seguir:

1) $(\neg B_1, \neg\neg B_2 / \wedge (\neg B_1, \neg\neg B_2))$;

2) $(B_1, \neg\neg\neg B_2 / \wedge (B_1, \neg\neg\neg B_2))$;

3) $(\perp, \perp / \wedge (\perp, \perp))$.

b) Eliminação da conjunção: $$\dfrac{\wedge(A_1^1, A_2^1) \quad B_1^1..B_{m^1}^1 \qquad \begin{matrix}[B_1^1]^a \ldots [B_{m^1}^1]^a \quad [A_1^1]^a \quad [A_2^1]^a \\ \dfrac{\Sigma_1^1}{C}\end{matrix}}{C} \wedge E_{(a)}$$. A regra concreta b) foi construída seguindo os passos do procedimento introduzido na definição 3.5. Ela é uma regra imprópria e uma instância da regra de dedução para $\wedge E$ deve ter o seguinte formato:

$\wedge E$=$<< \Gamma, \wedge(A_1^1, A_2^1) >, < \Gamma_1^1, B_1^1 > .., < \Gamma_{m^1}^1, B_{m^1}^1 >, < \Gamma^1, C >< \Delta, C >>$, onde $m^1 \geq 0$, $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1^1 \cup, .., \cup \Gamma_{m^1}^1$.

$\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1^1 \cup, .., \cup \Gamma_{m^1}^1$ indica que a premissa C depende exclusivamente das hipóteses que podem ser descartadas pela aplicação da regra.

c) Introdução da disjunção: $\dfrac{A_1}{A_1 \vee A_2} \vee I$ e $\dfrac{A_2}{A_1 \vee A_2} \vee I$.

d) Eliminação da disjunção: $$\dfrac{A_1 \vee A_2 \quad B_1^1..B_{m^1}^1, B_1^2..B_{m^2}^2 \qquad \begin{matrix}[B_1^1]^a..[B_{m^1}^1]^a \quad [A_1]^a \\ \dfrac{\Sigma_1}{B}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B_1^2]^a..[B_{m^1}^2]^a \quad [A_2]^a \\ \dfrac{\Sigma_2}{B}\end{matrix}}{B} \vee E_{(a)}.$$ Uma instância da regra de dedução para $\vee E$ deve se especificada de modo similar ao exposto no item b) para a $\wedge E$.

e) Introdução da implicação: $\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma^1_1\\ \overline{A^1_1}\end{matrix}}{\rightarrow (A^1_{1,1}, A^1_1)} \rightarrow I_{(a)}$. Onde:

s=1, p_1=1, $G^1_1 \triangleright A^1_1$, h^1_1=1, $H^1_{1,1} \triangleright A^1_{1,1}$ e $e^1_1 = 0$. A regra concreta e) é uma regra imprópria e uma instância da regra de dedução para a regra de introdução da implicação deve ter o seguinte formato:

$\rightarrow I$:$<< \Gamma, B >, < \Delta, A \rightarrow B >>$, onde $\Delta = \Gamma \cup - \{A\}$ e A é não é uma ocorrência do $\perp$. A não ser uma ocorrência do $\perp$ é uma especificação imposta pela restrição 3.10.

f) Eliminação da implicação: $\dfrac{A_1 \rightarrow A_2 \quad B^1_1..B^1_{m^1}\, A_1 \qquad \begin{matrix}[A_2]^a[B^1_1]^a..[B^1_{m^1}]^a\\ \Sigma\\ \overline{B}\end{matrix}}{B} \rightarrow E_{(a)}$. Uma instância da regra de dedução para $\rightarrow E$ deve ser especificada de modo similar ao exposto no item b) para a $\wedge E$.

g) Introdução e eliminação da negação: $\dfrac{\begin{matrix}[A]^a\\ \Sigma\\ \overline{\perp}\end{matrix}}{\neg A} \neg I_{(a)}$ e $\dfrac{\neg A \quad A}{\perp} \neg E_{(a)}$, onde $H \triangleright A$, $\neg H \triangleright \neg A$ e $\tau \triangleright \perp$. A regra $\neg I$ é uma regra imprópria e uma instância da regra de dedução para a $\neg E$ deve ter ser especificada da seguinte forma:

$\neg I$:$<< \Gamma, \perp >, < \Delta, \neg B >>$,

onde B é uma fórmula concreta qualquer e $\Delta = \Gamma - \{B\}$.

3.2.2 Sistemas Intuicionístico I_1 e Clássico C_1

Definiremos nesta seção as regras de inferência dos sistemas I_1 e C_1 para as lógicas intuicionística e clássica, respectivamente. As regras de I_1 e de C_1, com exceção das regras para o absurdo, são iguais às regras do sistema M_1 definidas na seção 3.2.1. As regras para o absurdo de I_1 e C_1 são iguais às respectivas regras dos sistemas I e C como definidas por Prawitz [38]. Provaremos, na seção 3.3.1, que o sistema I_1 e C_1 são equivalentes aos sistemas I e C de Dedução Natural definidos por Prawitz em [38] para as lógicas intuicionísticas e clássicas, respectivamente.

Sistema Intuicionístico I_1

a) Todas as regras do sistema minimal M_1;

b) Absurdo intuicionístico: $\dfrac{\perp}{A}\ \perp_{i(a)}$, em que $\tau \triangleright \perp$ e $H \triangleright A$.

Sistema Clássico C_1

a) Todas as regras do sistema intuicionístico I_1;

b) Absurdo Clássico: $\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^a \\ \Sigma \\ \perp\end{matrix}}{A}\ \perp_{c(a)}$, onde $\xi H \triangleright \neg A$, $\tau \triangleright \perp$ e $H \triangleright A$. A regra para o absurdo clássico é imprópria. Uma instância da regra de dedução para o $\perp_c$ deve ter o seguinte formato:

$\perp_c :<< \Gamma, \perp >< \Delta, A >$, onde $\Delta = \Gamma - \{\neg A\}$ e A não é da forma $\neg B$, para uma fórmula B qualquer.

3.2.3 Sistemas Modais

Lógicas modais são, usualmente, extensões de lógicas minimais, intuicionísticas e clássicas com a inclusão de novas constantes lógicas. As linguagens das lógicas modais consideradas neste capítulo, são definidas a partir da inclusão do operador modal $\Box$, para a necessidade, e do operador modal $\Diamond$, para a possibilidade, no conjunto de constantes lógicas da lógica minimal, intuicionística ou clássica.

No caso clássico, há um consenso do que venha a ser uma lógica modal. Porém, com relação à lógica modal intuicionística, a questão é controversa pelos motivos expostos a seguir. Usualmente, lógicas modais utilizam uma semântica de mundos possíveis definida por Kripke em [24]. Kripke também utilizou mundos possíveis para a lógica intuicionística e há, portanto, relações de acessibilidade distintas nos modelos aplicados às lógicas modais intuicionísticas [47]. As diferentes escolhas destas relações de acessibilidade geram diferentes versões de lógicas modais intuicionísticas, sendo o trabalho de Simpson [47] uma boa referência no assunto, onde ele mostra variações da lógica modal intuicionística resultantes da combinação de diferentes relações de acessibilidade presentes nos modelos de Kripke.

Nesta seção, não contribuiremos com análises sobre lógicas modais intuicionísticas, mas apresentaremos cinco sistemas concretos de Dedução Natural modais construídos a partir de nossas regras esquemáticas e que são equivalentes a sistemas encontrados na literatura.

Bierman e de Paiva [4] afirmam que, de certa forma, lógicos modais desprezam a utilização de sistemas de Dedução Natural para lógicas modais. Entretanto, como justificativas para a especificação de sistemas de Dedução Natural modais, listamos a existência da relação isomórfica entre sistemas de Dedução Natural e a programação funcional, via a isomorfismo de Curry-Howard [21], e a importância de constantes lógicas modais para a Ciência da Computação, conforme exemplificaremos na sequência.

Citamos, como exemplo de aplicações na Computação, o trabalho de Davies and Pfenning [9] que utilizaram o $\Box$ para formalizar um sistema tipado para computação por estágios e Ghani et al. [13] que refinaram este cálculo para o projeto de máquinas abstratas. Idéias similares que relacionaram o $\Box$ com avaliação de variáveis em tempo de execução ou em tempo de compilação foram desenvolvidas por Moggi et.al. [3]. Além desses, citamos também o trabalho de Desperyoux and Pfenning que utilizaram o $\Box$ para codificar sintaxes abstratas de alta-ordem em provadores de teoremas como Elf e Isabelle [10], Goulbault-Larrecq [17] que utilizou modalidade para modelar o mecanismo *quote* do LISP e Stirling [46] que utilizou uma lógica modal intuicionística para capturar a noção de bissimilaridade de processos divergentes. Por fim, destacamos o trabalho de Fairtlough e Mendler [12] onde a lógica modal intuicionística foi utilizada para modelar comportamentos de circuitos de hardware.

Ressaltamos, também, que definir sistemas de Dedução Natural modais possibilita o estudo de propriedade prova-teóricas de deduções como, por exemplo, a dependência entre hipóteses e a conclusão de uma dedução. Além disso, a extração de explicações de provas de teoremas por meio da análise da forma normal de deduções em Dedução Natural é bastante simplificada quando comparada com a elaboração de explicações de passos de provas baseadas no método de resolução, por exemplo, conforme explicado em [18] e exemplificado em [32].

Definir sistemas de Dedução Natural para a lógica modal, entretanto, não é tarefa das mais triviais. Na sequência, analisaremos as definições dos sistemas de Biermann e de Paiva [4], de Prawitz [38] e de Medeiros [31], por serem referências no assunto e frequentemente citados na literatura. Avaliaremos, também, o sistema de Martins e Martins e o escolheremos por ter sido o único sistema de Dedução Natural para a lógica modal clássica com as constantes $\Box$ e $\Diamond$ que identificamos na literatura com normalização fraca provada.

Prawitz definiu sistemas modais clássicos, intuicionísticos e minimais em sua tese [38] e os denominou, respectivamente, de C_{S4}, I_{S4} e M_{S4}. A sua primeira versão para a regra de introdução do $\Box$ foi a seguinte:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ A\end{array}}{\Box A}\,\Box I,$$

onde ele restringia à $\Box B$ o formato das fórmulas de Γ. Esta regra, entretanto, não era fechada para substituição de hipóteses por deduções e ele, então, modificou a restrição da regra para introdução do $\Box$ e definiu que fórmulas essencialmente modais deveriam existir em determinados locais de uma dedução. Descreveremos a definição de fórmula essencialmente modal de Prawitz [38] na seção 3.3.3 e mostraremos os sistemas I_{S4} e C_{S4} de Prawitz, respectivamente, nas seções 3.3.3 e 3.3.5.

Deduções neste sistema de Prawitz, portanto, requerem, além da utilização de características usuais que devem ser seguidas para elaboração de deduções em Dedução Natural, a checagem da existência de fórmulas essencialmente modais, nas condições exigidas por sua definição, a cada aplicação da regra de introdução do $\Box$ ou a cada composição de duas deduções.

Biermann e de Paiva propuseram em [6] uma regra para introdução do $\Box$ que satisfaz a propriedade de ser fechada para substituição de hipóteses sem que isto torne a aplicação da regra incorreta. Além disso, eles utilizaram características usuais de sistemas de Dedução Natural. Na subseção $a)$ desta seção, definiremos o sistema I'_{S4} de Dedução Natural para a lógica modal intuicionística $S4$ e provaremos, na seção 3.3.2, a sua equivalência com o sistema $IS4$ definido por Biermann e de Paiva [4]. Vale ressaltar que, conforme comentaremos no capítulo 7, o Teorema da Normalização Fraca para o sistema da Biermann e de Paiva pode ser obtido como consequência de nosso trabalho.

Na subseção $b)$ desta seção, definiremos, também, o sistema $I_{S4''}$ para a lógica intuicionística modal $S4$ e provaremos, na seção 3.3.3, a sua equivalência com o sistema

I_{S4} definido por Prawitz [38]. Na seção 7.2, mostraremos que nossa prova de normalização esquemática não garante a prova da normalização fraca para o sistema I''_{S4}, pois a eliminação de uma fórmula esquemática máxima do tipo $c.i.2$, vide redução introduzida na definição 4.16, utiliza aplicações da regra para o absurdo clássico. Esta constatação e a apresentação deste fato para o professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) o levou a definir uma dedução contra-exemplo para uma redução específica que gera uma dedução incorreta nos sistemas I_{S4} e C_{S4} de Prawitz [38], invalidando, portanto, a normalização fraca para estes sistemas. Comentaremos novamente à frente sobre este contra-exemplo.

Na subseção c), definiremos um sistema de Dedução Natural para a lógica modal clássica, o sistema C'_{S4}. Mostraremos, na seção 3.3.4, que C'_{S4} é equivalente ao sistema $CS4$ de Martins e Martins [28]. O sistema $CS4$ inclui as constantes lógicas modais $\Box$ e $\Diamond$ e Martins e Martins provaram a normalização fraca para o sistema $CS4$.

Na subseção d), definiremos o sistema C''_{S4} para a lógica modal clássica $S4$ e mostraremos, na seção 3.3.5, que ele é equivalente ao sistema C_{S4} de Prawitz para a lógica clássica modal $S4$ com o operador $\Box$ definido em [38]. Mostraremos, na seção 7.2, a dedução que o professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) construiu como contra-exemplo para a normalização dos sistemas $IS4$ e $CS4$ de Prawitz. Baseando-se na prova de normalização para o sistema esquemático S apresentado nesta tese proporemos uma nova redução para esses sistemas de Prawitz [38] que corrige o problema apresentado no contra-exemplo. Vale ressaltar que a normalização do sistema C_{S4} de Prawitz pode ser obtida a partir da normalização do sistema C''_{S4} e da equivalência entre o sistema C''_{S4}, definido nesta tese, e o sistema C_{S4} de Prawitz, conforme argumentaremos no capítulo 7.1.

Medeiros, em [31], mostrou um outro contra-exemplo para a normalização fraca do sistema C_{S4} de Prawitz, propôs o sistema $NS4$ para a lógica modal clássica $S4$ sem a constante $\Diamond$ e provou a normalização fraca para $NS4$. Nesta seção, definiremos, na subseção e), o sistema C'''_{S4} e, na seção 3.3.6, mostraremos sua equivalência com o sistema $NS4$ definido por Medeiros em [31]. Na seção 7.2, construiremos uma dedução Π no sistema C'''_{S4} equivalente ao contra-exemplo de Medeiros em [31] e mostraremos que Π não é um contra-exemplo para a normalização de C'''_{S4} obtida a partir da normalização de S. Também na seção 7.2, com base na normalização do sistema S, proporemos novas reduções que evitam o contra-exemplo de Medeiros para o sistema C_{S4}.

a) Sistema I'_{S4}

Definiremos nesta subseção as regras de inferência do sistema I'_{S4} de Dedução Natural para a lógica modal intuicionística $S4$. Na seção 3.3.2, mostraremos que I'_{S4} é equivalente ao sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva [4].

Seguem as regras:

a) Todas as regras do sistema I_1;

b) Introdução do $\Box$:

$$\dfrac{A^1_{1,1} \quad \ldots A^1_{1,e^1_1} \qquad \begin{array}{c}[A^1_{1,1}]^a \ldots [A^1_{1,e^1_1}]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \hline A\end{array}}{\Box A}\ \Box I_{(a)},$$

onde s=1, p_1=1, $G^1_1 \triangleright A$, h^1_1=0, $e^1_1 \geq 0$ e $E^1_1 \triangleright A^1_1$,..,$E^1_{1,e^1_1} \triangleright A^1_{1,e^1_1}$. Uma instância da regra de dedução para a regra $\Box I$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Box I$:$<< \Gamma_1, A^1_{1,1} >, .., < \Gamma_{e^1_1}, A^1_{1,e^1_1} >, < \Gamma^1_1, A >, < \Delta, \Box A >>$,

onde $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{e^1_1}$ e A^1_{1,l_2}, para $1 \leq l_2 \leq e^1_1$, são fórmulas concretas com formato $\Box C$, para uma fórmula C qualquer, e $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{e^1_1}$ implica que a premissa A depende exclusivamente das hipóteses descartadas.

c) Eliminação do $\Box$: $$\dfrac{\Box A \quad B^1_1, .., B^1_{m^1} \qquad \begin{array}{c}[B^1_1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \quad [A]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \hline B\end{array}}{B}\ \Box E_{(a)}$$. Uma instância da regra de dedução para a regra $\Box E$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Box E$:$<< \Gamma, \Box A >, < \Gamma_1, B^1_{1,1} >, .., < \Gamma_{m^1}, B^1_{1,m^1} >, < \Gamma^1_1, B >, < \Delta, B >>$,

onde $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{m^1}$ implica que a premissa B depende exclusivamente das hipóteses descartadas.

d) Introdução do $\Diamond$: $\dfrac{A}{\Diamond A}\ \Diamond I$.

e) Eliminação do $\Diamond$: $$\dfrac{\Diamond A \quad B_1^1, .., B_{m^1}^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B_1^1]^a \ldots [B_{m^1}^1]^a \quad [A]^a \\ \Sigma_1^1\end{array}}{B}}{B}\,\Diamond E_{(a)}$$, onde uma instância da regra de dedução para a $\Diamond E$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Diamond E$:$<< \Gamma, \Diamond A >, < \Gamma_1, B_1^1 >, .., < \Gamma_{m^1}, B_{m^1}^1 >, < \Gamma_1^1, B >, < \Delta, B >>$, onde $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{m^1}$. $B_{l_5}^1$, para $1 \leq l_5 \leq m^1$, é uma fórmula concreta $\Box C$, para uma fórmula C qualquer, e B é da forma $\Diamond D$, para uma fórmula D qualquer.

b) Sistema $I_{S4}^{''}$

Definiremos nesta subseção as regras de inferência do sistema $I_{S4}^{''}$ de Dedução Natural para a lógica modal intuicionística $S4$. Na seção 3.3.3, provaremos a equivalência entre $I_{S4}^{''}$ e o sistema I_{S4} de Prawitz [38] para a lógica modal intuicionística $S4$ com todos os operadores.

Seguem as regras:

a) Todas as regras do sistema I_1.

b) As regras de eliminação do $\Box$ e de introdução do $\Diamond$ de $I_{S4}^{'}$.

c) Introdução do $\Box$:

$$\dfrac{A_{1,1}^1 \quad \ldots A_{1,e_1^1}^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A_{1,1}^1]^a \ldots [A_{1,e_1^1}^1]^a \\ \Sigma_1^1\end{array}}{A}}{\Box A}\,\Box I_{(a)},$$ onde s=1, p_1=1, $G_1^1 \rhd A$, h_1^1=0, $e_1^1 \geq 0$ e $E_1^1 \rhd A_1^1$,..,$E_{1,e_1^1}^1 \rhd A_{1,e_1^1}^1$. Uma instância da regra de dedução para a $\Box I$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Box I$:$<< \Gamma_1, A_{1,1}^1 >, .., < \Gamma_{e_1^1}, A_{1,e_1^1}^1 >, < \Gamma_1^1, A >, < \Delta, \Box A >>$,

onde $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{e_1^1}$ e A_{1,l_2}^1, para $1 \leq l_2 \leq e_1^1$, são fórmulas concretas com formato $\Box C$ ou $\neg\Diamond C$, para uma fórmula C qualquer, e $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{e_1^1}$ implica que a premissa A depende exclusivamente das hipóteses descartadas.

d) Eliminação do $\Diamond$: $$\frac{\Diamond A \quad B^1_1,..,B^1_{m^1} \quad \begin{array}{c}[B^1_1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \quad [A]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \overline{B}\end{array}}{B}\Diamond E_{(a)}$$, onde uma instância da regra de dedução para a $\Diamond E$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Diamond E$:$<< \Gamma, \Diamond A >, < \Gamma_1, B^1_1 >, .., < \Gamma_{m^1}, B^1_{m^1} >, < \Gamma^1_1, B >, < \Delta, B >>$, onde $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{m^1}$. $B^1_{l_5}$, para $1 \leq l_5 \leq m^1$, é uma fórmula concreta $\Box C$ ou $\neg\Diamond C$, para uma fórmula C qualquer, e B é da forma $\Diamond D$ ou $\neg\Box D$, para uma fórmula D qualquer.

c) Sistema C'_{S4}

Definiremos nesta subseção as regras de inferência do sistema C'_{S4} de Dedução Natural para a lógica modal clássica $S4$ e provaremos, na seção 3.3.4, sua equivalência com o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28]. Seguem as regras do sistema C'_{S4}:

a) Todas as regras de introdução e de eliminação do sistema I_1.

b) A regra do absurdo clássico e intuicionístico dos sistemas I_1 e C_1, respectivamente.

c) As regras de eliminação do $\Box$ e de introdução do $\Diamond$ de I'_{S4}.

d) Regra de introdução do $\Box$: $$\frac{B^1_1 \quad \ldots B^1_{m^1} \quad \begin{array}{c}[B^1_1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \\ \Sigma^1_1 \\ \overline{A}\end{array}}{\Box A}\Box I_{(a)}.$$, onde uma instância da regra de dedução para a $\Box I$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Box I$:$<< \Gamma_1, B^1_1 >, .., < \Gamma_{m^1}, B^1_{m^1} >, < \Gamma^1_1, A >, < \Delta, \Box A >>$,

onde $\Delta = \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{m^1}$. $B^1_{l_5}$, para $1 \leq l_5 \leq m^1$, são fórmulas concretas de forma $\Box C$, $\neg\Diamond C$ ou $\neg\bot$, para uma fórmula C qualquer;

e) Eliminação do $\Diamond$: $$\frac{\Diamond A \quad B^1_1 \quad \ldots B^1_{m^1} \quad \begin{array}{c}[B^1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \quad [A]^{(a)} \\ \Sigma^1_1 \\ \overline{B}\end{array}}{B}\Diamond E_{(a)}.$$, onde uma instância da regra de dedução para a $\Diamond E$ deve ser especificada no seguinte formato:

$\Diamond E$:$<< \Gamma, \Diamond A >, < \Gamma_1, B^1_1 >, .., < \Gamma_{m^1}, B^1_{m^1} >, < \Gamma^1_1, B >, < \Delta, B >>$, onde $\Delta =$

$\Gamma \cup \Gamma_1 \cup .. \cup \Gamma_{m^1}$. $B^1_{l_5}$, para $1 \leq l_5 \leq m^1$, são fórmulas concretas do tipo $\Box C$, $\neg\Diamond C$ ou $\neg\bot$, para uma fórmula C qualquer, e B é da forma $\Diamond D$ ou $\bot$, para uma fórmula D qualquer.

d) Sistema $C^{''}_{S4}$

Definiremos nesta subseção as regras de inferência do sistema $C^{''}_{S4}$ de Dedução Natural para a lógica modal clássica $S4$ e provaremos, na seção 3.3.5, sua equivalência com a versão do sistema C_{S4} de Prawitz [38] para a lógica modal clássica $S4$ com todos os operadores. Seguem as regras do sistema $C^{''}_{S4}$:

a) Todas as regras do sistema $I^{''}_{S4}$.

b) A regra do absurdo clássico de C_1.

e) Sistema $C^{'''}_{S4}$ para a lógica proposicional modal clássica $S4$

Definiremos nesta seção as regras de inferência do sistema $C^{'''}_{S4}$ de Dedução Natural para a lógica modal clássica $S4$ e provaremos na seção 3.3.6 sua equivalência com o sistema $NS4$ de Medeiros [31] para a lógica modal clássica $S4$ sem o operador $\Diamond$. Seguem as regras do sistema $C^{'''}_{S4}$:

a) Todas as regras do sistema $I^{'}_{S4}$, com exceção das regras para introdução e eliminação do $\Diamond$.

b) A regra do absurdo clássico de C_1.

3.3 Provas de Equivalência

Nesta seção, provaremos as equivalências descritas a seguir entre sistemas definidos nesta tese e sistemas especificados na literatura. Provaremos que dois sistemas S e $S^{'}$ quaisquer em Dedução Natural são equivalente do seguinte modo: dada uma dedução em S de A a partir de Γ, provaremos que é possível encontrar uma dedução em $S^{'}$ de A a partir de Γ. Mostramos que o contrário também é verdadeiro.

Os sistemas definidos na literatura e considerados nesta seção são os seguintes:

a) M_1, I_1 e C_1 e os sistemas M, I e C de Prawitz [38].

b) I'_{S4} e o sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva [4].

c) I''_{S4} e o sistema I_{S4} de Prawitz [38].

d) C'_{S4} e o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28].

e) C''_{S4} e o sistema C_{S4} de Prawitz [38].

f) C'''_{S4} e o sistema $NS4$ de Medeiros [31].

Antes mostrarmos as provas de equivalência, porém, apresentamos abaixo as noções de comprimento e de *thread* de uma dedução concreta:

Definição 3.12. ***(Comprimento de uma Dedução)*** *O comprimento* $l(\Pi)$ *de uma dedução* Π *é igual ao número de ocorrências de fórmulas em* Π.

Definição 3.13. ***(Thread)*** *Uma thread é uma sequência de fórmulas* $A_1,..,A_n$ *em uma dedução concreta* Π *tal que* A_i *ocorre imediatamente acima de* A_{i+1}*, para* $1 \leq i < n$*,* A_1 *é uma fórmula folha e* A_n *é a conclusão de* Π.

As provas serão realizadas por indução no comprimento de uma dedução e garantem que os sistemas construídos a partir de nossas regras esquemáticas são sistemas de Dedução Natural corretos e completos com relação às respectivas lógicas para as quais eles foram definidos.

3.3.1 Equivalência entre M_1, I_1 e C_1 e os sistemas M, I e C de Prawitz

A prova da equivalência entre I_1 e o sistema I de Prawitz [38] e entre C_1 e o sistema C de Prawitz [38] segue da prova da equivalência do sistema M_1 em relação ao sistema M de Prawitz [38], descrita abaixo, e do fato de que a regra para absurdo intuicionístico de I_1 e a regra para o absurdo clássico de C_1 são iguais às respectivas regras de I e de C. O sistema M de Prawitz [38] é definido em função das regras usuais de introdução e de eliminação das constantes lógicas $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ da lógica minimal. Na sequência, provamos a equivalência entre o sistema M_1 e o sistema M de Prawitz.

Teorema 3.14. ***(Equivalência entre*** M_1 ***e*** M***)*** *Existe* $\Gamma \vdash A$ *em* M_1*, se, e somente se, existe* $\Gamma \vdash A$ *em* M.

Prova:

Primeiramente provaremos que, se $\Gamma \vdash A$ em M_1, então exite $\Gamma \vdash A$ em M. Se Π é uma dedução de A que depende de A em M_1, então Π' em M é igual a A. As regras de introdução da conjunção e da disjunção de M_1 são iguais às respectivas regras de M e a prova da afirmativa acima, no caso de $r(\Pi)$[1] ser $\wedge I$ ou $\vee I$, decorre da hipótese indutiva. Resta-nos mostrar os seguintes casos, onde Π é uma dedução em M_1 e Π' é uma dedução em M:

a.1) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\to I$:

Neste caso, Π é da seguinte forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma^1_1\end{matrix}}{A^1_1}}{\to (A^1_{1,1}, A^1_1)}\to I_{(a)}$$

. Pela hipótese indutiva, existe em M uma dedução

$$\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma'^1_1\end{matrix}}{A^1_1}$$

. Então Π' é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma'^1_1\end{matrix}}{A^1_1}}{\to (A^1_{1,1}, A^1_1)}\to I_{(a)}$$

. O caso em que $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\neg I$ é similar.

a.2) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\wedge E$:

Neste caso, Π é da seguinte forma

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\wedge(A^1_1, A^1_2)} \quad \dfrac{\Sigma^1}{B^1_1}..\dfrac{\Sigma^{m^1}}{B^1_{m^1}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B^1_1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \quad [A^1_1]^a \quad [A^1_2]^a\\ \Sigma^1_1\end{matrix}}{C}}{C}\wedge E_{(a)}.$$

Sejam Σ', $\Sigma'^1, .., \Sigma'^{m^1}$ e Σ'^1_1 deduções obtidas de $\Sigma, \Sigma^1, .., \Sigma^{m^1}$ e Σ^1_1, respectivamente, pela hipótese indutiva. Observe que A^1_1 e A^1_2 são utilizados em Σ^1_1 e, neste caso, portanto, Π' é igual a[2]:

$$\begin{matrix}\dfrac{\Sigma^1}{[B^1_1]}..\dfrac{\Sigma^{m^1}}{[B^1_{m^1}]} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma'}{\wedge(A^1_1, A^1_2)}}{[A^1_1]}\wedge E_{(a)} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma'}{\wedge(A^1_1, A^1_2)}}{[A^1_2]}\wedge E_{(a)}\\ \dfrac{\Sigma'^1_1}{C.}\end{matrix}$$

[1] $r(\Pi)$ é a última regra aplicada em uma dedução Π.

[2] Há um equívoco na prova da equivalência entre a regra de eliminação da conjunção definida por Chi em [7] e regra usual de eliminação da conjunção, como definida em Prawitz [38], por exemplo. Chi não considerou que A^1_1 e A^1_2 podem ter sido utilizados conjuntamente na dedução da premissa menor.

a.3) $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra de eliminação da disjunção ou da eliminação da implicação: similares ao item $a.2$).

a.4) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\neg E$: o resultado decorre diretamente da hipótese indutiva e do fato de que a regra $\neg E$ em M é um caso especial da regra $\rightarrow E$.

Agora provamos a afirmação inversa, ou seja, se $\Gamma \vdash A$ em M, então $\Gamma \vdash A$ em M_1. Se Π é uma dedução de A que depende de A em M, então Π' em M_1 é igual a A. As regras de introdução da conjunção e da disjunção M_1 são iguais às respectivas regras de M e a prova da afirmativa acima, no caso de $r(\Pi)$ ser $\wedge I$ ou $\vee I$, decorre da hipótese indutiva. Resta-nos mostrar os seguintes casos onde Π é uma dedução em M e Π' é uma dedução em M_1:

b.1) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\rightarrow I$:

Neste caso, Π é da seguinte forma $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma^1_1\end{matrix}}{A^1_1}}{\rightarrow(A^1_{1,1}, A^1_1)} \rightarrow I_{(a)}$. Pela hipótese indutiva, existe em M uma dedução $\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma'^1_1\end{matrix}}{A^1_1}$. Se A^1_1 for uma ocorrência de formula diferente de $\perp$, então Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma'^1_1\end{matrix}}{A^1_1}}{\rightarrow(A^1_{1,1}, A^1_1)} \rightarrow I_{(a)}$. Caso contrário, Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A^1_{1,1}]^{(a)}\\ \Sigma'^1_1\end{matrix}}{\perp}}{\neg A^1_{1,1}} \neg I_{(a)}$.

b.2) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\wedge E$:

Neste caso, Π é da seguinte forma $\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\wedge(A^1_1, A^1_2)}}{A^1_i} \wedge E_{(a)}$, para $i = 1$ ou $i = 2$ e, sendo Σ' a dedução obtida de Σ pela hipótese indutiva, então Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\Sigma'}{\wedge(A^1_1, A^1_2)} \quad [A^1_i]^a}{A^1_i} \wedge E_{(a)}$.

b.3) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\vee E$:

Neste caso, Π é da seguinte forma $\dfrac{\dfrac{\Sigma}{A_1 \vee A_2} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A_1]^a\\ \Sigma_1\end{array}}{B} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A_2]^a\\ \Sigma_2\end{array}}{B}}{B} \vee E_{(a)}$. Sejam Σ', Σ_1' e Σ_2' deduções obtidas de Σ, Σ_1 e Σ_2, respectivamente, pela hipótese indutiva e considere $B_1^1, .., B_{m^1}^1$ e $B_2^1, .., B_{m^2}^1$ as hipóteses das quais as premissas menores, respectivamente, dependem e que não são descartadas pela aplicação da regra. Então Π' é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma'}{A_1 \vee A_2} \quad B_1^1..B_{m^1}^1 B_1^2..B_{m^2}^2 \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B_1^1]^a..[B_{m^1}^1]^a[A_1]^a\\ \Sigma_1'\end{array}}{B} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B_1^2]^a..[B_{m^2}^2]^a[A_2]^a\\ \Sigma_2'\end{array}}{B}}{B} \vee E_{(a)}.$$

Caso todas as fórmulas das quais as premissas menores dependam tenham o mesmo formato das fórmulas A_1 e A_2 e sejam descartadas pela aplicação da regra, então m^1 e m^2 são iguais a zero, as premissas menores dependem exclusivamente de A_1 e A_2, respectivamente, e Π' é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma'}{A_1 \vee A_2} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A_1]^a\\ \Sigma_1'\end{array}}{B} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A_2]^a\\ \Sigma_2'\end{array}}{B}}{B} \vee E_{(a)}.$$

b.4) Eliminação da implicação: similar ao item $b.3$);

■

3.3.2 Equivalência entre I_{S4}' e o Sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva

O sistema de Dedução Natural $IS4$ para a lógica modal intuicionística $S4$ de Bierman e de Paiva [4] é definido em função das regras de inferência para introdução e eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Box$ e $\Diamond$, além da regra para o $\bot_i$. As regras para introdução e eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ são iguais às definidas para o sistema M de Prawitz descrito na seção 3.3.1. As regras de introdução do $\Box$, de introdução do $\Diamond$ e de eliminação do $\Diamond$ são iguais às respectivas regras do sistema I_{S4}' definido na seção 3.2.3, item a). A regra para o absurdo intuicionístico é igual à regra para o absurdo intuicionístico do sistema I de Prawitz [38] e a regra para eliminação do $\Box$ está mostrada abaixo:

$$\frac{\Box A}{A}\ \Box E.$$

Teorema 3.15. ***(Equivalência entre I'_{S4} e $IS4$)*** *Existe $\Gamma \vdash A$ em I'_{S4}, se, e somente se, existe $\Gamma \vdash A$ em $IS4$.*

Prova:

Na primeira parte da prova, vamos provar que, se Π é uma dedução $\Gamma \vdash A$ em I'_{S4}, então existe uma dedução Π' em $IS4$ tal que $\Gamma \vdash A$.

a.1) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação das regras de introdução ou de eliminação das constantes $\rightarrow$, $\wedge$ ou $\vee$, então existe Π' em $IS4$ tal que $\Gamma \vdash A$ pelos mesmos motivos expostos na seção 3.3.1 para a prova da equivalência entre os sistemas M_1 e M de Prawitz [38].

a.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra de introdução do $\Box$, de introdução do $\Diamond$ ou de eliminação do $\Diamond$, então existe Π' em $IS4$ tal que $\Gamma \vdash A$ a partir da aplicação da hipótese indutiva sobre as subdeduções determinadas pelas premissas, pelas premissas intermediárias e pelas premissas menores de $r(\Pi)$ e do fato de que as regras de introdução do $\Box$, de introdução do $\Diamond$ e de eliminação do $\Diamond$ de I'_{S4} e de $IS4$ são iguais.

a.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\Box E$, então Π é da seguinte forma

$$\frac{\dfrac{\Sigma}{\Box A} \quad \dfrac{\Sigma^1}{B_1^1} \quad \dfrac{\Sigma^{m^1}}{..B^1_{m^1}} \quad \begin{matrix}[B_1^1]^a \ldots [B^1_{m^1}]^a \quad [A]^a \\ \dfrac{\Sigma_1^1}{C}\end{matrix}}{C}\ \Box E_{(a)}.$$

Sejam $\Sigma, \Sigma'^1, .., \Sigma'^{m^1}$ e $\Sigma_1'^1$ deduções em $IS4$ obtidas de $\Sigma, \Sigma^1, .., \Sigma^{m^1}$ e Σ_1^1, respectivamente, pela hipótese indutiva. Então Π' é igual a:

$$\begin{matrix} \dfrac{\Sigma'^1}{[B_1^1]} \quad \dfrac{\Sigma'^{m^1}}{..[B^1_{m^1}]} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma'}{\Box A}}{A}\ \Box E \\ \dfrac{\Sigma_1'^1}{C.} \end{matrix}$$

O caso em que $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicionístico é consequência direta da hipóteses indutiva.

Agora provaremos o inverso, ou seja, se Π é uma dedução $\Gamma \vdash A$ em $IS4$, então existe uma dedução Π' em I'_{S4} tal que $\Gamma \vdash A$.

b.1) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação das regras de introdução ou de eliminação das constantes $\rightarrow$, $\wedge$ ou $\vee$, então existe Π' em I'_{S4} tal que $\Gamma \vdash A$ pelos mesmos motivos expostos na seção 3.3.1 para a prova da equivalência entre os sistemas M e M_1 de Prawitz [38].

b.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra de introdução do $\Box$, de introdução do $\Diamond$ ou de eliminação do $\Diamond$, então existe Π' em I'_{S4} tal que $\Gamma \vdash A$ a partir da aplicação da hipótese indutiva sobre as subdeduções determinadas pelas premissas, pelas premissas intermediárias e pelas premissas menores de $r(\Pi)$ e do fato de que as regras de introdução do $\Box$, de introdução do $\Diamond$ e de eliminação do $\Diamond$ de I'_{S4} e de $IS4$ são iguais.

b.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box E$, então Π é da forma $\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\Box A}}{A}\,\Box E_{(a)}$, e, sendo Σ' a dedução obtida de Σ pela hipótese indutiva, então Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\Sigma'}{\Box(A)} \quad [A]^a}{A}\,\Box E_{(a)}$.

Novamente, o caso em que $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicionístico é consequência direta da hipótese indutiva.

■

3.3.3 Equivalência entre I''_{S4} e o Sistema I_{S4} de Prawitz

Provamos nesta seção a equivalência entre o sistema I''_{S4} definido na seção 3.2.3 b) e o sistema I_{S4} de Prawitz [38]. Prawitz definiu três versões do sistema I_{S4} e denominamos cada versão por I^i_{S4}, para $i = 1, 2$ ou 3. Ele não considerou a constante lógica $\Diamond$ para a possibilidade como parte da linguagem da lógica modal intuicionística $S4$, porém definiu as regras de introdução e eliminação do $\Diamond$ para uma versão de I^1_{S4} com ambas as constantes modais.

Denominamos as versões dos sistemas I^i_{S4} que incluem a constante $\Diamond$ de sistemas I'^i_{S4}. As regras de introdução e eliminação do $\Box$ e do $\Diamond$ para I'^1_{S4} são as seguintes:

$$\frac{A}{\Box A}\,\Box I \qquad \frac{\Box A}{A}\,\Box E \qquad\qquad \frac{A}{\Diamond A}\,\Diamond I \qquad \frac{\Diamond A \quad \begin{matrix}[A]^a\\ \Sigma \\ B.\end{matrix}}{B}\,\Diamond E_{(a)}$$

Uma instância da regra de dedução para $\Box I$ em I'^{1}_{S4} deve ser especificada do seguinte modo:

$\Box I :<< \Gamma, A >, < \Gamma, \Box A >>$, onde as fórmulas de Γ são da forma $\Box C$ ou $\neg\Diamond C$, para uma fórmula C qualquer. Uma instância da regra de dedução para $\Diamond E$ em I'^{1}_{S4} deve ser especificada do seguinte modo:

$\Diamond E :<< \Gamma, \Diamond A >, < \Gamma_1, B >, < \Delta, B >>$, onde $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1 - \{A\}$, toda fórmula de $\Gamma_1 - \{A\}$ é da forma $\Box C$ ou $\neg\Diamond C$, para uma fórmula C qualquer, e B é da forma $\Diamond C$ e $\neg\Box C$.

