



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO - MDCC

RENNAN FERREIRA DANTAS

PROBLEMAS DE CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

FORTALEZA

2014

RENNAN FERREIRA DANTAS

PROBLEMAS DE CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos grafos (Teoria da Computação).

Orientador: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio

Co-orientador: Prof. Dr. Frédéric Havet (INRIA, Sophia-Antipolis, France)

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

-
- D215p Dantas, Rennan Ferreira.
Problemas de código de identificação em grades / Rennan Ferreira Dantas. – 2015.
68p. : il. , enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Teoria da Computação.
Orientação: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio.
Coorientação: Prof. Dr. Frédéric Havet.
1. Grades computacionais. 2. Grades quadradas. 3. Grades triangulares. 4. Grades infinitas. I.
Título.

RENNAN FERREIRA DANTAS

PROBLEMAS DE CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos grafos (Teoria da Computação).

Aprovada em: _____/_____/_____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Universidade Federal do Ceará

Prof^a. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por iluminar o meu caminho. Eu sei que a graça Dele se faz presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço aos meus pais por todo amor e pelo esforço que fizeram durante toda a vida para dar a mim o melhor possível. A eles dedico este trabalho e todas as conquistas que tive e que terei durante a minha vida.

Agradeço à minha família, especialmente as minhas tias Luzia e Graça; aos meus queridos amigos, em particular Ailde, Andréa, Emanuella, Isaac, Rafael, Rebeca e Thiago; e a minha amada namorada Renata por todo o incentivo e compreensão por tantos momentos de ausência durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, professor Rudini Sampaio, por todo aprendizado, paciência, conselhos e amizade desde a minha iniciação científica ainda na graduação. Muito do que sei hoje devo aos seus ensinamentos. Agradeço também ao professor Frédéric Havet pela supervisão durante meu estágio de mestrado no INRIA-Sophia Antipolis. Também agradeço ao Júlio Araújo, à Karol Maia e ao Cláudio Carvalho por todo auxílio e companheirismo que me prestaram durante esse estágio.

Agradeço aos professores Victor Campos, Ana Shirley e Mitre Dourado por contribuir com os seus sólidos conhecimentos para este trabalho, além da disponibilidade para participar da banca avaliadora. As suas contribuições foram fundamentais para a qualidade desta dissertação de mestrado.

Agradeço aos professores que tive durante toda vida, especialmente aos professores do grupo de pesquisa ParGO. Muito obrigado por todo conhecimento e disponibilidade. “Professores brilhantes ensinam para uma profissão. Professores fascinantes ensinam para a vida” (Augusto Cury).

Agradeço aos colegas do LAB 2: Fábio, Márcio, Pablo, Rafael, Tatiane, Samuel, Vinícius e especialmente ao Eliezer e ao Paulo Henrique que estiveram comigo desde o início da graduação. Obrigado por dividirem comigo as alegrias e dificuldades deste período de mestrado. A caminhada se tornou muito mais fácil com vocês ao meu lado. “Por vezes sentimos que

aquilo que fazemos é apenas uma gota de água no oceano. Mas o oceano seria menor se lhe faltasse uma gota” (Madre Teresa de Calcutá).

Finalmente, agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização deste trabalho.

Resumo

O problema do código de identificação foi introduzido em 1998 por [Karpovsky et al., 1998] com a finalidade de ajudar no diagnóstico de falhas em sistemas computacionais com multiprocessadores. Desde então, o estudo sobre esses códigos e suas variantes tem sido desenvolvido. Antoine Lobstein mantém em [Lobstein] uma bibliografia com mais de 200 artigos sobre o assunto. A ideia do problema consiste em identificar qualquer vértice do grafo utilizando apenas o seu conjunto de identificação, que são os vértices de sua vizinhança fechada que estão no código de identificação.

Muitos estudos recentes se concentraram em grafos infinitos e, com isso, o objetivo é obter códigos de identificação nesses grafos infinitos com a menor densidade possível. Em 2005, Ben-Haim e S. Litsyn provaram que a densidade de um código de identificação ótimo da grade retangular infinita é $7/20$ [Ben-Haim e Litsyn, 2005].

Nessa dissertação, fazemos um estudo bibliográfico apresentando vários resultados existentes e fornecemos uma prova alternativa para a densidade $7/20$ de códigos ótimos em grades retangulares infinitas usando o método da descarga.

Palavras-chaves: Códigos de identificação. Grade triangular. Grade quadrada. Grade infinita.

Abstract

The identifying code problem was introduced in 1998 by [Karpovsky et al., 1998] as a way to help fault diagnosis in multiprocessor computer systems. Since then, the study of this problem and its variants has been developed. Antoine Lobstein maintains in [Lobstein] a bibliography with more than 200 articles on this subject.

The idea of the problem is to identify any vertex of the graph using just its identifying set, which are the vertices of its closed neighborhood in the identifying code.

Many recent papers have investigated infinite graphs and then the main objective is to obtain identifying codes in these infinite graphs with the smallest possible density. In 2005, Ben-Haim and S. Litsyn proved that the density of an optimum identifying code in the infinite rectangular grid is $7/20$ [Ben-Haim e Litsyn, 2005].

In this dissertation, we present a bibliographical study showing several existing results and we provide an alternative proof to the density $7/20$ for optimum identifying codes in infinite rectangular grids using the discharging method.

Key-words: Identifying codes. Triangular grids. Square grids. Infinite graphs.

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de grades infinitas.	4
3.1	Um código de identificação periódico de \mathcal{S}_1 de densidade $\frac{1}{2}$	10
3.2	Coluna do tipo 2 adjacente a uma coluna do tipo 1 e a uma outra coluna do tipo 2.	11
3.3	Ilustração da operação de <i>rightshift</i>	11
3.4	Vizinhança \mathcal{N} de uma coluna isolada do tipo 0.	12
3.5	Blocos que particionam $\mathcal{S}_2 \setminus \{\text{todas as cópias de bloco } \mathcal{N}\}$	12
3.6	Código de identificação de densidade $\frac{3}{7}$ obtido por cópias sucessivas de \mathcal{N}	13
5.1	Configuração de $(x, y) \in C'$	21
5.2	Relações impossíveis entre vértices de C'	22
5.3	Exceções de envio de carga	27
5.4	Código com densidade $7/20$	28
5.5	Outro código com densidade $7/20$	28
5.6	Código com densidade $7/20$	28
5.7	Código com densidade $7/20$	29
5.8	Vértice de uma cadeia com dois amigos.	30
5.9	Cadeias em formatos O e T	34
5.10	Cadeia em formato Z	35
5.11	Cadeia em formato L	36
5.12	Cadeia em formato I com 4 amigos, dois deles à distância 2 entre si	37
5.13	Cadeia em formato I com 4 amigos, todos a distância maior que 2 entre si	39
5.14	Amigo isolado não pertencente a C'	42
5.15	Cadeias parceiras.	44
5.16	Cadeia em formato L de tamanho 3 com 3 amigos.	45

5.17	Cadeia de tamanho 3 em formato I com 2 amigos à distância 2.	46
5.18	Cadeia de tamanho 3 em formato I com 3 amigos insatisfeitos, todos à distância maior que 2 e dois deles com uma das coordenadas iguais	47
5.19	Cadeia de tamanho 3 em formato I com 3 amigos insatisfeitos, de modo que não existem dois deles com uma das coordenadas iguais	49
5.20	Vértice $c'_2 \in C'$ com um amigo $c'_3 \in C'$	51
5.21	X' é parceira de X e X_2 com relação a c'_1	54

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	6
2.1	Grafos	6
3	Código de Identificação	8
3.1	r -código de identificação	8
3.2	Limites para grades retangulares com 1 e 2 linhas	9
4	Método da Descarga	14
4.1	Introdução	14
4.2	Notações	14
4.3	Funcionamento do Método da Descarga	15
5	Grades Retangulares	18
5.1	Introdução	18
5.2	Definições, notações e resultados básicos	18
5.3	Regras de descarga	23
5.3.1	Descrição das regras	25
5.4	Exemplos de aplicação das regras em códigos com densidade $7/20$	27
5.5	Propriedades importantes sobre cadeias	29
5.6	Cadeias de tamanho 4, com sobra menor que 4 e com 4 amigos	33
5.6.1	Cadeia X em formato O ou T	34
5.6.2	Cadeia X em formato Z	35
5.6.3	Cadeia X em formato L	36
5.6.4	Cadeia X em formato I com 4 amigos, dois deles à distância 2 entre si	37

5.6.5	Cadeia X em formato I com 4 amigos, todos à distância maior que 2 entre si	39
5.7	Amigo isolado não pertencente a C'	41
5.8	Cadeias X de tamanho 3 com 3 amigos insatisfeitos	43
5.9	Vértices de C' com um amigo em C'	50
5.10	Conclusão	53
6	Conclusão	55
	Referências Bibliográficas	57

Capítulo 1

Introdução

O conceito de código de identificação foi introduzido por M. Karpovsky, K. Chakrabarty and L. B. Levitin em 1998 ([Karpovsky et al., 1998]). Desde então, o estudo sobre esses códigos e suas variantes tem sido desenvolvido. Antoine Lobstein mantém em ([Lobstein]) uma bibliografia com mais de 200 artigos sobre o assunto.

Uma aplicação desse conceito é a de diagnosticar processadores com falha em sistemas multiprocessadores. Modela-se um sistema de multiprocessadores como um grafo $G = (V, E)$, onde os vértices são os processadores e as arestas representam comunicações entre eles. Ou seja, se dois processadores se comunicam, existe uma aresta entre os vértices associados aos processadores.

Podemos ver o código de identificação como os processadores selecionados para reportar falhas dos processadores com os quais ele se comunica e as dele próprio, atuando assim como um supervisor de sua vizinhança fechada no grafo. Um supervisor pode avisar ao controlador geral dos processadores que existe um processador com problema na sua região enviando um bit 0 (caso contrário, envia um bit 1).

Para que um código de identificação C funcione corretamente, precisamos que duas premissas sejam verdadeiras:

- Se todos os processadores de C enviarem bit 1, então não existe nenhum defeituoso,
- Se pelo menos um deles de C enviar bit 0, deveremos ser capazes de identificar qual está com defeito.

Para isso, admitimos que não é possível ocorrer mais de uma falha no mesmo instante de tempo.