A segunda e terceira versões do sistema I_{S4} utilizam a noção de fórmula essencialmente modal definida na página 77 da tese de Prawitz [38] e descrita abaixo:

Definição 3.16. ***(Fórmulas Essencialmente Modais)*** *Com relação aos sistemas C_{S4} e I_{S4}, a noção de uma fórmula essencialmente modal é a seguinte:*

a) $\Box A$ e $\perp$ são essencialmente modais.

b) Se A e B são essencialmente modais, então $A \vee B$ e $A \wedge B$ também são.

Conforme falamos, estendemos os sistemas I^2_{S4} e I^3_{S4} de Prawitz e adicionamos regras de introdução e eliminação do $\Diamond$. Para tanto adicionamos a cláusula "$\neg\Diamond A$ é uma fórmula essencialmente modal"à noção de fórmula essencialmente modal introduzida na definição 3.16 descrita acima. A figura das regras dos sistemas I'^{2}_{S4} e I'^{3}_{S4} são iguais, respectivamente, às figuras das regras do sistema I'^{1}_{S4}. Uma instância da regra de dedução para $\Box I$ em I'^{2}_{S4} deve ser especificada do seguinte modo:

$\Box I :<< \Gamma, A >, < \Gamma, \Box A >>$, onde as fórmula de Γ são essencialmente modais. Uma instância da regra de dedução para $\Diamond E$ em I'^{2}_{S4} deve ser especificada do seguinte modo:

$\Diamond E :<< \Gamma, \Diamond A >, < \Gamma_1, B >, < \Delta, B >>$, onde $\Delta = \Gamma \cup \Gamma_1 - \{A\}$, toda fórmula de $\Gamma_1 - \{A\}$ é essencialmente modal e B é da forma $\Diamond C$ e $\neg\Box C$. Uma instância da regra de dedução para $\Box I$ em I'^{3}_{S4} deve ser especificada de modo similar ao definido para I'^{2}_{S4}, porém a restrição sobre as fórmulas de Γ deve ser substituída pela seguinte restrição:

Definição 3.17. ***(Restrição para Aplicação da Regra*** $\Box I$***)*** *Em uma aplicação da regra* $\Box I$ *em deduções no sistema* I'^{3}_{S4}*, em cada thread da subdedução determinada por sua premissa* B*, ocorre uma fórmula essencialmente modal* C *tal que* C *não depende de nenhuma hipótese além das hipóteses das quais* B *também depende.*

Uma instância da regra de dedução para $\Diamond E$ em I'^{3}_{S4} deve ser especificada de modo similar ao definido para I'^{2}_{S4}, porém a restrição sobre as fórmulas de $\Gamma_1 - \{A\}$ deve ser substituída pela seguinte restrição:

Definição 3.18. ***(Restrição para Aplicação da Regra*** $\Diamond E$***)*** *Em uma aplicação da regra* $\Diamond E$ *em deduções no sistema* I'^{3}_{S4}*, em cada thread da subdedução determinada por sua premissa menor* B*, ocorre uma fórmula essencialmente modal* C *tal que* C *não depende de nenhuma hipótese além das hipóteses das quais* B *também depende.*

É possível verificarmos, de modo similar ao mostrado por Prawitz em [38] para as versões de I_{S4} sem a constante $\Diamond$, que os sistemas I'^{i}_{S4}, para $i = 1, 2$ ou 3, com ambos operadores modais são equivalentes.

Na sequência, provaremos a equivalência entre a versão do sistema I_{S4} de Prawitz com operadores $\Box$ e $\Diamond$, os sistemas I'^{i}_{S4}, para i=1, 2 ou 3, e o sistema I''_{S4} definido na seção 3.2.3.

Teorema 3.19. ***(Equivalência entre*** I'^{i}_{S4} ***e*** I''_{S4}***)*** *Existe* $\Gamma \vdash A$ *em* I'^{i}_{S4}*, se, e somente se, existe* $\Gamma \vdash A$ *em* I''_{S4}*.*

Prova:

Visto que os sistemas I'^{i}_{S4}, para i=1, 2 ou 3, são equivalentes, então, na primeira parte da prova, mostraremos que, se Π é uma dedução de $\Gamma \vdash A$ em I'^{1}_{S4}, então existe uma dedução Π' de $\Gamma \vdash A$ em I''_{S4}.

O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

a.1) $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1. Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico então a prova é direta da hipótese indutiva.

a.2) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box I$:

Neste caso, as ocorrências de fórmula de Γ são da forma $\Box A$ ou $\neg\Diamond A$, para uma fórmula A qualquer. Suponha, sem perda de generalidade, que Π seja da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Box B_1..\Box B_n \quad \neg\Diamond C_1..\neg\Diamond C_m\\ \Sigma \\ A\end{array}}{\Box A}\ \Box I,$$

para $n, m \geq 0$. Seja Σ' a dedução em I''_{S4} obtida de Σ pela hipótese indutiva. Então, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\Box B_1..\Box B_n \quad \neg\Diamond C_1..\neg\Diamond C_m \qquad \begin{array}{c}[\Box B_1]^a..[\Box B_n]^a \quad [\neg\Diamond C_1]^a..[\neg\Diamond C_m]^a\\ \Sigma' \\ A\end{array}}{\Box A}\ \Box I_{(a)}.$$

a.3) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box E$, então a prova é similar à apresentada no item b.3) da seção 3.3.2.

a.4) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond I$, a prova é direta da hipótese indutiva.

a.5) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond E$: similar ao item a.2).

Por fim, provaremos que, se Π é uma dedução de $\Gamma \vdash A$ em I''_{S4}, então existe uma dedução Π' de $\Gamma \vdash A$ em I'^{3}_{S4}. O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

b.1) $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1. Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico então a prova é direta da hipótese indutiva.

b.2) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box I$:

Neste caso, $r(\Pi)$ é igual a $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma^1\\ \hline A_1\end{array} \quad \ldots \begin{array}{c}\Sigma^n\\ \hline A_n\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_1]^a \ldots [A_n]^a\\ \Sigma^{n+1}\\ \hline A\end{array}}{\Box A}\ \Box I_{(a)}$, onde A_l é da forma $\Box B$ ou $\neg\Diamond B$, para $n \geq 0$ e $1 \leq l \leq n$. Sejam Σ'^{i} deduções em I'^{3}_{S4} obtidas de Σ^i, para $1 \leq i \leq n+1$, pela hipótese indutiva. Então Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma'^1}{[A_1]}\ldots\dfrac{\Sigma'^n}{[A_n]}}{\dfrac{\Sigma'^{n+1}}{A.}}}{\Box A}\ \Box I$. Note que o formato das premissas intermediárias da regra $\Box I$ de I''_{S4} garantem que a regra equivalente de I'^3_{S4} está correta.

b.3) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box E$: a prova é similar à apresentada no item $a.3$ da seção 3.3.1.

b.4) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond I$: a prova é direta da hipótese indutiva.

b.5) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond E$: similar ao item $b.2$).

■

Antes de finalizarmos esta seção, comparamos os sistemas $IS4$ de Bierman e de Paiva [4] e o sistema I'_{S4} de Prawitz [38] e constatamos que são sistemas para lógicas modais intuicionísticas $S4$ diferentes. Mostramos abaixo que há uma dedução de $\Box\neg A$ a partir de $\neg\Diamond A$ no sistema de Prawitz

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Diamond A \qquad \dfrac{[A]^a}{\Diamond A}\,\Diamond I}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,\neg I_{(a)}}{\Box\neg A}\,\Box I,$$

porém não existe uma dedução equivalente em $IS4$ [3].

Vale ressaltar, também, que, caso modificássemos qualquer das versões do sistema I'_{S4} de Prawitz de modo a permitir que o $\bot$ fosse premissa menor da aplicação da $\Diamond E$ e denominássemos o sistema resultante de I'^*_{S4}, então provaríamos, também, que há uma dedução de $\neg\Diamond A$ a partir de $\Box\neg A$ em I'^*_{S4}, conforme mostramos abaixo:

[3] A prova é uma adapatação da prova apresentada em Martins e Martins [28] para uma versão de seu sistema $CS4$ que não permite ocorrências de fórmula do tipo $\neg\Diamond A$ como premissa intermediária, para uma fórmula A qualquer.

$$\dfrac{[\Diamond A]^a \quad \dfrac{[A]^b \quad \dfrac{\dfrac{\Box\neg A}{\neg A}\,\Box E}{}}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\bot}{\neg\Diamond A}\,\neg I_{(a)}.}\,\Diamond E_{(b)}$$

Assim, em $I^{*'}_{S4}$, $\Box\neg A \vdash \neg\Diamond A$ e $\neg\Diamond A \vdash \Box\neg A$.

3.3.4 Equivalência entre $C^{'}_{S4}$ e o Sistema $CS4$ de Martins e Martins

O sistema $CS4$ de Martins e Martins [28] é definido em função das regras de inferência para introdução e eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Box$ e $\Diamond$, além das regras para o absurdo clássico e intuicionístico. As regras para introdução e eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ são iguais às definidas para o sistema M de Prawitz descrito na seção 3.3.1. As regras de introdução do $\Box$, de eliminação do $\Diamond$ e de introdução do $\Diamond$ são iguais às respectivas regras do sistema $C^{'}_{S4}$ definido na seção 3.2.3, item c). A regra para eliminação do $\Box$ é igual à regra de mesmo nome do sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva [4]. As regras para o absurdo intuicionístico e para o absurdo clássico são iguais às respectivas regras do sistema I de Prawitz [38].

Teorema 3.20. ***(Equivalência entre $C^{'}_{S4}$ e $CS4$)*** *Existe $\Gamma \vdash A$ em $C^{'}_{S4}$, se, e somente se, existe $\Gamma \vdash A$ em $CS4$.*

Prova:

Provaremos, primeiramente, que, se Π é uma dedução $\Gamma \vdash A$ em $CS4$, então existe uma dedução $\Pi^{'}$ de $\Gamma \vdash A$ em $C^{'}_{S4}$. O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

a.1) $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1.

a.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico, do absurdo clássico, da introdução do $\Box$, da eliminação do $\Diamond$ ou da introdução do $\Diamond$, então a prova é direta da hipótese indutiva.

a.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do $\Box E$, então a prova é similar à prova mostrada no item b.3), seção 3.3.2.

Depois, provaremos que, se Π é uma dedução de $\Gamma \vdash A$ em C'_{S4}, então existe uma dedução Π' de $\Gamma \vdash A$ em $CS4$. O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

b.1) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1.

b.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico, do absurdo clássico ou de introdução do $\Diamond$, então a prova é direta da hipótese indutiva.

b.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\Box E$, então a prova é similar à apresentada no item a.3, na seção 3.3.2.

b.4) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\Box I$ e nenhuma premissa intermediária tem a forma $\neg\bot$, então a prova é direta da aplicação da hipótese indutiva. Caso contrário, considere, sem perda de generalidade, que Π é igual a:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\neg\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\bot]^a\\ \Sigma^1\end{matrix}}{B}}{\Box B}\,\Box I_{(a)}.$$

Sejam Σ' e Σ'^1 deduções em $CS4$ obtidas, respectivamente, pela hipótese indutiva de Σ e Σ^1. Então Π' é igual a:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bot]^b}{\neg\bot}\,\neg I_{(b)}}{\Box\neg\bot}\,\Box I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{[\Box\neg\bot]}{\neg\bot}\,\Box E\\ \Sigma'^1\end{matrix}}{B}}{\Box B}\,\Box I_{(a)}.$$

Observe que a instância da regra de dedução para a $\Box I$ que conclui $\Box\neg\bot$ está correta e que, mesmo que as hipóteses utilizadas em Σ não estejam sendo usadas na dedução Π', dizemos existe uma dedução Π' em $CS4$ de $\Box B$ a partir do conjunto Γ.

■

3.3.5 Equivalência entre C''_{S4} e o Sistema C_{S4} de Prawitz

As regras do sistema C_{S4} e do sistema do sistema I_{S4}, ambos definidos por Prawitz [38], são iguais com exceção das regras $\vee E$ e $\vee I$ que não existem em C_{S4}. Mostramos as regras do sistema I_{S4} na seção 3.3.3.

Da mesma forma que expomos na seção 3.3.3 para o sistema I_{S4}, Prawitz definiu três versões para o sistema clássico C_{S4} e os denominamos de C^i_{S4}, para $i = 1, 2$ ou 3. Ele argumenta, na página 75 de sua tese [38], que o sistema C^1_{S4} é equivalente a sistemas axiomáticos usuais para a lógica modal $S4$, como por exemplo os sistemas definidos em [26], e prova que as três versões do sistema C_{S4} são equivalentes.

Teorema 3.21. ***(Equivalência entre*** C''_{S4} ***e*** C^i_{S4}***)*** *Existe* $\Gamma \vdash A$ *em* C''_{S4}*, se, e somente se, existe* $\Gamma \vdash A$ *em* C_{S4}*.*

Prova:

Provamos, primeiramente, que, se Π é uma dedução de $\Gamma \vdash A$ em C^1_{S4}, então existe uma dedução Π' de $\Gamma \vdash A$ em C''_{S4}. O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

a.1) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1.

a.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico ou do absurdo clássico, então a prova é direta da hipótese indutiva.

a.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box E$, então a prova é semelhante à apresentada no item $b.3$), na seção 3.3.2.

a.4) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box I$, então a prova é similar à apresentada no item $a.2$), na seção 3.3.3.

Depois, visto que as três versões de C_{S4} de Prawitz são equivalentes, conforme falamos anteriormente, provamos que, se Π é uma dedução de $\Gamma \vdash A$ em C''_{S4}, então existe uma dedução Π' de $\Gamma \vdash A$ em C^3_{S4}.

Para esta prova, estendemos o sistema C_{S4} de Prawitz e incluímos regras para introdução e eliminação da disjunção. Denominamos o sistema resultante de C'^3_{S4}. O sistema C'^3_{S4} é correto e completo em relação a C^3_{S4} pois, na lógica clássica, a disjunção pode ser definida em função da implicação e, portanto, os sistemas C^3_{S4} e C'^3_{S4} são equivalentes.

O caso base, onde o comprimento de Π é igual a um, é trivial. Se o comprimento de Π for maior do que um, temos as seguintes possibilidades:

b.1) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação de introdução ou de eliminação das constantes $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, então a prova é igual à prova mostrada na seção 3.3.1.

b.2) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação do absurdo intuicíonistico ou do absurdo clássico, então a prova é direta da hipótese indutiva.

b.3) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box E$, então a prova é semelhante à apresentada no item a.3), na seção 3.3.2.

b.4) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Box I$:

Neste caso, $r(\Pi)$ é igual a $\dfrac{\dfrac{\Sigma^1}{A_1}\quad \ldots\dfrac{\Sigma^n}{A_n}\quad \dfrac{\begin{matrix}[A_1]^a \ldots [A_n]^a\\ \Sigma^{n+1}\end{matrix}}{A}}{\Box A}\,\Box I_{(a)}$, onde A_l é da forma $\Box B$ ou $\neg\Diamond B$, para $n \geq 0$ e $1 \leq l \leq n$. Sejam Σ'^i deduções em C'^3_{S4} obtidas de Σ^i, para $1 \leq i \leq n+1$, pela hipótese indutiva. Então Π' é igual a $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma'^1}{[A'_1]}\ldots\dfrac{\Sigma'^n}{[A'_n]}\\ \Sigma'^{n+1}\end{matrix}}{A.}}{\Box A}\,\Box I$. Onde:

- Se A_i for da forma $\Box B$, para algum B, então A'_i é igual a A_i.
- Se A_i for da forma $\neg\Diamond B$, para algum B, então A'_i é igual a $\neg\neg\Box\neg B$.

Note que o formato das premissas intermediárias da regra $\Box I$ de I''_{S4} garantem que a regra equivalente de I'^{3}_{S4} está correta.

b.5) Se $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond I$, então Π é da seguinte forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ B\end{array}}{\Diamond B}\ \Diamond I.$$

Σ' é uma dedução em C'^{3}_{S4} obtida de Σ pela hipótese indutiva. Desse modo, Π' é igual a[4]:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma'\\ B\end{array} \quad \dfrac{[\Box\neg B]^a}{\neg B}\,\Box E}{\bot}\,\neg E}{\neg\Box\neg B}\,\neg I_{(a)}.$$

b.6) $r(\Pi)$ é uma aplicação da $\Diamond E$, então Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^1}{\Diamond A} \quad \dfrac{\Sigma^2}{B^1}..\dfrac{\Sigma^{n+1}}{B^n} \quad \begin{array}{c}[B^1]^a \ldots [B^n]^a \quad [A]^a\\ \dfrac{\Sigma^{n+2}}{B}\end{array}}{B}\,\Diamond E_{(a)},$$

onde B^i, para $1 \leq i \leq n$, é da forma $\Box C$ ou $\neg\Diamond C$, para uma fórmula C qualquer. Seja Σ'^j, para $1 \leq j \leq n+2$, deduções em C'^{3}_{S4} obtidas, respectivamente, de Σ^j, para $1 \leq j \leq n+2$. B pode ser da forma $\Diamond C$ ou $\neg\Box C$, para uma fórmula C qualquer. Analisamos o caso em que B é da forma $\neg\Box C$. O caso em a fórmula C é do tipo $\Diamond C$ tem tratamento similar. Π', portanto, tem a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box C]^a \quad \begin{array}{c}\dfrac{\Sigma'^2}{B'_1}..\dfrac{\Sigma'^{n+1}}{B'_n}\quad [A]^b\\ \dfrac{\Sigma'^{n+2}}{\neg\Box C}\end{array}}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,\neg I_{(b)}}{\Box\neg A}\,\Box I \quad \dfrac{\Sigma'^1}{\neg\Box\neg A}}{\bot}\,\neg E}{\neg\Box C}\,\neg I_{(a)}$$

Onde:

[4] Na lógica clássica, $\Diamond B$ equivale a $\neg\Box\neg B$.

- Se B_i for da forma $\Box D$, para algum D, então $B_i^{'}$ é igual a B_i.

- Se B_i for da forma $\neg\Diamond D$, para algum D, então $A_i^{'}$ é igual a $\neg\neg\Box\neg D$.

■

3.3.6 Equivalência entre $C_{S4}^{'''}$ e o Sistema $NS4$ de Medeiros

O sistema $NS4$ de Medeiros [31] é definido em função das mesmas regras que definem o sistema $IS4$ de Bierman e de Paiva [4], com exceção da regra para introdução do $\Diamond$ que não existe no sistema $NS4$.

A prova de equivalência entre $C_{S4}^{'''}$ e $NS4$ é similar à prova de equivalência entre os sistemas $I_{S4}^{'}$ e $IS4$ mostrada na seção 3.3.2.

3.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos o conceito de regras concretas. Regras concretas são construídas a partir de nossas regras esquemáticas introduzidas nas definições 2.5 e 2.14. Diferentemente da abordagem apresentada em Prawitz [40] e Chi [7], definimos procedimentos precisos que constroem regras a partir das regras esquemáticas. No artigo de Prawitz [40], onde ele apresenta suas regras esquemáticas, ele não define explicitamente como instanciar suas regras. Na verdade, a sua abordagem, que tem como um dos objetivos a prova da completude de operadores intuicionísticos, trata conectivos sentenciais usuais e esquemáticos em conjunto como parte das definições de suas regras esquemáticas. Consideramos que para os propósitos de Prawitz tal abordagem é a mais adequada. Com relação ao trabalho de Chi [7], lembramos que, nesse trabalho, apesar de considerar o conceito de instanciar regras esquemáticas, não fica bem definido se as regras para o absurdo intuicionístico são ou não instâncias das regras esquemáticas, conforme a própria autora menciona na página 21 de seu trabalho. Para os propósitos desta tese, portanto, optamos por definições que determinam precisamente o que é instanciar regras esquemáticas devido aos motivos descritos a seguir:

a) Os passos dos procedimentos introduzidos nas definições 3.3 a 3.8 permite que concluamos de modo decisivo que as regras para o absurdo intuicionístico e clássico não são instâncias das regras esquemáticas.

b) Além disso, os métodos que constroem regras concretas são, com pequenos ajustes, procedimentos automatizáveis.

Por fim, definimos sistemas concretos a partir de nossas regras esquemáticas e mostramos que estes sistemas concretos são equivalentes a importantes sistemas (modais ou não) definidos na literatura. Este fato nos permitirá, como será visto na sequência desta tese, comparar provas de normalização realizadas para esses sistemas definidos na literatura com a prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema esquemático de Dedução Natural S.

4 TEOREMAS DE NORMALIZAÇÃO FRACA PARA OS SISTEMAS S e S'

Neste capítulo, provaremos o Teorema de Normalização Fraca para os sistemas esquemáticos de Dedução Natural S e S'.

Na seção 4.1, especificaremos uma versão esquemática do Princípio da Inversão para as regras de introdução e de eliminação introduzidas na definição 2.5. Nossas definições seguem as definições de Prawitz [38] feita para os sistemas concretos de Dedução Natural M,I e C. Na seção 4.2, introduziremos algumas definições adicionais relacionadas com deduções esquemáticas em S e apresentaremos a prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema S. Na seção 4.3, provaremos o Teorema da Normalização Fraca para S'. Por fim, na seção 4.4, comentaremos sobre algumas provas de normalização encontradas na literatura.

4.1 Princípio da Inversão

Prawitz, em sua tese [38], observou que há exatamente uma de regra de introdução e uma de eliminação para cada constante lógica em seu sistema de Dedução Natural. Definimos, de modo similar, uma regra esquemática de introdução e uma de eliminação para as constantes lógicas esquemáticas Φ e ξ utilizadas no sistema S. As regras de introdução para as constantes Φ e ξ fornecem condições suficientes para dedução de fórmulas que tem Φ e ξ, respectivamente, como constantes lógicas principais. As condições suficientes dadas pelas regras esquemáticas de introdução são como segue:

a) para deduzir $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ a partir de Γ, é suficiente termos uma dedução de G^i_j a partir de $\Xi^i_j \cup \Delta^i_j \cup \Gamma$ e uma dedução de Δ^i_j a partir de Γ, para um valor qualquer de i entre 1 e s e para $1 \leq j \leq p_i$;

b) para deduzir ξH a partir de Γ, é suficiente termos uma dedução de τ a partir de $\Gamma \cup H$.

Regras de eliminação para as constantes lógicas Φ ou ξ permitem inferências a partir de uma fórmula esquemática E que tem Φ ou ξ, respectivamente, como constantes lógicas principais. Em uma aplicação da regra para eliminação do Φ, suas premissas menores vinculadas e suas hipóteses descartadas são subfórmulas de sua premissa maior. Em uma aplicação da regra para eliminação do ξ, sua premissa menor é subfórmula de sua premissa maior.

Da mesma forma como nas regras de inferência de Prawitz, temos que uma regra de eliminação é o inverso da regra de introdução correspondente, no sentido de que o que obtemos a partir da aplicação de uma regra de eliminação já tinha sido concluído se sua premissa maior tiver sido inferida a partir de uma regra de introdução. Essa relação entre as regras esquemáticas de introdução e de eliminação é expressa pelo princípio abaixo, que é uma adaptação para as regras esquemáticas do Princípio de Inversão definido por Prawitz [38]:

Definição 4.1. ***(Princípio de Inversão)*** *Seja α uma aplicação de uma regra esquemática de eliminação ou de eliminação da negação que tem E como consequência. Então, deduções que satisfazem as condições suficientes para dedução da premissa maior de α, quando combinadas com deduções das premissas menores, das premissas menores vinculadas e das premissas intermediárias, estas duas últimas quando existirem, já contêm uma dedução de E. A dedução de E pode, portanto, ser obtida de forma direta a partir destas deduções e a aplicação de α é desnecessária.*

O que o Princípio da Inversão atesta é que nada a mais é obtido se inferirmos uma fórmula esquemática E para a utilizarmos como premissa maior de uma regra esquemática de eliminação. O enunciado da versão esquemática do Teorema da Inversão é semelhante ao encontrado na tese de Prawitz [38] e sua prova segue do Princípio da Inversão:

Teorema 4.2. ***(Inversão Esquemático)*** *Se E é deduzido a partir de Γ, então há uma dedução de E a partir de Γ na qual nenhuma ocorrência de fórmula é ao mesmo tempo consequência da aplicação de uma regra esquemática de introdução ou de introdução da negação e premissa maior de uma aplicação de uma regra esquemática de eliminação ou de eliminação da negação, respectivamente.*

Uma consequência da aplicação de uma regra esquemática de introdução ou de introdução da negação que também é uma premissa maior de uma regra de eliminação ou de eliminação da negação é uma espécie de desvio que ocorre em uma dedução. Apresentamos, na sequência, dois procedimentos que são passos de indução da prova do teorema 4.2. Eles evidenciam que o Princípio da Inversão pode ser utilizado como parte da prova do teorema 4.2.

Seja Π uma dedução esquemática de E a partir de Γ que contém uma fórmula esquemática E_1 como conclusão de uma aplicação da regra esquemática de introdução e premissa maior de uma aplicação da regra esquemática de eliminação [1]. Então dizemos que Π' é uma redução de Π, se obtemos Π' quando removemos E_1 de Π a partir da aplicação de uma das seguintes re-escritas da dedução original Π introduzidas nas definições abaixo[2]:

Definição 4.3. ***(Redução Operacional - a.i.1)*** *Seja a dedução* Π *da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula* $\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)$ *é consequência da regra esquemática de introdução e premissa maior de uma aplicação da regra esquemática de eliminação:*

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\Delta_1^i \quad ..\Delta_{p_i}^i \quad \dfrac{\Sigma_1^i}{G_1^i}.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi_j^i]^a[\Delta_j^i]^a\\ \Sigma_j^i\end{matrix}}{G_j^i} \quad ..\dfrac{\Sigma_{p_i}^i}{G_{p_i}^i}}{\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)}\Phi I_{(a)} \quad \Lambda^1\ldots\Lambda^s\,\Xi_1^1\ldots\Xi_{p_s}^s \quad \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^i]^b\,[G_1^i]^b..[G_{p_i}^i]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\Phi E_{(b)}.\\ \Pi_1\end{matrix}$$

Obtemos a dedução Π' *a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima* $\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)$ *pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:*

$$\begin{matrix}\Lambda^i \quad \dfrac{\Sigma_1^i}{G_1^i}\ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}\Xi_j^i\,\Delta_j^i\\ \Sigma_j^i\end{matrix}}{G_j^i} \quad \ldots\dfrac{\Sigma_{p_i}^i}{G_{p_i}^i}\\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\\ \Pi_1.\end{matrix}$$

Note que, nesse caso, se Π é uma dedução esquemática de E a partir de Γ, então Π' também é uma dedução de E a partir de Γ.

[1] A regra de introdução considerada pode ser tanto uma regra de introdução ou de introdução da negação. O mesmo para a regra de eliminação.

[2] Para simplificar utilizamos $\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)$ no lugar de $\Phi(H_{1,1}^1,..,H_{p_s,h_{p_s}^s}^s,G_1^1,..,G_{p_s}^s)$.

Definição 4.4. ***(Redução Operacional a.i.2)*** *Seja a dedução Π da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula ξH é consequência da regra esquemática de introdução da negação e premissa maior de uma aplicação da regra esquemática de eliminação da negação:*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[H]^a\\ \Sigma^1\\ \tau\end{array}}{\xi H}\,\xi I_{(a)} \qquad H}{\begin{array}{c}\tau\\ \Pi_1\end{array}}\,\xi E.$$

Obtemos a dedução Π' a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima ξH pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:

$$\begin{array}{c}H\\ \Sigma^1\\ \tau\\ \Pi_1.\end{array}$$

Na seção 4.2, apresentaremos outros desvios que ocorrem em uma dedução esquemática no sistema S e reduções que removem estes desvios. Além disso, provaremos uma versão mais forte do Teorema da Inversão, o Teorema da Normalização Fraca, que elimina, não somente desvios do tipo descritos pelo Princípio da Inversão, mas também estes outros desvios descritos na seção 4.2 que ocorrem em deduções em S.

Na seção 2.4, definimos o sistema esquemático S' e, na seção 4.3, apresentaremos os tipos de desvios que podem ocorrer em dedução realizadas em S'. A nossa prova de normalização fraca para o sistema esquemático S' baseia-se em uma abordagem semelhante a que Prawitz utilizou na prova de normalização fraca para sistema I de Dedução Natural para a lógica intuicionística [38]. A diferença entre a prova para o sistema S' e a prova para S é que, na prova da normalização para o sistema S', definimos uma ordem de escolha dos desvios que serão removidos e, portanto, uma estratégia para encontrar uma sequência de redução específica que normaliza uma dedução em S'. Por um outro lado, na prova de normalização fraca para S, mostramos apenas que existe uma sequência de redução que normaliza deduções em S, mas não definimos uma estratégia de escolha de desvios a serem eliminados.

A prova da normalização do sistema S' e a identificação de uma sequência específica que normaliza uma dedução em S' possibilitou a definição do procedimento apresentado na seção 6.2 que normaliza deduções do sistema S'. Como trabalho futuro, pretendemos modificar a prova de normalização para o sistema S de modo que possamos adaptar o normalizador de deduções para receber como entrada deduções realizadas em sistemas modais.

4.2 Prova da Normalização Fraca para o Sistema Esquemático S

Na seção 4.1, descrevemos dois tipos de desvios que pode ocorrer em deduções no sistema S e enunciamos o teorema de inversão. Na sequência, apresentaremos outros desvios que ocorrem em uma dedução esquemática no sistema S e definiremos reduções que removem estes outros desvios. Além disso, provaremos uma versão mais forte do teorema da inversão, o Teorema da Normalização Fraca, que elimina, não somente desvios do tipo descritos pelo Princípio da Inversão, mas também estes outros desvios que podem ocorrer em deduções em S.

A nossa prova de normalização para o sistema S, diferentemente da prova de Prawitz para o sistema I para a lógica intuicionística [38], mostra, conforme já comentamos, que *existe* uma sequência de redução que transforma uma dedução Π em S em uma prova normal. Ela não se baseia, portanto, em uma estratégia que indique uma sequência de fórmulas máximas que devem ser eliminadas.

Introduziremos na sequência a definição de segmentos esquemáticos, segmentos esquemáticos máximos, de forma normal de deduções no sistema S e provaremos o Teorema da Normalização Fraca para S.

Definição 4.5. ***(Segmento Esquemático)*** *Um segmento σ em uma dedução Π é uma sequência E_1,..,E_n de ocorrências de fórmulas tal que:*

- *E_1 não é uma conclusão da regra esquemática de eliminação e não é uma hipótese intermediária da regra esquemática de introdução ou da regra esquemática de eliminação;*
- *E_i, para $i < n$, é uma premissa menor da regra esquemática de eliminação e E_{i+1} ocorre imediatamente abaixo de E_i ou E_i é uma premissa intermediária e E_{i+1} é uma hipótese intermediária da regra esquemática de introdução ou de eliminação;*

- E_n *não é uma premissa menor e não é uma premissa intermediária;*

Definição 4.6. ***(Fórmula esquemática Máxima)*** *Uma ocorrência de fórmula esquemática F em uma dedução Π é máxima se uma das seguintes condições forem verdadeiras:*

a) F é a conclusão de uma aplicação das regras ΦI, ξI, τ_c ou ΦE e, simultaneamente, premissa maior ou premissa intermediária de uma regra em Π. Além disso, caso o tamanho do segmento σ do qual F pertença seja igual a $n > 1$, então a n-ésima ocorrência de fórmula de σ não é uma premissa menor vinculada.

b) F é a conclusão de uma aplicação da regra ΦE ou τ_c e, simultaneamente, a premissa menor de uma aplicação de ξE, cuja premissa maior é uma ocorrência de fórmula folha da forma ξF.

Definição 4.7. ***(Segmento Esquemático Máximo)*** *Um segmento σ é máximo, se pelo menos uma das ocorrências de fórmula em σ é uma ocorrência de fórmula máxima.*

Definição 4.8. ***(Forma Normal de uma Dedução esquemática)*** *Uma dedução Π é normal, se em Π não existem segmentos esquemáticos máximos.*

Além das reduções operacionais $a.i.1$ e $a.i.2$ introduzidas nas definições 4.3 e 4.4 da seção 4.1, definiremos abaixo as reduções do absurdo $a.ii.1$, $a.ii.2$, $a.iii$ e $b.ii$; as reduções permutativas $b.i.1$ e $b.i.2$; e as reduções modais $c.i.1$ e $c.i.2$. Dizemos que uma ocorrência de fórmula esquemática máxima é do tipo $a.i.1$, $a.i.2$, $a.ii.1$, $a.ii.2$, $a.iii$, $b.ii$, $b.i.1$, $b.i.2$, $c.i.1$ ou $c.i.2$ se elas são removidas, respectivamente, pelas reduções de mesmo nome. Observamos que é fácil verificar, para uma dedução Π qualquer de E a partir de Γ, que Π' obtida a partir da eliminação de uma fórmula máxima de Π também é uma dedução de E a partir de Γ.

Definição 4.9. ***(Redução Esquemática para o Absurdo - a.ii.1)*** *A redução $a.ii.1$ elimina ocorrências de fórmula máxima que são consequências da regra esquemática para o absurdo clássico e premissa maior de uma aplicação da regra esquemática de eliminação. Essa redução é similar à introduzida na definição 4.10.*

Definição 4.10. ***(Redução Esquemática para o Absurdo - a.ii.2)*** *Temos dois casos:*

a) A ocorrência de fórmula máxima é consequência da regra esquemática para o absurdo clássico e premissa intermediária de uma aplicação da regra esquemática de eliminação:

Nesse caso, considere a dedução Π *da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula* $M^i_{l_5}$ *é fórmula máxima:*

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\xi M^i_{l_5}]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{matrix}}{M^i_{l_5}}\tau_{c_{(a)}} ..M^i_{m^i}..\Lambda^s \; \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\Phi E_{(b)}\\ \Pi_1\end{array}$$

Obtemos a dedução Π' *a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima* $M^i_{l_5}$ *pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:*

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..[M^i_{l_5}]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s \; \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\Phi E_{(b)} \quad [\xi F]^c}{\tau}\xi E}{\xi M^i_{l_5}}\xi I_{(b)}\\ \Sigma\\ \dfrac{\tau}{F}\tau_{c(c)}\\ \Pi_1\end{array}$$

b) A ocorrência de fórmula máxima é consequência da regra esquemática para o absurdo clássico e premissa intermediária de uma aplicação da regra esquemática de introdução: este caso é similar ao item a).

Definição 4.11. ***(Redução Esquemática para o Absurdo - a.iii)*** *Seja a dedução* Π *da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula* H *é consequência da regra esquemática para o absurdo clássico e premissa menor de uma aplicação da regra* ξE *cuja premissa maior é uma ocorrência de fórmula folha de forma* ξH*:*

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\xi H]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{matrix}}{H}\tau_{c_{(a)}} \quad [\xi H]^k}{\tau}(\xi E)\\ \Pi_1\end{array}$$

Obtemos a dedução Π' *a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima* H *pela re-escrita a.iii da dedução original do seguinte modo:*

$$\begin{array}{c} [\xi H]^k \\ \underline{\underline{\Sigma}} \\ \tau \\ \Pi_1 \end{array}$$

Definição 4.12. ***(Redução Esquemática Permutativa - b.i.1)*** *A redução b.i.1 elimina ocorrências de fórmula máxima que são consequências da regra esquemática de eliminação e premissa maior de uma aplicação da regra esquemática de eliminação. Essa redução é similar à introduzida na definição 4.13.*

Definição 4.13. ***(Redução Esquemática Permutativa - b.i.2)*** *Temos dois casos:*

a) A ocorrência de fórmula máxima é consequência da regra esquemática de eliminação e premissa intermediária de uma aplicação desta mesma regra:

Nesse caso, considere a dedução Π *da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula* $M^i_{l_5}$ *é fórmula máxima:*

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})\Lambda'^1..\Lambda'^s\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s}\dfrac{\Sigma'^1}{M^i_{l_5}}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda'^i]^a[G'^i_1]^a..[G'^i_{p_i}]^a\\ \Sigma'^i\end{array}}{M^i_{l_5}} \quad \dfrac{\Sigma'^s}{..M^i_{l_5}}}{M^i_{l_5}}\Phi E_{(a)} \quad ..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1\ \Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad \dfrac{\Sigma^s}{..F}}{\begin{array}{c}F\\ \Pi_1\end{array}}\Phi E_{(b)}.$$

Obtemos a dedução Π' *a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima* $M^i_{l_5}$ *pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:*

$$\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s}) \quad \Sigma''\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma''^1}{F}.. \quad \dfrac{[\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^a[\Lambda^1]^a..[M^i_1]^a.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^{i'}]^a[G^{i'}_1]^a..[G^{i'}_{p_i}]^a\\ \Sigma^{i'}\end{array}}{M^i_{l_5}} \quad ..[M^i_{m^i}]^a..[\Lambda^s]^a[\Xi^1_1]^a..[\Xi^s_{p_s}]^a\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad \dfrac{\Sigma^s}{..F}}{F}\Phi E_{(b)} \quad \dfrac{\Sigma''^s}{..F}}{\begin{array}{c}F\\ \Pi_1\end{array}}\Phi E_{(a)},$$

onde Σ'' *é a sequência de deduções das premissas intermediárias* $\Lambda'^1,..,\Lambda'^s,\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}),\Lambda^1,..,M^i_1,..,M^i_{l_5-1},M^i_{l_5+1},..,M^i_{m^i},..,\Lambda^s,$ $\Xi^1_1,..,\Xi^s_{p_s}$.

b) A ocorrência de fórmula máxima é consequência da regra esquemática de eliminação e premissa intermediária de uma aplicação da regra esquemática de introdução: este caso é similar ao item a).

Definição 4.14. ***(Redução Esquemática para o Absurdo - b.ii)*** *Seja a dedução Π da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula F é consequência da regra esquemática de eliminação e premissa menor de uma aplicação da regra ξE cuja premissa maior é uma ocorrência de fórmula folha de forma ξH:*

$$
\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \quad \begin{array}{c}[\Lambda^1]^a\,[G^1_1]^a..[G^1_{p1}]^a\\ \Sigma^1\\ F\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}[\Lambda^s]^a\,[G^s_1]^a..[G^s_{ps}]^a\\ \Sigma^s\\ F\end{array}}{F}\,\Phi E_{(a)} \qquad [\xi F]^b}{\begin{array}{c}\tau\\ \Pi_1\end{array}}\,\xi E.
$$

Obtemos a dedução Π' a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima F pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:

$$
\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..\Lambda^s\,[\xi F]^b\,\Xi^1_1..\Xi^1_{p_s} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^1]^a\,[G^1_1]^a..[G^1_{p1}]^a\,\Gamma^1\\ \Sigma^1\\ F\end{array} \quad [\xi F]^a}{\tau}\,\xi E \;.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^s]^a\,[G^s_1]^a..[G^s_{ps}]^a\,\Gamma^s\\ \Sigma^s\\ F\end{array} \quad [\xi F]^a}{\tau}\,\xi E}{\begin{array}{c}\tau\\ \Pi_1\end{array}}\,\Phi E_{(a).}
$$

Definição 4.15. ***(Redução Esquemática Operacional Modal - c.i.1)*** *Seja a dedução Π da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula $M^i_{l_5}$ é consequência da regra esquemática de introdução e premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦE[3]:*

[3]O caso $c.i.1$ em que $M^i_{l_5}$ é premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦI é similar ao apresentado nesta definição.

$$\cfrac{\Phi(H'^{1}_{1,1},..,G'^{s}_{p_s})\Lambda^1..M^i_1..\cfrac{\Delta^i_1..\Delta^i_{p_i}\cfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1}\quad..\quad\cfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j}\quad..\quad\cfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)}\;..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,\Xi'^{1}_{1}..\Xi'^{s}_{p_s}\,\cfrac{\Sigma^1}{F}\quad...\quad\cfrac{\begin{matrix}[\Lambda'^{i}]^b\,[G'^{i}_{1}]^b..[G'^{i}_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}\quad..\cfrac{\Sigma^s}{F}}{\begin{matrix}F\\ \Pi_1\end{matrix}}\,\Phi E_{(b)}.$$

Obtemos a dedução Π' *a partir da remoção da ocorrência de fórmula máxima* $M^i_{l_5}$ *pela re-escrita da dedução original do seguinte modo:*

$$\cfrac{\Phi(H'^{1}_{1,1},..,G'^{s}_{p_s})\quad\Sigma\quad\Xi'^{1}_{1}..\Xi'^{s}_{p_s}\,\cfrac{\Sigma^1}{F}\quad...\quad\cfrac{\begin{matrix}[M^i_1]^b..\cfrac{[\Delta^i_1]^b..[\Delta^i_{p_i}]^b\quad\cfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1}\quad..\quad\cfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j}\quad..\quad\cfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)}\;...[M^i_{m^i}]^b[G'^{i}_{1}]^b..[G'^{i}_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}\quad..\quad\cfrac{\Sigma^s}{F}}{\begin{matrix}F\\ \Pi_1\end{matrix}}\,\Phi E_{(b)},$$

onde, na dedução Π', Σ *é a sequência de dedução das premissas intermediárias* $\Lambda^1,..,M^i_1,..,M^i_{l_5-1},\Delta^i_1..\Delta^i_{p_i},M^i_{l_5+1}..M^i_{m^i},..,\Lambda^s$.

Definição 4.16. ***(Redução Esquemática Operacional Modal - c.i.2)*** *Seja a dedução Π da seguinte forma mostrada abaixo onde a ocorrência de fórmula ξH é consequência da regra esquemática de introdução e premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦE*[4]*:*

A eliminação da fórmula máxima ξH pela re-escrita da dedução original depende de como a hipótese H é utilizada em Σ:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\dfrac{\begin{array}{c}[H]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{array}}{\xi H}\,\xi I_{(a)}..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}.\\ \Pi_1\end{array}$$

[4]O caso $c.i.2$ em que ξH é premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦI é similar ao apresentado nesta definição.

a) H não é premissa maior. Nesse caso, a re-escrita da dedução original gera a seguinte dedução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..[\xi H]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}..\ \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F}\ ..\ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \quad [\xi F]^c}{\begin{array}{c}\dfrac{\tau}{H}\,\tau_{c_{(b)}}\\ \Sigma\\ \dfrac{\tau}{F}\,\tau_{c_{(c)}}\\ \Pi_1.\end{array}}\,\xi E$$

b) H é premissa maior. Mostramos novamente a dedução Π e como ela deve ser re-escrita:

$$
\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[H]^c \quad {\Lambda'}^1..{\Lambda'}^s{\Xi'}^1_1..{\Xi'}^s_{p_s} \quad \dfrac{{\Sigma'}^1}{F'}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[{\Lambda'}^i]^a[{G'}^i_1]^a..[{G'}^i_{p_i}]^a\\ {\Sigma'}^i\end{array}}{F'} \quad ..\dfrac{{\Sigma'}^s}{F'}}{F'}\,\Phi E_{(a)}}{\begin{array}{c}\Sigma\\ \tau\end{array}}}{\xi H}\,\xi I_{(c)} \quad ..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{\begin{array}{c}F\\ \Pi_1\end{array}}\,\Phi E_{(b)}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Sigma'\,\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\,\dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1]^d..\\ \Sigma^1\end{array}}{F}.. \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[H]^e \quad [{\Lambda'}^1]^d..[{\Lambda'}^s]^d[{\Xi'}^1_1]^d\ldots[{\Xi'}^s_{p_s}]^d\,\dfrac{{\Sigma'}^1}{F'}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[{\Lambda'}^i]^c[{G'}^i_1]^c..[{G'}^i_{p_i}]^c\\ {\Sigma'}^i\end{array}}{F'} \quad ..\dfrac{{\Sigma'}^s}{F'}}{F'}\,\Phi E_{(c)} \quad [\xi F']^d}{\xi E}}{\begin{array}{c}\tau\\ \hline \xi H\end{array}}\,\xi I_{(e)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}..[M^i_{m^i}]^d[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(d)} \quad [\xi F]^b}{\begin{array}{c}\tau\\ \hline F'\end{array}\,\tau_{c_{(a)}}}\,\xi E
$$

$$
\begin{array}{c} F' \\ \Sigma \\ \hline \tau \\ \hline F \\ \Pi_1 \end{array}\,\tau_{c_{(b)}}
$$

onde Σ'*, em* Π'*, é a sequência de deduções das premissas intermediárias* $\Lambda^1, .., M_1^i, .., \Lambda'^1, .., \Lambda'^s, \Xi_1'^1, .., \Xi_{p_s}'^s, .., M_{m^i}^i..\Lambda^s$ *e* $\xi F'$*, e* $\xi F'$ *é a hipótese descartada pela aplicação da regra* $\perp_c$ *que concluí* F'*.*

Na sequência, introduziremos definições básicas para a prova de normalização fraca do sistema S. As definições de reducibilidade imediata e de reducibilidade são iguais as elaborados por Prawitz em [39]. As definições de fórmulas discordantes, de propagação de uma ocorrência de fórmula, de índice de uma fórmula esquemática e de índice de uma dedução introduzidas na definição 4.19 são similares às respectivas definições feitas por Martins e Martins em [28].

Definição 4.17. ***(Reducibilidade Imediata)*** *Uma dedução* Π *se reduz imediatamente a* Π'*, se* Π' *é obtida de* Π *pela substituição de uma subdedução* Π^* *de* Π *por uma redução* $\Pi^{*'}$ *de* Π^**.*

Definição 4.18. ***(Reducibilidade)*** *Uma dedução* Π *se reduz a* Π'*, se existe uma sequência* $\Pi_1,..,\Pi_n$*,* $n \geq 1$*, onde* $\Pi_1 = \Pi$*,* Π_i *se reduz imediatamente a* Π_{i+1}*, para cada* $i < n$*, e* $\Pi_n = \Pi'$*.*

Note que, pela definição 4.18, concluímos que uma dedução Π reduz-se a ela mesma.

Definição 4.19.

a) Fórmulas esquemáticas discordantes são fórmulas máximas eliminadas pelas reduções $a.i.1$*,* $a.i.2$*,* $b.i.1$*,* $b.i.2$*,* $c.i.1$ *e* $c.i.2$*.*

b) O tamanho $l(\sigma)$ *de um segmento* σ *é igual ao número de ocorrências de fórmulas em* σ*.*

c) A propagação $s(H)$ *de uma fórmula esquemática é igual a* $l(\sigma_1)+..+l(\sigma_n)$*, onde* $\sigma_1,..,\sigma_n$ *são segmentos em uma dedução* Π *e* H *pertence a* σ_i*, para* $1 \leq i \leq n$*.*

d) O índice de vizinhança $r(H)$ *de uma ocorrência de fórmula esquemática* H *é igual ao número de fórmulas discordantes vizinhas de* H*.*

e) O índice $i(H)$ *de uma fórmula esquemática discordante* H *é igual a* $(d(H), r(H), s(H))$*.*

f) O índice $i(\Pi)$ *de uma dedução é igual a* $max(i(H_1), .., i(H_n))$*, onde* $H_1, .., H_n$ *são fórmulas discordantes. Se não existem fórmulas discordantes em* Π*, então* $i(\Pi) = (0, 0, 0)$*.*

Os lemas descritos e provados na sequência são utilizados na demonstração do Teorema de Normalização Fraca. Utilizamos $\rhd\rhd$ como símbolo para redução. O Lema

Crítico atesta que o índice $i(\Pi)$ de uma dedução Π pode ser reduzido se suas fórmulas máximas são premissas de $r(\Pi)$. A prova do Teorema de Normalização Fraca é por indução no par $(i(\Pi), l(\Pi))$. Pela hipótese de indução, as deduções das premissas de $r(\Pi)$ são reduzidas a deduções normais. Se a dedução $\Pi^{'}$ resultante da substituição das deduções das premissas de $r(\Pi)$ por suas correspondentes normais for normal, a prova está concluída. Caso contrário, todas as fórmulas máximas de $\Pi^{'}$ são premissas de $r(\Pi^{'})$. Se $i(\Pi^{'})$ for diferente de zero, então, pelo Lema Crítico, $\Pi^{'}$ pode ser reduzida a $\Pi^{''}$ cujo índice será menor do que o índice de Π. Nesse caso, pela hipótese indutiva, $\Pi^{''}$ reduz-se a uma dedução normal. Se, de um outro modo, $i(\Pi^{'})$ for igual a zero, então, pelos lemas 4.20, 4.21 e 4.22 descritos a seguir, $\Pi^{'}$ é redutível a $\Pi^{''}$ normal.

Lemma 4.20. ***(Ocorrência de Segmentos Esquemáticos Máximos dos Tipos a.iii e b.ii)*** *Seja Π uma dedução $\Gamma \vdash \tau$, tal que:*

- *F é a única ocorrência de fórmula máxima.*
- *F é uma premissa menor de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo a.iii ou b.ii.*

Então Π pode ser reduzida a uma dedução normal $\Pi^{'}$ de $\Gamma \vdash \bot$.

Prova:

A prova é por indução em $s(F)$. Pela hipótese do Lema, F é a única ocorrência de fórmula máxima e é do tipo a.iii ou b.ii. Portanto, $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra esquemática de eliminação da negação e $i(\Pi)$=(0,0,0). Assim, temos que:

a) Se F é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo *a.iii*, então sua eliminação não gera novas fórmulas máximas. Portanto, nesse caso, $\Pi^{'}$ é a dedução obtida a partir da eliminação da fórmula máxima F pela aplicação da redução *a.iii*.

b) A redução que elimina fórmulas máximas do tipo *b.ii* gera uma dedução Π^{*} no formato mostrado abaixo:

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..\Lambda^s\,[\xi F]^c\,\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^1]^a\,[G^1_1]^a\,..\,[G^1_{p1}]^a\\ \Sigma^1\end{matrix}}{F} \quad [\xi F]^a}{\tau}\,\xi E \quad .. \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^s]^a\,[G^s_1]^a\,..\,[G^s_{ps}]^a\\ \Sigma^s\end{matrix}}{F} \quad [\xi F]^a}{\tau}\,\xi E}{\tau}\,\Phi E_{(a)}.$$

Se Π^* é normal, então Π' é igual a Π^*. Caso contrário, pelo menos uma das subdeduções determinadas pelas premissas menores τ em Π^* é da forma descrita por este Lema. Seja Π_i^* a subdedução de Π^* determinada pela i-ésima premissa menor τ. Suponha que a ocorrência de fórmula F é uma fórmula máxima em Π_i^*. Nesse caso, $s(F)$, em Π_i^*, é menor do que $s(F)$ em Π e, pela hipótese de indução, Π_i^* pode ser reduzido a uma dedução normal Π_i^{**}. Obtemos uma dedução normal Π' a partir da substituição das subdeduções Π_i^* por Π_i^{**}, para toda i≤i≤n onde Π_i^* não seja normal.

■

Lemma 4.21. ***(Permanência)*** *Seja Π uma dedução tal que $i(\Pi)$=(0,0,0). Se Π for reduzida a uma dedução Π', então $i(\Pi')$=(0,0,0)*

A prova segue de modo direto das definições.

Lemma 4.22. ***(Deduções de Índice (0,0,0))*** *Seja Π uma dedução tal que $i(\Pi)$=(0,0,0). Então Π pode ser reduzida a uma dedução normal Π'.*

Prova:

Para a prova do Lema 4.22, considere que Π não é normal. Seja Π igual a $\dfrac{\Pi_1..\Pi_n}{H}\,r(\Pi)$. A prova é por indução no comprimento de Π. Pela hipótese de indução, Π_i, para $1 \leq i \leq n$, pode ser reduzida a uma dedução normal Π_i'. Então, seja Π^* igual a $\dfrac{\Pi_1'..\Pi_n'}{H}\,r(\Pi)$. Se Π^* é normal, então $\Pi' = \Pi^*$. Caso contrário, pelo Lema 4.21, $i(\Pi^*)$=(0,0,0) e Π^* é igual a $\dfrac{\dfrac{\Sigma}{H} \quad [\xi H]}{\tau}\,\xi E$. H é uma fórmula esquemática máxima do tipo a.iii ou b.ii. Portanto, pelo Lema 4.20, Π^* é redutível a uma dedução normal Π'.

■

Lemma 4.23. ***(Fórmulas Esquemáticas de Tipo a.i.1)***[5] *Seja Π uma dedução $\Gamma \vdash E$ tal que:*

- *Todas as ocorrências de fórmulas máximas são premissas de $r(\Pi)$.*

[5] O Lema sobre fórmulas esquemáticas do tipo $a.i.2$ é semelhante. Nesse caso, a prova é direta, segue do fato de que H é a única fórmula máxima que pode ser gerada após a redução e de que $d(H) < d(\xi H)$.

- *$i(\Pi) = (p, r-1, q) > (0,0,0)$ e $Q_1, Q_2, ..., Q_r$, para $r \geq 1$, são ocorrências de fórmulas discordantes.*

- *Q_1 é uma premissa maior do tipo a.i.1 e $i(Q_1) = (p, r-1, q)$.*

Então Π pode ser reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.

Prova:

Na dedução abaixo, $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ é Q_1 e $i(\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})) = (p, r-1, q)$. Segue a dedução Π:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta^i_1 \quad ..\Delta^i_{p_i}\; G^i_1.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{array}}{G^i_j} \quad .. \quad G^i_{p_i}}{\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})}\;\Phi I_{(a)} \quad \Lambda^1..\Lambda^s\; \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^i]^b\,[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\;\Phi E_{(b)},$$

e a redução Π'

$$\begin{array}{c} \Lambda^i \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1}.. \; \dfrac{\begin{array}{c}\Xi^i_j\;\Delta^i_j\\ \Sigma^i_j\end{array}}{G^i_j} \; ..\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}} \\ \dfrac{\Sigma^i}{F.} \end{array}$$

A prova deste Lema segue dos seguintes fatos:

i) As ocorrências de fórmula que pertencem a Δ^i_j, para $1 \leq j \leq p_i$, não são ocorrências de fórmula discordantes porque, caso contrário, elas também seriam fórmulas discordantes em Π, mas não seriam premissas de $r(\Pi)$.

ii) As ocorrências de fórmula $H^i_{j,1}, .., H^i_{j,h^i_j}$ de Ξ^i_j podem ser fórmulas discordantes em Π', porém, $d(H^i_{j,h^i_j}) < \Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$. Utilizamos raciocínio semelhante com relação às fórmulas G^i_j.

iii) Se $r > 1$, então suponha que a fórmula $M^i_{l_5} \in \Lambda^i$ é uma fórmula discordante em Π e que $i(M^i_{l_5}) = (p', r-1, q')$. Visto que $i(\Pi) = i(Q_1) = (p, r-1, q)$ e Q_1 é uma premissa maior, então $p^{'} < p$, pois $p^{'} = p$ implicaria que $q^{'} \leq q$ em Π e isto não é possível pela definição de segmento.

$\blacksquare$

Lemma 4.24. ***(Ocorrências de Fórmulas esquemáticas de Tipo b.i.1)*** *Seja* Π *uma dedução* $\Gamma \vdash F$ *tal que:*

- *Todas as ocorrências de fórmulas máximas são premissas de* $r(\Pi)$.
- $i(\Pi) = (p, r-1, q) > (0,0,0)$ *e* $Q_1, Q_2, ..., Q_r$, *para* $r \geq 1$, *são ocorrências de fórmulas discordantes;*
- Q_1 *é uma premissa maior, é fórmula máxima do tipo b.i.1 e* $i(Q_1) = (p, r-1, q)$.

Então Π *pode ser reduzida a uma dedução* $\Pi^{'}$, *tal que* $i(\Pi^{'}) < i(\Pi)$.

Prova:

Mostramos na sequência Π e sua redução $\Pi^{'}$:

$$
\dfrac{\dfrac{\Phi(H^{'1}_{1,1},..,G^{'s}_{p_s}) \quad \Lambda^{'1}..\Lambda^{'s}\;\Xi^{'1}_{1}..\Xi^{'s}_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^{'1}}{\Phi(H^{1}_{1,1},..,G^{s}_{p_s})}.. \; \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{[\Lambda^{'i}]^a[G^{'i}_1]^a..[G^{'i}_{p_i}]^a}{\Sigma^{'i}}}{\Phi(H^{1}_{1,1},..,G^{s}_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{'s}}{..\Phi(H^{1}_{1,1},..,G^{s}_{p_s})}}{\Phi(H^{1}_{1,1},..,G^{s}_{p_s})}\,\Phi E_{(a)} \; \Lambda^1..\Lambda^s\;\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{[\Lambda^i]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\Sigma^i}}{F} \quad \dfrac{\Sigma^s}{..F}}{F}\,\Phi E_{(b)}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{\Phi(H^{'1}_{1,1},..,G^{'s}_{p_s}) \quad \Lambda^{'1}..\Lambda^{'s}\;\Lambda^1..\Lambda^s\;\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\;\Xi^{'1}_1..\Xi^{'s}_{p_s}\;\dfrac{\Sigma^{''1}}{F}.. \quad \dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{[\Lambda^{i'}]^a[G^{i'}_1]^a..[G^{i'}_{p_i}]^a}{\Sigma^{i'}}}{\Phi(H^{1}_{1,1},..,G^{s}_{p_s})} \; [\Lambda^1]^a..[\Lambda^s]^a[\Xi^1_1]^a..[\Xi^s_{p_s}]^a\;\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{[\Lambda^i]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\Sigma^i}}{F} \quad \dfrac{\Sigma^s}{..F}}{F}\,\Phi E_{(b)}\;.. \quad \dfrac{\Sigma^{''s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(a)}.
$$

A prova segue de:

i) As ocorrências de fórmulas que pertencem a Λ'^{i}, para $1 \leq i \leq s$, e a ocorrência de fórmula $\Phi(H'^{1}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$ não são fórmulas máximas em Π' porque, caso contrário, elas seriam fórmulas máximas em Π, porém não são premissas de $r(\Pi)$.

ii) Se $r = 1$, então $i(\Pi') = (p, 0, q') < i(\Pi) = (p, 0, q)$, pois $s(\Phi(H^{1}_{1,1}, .., G^{s}_{p_s})) = q'$ em Π' é menor do que em $s(\Phi(H^{1}_{1,1}, .., G^{s}_{p_s})) = q$ em Π. Se $r > 1$, então fórmulas dos conjuntos Λ^{i} em Π também são fórmulas máximas. Suponha, sem perda de generalidade, que $r = 2$, $M^{i}_{l_5} \in \Lambda^{i}$ é fórmula máxima em Π e que $i(M^{i}_{l_5}) = i(\Phi(H^{1}_{1,1}, ..., G^{s}_{p_s})) = (p, 1, q)$. Então $i(\Pi') = i(M^{i}_{l_5}) = (p, 1, q') < (p, 2, q)$, para $q' > q$.

iii) As premissas intermediárias dos conjuntos Ξ^{1}_{1},..,$\Xi^{s}_{p_s}$ de $r(\Pi')$ não são fórmulas máximas porque as hipóteses intermediárias correspondentes são premissas menores na aplicação da regra ΦE que tem $\Phi(H^{1}_{1,1}, .., G^{s}_{p_s})$ como premissa maior.

■

Lemma 4.25. ***(Crítico)*** *Seja Π uma dedução tal que:*

- *Todas as fórmulas esquemáticas máximas são premissas de $r(\Pi)$.*
- *$i(\Pi)$=(p,r-1,q)>(0,0,0).*
- *Existem $r \geq 1$ fórmulas máximas*[6].

Então Π pode ser reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.

Prova:

Seja $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ as ocorrências de fórmulas esquemáticas máximas em Π. Sem perda de generalidade, considere que $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ ocorrem da esquerda para a direita como premissas de $r(\Pi)$. A prova desse Lema é por indução em $l(\Pi)$ e analisamos os seguintes casos:

a) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação, $i(Q_1) = (p, r-1, q)$, Q_1 é uma premissa maior de $r(\Pi)$ e uma ocorrência de fórmula máxima do tipo a.i.1, a.i.2 ou b.i.1:

[6] Note que podem existir ocorrências de fórmulas máximas com índice menor do que $(p, r-1, q)$.

Nesse caso, Π é da forma descrita nos lemas 4.23 ou 4.24, respectivamente, e, portanto, pode ser reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.

b) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação, $i(Q_1) = (p, r-1, q)$, Q_1 é uma premissa maior de $r(\Pi)$ e uma ocorrência de fórmula máxima do tipo a.ii.1:

Nesse caso, na dedução Π apresentada abaixo, Q_1 é $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$. A dedução Π' obtida a partir da eliminação da fórmula máxima $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ está mostrada abaixo de Π:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{array}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\tau_{c_{(a)}} \quad \Lambda^1_1..\Lambda^s_{p_s}\ \Xi^1_1\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}\,..\quad \begin{array}{c}[\Lambda^i_j][G^i_{j,1}]^b..[G^i_{j,p_i}]^b\\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\end{array}\quad ..\ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

$$\rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^a\quad \Lambda^1_1..\Lambda^s_{p_s}\ \Xi^1_1\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}\,..\quad \begin{array}{c}[\Lambda^i_j][G^i_{j,1}]^b..\quad [G^i_{j,p_i}]^b\\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\end{array}\quad ..\ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\xi I_{(a)}}\,\xi E\\ \Sigma\\ \dfrac{\tau}{F}\,\tau_{c_{(c)}}.\end{array}$$

Temos duas possibilidades:

b.1) $\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ não é uma ocorrência de fórmula máxima em Π': $i(\Pi') = (p, r-2, q) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$, se $r > 1$, e $i(\Pi') = (0,0,0) < i(\Pi) = (p, r, q)$, se $r = 1$.

b.2) $\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ é uma ocorrência de fórmula máxima in Π': dividimos o caso b.2 em dois sub-casos:

b.2.1) Se a ocorrência de fórmula $\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ em Π' for premissa maior, então Π' é igual a :

$$
\dfrac{\dfrac{\Sigma^{\Phi}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^b \quad \Lambda^1_1..\Lambda^s_{p_s} \ \Xi^1_1\Xi^s_{p_s} \ \dfrac{\Sigma^1}{F} .. \ \begin{matrix}[\Lambda^i_j]^c[G^i_{j,1}]^c..[G^i_{j,p_i}]^c \\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\end{matrix} \ .. \ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(c)} \qquad [\xi F]^a}{\tau}\,\xi E}{\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\xi I_{(b)}}{\begin{matrix}\tau \\ \Sigma' \\ \dfrac{\tau}{F.}\,\tau_{c(a)}\end{matrix}}\,\xi E
$$

Obtemos a dedução Π'' aplicando a redução $a.i.2$, introduzida na definição 4.4:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^{\Phi}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \Lambda^1_1..\Lambda^s_{p_s} \ \Xi^1_1\Xi^s_{p_s} \ \dfrac{\Sigma^1}{F} .. \ \begin{matrix}[\Lambda^i_j]^c[G^i_{j,1}]^c..[G^i_{j,p_i}]^c \\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\end{matrix} \ .. \ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(c)} \qquad [\xi F]^a}{\begin{matrix}\tau \\ \Sigma' \\ \dfrac{\tau}{F}\,\tau_{c(a)}\end{matrix}}\,\xi E
$$

A ocorrência de fórmula esquemática $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ não é conclusão da aplicação da regra τ_c e nem da regra ΦE, pois, do contrário, existiria uma ocorrência de fórmula máxima do tipo a.iii ou b.ii, respectivamente, que não seriam premissas de $r(\Pi)$.

Seja Π''' uma subdedução de Π'' determinada pela a ocorrência de fórmula F que é conclusão da aplicação da regra ΦE. Π''' é da forma descrita por este Lema e, pela hipótese indutiva, Π''' é redutível a Π'''', tal que $i(\Pi'''') < i(\Pi''') = i(\Pi)$. A dedução final é obtida a partir de Π'' pela substituição de Π''' por Π''''.

b.2.2) Se $\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ é uma premissa intermediária, então Π' é igual a[7]:

[7] O caso em que $\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ é premissa intermediária da regra ΦE é tratado de modo semelhante.

$$
\dfrac{\Delta_1^i \quad ..E^i_{j,l_2-1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^a \quad \Lambda^1..\Lambda^s\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^1]^c[G^1_1]^c..[G^1_{p_1}]^c\\ \Sigma^1\end{array}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^s]^c[G^s_1]^c..[G^s_{p_s}]^c\\ \Sigma^s\end{array}}{F}}{F}\,\Phi E_{(c)} \quad [\xi F]^b}{\tau}\,\Xi E}{\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\xi I_{(a)} \quad E^i_{j,l_2+1}..\Delta^i_{p_i} \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G'^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi'^i_j]^d[\Delta^i_j]^d\\ \Sigma^i_j\end{array}}{G'^i_j} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G'^i_{p_i}}}{\begin{array}{c}\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})\\ \dfrac{\Sigma'}{\dfrac{\tau}{F,}\,\tau_{c_{(b)}}}\end{array}}\,\Phi I_{(d)}
$$

onde E^i_{j,l_2} é igual a $\Xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$.

Observe que:

i) As ocorrências de fórmula $\Phi(H'^{1}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$,$\Delta^i_1, .., E^i_{j,l_2-1}, E^i_{j,l_2+1}, .., \Delta^i_{p_i}$ não são ocorrências de fórmula máxima porque não são premissas de $r(\Pi)$.

ii) O grau das premissas intermediárias de $\Lambda^1, .., \Lambda^2$ da aplicação da regra ΦE é menor do que o grau da fórmula $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$, pelo mesmo motivo exposto no item *iii)* da prova do Lema 4.23.

iii) Se a hipótese intermediária $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ da aplicação da regra ΦI é premissa maior da aplicação da regra ξE, a ocorrência de fórmula $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ vizinha de $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ não é conclusão de uma aplicação das regras τ_c e ΦE, pois, caso contrário, estas fórmulas vizinhas seriam ocorrências de fórmulas esquemáticas máximas do tipo a.iii ou b.ii, mas não seria premissas de $r(\Pi)$.

$\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ é uma ocorrência de fórmula máxima em Π', a eliminamos por meio da redução $c.i.2$, subcaso b, introduzida na definição 4.16 e obtemos a dedução Π'' mostrada abaixo:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta_1^i \quad ..E^i_{j,l_2-1}\Lambda^1..\Lambda^s\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}E^i_{j,l_2+1}..\Delta^i_{p_i}[\xi F]^a\dfrac{\Sigma^i_1}{G'^i_1}..\Sigma''^i_j..\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G'^i_{p_i}}}{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})}\,\Phi I_{(e)} \qquad [\xi\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})]^b}{\dfrac{\tau}{F}\ \tau_{c_{(a)}}}\,\xi E \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})}{\dfrac{\Sigma'}{\dfrac{\tau}{F}\ \tau_{c_{(c)}}}}}\ \tau_{c_{(b)}}}\,(\xi E)
$$

onde Σ''^i_j é igual a

$$
[E^i_{j,1}]^e..[E^i_{j,l_2-1}]^e \quad \dfrac{\dfrac{[\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})]^d \quad [\Lambda^1]^e..[\Lambda^s]^e[\Xi^1_1]^e..[\Xi^s_{p_s}]^e \quad \dfrac{\dfrac{[\Lambda^1]^f[G^1_1]^f..[G^1_{p_1}]^f}{\Sigma^1}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\dfrac{[\Lambda^s]^f[G^s_1]^f..[G^s_{p_s}]^f}{\Sigma^s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(f)} \qquad [\xi F]^e}{\dfrac{\tau}{\dfrac{\xi\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G'^i_j}}}\ \xi I_{(d)}}\,\xi E \quad [E^i_{j,l_2+1}]^e[E^i_{j,e^i_j}]^e[\Xi^i_j]^e
$$

$\Phi(H'^{1}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$, conclusão da aplicação da regra $\perp_c$ em Π'', não é uma ocorrência de fórmula discordante e $\Delta^i_1, .., E^i_{j,l_2-1}, E^i_{j,l_2+1}, .., \Delta^i_{p_i}$ não são fórmulas máximas em Π'', pois também seriam fórmulas máximas em Π e não seriam premissas de $r(\Pi)$. Além disso, para qualquer ocorrência de fórmula máxima E em Λ^i, temos que $d(E) < p$. Entretanto, com relação a ocorrência de fórmula $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ que é conclusão da ξI em Π'', temos que:

a) Se $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ não for ocorrência de fórmula máxima em Π'', então Π' é Π''. Note que as premissas intermediárias de Ξ^i_j em Π'' não são ocorrências de fórmulas máximas porque as hipóteses intermediárias correspondentes são premissas menores vinculadas na aplicação da regra ΦE que conclui F em Σ''^{i}_j.

b) Se $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ for uma ocorrência de fórmula máxima em Π'', a fórmula vizinha de $\xi\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ em Π'' não é conclusão de uma aplicação da regra τ_c e nem conclusão de uma aplicação da regra ξE e, portanto, Σ''^{i}_j será da forma descrita pelo Lema 4.26. Pelo Lema 4.26, Σ''^{i}_j pode ser reduzida a uma dedução Π''' que não tem ocorrência de fórmulas discordantes e encontramos Π'''' com $i(\Pi'''') < i(\Pi)$ pela substituição de Σ''^{i}_j em Π'' por Π'''.

c) Q_1 é uma premissa intermediária ou Q_1 é uma premissa maior com $i(Q_1) < (p, r-1, q)$: seja Q_k, para $k \geq 1$, a primeira ocorrência de fórmula da esquerda para a direita na sequência $Q_1, .., Q_r$ de fórmulas máximas, tal que $i(Q_k) = (p, r-1, q)$. Ou seja, Q_k é uma premissa intermediária. Dependendo da regra que conclui Q_k, nós temos os seguintes casos:

c.2.1) Se Q_k, igual a $M^i_{l_5}$ em Π mostrada na sequência, for conclusão de uma aplicação da regra esquemática de introdução, isto é, uma fórmula máxima do tipo c.i.1, então obtemos Π' a partir da redução modal c.i.1 introduzida na definição 4.15[8]:

[8] O caso em que $M^i_{l_5}$ é premissa intermediária da regra esquemática de introdução é tratado de forma semelhante.

$$\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s}) \quad \Lambda^1 \ldots M^i_1 .. \dfrac{\Delta^i_1\ldots\Delta^i_{p_i} \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)} \quad ..M^i_{m^i}\ldots\Lambda^s\,\Xi'^1_1\ldots\Xi'^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}\quad\ldots\quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^i]^b\,[G'^i_1]^b..[G'^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}\quad\ldots\quad\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

$\rhd\rhd$

$$\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..M^i_{l_5-1}\Delta^i_1..\Delta^i_{p_i}M^i_{l_5+1}..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}\quad\ldots\quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1]^b..\dfrac{[\Delta^i_1]^b..[\Delta^i_{p_i}]^b \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1}\quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j}\quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)}\,..[M^i_{m^i}]^b[G'^i_1]^b..[G'^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}\quad ..\quad\dfrac{\Sigma^i}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}.$$

Observe que:

a) As ocorrências de fórmula de $\Delta^i_1, .., \Delta^i_{p_i}$ não são fórmulas esquemáticas em Π', porque elas também seriam ocorrências de fórmulas máximas em Π, mas não premissas de $r(\Pi)$.

b) Se $r = 1$, então $i(\Pi') = (p, 0, q-1) < i(\Pi) = (p, 0, q)$. Caso contrário, se $r > 1$, então $i(\Pi') = (p, r-2, q) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$.

c.2.2) Se Q_k é a ocorrência de fórmula ξH em Π que é conclusão de uma aplicação da regra esquemática de introdução da negação, ou seja, uma fórmula esquemática do tipo c.i.2, então obtemos Π' a partir da redução modal c.i.2, vide definição 4.16[9]:

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\dfrac{\begin{matrix}[H]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{matrix}}{\xi H}\xi I_{(a)}..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \begin{matrix}\Sigma^1\\ F\end{matrix}..\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\\ F\end{matrix}..\begin{matrix}\Sigma^s\\ F\end{matrix}}{F}\Phi E_{(b)}.$$

As reduções dependem de como a hipótese H é usada na dedução Π:

i) Se a ocorrência de fórmula H não for uma premissa maior em Σ, então a redução Π' é igual a:

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..\Lambda^i..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \begin{matrix}\Sigma^1\\ F\end{matrix}..\begin{matrix}[M^i_1..]^a..[\xi H]^a..[M^i_{m^i}]^a[G^i_1]^a..[G^i_{p_i}]^a\\ \Sigma^i\\ F\end{matrix}..\begin{matrix}\Sigma^s\\ F\end{matrix}}{F}\Phi E_{(a)} \quad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{H}\tau_{c_{(b)}}}\xi E\\ \Sigma\\ \dfrac{\tau}{F.}\tau_{c_{(c)}}\end{matrix}$$

onde Λ^i é igual a $M^i_1, .., \xi H, .., M^i_{m^i}$ e ξH é a hipótese descartada pela aplicação da regra τ_c que conclui a ocorrência de fórmula esquemática H. Se a ocorrência de fórmula H que

[9]O caso em que Q_k é premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦI é tratado de forma semelhante.

é conclusão da regra $\perp_c$ for uma premissa da regra esquemática de introdução ou é uma premissa menor, então ela não é uma ocorrência de fórmula esquemática discordante. Nesse caso, se $r = 1$, então $i(\Pi^{'}) = (0,0,0) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$ e, se $r > 1$, então $i(\Pi^{'}) = (p, r-2, q) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$.

Se H é uma premissa intermediária e uma fórmula máxima, então observe que $d(H) < d(\xi H)$. Nesse caso, se $r = 1$, então $i(\Pi^{'}) = (p-1, 0, q^{'}) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$. Se $r > 1$, então $i(\Pi^{'}) = (p, r-2, q) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$. Em ambos os casos, $i(\Pi^{'}) < i(\Pi)$.

ii) Se H é uma premissa maior em Σ, então a redução Π e sua redução $\Pi^{'}$ são, respectivamente, iguais a:

$$
\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[H]^c \quad \Lambda^{'1}..\Lambda^{'s}\Xi^{'1}_1\ldots\Xi^{'s}_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^{'1}}{F^{'}}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^{'i}]^a[G^{'i}_1]^a..[G^{'i}_{p_i}]^a\\ \Sigma^{'i}\end{array}}{F^{'}} \quad ..\dfrac{\Sigma^{'s}}{F'}}{F^{'}}\,\Phi E_{(a)}\\ \Sigma^{'}\\ \tau\end{array}}{\xi H}\,\xi I_{(c)} \quad ..M^i_{m^i}\ldots\Lambda^s\,\Xi^1_1\ldots\Xi^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\Lambda^{'1}..\Lambda^{'s}\Xi^{'1}_1\ldots\Xi^{'s}_{p_s}..M^i_{m^i}\ldots\Lambda^s\,[\xi F^{'}]^a\Xi^1_1\ldots\Xi^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \Sigma^{''}.. \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}..}{F}\,\Phi E_{(d)} \quad [\xi F]^b}{\tau}\,\xi E}{F^{'}}\,\tau_{c_{(a)}}
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}F^{'}\\ \Sigma^{'}\\ \tau\end{array}}{F}\,\tau_{c_{(b)}}
$$

onde Σ' é igual a

$$
[M^i_1]^d .. \quad
\dfrac{
\dfrac{
[H]^e \quad [\Lambda'^1]^d .. [\Lambda'^s]^d [\Xi'^1_1]^d \ldots [\Xi'^s_{p_s}]^d \;
\dfrac{\Sigma'^1}{F'} \, .. \;
\dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda'^i]^c [G'^i_1]^c .. [G'^i_{p_i}]^c \\ \Sigma'^i\end{array}}{F'} \;
.. \dfrac{\Sigma'^s}{F'}
}{F'}\,\Phi E_{(c)}
\qquad [\xi F']^d
}{
\dfrac{\tau}{\xi H}\;\xi I_{(e)}
}\,\xi E
\quad .. [M^i_{m^i}]^d [G^i_1]^d .. [G^i_{p_i}]^d
$$

$$
\dfrac{\Sigma^i}{F}
$$

A ocorrência de fórmula esquemática $F^{'}$ que é conclusão da aplicação da regra τ_c e as ocorrências de fórmula de $\Lambda^{'i}$ em $\Pi^{'}$ não são fórmulas máximas em $\Sigma^{'}$, pois, caso contrário, elas seriam ocorrências de fórmula máxima em Π, mas não premissas de $r(\Pi)$. As ocorrências de fórmulas do conjunto $\Xi_j^{'i}$ não são fórmulas máximas em $\Pi^{'}$ porque as hipóteses da mesma forma utilizadas na aplicação da regra ΦE em $\Sigma^{'}$ são premissas menores vinculadas.