Mais formalmente, definimos a seguir o que é um código de identificação. Dado um grafo G e um vértice $u \in V(G)$, seja $N(u)$ o conjunto dos vizinhos de u em G e seja $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

Definição 1.1. *Dado um grafo G , um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um código de identificação se:*

- (i) *para qualquer vértice v , $N[v] \cap C \neq \emptyset$, e*
- (ii) *para quaisquer dois vértices $u \neq v$, $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$.*

Uma observação importante é que, se G possui gêmeos verdadeiros (ou seja, vértices u e v tais que $N[u] = N[v]$), então G não possui código de identificação. Por exemplo, grafos completos não possuem código de identificação. O teorema abaixo mostra que essa condição é suficiente.

Teorema 1.1 ([Stanton, 2011]). *Para qualquer grafo G , os seguintes pontos são equivalentes:*

- (i) *G tem um código de identificação;*
- (ii) *$V(G)$ é um código de identificação; e*
- (iii) *$N[u] \neq N[v]$ para todos $u, v \in C$ distintos.*

É fácil ver que (ii) implica (i) e (iii), pois, se $C = V(G)$ é um código de identificação, então $N[u] \cap C = N[u]$, para todo $u \in V(G)$. Pelo mesmo motivo, (iii) implica (ii). Para ver que (i) implica (ii), note que, se $C \subseteq V(G)$ é um código de identificação, então $C \cup \{u\}$ também é um código de identificação para qualquer $u \in V(G)$.

Em seguida, apresentamos um limite inferior para o tamanho de um código para qualquer grafo que admita um código de identificação.

Teorema 1.2 ([Karpovsky et al., 1998]). *Se C é um código de identificação de um grafo G , então*

$$|C| \geq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil.$$

Demonstração. Note que o número de subconjuntos de C diferentes de vazio é $2^{|C|} - 1$. Como cada vértice de G precisa ser identificado por um subconjunto não vazio de C , temos que $2^{|C|} - 1 \geq |V(G)|$. \square

Em 2007, provou-se um limite superior geral para o tamanho de um código de identificação mínimo em um grafo conexo.

Teorema 1.3 ([Charon et al.,2007]). *Se G é um grafo conexo com n vértices que admite um código de identificação, então G admite um código de identificação de tamanho $n - 1$.*

Existem grafos conexos que requerem $n - 1$ vértices para o código, por exemplo, os grafos estrela, que são grafos com conjunto de vértices $\{u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $\{uv_1, uv_2, \dots, uv_{n-1}\}$. Não é difícil checar que qualquer código de identificação nesse tipo de grafo requer pelo menos $n - 1$ vértices. Em 2011, todos os grafos cujo código mínimo tem tamanho $n - 1$ foram caracterizados em [Foucaud et al.,2011].

Alguns tipos de grafos infinitos são de particular interesse dos pesquisadores de códigos de identificação, especialmente a grade retangular (denotada por \mathcal{G}_S), a grade triangular (denotada por \mathcal{G}_T), a grade hexagonal (denotada por \mathcal{G}_H) e a grade *king* (denotada por \mathcal{G}_K). O conjunto de vértices desses grafos infinitos é o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o conjunto de arestas é definido como (ver exemplos na Figura 1.1):

- $E(\mathcal{G}_S) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}\}$
- $E(\mathcal{G}_H) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, (-1)^{i+j+1}), (\pm 1, 0)\}, \text{ onde } (i, j) = u\}$
- $E(\mathcal{G}_T) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, 1), (-1, -1)\}\}$
- $E(\mathcal{G}_K) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, -1)\}\}$

A grade *king* é a única dessas grades que não é planar. Essa grade representa o grafo onde os vértices são os quadrados em um tabuleiro de xadrez infinito e as arestas representam os movimentos que o rei pode fazer nesse tabuleiro.

Como todos esses grafos são infinitos, qualquer código de identificação relacionado a eles é infinito. O problema de otimização associado ao código de identificação de um grafo G é encontrar então o código de identificação C de G com menor densidade. A densidade de um código de identificação C em um grafo finito G é $|C|/|V(G)|$. Abaixo apresentamos a definição de densidade de um código de identificação para grafos com conjunto de vértices $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como as grades definidas acima, de acordo com [Charon et al.,2004].

Definição 1.2. *Dados um grafo G tal que $V(G) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e um inteiro $m \geq 0$. Seja $Q_m = [-m, m] \times [-m, m]$ e seja $Q_{m,G}$ o conjunto de vértices (x, y) tais que $|x| \leq m$ e*

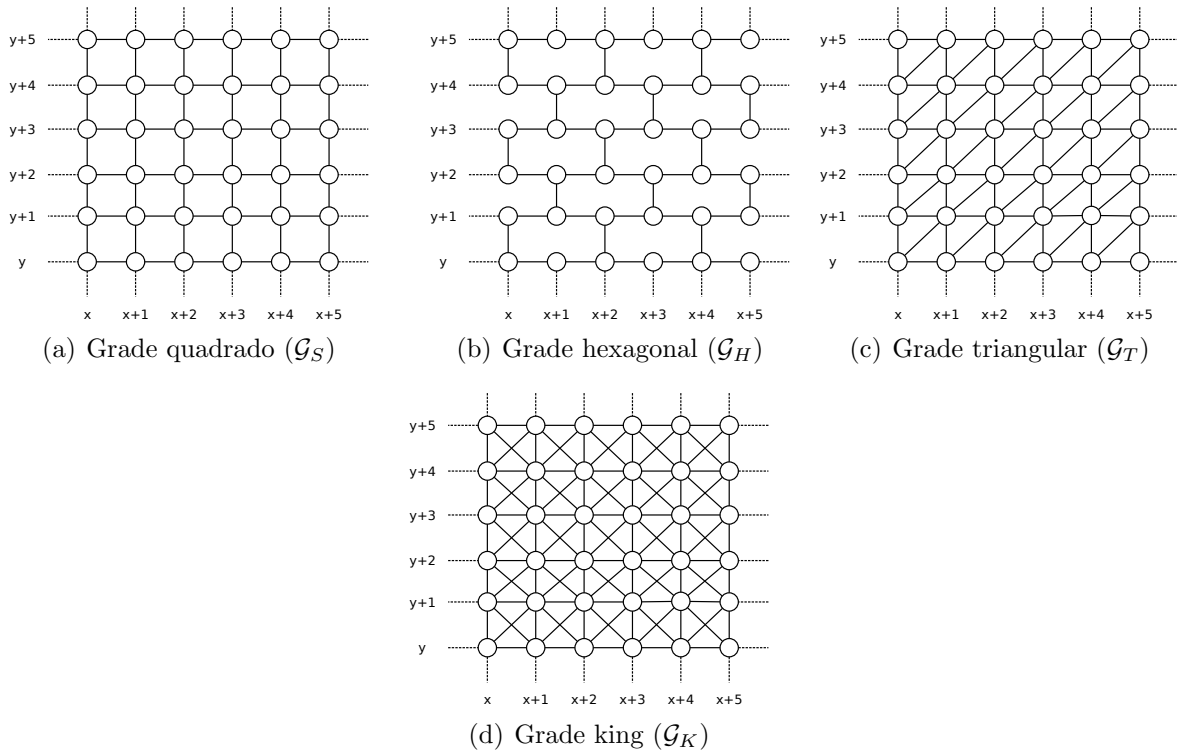


Figura 1.1: Exemplos de grades infinitas.

$|y| \leq m$ (ou seja, $Q_{m,G} = Q_m \cap V(G)$). Se $V(G) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então $Q_{m,G} = Q_m$. Dado um código de identificação C de G , a densidade de C é definida como:

$$d(C, G) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{|C \cap Q_{m,G}|}{|Q_{m,G}|}.$$

Seja $d^*(G)$ a densidade mínima entre os códigos de identificação de G .

Em 1998, Karpovsky et al. provaram que $d^*(\mathcal{G}_T) = 1/4$, $d^*(\mathcal{G}_S) \geq 1/3$, $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 2/5$ e que $d^*(\mathcal{G}_K) \geq 1/5$. Contudo, apenas o limite da grade triangular é atingível. Em [Karpovsky et al., 1998], um código de densidade $1/4$ foi construído, mostrando que esse limite é apertado.

A densidade mínima da grade retangular foi muito estudada. Limites para a densidade nessa grade foram obtidos em [Cohen et al.,1999], [Gravier et al.,1999] e em [Karpovsky et al., 1998]. Em 2005, Ben-Haim et al. provaram que $d^*(\mathcal{G}_S) = 7/20$ [Ben-Haim e Litsyn, 2005].

Com relação à grade *king*, foi mostrado por [Cohen et al.,2001] que $d^*(\mathcal{G}_K) \geq 2/9$ e, em [Charon et al.,2001], foi mostrado que esse limite é apertado. Ou seja, $d^*(\mathcal{G}_K) = 2/9$.

De todas essas grades principais, apenas a densidade $d^*(\mathcal{G}_H)$ da grade hexagonal

permanece em aberto. Em 2000, duas construções de densidade $3/7$ foram obtidas [Cohen et al.,2000] e foi provado que $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 16/39$. Em 2009, provou-se que $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 12/29$ em [Cranston et al.,2009]. Em 2013, provou-se usando o método da descarga [Cukierman et al.,2013] que $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 5/12$ e obteve-se pelo menos três outros códigos de identificação com densidade $3/7$ para \mathcal{G}_H , os quais são diferentes dos códigos dados em [Cohen et al.,2000]. Conjectura-se que $d^*(\mathcal{G}_H) = 3/7$.

Nesse trabalho, fornecemos no Capítulo 5 uma prova alternativa, utilizando o método da descarga, para o resultado $d^*(\mathcal{G}_S) = 7/20$ de Ben-Haim et al. [Ben-Haim e Litsyn, 2005]. No Capítulo 4, serão dadas maiores informações, definições e exemplos sobre o método da descarga. No Capítulo 2, apresentamos algumas definições e notações que serão usadas em todo o texto. No Capítulo 3, apresentamos alguns resultados recentes sobre códigos de identificação em grades retangulares com uma e duas linhas.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Grafos

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ composto de um conjunto, não vazio, $V(G)$ de vértices e um conjunto $E(G)$ de arestas. Cada aresta é um par não ordenado de vértices de G . Se o par (u, v) está em $E(G)$, escreve-se $uv \in E(G)$ e se diz que u e v são *extremidades* da aresta uv .