A ocorrência de fórmula ξH é uma fórmula máxima, entretanto $s(\xi H) = q-1 < q$. Portanto, se $r = 1$, $i(\Pi^{'}) = (p, 0, q-1) < i(\Pi) = (p, 0, q)$. Caso contrário, se $r > 1$, então $i(\Pi^{'}) = (p^{'}, r-2, q^{'}) < i(\Pi) = (p, r-1, q)$, para $p^{'} \leq p$ e $q^{'} \leq q$.

c.2.2) Se Q_k é conclusão de uma aplicação da regra esquemática para o absurdo, ou seja, se Q_k é do tipo $a.ii.2$, então utilizamos um procedimento similar ao item b) descrito acima.

c.2.3) Se Q_k é conclusão de uma aplicação da regra esquemática de eliminação, i.e., Q_k é do tipo $b.i.2$, então utilizamos um procedimento similar ao caso a).

■

Lemma 4.26. ***(Ocorrências de Fórmulas esquemáticas para a Regra*** ΦE***)*** *Seja* Π *uma dedução* $\Gamma \vdash F^{'}$ *tal que* Π *não tem mais do que duas ocorrências de fórmulas máximas. Além disso,* ξQ *é uma ocorrência de fórmula máxima em* Π*, a subdedução determinada por* ξQ *é da forma* [10]

$$\dfrac{\dfrac{[Q]^b \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi_1^1]^c..[\Xi_{p_s}^s]^c \quad \begin{array}{c}[\Lambda^1]^a[G_1^1]^a..[G_{p_1}^1]^a \\ \Sigma^1 \\ F\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Delta^s]^a[G_1^s]^a..[G_{p_s}^s]^a \\ \Sigma^s \\ F\end{array}}{F}\,\Phi E_{(a)} \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\mathcal{T}}{\xi Q}\,\xi I_{(b)}}\,\xi E$$

e, se ξQ *é uma premissa maior de uma aplicação da regra* ξE*, então a fórmula vizinha de* ξQ *não é conclusão de uma aplicação da regra* τ_c *e nem de uma aplicação da regra*

[10]Se a ocorrência de fórmula Q que é premissa maior da aplicação da regra ΦE que conclui F for da forma $\xi Q^{'}$, para uma fórmula $Q^{'}$ qualquer, então no lugar de uma aplicação da regra ΦE teremos uma aplicação da regra ξE. Nesse caso, a prova é similar.

ΦE. Então Π é redutível a uma dedução Π' tal que não existem ocorrências de fórmulas discordantes em Π'.

A prova é por indução em $i(\Pi)$. Temos os seguintes casos:

a) ξQ é uma premissa maior de uma aplicação da regra ξE em Π:

$$
\dfrac{
\dfrac{\Sigma'}{Q}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
[Q]^b \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi^1_1]^c..[\Xi^s_{p_s}]^c \quad
\begin{array}{c}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a \\ \Sigma^1 \\ \hline F\end{array}
\quad .. \quad
\begin{array}{c}[\Lambda^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a \\ \Sigma^s \\ \hline F\end{array}
}{F}\,\Phi E_{(a)}
\qquad [\xi F]^c
}{\tau}\,\xi E
}{\xi Q}\,\xi I_{(b)}
}{
\begin{array}{c}\tau \\ \Sigma'' \\ \hline F'.\end{array}
}\,\xi E
$$

A ocorrência de fórmula Q que é vizinha de ξQ, pela hipótese deste Lema, não é conclusão de uma aplicação da regra τ_c nem da regra ΦE. Aplicando a redução a.i.2 introduzida na definição 4.4 obtemos Π':

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Sigma'}{Q} \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi^1_1]^c..[\Xi^s_{p_s}]^c \quad
\begin{array}{c}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a \\ \Sigma^1 \\ \hline F\end{array}
\quad .. \quad
\begin{array}{c}[\Delta^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a \\ \Sigma^s \\ \hline F\end{array}
}{F}\,\Phi E_{(a)}
\qquad [\xi F]^c
}{
\begin{array}{c}\tau \\ \Sigma'' \\ \hline F'.\end{array}
}\,\xi E
$$

Então temos as seguintes possibilidades:

i) Q não é ocorrência de fórmula discordante em Π': nesse caso, Π' é a dedução procurada.

ii) Q é uma ocorrência de fórmula discordante em Π'. Visto que Q não é conclusão de uma aplicação das regras τ_c ou ΦE, então Q é conclusão de uma aplicação da regra ΦI ou é uma dedução-hipótese. Considerando o primeiro caso, Π' é igual a:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta_1^i \ldots \Delta_{p_i}^i \quad \dfrac{\Sigma_1^i}{G_1^i} \quad .. \quad \dfrac{\overset{[\Xi_j^i]^b\,[\Delta_j^i]^b}{\Sigma_j^i}}{G_j^i} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma_{p_i}^i}{G_{p_i}^i}}{Q}\,\Phi I_{(b)} \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi_1^1]^c..[\Xi_{p_s}^s]^c \quad \dfrac{\overset{[\Lambda^1]^a[G_1^1]^a..[G_{p_1}^1]^a}{\Sigma^1}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\overset{[\Lambda^s]^a[G_1^s]^a..[G_{p_s}^s]^a}{\Sigma^s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(a)} \quad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\dfrac{\Sigma''}{F'}}}\,\xi E \;,
$$

cuja redução $\Pi^{''}$ é igual a

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^i]^c \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi_1^i]^c\;\Delta_1^i\\ \Sigma_1^i\end{array}}{G_1^i}\quad \cdots\cdots\cdots \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi_{p_i}^i]^c\;\Delta_{p_i}^i\\ \Sigma_{p_i}^i\end{array}}{G_{p_i}^i}\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \qquad\qquad [\xi F]^c}{\begin{array}{c}\tau\\ \hline \Sigma^{''}\\ \hline F^{'}\end{array}}\ \xi E.
$$

$\Pi^{''}$ não contém ocorrências de fórmulas máximas porque, se as ocorrências de fórmulas de $\Delta_{p_i}^i$ fossem fórmulas máximas, então existiriam mais do que duas fórmulas esquemáticas máximas em Π, e isto vai de encontro às hipóteses do Lema 4.26.

b) ξQ é uma premissa intermediária em Π[11]:

[11] O caso em ξQ é premissa intermediária de uma aplicação da regra ΦE é tratado de modo semelhante.

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\Delta'^i_1 \quad ..E'^i_{j,l_2-1} \quad \dfrac{\dfrac{[Q]^b \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi^1_1]^c..[\Xi^s_{p_s}]^c \quad \begin{array}{c}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a\\ \dfrac{\Sigma^1}{F}\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Lambda^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a\\ \dfrac{\Sigma^s}{F}\end{array}}{F}\;\Phi E_{(a)} \qquad [\xi F']^c}{\dfrac{\tau}{\xi Q}\;\Xi I_{(b)}}\;\xi E \quad E'^i_{j,l_2+1}..\Delta'^i_{p_i} \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G'^i_1} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Xi'^i_j]^d\,[E'^i_{j,1}]^d..[\xi Q]^d..[E'^i_{j,e^i_j}]^d\\ \dfrac{\Sigma^i_j}{G'^i_j}\end{array} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G'^i_{p_i}}}{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s})}\;\Phi I_{(d)} \\
\dfrac{\Sigma''}{F'}
\end{array}$$

Visto que em Π existem somente duas fórmulas máximas esquemáticas, a ocorrência de fórmula $\Phi(H'^{1}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$ que é conclusão da regra ΦI não é fórmula discordante.

Se ξQ for premissa intermediária da regra de eliminação, $\Phi(H^{1}_{1,1}, .., G^{s}_{p_s})$ não será premissa menor de uma regra ξE cuja premissa maior é uma fórmula folha da forma $\Xi\Phi(H^{1'}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$. A ocorrência de fórmula vizinha da hipótese intermediária ξQ não é conclusão de uma aplicação das regras τ_c ou ξE, pois, pela hipótese do Lema, existem somente duas fórmulas máximas em Π.

As ocorrências de fórmulas de $\Delta'^{i}_{1}, .., E'^{i}_{j,1}, .., E'^{i}_{j,l_2-1}, E'^{i}_{j,l_2+1}, .., E'^{i}_{j,e^i_j}, .., \Delta'^{i}_{p_i}$ não são fórmulas máximas porque, caso contrário, haveria mais de duas fórmulas máximas em Π. Π é, então, reduzida a Π' como se segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta_1^{'i} \quad ..E_{j,l_2-1}^{'i} \quad [\Lambda^1]^c..[\Lambda^s]^c[\Xi_1^1]^c..[\Xi_{p_s}^s]^c E_{j,l_2+1}^{'i}..\Delta_{p_i}^{'i} \; [\neg F]^a \dfrac{\Sigma_1^i}{G_1^{'i}}..\Sigma_j^{'i}.. \quad \dfrac{\Sigma_{p_i}^i}{G_{p_i}^{'i}}}{\Phi(H_{1,1}^{'1},..,G_{p_s}^{'s})}\,\Phi I_{(e)} \qquad [\xi\Phi(H_{1,1}^{'1},..,G_{p_s}^{'s})]^b}{\dfrac{\tau}{F}\;\tau_{c_{(a)}}}\,\xi E \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\dfrac{\tau}{\Phi(H_{1,1}^{'1},..,G_{p_s}^{'s})}\;\tau_{c_{(b)}}}{\dfrac{\Sigma''}{F'}}}\,(\xi E),
$$

onde $\Sigma_j^{'i}$ é igual a

$$
\dfrac{[\Xi_j^{'i}]^e[E_{j,1}^{'i}]^e.. \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^d \quad [\Lambda^1]^e..[\Lambda^s]^e[\Xi_1^1]^e..[\Xi_{p_s}^s]^e \quad \dfrac{[\Lambda^1]^f[G_1^1]^f..[G_{p_1}^1]^f}{\dfrac{\Sigma^1}{F}} \quad .. \quad \dfrac{[\Lambda^s]^f[G_1^s]^f..[G_{p_s}^s]^f}{\dfrac{\Sigma^s}{F}}}{F}\,\Phi E_{(f)} \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\xi Q}\;\xi I_{(d)}}\,\xi E \qquad ..[E_{j,e_j^i}^{'i}]^e}{\dfrac{\Sigma_j^i}{G_j^{'i}}}
$$

Conforme já mencionamos, a ocorrência de fórmula $\Phi(H'^{1}_{1,1}, .., G'^{s}_{p_s})$ que é conclusão da aplicação da regra τ_c e as ocorrências de fórmula de $\Delta'^{i}_{1}, .., E'^{i}_{j,1}, .., E'^{i}_{j,l_2-1}$ $,E'^{i}_{j,l_2+1}, .., E'^{i}_{j,e^i_j}, .., \Delta'^{i}_{p_i}$ não são ocorrências de fórmula discordantes.

ξQ é uma ocorrência de fórmula máxima discordante em Π', porém $i(\Sigma'^{i}_{j}) < i(\Pi)$, pois $s(\xi Q)$ em Σ'^{i}_{j} é menor do que $s(\xi Q)$ em Π, e Σ'^{i}_{j} está no formato do Lema.

Pela hipótese de indução, obtemos Π'' a partir de Σ'^{i}_{j} onde não há ocorrência de fórmulas discordantes. Obtemos a dedução Π' resultante, substituindo Σ'^{i}_{j} por Π'' em Π', .

■

Teorema 4.27. ***(Normalização Fraca para*** S***)*** *Seja* Π *a dedução* $\Gamma \vdash Q$*, então* Π *é redutível a uma dedução normal* Π' *de* $\Gamma \vdash Q$*.*

Prova:

Seja $i(\Pi) = (0,0,0)$, então Π pode ser reduzida a uma dedução normal Π' pelo Lema 4.22. Caso contrário, a prova é por indução no par ordenado lexicograficamente $(i(\Pi), l(\Pi))$.

Nesse caso, Π é igual a $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_n\\ F_1 \ldots & F_n\end{matrix}}{Q}\, r(\Pi)$. Seja Π^*_i, para cada $1 \leq i \leq n$, a subdedução de Π determinada por F_i. Visto que $i(\Pi^*_i) \leq i(\Pi)$ e $l(\Pi^*_i) < l(\Pi)$, então, pela hipótese de indução, cada Π^*_i é redutível a uma dedução normal Π'_i.

Seja Π^* igual a $\dfrac{\Pi'_1 \ldots \Pi'_n}{Q}\, r(\Pi)$. Se $i(\Pi^*) = (0,0,0)$, então Π^* é redutível a uma dedução normal Π' pelo Lema 4.22. Caso contrário, analisamos dois subcasos:

a) Se, para alguma subdedução Π'_i, $1 \leq i \leq n$, $r(\Pi'_i)$ for uma aplicação da regra para o absurdo intuicionístico, então suponha, sem perda de generalidade, que Π'_i é igual $\dfrac{\begin{matrix}\Pi''_i\\ \bot\end{matrix}}{Q_1}\, \bot_i$ e que Π^* é igual a $\dfrac{\Pi'_1 .. \dfrac{\begin{matrix}\Pi''_i\\ \bot\end{matrix}}{Q_1}\, \bot_i .. \quad \Pi'_n}{Q}\, r(\Pi)$. Nesse caso, a dedução Π' será obtida da seguinte forma: $\dfrac{\begin{matrix}\Pi''_i\\ \bot\end{matrix}}{Q}\, \bot_i$.

b) Para o caso contrário ao exposto no item a), note que Π^* é da forma descrita pelo

Lema 4.25 e, portanto, pode ser reduzida a uma dedução Π^{**} tal que $i(\Pi^{**}) < i(\Pi^{*}) \leq i(\Pi)$.

Se $i(\Pi^{**}) = (0, 0, 0)$, então Π^{**} é redutível a uma dedução normal $\Pi^{'}$ pelo Lema 4.22. Caso $i(\Pi^{**}) > (0, 0, 0)$, podemos reduzir Π^{**} a uma dedução normal $\Pi^{'}$ pela hipótese de indução.

■

4.3 Prova da Normalização Fraca para o Sistema Esquemático $S^{'}$

Nesta seção, provaremos o Teorema de Normalização Fraca para o sistema $S^{'}$ introduzido na definição 2.15. Conforme vimos na seção 4.2, provamos que *existe* uma sequência de reduções que normaliza uma dedução em S, porém não nos baseamos em uma estratégia que identifica uma sequência de fórmulas máximas que devem ser eliminadas a fim de transformar uma dedução em S em uma forma normal. A estratégia de prova para a normalização do sistema S, portanto, impossibilitará a definição de um procedimento para normalizar deduções feitas em sistemas concretos definidos em função de regras instâncias das regras de S. Esse é o motivo principal pelo qual definimos o sistema $S^{'}$ na seção 2.4 e provamos a sua normalização fraca nesta seção.

Introduziremos na sequência a definição de segmentos esquemáticos, segmentos esquemáticos máximos, de forma normal de deduções no sistema $S^{'}$ e provamos o Teorema da Normalização Fraca para $S^{'}$. Quando possível, omitiremos definições introduzidas na seção 4.2 para a normalização de S por serem iguais às respectivas definições para a normalização de $S^{'}$. Mostraremos que a normalização fraca para $S^{'}$ é obtida de modo semelhante à prova de Prawitz para o sistema I, ou seja, a partir de uma estratégia de escolha de segmentos máximos.

Definição 4.28. ***(Segmento Esquemático)*** *Um segmento σ em uma dedução Π é uma sequência E_1,..,E_n de ocorrências de fórmulas tal que:*

- *E_1 não é uma conclusão da regra esquemática de eliminação;*

- E_i*, para* $i < n$*, é uma premissa menor da regra esquemática de eliminação e* E_{i+1} *ocorre imediatamente abaixo de* E_i*;*

- E_n *não é uma premissa menor;*

Dizemos que um segmento esquemático σ_1 ocorre acima de um segmento σ_2 se as ocorrências de fórmula de σ_1 ocorrem acima das ocorrências de σ_2.

Definição 4.29. ***(Segmento Esquemático Máximo para Deduções em*** S'***)*** *Um segmento* $E_1,..,E_n$ *é máximo quando:*
a.i.1) $n = 1$ *e* E_1 *é conclusão de uma aplicação da regra esquemática de introdução e, simultaneamente, premissa maior em uma dedução* Π*;*
b.i.1) $n > 1$*,* E_1 *é uma conclusão da regra esquemática de introdução e* E_n *é conclusão da regra esquemática de eliminação e premissa maior em uma dedução* Π*;*

Dizemos que E_1 e E_n são fórmulas esquemáticas máximas nos casos a.i.1 e b.i.1, respectivamente.

Definição 4.30. ***(Formal Normal de uma Dedução esquemática em*** S'***)*** *Uma dedução* Π *em* S' *é normal, se não existem em* Π *segmentos esquemáticos máximos.*

A prova de Prawitz do Teorema de Normalização Fraca para o sistema de Dedução Natural I para a lógica intuicionística com todos os operadores utiliza como valor de indução o maior grau d dos segmentos máximos em uma dedução Π e a soma l do comprimento de todos os seus segmentos máximos que tem grau d, onde o grau de um segmento significa o grau da fórmula que ocorre neste segmento. Esta é uma estratégia usual também seguida, por exemplo, por Martins e Martins [28] e Medeiros [31].

Prawitz mostra que caso removamos de uma dedução Π, repetidamente, segmentos máximos σ de grau d escolhidos de forma que (a) nenhum segmento máximo de grau d ocorra acima de σ ou (b) nenhum segmento máximo de grau d ocorra acima de ou contenha uma fórmula vizinha da última ocorrência de σ, chegamos a uma dedução normal Π'.

Ele mostrou que a eliminação de um desvio de grau d escolhido seguindo a estratégia descrita acima, ou gera novos segmentos máximos de grau menor do que d, ou gera segmentos máximos de grau igual a d, porém o valor de l diminui. A prova de Prawitz, portanto, especifica em que sequência os segmentos máximos devem ser eliminados.

Utilizaremos, na prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema S' enunciado abaixo, estratégia semelhante ao que expusemos nos parágrafos acima:

Teorema 4.31. ***(Normalização Fraca para*** S'***)*** *Existe uma dedução normal para toda dedução esquemática* Π *de* E *a partir de* Γ *feita no sistema* S'.

Na sequência, descrevemos a prova do teorema 4.31.

Prova:

O valor de indução de uma dedução Π é definido *lexicograficamente* como sendo o par (d, l), onde d e l são definições iguais as de Prawitz mostrada anteriormente nesta seção. Mostraremos que, para uma dedução Π em S' com $d > 0$ e valor de indução $v = (d, l)$, existe uma redução Π' que tem valor de indução menor do que v.

Escolhemos um segmento σ de Π para ser eliminado de modo similar à forma como Prawitz o fez em sua tese [38] para a normalização do sistema I para a lógica intuicionística. σ deve ser um segmento de Π de grau d tal que (a) nenhum segmento máximo de grau d ocorre acima de σ; b) nenhum segmento de grau d ocorre acima de uma premissa menor vinculada vizinha da última ocorrência de σ; e (c) nenhum segmento máximo de grau d ocorre acima de ou contém uma premissa menor vizinha da última ocorrência de σ.

De modo similar ao que Prawitz também apresenta na prova da normalização para o sistema I, caso o maior grau de um segmento em uma dedução seja $d > 0$, garantimos que encontraremos um segmento do tipo exigido pelos critérios a), b) e c) descritos no parágrafo anterior a partir da seguinte explicação. Considere o conjunto C_s de segmentos máximos de grau d em Π. Se α_1 é um segmento de grau d que não satisfaz os critérios b) ou c), então existe um outro segmento α_2 que pertence ao conjunto C_s que faz com que α_1 não satisfaça o critério b) ou c). Caso α_2 não satisfaça os critérios b) ou c), então existe um terceiro segmento α_3 de grau d, que pertence a C_s e que invalida os critérios b) ou c) para α_2. Observe que, dessa forma, obtemos uma sequência de segmentos α_1, α_2,... e, considerando que nossas deduções são de tamanho finito, chegaremos a um segmento α_n pertencente ao conjunto C_s que satisfizerá os critérios a), b) e c) definidos.

Abaixo mostramos os dois tipos de desvios e provamos que ao eliminá-los o valor de indução da dedução resultante será menor do que o valor da dedução original:

a) σ é um segmento cuja única fórmula máxima é do tipo $a.i.1$: abaixo, Π é a dedução de cima e Π' é a dedução de baixo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} \;..\; \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{array}}{G^i_j} \;..\; \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\Phi I_{(a)} \quad \Xi^1_1\ldots\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F} \;\;...\;\; \dfrac{\begin{array}{c}[G^i_1]^b\,..\,[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \;\;...\;\; \dfrac{\Sigma^s}{F}}{\begin{array}{c}F\\ \Pi_1\end{array}}\Phi E_{(b)}$$

$\rhd\rhd$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1}\ldots\dfrac{\begin{array}{c}\Xi^i_j\\ \Sigma^i_j\end{array}}{G^i_j}\ldots\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}\\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\\ \Pi_1\end{array}$$

O valor de indução v' de Π' é menor do que o valor v de Π, pois o grau de uma ocorrência de uma fórmula do conjunto Ξ^i_j e o grau de G^i_j são menores do que o grau d de Π. Além disso, o valor l' de Π' é menor do que o valor l de Π.

b) σ é o segmento máximo $E_1,..,E_n$ e E_n é uma fórmula máxima do tipo $b.i.2$: abaixo, E_n é igual a $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$, Π é a dedução de cima e Π' é a dedução de baixo:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s}) \quad \Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma'^1}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}..\dfrac{\begin{array}{c}[G'^i_1]^a..[G'^i_{p_i}]^a\\ \Sigma'^i\end{array}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad ..\dfrac{\Sigma'^s}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\Phi E_{(a)} \; \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}\\ \Pi_1\end{array}$$

$\rhd\rhd$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Phi(H'^1_{1,1},..,G'^s_{p_s}) \quad \Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma''^1}{F}..\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[G^{i'}_1]^a..[G^{i'}_{p_i}]^a\\ \Sigma^{i'}\end{array}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F} \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}.. \quad \dfrac{\Sigma''^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(a)}\\ \Pi_1\end{array}$$

Observe que, pelos critérios (b) e (c) de escolha de segmentos máximos a serem eliminados expostos acima, nenhum segmento máximo de grau d ocorre acima de uma premissa menor vinculada e nenhum segmento de grau d contém ou ocorre acima de uma premissa menor das aplicações das regras ΦE que concluem F em Π'. Visto que o tamanho de cada segmento que contém as ocorrências de fórmula máxima $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ em Π' é menor do que o tamanho dos segmentos que contêm as ocorrências de fórmula máxima $\Phi(H^1_{1,1}, .., G^s_{p_s})$ em Π, temos que v', associado a Π', é menor que o valor de indução v de Π.

Dessa forma, mostramos que as duas reduções diminuem o valor de indução v de Π e, após, finitas eliminações de segmentos máximos chegamos a uma dedução esquemática normal Π'.

■

4.4 Provas de Normalização Fraca para Sistemas Concretos

Prawitz [38] provou o Teorema de Normalização Fraca para sistemas de Dedução Natural. Gentzen [14] provou o teorema da eliminação do corte (*HAUPTSATZ*) para Cálculo de Sequentes. Em Massi [30], encontramos uma prova de que o Teorema de Normalização Fraca pode ser obtido a partir do teorema de eliminação do corte.

Dentre os sistemas de Dedução Natural para os quais Prawitz provou a normalização fraca, citamos o sistema C' de Dedução Natural para a lógica clássica de primeira ordem. Ele não considerou como parte da linguagem da lógica clássica, as constantes para a disjunção e para o quantificador existencial. Além disso, Prawitz restringiu o formato da consequência da aplicação da regra para o absurdo clássico a fórmulas atômicas e mostrou que toda dedução pode ser escrita desse modo. Prawitz [38] provou, também, o Teorema de Normalização Fraca para o sistema I de primeira ordem para a lógica intuicionística com todas as constantes lógicas.

Massi, em [30], estendeu o resultado de Prawitz e provou a normalização fraca para o sistema de Dedução Natural C para a lógica clássica com todas as constantes lógicas. Além disso, ele não restringiu o formato da conclusão da aplicação da regra para o absurdo.

Com relação a provas de normalização para lógicas modais, citamos a prova de normalização fraca para os sistemas M_{S4}, I_{S4} e C_{S4} definidos por Prawitz em [38] para a lógica modal $S4$ minimal, intuicionística e clássica com o operador modal $\Box$. Conforme mencionamos na seção 3.2.3, Medeiros [31] construiu um contra-exemplo para a prova de Prawitz, definiu o sistema clássico modal $NS4$ para a lógica modal clássica $S4$ com operador modal $\Box$ e provou a normalização fraca para o sistema $NS4$.

Bierman e de Paiva definiram o sistema $IS4$ para a lógica modal intuicionística com os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ [4], porém não apresentaram em detalhes a prova do Teorema de Normalização Fraca para o seu sistema.

Martins e Martins [28] definiram o sistema $CS4$ para a lógica clássica modal com operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ e provaram a normalização fraca para esse sistema.

Simpson [47] definiu um sistema de Dedução Natural para a lógica modal intuicionística com operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ e provou o Teorema de Normalização Forte. Nas regras de seu sistema, ele incorporou a interpretação semântica de mundos possíveis do $\Box$ e do $\Diamond$. Por exemplo, nas regras $\Box I$ e $\Diamond E$ mostradas abaixo, x, y e z são mundos possíveis, onde a afirmação $x : A$ significa que A é verdade no mundo x e xRy significa que o mundo y é visível a partir do mundo x:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[xRy] \\ \Sigma\end{matrix}}{y : A}}{x : \Box A}\ \Box I \qquad\qquad \dfrac{x : \Diamond A \qquad \dfrac{\begin{matrix}[y : A] \quad [xRy] \\ \Sigma\end{matrix}}{z : B}}{z : B}\ \Diamond E.$$

Na aplicação da $\Box I$, y deve ser diferente de x e não pode ocorrer em qualquer hipótese aberta além de xRy. Na aplicação da $\Diamond E$, y deve ser diferente de x e de y e não deve ocorrer em qualquer hipótese aberta da qual $z : B$ dependa, excetuando-se em $y : A$ e em xRy.

O sistema de Simpson inclui, além de regras para constantes lógicas, regras que expressam condições sobre a relação de visibilidade entre mundos. Simpson utilizou mundos possíveis em seu sistema de Dedução Natural pelo fato de desconhecer, segundo ele, qualquer outro modo de formular um sistema modal intuicionístico com operadores $\Box$ e $\Diamond$ que tenha importantes propriedades como, por exemplo, normalização e propriedade da subfórmula. Na seção 7.2, item $b.2$), mostraremos que a nossa normalização esquemática não contradiz esta afirmação de Simpson.

Citamos, na parte final desta seção, algumas consequências do Teorema da Normalização Fraca. As deduções normais apresentam formatos característicos. Em sistemas de Dedução Natural para a lógica intuicionística, por exemplo, elas contêm duas partes. Uma analítica, em que as hipóteses são desmembradas em seus componentes pelo uso das regras de eliminação, e uma sintética, em que os componentes finais obtidos na parte analítica são colocados juntos pelo uso das regras de introdução [38].

Algumas outras importantes consequências dos teoremas de normalização e da eliminação do corte são:

- Propriedade da subfórmula: a única regra em Cálculo de Sequentes que possibilita que uma fórmula seja utilizada nas premissas e não apareça nas conclusões é a regra do corte. Com o teorema da eliminação do corte, todas as fórmulas de uma dedução são subfórmulas do sequente final provado. Prawitz provou propriedade semelhante para o sistema de Dedução Natural C' para a lógica clássica de primeira ordem sem os operadores de disjunção e existencial. A propriedade da subfórmula para o sistema C' atesta que toda ocorrência de fórmula em uma dedução normal em C' de A a partir de Γ tem a forma de uma subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ, excetuando-se as hipóteses descartadas pela aplicação da regra para o absurdo clássico e as ocorrências de $\perp$ que ocorrem imediatamente abaixo de tais hipóteses. Com relação ao sistema I para a lógica intuicionística [38], o princípio da subfórmula diz que toda ocorrência de fórmula que ocorre em uma dedução normal de A a partir de Γ é uma subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ.

- Prova sintática de consistência de Sistemas de Dedução Natural: Prawitz provou que não há prova normal para o $\perp$ no sistema C' [38]. O método sintático apresentado por Prawitz [38] possibilita provar a consistência sem se basear na semântica de uma lógica, ou seja, sem a necessidade de mostrar que o sistema é correto. Prova-se a consistência de um sistema de Dedução Natural de modo autocontido, apenas usando propriedades sintáticas. Isto deve-se ao fato de que, se o Teorema de Normalização Fraca para um sistema é válido, então toda dedução neste sistema tem uma forma normal e não há prova normal para o $\perp$.

- Propriedade da separação: em uma dedução normal no sistema de Dedução Natural

I para a lógica intuicionística, são utilizadas somente regras de inferência para as constantes lógicas que ocorrem na conclusão e nas premissas [38].

- Decidibilidade da lógica proposicional intuicionística: utilizando a propriedade da separação e a propriedade da subfórmula, define-se um procedimento recursivo para prova de teoremas na lógica proposicional intuicionística [49]. Lembrando que não há tabela-verdade para a lógica intuicionística e que usualmente modelos de Kripke são utilizados como semântica para a lógica intuicionística, ressaltamos a importância de tal procedimento.

- Propriedade da disjunção: se uma disjunção $A \vee B$ é provada em um sistema intuicionístico proposicional em Cálculo de Sequentes, então ou A é provado neste sistema ou B o é. Prawitz provou propriedade semelhante para um sistema de Dedução Natural para a lógica intuicionística [38].

- Teorema da Interpolação: se $\Gamma \vdash A$ no sistema C' de Prawitz de Dedução Natural para a lógica clássica, então existe uma fórmula F, considerando algumas outras condições, tal que $\Gamma \vdash F$ e $F \vdash A$ [38].

- Limite de tamanho de provas: o primeiro resultado foi obtido por Schutte [45] para Cálculo de Sequentes. Pereira [35] estendeu os resultados de diversos modos, em particular, para sistemas de Dedução Natural. Ele provou que uma dedução Π no sistema de Dedução Natural para a lógica intuicionística de primeira ordem reduz-se a uma dedução Π' normal tal que $l(\Pi') \leq 2_k(n)$, onde $l(\Pi)$ é o comprimento da dedução Π introduzido na definição 3.12, k é igual ao maior grau de um segmento máximo em Π, $2_i(j) = j$, se $i = 0$, e $2_{i+1}(j) = 2^{2_i(j)}$, se $i > 0$.

4.5 Conclusão

Neste capítulo, mostramos, por meio do Princípio da Inversão, que a regra esquemática de introdução do sistema esquemático de Dedução Natural S, introduzida na definição 2.5, é, de um certo modo, o inverso da regra esquemática de eliminação desse mesmo sistema esquemático S.

Além disso, mostramos outros desvios que podem ocorre em deduções em S e provamos que para toda dedução realizada em S existe uma dedução normal no sentido que nenhum desses desvios definidos ocorrem. Conforme comentaremos novamente na seção 7.1, devido ao fato de nosso sistema esquemático S ser um caso geral de sistemas definidos em função de regras instâncias das regras de S, obteremos, como consequência, a normalização fraca e forte para sistemas concretos.

Chi, em [7], apresentou o Princípio da Inversão para uma versão similar das regras esquemáticas do sistema S', introduzido na definição 2.15. A única diferença entre as regras de Chi e as regras que definem S' é que a conclusão de sua regra esquemática de introdução é a fórmula $\Phi(F_1, .., F_n)$ enquanto que a conclusão de nossa regra esquemática de introdução é a fórmula $\Phi(H^1_{1,1}, .., H^s_{p_s,h^s_{p_s}}, G^1_1, .., G^s_{p_s})$.

Provamos, também, o Teorema de Normalização Fraca para o sistema S'. Nesse caso, utilizamos uma estratégia semelhante a utilizada por Prawitz em [38] para a prova desse mesmo teorema para o sistema I definido para a lógica intuicionística. Ou seja, definimos uma estratégia de escolha de desvios que devem ser eliminados na deduções realizadas em S' e mostramos que a eliminação destes desvios leva a uma dedução normal. Por ter características de procedimento, a normalização do sistema S' possibilitou a definição de um método para normalização de sistemas concretos apresentado na seção 6.2.

5 TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO FORTE PARA O SISTEMA S

o Teorema de Normalização Forte diz que a forma normal de uma dedução é obtida após um número finito de reduções independentemente da ordem que são aplicadas. Atualmente, a propriedade da Unicidade da forma normal, que afirma que duas sequências de reduções quaisquer levam uma dedução a uma mesma forma normal, é provada à parte do Teorema de Normalização Forte. A propriedade da Unicidade também é conhecida como propriedade de Church-Rosser.

Provas de normalização forte são usualmente classificadas em provas semânticas e sintáticas. Nas provas semânticas, define-se uma propriedade P aplicável às deduções de um sistema C e prova-se que, se a propriedade P é válida para Π, então Π é normalizável fortemente. Depois mostra-se que a propriedade P é válida para toda dedução Π em C.

Prawitz, em [39], utilizou a propriedade de Validade Forte para provar um Teorema de Normalização Forte para a lógica intuicionística de primeira ordem em Dedução Natural com todos os operadores. Na prova de normalização forte para o sistema clássico, ele não considerou os operadores de disjunção e existencial. Prawitz, porém, limitou as conclusões das aplicações das regras do absurdo intuicionístico e clássico a fórmulas atômicas.

Tait, em [48], utilizou o predicado de convertibilidade para obter resultados de normalização para um sistema tipado. Baseando-se no trabalho de Tait, Girard [16] definiu o predicado de redutibilidade e provou a normalização forte para um sistema de tipos isomorfo a um fragmento da lógica proposicional minimal sem a disjunção.

Martin-Löf [29] definiu a noção de computabilidade e provou um Teorema de Normalização Forte para a lógica intuicionística de primeira ordem utilizando um sistema em Dedução Natural com todos os operadores. Martin-Löf, entretanto, utilizou um conceito de forma normal diferente do que usualmente se conhece, pois não eliminou os segmentos máximos, somente fórmulas máximas.

Massi [30] provou a normalização forte para um sistema clássico com todos os operadores, porém também desconsiderou as reduções permutativas.

Por fim, citamos também os trabalhos de Leivant [25] e Jervell [23] como exemplos de provas semânticas do Teorema de Normalização Forte.

Conforme Massi [30] comenta em sua tese, o processo combinatório que ocorre na construção da sequência de redução fica embutido na definição de uma propriedade utilizada em uma prova semântica. Ainda segundo esse mesmo autor, provas sintáticas foram apresentadas para evitar tal situação.

Como exemplos de provas sintáticas, citamos a prova de Girard [15], que mapeou sequências de reduções em sistemas auxiliares que satisfizeram a normalização forte e a prova de Massi [30] que, baseando-se em uma idéia de Martin-Löf de que se a pior sequência de reduções termina, então todas as sequências de reduções terminam em uma única forma normal, provou a normalização forte para um sistema sem os operadores de disjunção e existencial e que limita a conclusão do absurdo clássico a fórmulas atômicas.

Nesse capítulo, provaremos o Teorema da Normalização Forte para o sistema esquemático S introduzido na definição 2.9. Da mesma forma que na prova de Massi [30] e de Martin-Löf [29], desconsideramos as reduções esquemáticas permutativas $b.i.1$ e $b.i.2$ introduzidas, respectivamente, nas definições 4.12 e 4.13. Além disso, generalizamos o conceito de Validade Forte de Prawitz [39] para o sistema esquemático S.

Na seção 5.1, apresentaremos definições adicionais e na seção 5.2 exibiremos a prova do Teorema de Normalização Forte para o sistema esquemático de Dedução Natural S.

5.1 Definições

Nesta seção redefiniremos os conceitos de fórmula esquemática máxima introduzidas na definição 4.6 e introduziremos os conceitos de sequência de deduções de um conjunto de fórmulas, de Validade Forte e Validade Forte por Substituição. As definições de segmento esquemático máximo e de dedução normal são iguais às respectivas definições 4.7 e 4.8:

Definição 5.1. ***(Sequência de Deduções de um Conjunto de Fórmulas)*** *Considere* $\Delta = \{E_1, .., E_m\}$. *Nesse caso,* $\dfrac{\Sigma_\Delta}{\Delta}$ *é a sequência de deduções* $\dfrac{\Sigma_1}{E_1}, \ldots, \dfrac{\Sigma_m}{E_m}$ *do conjunto de fórmulas de* Δ.

Definição 5.2. ***(Fórmula esquemática Máxima)*** *Uma ocorrência de fórmula esquemática F em uma dedução Π é uma ocorrência de fórmula máxima se F é a conclusão de uma aplicação das regras ΦI, ξI ou $\bot_c$ e, simultaneamente, premissa maior ou premissa intermediária de uma regra em Π. Caso o tamanho do segmento σ do qual F pertença seja igual a $n > 1$, então a n-ésima ocorrência de fórmula de σ não é uma premissa menor vinculada.*

Definição 5.3. ***(Validade Forte)*** *Uma dedução esquemática Π é Válida Fortemente (VF) se, e somente se:*

a) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução na qual as deduções de suas premissas intermediárias são VF e, para toda sequência de deduções $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF do conjunto Ξ^i_j, $\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\;\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j}}$ é VF, onde $\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}$ é uma sequência de deduções do conjunto Δ^i_j.

Se a redução de uma dedução que conclui uma premissa intermediária de $r(\Pi)$ tornar esta premissa intermediária uma fórmula esquemática máxima, então Π reduz-se a Π' que é VF. Denominamos esta última condição de cláusula a.1).

b) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução da negação e, para toda dedução $\dfrac{\Sigma^1}{H}$ VF, $\dfrac{\dfrac{\Sigma^1}{H}}{\dfrac{\Sigma}{\tau}}$ é VF.

c) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática do absurdo, e a dedução de sua premissa é VF.

d) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação ou uma regra esquemática de eliminação da negação, e as seguintes condições são satisfeitas:

d.1) Π é normal ou cada Π', tal que Π se reduz a Π', é VF.

d.2) Se Π *tem o formato*

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Phi}}{\Phi(H^1_{1,1},...,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma_{\Lambda^1}}{\Lambda^1}\,..\,\dfrac{\Sigma_{\Lambda^s}}{\Lambda^s}\,\dfrac{\Sigma_{\Xi^1_1}}{\Xi^1_1}\,..\,\dfrac{\Sigma_{\Xi^s_{p_s}}}{\Xi^s_{p_s}} \quad \begin{array}{c}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a\\ \Sigma^1\\ \hline F\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Lambda^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a\\ \Sigma^s\\ \hline F\end{array}}{F}\,\Phi E_{(a)},$$

então

$$\dfrac{\Sigma_{\Lambda^1}}{\Lambda^1},..,\dfrac{\Sigma_{\Lambda^s}}{\Lambda^s},\dfrac{\Sigma_{\Xi^1_1}}{\Xi^1_1},..,\dfrac{\Sigma_{\Xi^s_{p_s}}}{\Xi^s_{p_s}},\Sigma^1,..\Sigma^s \text{ e } \begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_1}}{\Xi^i_1}\,\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_1}}{\Delta^i_1}\\ \Sigma'^i_1\\ \hline G^i_1\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_{p_i}}}{\Xi^i_{p_i}}\,\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_{p_i}}}{\Delta^i_{p_i}}\\ \Sigma'^i_{p_i}\\ \hline G^i_{p_i}\end{array}\\ \Sigma^i\\ \hline F\end{array}$$

são VF, sendo que:

d.2.1) $\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_1}}{\Delta^i_1},..,\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_{p_i}}}{\Delta^i_{p_i}},\ \begin{array}{c}\Xi^i_1\,\Delta^i_1\\ \Sigma'^i_1\\ \hline G^i_1\end{array}\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{array}{c}\Xi^i_{p_i}\,\Delta^i_{p_i}\\ \Sigma'^i_{p_i}\\ \hline G^i_{p_i}\end{array}$ *são subdeduções de* Σ'_{Φ}*, para a qual* Σ_{Φ} *se reduz.*

d.2.2) As ocorrências de fórmulas esquemáticas dos conjuntos $\Delta^i_1,..,\Delta^i_{p_i}$ *e as ocorrências de fórmulas* $G^i_1,..,G^i_{p_i}$ *são premissas em* Σ'_{Φ} *de uma aplicação da regra esquemática de introdução que conclui* $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$[1].

e) Π *é uma dedução-hipótese.*

Dizemos que uma sequência de dedução $\dfrac{\Sigma_{\Delta}}{\Delta}$ é Válida Forte, se, e somente se, todas as deduções que pertencem à sequência forem válidas fortemente.

Definição 5.4. ***(Validade Forte por Substituição)***

[1]Observe que $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ pode ser premissa maior de uma aplicação da regra ΦE, como na dedução Π do item $d.2$, ou pode fazer parte de um segmento em Σ'_{Φ} que tem $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ como sua última fórmula.

Uma dedução esquemática é resultante de Π por substituição quando substituímos suposições abertas em Π por deduções VF. Uma dedução esquemática Π é Válida Fortemente por Substituição (VFS) se, e somente se, todas as deduções resultantes de Π por substituição são VF.

5.2 Prova da Normalização Forte para o Sistema S

Provaremos, nesta seção, o Teorema da Normalização Forte sem reduções permutativas para o sistema esquemático de Dedução Natural S. Inicialmente, apresentaremos e provaremos Lemas e Teoremas que serão utilizados na prova do Teorema de Normalização Forte mostrada no final desta seção.

Lemma 5.5. ***(Permanência de** $r(\Pi)$**)*** *Seja* $r(\Pi)$ *em que uma das seguintes condições é verdadeira:*

a) $r(\Pi)$ *é uma regra esquemática de introdução em que nenhuma redução das deduções de suas premissas intermediárias gera fórmula máxima.*

b) $r(\Pi)$ *é uma regra esquemática de introdução da negação.*

c) $r(\Pi)$ *é uma regra do absurdo.*

Então:

I) Π *é da forma* $\dfrac{\Pi^1 \ldots \Pi^m}{A}$, *para* $(1 \leq m)$.

II) Se Π_1,Π_2,.....,Π_n *é uma sequência de redução para* Π, *então cada* $\Pi_i (1 \leq i \leq n)$ *termina com a mesma regra que* Π. *Além disso,* Π_i *é da forma* $\dfrac{\Pi_i^1 \ldots \Pi_i^m}{A}$, *e* $\Pi_1^1 \ldots \Pi_n^1$,....,$\Pi_1^m \ldots \Pi_n^m$ *também são sequências de redução.*

Prova:

A prova de I) segue do formato das regras esquemáticas. A prova de II) é imediata da observação das reduções esquemáticas operacionais a.i.1 e a.i.2, introduzidas nas definições 4.3 e 4.4, das reduções do absurdo a.ii.1 e a.ii.2, introduzidas em 4.9 e 4.10, das reduções operacionais modais c.i.1 e c.i.2, introduzidas em 4.15 e 4.16 e das condições do Lema, pois as possíveis reduções em Π serão aplicadas para eliminar fórmulas máximas que ocorrem acima das premissas de $r(\Pi)$.

■

Lemma 5.6. ***(Substituições de Hipóteses)*** *Se* Π_1 *igual a* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^1 \quad \Gamma^1\\ \Pi'^1_1..\Pi'^m_1\end{array}}{A}$ *reduz-se a* Π_2 *igual a* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^2 \quad \Gamma^2\\ \Pi'^1_2..\Pi'^n_2\end{array}}{A}$, *onde* Γ^1 *é o conjunto de suposições abertas em* Π_1 *e* $\Gamma^1 \subseteq \Gamma^2$, *então* $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma^1}}{\Pi_1}$ *se reduz a* $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma^2}}{\Pi_2}$.

Prova:

A prova do Lema 5.6 é por indução no comprimento da dedução. O caso base, em que temos uma dedução-hipótese, é trivial. Caso contrário, temos dois casos a analisar:

a) A redução ocorreu em uma subdedução determinada por uma premissa de $r(\Pi_1)$:

   Nesse caso, suponha que foi em Π'^j_1. Visto que as ocorrências de fórmula de Γ_1 não são fórmulas máximas, temos, pela hipótese indutiva, que $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma_1}}{\Pi'^j_1}$ se reduz a $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma_2}}{\Pi'^j_2}$. Portanto, Π_1 se reduz a

$$\dfrac{\begin{array}{c}\frac{\Sigma}{\Gamma^1} \quad \frac{\Sigma}{\Gamma^2} \quad \frac{\Sigma}{\Gamma^1}\\ \Pi'^1_1..\Pi'^j_2..\Pi'^m_1\end{array}}{A.}$$

b) A redução ocorreu em uma premissa de $r(\Pi_1)$:

   Nesse caso, concluímos, a partir da observação das reduções e do fato de que uma ocorrência de fórmula de Γ^1 não é fórmula máxima, que se Π_1 é a dedução de $\Gamma^1 \vdash A$ então Π_2 é uma dedução de $\Gamma^2 \vdash A$, onde $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Portanto, $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma^1}}{\Pi_1}$ se reduz a $\overset{\frac{\Sigma}{\Gamma^2}}{\Pi_2}$.

■

Teorema 5.7. ***(Dedução Normal via Validade Forte)*** *Toda sequência de redução iniciando em uma dedução VF termina em uma dedução normal.*

Prova:

A prova é por indução na definição de Validade Forte, usando o Lema 5.5. Como Π é uma dedução VF, temos os seguintes casos:

a) Π é normal: trivial.

b) Existe fórmula máxima em Π:

b.1) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução e nenhuma redução de deduções de suas premissas intermediárias gera fórmula máxima. Nesse caso, Π tem o seguinte formato:

$$\cfrac{\Delta_1^i \quad .. \quad \Delta_{p_i}^i \qquad \cfrac{\begin{matrix}[\Xi_1^i]^a\,[\Delta_1^i]^a\\ \Sigma_1^i\end{matrix}}{G_1^i} \quad .. \quad \cfrac{\begin{matrix}[\Xi_j^i]^a\,[\Delta_j^i]^a\\ \Sigma_j^i\end{matrix}}{G_j^i} \quad .. \quad \cfrac{\begin{matrix}[\Xi_{pi}^i]^a\,[\Delta_{pi}^i]^a\\ \Sigma_{pi}^i\end{matrix}}{G_{pi}^i}}{\Phi(H_{1,1}^1, .., G_{p_s}^s)}\ \Phi I_{(a)}.$$

Pela definição de VF, as deduções das premissas intermediárias Δ_1^i,..,$\Delta_{p_i}^i$ de $r(\Pi)$ são VF. Pela hipótese indutiva, toda sequência de redução das deduções das premissas intermediárias termina em uma dedução normal. Também pela hipótese indutiva, para qualquer $\cfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}$ VF, toda sequência de redução de

$$\cfrac{\cfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}\ \cfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}}{\begin{matrix}\Sigma_j^i\\ \hline G_j^i\end{matrix}}$$

termina em uma dedução normal, onde $\cfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}$ é uma sequência de deduções das premissas intermediárias de Δ_j^i. Portanto, qualquer sequência de reduções iniciando em $\cfrac{\begin{matrix}\Xi_j^i\ \Delta_j^i\\ \Sigma_j^i\end{matrix}}{G_j^i}$, também termina em uma dedução normal e, pelo Lema 5.5, qualquer sequência de redução iniciando em Π termina em uma dedução normal.

b.2) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática para o absurdo ou é uma regra esquemática de introdução da negação: semelhante ao item b.1);

b.3) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação ou uma regra esquemática de eliminação da negação: pela definição, Π reduz-se a Π' que é VF. Pela hipótese indutiva, toda sequência de redução iniciando em Π' termina em dedução normal. Portanto toda sequência de redução iniciando em Π também termina em dedução normal.

b.4) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução e uma redução de uma dedução de suas premissas intermediárias gera fórmula máxima: semelhante ao caso b.3).

■

Lemma 5.8. ***(Manutenção da Validade Forte)*** *Se* Π_1 *se reduz a uma dedução* Π_2 *e se* Π_1 *é VF, então* Π_2 *também é VF.*

Prova:

A prova é por indução na definição de Validade Forte e utiliza os lemas 5.5 e 5.6. Temos os seguintes casos:

a) Π_1 é normal: trivial.

b) Existe fórmula máxima em Π_1:

b.1) $r(\Pi_1)$ é uma regra esquemática de introdução e a redução de deduções de suas premissas intermediárias não gera fórmula máxima:

b.1.1) A redução Π_2 de Π_1 ocorre em uma subdedução Π_1^* determinada por uma premissa intermediária de Π_1:

Nesse caso, como Π_1 é VF, Π_1^* é VF pela definição de VF. O fato de Π_1^* ser VF é condição, conforme definição de Validade Forte, para Π_1 ser VF. Portanto, pela hipótese indutiva, Π_2^*, tal que Π_1^* se reduz a Π_2^*, é VF.

Suponha, agora, que Π_1^* é igual a $\dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$ e que Π_2^* é igual a $\dfrac{\Sigma^*_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$.

É necessário mostrar, também, que para toda dedução $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF,

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j} \quad \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,1}}}{E^i_{j,1}} \; .. \; \dfrac{\Sigma^*_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,p_i}}}{E^i_{j,p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j}}$$

é VF.

O fato de que para toda dedução $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF,

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j} \quad \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,1}}}{E^i_{j,1}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,p_i}}}{E^i_{j,p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j}}$$

é VF, é condição, conforme definição de Validade Forte, para Π_1 ser VF. Assim, completamos a prova desse item pela hipótese indutiva e devido ao fato de que

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j} \quad \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,1}}}{E^i_{j,1}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,p_i}}}{E^i_{j,p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j}}$$

se reduz a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j} \quad \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,1}}}{E^i_{j,1}} \; .. \; \dfrac{\Sigma^*_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}} \; .. \; \dfrac{\Sigma_{E^i_{j,p_i}}}{E^i_{j,p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_j.}}$$

b.1.2) A redução Π_2 de Π_1 ocorre em uma dedução Σ^i_j de uma premissa não-intermediária de Π_1. Suponha, no exemplo abaixo, que Σ^i_j se reduz a Σ^{*i}_j e que Π_1 é a dedução de cima e Π_2 é dedução de baixo:

$$\dfrac{\Delta_1^i \quad .. \quad \Delta_{p_i}^i \quad \begin{array}{c}[\Xi_1^i]^a\,[\Delta_1^i]^a\\ \Sigma_1^i\\ \hline G_1^i\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Xi_j^i]^a\,[\Delta_j^i]^a\\ \Sigma_j^i\\ \hline G_j^i\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Xi_{pi}^i]^a\,[\Delta_{pi}^i]^a\\ \Sigma_{pi}^i\\ \hline G_{pi}^i\end{array}}{\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)}\,\Phi I_{(a)}$$

$\rhd\rhd$

$$\dfrac{\Delta_1^i \quad .. \quad \Delta_{p_i}^i \quad \begin{array}{c}[\Xi_1^i]^a\,[\Delta_1^i]^a\\ \Sigma_1^i\\ \hline G_1^i\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Xi_j^i]^a\,[\Delta_j^i]^a\\ \Sigma_j^{*i}\\ \hline G_j^i\end{array} \quad .. \quad \begin{array}{c}[\Xi_{pi}^i]^a\,[\Delta_{pi}^i]^a\\ \Sigma_{pi}^i\\ \hline G_{pi}^i\end{array}}{\Phi(H_{1,1}^1,..,G_{p_s}^s)}\,\Phi I_{(a)}.$$

Como nesse caso as deduções das premissas intermediárias de Π_1 e Π_2 são iguais, então basta mostrar que, para $\dfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}$ VF, $\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}\\ \Sigma_j^{*i}\\ \hline G_j^i\end{array}$ é VF, onde $\dfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}$ é uma sequência de deduções do conjunto Δ_j^i de premissas intermediárias.

Observe que $\begin{array}{c}\Xi_j^i\,\Delta_j^i\\ \Sigma_j^i\\ \hline G_j^i\end{array}$ reduz-se a $\begin{array}{c}\Xi_j^i\,\Delta_j^i\\ \Sigma_j^{*i}\\ \hline G_j^i\end{array}$. Pelo Lema 5.6,

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}\\ \Sigma_j^i\\ \hline G_j^i\end{array} \quad \text{reduz-se a} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi_j^i}}{\Xi_j^i}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta_j^i}}{\Delta_j^i}\\ \Sigma_j^{*i}\\ \hline G_j^i\end{array}.$$

Como Π é VF, Σ_j^i é VF pela definição de VF e, pela hipótese indutiva, o Lema é verdade para Σ_j^i. Portanto, Σ_j^{*i} é VF.

b.2) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática do absurdo ou uma regra esquemática de introdução da negação: semelhante aos itens b.1.1) e b.1.2), respectivamente.

b.3) $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação, uma regra esquemática de eliminação da negação ou uma regra esquemática de introdução em que pelo menos uma redução de deduções de suas premissas intermediárias gera fórmula máxima, então o Lema segue da definição de VF.

■

Lemma 5.9. ***(Validade Forte para*** ξE***)*** *Se uma dedução* Π *é da forma* $\dfrac{[\xi A] \quad \dfrac{\Sigma}{A}}{\tau}\,\xi E$ *e* Σ *é VF, então* Π *é VF.*

Prova:

A prova do Lema 5.9 é feita de modo semelhante à prova do Lema 2, capítulo V, da tese de Massi [30]. Como $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra esquemática de eliminação da negação, então, pelo item $d.1$) da definição de Validade Forte introduzida em 5.3, devemos mostrar que cada redução Π' de Π é VF.

Utilizaremos o índice α como valor de indução, sendo que α corresponde ao comprimento da árvore de redução das deduções em Σ da premissa menor A de Π. È possível utilizarmos o índice α porque, pela hipótese do Lema, Σ é VF e, pelo teorema 5.7, toda sequência de redução que inicia em cada dedução de Σ termina em uma dedução normal.

Como a premissa maior e a premissa menor de $r(\Pi)$ não são fórmulas máximas, a dedução Π' é obtida a partir da redução de uma dedução em Σ. Seja Π e Π' iguais, respectivamente, a

$$\dfrac{[\xi A] \quad \dfrac{\Pi^1..\Pi^j..\Pi^n}{A}}{\tau}\,\xi E$$

e a

$$\dfrac{[\xi A] \quad \dfrac{\Pi^1..\Pi'^j..\Pi^n}{A}}{\tau}\,\xi E.$$

Pelo Lema 5.8, Π'^j é VF. Portanto, Π' satisfaz as condições do Lema 5.9 e, como o valor de α' de Π' é menor do que o valor α de Π, temos, pela hipótese indutiva, que Π' é VF.

■

Lemma 5.10. ***(Validade Forte para as Regras*** ΦI***,*** ξI***,*** ΦE ***e*** ξE***)*** *Uma dedução* Π *tal que* $r(\Pi)$ *não é uma regra esquemática do absurdo é VF, quando:*

a) Toda sequência de redução iniciando de uma dedução de uma premissa de $r(\Pi)$ *termina em uma dedução normal.*

b) Se $r(\Pi)$ *é* ΦE*, então a condição d.2) da definição de Validade Forte é verdadeira para* Π*.*

b.1) Se $r(\Pi)$ *é* ξE*, então as deduções das premissas de* $r(\Pi)$ *são VF.*

c) Se $r(\Pi)$ *é* ΦI*, então a condição a) da definição de Validade Forte é verdadeira para* Π*, com exceção da cláusula* $a.1)$*.*

c.1) Se $r(\Pi)$ *é* ξI*, então a condição b) da definição de Validade Forte é verdadeira para* Π*.*

d) Se Π *é da forma* [2]

$$
\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\xi M^i_{l_5}]^a \\ \Sigma \\ \tau\end{array}}{M^i_{l_5}}\,\tau_{c_{(a)}} \; ..M^i_{m^i}..\Lambda^s\;\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \quad \begin{array}{c}\Sigma^1 \\ \hline F\end{array}.. \quad \begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^i \\ \hline F\end{array} \quad ..\begin{array}{c}\Sigma^s \\ \hline F\end{array}}{F}\,\Phi E_{(b)}
$$

então

$$
\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..[M^i_{l_5}]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s\;\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s} \quad \begin{array}{c}\Sigma^1 \\ \hline F\end{array}.. \quad \begin{array}{c}[M^i_1..]^b...[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^i \\ \hline F\end{array} \quad ..\begin{array}{c}\Sigma^s \\ \hline F\end{array}}{F}\,\Phi E_{(b)} \quad [\xi F]^c}{\begin{array}{c}\dfrac{\tau}{\xi M^i_{l_5}}\,\xi I_{(b)} \\ \Sigma \\ \hline \tau\end{array}}\,\xi E
$$

é VF.

[2]O caso em que $M^i_{l_5}$ é premissa intermediária da ΦI e o caso em que $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ é conclusão da regra τ_c são semelhante ao item d).

e) Se Π é da forma[a]

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1 \ldots M^i_1 .. \dfrac{\Delta^i_1 \ldots \Delta^i_{p_i} \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} \;\; .. \;\; \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a \\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j} \;\; .. \;\; \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)} \; ..M^i_{m^i} \ldots \Lambda^s\, \Xi'^1_1 \ldots \Xi'^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma^1}{F} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda'^i]^b\,[G'^i_1]^b \,..\, [G'^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad \ldots \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)},$$

então

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..M^i_{l_5-1}\Delta^i_1..\Delta^i_{p_i}M^i_{l_5+1}..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s}\,\dfrac{\Sigma^1}{F} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1]^b.. \dfrac{[\Delta^i_1]^b..[\Delta^i_{p_i}]^b \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} \;\; .. \;\; \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a \\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j} \;\; .. \;\; \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)} \; ..[M^i_{m^i}]^b[G'^i_1]^b \,..\, [G'^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

é VF.

[a] O caso em que $M^i_{l_5}$ é premissa intermediária da ΦI é tratado de modo similar.

f) Se Π *é da forma* [3]

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\dfrac{\begin{matrix}[H]^a\\ \Sigma\\ \overline{\tau}\end{matrix}}{\xi H}\,\xi I_{(a)}\,..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{\begin{matrix}F\\ \Pi_1\end{matrix}}\ \Phi E_{(b)}.$$

[3]O caso em que ξH é premissa intermediária da regra ΦI é semelhante ao item f).

em que H não é premissa maior, então

$$\cfrac{\cfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..[\xi H]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \cfrac{\Sigma^1}{F}\ .. \quad \cfrac{[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\cfrac{\Sigma^i}{F}} \quad ..\ \cfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\ \Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\cfrac{\tau}{\cfrac{H}{\cfrac{\Sigma}{\tau}}}\ \tau_{c_{(b)}}}\ \xi E$$

é VF.

g) Se Π *é da forma* [a]

$$
\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1.. \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[H]^c \quad \Lambda'^1..\Lambda'^s\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s} \; \dfrac{\Sigma'^1}{F'}.. \quad \dfrac{\dfrac{[\Lambda'^i]^a[G'^i_1]^a..[G'^i_{p_i}]^a}{\Sigma'^i}}{F'} \quad ..\dfrac{\Sigma'^s}{F'}}{F'}\;\Phi E_{(a)}}{\Sigma}}{\tau}}{\xi H}\;\xi I_{(c)} \quad ..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\;\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \dfrac{\dfrac{[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\Sigma^i}}{F} \quad ...\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\;\Phi E_{(b)},
$$

então

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\Lambda'^1..\Lambda'^s..M^i_{m^i}..\Lambda^s\,[\xi F']^a\Xi'^1_1..\Xi'^s_{p_s}\,\Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\;\dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \Sigma'.. \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\;\Phi E_{(d)} \qquad [\xi F]^b}{\tau}\;\xi E}{F'}\;\tau_{c_{(a)}}}{\dfrac{\Sigma}{\tau,}}
$$

[a]O caso em que ξH é premissa intermediária da regra ΦI é semelhante ao item g).

onde Σ' *é igual a*

$$[M_1^i]^d.. \quad \cfrac{\cfrac{[H]^e \quad [\Lambda'^1]^d..[\Lambda'^s]^d[\Xi_1'^1]^d..[\Xi_{p_s}'^s]^d \; \cfrac{\Sigma'^1}{F'} \; .. \quad \overset{[\Lambda'^i]^c[G_1'^i]^c..[G_{p_i}'^i]^c}{\cfrac{\Sigma'^i}{F'}} \quad ... \cfrac{\Sigma'^s}{F'}}{F'}\,\Phi E_{(c)} \qquad [\xi F']^d}{\begin{array}{c}\cfrac{\tau}{\xi H}\;\xi I_{(e)} \\ \cfrac{\Sigma^i}{F}\end{array}}\;\xi E \quad ..[M_{m^i}^i]^d[G_1^i]^b..[G_{p_i}^i]^b$$

é VF.

Prova:

Dada as condições $a)$ a $g)$ do lema, provaremos que Π é VF utilizando a definição. Para tanto, basta mostrarmos que Π reduz-se a Π' que é VF, pois:

a) Se $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução, então a condição a) da definição de VF é verdadeira a partir da hipótese c) do Lema. No caso da redução de uma dedução de uma premissa intermediária gerar fórmula máxima, então é necessário mostrar que Π reduz-se a Π' que é VF.

a.1) Se $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de introdução da negação, então, pela hipótese c.1) do Lema, a condição b) da definição de VF é verdadeira.

b) Se $r(\Pi)$ é uma regra esquemática de eliminação ou uma regra esquemática de eliminação da negação, então a condição d.2) da definição de VF é verdadeira a partir da hipótese b) do Lema. Resta provar que Π reduz-se a Π' que é VF.

A prova é por indução no terno (α,β,γ) definidos abaixo [4]:

- α é o comprimento da árvore de redução da dedução da premissa maior de $r(\Pi)$, se existir tal premissa. Caso contrário, A é igual a zero;

[4] α,β e γ são finitos devido à condição $a)$ do Lema 5.10.

- β é o comprimento da dedução da premissa maior de $r(\Pi)$, se existir tal premissa. Caso contrário, β é igual a zero;

- γ é o comprimento da árvore de redução das deduções das premissas de $r(\Pi)$.

Consideramos dois casos:

a) $\Pi^{'}$ é obtida de Π, substituindo uma sub-árvore própria de Π por sua redução imediata. Nesse caso, se Π é igual a $\dfrac{\Pi_1 \ldots \Pi_n}{A}$, então $\Pi^{'}$ é igual a $\dfrac{\Pi_1^{'} \ldots \Pi_n^{'}}{A}$, onde, para algum $i(1 \leq i \leq n)$, Π_i se reduz imediatamente a $\Pi_i^{'}$ e para $(i \neq j \leq n)$ $\Pi_j^{'}$ é igual a Π_j. O valor de indução de $\Pi^{'}$, $(\alpha^{'}, \beta^{'}, \gamma^{'})$, é menor que o de Π, pois $\alpha^{'} < \alpha$ ou $\alpha = \alpha^{'}$, $\beta = \beta^{'}$, porém $\gamma < \gamma^{'}$. $\Pi^{'}$ satisfaz às condições do Lema, pois:

a.1) A condição a) é satisfeita, pois ela também é verdadeira para Π.

a.2) Se Π é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H_{1,1}^1, .., G_{p_s}^s)} \quad \dfrac{\Sigma_\Lambda^1}{\Lambda^1} .. \dfrac{\Sigma_\Lambda^s}{\Lambda^s} \dfrac{\Sigma_1^1}{\Xi_1^1} .. \dfrac{\Sigma_{p_s}^s}{\Xi_{p_s}^s} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^1]^a [G_1^1]^a .. [G_{p_1}^1]^a \\ \Sigma^1\end{matrix}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^s]^a [G_1^s]^a .. [G_{p_s}^s]^a \\ \Sigma^s\end{matrix}}{F}}{F} \Phi E_{(a)},$$

então devemos mostrar a condição b) do Lema para a redução $\Pi^{'}$ de Π.

a.2.1) Seja $\Pi^{'}$ obtida de Π a partir da redução de Σ_Φ em $\Sigma_\Phi^{'}$, então $\dfrac{\Sigma_\Lambda^1}{\Lambda^1}, .., \dfrac{\Sigma_\Lambda^s}{\Lambda^s}, \dfrac{\Sigma_1^1}{\Xi_1^1}, .., \dfrac{\Sigma_{p_s}^s}{\Xi_{p_s}^s}, \Sigma^1, .., \Sigma^s$ são VF, pela suposição b) do Lema para Π. Considerando que $\Sigma_\Phi^{'}$ reduz-se a Σ_Φ^*, é necessário mostrar que, sendo $\dfrac{\Sigma_{1,\Delta}^{*i}}{\Delta_1^i}, .., \dfrac{\Sigma_{p_i,\Delta}^{*i}}{\Delta_{p_i}^i}$, $\dfrac{\begin{matrix}\Xi_1^i \, \Delta_1^i \\ \Sigma_1^{*i}\end{matrix}}{G_1^i} \; \ldots\ldots\ldots \; \dfrac{\begin{matrix}\Xi_{p_i}^i \, \Delta_{p_i}^i \\ \Sigma_{p_i}^{*i}\end{matrix}}{G_{p_i}^i}$ subdeduções de Σ_Φ^* nas condições do item $d.2.1)$ da definição de VF, então Π^* igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_\Lambda}{\Lambda^i} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_1}{\Xi^i_1} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}}{\Sigma^{*i}_1}}{G^i_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}}{\Sigma^{*i}_{p_i}}}{G^i_{p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i}{F}}$$

é VF. A prova do item $a.2.1)$ decorre dos seguintes fatos:

a) Visto que Σ_Φ reduz-se a Σ'_Φ e Σ'_Φ reduz-se a Σ^*_Φ, então Σ_Φ reduz-se a Σ^*_Φ.

b) Pela condição $b)$ do Lema 5.10, o item $d.2)$ da definição de VF é válido para Π, portanto, como Σ_Φ reduz-se a Σ^*_Φ, então, sendo $\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}, .., \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}, \dfrac{\dfrac{\Xi^i_1 \; \Delta^i_1}{\Sigma^{*i}_1}}{G^i_1} \ldots\ldots\ldots \dfrac{\dfrac{\Xi^i_{p_i} \; \Delta^i_{p_i}}{\Sigma^{*i}_{p_i}}}{G^i_{p_i}}$ subdeduções de Σ^*_Φ nas condições do item $d.2.1)$ da definição de VF, temos que Π^* igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_\Lambda}{\Lambda^i} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_1}{\Xi^i_1} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}}{\Sigma^{*i}_1}}{G^i_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}}{\Sigma^{*i}_{p_i}}}{G^i_{p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i}{F}}$$

é VF.

a.2.2) Π' é obtida de Π pela redução de Σ^i em Σ'^i: $\dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}, .., \dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}, \dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1}, .., \dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}, \Sigma^1, .., \Sigma^{i-1}, \Sigma^{i+1}, .., \Sigma^s$ em Π' são VF, pela suposição b) do Lema 5.10. Pelo Lema 5.8, Σ^i VF reduz-se a Σ'^i que é VF. É necessário mostrar que, se Σ_Φ reduz-se a Σ^*_Φ e $\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}, .., \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}, \dfrac{\dfrac{\Xi^i_1 \; \Delta^i_1}{\Sigma^{*i}_1}}{G^i_1} \ldots\ldots\ldots \dfrac{\dfrac{\Xi^i_{p_i} \; \Delta^i_{p_i}}{\Sigma^{*i}_{p_i}}}{G^i_{p_i}}$ são subdeduções de Σ^*_Φ nas condições do item $d.2.1)$ da definição de VF, então Π'^* igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_\Lambda}{\Lambda^i} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_1}{\Xi^i_1} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1} \; \Gamma^i_1}{\Sigma^{*i}_1}}{G^i_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}} \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \; \Gamma^i_{p_i}}{\Sigma^{*i}_{p_i}}}{G^i_{p_i}}}{\dfrac{\Sigma'^i}{F}}$$

é VF.

Pela condição b) do Lema 5.10, sendo $\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}$,.., $\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}$, $\dfrac{\begin{matrix}\Xi^i_1\ \Delta^i_1\\ \Sigma^{*i}_1\end{matrix}}{G^i_1}$ $\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{\begin{matrix}\Xi^i_{p_i}\ \Delta^i_{p_i}\\ \Sigma^{*i}_{p_i}\end{matrix}}{G^i_{p_i}}$ subdeduções de Σ^*_Φ nas condições do item d.2.1) da definição de VF, então

Π^* é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_\Lambda}{\Lambda^i} \quad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma^i_1}{\Xi^i_1}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\\ \Sigma^{*i}_1\end{matrix}}{G^i_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\\ \Sigma^{*i}_{p_i}\end{matrix}}{G^i_{p_i}}}{\dfrac{\Sigma^i}{F}}$$

é VF. Pelo Lema 5.6, concluímos que Π'^* é VF.

a.2.3) Π' é obtida de Π a partir de uma redução em $\dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$[5]:

As deduções em $\dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$ são VF, pois a condição b) do Lema 5.10 é válida para Π e, consequentemente, o item d.2.1) da definição de Validade Forte é válido para Π.

Seja $\dfrac{\Sigma'_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$ a sequência de deduções obtida de $\dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$ pela eliminação de uma fórmula máxima. Como as deduções em $\dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$ são VF, então, pelo Lema 5.6, as deduções da sequência $\dfrac{\Sigma'_{\Lambda^i}}{\Lambda^i}$ também são VF.

Visto que as demais deduções de premissas intermediárias, deduções das premissas menores vinculadas e das premissas de Π e Π' são iguais, resta mostrar que, se Σ_Φ se reduz a Σ^*_Φ e $\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}$,.., $\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}$, $\dfrac{\begin{matrix}\Xi^i_1\ \Delta^i_1\\ \Sigma^{*i}_1\end{matrix}}{G^i_1}$ $\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{\begin{matrix}\Xi^i_{p_i}\ \Delta^i_{p_i}\\ \Sigma^{*i}_{p_i}\end{matrix}}{G^i_{p_i}}$ são subdeduções de Σ^*_Φ nas condições

[5]Aplicamos raciocínio semelhante, se supormos que a redução ocorreu em uma dedução de $\dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}$.

do item d.2.1) da definição de VF, então Π'^{*} igual a

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{\Sigma_1^i}{\Xi_1^i}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta_1^i} & & \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \\ \dfrac{\Sigma'_{\Lambda^i}}{\Lambda^i} & \dfrac{\Sigma_1^{*i}}{G_1^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{G^i_{p_i}} \\ & & \dfrac{\Sigma^i}{F} & \end{array}$$

é VF. É fácil verificar que a proposição final descrita acima é verdadeira a partir dos seguintes fatos:

a) A condição b) do Lema 5.10 é verdadeira para Π.

b) Portanto, se Σ^*_Φ é uma redução de Σ_Φ e $\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta_1^i}$,..., $\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}$, $\dfrac{\begin{array}{c}\Xi_1^i\ \Delta_1^i\\ \Sigma_1^{*i}\end{array}}{G_1^i}$ $\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{\begin{array}{c}\Xi^i_{p_i}\ \Delta^i_{p_i}\\ \Sigma^{*i}_{p_i}\end{array}}{G^i_{p_i}}$ são subdeduções de Σ^*_Φ nas condições do item d.2.1) da definição de VF, então Π''^{*} igual a

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{\Sigma_1^i}{\Xi_1^i}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta_1^i}\ \Gamma_1^i & & \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\ \Gamma^i_{p_i} \\ \dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i} & \dfrac{\Sigma_1^{*i}}{G_1^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{G^i_{p_i}} \\ & & \dfrac{\Sigma^i}{F} & \end{array}$$

é VF.

c) Por fim,

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{\Sigma_1^i}{\Xi_1^i}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta_1^i}\ \Gamma_1^i & & \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\ \Gamma^i_{p_i} \\ \dfrac{\Sigma_{\Lambda^i}}{\Lambda^i} & \dfrac{\Sigma_1^{*i}}{G_1^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{G^i_{p_i}} \\ & & \dfrac{\Sigma^i}{F} & \end{array}$$

se reduz a

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{\Sigma_1^i}{\Xi_1^i}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta_1^i}\ \Gamma_1^i & & \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\ \Gamma^i_{p_i} \\ \dfrac{\Sigma'_{\Lambda^i}}{\Lambda^i} & \dfrac{\Sigma_1^{*i}}{G_1^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{G^i_{p_i}} \\ & & \dfrac{\Sigma^i}{F} & \end{array}$$

que é VF, pelo Lema 5.8 e pela conclusão do item b) descrito acima.

a.3) Se $r(\Pi)$ é igual a ξE, então, pelo Lema 5.8 e pela hipótese b.1) do Lema 5.10, o item b.1) é verdade para Π'.

a.4) Para a prova da condição c) do Lema 5.10 para Π', considere Π igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_1]^a\,[\Delta^i_1]^a\\ \Sigma^i_1\end{matrix}}{G^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a\,[\Delta^i_j]^a\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_{pi}]^a\,[\Delta^i_{pi}]^a\\ \Sigma^i_{pi}\end{matrix}}{G^i_{pi}}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\Phi I_{(a)}.$$

Temos dois casos para analisar:

a) Π' é uma dedução obtida de Π a partir da redução de uma dedução de premissa intermediária:

Suponha que a dedução $\dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$ em $\dfrac{\Sigma^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j}$ foi reduzida e que obtemos a sequência de deduções $\dfrac{\Sigma'^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j}$ do conjunto Δ^i_j. Para mostrar que Π' é VF precisamos mostrar que:

a.1) As deduções das premissas intermediárias são VF: isso é verdadeiro pois, com exceção da dedução $\dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$ em Δ^i_j que foi reduzida, as demais deduções em $\Delta^i_1,..,\Delta^i_{p_i}$ de Π' são iguais às respectivas deduções em Π.

Com relação a $\dfrac{\Sigma_{E'^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$ obtida a partir de $\dfrac{\Sigma_{E^i_{j,l_2}}}{E^i_{j,l_2}}$ pela eliminação de um segmento máximo, o fato de a segunda dedução ser VF garante, pelo Lema 5.8, que a primeira dedução é VF.

a.2) Pela validade da condição c) do Lema 5.10 para Π e, consequentemente, da condição a) da definição de VF, para toda sequência de dedução $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF,

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j}$$

é VF, onde $\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}$ é uma sequência de deduções de premissas intermediárias.

Precisamos mostrar que, para toda sequência de deduções $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF, $\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma'_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j}$

é VF, onde $\dfrac{\Sigma'_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}$ é uma sequência de deduções do conjunto Δ^i_j de premissas intermediárias. Esta proposição é verdadeira, porque

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

VF se reduz a

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma'_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

que, pelo Lema 5.8, é VF.

b) Π' é uma dedução obtida de Π a partir da redução de uma dedução de uma premissa:

Nesse caso, é suficiente mostrar que, para toda dedução $\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF, $\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j} \\ {\Sigma'}^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$ é VF, onde $\dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}$ é uma sequência de deduções do conjunto Δ^i_j, pois as premissas intermediárias de Π e Π' são iguais.

A proposição descrita acima é verdadeira porque:

b.1)

$$\begin{array}{c} \Xi^i_j\ \Delta^i_j \\ \Sigma^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

VF se reduz a

$$\begin{array}{c} \Xi^i_j\ \Delta^i_j \\ {\Sigma'}^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

e, pelo Lema 5.6,

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

VF se reduz a

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}\\ \dfrac{\Sigma'^i_j}{G^i_{j}}\end{array}.$$

b.2) Pela condição c) do Lema,

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}\\ \dfrac{\Sigma^i_j}{G^i_{j}}\end{array}$$

é VF e, pelo Lema 5.8,

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_{\Xi^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma_{\Delta^i_j}}{\Delta^i_j}\\ \dfrac{\Sigma'^i_j}{G^i_{j}}\end{array}$$

é VF.

a.5) Se $r(\Pi)$ é igual a ξI então, pelos lemas 5.8 e 5.6, e pela hipótese c.1) para Π, o item c.1) é verdadeiro para Π'.

a.6) Para a prova da condição d) do Lema 5.10, considere Π' mostrada abaixo:

$$\dfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..\ \dfrac{\begin{array}{c}[\xi M^i_{l_5}]^a\\ \Sigma\\ \overline{\tau}\end{array}}{M^i_{l_5}}\tau_{c_{(a)}}\ ..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}..\ \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\Gamma^i\\ \Sigma'^i\end{array}}{F}\ ..\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\ \Phi E_{(b)}.$$

Nesse caso, a redução ocorreu em Σ^i de Π. Como a condição d) do Lema é verdadeira por hipótese para Π, então Π^* igual a

$$\cfrac{\cfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s}) \quad \Lambda^1..M^i_1..[M^i_{l_5}]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \cfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \cfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad ..\cfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\begin{matrix}\cfrac{\tau}{\xi M^i_{l_5}}\,\xi I_{(b)}\\ \Sigma \\ \tau\end{matrix}}\,\xi E$$

é VF. Provar a condição d) do Lema para Π' é provar que Π'^* igual a

$$\cfrac{\cfrac{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})\Lambda^1..M^i_1..[M^i_{l_5}]^b..M^i_{m^i}..\Lambda^s\ \Xi^1_1..\Xi^s_{p_s}\ \cfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \cfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b...[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma'^i\end{matrix}}{F} \quad ..\cfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\begin{matrix}\cfrac{\tau}{\xi M^i_{l_5}}\,\xi I_{(b)}\\ \Sigma \\ \tau\end{matrix}}\,\xi E$$

é VF. Isto é verdadeiro pela aplicação do Lema 5.8, pois Π^* é VF e Π^* se reduz a Π'^*. Caso a redução em Π ocorra em qualquer uma das deduções que pertencem às sequências de deduções Λ^1,..,Λ^s,Ξ^1_1,..,$\Xi^s_{p_s}$ ou nas deduções M^i_1,..,$M^i_{l_5-1}$,$M^i_{l_5+1}$,..,$M^i_{m^i}$, utilizamos raciocínio semelhante.