A denominação grafo vem do fato deste poder ser representado graficamente, os vértices como pontos e as arestas como linhas conectando suas extremidades. Dizemos que dois vértices são *adjacentes* quando eles são extremidades de uma mesma aresta. De maneira análoga, duas arestas são *adjacentes* se compartilham uma extremidade.

Um grafo G é *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são finitos. Caso contrário, dizemos que G é *infinito*. Um grafo G é dito *simples* se não possui laços e não possui arestas múltiplas. Bondy e Murty [Bondy and Murty,2008] definem *laço* como uma aresta cujas extremidades são idênticas. Esses autores também definem *arestas múltiplas* como um conjunto de duas ou mais arestas que possuem o mesmo par de extremidades. A partir de agora, toda vez que mencionarmos grafo, estaremos nos referindo a um grafo simples, a não ser que seja dito o contrário.

O *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (V, E')$ tal que $uv \in E'$ se e somente se $uv \notin E$. Chamamos de *grafo completo*, o grafo que possui uma aresta entre qualquer par de vértices distintos. O grafo completo com n vértices é indicado por K_n . O grafo que não possui nenhuma aresta é chamado de *grafo vazio*.

A *vizinhança* de um vértice u é o conjunto de vértices adjacentes a u , denotada por $N(u)$. A *vizinhança fechada* de um vértice u é indicado por $N[u]$, onde $N[u] = N(u) \cup u$. O *grau* de um vértice v em G é o número de arestas incidentes em v e é denotado por $d_G(v)$. Se não houver ambiguidade, denota-se apenas por $d(v)$. O *grau máximo* de um grafo G é o

maior grau de um vértice de G e é indicado por $\Delta(G)$.

Seja um grafo $G = (V, E)$. O grafo $H = (V', E')$ é dito um *subgrafo* de G se $V' \subseteq V$ e se $E' \subseteq E$. Seja um grafo $G = (V, E)$ e $V' \subseteq V$. Seja B o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' , e o conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem ambas as extremidades em V' . Dizemos que B é *subgrafo de G induzido por V'* . O grafo B é denotado por $G[V']$. Dizemos também que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G .

Bondy e Murty [Bondy and Murty,2008] definem *caminho* como um grafo simples cujos vértices podem ser organizados em uma sequência linear de maneira que dois vértices são adjacentes se eles forem consecutivos na sequência, e são não adjacentes caso contrário. O primeiro e o último vértice da sequência são chamados de *extremidades* do caminho.

Um caminho com n vértices é indicado por P_n e o *comprimento* de um caminho é o número de arestas que este possui. A *distância* entre dois vértices u e v em um grafo G é o comprimento do menor caminho que possui extremidades u e v em G . Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .

Capítulo 3

Código de Identificação

O objetivo desse capítulo é apresentar o conceito de código de identificação, visto no Capítulo 1, de modo mais geral. Além disso, destacaremos alguns limites relacionados a esta generalização. Por fim, mostramos alguns resultados de [Daniel et al., 2004] sobre grades retangulares com 1 e 2 linhas.

3.1 r -código de identificação

Seja G um grafo e seja $u \in V(G)$. Dado um inteiro $r \geq 1$, seja $N_{\leq r}(u)$ o conjunto dos vértices de G que estão a distância no máximo r de u . Por exemplo, $N_{\leq 1}(u) = N[u]$.

Definição 3.1. *Dado um grafo G e um inteiro $r \geq 1$, um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um r -código de identificação se:*

- (i) *para todo $v \in V(G)$, $N_{\leq r}[v] \cap C \neq \emptyset$, e*
- (ii) *para todo $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $N_{\leq r}[u] \cap C \neq N_{\leq r}[v] \cap C$.*

Seja $d_r^*(G)$ a densidade mínima entre os r -códigos de identificação de G . Claramente, um 1-código de identificação é um código de identificação e portanto $d_1^*(G) = d^*(G)$.

Em 2005, provou-se, de grosso modo, que para qualquer k , existem grafos que admitem um r -código de identificação de tamanho k [Charon et al., 2005].

Teorema 3.1 ([Charon et al., 2005]). *Para todo inteiro $r \geq 1$ e inteiro n suficientemente grande com relação a r , temos que para todo inteiro k no intervalo $[\lceil \log_2(n+1) \rceil, n-1]$, existe um grafo G com um r -código de identificação de tamanho k .*

O teorema abaixo fornece um limitante inferior para a densidade de r -códigos de identificação.

Teorema 3.2 ([Karpovsky et al., 1998]). *Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, temos que*

$$d_r^*(G) \geq \frac{2}{|N_{\leq r}(v)| + 1}.$$

Em particular, temos que $d_1^*(G) \geq 2/(\Delta(G) + 2)$. Se G é d -regular, então a densidade de um código de identificação deve ser $d^*(G) = d_1^*(G) \geq 2/(d + 2)$.

Com isso, aplicando o Teorema 3.2 aos grades definidos no Capítulo 1, temos que:

$$\begin{aligned} d^*(\mathcal{G}_T) &\geq \frac{1}{4}; & d^*(\mathcal{G}_S) &\geq \frac{1}{3} \\ d^*(\mathcal{G}_H) &\geq \frac{2}{5}; & d^*(\mathcal{G}_K) &\geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Relembre do Capítulo 1 que $d^*(\mathcal{G}_T) = 1/4$, $d^*(\mathcal{G}_S) = 7/20$, $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 5/12$ (conjectura-se que $d^*(\mathcal{G}_H) = 3/7$) e que $d^*(\mathcal{G}_K) = 2/9$. De forma mais geral, foi mostrado em 2004 que $d_r^*(\mathcal{G}_K) = 1/4r$ para todo $r \geq 2$ [Charon et al., 2004].

3.2 Limites para grades retangulares com 1 e 2 linhas

Nessa seção, apresentamos alguns resultados de [Daniel et al., 2004] sobre grades retangulares infinitas com 1 e 2 linhas.

O *caminho infinito em ambas as direções*, denotado por $P_{\mathbb{Z}}$, é o grafo infinito com o conjunto de vértices \mathbb{Z} e conjunto de arestas $\{\{i, i + 1\} : i \in \mathbb{Z}\}$. O *caminho infinito em uma direção*, indicado por $P_{\mathbb{N}}$, é o subgrafo infinito de $P_{\mathbb{Z}}$ induzido por \mathbb{N} .

O *produto cartesiano* de dois grafos G e H , indicado por $G \square H$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ tal que $\{(a, x), (b, y)\}$ é uma aresta se e só se $(a = b \in V(H) \text{ e } xy \in E(H))$ ou $(x = y \in V(G) \text{ e } ab \in E(G))$. Por exemplo, a grade retangular \mathcal{G}_S é o produto cartesiano $P_{\mathbb{Z}} \square P_{\mathbb{Z}}$.

Dado um inteiro $k \geq 1$, seja \mathcal{S}_k o grafo com conjunto de vértices $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, k\}$ obtido do produto cartesiano de $P_{\mathbb{Z}} \square P_k$. Denotamos por \mathcal{S}_k^+ o subgrafo de \mathcal{S}_k induzido pelo conjunto de vértices $\mathbb{N} \times \{1, \dots, k\}$ (ou seja, é o grafo obtido do produto cartesiano de $P_{\mathbb{N}} \square P_k$).

Dados vértices $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ de \mathcal{S}_k , se $a < c$ dizemos que u está à *esquerda* de v e que v está à *direita* de u . Dizemos ainda que o vértice $(a + 1, b)$ está *imediatamente à direita* do vértice (a, b) e que ambos são *adjacentes*. Análogo para *imediatamente à esquerda*. Dado $i \in \mathbb{Z}$, a *coluna i* de \mathcal{S}_k é definida como o conjunto dos vértices $\{(i, 1), \dots, (i, k)\}$ de \mathcal{S}_k . A

definição de coluna *à esquerda*, *à direita*, *imediatamente à esquerda*, *imediatamente à direita* e colunas *adjacentes* são análogas. A *primeira coluna* de \mathcal{S}_k^+ é a coluna $\{(0, 1), \dots, (0, k)\}$. Para qualquer intervalo $[a, b]$ de \mathbb{Z} , dizemos que as colunas de a a b são *consecutivas*.

Em ([Daniel et al., 2004]), foi provado que $d^*(\mathcal{S}_k^+) = d^*(\mathcal{S}_k)$, para $k \geq 1$. Provaram também o seguinte resultado.

Lema 3.1 ([Daniel et al., 2004]). *Temos que $d^*(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2}$.*

Prova. Seja C um código de identificação de \mathcal{S}_1 . Para qualquer conjunto $X = \{u, v, w, t\}$ de quatro vértices consecutivos em \mathcal{S}_1 , temos que $|C \cap X| \geq 2$. De fato, se $|C \cap X| = 1$, então ou v e w têm o mesmo conjunto de identificação, ou um deles não é identificado pelo código. Se $|C \cap X| = 0$, ambos v e w não são identificados. Portanto, $d^*(\mathcal{S}_1) \geq \frac{1}{2}$. Na Figura 3.1, mostramos um código de identificação de \mathcal{S}_1 com densidade $\frac{1}{2}$, o que conclui a prova. \square

Lema 3.2 ([Daniel et al., 2004]). *Temos que $d^*(\mathcal{S}_2) = \frac{3}{7}$.*

Prova. Seja C um código de identificação ótimo de \mathcal{S}_2 . Primeiramente, iremos assumir que a densidade de C é $< \frac{1}{2}$, como o código da Figura 3.6. Dizemos que uma coluna Z de \mathcal{S}_2 é do tipo k se $|C \cap Z| = k$, para $k = 0, 1, 2$. Uma coluna do tipo 0 é dita *isolada* se ela não é adjacente a nenhuma coluna do tipo 2.

Assumimos que:

Propriedade 3.1. *Não existem três colunas consecutivas do tipo 2 em \mathcal{S}_2 .*

Assumindo o contrário e considerando uma coluna i do tipo 2 adjacente a duas outras colunas do tipo 2, podemos então remover o vértice $(i, 0)$ de C obtendo assim um outro código de identificação de \mathcal{S}_2 . Repetindo esse processo, obtemos um outro código de identificação com densidade menor ou igual a $d(C, \mathcal{S}_2)$.

Propriedade 3.2. *Não existe coluna do tipo 2 adjacente a uma coluna do tipo 1 e a uma outra coluna do tipo 2.*

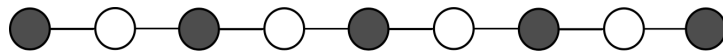


Figura 3.1: Um código de identificação periódico de \mathcal{S}_1 de densidade $\frac{1}{2}$.