Por fim, se a redução ocorrer na dedução Σ em Π, a prova da condição d) do Lema 5.10 para Π' segue do fato de que Π^* é VF, da aplicação do Lema 5.6, que garante que Π^* reduz-se a Π'^*, e da aplicação do Lema 5.8, que nos permite concluir que, se Π^* se reduz a Π'^* e Π^* é VF, então Π'^* é VF.

a.7) A prova das condições e), f) e g) do Lema para Π' são semelhantes à prova apresentada no item a.6).

b) Π' é obtida de Π a partir da eliminação de uma fórmula máxima A que é premissa de $r(\Pi)$: se $r(\Pi)$ é a regra ΦE, e A é uma fórmula máxima do tipo $a.i.1$, então, usando a condição b) do Lema para Π e a reflexividade das reduções, concluímos que Π' é VF.

Se A é do tipo $a.i.2$, então, usando a condição b.1) para Π e a definição de VF, concluímos que Π' é VF.

Se A é uma fórmula máxima do tipo $a.ii.1$, $a.ii.2$ ou $c.i.2$, então, usando, respectivamente, a condição d), f) ou g) do Lema 5.10 para Π e a definição de VF, concluímos que Π' é VF.

Por fim, se A é uma fórmula máxima do tipo $c.i.1$, então, usando a condição e) do Lema 5.10 para Π, provamos que Π' é VF.

■

Teorema 5.11. ***(Validade Forte por Substituição)*** *Toda dedução é válida fortemente por substituição.*

Prova:

A prova é por indução no comprimento de Π. Se $r(\Pi)$ é uma regra esquemática do absurdo, então o resultado é imediato da hipótese indutiva. Caso contrário, considere Π da forma $\dfrac{\Pi_1 \ldots \Pi_n}{A}\,R$, onde R não é uma aplicação da regra do absurdo. Devemos mostrar que Π^* igual a $\dfrac{\Pi_1^* \ldots \Pi_n^*}{A}\,R$ é VF, onde Π^* é obtida de Π por substituição. Para tanto é suficiente mostrar as condições do Lema 5.10 para Π^*.

Pela hipótese indutiva, as deduções $\Pi_1 \ldots \Pi_n$ são VFS e, consequentemente, $\Pi_1^* \ldots \Pi_n^*$ são VF. Aplicando o teorema 5.7, a condição a) do Lema 5.10 é verdadeira para Π^*.

Se $r(\Pi)$ for uma aplicação da regra ξE ou da regra ξI, as condições b.1) ou c.1) do Lema 5.10 são, respectivamente, verdadeiras pela hipótese indutiva.

Para a prova das condições b) e c) do Lema 5.10 para Π^*, considere os seguintes casos, respectivamente:

a) $r(\Pi)$ igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}..\dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}\dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1}..\dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a\\ \Sigma^1\end{matrix}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a\\ \Sigma^s\end{matrix}}{F}}{F}\,\Phi E_{(a)}.$$

Nesse caso, Π^* é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1} .. \dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\, \dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1} .. \dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^1]^a[G^1_1]^a..[G^1_{p_1}]^a\\ \Sigma^{*1}\end{matrix}}{F} \quad .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^s]^a[G^s_1]^a..[G^s_{p_s}]^a\\ \Sigma^{*s}\end{matrix}}{F}}{F}\,\Phi E_{(a)}$$

e, pela hipótese indutiva, Σ^*_Φ, Σ^{*1}_Λ,..,Σ^{*s}_Λ,Σ^{*1}_1,..,$\Sigma^{*s}_{p_s}$,Σ^{*1},..,Σ^{*s} são VF. Para completar a validade do item b) do Lema 5.10 para Π^*, é necessário mostrar que

$$\begin{matrix} \dfrac{\Sigma^{*i}_\Lambda}{\Lambda^i} & \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma^{*i}_1}{\Xi^i_1}\,\dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\\ \Sigma'^i_1\end{matrix}}{G^i_1} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\,\dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\\ \Sigma'^i_{p_i}\end{matrix}}{G^i_{p_i}} \end{matrix}$$
$$\dfrac{\Sigma^{*i}}{F}$$

é VF, onde $\dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}$,..., $\dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}$, $\dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_1]^a\,[\Delta^i_1]^a\\ \Sigma'^i_1\end{matrix}}{G^i_1}$,..., $\dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_{pi}]^a\,[\Delta^i_{pi}]^a\\ \Sigma'^i_{pi}\end{matrix}}{G^i_{pi}}$ são subdeduções Σ'^*_Φ para a qual Σ'^*_Φ se reduz e onde a condição $d.2.2)$ da definição de Validade Forte introduzida em 5.3 é válida para essas subdeduções. Como Σ^*_Φ é VF, então pelo Lema 5.8 Σ'^*_Φ é VF. Pela hipótese indutiva, $\dfrac{\begin{matrix}\Lambda^i G^i_1..G^i_{p_i}\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}$ é VFS, e, portanto, para toda sequência de deduções $\dfrac{\Sigma'^i_\Lambda}{\Lambda'^i}$,$\dfrac{\Sigma''^i_1}{G^i_1}$,..,$\dfrac{\Sigma''^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}$ válidas fortemente,

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma'^i_\Lambda}{\Lambda^i}\,\dfrac{\Sigma''^i_1}{G^i_1}..\dfrac{\Sigma''^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}\\ \Sigma^{*i}\end{matrix}}{F}$$

é VF. Visto que Σ'^*_Φ é VF, então, pela definição de Validade Forte, para toda dedução $\dfrac{\Sigma_{\Xi'^i_j}}{\Xi^i_j}$ VF,

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma_{\Xi'^i_j}}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma'^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

é VF. Como $\dfrac{\Sigma^{*i}_j}{\Xi^i_j}$ é VF, então

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma^{*i}_j}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma'^i_j \\ \hline G^i_j \end{array}$$

é VF e, portanto,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \dfrac{\Sigma^{*i}_1}{\Xi^i_1}\ \dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1} & & \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{\Xi^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \\ \dfrac{\Sigma^{*i}_\Lambda}{\Lambda^i} & \dfrac{\Sigma'^i_1}{G^i_1} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\Sigma'^i_{p_i}}{G^i_{p_i}} \end{array} \\ \Sigma^{*i} \\ \hline F \end{array}$$

é VF.

b) $r(\Pi)$ igual a $\dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_1]^a\,[\Delta^i_1]^a \\ \Sigma^i_1\end{array}}{G^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_{pi}]^a\,[\Delta^i_{pi}]^a \\ \Sigma^i_{pi}\end{array}}{G^i_{pi}}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\Phi I_{(a)}$: devemos mostrar que a hipótese c) do Lema 5.10 é verdadeira para Π^* igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_1]^a\,[\Delta^i_1]^a \\ \Sigma^{*i}_1\end{array}}{G^i_1} \quad .. \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_{pi}]^a\,[\Delta^i_{pi}]^a \\ \Sigma^{*i}_{pi}\end{array}}{G^i_{pi}}}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\,\Phi I_{(a)}$$

. Pela hipótese indutiva, $\begin{array}{c}\Xi^i_j\,\Delta^i_j\,\Gamma^i_j \\ \Sigma^i_j \\ \hline G^i_j\end{array}$ é VFS, ou seja, para toda dedução $\dfrac{\Sigma'^i_j}{\Xi^i_j}$ VF e $\dfrac{\Sigma'^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j}$ VF, $\begin{array}{c} \dfrac{\Sigma'^i_j}{\Xi^i_j}\ \dfrac{\Sigma'^i_{j,\Delta}}{\Delta^i_j} \\ \Sigma^{i*}_j \\ \hline G^i_j \end{array}$ é VF.

Também pela hipótese indutiva, as deduções das premissas intermediárias de Π são VFS. Isso conclui a prova do item c) do Lema 5.10 para Π^*.

Por fim, provamos as condições d), e), f) e g) do Lema 5.10 para Π^*:

c) Condição d) do Lema 5.10 para Π^*: nesse caso, Π é da forma [6]

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1} .. \dfrac{\Sigma^i_{j,1}}{M^i_1} .. \dfrac{\begin{matrix}[\xi M^i_{l_5}]^a \\ \dfrac{\Sigma}{\tau}\end{matrix}}{M^i_{l_5}}\tau_{c_{(a)}} \quad \dfrac{\Sigma^i_{m^i}}{..M^i_{m^i}} .. \dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s} \; \dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1} .. \dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}} \; \dfrac{\Sigma^1}{F} .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^i\end{matrix}}{F} \quad .. \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

e Π^* é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \; \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1} .. \dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1} .. \dfrac{\begin{matrix}[\xi M^i_{l_5}]^a \\ \dfrac{\Sigma^*}{\tau}\end{matrix}}{M^i_{l_5}}\tau_{c_{(a)}} \quad \dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{..M^i_{m^i}} . \dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s} \; \dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1} .. \dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}} \; \dfrac{\Sigma^{*1}}{F} .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b...[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^{*i}\end{matrix}}{F} \quad .. \dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b).}$$

Devemos mostrar a condição d) do Lema para Π^*, ou seja, que Π^* reduz-se a Π'^* que é VF:

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \; \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1} .. \dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1} ..[M^i_{l_5}]^b .. \dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}} .. \dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s} \; \dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1} .. \dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}} \; \dfrac{\Sigma^{*1}}{F} .. \quad \dfrac{\begin{matrix}[M^i_1..]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \Sigma^{*i}\end{matrix}}{F} \quad .. \dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\xi M^i_{l_5}}\,\xi I_{(b)}}\,\xi E \\ \dfrac{\Sigma^*}{\tau.}\end{matrix}$$

[6]O caso em que $M^i_{l_5}$ é premissa intermediária da ΦI ou $\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})$ é conclusão da regra τ_c é tratado de forma similar.

Pela hipótese indutiva, Σ é VFS. Portanto, basta mostrar que

$$\Pi^{*1} \text{ igual a } \quad \cfrac{\cfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\,..\,\dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}\,..[M^i_{l_5}]^b..\dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}}\,..\,\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\,\dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1}\,..\dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\,\dfrac{\Sigma^{*1}}{F}\,.. \quad \overset{[M^i_1..]^b..[M^i_{l_5}]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\dfrac{\Sigma^{*i}}{F}} \quad ..\,\dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\dfrac{\tau}{\xi M^i_{l_5}}\ \xi I_{(b)}}\ \xi E \quad \text{é VF.}$$

Usando a definição de VF, devemos provar que

$$\Pi^{*2} \text{ igual a } \quad \cfrac{\cfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\,..\dfrac{\Sigma^{*i}_1}{M^i_1}..\dfrac{\Sigma^{*i}_{l_5}}{M^i_{l_5}}..\dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}}..\,\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\,\dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1}\,..\dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\,\dfrac{\Sigma^{*1}}{F}\,.. \quad \overset{[M^i_1..]^b..[M^i_{l_5}]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b}{\dfrac{\Sigma^{*i}}{F}} \quad ..\,\dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)} \qquad [\xi F]^c}{\tau}\ \xi E \quad \text{é VF, para toda } \Sigma^{*i}_{l_5}$$

VF. Pela hipótese indutiva,

$$\cfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}\,..\,\dfrac{\Sigma^i_{j,1}}{M^i_1}\,..M^i_{l_5}..\dfrac{\Sigma^i_{m^i}}{M^i_{m^i}}\,...\,\dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}\,\dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1}...\dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\,\dfrac{\Sigma^1}{F}\,.. \quad \overset{[M^i_1..]^b..[M^i_{l_5}]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\Gamma^i}{\dfrac{\Sigma^i}{F}} \quad ..\,\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

é VFS.

Logo, a subdedução de Π^{*2} determinada por F é VF, para toda $\Sigma^{*i}_{l_5}$ VF. Usando o Lema 5.9, obtemos que Π^{*2} é VF.

d) Condição e) do Lema 5.10 para Π^*: nesse caso, Π e Π^* são, respectivamente,

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}\dots\dfrac{\Sigma^i_{j,1}}{M^i_1}.. \dfrac{\dfrac{\Sigma^i_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\dots\dfrac{\Sigma^i_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \quad \dfrac{\Sigma^i_1}{G^i_1} \; .. \; \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\Gamma^i_j\\ \Sigma^i_j\end{matrix}}{G^i_j} \; .. \; \dfrac{\Sigma^i_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)} \quad ..\dfrac{\Sigma^i_{m^i}}{M^i_{m^i}}\dots\dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}\dfrac{\Sigma'^1_1}{\Xi'^1_1}\dots\dfrac{\Sigma'^s_{p_s}}{\Xi'^s_{p_s}}\dfrac{\Sigma^1}{F}\;...\;\dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^i]^b\,[G'^i_1]^b..[G'^i_{p_i}]^b\,\Gamma^i\\ \Sigma^i\end{matrix}}{F}\;...\;\dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

e

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}.. \dfrac{\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}} \quad \dfrac{\Sigma^{*i}_1}{G^i_1} \; .. \; \dfrac{\begin{matrix}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\Gamma^{*i}_j\\ \Sigma^{*i}_j\end{matrix}}{G^i_j} \; .. \; \dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)} \quad ..\dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}}\dots\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\dfrac{\Sigma'^{*1}_1}{\Xi'^1_1}\dots\dfrac{\Sigma'^{*s}_{p_s}}{\Xi'^s_{p_s}}\dfrac{\Sigma^{*1}}{F}\;...\;\dfrac{\begin{matrix}[\Lambda^i]^b\,[G'^i_1]^b..[G'^i_{p_i}]^b\,\Gamma^{*i}\\ \Sigma^{*i}\end{matrix}}{F}\;...\;\dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}.$$

Provamos a condição e) do Lema para Π^*, ou seja, que Π'^* mostrada abaixo é VF:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \Sigma_P\ \dfrac{\Sigma'^{*1}_1}{\Xi'^1_1}\dots\dfrac{\Sigma'^{*s}_{p_s}}{\Xi'^s_{p_s}}\dfrac{\Sigma^{*1}}{F} \quad [M^i_1]^b..\ \dfrac{[\Delta^i_1]^b..[\Delta^i_{p_i}]^b \quad \dfrac{\Sigma^{*i}_1}{G^i_1} \quad .. \quad \overset{[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\Gamma^{i*}_j}{\dfrac{\Sigma^{i*}_j}{G^i_j}} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^{i*}_{p_i}}{G^i_{p_i}}}{\underset{\dfrac{\Sigma^{*i}}{F}}{M^i_{l_5}}}\ \Phi I_{(a)}\ ..[M^i_{m^i}]^b[G'^i_1]^b\ ..\ [G'^i_{p_i}]^b\Gamma^{*i} \quad .. \quad \dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\ \Phi E_{(b)},$$

onde Σ_P é a sequência de premissas intermediárias $\dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}..\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}\,\Sigma^{*i}_{m^i}}{\Delta^i_{p_i}\ M^i_{m^i}}\dots\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}$.

Pela hipótese indutiva,

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}..\dfrac{\Sigma'}{M^i_{l_5}}..\dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}}\dots\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\ \dfrac{\Sigma'^{*1}_1}{\Xi'^1_1}\dots\dfrac{\Sigma'^{*s}_{p_s}}{\Xi'^s_{p_s}}\ \dfrac{\Sigma^{*1}}{F}\ \dots \ \dfrac{\begin{array}{c}[\Lambda^i]^b\,[G'^i_1]^b..[G'^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^{*i}\end{array}}{F}\ ..\ \dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}$$

e

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^{*i}_{1,\Delta}}{\Delta^i_1}\dots\dfrac{\Sigma^{*i}_{p_i,\Delta}}{\Delta^i_{p_i}}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_1}{G^i_1}\ ..\ \dfrac{\begin{array}{c}[\Xi^i_j]^a[\Delta^i_j]^a\Gamma^{*i}_j\\ \Sigma^{*i}_j\end{array}}{G^i_j}}{M^i_{l_5}}\,\Phi I_{(a)}$$

são VF para Σ' VF. Portanto, Π^* é VF, e, pela definição de VF, item d.1), Π^* reduz-se a Π'^* que é VF.

e) Condição f) do Lema 5.10 para Π^*: nesse caso, Π é da forma

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}..\dfrac{\Sigma^i_{j,1}}{M^i_1}..\dfrac{\begin{array}{c}[H]^a\\ \Sigma\\ \tau\end{array}}{\xi H}\xi I_{(a)}\ \dfrac{\Sigma^i_{m^i}}{..M^i_{m^i}}..\dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}\dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1}..\dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\dfrac{\Sigma^1}{F}..\ \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{array}}{F}\ \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)},$$

em que H não é premissa maior, e Π^* é igual a

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}\dfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}..\dfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}..\dfrac{\begin{array}{c}[H]^a\\ \Sigma^*\\ \tau\end{array}}{\xi H}\xi I_{(a)}\ \dfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{..M^i_{m^i}}..\dfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\dfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1}..\dfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\dfrac{\Sigma^{*1}}{F}..\ \dfrac{\begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\\ \Sigma^{*i}\end{array}}{F}\ ..\ \dfrac{\Sigma^{*s}}{F}}{F}\,\Phi E_{(b)}.$$

Devemos mostrar a condição f) do Lema para Π^*, ou seja, que $\Pi^{'*}$ igual a

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{\Sigma^*_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})}
    \quad
    \cfrac{\Sigma^{*1}_\Lambda}{\Lambda^1}\,..\,\cfrac{\Sigma^{*i}_{j,1}}{M^i_1}\,..[\xi H]^b..\cfrac{\Sigma^{*i}_{m^i}}{M^i_{m^i}}\ldots\cfrac{\Sigma^{*s}_\Lambda}{\Lambda^s}\;\cfrac{\Sigma^{*1}_1}{\Xi^1_1}\ldots\cfrac{\Sigma^{*s}_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\;\cfrac{\Sigma^{*1}}{F}\,..
    \quad
    \begin{matrix}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b\Gamma^i\\ \cfrac{\Sigma^{*i}}{F}\end{matrix}
    \quad
    \cfrac{\Sigma^{*s}}{F}
  }{F}\;\Phi E_{(b)}.
  \qquad [\xi F]^c
}{
  \begin{matrix}\cfrac{\tau}{H}\;\tau_{c_{(b)}}\\ \cfrac{\Sigma^*}{\tau}\end{matrix}
}\;\xi E
$$

é VF.

Pela hipótese indutiva, $\begin{array}{c} H \\ \Sigma \\ \tau \end{array}$ é VFS. Então temos que mostrar que a subdedução Π''^{*} de Π'^{*} determinada por H é VF. Pela definição de VF, Π''^{*} é VF, se, e somente se, a subdedução Π'''^{*} de Π''^{*} determinada por τ é VF. Pelo Lema 5.9, Π'''^{*} é VF, se, e somente se, a subdedução Π^{iv*} de Π'''^{*} determinada por F é VF. Por fim, basta provar que Π^{iv*} é VF, e este resultado segue do fato de que, pela hipótese indutiva,

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_\Phi}{\Phi(H^1_{1,1},..,G^s_{p_s})} \quad \dfrac{\Sigma^1_\Lambda}{\Lambda^1}..\dfrac{\Sigma^i_{j,1}}{M^i_1}..\xi H..\dfrac{\Sigma^i_{m^i}}{M^i_{m^i}}..\dfrac{\Sigma^s_\Lambda}{\Lambda^s}\ \dfrac{\Sigma^1_1}{\Xi^1_1}..\dfrac{\Sigma^s_{p_s}}{\Xi^s_{p_s}}\ \dfrac{\Sigma^1}{F}.. \quad \begin{array}{c}[M^i_1..]^b..[\xi H]^b..[M^i_{m^i}]^b[G^i_1]^b..[G^i_{p_i}]^b \\ \dfrac{\Sigma^i}{F}\end{array} \quad \dfrac{\Sigma^s}{F}}{F}\ \Phi E_{(b)}$$

é VFS e, também, de que a dedução-hipótese ξH é VF.

f) Condição g) do Lema 5.10 para Π^*: esse caso é semelhante ao apresentado no item d).

■

Por fim, enunciamos o Teorema de Normalização Forte para o sistema S:

Teorema 5.12. ***(Normalização Forte para o Sistema*** S***)*** *Toda sequência de redução iniciando em uma dedução* Π *em* S *termina em uma forma normal.*

A prova do Teorema é direta dos Teoremas 5.11 e 5.7.

5.3 Conclusão

Neste capítulo, provamos o Teorema de Normalização Forte para o sistema esquemático de Dedução Natural S introduzido na definição 2.9. Conforme argumentaremos na seção 7.1, a partir de nossas definições esquemáticas, garantiremos a prova desse mesmo Teorema para os sistemas definidos por regras instâncias das regras que definem o sistema S. O resultado é inovador pois, até então, somente resultados de normalização fraca tinha sido provados para sistemas baseados em regras esquemáticas.

Além disso, conforme mostraremos na seção 7.2, a comparação de nossa prova de normalização forte com a prova de normalização forte do sistema I para a lógica intuicionística apresentada por Prawitz em [40] possibilitou sugerirmos um ajuste na prova de Prawitz.

6 PROCEDIMENTO PARA NORMALIZAR DEDUÇÕES

Neste capítulo apresentaremos um procedimento para normalizar deduções em sistemas concretos. Na seção 7.1, comentaremos sobre dois trabalhos correlatos. O primeiro é um Gerador de Provadores de Teoremas [18] e o segundo é a ferramenta *Isabelle* [33], [34].

O Gerador de Provadores de Teoremas, de modo semelhante às definições de nossas regras esquemáticas para o sistema $S^{'}$ introduzidas na definição 2.14, também se baseou nas regras esquemáticas de Chi [7]. O objetivo principal desse trabalho foi possibilitar a definição de provadores automáticos de teoremas para sistemas de Dedução Natural definidos em função de regras instâncias das regras esquemáticas que o fundamentam.

No nosso caso, conforme mostraremos na seção 7.1, definiremos um procedimento que receberá como entrada uma dedução realizada em um sistema concreto definido em função de regras instâncias das regras esquemáticas que definem o sistema $S^{'}$. Depois se baseando na normalização fraca para o sistema $S^{'}$ provada na seção 4.3, este procedimento normalizará a dedução de entrada e a retornará normalizada. Além disso, também buscamos com nossas regras esquemáticas definir condições suficientes para a normalização de sistemas, conforme exporemos na seção 7.1.

Com relação à ferramenta *Isabelle* [33], esta aplicação também teve por objetivo a prova automática de teoremas para alguns sistemas ditos objetos. Consideramos que, sob um certo aspecto conceitual, a ferramenta *Isabelle* se baseia em uma estratégia similar ao que pretendemos e que exporemos nesta seção: é possível, utilizando a ferramenta *Isabelle*, que determinadas lógicas se beneficiem da especificação de um método definido em um contexto geral. No seu caso, o método é uma generalização do procedimento de resolução e o contexto geral é uma metalógica de alta ordem. No nosso caso, o método é uma prova esquemática de normalização fraca e o contexto geral é o nosso sistema esquemático de Dedução Natural $S^{'}$.

Na seção 7.2, definiremos a aplicação ND que normalizará deduções realizadas em sistemas de Dedução Natural concretos definidos em função de regras instâncias de nossas regras esquemáticas introduzidas na definição 2.14.

6.1 Trabalhos Correlatos

Conforme comentamos na introdução deste capítulo, apresentaremos brevemente, nesta seção, os trabalhos de Haeusler [18] e noções dos fundamentos teóricos da ferramenta *Isabelle* [33].

Haeusler, em [18], definiu um sistema esquemático de Dedução Natural denominado de Sistema de Dedução Natural Computável Abstrato (DNCA) com objetivo de definir um Gerador de Provadores de Teoremas. O sistema esquemático de Haeusler, conforme comentamos na introdução deste capítulo, se baseou nas regras esquemáticas de Chi [18]. Conforme o autor, provadores automáticos de teoremas em Dedução Natural possibilitam que a explicação dos passos da prova seja construída de modo mais fácil do que a explicação de provas realizadas por meio de *tableaux* ou resolução. Como exemplo, citamos o trabalho de Oliveria *et al* [32] que utiliza a forma normal de deduções para gerar explicação de provas.

Haeusler associou funções recursivas às regras de Chi para garantir a computabilidade da busca de provas, conforme ele menciona na página 13 de sua tese [18]. Estas funções mapeiam a conclusão da regra esquemática de introdução em hipóteses permissíveis, a conclusão da regra esquemática de introdução e as hipóteses permissíveis em hipóteses descartáveis pela aplicação da regra, a conclusão da regra esquemática de introdução em suas premissas e restringem os formatos das hipóteses permissíveis utilizadas na dedução das premissas de uma regra de eliminação.

A regra para eliminação do $\Diamond$, entretanto, não é instância de DNCA pois não existe função para restringir o formato de sua premissa menor. Assim, a linguagem do sistema $S4$ intuicionístico que instancia suas regras esquemáticas tem somente a constante lógica $\Box$, enquanto que, no sistema $S4$ clássico, o $\Diamond$ é definido em função da constante lógica $\Box$.

Haeusler definiu um método de prova que tem por base a forma normal das deduções dos sistemas instâncias pois são, segundo o autor, as mais fáceis de serem construídas. Dessa forma, se o teorema da prova normal não é válido para um sistema instância de DNCA, então é possível que o provador construído a partir de seu método não encontre a dedução procurada. O seu método pressupõe, também, que nenhuma regra de eliminação tenha restrições associadas a suas hipóteses permissíveis.

Na nossa abordagem, conforme já mostramos, as regras de dois sistemas modais $S4$ intuicionísticos, equivalentes respectivamente aos sistemas de Prawitz [38] e de Paiva [4], são regras instâncias de nossas regras esquemáticas. Além disso, o formato de nossas regras de Dedução Natural tem características muito similares às propostas originalmente por Gentzen [14]. Entendemos que este último fato é uma vantagem, considerando os objetivos desta tese, visto que possibilitará realizarmos de modo mais fácil, segundo nosso entendimento, comparações entre nossa prova de normalização e provas de normalização encontradas na literatura.

Por fim, destacamos que, diferentemente do caso do trabalho de Haeusler [18], objetivamos, também, definir condições suficientes para a normalização de sistemas, formalizar o que vem a ser um sistema esquemático de Dedução Natural, além de definir um procedimento normalizador de deduções concretas.

Na sequência, apresentaremos alguns fundamentos do provador de teoremas *Isabelle* [33], [34] e faremos uma comparação com nosso procedimento para normalizar deduções descrito na seção 7.2.

A ferramenta *Isabelle* [33] [34] fundamenta-se em um fragmento da lógica de alta ordem (HOL) [33] que tem por base a teoria de tipos simples de Alonzo Church [8]. Em [33], este fragmento é denominado de M e ele é dito ser a a metalógica de *Isabelle*.

Uma lógica objeto L é representada em *Isabelle* a partir da adição de novos axiomas, constantes e tipos, onde os axiomas adicionados correspondem às regras de inferência de sistemas objetos. Além disso, fórmulas da lógica objeto são traduzidas para a linguagem da metalógica M. A metalógica resultante é denominada de M_L e, como exemplo, citamos a lógica proposicional intuicionística, cuja formalização pode ser verificada em [33]. Ressaltamos, também, que neste mesmo artigo, está provado que, para cada dedução realizada em uma lógica objeto L, existe uma dedução em M_L e vice-versa.

Por fim, lembramos que o objetivo da ferramenta *Isabelle* é diferente do nosso descrito na próxima seção, visto que ela é um provador automático de teoremas com capacidade de trabalhar com diversas lógicas objeto e que aquela ferramenta não trata questões de normalização. De modo diferente, o nosso trabalho normaliza deduções realizadas em sistemas definidos em função de nossas regras esquemáticas. As similaridades entre a ferramenta *Isabelle* e nosso trabalho, entretanto, limitam-se a aspectos conceituais no sentido que explicamos no final da introdução deste capítulo.

6.2 Normalizador de Deduções

Denominamos o procedimento que exporemos a seguir de Normalizador de Deduções (ND). O Normalizador de Deduções recebe como entrada deduções realizadas em sistemas definidos por regras instâncias das regras do sistema S', introduzido na definição 2.15, e retorna a forma normal de tais deduções. Pressupomos, portanto, que a dedução que será traduzida foi construída em um sistema de Dedução Natural definido em função de regras concretas instâncias das regras esquemáticas do sistema S'. Vale ressaltar, novamente, que, diferentemente do Gerador de Provadores Automáticos de Teoremas de Haeusler [18] e da ferramenta *Isabelle* [33], o procedimento ND não é um provador automático de teorema.

Denominamos de L_C a linguagem utilizada nas regras concretas. Fórmulas concretas, fórmulas esquemáticas e instâncias horizontais de regras concretas e esquemáticas serão tratadas como cadeias de símbolos. Por conseguinte, operações básicas sobre cadeias de símbolos estarão disponíveis para uso do procedimento.

Todas as fórmulas concretas são da forma $\lambda(A_1, .., A_n)$, onde λ é uma constante lógica da linguagem L_C e $A_1, .., A_n$ são fórmulas quaisquer, ou são da forma A. Além disso, existe $1 \leq m \leq n$, tal que $A_1, .., A_{m-1}$ são hipóteses descartáveis e $A_m, .., A_n$ são premissas.

As instâncias horizontais das regras concretas são do tipo
$(A_1, ..., A_p/\lambda(A_1, .., A_n))$. As premissas e hipóteses que definem uma fórmula $\lambda(A_1, .., A_n)$ estão ordenadas do mesmo modo que as premissas e hipóteses esquemáticas de uma fórmula
$\Phi(H^1_{1,1}, .., H^s_{p_s,h^s_{p_s}}, G^1_1, .., G^s_{p_s})$. Por exemplo, em $\lambda(A_1, .., A_n)$, pode ser o caso de A_1 ser a primeira hipótese descartável utilizada na dedução da primeira premissa da regra R_1, A_2 ser a segunda hipótese descartável utilizada na dedução da primeira premissa da regra R_1, e assim por diante.

Por esse motivo, para informar as figuras das regras concretas para o procedimento ND, é suficiente informar as constantes lógicas, a quantidade de regras de introdução de cada constante lógica, a quantidade de premissas de cada regra de introdução e quantas hipóteses podem ser utilizadas na dedução das premissas de cada regra.

A dedução é representada em uma árvore, denominada de árvore concreta de dedução, cujos nós são instâncias horizontais das regras concretas. Associados a cada nó, temos, também, o tipo da regra, ou seja, se é de eliminação ou de introdução, e a numeração do nó.

O controle principal da aplicação visita cada nó da árvore concreta de dedução, iniciando pelo nó raiz. Caso haja mais de um nó em um determinado nível da árvore de dedução, o controle visita os nós na sequência da esquerda para a direita. Ao visitar um nó, ele passa as informações associadas ao nó para o procedimento *Traduzir Dedução Concreta*, introduzido na definição 6.1.

O procedimento *Traduzir Dedução Concreta* mapeia as fórmulas concretas de $(A_1, ..., A_p/\lambda(A_1, .., A_n))$ em fórmulas esquemáticas por meio do procedimento *Mapear Fórmulas esquemáticas*, introduzido na definição 6.2. Como resultado do procedimento *Traduzir Dedução Concreta*, obtemos uma nova árvore de dedução, denominada de árvore esquemática de dedução, onde os nós são instâncias horizontais $(E_1, .., E_q/E)$ das regras esquemáticas de S'.

Abaixo introduzimos a definição do procedimento *Traduzir Dedução Concreta*. Os passos deste procedimento são executados em sequência, a menos que um desvio seja especificado:

Definição 6.1. ***(Traduzir Dedução Concreta)***

1. recebe o nó da árvore concreta de dedução visitado pelo controle principal;

2. se a conclusão não é uma fórmula atômica, então executa o passo 6;

3. se a conclusão estiver mapeada a uma fórmula esquemática, então executa passo 8;

4. mapeia a conclusão à fórmula esquemática atômica E_1;

5. executa passo 8;

6. executa procedimento Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas esquemáticas passando a conclusão como parâmetro;

7. se o tipo da regra for de introdução, então executa passo 9;

8. se o tipo da regra for de eliminação, então o executa procedimento Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas esquemáticas passando a premissa maior como parâmetro;

9. executa o procedimento Criar Nó da Árvore esquemática de Dedução passando como *parâmetro o nó da árvore concreta de dedução;*

10. finaliza.

Seguem algumas observações:

passo 2) : A notação sintática para fórmulas implica que as especificações de instâncias horizontais de regras não são precisas. Por exemplo, se uma fórmula A está em uma dedução concreta, ela pode ser uma fórmula atômica ou não. Uma dedução-hipótese A, por exemplo, representa uma quantidade enumerável de deduções, visto que A pode ser qualquer símbolo proposicional da linguagem ou mesmo qualquer fórmula. Assim, para os procedimentos especificados nesta seção, fórmulas do tipo A são atômicas, enquanto fórmulas do tipo $\lambda(A_1, ..., A_n)$ são não-atômicas. Imprecisão similar ocorre nas instâncias horizontais de regras esquemáticas. Pelos mesmos motivos expostos para fórmulas concretas, fórmulas da forma E em deduções esquemáticas são atômicas, enquanto que fórmulas do tipo $\Phi(....)$ são não-atômicas.

passo 6) : O procedimento *Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas Esquemáticas* está descrito na sequência deste capítulo;

passo 8) : Pode ser que uma dedução seja formada por uma única hipótese. Por este motivo, é necessário testar se a regra é de eliminação no passo oito. Além disso, as premissas menores vinculadas também serão associadas a fórmulas esquemáticas como resultado da associação da premissa maior e as premissas menores são iguais a conclusão da regra, que também já está associada a uma fórmula esquemática. Por esse motivo, executamos o procedimento *Mapear Fórmulas esquemáticas* somente para premissas maiores.

passo 9) : O procedimento *Criar Nó da Árvore esquemática* recebe como parâmetro um nó da árvore concreta de dedução, ou seja, uma instância horizontal de uma regra concreta do tipo $(A_1, ..., A_p/\lambda(A_1, .., A_n))$, o tipo da regra e retorna um nó do tipo $(E_1, ..., E_p/\Phi(E_1, .., E_n))$ para construir a árvore esquemática de dedução. Suponha que o nó da árvore concreta seja igual a $(\vee(A, B), D, D/D)$ e a regra é de eliminação[1]. O procedimento *Criar Nó da Árvore esquemática*, executado no passo 9, cria inicialmente uma sequência modelo para uma instância da regra esquemática

[1]A execução dos passos do procedimento no caso de o nó ser uma regra de introdução é feita de modo similar.

de eliminação com o seguinte formato:

$(\Phi(H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},G^1_1,..,G^s_{p_s}),H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},F,....,F/F)$. Depois, ele busca os mapeamentos das fórmulas $\vee(A,B)$ e D e, utilizando as informações disponíveis sobre as figuras das regras, modifica esta sequência modelo. Por exemplo, suponha que

$\Phi_1(H^{1,1}_{1,1},..,H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}},E_2,G^{1,1}_2,..,G^{1,1}_{p_1},E_3,G^{2,1}_2,..,G^{s,1}_{p_s}) \rhd \vee(A,B)$

e $E_1 \rhd D$. o procedimento *Criar Nó da Árvore esquemática* modifica a sequência modelo

$(\Phi(H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},G^1_1,..,G^s_{p_s}),H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},F,....,F/F)$

para $(\Phi_1(H^{1,1}_{1,1},..,H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}},E_2,G^{1,1}_2,..,G^{1,1}_{p_1},E_3,G^{2,1}_2,..,G^{s,1}_{p_s}),H^{1,1}_{1,1},..,H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}},E_1,E_1$ $,F,..,F/E_1)$ que será retornado como resultado de sua execução[2].

O procedimento para mapear fórmulas concretas em fórmulas esquemáticas, descrito a seguir, recebe uma fórmula concreta denominada de fórmula-parâmetro e retorna uma fórmula esquemática do tipo $\Phi(H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}},G^1_1,..,G^s_{p_s})$. Ela é construída, conforme passo 5 deste mesmo procedimento, a partir da junção de uma cadeia de símbolos representando as premissas $G^1_1,..,G^s_{p_s}$, com uma cadeia de símbolos representando as hipóteses $H^1_{1,1},..,H^s_{p_s,h^s_{p_s}}$, além de uma constante lógica Φ_M. Denominamos estas cadeias de símbolos de sequências modelo para fórmulas.

O índice M enumera as constantes lógicas Φ que são utilizadas na dedução esquemática construída. Um novo valor é atribuído a M sempre que uma fórmula esquemática for criada, conforme passo 5 do procedimento 6.2. Além disso, o mesmo índice M indexa as premissas e hipóteses que definem a fórmula esquemática a ser mapeada.

O índice N enumera fórmulas esquemáticas atômicas. Um novo valor é atribuído a N sempre que uma fórmula esquemática atômica for associada a uma fórmula concreta, conforme passos 4.2.1.1.3 e 4.3.1.3 do procedimento *Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas esquemáticas.*

Descrevemos, a seguir, o procedimento *Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas Esquemáticas*:

Definição 6.2. ***(Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas esquemáticas)***

1. se a fórmula-parâmetro estiver mapeada em alguma fórmula esquemática, então executa passo 6;

[2]Explicamos na sequência o que é o índice 1 associado à constante Φ e às fórmulas que definem esta instância horizontal da regra esquemática de eliminação.

2. cria as sequências modelo para hipóteses $H_{1,1}^{1,N}, .., H_{p_s,h^{s,p_s}}^{s,N}$*, denominada de* S_{SH}*, e para premissas* $G_1^{1,N}, .., G_{p_s}^{s,N}$*, denominada de* S_{SP}*;*

3. cria duas relações, a primeira formada pelas triplas (x_1, y_1, z_1) *e a segunda formada pelas duplas* (x_1, y_1)*, para* x_1 *variando de* 1 *até* X*,* y_1 *variando de* 1 *até* Y *e* z_1 *variando de* 1 *até* Z*, e onde* X *é a quantidade de regras de introdução da constante lógica principal da fórmula-parâmetro,* Y *é a quantidade de premissas de cada regra* x_1 *e* Z *é a quantidade de hipóteses que podem ser utilizadas na dedução de cada premissa* y_1 *em cada regra* x_1*;*

4. para i *variando de* 1 *a* n*, nessa ordem, executar os passos 4.1 a 4.3:*

4.1. se A_i*, subfórmula própria de* $\lambda(A_1, ..., A_n)$*, for uma fórmula não-atômica e não tiver fórmula esquemática mapeada, então executar o procedimento Mapeia Fórmulas Concretas em Fórmulas Esquemáticas passando* A_i *como parâmetro;*

4.2. para cada regra x_1 *variando de* 1 *até* X*, executa passo 4.2.1:*

4.2.1. para cada y_1 *variando de* 1 *até* Y*, executa passo 4.2.1.1;*

4.2.1.1. para cada z_1 *variando de* 1 *até* Z*, executa os passos 4.2.1.1.1 a 4.2.1.1.4:*

4.2.1.1.1. se não existir fórmula esquemática mapeada E *para* A_i*, então executa passo 4.2.1.1.3;*

4.2.1.1.2. executa procedimento Modificar Sequência Modelo passando como parâmetro S_{SH}*, a fórmula* E *e a tripla (*x_1*,* y_1*,* z_1*) e retorna para 4.2.1.1;*

4.2.1.1.3. mapeia E_N *a subfórmula* A_i*;*

4.2.1.1.4. executa procedimento Modificar Sequência Modelo passando como parâmetro S_{SH}*,* E_N *e a tripla (*x_1*,* y_1*,* z_1*);*

4.3. para cada regra x_1 *variando de* 1 *até* X*, executa passo 4.3.1:*

4.3.1. para cada y_1 *variando de* 1 *até* Y*, executa passo 4.3.1.1 a 4.3.1.4;*

4.3.1.1. se não existir fórmula esquemática mapeada E *para* A_i*, então executa passo 4.3.1.3;*

4.3.1.2. executa procedimento Modificar Sequência Modelo passando como parâmetro S_{SP}*,* E *e a dupla (*x_1*,* y_1*) e retorna para 4.3.1;*

4.3.1.3. mapeia E_N *a subfórmula* A_i*;*

4.3.1.4. executa procedimento Modificar Sequência Modelo passando como parâmetro S_{SP}*,* E_N *e a dupla (*x_1*,* y_1*) e retorna para 4.3.1;*

5. cria fórmula esquemática $\Phi_M(S_{SH}, S_{SP})$ *e associa a fórmula-parâmetro;*

6. finaliza.

O procedimento *Modificar Sequência Modelo*, executado nos passos 4.2.1.1.2, 4.2.1.1.4, 4.3.1.2 e 4.3.1.4, recebe uma sequência de fórmulas esquemáticas, uma fórmula que irá substituir uma outra nesta sequência e a posição da fórmula que será substituída. Por exemplo, se a sequência $H^1_{1,1}, ., H^2_{3,4} .., H^s_{p_s, h^s_{p_s}}$, a fórmula E_{10} e a posição 2, 3 e 4 forem passados para o procedimento *Modificar Sequência Modelo*, ele retorna a sequência $H^1_{1,1}, ., H^2_{3,4} .., H^s_{p_s, h^s_{p_s}}$ modificada para $H^1_{1,1}, ., E_{10}, .., H^s_{p_s, h^s_{p_s}}$.

O mapeamento resultante do procedimento *Modificar Sequência Modelo* é uma relação R de duplas (E, A), onde A é uma fórmula concreta mapeada em uma fórmula esquemática E e verificamos por indução na numeração do nó da árvore concreta de dedução original que a relação R é uma função bijetiva. A prova é consequência do passo 3, do procedimento 6.1, e dos passos 1, 4.1, 4.2.1.1.1 e 4.3.1.1, do procedimento 6.2, que garantem que uma fórmula esquemática está mapeada em uma única fórmula concreta. Além disso, o fato de um novo valor ser atribuído a M sempre que uma fórmula esquemática for criada, conforme passo 5 do procedimento 6.2, de M indexar suas premissas e hipóteses e de um novo valor ser atribuído a N sempre que uma fórmula esquemática atômica for associada a uma fórmula concreta, conforme passos 4.2.1.1.3 e 4.3.1.1 do procedimento 6.2, garantem que uma fórmula concreta associa-se a uma única fórmula esquemática.

Provamos o Teorema da Normalização Fraca para o sistema S' na seção 4.3. Conforme vimos naquela seção, a prova utiliza como estratégia a escolha em sequência de segmentos máximos que serão eliminados de uma dedução em S' até que a forma normal da dedução em S' seja alcançada. Após obtermos a tradução Π' em S' de uma dedução Π de um sistema concreto por meio do procedimento 6.1, utilizaremos estratégia semelhante a esta utilizada na prova do Teorema de Normalização Fraca para S' para a escolha de segmentos máximos que serão eliminados de Π' por meio das reduções definidas na seção 4.3. Como resultado final, obteremos uma dedução normal Π'' no sistema S'. Depois, utilizando a função bijetiva de mapeamento resultante do procedimento 6.2 traduzimos a dedução Π'' normal para uma dedução Π''' também normal, por meio do procedimento *Traduzir Dedução Concreta*, explicado abaixo, que utilizará a linguagem concreta da dedução original Π.

Explicamos agora o procedimento *Traduzir Dedução Concreta*. Para entendimento do objetivo deste procedimento, suponha que a dedução concreta original é uma dedução de A que depende de Γ e que a dedução esquemática resultante da execução de 6.1 e 6.2 é uma dedução de E que depende de Γ'. O procedimento *Traduzir Dedução*

Concreta recebe como entrada uma árvore de dedução normal de E a partir de Γ' de S' e retorna uma dedução concreta normalizada de Γ em A do sistema concreto.

Conforme mostramos, o procedimento *Traduzir Dedução esquemática* cria uma árvore de dedução AR onde os nós são instâncias horizontais das regras esquemáticas que definem S'. Após a dedução AR ser normalizada, de acordo com que falamos acima, o procedimento *Traduzir Dedução Concreta* visita seus nós e cria uma nova árvore AR' formada por instâncias horizontais das regras concretas. Para tanto, ele utiliza o mapeamento de fórmulas esquemáticas criado no procedimento 6.2.

O exemplo a seguir mostra como isto é feito. Suponha que
$(\Phi_1(H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, E_2, G^{1,1}_2, .., G^{1,1}_{p_1}, E_3, G^{2,1}_2, .., G^{s,1}_{p_s}), H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, E_1, E_1, F, .., F/E_1)$
é um nó da árvore esquemática normalizada.

Considerando os mapeamentos $\Phi_1(H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, E_2, G^{1,1}_2, .., G^{1,1}_{p_1}, E_3, G^{2,1}_2$ $, .., G^{s,1}_{p_s}) \rhd \vee(A, B)$ e $E_1 \rhd D$, o nó da nova árvore concreta de dedução é construído em dois passos. Primeiramente substituímos em
$(\Phi_1(H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, E_2, G^{1,1}_2, .., G^{1,1}_{p_1}, E_3, G^{2,1}_2, .., G^{s,1}_{p_s}), H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, E_1, E_1, F, .., F/E_1)$
as fórmulas esquemáticas pelas fórmulas concretas mapeadas mostradas acima. Temos $(\vee(A, B), H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, D, D, F, .., F/D)$ como resultado.

Depois eliminamos as sequências de fórmulas esquemáticas que não estão mapeadas em fórmulas concretas. No exemplo, eliminamos de
$(\vee(A, B), H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}, D, D, F, .., F/D)$ as sequências de fórmulas esquemáticas representadas por $H^{1,1}_{1,1}, .., H^{s,1}_{p_s,h^{s,1}_{p_s}}$ e por $F, .., F$. O resultado final é igual a $(\vee(A, B), D, D/D)$.

Finalizando, definimos uma corretude para o Normalizador ND:

a) A árvore de dedução esquemática construída pelos procedimentos *Traduzir Dedução Concreta* e *Mapear Fórmulas Concretas em Fórmulas esquemáticas* é uma dedução esquemática no sistema S'.

b) Dado que a dedução construída no item a) conclui E a partir de Γ', as reduções aplicadas às regras de S' são corretas, ou seja, a dedução esquemática resultante da aplicação de uma redução em uma dedução que conclui E a partir de Γ' também é uma dedução esquemática que conclui E a partir de Γ'.

c) A tradução da dedução esquemática normalizada, utilizando o mapeamento criado nos procedimentos 6.1 e 6.2 e o procedimento *Traduzir Dedução esquemática* descrito acima, constrói uma dedução normalizada no sistema concreto.

d) Dado que a dedução concreta original conclui A a partir de Γ, então a dedução concreta resultante do item c) também conclui A a partir de Γ.

A prova da corretude decorre de modo direto dos procedimentos para construção de regras concretas introduzidos nas definições 3.3 a 3.8 e dos procedimentos que definem o normalizador de deduções, apresentados nesta seção, lembrando que as deduções concretas são casos particulares das deduções esquemáticas e que o mapeamento entre fórmulas esquemáticas e concretas é uma função bijetiva.

6.3 Conclusão

Definimos, neste capítulo, um procedimento para normalizar deduções realizadas em sistemas concretos definidos em função de regras instâncias das regras do sistema S', introduzido na definição 2.15.

Como trabalhos correlatos, apresentamos o Gerador de Provadores de Teoremas proposto por Haeusler em [18] e a ferramenta *Isabelle* [33]. Apesar de terem objetivos diferentes, os dois trabalhos citados e o procedimento definido nas seções acima guardam certa semelhança, no sentido de serem esquemas para os quais determinadas propriedades e objetivos são herdados por sistemas concretos instâncias, no caso de nosso procedimento e do Gerador de Provador de Teorema de Haeusler, ou herdados por sistemas objetos, no caso da aplicação *Isabelle*.

7 CONDIÇÕES PARA NORMALIZAÇÃO DE SISTEMAS CONCRETOS

Neste capítulo, na seção 7.1, definiremos condições suficientes para normalização de sistemas em Dedução Natural e apresentaremos, na seção 7.2, resultados adicionais relacionados com as provas de normalização esquemáticas propostas por esta tese.

7.1 Condições para Normalização Fraca e Forte de Sistemas Concretos

O teorema 7.1 apresentado no final desta seção é, de fato, um corolário do Teorema de Normalização Fraca para o sistema de Dedução Natural S e afirma que, sob determinadas condições, podemos garantir que provaremos a normalização fraca e forte para um sistema concreto C de Dedução Natural.

Um sistema concreto C definido em função de regras construídas a partir das regras de S é um caso particular do sistema S, com a diferença de ser especificado em outra linguagem. Esta constatação decorre da análise dos procedimentos de construção de regras. Como exemplo, sugerimos analisar a construção da regra $\mapsto I$, mostrada na seção 3.2. De modo semelhante ao apresentado naquele exemplo e ao introduzido nas definições 3.3 a 3.8, é possível definirmos procedimentos que constroem os casos possíveis de ocorrências de fórmulas máximas em deduções concretas tendo por base os desvios esquemáticos apresentados na seção 7.2, conforme exemplo apresentado nas páginas 173, 174 e 175 desta seção. Assim, antes de qualquer análise mais aprofundada, somos induzidos a afirmar que, se provamos a normalização fraca e forte para o caso mais geral, ou seja, para o sistema S, então provaremos para os casos particulares, ou seja, para os sistemas C definidos em função de S. Há, entretanto, detalhes adicionais que devem ser avaliados e que relacionam-se com a eliminação de segmentos máximos, extrapolando, portanto, definições de regras de inferência e que serão explicados nos parágrafos abaixo.

Antes de analisar estes detalhes adicionais comentados no parágrafo anterior, ressaltamos que, aparentemente, determinar condições suficientes para normalização de sistemas concretos definidos em função das regras de S' é tarefa mais simples do que definir condições suficientes para normalização de sistemas concretos definidos em função das regras de S pelo fato de as regras deste sistema serem mais simples do que as regras daquele.

A fim de garantirmos a normalização fraca para um sistema concreto C construído a partir de S' é suficiente que as regras que definem C sejam instâncias verticais das regras de S', que não haja restrições em formatos de ocorrências de fórmulas nas aplicações das regras de inferência e nem que premissas e premissas menores dependam de modo exclusivo de suas respectivas hipóteses em instâncias das regras de dedução. Além disso, é necessário, obviamente, que a definição de segmento, de segmento máximo, das reduções e de forma normal em C sejam similares às respectivas definições esquemáticas de S'.

A diferença entre as regras de S' e as regras de S é que, no primeiro caso, não existem premissas intermediárias. Além disso, nas instâncias da regra de dedução para a ΦE de S', as premissas menores podem depender de outras hipóteses, além das hipóteses descartadas pela aplicação da regra.

Na sequência analisaremos quais são as condições para a normalização de sistemas concretos e mostraremos por que o fato de as regras que definem um sistema concreto serem instâncias verticais das regras que definem o sistema S não é condição suficiente para a normalização de deduções concretas.

Conforme vimos, os procedimentos introduzidos nas definição 3.3 a 3.8 orientam a construção das figuras de regras concretas a partir das regras esquemáticas de S. Abaixo mostramos um exemplo de duas regras de inferência concretas construídas a partir da execução dos passos do procedimento 3.3 e 3.8, respectivamente, e de como instâncias das regras de dedução para estas duas regras de inferência devem ser especificadas. Considere, neste exemplo, que $\mapsto$, λ, ω e ϕ fazem parte da linguagem da lógica concreta:

Regra $\mapsto I$*:*

$$\dfrac{B^1_{1,1} \quad ..B^1_{1,e^1_1} B^1_{2,1}..B^1_{2,e^1_2} \quad \begin{matrix}[B^1_{1,1}..B^1_{1,e^1_1}]^a & [B^1_{2,1}..B^1_{2,e^1_2}]^a \\ \Sigma^1_1 & \Sigma^1_2 \\ \overline{A^1_1} & \overline{A^1_2}\end{matrix}}{\mapsto (A^1_1, A^1_2)} \mapsto I_{(a)}$$

$\mapsto I$=<< $\Gamma^1_{1,1}, B^1_{1,1}$ >, .., < $\Gamma^1_{1,e^1_1}, B^1_{1,e^1_1}$ >, < $\Gamma^1_{2,1}, B^1_{2,1}$ >, .., < $\Gamma^1_{2,e^1_2}, B^1_{2,e^1_2}$ >, < Γ^1_1, A^1_1 >, < Γ^1_2, A^1_2 >< $\Delta, \mapsto (A^1_1, A^1_2)$ >>, onde $e^1_1 \geq 0$, $e^1_2 \geq 0$, $\Delta = \Gamma^1_{1,1} \cup, .., \cup \Gamma^1_{2,e^1_2} \cup \Gamma^1_1 - \left\{B^1_{1,1}, .., B^1_{1,e^1_1}\right\} \cup \Gamma^1_2 - \left\{B^1_{2,1}, .., B^1_{2,e^1_2}\right\}$, B^1_{1,l_2} e B^1_{2,l'_2} são da forma ωA, para uma fórmula A qualquer, $1 \leq l_2 \leq e^1_1$ e $1 \leq l'_2 \leq e^1_2$

Regra λE:

$$\dfrac{\lambda(A^1, A^2) B^1_{1,1}..B^1_{1,e^1_1} \quad B^1_{2,1}..B^1_{2,e^1_2} \quad \begin{matrix}[B^1_{1,1}..B^1_{1,e^1_1}]^a [A^1]^a & [B^1_{2,1}..B^1_{2,e^1_2}]^a [A^2] \\ \Sigma^1_1 & \Sigma^1_2 \\ \overline{\omega(C)} & \overline{\omega(C)}\end{matrix}}{\omega(C)} \lambda E_{(a)}$$

λE=<< $\Gamma^1, \lambda(A^1, A^2)$ >, < $\Gamma^1_{1,1}, B^1_{1,1}$ >, .., < $\Gamma^1_{1,e^1_1}, B^1_{1,e^1_1}$ >, < $\Gamma^1_{2,1}, B^1_{2,1}$ >, .., < $\Gamma^1_{2,e^1_2}, B^1_{2,e^1_2}$ >, < $\Gamma^1_1, \omega(C)$ >, < $\Gamma^1_2, \omega(C)$ >< $\Delta, \omega(C))$ >>, onde $e^1_1 \geq 0$, $e^1_2 \geq 0$, $\Delta = \Gamma^1_{1,1} \cup, .., \cup \Gamma^1_{2,e^1_2}$, B^1_{1,l_2} e B^1_{2,l'_2} são da forma ϕA, para uma fórmula A qualquer, $1 \leq l_2 \leq e^1_1$ e $1 \leq l'_2 \leq e^1_2$.

As premissas menores da regra de eliminação do λ dependem exclusivamente das hipóteses e das hipóteses intermediárias. Conforme definido pela restrição 3.10, esta é uma característica de todas as instâncias das regras de dedução para as regras de eliminação construídas pelos procedimentos introduzidos na definição 3.5.

Vale ressaltar que, no caso das instâncias da regra de dedução para regras de introdução, a premissa da regra não necessariamente depende exclusivamente das hipóteses descartáveis pela aplicação da regra, vide a regra $\mapsto I$ mostrada acima.

Neste exemplo, uma instância das regras de dedução para as regras λE e $\mapsto I$ devem restringir, também, o formato das premissas intermediárias. No caso de uma instância da regra de redução para a regra λE, as premissas intermediárias devem ser da forma ϕA e, no caso da introdução do $\mapsto$, deve ser da forma ωA.

Seja C o sistema de Dedução Natural especificado em função das regras de dedução definidas para as regras mostradas acima e das regras de dedução para λI, ωI

e ϕI^1. Apresentamos abaixo uma dedução Π em C onde ωC que é conclusão da λE é uma fórmula máxima e um caso particular da fórmula esquemática máxima do tipo $b.i.2$ introduzida na definição 4.13:

$$
\dfrac{\dfrac{\lambda(A^1, A^2)\phi B^1\ \phi B^2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\phi B^1]^a[A^1]^a \\ \Sigma_1^1\end{matrix}}{\omega C} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\phi B^2]^a[A^2] \\ \Sigma_2^1\end{matrix}}{\omega C}}{\omega C}\ \lambda E_{(a)} \quad \omega B'^1\ \omega B'^2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\omega B'^1]^b[\omega C]^b \\ \Sigma_1'^1\end{matrix}}{A'^1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\omega B'^2]^b \\ \Sigma_2'^1\end{matrix}}{A_2^1}}{\begin{matrix}\mapsto (A'^1, A'^2) \\ \Pi_1\end{matrix}} \mapsto I_{(b)}
$$

Eliminamos a fórmula máxima ωC de Π utilizando a redução $b.i.2$ introduzida na definição 4.13 e obtemos a dedução Π' mostrada abaixo:

[1] Apesar de mostrarmos as figuras destas regras, a explicação que se segue não será prejudicada.

$$\dfrac{\lambda(A^1, A^2) \quad \Sigma \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\phi B^1]^a[A^1]^a \\ \Sigma_1^1 \\ \hline \omega C\end{array} \quad [\omega B^{'1}]^a[\omega B^{'2}]^a \quad \begin{array}{ccc} & [\omega B^{'1}]^b[\omega C]^b[\omega B^{'2}]^b & \\ \Sigma_1^{'1} & & \Sigma_2^{'1} \\ \hline A^{'1} & & A_2^1 \end{array}}{\mapsto (A^{'1}, A^{'2})} \mapsto I_{(b)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\phi B^2]^a[A^2]^a \\ \Sigma_2^1 \\ \hline \omega C\end{array} \quad [\omega B^{'1}]^a[\omega B^{'2}]^a \quad \begin{array}{ccc} & [\omega B^{'1}]^b[\omega C]^b[\omega B^{'2}]^b & \\ \Sigma_1^{'1} & & \Sigma_2^{'1} \\ \hline A^{'1} & & A_2^1 \end{array}}{\mapsto (A^{'1}, A^{'2})} \mapsto I_{(a)}}{\begin{array}{c}\mapsto (A^{'1}, A^{'2}) \\ \Pi_1,\end{array}} \lambda E_{(a)}$$

onde Σ é a sequência de deduções $\phi B^1, \phi B^2, \omega B^{'1}, \omega B^{'2}$.

A primeira premissa menor $\mapsto (A'^1, A'^2)$ e a segunda premissa menor $\mapsto (A'^1, A'^2)$ da aplicação da regra λE dependem de modo exclusivo das hipóteses intermediárias $\omega B'^1, \omega B'^2, \phi B^1$ e $\omega B'^1, \omega B'^2, \phi B^2$ e das hipóteses A^1 e A^2, respectivamente, em conformidade, portanto, com a restrição 3.10. Entretanto, a dedução Π' não é uma dedução correta em C, pois as hipóteses intermediárias $\omega B'^1$ e $\omega B'^2$ das quais as premissas menores $\mapsto (A'^1, A'^2)$ da aplicação da regra λE dependem não são do formato ϕA, para uma fórmula A qualquer da linguagem de C.

O exemplo descrito acima deixa claro que o fato de um sistema de Dedução Natural C ser definido em função de regras instâncias das regras esquemáticas de S não é condição suficiente para garantimos a prova do Teorema de Normalização Fraca. É necessário checar, portanto, se a eliminação de segmentos máximos em deduções concretas por meio de casos especiais das reduções esquemáticas definidas na seção 4.2, adaptados para eliminar desvios em deduções realizadas em sistemas concretos, não violam restrições de formato de hipóteses, de premissas, de premissas intermediárias e de hipóteses intermediárias das regras de dedução de introdução e de eliminação, quando for o caso. Lembramos que esta adapatação comentada acima resume-se à mudança na linguagem e à redução no número de premissas, premissas intermediárias, hipóteses intermediárias ou premissas menores. Esta constatação motivou a inclusão do item $a.4$) do enunciado do Teorema 7.1 descrito no final desta seção.

Observe, também, que as reduções esquemáticas descritas na seção 4.2 garantem que, nas deduções obtidas a partir da eliminação de fórmulas máximas, todas as premissas menores dependem exclusivamente das hipóteses e hipóteses intermediárias descartáveis pela aplicação da regra. Como consequência, as deduções obtidas a partir da eliminação de segmentos máximos em deduções concretas não violarão o item a) da restrição 3.10.

Conforme explicamos na sequência desta seção, a utilização de premissas intermediárias também obrigou o tratamento de situações específicas relacionadas com a eliminação de fórmulas esquemáticas máximas. O item $a.2$) da definição 3.3, que descreve o método de construção de figuras de regras de introdução concretas, determina que as regras para a introdução da negação não são instâncias verticais da regra esquemática de introdução. Ou seja, nenhuma figura de regra que define um sistema concreto C tem o formato $\dfrac{\begin{matrix}[A]^a \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{\lambda(A, \bot)A}\ \lambda I_{(a)}$, para uma constante concreta λ qualquer diferente de $\neg$.

Além disso, a restrição 3.10 define que nenhuma instância da regra de dedução para regras de introdução utilizará o $\bot$ como premissa. Por esses motivos, em sistemas concretos definidos a partir das regras de S, a regra $\dfrac{\begin{matrix}[A]^a \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ \neg I_{(a)}$ não é um caso especial da regra para introdução de nenhuma outra constante lógica.

Como exemplo, lembramos que a restrição descrita nos parágrafos acima não é válida para a regra de introdução da implicação definido por Prawitz [38], pois, apesar de a figura da regra não utilizar o $\bot$, uma instância da regra de dedução para a introdução da implicação permite que a premissa da regra seja a constante $\bot$. Ressaltamos, também, que todos os sistemas definidos na seção 3.3 estão de acordo com esta restrição e mostramos que são corretos e completos por meio de provas de equivalência com sistemas definidos na literatura.

O motivo pelo qual definimos as restrições descritas acima foram as reduções esquemáticas $c.i.1$ e $c.i.2$, introduzidas respectivamente nas definições 4.15 e 4.16, pois existem reduções distintas para o caso em que a fórmula máxima é conclusão de uma aplicação da regra de introdução da negação e para o caso em que a fórmula máxima é conclusão de uma aplicação da regra que introduz uma constante lógica diferente da negação.

Como já explicamos, assim como as regras esquemáticas são modelos para a construção de regras concretas, as reduções esquemáticas são modelos para a definição de reduções que eliminam fórmulas máximas de deduções em sistemas concretos, sendo estas casos particulares daquelas. Mostraremos abaixo um exemplo de como isto funciona.

Seja a dedução Π mostrada abaixo uma dedução no sistema C''_{S4} definido na seção 3.2.3. A ocorrência de fórmula $\neg\Diamond B$ é uma fórmula máxima e um caso particular da ocorrência de fórmula esquemática do tipo $c.i.2$ introduzida na definição 4.16 [2]:

[2]A eliminação de fórmulas máximas do tipo $c.i.2$ que ocorrem em deduções realizadas em sistemas concretos definidos em função de regras instâncias das regras de S é igual a eliminação de fórmulas máximas de tipo $c.i.2$ que ocorre nas deduções no sistema $CS4$ definido por Martins e Martins [28]

$$\begin{matrix}\dfrac{\Diamond B \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{[\Diamond B^1]^c \quad \Box B'^1 \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Box B'^1]^a\\ \Sigma^2\end{matrix}}{\Diamond A^1}}{\Diamond A^1}\,\Diamond E_{(a)} \\ \underline{\Sigma^1} \\ \bot\end{matrix}}{\neg\Diamond B^1}\,\neg I_{(c)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\Diamond B^1]^b\\ \Sigma^3\end{matrix}}{\Diamond A}}{\Diamond A}\,\Diamond E_{(b)} \\ \Pi_1\end{matrix}$$

Π' a seguir é uma dedução esquemática em S' construída a partir de Π por um procedimento similar ao procedimento *Traduzir Dedução Concreta* introduzido na definição 6.1:

$$\cfrac{\Phi_2(H^{2,1}_{1,1}..H^{2,s}_{p_s,h^{2,2}_{s,p_s}}\ E^2..G^{2,s}_{p_s})\quad \Sigma'\cfrac{\Sigma'''}{\xi\Phi_3(H^{3,1}_{1,1}..H^{3,s}_{p_s,h^{3,2}_{s,p_s}}\ E^3..G^{3,s}_{p_s})}\ \xi I_{(c)}\Sigma''\Sigma'^{2,1}..\quad \cfrac{\begin{matrix}[M^{2,i}_{j,1}..]^b..[\xi\Phi_3(H^{3,1}_{1,1}..H^{3,s}_{p_s,h^{3,2}_{s,p_s}}\ E^3..G^{3,s}_{p_s})]^b..[M^{2,i}_{j}]^b[G^{2,i}_1]^b..[G^{2,i}_{p_i}]^b\\ \Sigma^i\end{matrix}}{\Phi_1(H^{1,1}_{1,1}..H^{1,s}_{p_s,h^{1,2}_{s,p_s}}\ E^1..G^{1,s}_{p_s})}\quad ..\quad \Sigma'^{2,s}}{\begin{matrix}\Phi_1(H^{1,1}_{1,1},..,H^{1,s}_{p_s,h^{1,2}_{s,p_s}},E^1,..,G^{1,s}_{p_s})\\ \Pi_1\end{matrix}}\ \Phi E_{(b)}$$

onde:

a) Σ' é a sequência de deduções $\Lambda^{2,1},..,\Lambda^{2,i-1},M^{2,i}_1,..,M^{2,i}_{j,l_5-1}$.

b) Σ'' é a sequência de deduções $M^{2,i}_{j,l_5+1},..,M^{2,i}_{m^{2,i}},\Lambda^{2,i+1},..,\Lambda^{2,s},\Xi^{2,1}_1..\Xi^{2,s}_{p_s}$.

c) Σ''' é igual a

$$\cfrac{[\xi\Phi_3(H^{3,1}_{1,1}..H^{3,s}_{p_s,h^{3,2}_{s,p_s}}\ E^3..G^{3,s}_{p_s})]^c\quad \Lambda^{5,1},..,\Lambda^{5,s},\Xi^{5,1}_1,..,\Xi^{5,s}_{p_s}\cfrac{\Sigma'^1}{\Phi_4(H^{4,1}_{1,1}..H^{4,s}_{p_s,h^{4,2}_{s,p_s}}\ E^4..G^{4,s}_{p_s})}..\cfrac{\begin{matrix}[\Lambda^{5,i}]^a[G^{5,i}_1]^a..[G^{5,i}_{p_i}]^a\\ \Sigma'^i\end{matrix}}{\Phi_4(H^{4,1}_{1,1}..H^{4,s}_{p_s,h^{4,2}_{s,p_s}}\ E^4..G^{4,s}_{p_s})}..\quad\cfrac{\Sigma'^s}{\Phi_4(H^{4,1}_{1,1}..H^{4,s}_{p_s,h^{4,2}_{s,p_s}}\ E^4..G^{4,s}_{p_s})}}{\begin{matrix}\Phi_4(H^{4,1}_{1,1}..H^{4,s}_{p_s,h^{4,2}_{s,p_s}}\ E^4..G^{4,s}_{p_s})\\ \frac{\Sigma}{\tau}\end{matrix}}\ \Phi E_{(a)}.$$

d) $\Sigma'^{2,1}$ é igual a

$$\cfrac{\begin{matrix}[M_1^{2,1}..]^b..[M_{p_1}^{2,1}]^b[E^2]^b[G_2^{2,1}]^b..[G_{p_1}^{2,1}]^b\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\Phi(H_{1,1}^{1,1}..H_{p_s,h_{s,p_s}^{1,2}}^{1,s}\ E^1..G_{p_s}^{1,s}).}$$

e) $\Sigma'^{2,s}$ é igual a

$$\cfrac{\begin{matrix}[M_1^{2,s}..]^b..[M_{p_1}^{2,s}]^b[E^2]^b[G_2^{2,s}]^b..[G_{p_1}^{2,s}]^b\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\Phi(H_{1,1}^{1,1}..H_{p_s,h_{s,p_s}^{1,2}}^{1,s}\ E^1..G_{p_s}^{1,s}).}$$

Obtemos, também, como resultado da construção de Π', uma função bijetiva F que mapeia fórmulas concretas de Π em fórmulas esquemáticas definidas na linguagem de S.

Aplicamos a redução modal $c.i.2$, subcaso b), para eliminar a ocorrência de fórmula esquemática máxima $\xi\Phi_3(H_{1,1}^{3,1}..H_{p_s,h_{s,p_s}^{3,2}}^{3,s}\ E^3..G_{p_s}^{3,s})$ em Π' e, utilizando F e um procedimento similar ao procedimento *Traduzir Dedução esquemática* introduzido na definição 6.1, construímos a dedução Π'' em C''_{S4} mostrada abaixo:

$$\begin{matrix}\cfrac{\cfrac{\Diamond B \quad \Box B'^1\ [\neg\Diamond A^1]^a \qquad \cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\Diamond B^1]^e \quad [\Box B'^1]^d \quad \cfrac{\begin{matrix}[\Box B'^1]^c\\ \Sigma^2\end{matrix}}{\Diamond A^1}}{\Diamond A^1}\,\Diamond E_{(c)} \qquad [\neg\Diamond A^1]^d}{\perp}\,\neg E}{\neg\Diamond B^1}\,\neg I_{(e)}\\ \Sigma^3\end{matrix}}{\Diamond A}}{\Diamond A}\,\Diamond E_{(d)} \qquad [\neg\Diamond A]^b}{\cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\perp}{\Diamond A^1}\,\perp_{c(a)}\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\cfrac{\perp}{\Diamond A}\,\perp_{c(b)}}}\,\neg E\\ \Pi_1.\end{matrix}$$

É fácil verificar que:

a) Se a dedução Π' é uma dedução esquemática de F a partir de Γ', então a dedução Π^* obtida de Π' a partir da eliminação da fórmula esquemática máxima $\xi\Phi_3(H_{1,1}^{3,1}..H_{p_s,h_{s,p_s}^{3,2}}^{3,s}\ E^3..G_{p_s}^{3,s})$ também é uma dedução de F a partir de Γ'.

b) Se Π é uma dedução de C a partir de Γ, então a dedução Π'' também é uma dedução de C a partir de Γ.

Observe, também, que em Π não há, necessariamente, uma aplicação da regra para o absurdo clássico e que em Π'' ocorrem duas aplicações da regra para o absurdo clássico. O mesmo ocorre na eliminação de uma fórmula máxima de mesmo tipo apresentado acima em Π em deduções no sistema I''_{S4} definido na seção 3.2.3[3].

Por esse motivo, apesar de as regras de inferência de I''_{S4} serem instâncias das regras de S e das restrições associadas a instâncias das regras de dedução para as regras que definem I''_{S4} não serem violadas, não garantimos a normalização fraca para o sistema I''_{S4} a partir da normalização fraca de S. Este fato motivou a inclusão do item a.5) do enunciado do Teorema 7.1 descrito na sequência.

A constatação acima motivou a elaboração, por parte do professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), de um contra-exemplo para a normalização fraca do sistema I_{S4} de Prawitz [38] para a lógica modal intuicionística $S4$ com operadores modais $\Box$ e $\Diamond$. Na seção 7.2, mostraremos o contra-exemplo construído por Pereira e proporemos mudanças nas reduções definidas por Prawitz para eliminar fórmulas máximas de deduções nos sistemas C_{S4} e I_{S4}.

O que foi mostrado acima, em outras palavras, relaciona-se com as condições usuais utilizadas na literatura para a normalização de sistemas. Ou seja, para um sistema ser normalizável, dois fatos devem ser verdadeiros:

a) Primeiro, deve haver uma sequência de reduções que leva uma dedução a sua forma normal. E, no caso da normalização forte, qualquer sequência deverá ser finita.

b) Além disso, as deduções devem ser fechadas para a operação de redução.

A condição a) do Teorema 7.1 implica, a partir de resultados desta tese, a validade das condições acima para um determinado sistema C de dedução natural. Essa condição é suficiente para a obtenção da normalização de sistemas, pois a prova de normalização fraca ou forte para C poderá ser obtida como um caso particular da normalização esquemática. Além disso, a análise das definições de nossas reduções esquemáticas e dos

[3]Provamos que o sistema I''_{S4} é equivalente ao sistema I_{S4} de Prawitz [38] para a lógica modal intuicionística $S4$.

possíveis problemas que podem ocorrer na aplicação de reduções instâncias mostram que a condição a) do Teorema 7.1 garante o item b) exposto acima.

Caso a condião a) descrita no Teorema a seguir não seja válida para um sistema C, então a normalização para este sistema C poderá ser obtida a partir da condição b) do Teorema 7.1. A condição b) é suficiente pois:

a) Seja Π uma dedução em C e $\Pi^{'}$ a dedução equivalente em $C^{'}$.

b) Considere que $\Pi^{'}$ se reduz a $\Pi^{'*}$ normal. Isto é possível porque a condição a) do Teorema 7.1 é válida para $C^{'}$.

c) Assim, traduzimos a dedução $\Pi^{'*}$ e econtramos uma dedução normal $\Pi^{''}$ para Π em C, pela condição b.2) descrita abaixo.

Teorema 7.1. ***(Condições Suficientes para Normalização de Sistemas)*** *Todo sistema de Dedução Natural C é normalizável fraca e fortemente, se uma das condições a seguir forem verdadeiras:*

a) Condição 1:

a.1) As regras de C são construídas a partir das regras esquemáticas de S pelos procedimentos 3.3 a 3.8.

a.2) As reduções de C são instâncias das reduções esquemáticas.

a.3) A regra de introdução da negação não é caso especial da regra $\rightarrow I$ e nem de nenhuma outra regra.

a.4) Os formatos de ocorrências de fórmulas não são violados após a aplicação das reduções.

a.5) Existe dependência exclusiva das premissas menores com relação às hipóteses.

b) Condição 2:

b.1) C é equivalente a $C^{'}$ e a condição a) é válida para $C^{'}$.

b.2) Existe uma dedução normal em C equivalente a qualquer dedução normal em $C^{'}$.

Como consequência obtemos a normalização fraca e forte dos sistemas concretos definidos na seção 3.2 e dos respectivos sistemas equivalentes.

7.2 Resultados Adicionais

Nesta seção, apresentaremos outros resultados obtidos a partir da normalização esquemática. A prova do Teorema de Normalização Fraca e Forte para o sistema S e a comparação desta prova com provas encontradas na literatura permitiram a identificação de alguns problemas nestas últimas. Descreveremos estes problemas nesta seção e proporemos soluções baseadas nos resultados desta tese.

Iniciaremos analisando o contra-exemplo apresentado por Medeiros em [31] para a prova de normalização fraca do sistema C^3_{S4} de Prawitz [38][4]. Na dedução Π mostrada abaixo, a eliminação da fórmula máxima $\Box A$, que é conclusão da aplicação do $\bot_c$ e premissa maior da regra $\Box E$, resulta na dedução Π' apresentada logo abaixo na sequência:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\Box A]^a \quad \neg\Box A \to B}{B}\,\neg E \quad \neg B}{\bot}\,\neg E}{\Box A}\,\bot_{c(a)}}{A}\,\Box E}{C \to A}\,\to I}{\Box(C \to A)}\,\Box I$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^b}{A}\,\Box E \quad [\neg A]^a}{\bot}\,\neg E}{\neg\Box A}\,\neg I_{(b)} \quad \neg\Box A \to B}{B}\,\neg E \quad \neg B}{\bot}\,\neg E}{A}\,\bot_c(a)}{C \to A}\,\to I}{\Box(C \to A)}\,\Box I.$$

Π' não é uma dedução em C^3_{S4} pois a fórmula essencialmente modal $\bot$ depende da ocorrência de fórmula $\neg A$ enquanto que a premissa $C \to A$ da aplicação do $\Box I$ não depende desta mesma ocorrência de fórmula $\neg A$[5].

Definimos na seção 3.2.3 o sistema C''_{S4} e mostramos na seção 3.3.5 a equivalência entre os sistemas C''_{S4} e C^3_{S4} de Prawitz. A dedução Π'' a seguir em C''_{S4} é equivalente ao

[4] Mostramos o sistema C^3_{S4} de Prawitz na seção 3.2.3.

[5] Medeiros definiu o sistema $NS4$ para a lógica modal clássica sem a constante $\Diamond$ e provou a normalização fraca para $NS4$.

contra-exemplo Π construído por Medeiros [31] para a prova de normalização fraca em C^3_{S4}:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A \to B$}
\AxiomC{$[\neg \Box A]^a$}
\AxiomC{$[B]^b$}
\RightLabel{$\to E_{(b)}$}
\TrinaryInfC{B}
\AxiomC{$\neg B$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\perp_{c(a)}$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\AxiomC{$[\Box A]^c$}
\AxiomC{$[A]^d$}
\RightLabel{$\Box E_{(d)}$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$C \to A$}
\RightLabel{$\Box I_{(c)}$}
\BinaryInfC{$\Box(C \to A)$}
\end{prooftree}
$$

Conforme mostramos na seção 3.2.3, o sistema C''_{S4} foi definido em função de regras concretas construídas a partir das regras do sistema esquemático S. Além disso, as condições para normalização de sistemas concretos descritas na seção 7.1 são válidas para C''_{S4}. Portanto, utilizando um caso particular da redução $a.ii.1$ introduzida na definição 4.9, obtemos Π''' em C''_{S4}:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg \Box A \to B$}
\AxiomC{$[\Box A]^c$}
\AxiomC{$[\Box A]^b$}
\AxiomC{$[A]^e$}
\RightLabel{$\Box E_{(e)}$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$C \to A$}
\RightLabel{$\Box I_{(b)}$}
\BinaryInfC{$\Box(C \to A)$}
\AxiomC{$[\neg(\Box(C \to A))]^d$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\neg I_{(c)}$}
\UnaryInfC{$\neg \Box A$}
\AxiomC{$[B]^a$}
\RightLabel{$\to E_{(a)}$}
\TrinaryInfC{B}
\AxiomC{$\neg B$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\perp_{c(d)}$}
\UnaryInfC{$\Box C \to A$}
\end{prooftree}
$$

Π''' é uma dedução em C''_{S4} e, portanto, o contra-exemplo de Medeiros para o sistema C^3_{S4} de Prawitz não se aplica ao sistema C''_{S4}, mesmo sendo este sistema equivalente àquele. Assim, conforme expusemos na seção 7.1, podemos obter normalização fraca para o sistema C^3_{S4} de Prawitz a partir da prova de normalização para o sistema C''_{S4}.