Novamente, assumo o contrário. Seja $\{u, v\}$ uma coluna do tipo 2 adjacente a uma outra coluna $\{x, y\}$ do tipo 2, e a uma coluna $\{z, a\}$ do tipo 1, como na Figura 3.2. Sem

perda de generalidade, assumimos que $a \notin C$ e que a está à esquerda de v . Afirmamos que dependendo da outra coluna adjacente a $\{z, a\}$, podemos ou remover o vértice v ou movê-lo para obter um outro código de identificação. De fato, seja $\{b, c\}$ a coluna imediatamente à esquerda da coluna $\{z, a\}$ e considere que b e z são adjacentes. Se $b \in C$, então $C \setminus \{v\}$ é um código de identificação. Caso contrário, temos que $C \setminus \{v\} \cup \{a\}$ é um código de identificação de \mathcal{S}_2 . Fazendo isso, não adicionamos nenhuma nova coluna do tipo 2 que seja adjacente a uma outra coluna do tipo 2 e a uma coluna do tipo 1. Repetindo esse processo para todas as colunas desse tipo, obtemos um outro código de identificação com densidade menor ou igual a $d(C, \mathcal{S}_2)$.

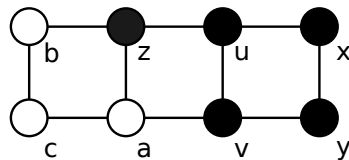


Figura 3.2: Coluna do tipo 2 adjacente a uma coluna do tipo 1 e a uma outra coluna do tipo 2.

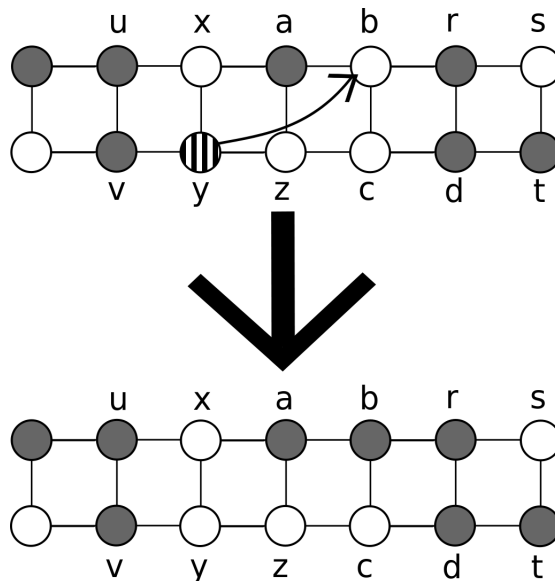


Figura 3.3: Ilustração da operação de *rightshift*.

Propriedade 3.3. *Cada coluna do tipo 2 é adjacente a uma coluna do tipo 0.*

Por conta das propriedades anteriores, o único caso a se estudar é o caso onde temos uma coluna $\{u, v\}$ do tipo 2 adjacente a duas colunas do tipo 1. Seja $\{x, y\}$ a coluna adjacente a $\{u, v\}$ tal que $y \in C$ e y e v são adjacentes. Nós usaremos uma operação chamada de

rightshift, que consiste em remover y de C e eventualmente adicionar um novo vértice à C que esteja à direita de y (ver exemplo na Figura 3.3). Esse processo transforma a coluna $\{x, y\}$ em uma coluna do tipo 0 adjacente à coluna $\{u, v\}$.

Vamos chamar a, z, b, c, r, d, s, t os vértices de quatro colunas consecutivas vizinhas à coluna $\{x, y\}$ como na Figura 3.3. Se $C \setminus \{y\}$ é um código de \mathcal{S}_2 , então podemos remover y de C e estamos feitos. Caso contrário, afirmamos que ou $C \setminus \{y\} \cup \{z\}$ ou $C \setminus \{y\} \cup \{b\}$ é um código de identificação de \mathcal{S}_2 . De fato, se nem $C \setminus \{y\}$ nem $C \setminus \{y\} \cup \{z\}$ são códigos de identificação de \mathcal{S}_2 , significa que y é necessário para identificar z de um dos vértices a ou c . Nesse caso, substituir y por b identifica z e conduz a um código de identificação de \mathcal{S}_2 . Isso ocorre pelo fato de que com a inclusão de b em C , tanto o vértice a quanto o vértice c passam a ser identificados também pelo vértice b que não é adjacente a z . Assim, temos que os conjuntos identificadores de z, a e c são necessariamente diferentes.

Desejamos repetir esse processo para qualquer coluna do tipo 2 que seja adjacente a duas colunas do tipo 1, para obter um código que satisfaça a nossa propriedade. Entretanto, esse processo pode criar novas colunas do tipo 2 adjacente a duas colunas do tipo 1 (veja por exemplo a Figura 3.3). De acordo com [Daniel et al., 2004], esse processo é reaplicado somente um número finito de vezes.

Em [Daniel et al., 2004], prova-se que esse processo cria uma nova coluna do tipo 2 adjacente a duas colunas do tipo 1 apenas na situação descrita pela Figura 3.3, onde substituí-se y por b para identificar z de a (de fato, substituindo y por b não pode-se criar tal coluna, e se deseja-se identificar z de c então significa que $d \notin C$). Nesse caso, $\{r, d\}$ se torna uma nova coluna do tipo 2 adjacente por duas colunas do tipo 1.

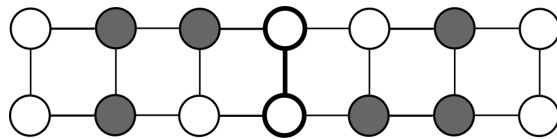


Figura 3.4: Vizinhança \mathcal{N} de uma coluna isolada do tipo 0.

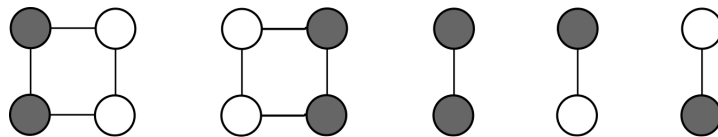


Figura 3.5: Blocos que particionam $\mathcal{S}_2 \setminus \{\text{todas as cópias de bloco } \mathcal{N}\}$.

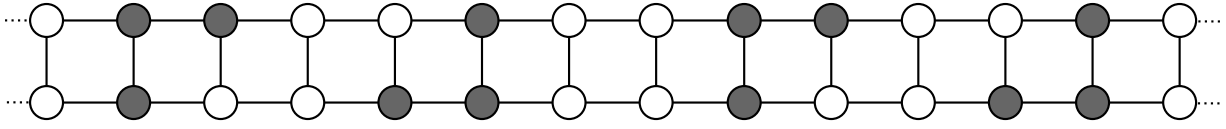


Figura 3.6: Código de identificação de densidade $\frac{3}{7}$ obtido por cópias sucessivas de \mathcal{N} .

Se não pararmos de reaplicar esse processo, isso significa que existe uma sucessão de um número infinito de tais “blocos” u, v, x, y, a, z, b, c . Como a densidade de cada bloco é $\geq \frac{1}{2}$, então obtemos um subgrafo induzido \mathcal{S}_2^+ de \mathcal{S}_2 tal que $C \cap \mathcal{S}_2^+$ tem densidade $\geq \frac{1}{2}$. Isso gera uma contradição, pois assumimos que C tem densidade $< \frac{1}{2}$. Isso significa que o complementar de \mathcal{S}_2^+ tem uma densidade $d < d(C, \mathcal{S}_2) = d^*(\mathcal{S}_2)$, o que é contradito pelo fato de $d^*(\mathcal{S}_2) = d^*(\mathcal{S}_2^+)$.

Portanto, a vizinhança \mathcal{N} de uma coluna isolada do tipo 0 é necessariamente como descrita na Figura 3.4 (por simetria). Isso pode ser obtido, segundo ([Daniel et al., 2004]), de um estudo dos casos onde primeira e última colunas são obtidas pela Propriedade 3.3.

Propriedade 3.4. *Não existe coluna do tipo 2 adjacente a duas colunas do tipo 0.*

De fato, caso contrário, os dois vértices u, v de tal coluna teriam o mesmo conjunto de identificação $\{u, v\}$.

Pela Propriedade 3.4, nós sabemos que podemos particionar \mathcal{S}_2 em blocos \mathcal{N} e qualquer outros blocos como ilustrado na Figura 3.5. Como $d(C, \mathcal{N}) = \frac{3}{7}$ e $d(C, B) \geq \frac{1}{2}$ para qualquer bloco B como descrito na Figura 3.5, temos que $d(C, \mathcal{S}_2) \geq \frac{3}{7}$. Concluindo, damos um código de identificação de \mathcal{S}_2 de densidade $\frac{3}{7}$ na Figura 3.6.

□

Capítulo 4

Método da Descarga

4.1 Introdução

Em 1852, enquanto coloria um mapa da Inglaterra, Francis Guthrie se perguntou se seria possível colorir um mapa com não mais do que 4 cores, onde duas regiões vizinhas recebam cores diferentes. Esse é o problema das 4 cores, muito conhecido em combinatória. A primeira referência impressa sobre esse problema foi publicada em 1878 no periódico *Proceedings of the London Mathematical Society*. Essa publicação iniciou uma febre sobre esse problema, com um grande número de variações, conjecturas e falsas demonstrações.

O Problema das 4 cores é responsável por muito do que se conhece hoje em Teoria dos Grafos. A tentativa de resolvê-lo possibilitou o desenvolvimento de vários ramos da Teoria dos Grafos. Entre as ferramentas que foram desenvolvidas para tentar resolver o problema, se encontra o Método da descarga, como podemos ver em ([Appel e Haken, 1976]).

Nos últimos anos, esse método foi utilizado para resolver dezenas de outros problemas. No entanto, existem vários outros problemas em aberto para os quais a aplicação dessa ferramenta aparenta ser bastante promissora. Nesse capítulo, definiremos notações utilizadas pela ferramenta, estudaremos o funcionamento da mesma e alguns exemplos demonstrando a sua aplicação.

4.2 Notações

Nessa seção, utilizaremos as notações e definições estabelecidas por Mohammad Salavatipour em ([Salavatipour, 2003]).

Se o grau de um vértice v for igual a i , pelo menos i ou no máximo i , v é um i -vértice, $\geq i$ -vértice ou um $\leq i$ -vértice, respectivamente.

Um grafo G é *imerso* (*embedded*) em uma superfície W se seus vértices podem ser mapeados em pontos distintos de W e as arestas podem ser mapeadas em curvas simples ligando os pontos associados aos vértices de suas extremidades. Além disso, as curvas associadas a qualquer par de arestas não podem compartilhar nenhum ponto em W , exceto por um ponto associado a um vértice comum dessas arestas.

Uma *face* de uma imersão (*embedding*) de G em uma superfície W é um conjunto aberto obtido da remoção dos pontos dessa imersão. Um grafo G é *planar* se ele tem uma imersão em uma esfera. Como um plano é topologicamente equivalente a uma esfera menos um ponto chamado de *pólo*, todo grafo planar é também imersível (*embeddable*) em um plano e a face contendo o pólo é chamada de *face externa*.

Para uma imersão de um grafo planar G , o conjunto de faces de G é denotado por $F(G)$ ou, quando não houver ambiguidade, F . Dizemos que os vértices de uma face f se referem aos vértices que estão na borda da face f . Para toda face f , o *tamanho* ou *comprimento* de f , denotado por $|f|$, é o número de arestas em f , com as pontes contadas duas vezes. *Ponte* é uma aresta cuja remoção aumenta em uma unidade o número de componentes conexas do grafo.

Uma face é chamada *i-face*, $\leq i$ -face ou $\geq i$ -face, se o tamanho de f é i , no máximo i ou pelo menos i , respectivamente. Um grafo planar G é chamado uma *triangularização* se toda face de G tem tamanho 3. A clássica fórmula de Euler geralmente desenvolve um papel importante na prova de problemas em grafos planares que usam o Método da Descarga.

Fórmula de Euler [Bondy and Murty, 2008]: Para todo grafo planar G finito conexo com conjunto de vértices V , conjunto de arestas E e conjunto de faces F , temos que

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

4.3 Funcionamento do Método da Descarga

Seja Π a classe dos grafos planares e suponha que queremos provar que todo grafo de Π tem uma propriedade específica P . Vamos tomar um grafo arbitrário $G \in \Pi$ e atribuir algumas cargas aos elementos de G , por exemplo, aos vértices, arestas ou faces. Usando a fórmula de Euler, mostramos que a carga total é um valor constante para as cargas inicialmente atribuídas aos elementos de G , independente de G . Então, distribuimos as

cargas de acordo com algum conjunto de regras de *descarregamento* que nós definimos, enquanto preservamos a carga total. Após essa fase de descarregamento, mostramos que ou a carga total está diferente (o que é impossível) ou G tem alguma estrutura específica que implica a propriedade P .

Geralmente provamos que estruturas específicas implicam uma propriedade P antes de aplicar o Método da Descarga. O caminho mais comum para fazer isso é começar a prova por contradição, e assumindo que existem grafos em Π que não satisfazem a propriedade P . Dentre todos esses grafos, consideramos um, que chamamos de G_0 , o qual tem o menor tamanho. Então, baseado que assumimos que G_0 é um contra-exemplo mínimo, provamos que certas estruturas de vértices, arestas ou faces não podem existir em G_0 . Essas estruturas são chamadas de *configurações redutíveis*. Uma vez que o conjunto de configurações redutíveis foi definido, mostramos que elas são *inevitáveis*. Ou seja, mostramos que qualquer grafo em Π deve ter pelo menos uma delas. Isso mostra que não existe um contra-exemplo mínimo, ou seja, todo grafo em Π tem a propriedade P .

Para fazer o segundo passo, mostrar a inevitabilidade das configurações redutíveis, utilizamos o Método da Descarga. Isso é, tomamos um grafo arbitrário $G \in \Pi$ e aplicamos as cargas iniciais. Usando a fórmula de Euler, mostramos que a carga total é, por exemplo, alguma constante negativa que depende apenas das cargas iniciais aplicadas. Então, aplicamos as regras de descarregamento e mostramos que ou todo elemento de G tem uma carga não-negativa, portanto, a carga total seria não-negativa, ou G deve ter alguma das configurações redutíveis. A carga total deve permanecer negativa já que as regras do descarregamento preservam a carga total. Portanto, existem alguns elementos com carga negativa em G .

Algumas vezes, não usamos nenhuma configuração redutível nas provas envolvendo Método da Descarga. Somente pela aplicação de um conjunto inicial de cargas e de regras de descarregamento, podemos chegar à conclusão desejada. No entanto, na maioria das aplicações do referido método, antes de aplicar as cargas iniciais e as regras de descarregamento, chegamos a um conjunto adequado de configurações redutíveis. Por essa razão, é comum se referenciar a ambos os passos gerais, o processo de encontrar um conjunto de configurações redutíveis e de provar a inevitabilidade das mesmas, como Método da Descarga.

Vamos agora demonstrar o uso dessa técnica através de alguns exemplos. O primeiro exemplo é um fato bem conhecido e que não requer o uso da técnica, que será utilizada

apenas para fins ilustrativos.

Exemplo 4.1 ([Salavatipour, 2003]). *Todo grafo planar simples $G = (V, E)$ tem um vértice de grau no máximo 5.*

Prova. Seja F o conjunto de faces de G . Para todo vértice $v \in V$ com grau $d(v)$, atribuímos $d(v) - 6$ unidades de carga e para cada face $f \in F$ com tamanho $|f|$, atribuímos $2|f| - 6$ unidades de carga. Notando que $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} |f|$, a carga total é : $\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2|f| - 6) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = 6(|E| - |V| - |F|) = -12$. Como o grafo é simples, toda face tem tamanho pelo menos 3. Portanto, deve existir um vértice com carga negativa. Logo, para algum vértice $v : d(v) - 6 < 0$. Então $d(v) \leq 5$, como queríamos. \square

O exemplo acima é bastante simples. O próximo exemplo é um pouco menos simples e contém deslocamento de cargas, ou seja, a fase de descarregamento.

Exemplo 4.2 ([Salavatipour, 2003]). *Em todo grafo planar simples $G = (V, E)$ com grau mínimo pelo menos três, existe um vértice de grau d incidente a uma face de tamanho l tal que $d + l \leq 8$.*

Prova. Chamamos uma incidência de face-vértice de *canto* (*corner*). Para todo vértice $v \in V$ com grau $d(v)$, atribuímos uma carga de $d(v) - 4$, e para cada face $f \in F$ de tamanho $|f|$, atribuímos uma carga de $|f| - 4$. Novamente, usando a fórmula de Euler, a carga total é : $\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (|f| - 4) = 2|E| - 4|V| + 2|E| - 4|F| = 4(|E| - |V| - |F|) = -8$. Na fase de descarregamento, cada vértice v envia $\frac{d(v)-4}{d(v)}$ unidades de carga para cada canto que ele participa. Similarmente, cada face f envia $\frac{|f|-4}{|f|}$ unidades de carga para cada canto que pertence a ela. Portanto, depois da fase de descarregamento, todos os vértices e faces tem carga 0. Como a carga total era negativa, então existe um canto com carga negativa. Assuma que esse canto é formado pela incidência de um vértice v de grau $d(v) = d$ e a face f com $|f| = l$. A carga do canto é $\frac{d(v)-4}{d(v)} + \frac{l-4}{l} < 0$. Portanto, $2ld - 4l - 4d < 0$. Esse fato, junto com o fato de que assumimos que o grau mínimo é pelo menos 3, e que cada face tem o tamanho pelo menos 3, implica que :

$$d < \frac{2l}{l-2} \leq 6 \text{ e } l < \frac{2d}{d-2} \leq 6.$$

Adicionando l em ambos os lados da primeira inequação, temos $d + l < \frac{l^2}{l-2}$, o que é no máximo 8 para $3 \leq l < 6$.

\square

Capítulo 5

Grades Retangulares

5.1 Introdução

Para simplificar a escrita desse capítulo, chamaremos a grade retangular \mathcal{G}_S apenas de grade. Fixe um código de identificação C da grade, que será referenciado em todo o capítulo. Nosso objetivo nesse capítulo será provar que a densidade de C é pelo menos $7/20$ usando o Método da Descarga. Este resultado é uma prova alternativa à demonstração de Ben-Haim e Litsyn em ([Ben-Haim e Litsyn, 2005]).

Inicialmente, apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos que iremos utilizar no decorrer do capítulo. Em seguida, apresentaremos as regras de descarga que iremos utilizar durante a prova, assim como alguns exemplos de aplicação dessas regras. Por fim, apresentaremos o estudo de casos que conclui a nossa prova.

5.2 Definições, notações e resultados básicos

Dado um vértice v da grade, seja $I(v) = N[v] \cap C$ o *conjunto de identificação* (ou *código de identificação*) de v . Se $u \in I(v)$, dizemos que u *identifica* v (e que v é *identificado* por u). A definição abaixo será bastante utilizada. Seja U o conjunto dos vértices da grade que não estão em C .

Definição 5.1. Para $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sejam

$$U_k = \{v \in U : I(v) \text{ possui exatamente } k \text{ vértices de } C\}$$

e

$$C_k = \{v \in C : I(v) \text{ possui exatamente } k \text{ vértices de } C\}.$$

Por fim, definimos para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$U_{\geq i} = \bigcup_{j=i}^5 U_j$$

Analogamente, temos $U_{\leq i}, C_{\geq i}$ e $C_{\leq i}$. Note que $U_5 = \emptyset$ e que $U_{\geq 1} = U_{\leq 4} = U$ e $C_{\geq 1} = C_{\leq 5} = C$.

Como já mencionado, desejamos provar, usando o método da descarga, que $d(C, \mathcal{G}_S) \geq 7/20$ (ou seja, que a densidade do código C de identificação da grade é pelo menos $7/20$).

Inicialmente, daremos carga 20 para cada vértice de C . Definimos $carga(v)$ a carga de um vértice v e $sobra(v) = carga(v) - 7$. Diremos que um vértice v está *satisfeito* se a $carga(v) \geq 7$ (ou que $sobra(v) \geq 0$). Estendemos essas definições também para conjuntos de vértices. Seja X um conjunto de vértices da grade. Então:

$$carga(X) = \sum_{v \in X} carga(v)$$

$$sobra(X) = \sum_{v \in X} sobra(v)$$

O lema auxiliar a seguir é sobre vértices de C que são vizinhos de vértices de U_1 (às vezes chamamos dois vértices adjacentes de *vizinhos*).

Lema 5.1. *Um vértice $c \in C$ tem no máximo um vizinho em U_1 . Se $c \in C$ tem um vizinho de U_1 , então c também é vizinho de um vértice $c_2 \in C$ e existe um vértice $c_3 \in C - \{c, c_2\}$ vizinho de c ou c_2 .*

Demonstração. Seja $c \in C$, $u_1, u_2 \in U_1$ e suponha que c é vizinho de u_1 . Suponha, por contradição, que c também é vizinho de u_2 . Com isso, $c \in I(u_1)$ e $c \in I(u_2)$. Como $u_1, u_2 \in U_1$, então $|I(u_1)| = |I(u_2)| = 1$. Logo $I(u_1) = I(u_2) = \{c\}$, uma contradição. Logo u_1 é o único vértice de U_1 que é vizinho de c . Além disso, temos que $c \in I(c) \neq I(u_1) = \{c\}$. Portanto, $|I(c)| > 1$ e c deve ser vizinho de um vértice $c_2 \in C$. Além disso, note que $\{c, c_2\} \subseteq I(c)$ e $\{c, c_2\} \subseteq I(c_2)$. Portanto, $|I(c)| \geq 3$ ou $|I(c_2)| \geq 3$, o que implica a existência de um vértice $c_3 \in C - \{c, c_2\}$ vizinho de c ou c_2 . \square

Na próxima seção, veremos que a primeira regra de descarga (que será chamada Regra 1) irá satisfazer os vértices que não estão no código de identificação. Cada vértice $v \in U_k$, receberá de cada vizinho em C a carga $7/k$, ficando satisfeito. Vamos analisar quais vértices de C não ficam satisfeitos após a Regra 1. De acordo com o lema anterior, temos a seguinte

U_1	U_2	U_3	U_4	$sobra(c)$ após a Regra 1
1	2	0	0	-1
1	1	1	0	1/6
1	1	0	1	3/4
1	0	2	0	4/3
1	1	0	0	2.5
1	0	≤ 1	≤ 1	$\geq 23/12$
0	4	0	0	-1
0	3	1	0	1/6
0	3	0	1	3/4
0	2	$0 \leq i \leq 2$	$0 \leq j \leq 2 - i$	$\geq 4/3$
0	1	$0 \leq i \leq 3$	$0 \leq j \leq 3 - i$	$\geq 2,5$

Tabela 5.1: Sobra de um vértice $c \in C$ de acordo com o número de vizinhos em U

tabela com a sobra de carga de um vértice $c \in C$ de acordo com o número de vizinhos não pertencentes a C (para simplificar a tabela, ignoramos vários casos em que a sobra de carga é grande (maior do que 1)).

Nota-se que os vértices insatisfeitos serão vértices de C com 1 vizinho em U_1 e dois vizinhos em U_2 , ou vértices de C com 4 vizinhos em U_2 . No primeiro caso, temos pelo Lema 5.1 que, se $c \in C$ tem 1 vizinho em U_1 e dois em U_2 , então c tem um vizinho $c_2 \in C$, que tem um vizinho $c_3 \in C$, $c_3 \neq c$. Pela Tabela 5.1, temos que c_2 tem sobra pelo menos 2.5 e que c_3 tem sobra pelo menos -1 . Veremos então na seção seguinte que essa situação de sobra de carga negativa é resolvida na Regra 2 (grosso modo, c_2 tem sobra de carga suficiente para satisfazer c e c_3). O segundo caso, quando $c \in C$ tem 4 vizinhos em U_2 , é mais difícil de satisfazer. Chamaremos de C' o conjunto desses vértices.

Lema 5.2. *Se um vértice c pertencente a C possui uma vizinhança que não está representada na Tabela 5.1, então a sobra de c é pelo menos $1/6$.*

Demonstração. Pela Regra 1, um vértice de c envia as maiores quantidades de carga para os vértices pertencentes aos conjuntos U_1, U_2, U_3 e U_4 nesta ordem. Pelo Lema 5.1, um vértice pertencente a C pode ter, no máximo, um vizinho em U_1 . Além disso, se o tiver, tem no máximo 3 vizinhos em U . Assim, se um vértice $c \in C$ tem um vizinho em U_1 , a sua sobra mínima será -1 (ver Tabela 5.1). Se o vértice c tem um vizinho em U_1 mas não possui dois vizinhos em U_2 , então ele tem sobra pelo menos $1/6$ após a aplicação da Regra 1 (ver Tabela 5.1). Se o vértice c não possui vizinhos em U_1 , então a sua sobra mínima será -1 (ver Tabela

5.1). Se o vértice c não possui um vizinho em U_1 e não possui quatro vizinhos em U_2 , então ele tem sobra pelo menos $1/6$ após a aplicação da Regra 1 (ver Tabela 5.1).

□

Definição 5.2. *Seja $C' \subseteq C$ o conjunto dos vértices que identificam apenas vértices cujo conjunto de identificação tem tamanho no máximo dois. Ou seja,*

$$C' = \{c \in C : \text{para cada } v \text{ tal que } c \in I(v), |I(v)| \leq 2\}$$

Em todas as figuras desse capítulo, os vértices pretos são aqueles que se sabe que estão no código. Os demais vértices recebem a cor branca.

Seja v um vértice de C' . Primeiramente, observe que v não pode ser vizinho de um vértice u de C , pois, caso contrário, como $I(u) \neq I(v)$ e $\{u, v\} \subseteq I(u) \cap I(v)$, então $|I(u)| \geq 3$ ou $|I(v)| \geq 3$. Além disso, nenhum vizinho u de v pode estar em U_1 , pois, caso contrário, $I(u) = I(v) = \{v\}$. Logo, pela definição de C' , temos que todos os vizinhos de v pertencem a U_2 . Com isso, concluí-se que os vértices à distância no máximo 2 de v satisfazem a configuração ilustrada na Figura 5.1, onde $v = (x, y)$.

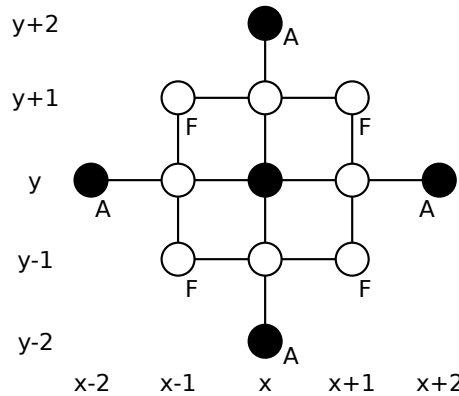


Figura 5.1: Configuração de $(x, y) \in C'$.

Para tanto, suponha por contradição que $(x + 1, y + 1) \in C$. Como $\{(x, y), (x + 1, y + 1)\} \subseteq I((x, y + 1)) \cap I((x + 1, y))$, então $|I((x + 1, y))| \geq 3$ ou $|I((x, y + 1))| \geq 3$ para que $(x + 1, y)$ e $(x, y + 1)$ tenham códigos diferentes, uma contradição. Do mesmo modo, podemos concluir que $(x - 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x + 1, y + 1) \notin C$. Como $(x - 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1), (x + 1, y) \in U_2$, então a única possibilidade é que $(x - 2, y), (x, y - 2), (x, y + 2), (x + 2, y) \in C$.

Configuração 5.1 (Configuração de um vértice de C'). *Para todo vértice $v = (x, y)$ pertencente a C' , temos que $(x - 2, y), (x, y - 2), (x, y + 2), (x + 2, y) \in C$ e $(x - 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1), (x + 1, y) \in U_2$.*

$1), (x + 1, y), (x - 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x + 1, y + 1) \notin C$. Denominaremos por amigos de v os vértices $(x - 2, y), (x, y - 2), (x, y + 2)$ e $(x + 2, y)$ e denominaremos de filhos de v os vértices $(x - 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x + 1, y - 1)$ e $(x + 1, y + 1)$.

Na Figura 5.1, os vértices marcados com a letra A são amigos de (x, y) e os vértices marcados com a letra F são filhos de (x, y) .

A Figura 5.2 mostra relações impossíveis entre dois vértices de C' . Em todos os itens dessa figura, existem dois vértices com a cor preta representando os vértices de C' .

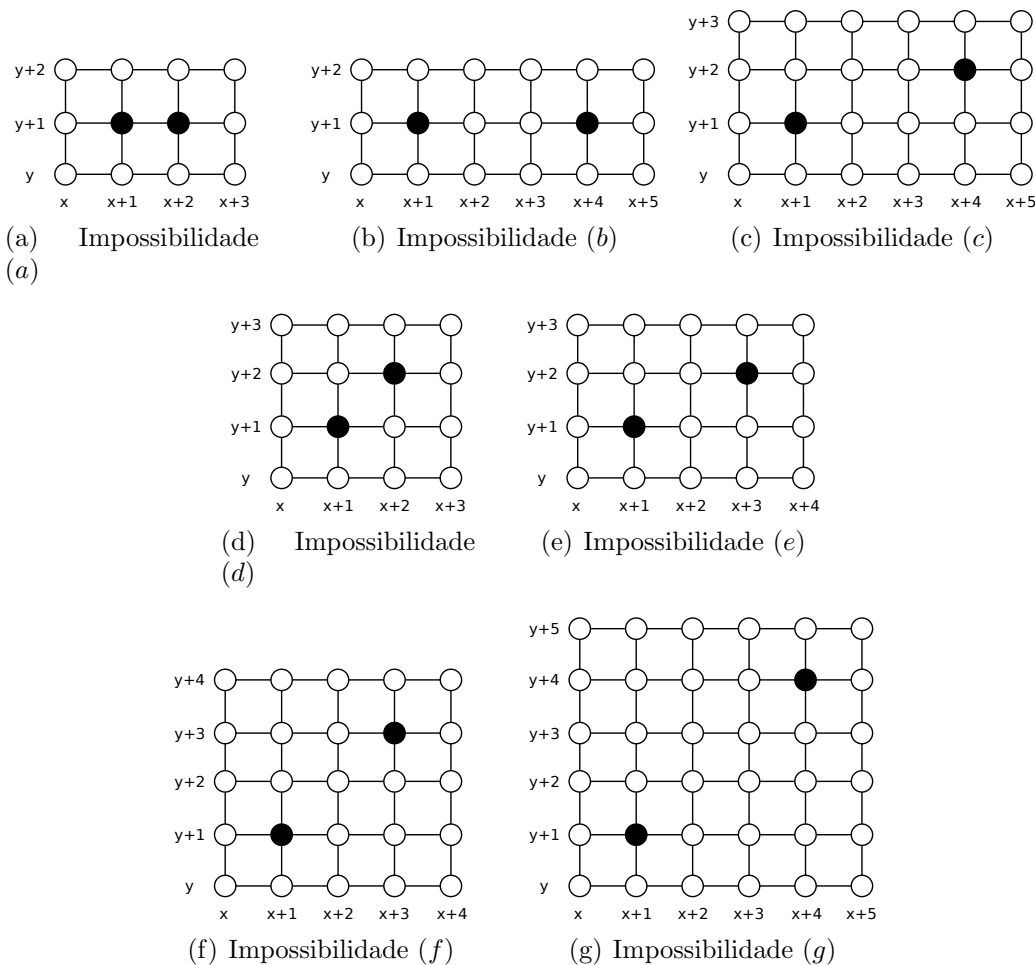


Figura 5.2: Relações impossíveis entre vértices de C' .

Na Figura 5.2(a), temos uma contradição com a Configuração 5.1, uma vez que um vértice de C' não possui vizinhos no código de identificação. Na Figura 5.2(b), os vértices $(x + 2, y + 1)$ e $(x + 3, y + 1)$ devem pertencer a C pela Configuração 5.1 aplicada aos vértices $(x + 4, y + 1)$ e $(x + 1, y + 1)$ respectivamente. No entanto, pela mesma configuração aplicada aos vértices $(x + 1, y + 1)$ e $(x + 4, y + 1)$ respectivamente, os vértices $(x + 2, y + 1)$ e $(x + 3, y + 1)$

não devem pertencer a C , uma contradição. Na Figura 5.2(c), os vértices $(x + 2, y + 2)$ e $(x + 3, y + 1)$ devem pertencer a C pela Configuração 5.1 aplicada aos vértices $(x + 4, y + 2)$ e $(x + 1, y + 1)$ respectivamente. No entanto, pela mesma configuração aplicada aos vértices $(x + 1, y + 1)$ e $(x + 4, y + 2)$ respectivamente, os vértices $(x + 2, y + 2)$ e $(x + 3, y + 1)$ não devem pertencer a C , uma contradição. Na Figura 5.2(d), o vértice $(x + 2, y + 2)$ não pertence a C pela Configuração 5.1 aplicada ao vértice $(x + 1, y + 1)$. Na Figura 5.2(e), o vértice $(x + 3, y + 1)$ pertence a C pela Configuração 5.1 aplicada ao vértice $(x + 1, y + 1)$. Pela mesma configuração aplicada ao vértice $(x + 3, y + 2)$, o vértice $(x + 3, y + 1)$ não pertence a C , uma contradição. Na Figura 5.2(f), o vértice $(x + 2, y + 2)$ tem código de identificação vazio, visto que $(x + 1, y + 2), (x + 2, y + 1), (x + 2, y + 2) \notin C$ pela Configuração 5.1 sobre $(x + 1, y + 1)$ e $(x + 2, y + 3), (x + 3, y + 2) \notin C$ pela Configuração 5.1 sobre $(x + 3, y + 3)$. Na Figura 5.2(g), note que, pela Configuração 5.1 sobre $(x + 1, y + 1)$ e $(x + 4, y + 4)$, os vértices $(x + 2, y + 2), (x + 3, y + 3), (x + 1, y + 2), (x + 2, y + 1), (x + 3, y + 4), (x + 4, y + 3) \notin C$. Portanto, o código de identificação de $(x + 2, y + 2)$ e $(x + 3, y + 3)$ serão iguais a $\{(x + 2, y + 3), (x + 3, y + 2)\} \cap C$, uma contradição.

Denominaremos as impossibilidades das Figuras 5.2(a), 5.2(b), 5.2(c), 5.2(d), 5.2(e), 5.2(f) e 5.2(g) de *impossibilidade (a)*, *impossibilidade (b)*, *impossibilidade (c)*, *impossibilidade (d)*, *impossibilidade (e)*, *impossibilidade (f)* e *impossibilidade (g)* respectivamente.

5.3 Regras de descarga

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e as regras de descarga que utilizaremos no restante deste capítulo.

As regras de descarga desta seção descrevem como é transferida carga de um vértice para outro. Nestas regras, que serão vistas adiante, observa-se que a transferência será apenas entre vértices que estão a distância no máximo 5 e nenhum vértice transmite mais carga do que tinha originalmente (ou seja, 20). Ao final da aplicação das regras, provaremos que todos os vértices estarão satisfeitos (ou seja, terão carga ≥ 7).

Com isso, para qualquer $m \geq 1$, temos que a carga final de $Q_m = [-m, m] \times [-m, m]$ (após a aplicação das regras) será $carga(Q_m) \geq 7|Q_m|$. Claramente, a carga final de Q_m é menor ou igual a carga inicial de Q_m (ou seja, $20|C \cap Q_m|$) mais a quantidade de carga recebida de vértices fora de Q_m . Como a transferência é feita entre vértices a distância no máximo 5, temos que vértices fora de Q_{m+5} não transferem carga para Q_m . Portanto,

$7|Q_m| \leq \text{carga}(Q_m) \leq 20|C \cap Q_m| + 20|Q_{m+5} \setminus Q_m|$. Logo

$$\frac{|C \cap Q_m|}{|Q_m|} \geq \frac{7}{20} - \frac{|Q_{m+5} \setminus Q_m|}{|Q_m|}.$$

Como $|Q_m| = (2m + 1)^2$ e $|Q_{m+5} \setminus Q_m| = |Q_{m+5}| - |Q_m| = 40(m + 3)$, então

$$d(C, \mathcal{G}_S) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{|C \cap Q_m|}{|Q_m|} \geq \frac{7}{20} - \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{40(m + 3)}{(2m + 1)^2} = \frac{7}{20}.$$

Um elemento muito importante na prova é a definição de cadeia e de vértice isolado.

Definição 5.3. *Uma cadeia é um conjunto com pelo menos 3 vértices de C que induz uma componente conexa na grade. O tamanho de uma cadeia é o número de vértices que a compõem. Dizemos que um vértice é isolado se pertence ao código C e não pertence a uma cadeia.*

Além disso, dizemos que um vértice $c' \in C'$ é *amigo de uma cadeia X* se algum amigo de c' pertence a cadeia X (nesse caso, também dizemos que a cadeia X é amiga de c').

As regras de descarga são aplicadas a um vértice de cada vez até que não seja mais possível aplicar a regra. Nesse caso, dizemos que a regra foi encerrada. Cada regra será aplicada desta forma e, após ser encerrada, passa-se para a próxima regra e assim sucessivamente, nunca reaplicando regras já encerradas.

Muitas regras serão para envio de uma carga q de uma cadeia X para um amigo $c' \in C'$. Nesse caso, queremos dizer que os vértices de X mais próximos de c' enviam carga para c' . Mais formalmente, dividiremos em dois casos. Se X tem tamanho 3 ou 4, então podemos pensar que a cadeia X como um todo envia carga q para c' (formalmente falando, no momento do envio, a cadeia distribui igualmente sua sobra entre seus vértices e todos dividem o envio da carga para c'). Como o vértice de X mais longe de c' está à distância no máximo 5 de c' , então a condição de envio entre vértices à distância no máximo 5 se mantém. Se X tem tamanho ≥ 5 , então apenas o amigo $v \in X$ de c' envia carga para c' (caso v só seja amigo de c') ou o subconjunto formado por v e seus vizinhos em X envia para c' (caso v seja amigo de c' e outro vértice de C'). Mostraremos nos Lemas 5.3 e 5.4 que isso será suficiente.

Antes de descrever as regras, precisamos ainda definir quando duas configurações de vértices são *análogas*. Intuitivamente, é quando são idênticas a menos de translações, rotações e inversões.

Definição 5.4 (Configuração análoga). *Seja X um subconjunto de vértices da grade e sejam i, j dois inteiros. A translação de X com parâmetro (i, j) é o subconjunto $X_T = \{(x+i, y+j) : (x, y) \in X\}$. A inversão- x de X é o subconjunto $X_I = \{(-x, y) : (x, y) \in X\}$. A inversão- y de X é o subconjunto $X_I = \{(x, -y) : (x, y) \in X\}$. A rotação de X é o subconjunto $X_R = \{(y, x) : (x, y) \in X\}$. Dizemos que dois subconjuntos X e X' de vértices da grade são análogos se um pode ser obtido a partir do outro através de uma sequência finita de operações de translação, inversão e rotação.*

Na próximas seções, iremos descrever as regras de descarga e daremos exemplos de como elas são aplicadas. Além disso, mostraremos que após a aplicação de todas as regras de descarga, um código de identificação para uma grade quadrada terá densidade pelo menos $7/20$.

5.3.1 Descrição das regras

Regra 1. Seja $c \in C$ adjacente a um vértice $v \in U_k$. Então c envia carga $7/k$ para v .

Regra 2. Seja X uma cadeia e sejam $c_1, c_2 \in X$ tais que c_2 é o único vizinho de c_1 em X . Se X tem tamanho no máximo 4, então c_2 envia carga 1 para c_1 . Se X tem tamanho pelo menos 5, então c_2 envia carga 2 para c_1 e, caso c_2 tenha apenas dois vizinhos c_1 e c_3 em X , então c_3 envia carga $1/2$ para c_2 .

Regra 3. Seja $c' \in C'$ com um filho adjacente a duas cadeias distintas X_1 e X_2 de tamanho 3. Então X_1 e X_2 enviam carga $1/2$ para c' cada.

Regra 4. Seja X uma cadeia com tamanho maior que 4, ou de tamanho 4 e no máximo 3 amigos, ou de tamanho 4 e $\text{sobra}(X) \geq 4$. Então X envia carga 1 para todos os seus amigos.

Regra 5. Seja X uma cadeia de tamanho 4 com pelo menos um amigo c' insatisfeito. Se c' é amigo de duas cadeias de tamanho 4, então X envia carga $1/2$ para c' .

Regra 6. Seja X uma cadeia de tamanho 4 com pelo menos um amigo insatisfeito. Então X envia carga $\text{sobra}(X)/k$ para cada amigo insatisfeito, onde k é o número de amigos insatisfeitos de X .

Regra 7. Seja $c' \in C'$ um vértice insatisfeito tal que um de seus amigos é um vértice isolado $c_1 \in C$ que é vizinho de um vértice $u \in U_{\geq 3}$. Se $u \in U_4$ ou $sobra(c_1) \geq 1/2$, então c_1 envia carga $\min\{1, sobra(c_1)\}$ para c' . Se $u \in U_3$ e $sobra(c_1) < 1/2$, então c_1 envia carga $1/2$ para c' e c_2, c_3 enviam carga $1/6$ para c_1 , onde c_1, c_2, c_3 são os vizinhos de u em C .

Regra 8. Seja X uma cadeia de tamanho 3. Se $sobra(X) \geq 3/2$, X envia carga $1/2$ para cada amigo insatisfeito.

Regra 9. Seja X uma cadeia de tamanho 3 com $sobra(X) \geq 1/2$. Se X tem apenas um amigo insatisfeito, X envia carga $1/2$ para ele.

Regra 10. Seja X uma cadeia de tamanho 3 com $sobra(X) \geq 1/2$. Se X tem pelo menos um amigo insatisfeito, X divide a sua sobra de carga com seus amigos insatisfeitos, com exceção dos casos abaixo (amigos que devem ser ignorados):

- Exceção [a]: A cadeia X não envia carga para c'_1 em configurações iguais ou análogas a da Figura 5.3(a), onde c'_1, c'_2 e $c'_3 \in C'$ são amigos de X .
- Exceção [b]: A cadeia X não envia carga para c'_1 e c'_3 em configurações iguais ou análogas a da Figura 5.3(b), onde c'_1, c'_2 e $c'_3 \in C'$ são amigos de X .
- Exceção [c]: A cadeia X não envia carga para c'_1 em configurações iguais ou análogas a da Figura 5.3(c), onde c'_1, c'_2 e $c'_3 \in C'$ são amigos de X .
- Exceção [d]: A cadeia X não envia carga para c'_1 em configurações iguais ou análogas a da Figura 5.3(d), onde $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$ e c'_1 e c'_2 são amigos de X .

Observe que, em todas as regras, a carga só é enviada entre vértices a distância no máximo 5. As regras são iterativas internamente, ou seja, cada regra só é aplicada aos vértices ou cadeias que satisfazem a condição antes do início da aplicação da regra.

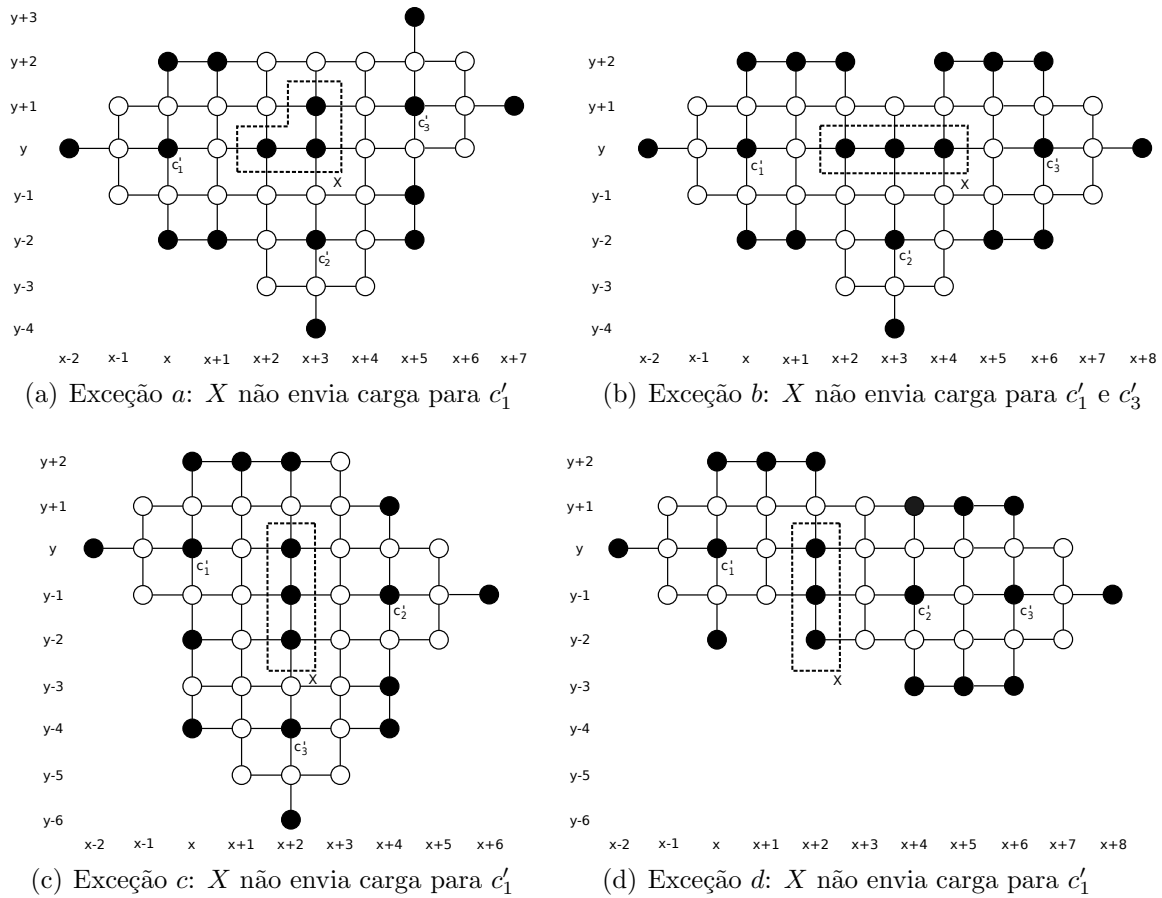


Figura 5.3: Exceções de envio de carga

5.4 Exemplos de aplicação das regras em códigos com densidade 7/20

Nessa seção, mostramos exemplos de como ocorre a aplicação das regras de descarga em grades com código de identificação de densidade exatamente 7/20.

A Figura 5.4 é composta pelo padrão da Figura 5.5 que se repete. Note, neste exemplo, que todo vértice em C_1 é vizinho de 4 vértices em U_2 e, portanto, está em C' . Dessa maneira, esses vértices em C_1 enviam carga de 7/2 para cada vizinho em U_2 pela Regra 1, ficando então com carga 6. De acordo com a Tabela 5.1, as cadeias de tamanho 3 têm sobra 1/2, pois os vértices em C_2 na cadeia têm sobra -1 depois da aplicação da Regra 1, e os vértices em C_3 que têm sobra 2.5. Estes enviam carga 1 para cada um dos seus vizinhos na cadeia pela Regra 2, ficando com sobra 1/2.

Note que a Regra 3 não se aplica, pois não existe filho de nenhum vértice em C' vizinho a duas cadeias. As Regras 4 a 6 não se aplicam, pois não existem cadeias de tamanho 4.

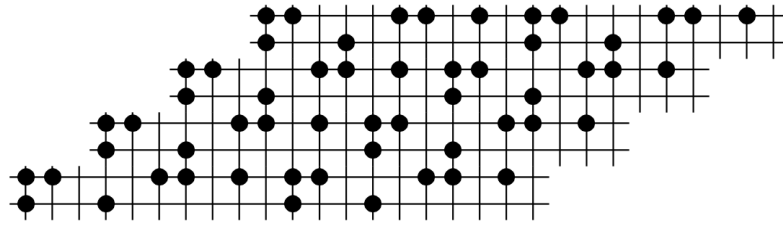


Figura 5.4: Código com densidade $7/20$.

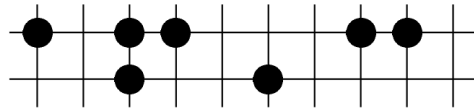


Figura 5.5: Outro código com densidade $7/20$.

A Regra 7 não se aplica pois não existem vértices em $U_{\geq 3}$. A Regra 8 não se aplica, pois, segundo o parágrafo anterior, toda cadeia de tamanho 3 tem sobra $1/2$. A Regra 9 não se aplica, pois, nesse exemplo, toda cadeia terá exatamente dois amigos insatisfeitos.

Pela Regra 10, cada cadeia envia carga $1/4$ para seus amigos. Observe que todo vértice $c' \in C'$ nesse código de identificação possui exatamente 4 cadeias de tamanho 3 das quais é amigo. Como recebe $1/4$ de cada uma delas, a carga de c' passará de 6 para 7, ficando satisfeito. Com isso, todos os vértices ficam satisfeitos.

Um outro exemplo de código de identificação com densidade $7/20$ pode ser visto na Figura 5.6, que é composto pelo padrão da Figura 5.7 que se repete. Como no exemplo anterior, todo vértice em C_1 também é vizinho de 4 vértices em U_2 e, portanto, está em C' . As Regras 1 e 2 foram utilizadas de forma análoga ao caso anterior e, pelos mesmos motivos, as Regras 3 a 8 não se aplicam.

Note que todo vértice de C' tem uma cadeia de tamanho 3 (na vertical) da qual é o único amigo. Com isso, pela Regra 9, essas cadeias (na vertical) enviam toda sua sobra de

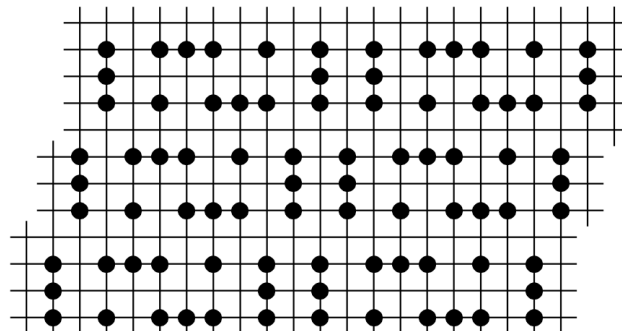


Figura 5.6: Código com densidade $7/20$.

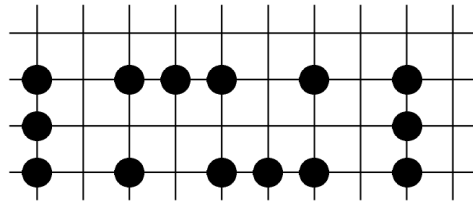


Figura 5.7: Código com densidade $7/20$.

$1/2$ para seus únicos amigos. Assim, todo vértice de C' tem agora carga 6.5 , ou seja, precisa de mais $1/2$ para ficar satisfeito.

As cadeias de tamanho 3 que não possuem um