Acreditamos, entretanto, que a normalização para o sistema C^3_{S4} de Prawitz também pode ser obtida de forma direta. Para tanto, baseando-se na redução $a.ii.1$ e na equivalência entre C''_{S4} e C^3_{S4}, modificamos a redução definida por Prawitz para o sistema C^3_{S4} que elimina fórmula máxima gerada pela conclusão do absurdo clássico que é, ao mesmo tempo, premissa maior da aplicação de uma regra de eliminação[6]. Existem dois casos a analisar, onde o caso $a)$ é igual ao proposto por Prawitz para o sistema C^3_{S4}:

[6] A prova da normalização fraca para o sistema C^3_{S4} de Prawitz, considerando as reduções propostas nesta tese, será trabalhada futuramente.

a) A ocorrência de fórmula máxima A na dedução Π mostrada abaixo não é uma fórmula essencialmente modal ou, caso seja, não é utilizada em uma aplicação da regra $\Box I$ e r é uma regra de eliminação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^a\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\bot}}{A}\,\bot_{c(a)} \qquad \Sigma^3}{\dfrac{\begin{matrix}C\\ \Sigma^2\end{matrix}}{B.}}\, r$$

A eliminação da fórmula máxima A resulta na seguinte redução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^b \quad \Sigma^3}{C}\,R \qquad [\neg C]^a}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg A\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\bot}}{\dfrac{\begin{matrix}C\\ \Sigma^2\end{matrix}}{B.}}\,\bot_{c(a)}}\,\neg I_{(b)}$$

b) A ocorrência de fórmula máxima $\Box A$ na dedução Π mostrada abaixo é uma fórmula essencialmente modal e é utilizada em uma aplicação da regra $\Box I$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg\Box A]^a\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\bot}}{\Box A}\,\bot_{c(a)}}{\dfrac{\begin{matrix}A\\ \Sigma^2\end{matrix}}{B.}}\,\Box E$$

Nesse caso, a eliminação da fórmula máxima $\Box A$ resulta na seguinte redução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^b}{\begin{matrix}A\\ \Sigma^{2.1}\end{matrix}}\,\Box E}{\Box C}\,\Box I \qquad [\neg\Box C]^a}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg\Box A\\ \Sigma^1\end{matrix}}{\bot}}{\dfrac{\begin{matrix}\Box C\\ \Sigma^{2.2}\end{matrix}}{B.}}\,\bot_{c(a)}}\,\neg I_{(b)}$$

Observe, portanto, que o contra-exemplo de Medeiros não se aplica ao sistema de Prawitz, no caso de este sistema utilizar as reduções descritas acima.

A seguir, apresentaremos um contra-exemplo para a prova do Teorema de Normalização Fraca da versão do sistema de Prawitz C_{S4} para a lógica modal clássica com as constantes $\Box$ e $\Diamond$. Denominamos este sistema de sistema C^*_{S4}. O sistema C^*_{S4} é definido em função das regras do sistema I'^3_{S4} de Prawitz para a lógica intuicionística modal com as constantes $\Box$ e $\Diamond$ e da regra para o absurdo clássico[7].

O professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) nos apresentou o contra-exemplo mostrado abaixo para a normalização dos sistemas C^*_{S4} e I'^3_{S4} de Prawitz. Seja Π uma dedução em C^*_{S4} ou em I'^3_{S4}. A ocorrência de fórmula $\neg\Diamond A$ que é conclusão da $\neg I$ e premissa maior da $\neg E$ é fórmula essencialmente modal para a aplicação da $\Box I$ que conclui $\Box\neg E$ e é fórmula máxima.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[E]^a \quad \dfrac{\Box(E\to A)}{E\to A}\,\Box E}{A}\,\to E}{\Diamond A}\,\Diamond I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Diamond A]^b \quad \Diamond A\to B}{B}\,\to E \quad \neg B}{\bot}\,\neg E}{\neg\Diamond A}\,\neg I_{(b)}}{\bot}\,\neg E}{\neg E}\,\neg I_{(a)}}{\Box\neg E}\,\Box I$$

A eliminação da fórmula máxima $\neg\Diamond A$, segundo Prawitz [38], gera a seguinte redução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[E]^a \quad \dfrac{\Box(E\to A)}{E\to A}\,\Box E}{A}\,\to E}{\Diamond A}\,\Diamond I \qquad \Diamond A\to B}{B}\,\to E \qquad \neg B}{\bot}\,\neg E}{\neg E}\,\neg I_{(a)}}{\Box\neg E}\,\Box I,$$

onde a ocorrência de fórmula $\bot$ que é premissa da regra $\neg I$ que conclui $\neg E$ é fórmula essencialmente modal, porém depende da ocorrência de fórmula E que é premissa menor da aplicação da regra $\to E$, mas $\neg E$ não depende de E. Π', portanto, não é uma dedução em C^*_{S4} e nem em I'^3_{S4}.

De modo similar ao que fizemos acima para invalidar o contra-exemplo de

[7] O sistema I'^3_{S4} de Prawitz foi apresentado na seção 3.3.3.

Medeiros [31], propomos as seguintes reduções para eliminar uma fórmula máxima que é conclusão da $\neg I$ e ao mesmo tempo premissa maior da aplicação de uma regra de eliminação em C^{*}_{S4} ou em I'^{3}_{S4}. Temos três casos a analisar:

a) A ocorrência de fórmula máxima não é essencialmente modal ou, caso seja, não é utilizada na aplicação das regras $\Box I$ ou $\Diamond E$:

   Neste caso, a redução é igual a proposta por Prawitz em [38].

b) A ocorrência de fórmula máxima é essencialmente modal e é utilizada na aplicação das regras $\Box I$ ou $\Diamond E$[8]:

   Dividimos o caso b) em dois subcasos:

   b.1) A ocorrência de fórmula descartada pela aplicação da regra $\neg I$ que conclui a fórmula máxima não é premissa maior da aplicação de uma regra de eliminação:

   Neste caso, Π e sua redução Π' são, respectivamente, iguais a[9]:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\Diamond A]^a\\ \dfrac{\Sigma^4}{\bot}\end{array}}{\neg\Diamond A}\,\neg I_{(a)} \qquad \dfrac{\Sigma^5}{\Diamond A}}{\bot}\,\neg E\\
\dfrac{\dfrac{\Sigma^2}{B}}{\Box B}\,\Box I\\
\dfrac{\Sigma^1}{C}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\neg\Diamond A]^b \qquad \dfrac{\Sigma^5}{\Diamond A}}{\bot}\,\neg E\\ \dfrac{\Sigma^2}{B}\end{array}}{\Box B}\,\Box I \qquad [\neg\Box B]^a}{\bot}\,\neg E}{\Diamond A}\,\bot_{c(b)}\\
\dfrac{\dfrac{\Sigma^4}{\bot}}{\Box B}\,\bot_{c(a)}\\
\dfrac{\Sigma^1}{C.}
\end{array}
$$

[8]Na dedução Π, a ocorrência de fórmula $\bot$ que é conclusão da regra $\neg E$, apesar de essencialmente modal, não é utilizada na validação da introdução da ocorrência de fórmula $\Box B$.

[9]O caso em que $\neg\Diamond A$ é uma ocorrência de fórmula essencialmente modal para a $\Diamond E$ é similar.

Dessa forma, no contra-exemplo apresentado pelo professo Pereira, a eliminação da fórmula máxima $\neg\Diamond A$ gera a seguinte redução válida em C^*_{S4}:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\Diamond A]^b \quad \dfrac{\dfrac{[E]^a \quad \dfrac{\Box(E\to A)}{E\to A}\,\Box E}{A}\to E}{\Diamond A}\,\Diamond I}{\bot}\,\neg E}{\neg E}\,\neg I_a}{\Box\neg E}\,\Box I \quad [\neg\Box\neg E]^c}{\bot}\,\neg E}{\Diamond A}\,\bot_{c(b)} \quad \Diamond A\to B}{B}\,\neg E \quad \neg B}{\bot}\,\neg E}{\Box\neg E}\,\bot_{c(c)}.
$$

Observe que a dedução mostrada acima não é uma dedução válida no sistema I'^3_{S4} para a lógica modal intuicionística, pois ocorre uma aplicação da regra $\bot_c$. Assim, a nossa proposta é válida somente para o caso de a dedução contra-exemplo ter sido elaborada em C^*_{S4}. Além disso, conforme mostramos na seção 7.1, as condições do Teorema 7.1 não são válidos para o sistema I''_{S4} e, portanto, a prova esquemática de normalização fraca não garante a normalização fraca para o sistema I'^3_{S4}. Portanto, nem mesmo indiretamente por meio da prova da normalização do sistema I''_{S4}, obtemos a normalização para o sistema I'^3_{S4} de Prawitz[10].

b.2) A ocorrência de fórmula descartada pela aplicação da regra $\neg I$ que conclui a fórmula máxima é premissa maior da aplicação de uma regra de eliminação:

Neste caso, Π é a redução de cima e e sua redução Π' é a redução de baixo:[11]:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_4\\ \hline \Diamond A\end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{[\Diamond B]^a \quad \begin{matrix}[B]^b\\ \Sigma^5\\ D\end{matrix}}{D}\,\Diamond E_{(b)}\\ \Sigma^2\\ \bot\end{matrix}}{\neg\Diamond B}\,\neg I_{(a)} \quad \begin{matrix}\Sigma^6\\ \hline \Diamond B\end{matrix}}{\bot}\,\neg E \quad [A]^c \\ \Sigma^3 \\ C \end{matrix}}{C}\,\Diamond E_{(c)}
$$

[10]Na seção 3.3.3, provamos que o sistema I''_{S4} é equivalente ao sistema I'^3_{S4} de Prawitz

[11]O caso em que $\neg\Diamond A$ é uma ocorrência de fórmula essencialmente modal para a $\Box I$ é similar.

$$
\dfrac{
  \dfrac{\Sigma^4}{\Diamond A}\ \Diamond E
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\Sigma^6}{\Diamond B}
        \quad
        \dfrac{\begin{matrix}[B]^d\\ \Sigma^5\end{matrix}}{D}
      }{D}\ \Diamond E_{(d)}
      \qquad [\neg D]^b
    }{\bot}\ \neg E
    \qquad [A]^c
  }{
    \dfrac{\Sigma^3}{C}
  }\ \Diamond E_{(c)}
}{C}
$$

$$
\dfrac{C \qquad [\neg C]^a}{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\bot}{D}\ \bot_{c(b)}}{\Sigma^2} \\ \dfrac{\bot}{C}\ \bot_{c(a)} \\ \Sigma^1\end{matrix}}\ \neg E
$$

Apresentamos, agora, contra-exemplos para a prova da normalização fraca do sistema C_{S4} de Martins e Martins [28] e para a prova da normalização forte do sistema I de Prawitz [39]. Vale ressaltar, entretanto, que a prova da normalização fraca para o sistema C_{S4} de Martins e Martins [28] e a prova da normalização forte do sistema I de Prawitz [39] podem ser obtidas a partir da prova da normalização fraca e forte, respectivamente, para os sistemas C'_{S4} e I' definidos na seção 3.2.3 desta tese[12].

Apresentamos o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28] para a lógica modal clássica com operadores $\Box$ e $\Diamond$ na seção 3.3.4. Martins e Martins provarem, em [28], o Teorema da Normalização Fraca para o sistema C_{S4} utiliza como valor de indução o par $(z(\Pi), l(\Pi))$, onde $z(\Pi)$ é igual a $(max(i(\alpha_1), .., i(\alpha_n)), m)$, $i(\alpha_j)$ é igual a $(d(\alpha_j), s(\alpha_j))$, α_j é fórmula máxima, $d(\alpha)$ é o grau de α e m é a quantidade de fórmulas máximas com índices iguais a $max(i(\alpha_1), .., i(\alpha_n))$, para $1 \leq j \leq n$. A definição de propagação $s(\alpha)$ de uma ocorrência de fórmula α qualquer é similar à noção de propagação de uma ocorrência de fórmula esquemática introduzida na definição 4.19.

Seja Π a dedução em C_{S4} mostrada abaixo:

$$
\dfrac{
  \dfrac{\Diamond A \quad \Box(A \to \Box B) \qquad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A \to \Box B)]^a}{A \to \Box B}\ \Box E \qquad [A]^a}{\Box B}\ \to E}{\Diamond\Box B}\ \Diamond I}{}
  }{\Diamond\Box B}\ \Diamond E_{(a)}
  \qquad
  \dfrac{\Box C}{\Box\Box C}\ \Box I
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\Box C]^b}{\Box C}\ \Box E \qquad [\Box B]^b}{\Box C \wedge \Box B}\ \wedge I}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\ \Diamond I
}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\ \Diamond E_{(b)},
$$

[12]Provamos na seção 3.3.4 e na seção 3.3.1, respectivamente, a equivalência entre o sistema C'_{S4} e o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28] e entre o sistema I' e o sistema I de Prawitz [39]

onde $d(B) = d(C)$ e $z(\Pi)$ é igual a $(d(C){+}2, 2, 2)$. Conforme redução definida por Martins e Martins em [28], a eliminação da fórmula máxima $\Diamond B$ resulta na seguinte dedução Π':

$$\dfrac{\Diamond A \quad \Box(A \to \Box B) \quad \dfrac{\Box C}{\Box\Box C}\,\Box I \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A \to \Box B)]^a}{A \to \Box B}\,\Box E \quad [A]^a}{\Box B}\to E}{\Diamond\Box B}\,\Diamond I \quad [\Box\Box C]^a \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\Box C]^b}{\Box C}\,\Box E \quad [\Box B]^b}{\Box C \wedge \Box B}\wedge I}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\,\Diamond I}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\,\Diamond E_{(b)}}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\,\Diamond E_{(a)}$$

onde $z(\Pi')$ é igual a $(d(C) + 2, 3, 1)$. Portanto, $(z(\Pi'), l(\Pi')) > (z(\Pi), l(\Pi))$.

Provamos, na seção 3.3.4, que o sistema $CS4$ de Martins e Martins é equivalente ao sistema C'_{S4}. Mostraremos, na sequência, que o problema descrito acima na normalização fraca do sistema $CS4$ não ocorre na normalização de C'_{S4}, apesar de este sistema ser equivalente àquele. Para tanto, considere a dedução Π^* a seguir em C'_{S4}:

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond A \quad \Box(A \to \Box B) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A \to \Box B)]^a \; [A \to \Box B]^e}{A \to \Box B}\,\Box E_{(e)} \quad [A]^a \quad [\Box B]^c}{\Box B}\to E_{(c)}}{\Diamond\Box B}\,\Diamond I}{\Diamond\Box B}\,\Diamond E_{(a)} \quad \dfrac{\Box C}{\Box\Box C}\,\Box I \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\Box C]^b \; [\Box C]^d}{\Box C}\,\Box E_{(d)} \quad [\Box B]^b}{\Box C \wedge \Box B}\wedge I}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\,\Diamond I}{\Diamond(\Box C \wedge \Box B)}\,\Diamond E_{(b)},$$

A dedução Π^* em C'_{S4} é equivalente ao contra-exemplo Π para a normalização de $CS4$ apresentada acima. Por ser a prova do Teorema de Normalização para o sistema C'_{S4} um caso particular da prova de normalização fraca para S, conforme comentamos acima, utilizamos como valor de indução para a normalização de C'_{S4} o mesmo valor de indução utilizado na normalização de S, ou seja, o par $(i(\Pi), l(\Pi))$.

A noção de $i(\Pi)$, introduzida na definição 4.19, é igual a $(max(i(\alpha_1), .., i(\alpha_n)), m)$, $i(\alpha_j)$ é igual a $(d(\alpha_j), r(\alpha_j), s(\alpha_j))$, α_j é fórmula máxima e $d(\alpha)$ é o grau de α, para $1 \leq j \leq n$. A definição do Índice de Vizinhaça, $r(\alpha)$ e de Propagação de uma Ocorrência de Fórmula, $s(\alpha)$, para uma fórmula α concreta qualquer, também são iguais às respectivas noções introduzidas na definição 4.19.

Eliminamos a fórmula máxima $\Diamond\Box B$ de Π^* por meio de um caso particular da redução do tipo $b.i.2$ que elimina fórmulas esquemáticas máximas em deduções em S introduzida na definição 4.13 e obtemos a seguinte dedução Π'^*:

$$
\dfrac{\Diamond A \quad \Box(A\to\Box B) \quad \dfrac{\Box C}{\Box\Box C}\,\Box I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A\to\Box B)]^a\ [A\to\Box B]^e}{A\to\Box B}\,\Box E_{(e)} \quad [A]^a \quad [\Box B]^c}{\Box B}\to E_{(c)}}{\Diamond\Box B}\,\Diamond I \qquad [\Box\Box C]^a \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\Box C]^b\ [\Box C]^d}{\Box C}\,\Box E_{(d)} \quad [\Box B]^b}{\Box C\wedge\Box B}\wedge I}{\Diamond(\Box C\wedge\Box B)}\,\Diamond I}{\Diamond(\Box C\wedge\Box B)}\,\Diamond E_{(b)}}{\Diamond(\Box C\wedge\Box B)}\,\Diamond E_{(a)}
$$

Portanto, a dedução Π^* no sistema C'_{S4} correspondente ao contra-exemplo Π em $CS4$ não é um contra-exemplo para a normalização do sistema C'_{S4}, pois $i(\Pi^*) = (d(C)+2,1,2) > (d(C)+2,0,3) = i(\Pi'^*)$.

Por fim comentamos sobre um problema na prova de normalização forte de Prawitz [39] do sistema I para a lógica intuicionística. Na prova do lemma mostrado na página 295 de [39], Prawitz utiliza a tripla (α, β, γ) como o valor de indução, onde α significa o tamanho da árvore de redução da dedução da premissa maior da última regra de uma dedução Π.

Seja Π da forma

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma}{B_1\vee B_2} \quad \begin{matrix}[B_1]^a\\ \dfrac{\Sigma^1}{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_2]^a\\ \dfrac{\Sigma^2}{C}\end{matrix}}{C}\vee E_{(a)} \qquad \Sigma^3}{A}\,E_r,
$$

onde E_r é uma regra de eliminação.

Prawitz afirma que, se $\dfrac{\Sigma'_i}{B_i}$ é parte da dedução para a qual $\dfrac{\Sigma}{B_1\vee B_2}$ se reduz e se B_i ocorre imediatamente acima de $B_1\vee B_2$ ou da primeira fórmula de um segmento que tem $B_1\vee B_2$ como última fórmula, então α_1 de $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma'_i}{B_i}\Sigma_i}{C} \quad \Sigma^3}{A}\,E_r$ é menor do α de Π.

Considere Π igual a

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge C)\to((A\wedge C)\vee B) \quad \dfrac{A \quad C}{A\wedge C}\wedge I}{(A\wedge C)\vee B}\to E \quad \dfrac{\dfrac{[A\wedge C]^a}{C}\wedge E}{A\to C}\to I \quad \dfrac{B\to(A\to C) \quad [B]^a}{A\to C}\to E}{A\to C}\vee E \qquad C}{C}\to E.
$$

Como a subdedução Σ' de Π determinada pela ocorrência de fórmula $(A \wedge C) \vee B$ é normal, então Σ' se reduz a ela mesma e, portanto, α_1 de $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad C}{A \wedge C}\wedge I}{C}\wedge E}{A \to C}\to I \quad A}{C}\to E$ é igual ao valor de α de Π, contradizendo a afirmação de Prawitz.

A prova do Teorema de Normalização Forte para o sistema I de Prawitz pode ser obtido, conforme explicamos na seção 7.1, a partir da prova da normalização forte para o sistema S e da equivalência entre I e I_1 mostrada na seção 3.3.1. Baseando-se em tal prova, mais especificamente em nossa definição de Validade Forte, podemos, também, obter de modo direto a prova de normalização forte para o sistema I de Prawitz. Para tanto, basta modificar o item 3.2.1.4 de sua definição de Validade Forte introduzida no item 3.2.1 do artigo [39], de modo que, onde está dito "...e onde B_i é uma fórmula imediatamente acima, ou da fórmula final de Π', ou de um segmento final de Π'...", deve ser trocado por "...e onde B_i ocorre como premissa de uma regra de introdução da disjunção e ocorre imediatamente acima, ou da fórmula final de Π', ou de um segmento final de Π'...". Dessa forma, o contra-exemplo exposto não mais se aplica à prova do Teorema de Normalização Forte do sistema de Dedução Natural I de Prawitz [39] para a lógica intuicionística, conforme podemos verificar facilmente a partir da observação da dedução contra-exemplo Π apresentada acima.

7.3 Conclusão

Neste capítulo, definimos condições suficientes para a prova de normalização fraca e forte de sistemas de dedução natural concretos. Conforme apresentamos na seção 7.1, o fato de as regras que definem um sistema concreto serem instâncias de nossas regras esquemáticas não é suficiente para a herança, por parte do sistemas concretos, de propriedades válidas para sistemas esquemáticos.

Na seção 7.2, identificamos alguns problemas em provas de normalização de importantes sistemas definidos na literatura e apontamos sugestões de soluções que se basearam em nossa prova de normalização fraca e forte para o sistema esquemático de Dedução Natural S.

Na conclusão, a seguir, descreveremos trabalhos futuros e resultados obtidos nesta tese.

8 CONCLUSÃO

O termo Teoria Abstrata da Prova foi proposto no *First World Congress and School on Universal Logic* [36], em 2005, para identificar o estudo de condições abstratas e gerais para análise prova-teórica de sistemas formais. Especificamente, uma possível questão neste contexto é a busca de procedimentos de normalização para sistemas definidos em função de regras de introdução e de eliminação formalizadas no estilo das regras esquemáticas propostas por Prawitz em [40] e a busca de condições suficientes para um sistema ser normalizável.

Definimos, nesta tese, regras esquemáticas de introdução, de eliminação, para o absurdo clássico e para o absurdo intuicionístico e mostramos como sistemas de Dedução Natural instâncias dos sistemas esquemáticos podem ser construídos. O nosso roteiro segue de perto o utilizado por Prawitz em [38] para o estudo prova-teórico de sistemas de Dedução Natural sendo este, no nosso entendimento, uma primeira contribuição para a Teoria Abstrata da Prova.

A diferença entre os sistemas definidos por este trabalho e os sistemas formalizados por Prawitz em sua tese [38] é que, no nosso caso, os sistemas baseiam-se em regras esquemáticas e, naquele caso, em regras ditas concretas. Conforme explicamos, regras esquemáticas servem de modelo para a definição de regras concretas e, dessa forma, teoremas e propriedades de sistemas concretos são casos particulares de teoremas e propriedades de sistemas esquemáticos.

Estendemos os sistemas esquemáticos propostos por Prawitz [38] e por Chi [7] para possibilitar que sistemas concretos de Dedução Natural modais também fossem instâncias de nossos sistemas esquemáticos. Para tanto utilizamos, além do padrão das regras usuais de eliminação da disjunção e de eliminação da implicação, um formato similar ao formato da regra $\Box I$ definida por Biermann e de Paiva [4].

Definimos o Princípio de Inversão para nossas regras esquemáticas de modo similar ao que Prawitz fez para os sistemas I, M e C. Apresentamos reduções para eliminação de fórmulas máximas esquemáticas e provamos o Teorema de Normalização Fraca para dois sistemas esquemáticos, além da prova de normalização forte para um dos sistemas definidos.

Definimos os sistemas M_1, I_1 e C_1 para as lógicas minimais, intuicionísticas e clássicas, respectivamente, em função de regras construídas a partir de nossas regras esquemáticas e provamos que eles são equivalentes aos sistemas M, I e C definidos por Prawitz em [38]. Além desses, definimos cinco sistemas modais e provamos que são equivalentes a importantes sistemas definidos na literatura. Como consequência, comparamos provas de normalização fraca e forte da literatura com as provas de normalização para os sistemas definidos nesta tese e sugerimos correções em algumas destas provas.

Apresentamos, também, um estudo que teve por objetivo especificar condições suficientes para normalização de sistemas. Mostramos que, o fato de as regras serem construídas em função de nossas regras esquemáticas, não é condição suficiente para a normalização de sistemas concretos.

Na sequência, descreveremos resultados específicos obtidos por esta tese relacionados ou não com o que foi comentado acima:

a) Definimos conceitos esquemáticos independentes de conceitos da Teoria da Prova para sistemas concretos. Esta é uma abordagem inovadora, se compararmos com as definições esquemáticas de Chi [7] e de Prawitz [38].

b) Utilizamos a Dedução Natural no seu formato puro, diferentemente de Hausler [18], por exemplo, que utilizou funções recursivas na definição de suas regras esquemáticas.

c) Definimos procedimentos precisos que permitem que construamos figuras de regras a partir de nossas regras esquemáticas. A vantagem de tais procedimentos é que elimina dúvidas do tipo se a regra para o absurdo intuicionístico é ou não instância das regras esquemáticas de introdução e de eliminação. Além disso, por terem uma característica de algoritmo, podem ser automatizados.

d) Como consequência da prova do Teorema de Normalização Forte para o sistema S, obtemos a prova do Teorema de Normalização Forte sem eliminar reduções permutativas para sistemas modais $IS4$ de Biermann e de Paiva [4], C_{S4} e I_{S4} de Prawitz [38], $CS4$ de Martins e Martins [28] e para o sistema $NS4$ de Medeiros.

e) Sugerimos correção na prova do Teorema de Normalização Forte para o sistema I definido por Prawitz em [39].

f) Sugerimos correção na prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema $CS4$ de Martins e Martins [28].

g) Propomos novas reduções que evitam o contra-exemplo de Medeiros para a normalização fraca do sistema C_{S4} de Prawitz [38].

h) Possibilitamos a definição de um contra-exemplo, por parte do professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), para a prova de normalização fraca do sistema C_{S4} de Prawitz com as constantes lógicas $\Box$ e $\Diamond$. Propomos novas reduções que invalidam este contra-exemplo.

i) Por fim, provamos o Teorema da Normalização Fraca, via Dedução Natural, para o sistema esquemático definido por Chi em [7]. Expusemos um método que determina uma sequência de reduções que normaliza deduções esquemáticas definidas nesse sistema. Este, também, é um resultado novo, visto que a prova do Teorema de Normalização Fraca de Chi foi feita com base em uma versão de suas regras esquemáticas formalizadas em λ-Cálculo.

Como trabalhos futuros, pretendemos:

a) Modificar a prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema esquemático S de modo que seja possível identificar uma sequência específica de reduções que normaliza uma dada dedução esquemática. Dessa forma, será possível redefinir o procedimento que normaliza deduções apresentado na seção 6.2 para que ele normalize, também, deduções realizadas em sistemas modais.

b) Provar confluência para o sistema esquemático S definido nesta tese. Uma das estratégias é seguir a prova de Wideback [50] que utilizou o predicado de redutibilidade de Girard [16] para a prova da confluência da normalização de deduções em um sistema para lógica minimal com a constante $\rightarrow$. Nesse caso, tentaremos, primeiramente, estender a prova de normalização forte de Girard para um sistema clássico com as constantes lógicas $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ e $\bot$[1] e, depois, tentaremos adaptar esta prova para o sistema esquemático S. Como segunda opção, avaliaremos se é possível provar a normalização forte via nossa versão esquemática do predicado de Validade Forte definido por Prawitz [39] incluindo reduções permutativas.

[1]Esta sugestão nos foi dada pelo professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ).

c) Avaliar se outros predicados utilizados em provas de normalização forte apresentam problemas semelhantes ao identificados na prova de normalização forte de Prawitz[2].

d) Estender as regras esquemáticas para possibilitar que sistemas $S5$ para a lógica modal $S5$, sistemas I e C para a lógica intuicionística e clássica de primeira e segunda ordem também sejam suas instâncias.

e) Provar o Teorema da Normalização Fraca para o sistema C_{S4} de Prawitz com a constante lógica $\Box$ considerando a nova redução proposta por esta tese na seção 7.2 para evitar o contra-exemplo de Medeiros [31]. Esta prova pode ser obtida a partir da prova do Teorema de Normalização Fraca para o sistema esquemático S, pois C''_{S4}, instância de S, é equivalente ao sistema C_{S4} de Prawitz e as condições do Teorema 7.1 são válidas para C''_{S4}.

f) Provar o Teorema da Normalização Fraca para o sistema C_{S4} de Prawitz com as constantes lógicas $\Box$ e $\Diamond$ considerando a nova redução proposta por esta tese na seção 7.2 para evitar o contra-exemplo elaborado pelo professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Para tanto primeiramente, definiremos um sistema para lógica modal clássica $S4$ com as constantes $\Box$ e $\Diamond$ que atenda às condições do Teorema 7.1 e provaremos sua equivalência com o sistema C_{S4} de Prawitz com as constantes lógicas $\Box$ e $\Diamond$. Depois, obteremos a prova pretendida de modo semelhante ao exposto no item *e*) descrito acima.

g) Modificar a redução $c.i.2$ introduzida na definição 4.16 de modo a não utilizar aplicações da regra para o absurdo clássico na dedução obtida a partir da eliminação de fórmulas máximas do tipo $c.i.2$. Como consequência, provaremos, de modo indireto, o Teorema da Normalização Fraca para o sistema I_{S4} de Prawitz com as constantes lógicas $\Box$ e $\Diamond$.

h) Baseando-se no resultado obtido no item *g*) acima, provar, de modo direto, o Teorema de Normalização Fraca para o sistema o sistema I_{S4} de Prawitz com as constantes lógicas $\Box$ e $\Diamond$.

i) Descrever a forma das deduções normais no sistema S e provar a propriedade da subfórmula. Dessa forma, todos os sistemas de Dedução Natural concretos que

[2]Esta sugestão também nos foi dada pelo professor Luiz Carlos Pereira da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ).

atendam às condições do Teorema 7.1 herdarão tais propriedades.

Referências Bibliográficas

[1] Alechina, N., Mendler, M., de Paiva and Ritter, E., (2001). Categorical and Kripke Semantics for Constructive S4 Modal Logic, in *International Workshop on Computer Science Logic*, CSL'01, L. Fribourg, Ed. Lecture Notes in Computer Science.

[2] Avron, A. (1990). Gentzenizing Schroeder-Heister´s Natural Extension of Natural Deduction, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31:127-135.

[3] Benaissa, Z., Moggi., E., Taha, W. and Sheard, T., (1999). Logical Modalities and Multistage Programming, in *Workshop on Intutionistc Modal Logics and Application* (IMLA'99), Satellite to FloC'99, Trento, Italy.

[4] Bierman, G.M. and de Paiva, V.C.V, (1992). Intuitionistic Necessity Revisited, in *Proceedings of Logic at Work Conference*. Amsterdam, Holland, December.

[5] Bierman, G,M., (1994). *On Intuitionistic Linear Logic*. PhD thesis, Computer Laboratory, University of Cambridge, December 1993. Published as Computer Laboratory Techinical Report 346, August.

[6] Bierman, G.M. and de Paiva, V.C.V, (2000). On an Intutionistic Modal Logic, *Studia Logic*, 65:383-416.

[7] Chi, W.H. (1991). *Esquemas Abstratos para Dedução Natural,Cálculos de Sequentes e Lambda Cálculo Tipificado*, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

[8] Church, A. (1940). A Formulation of the Simple Theory of Types, *Journal of Symbolic Logic*, 5:56-68, 1940.

[9] Davies, R. and Pfenning F., (1996). A Modal Analysis of Staged Computation, in Guy Steele, Jr., editor, *Proc. of 23rd POPL*, pages 258-270, ACM Press.

[10] Despeyroux, J., Pfenning, F. and Schürmann, (1997). Primitive Recursion for Higher-Order Abstract Syntax, in P. de Groote and J.Roger Hindler, editors, *Proc of TLCA'97*, pages 147-163. LNCS 242, Springer Verlag.

[11] Ebbinghaus, H.-D., Flum, F. e Thomas, W. *Mathematical Logic*. Springer-Verlag, 1994.

[12] Fairtlough, M. and Mendler, M., (1995). An Intuitionistic Modal Logic with Applications to the Formal Verification of Hardware, in *Proceedings of Conference on Computer Science Logic*, volume 933 of Lectures Notes in Computer Science.

[13] Ghani, N., de Paiva, V. and Ritter, E., (1998). Explicit Substitutions for Constructive Necessity, in *Proceedings ICALP'98*.

[14] Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das logische Schilieben, *Mathematische Annalen*, 39, 176-210, 405-431. English translation in M.E. Szabo (Ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland 1969 (pp. 68-131).

[15] Girard, J.Y.(1987). *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, Napoli.

[16] Girard, J.Y., Taylor,P. and Lafont,Y. (1989). *Proofs and Types*, Cambridge University Press, NY, 1989.

[17] Goubalt-Larrecq, J., (1996). *Logical Foundations of eval/quote Mechanisms and the Modal Logic S4*, Manuscript.

[18] Haeusler, E.H. (1990). *Prova Automática de Teoremas em Dedução Natural - Uma Abordagem Abstrata*, Tese de Doutorado, PUC/RJ.

[19] Haeusler, E.H. and Pereira, L.C.P.D. (1999). The Rules-as-Types Interpretation of Schröeder-Heister´s Extension of Natural Deduction, in Pereira, L.C.P.D. and Michael B. Wrigley (Eds.), *Logic, Language and Knowledge - Essays in Honour of Oswaldo Chateaubriand Filho.*

[20] Hilbert, D. (1922). *Neubergründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.

[21] Howard, W.A. (1980). The Formula-as-type notion of construction, in Howard, J.R., and Seldin, J.P., editors, *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press.

[22] Jaskowski, S. (1934). On the Rules of Suppositions in Formal Logic, in *Studia Logic*, 1.

[23] Jervell, H. (1970). A Normal Form in First Order Arithmetic, in J.E. Fenstad (Ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland.

[24] Kripke, S. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic, *Journal of Symbolic Logic*, 24(1).

[25] Leivant, D. (1974). Strong Normalization for Arithmetic, in *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Berlin/Heidelberg, (pp. 182-197).

[26] Lewis, C.I. e Langford, C.H. (1932). *Symbolic Logic*. New York.

[27] Martins, A.T. and Martins, L.R. (2005). Normalizable Natural Deduction Rules for S4 Modal Operators, in: *World Congress on Universal Logic*, Montreux, pp. 79-80.

[28] Martins, A.T. and Martins, L.R. (2009). Normalizable Natural Deductive System for Complete Logic S4, in Béziau, J-Y; Costa Leite, A.. (Org.), *Dimensions of Logical Concepts*, 1 ed. Campinas: Coleção CLE, 2009, v. 54, p. 241-276.

[29] Martin-Lof, P. (1971). Hauptsatz for the Intuitionistic Theory of Iterated Inductive Definitions, in J.E. Fenstad (Ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland.

[30] Massi, C.D.B. (1990). *Provas de Normalização para a Lógica Clássica*, Tese de Doutorado, Departamento de Filosofia, UNICAMP.

[31] Medeiros, M.P.N. Medeiros (2006). A New Classical Modal Logic in Natural Deduction, *Journal of Symbolic Logic*, 71 799-908.

[32] Oliveira, D.A.S., de Souza, C.S. e Haeusler, E.H. (1999). Structured Argument Generation in a Logic-Based KB System, in: Moss, L.; Ginzburg, J.; de Rijke, M. (Org.). *Logic, Language, and Computation*. Stanford, California: CSLI Publications. pp. 222-250.

[33] Paulson, L.C.(1989) *The Foundation of a Generic Theorem Prover*. J. Auto. Reas., (5)3:363-397.

[34] Paulson, L.C.(1994) *Isabelle: A Generic Theorem Prover*. Springer, 1994. LNCS 828.

[35] Pereira, L.C.P.D. (1982). *On the Estimation of the Length of Normal Derivations*, em Akademilitteratur, Stockholm.

[36] Pereira, L.C.P.D. and Martins, A.T. (2005). Abstract Proof Theory, in: *World Congress on Universal Logic*, Montreux, pp. 20-22.

[37] Poupel, H., Pereira, L.C.P.D. (1995). A Categorical Approach To Higher-Level Introduction And Elimination Rules, *Reports on Mathematical Logic*, v. 28.

[38] Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study.* Almqvist and Wiksell.

[39] Prawitz, D. (1971). Ideas and Results in Proof Theory, in J.E. Fenstad (Ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland.

[40] Prawitz, D. (1979). Proofs and the Meaning and Completeness of the Logical Constants, in J. Hintikka et al. (Eds.), *Essays on Mathematical and Philosophical Logic.*

[41] Schroeder-Heister, P. (1982). *Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknupfungen*, Dissertation, Bohn, 1981.

[42] Schroeder-Heister, P. (1983). Generalized Rules for Quantifiers and the Completeness of the Intuitionistic Operators $\wedge,\vee,\rightarrow,\perp,\forall,\exists$. M.M. Ritcher, E.Borger, W. Oberschelp, B.Schinzel, W. Thomas (Eds.), *Computation and Proof Theory.* Proceedings of the Logic Colloquium.

[43] Schroeder-Heister, P. (1984). A Natural Extension of Natural Deduction, in *Journal of Symbolic Logic*,v.49.

[44] Schroeder-Heister, P. (1987). *Structural Frameworks with Higher-Level Rules - Philosophical Investigations on the Foundations of Formal Reasoning*, in Proof-Theoretic Investigations, Konstanz Univeristy.

[45] Schutte, K. (1951). Beweistheoretische Erfassung der Unendlichen Induktion in der Zahlentheorie, in *Mathematische Annalen*, 122, pp. 369 - 380.

[46] Stirling, C.P., (1987). Modal Logics for Communicating Systems, *Theoretical Computer Science*, 49:311-347.

[47] Simpson, A. (1994). *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, Tese de Doutorado, Universidade de Edinburgh.

[48] Tait, W. (1967). Intentional Interpretations of Functionals of Finite Type I, *The Journal of Symbolic Logic* 32, 198-212.

[49] Troelstra, A. S. and Schwichtenberg, H. (1996).*Basic Proof Theory*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, v. 43. Cambridge University Press.

[50] Wideback, F. (2001). *Identity of Proofs*, Doctoral Dissertation, University of Stockholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm.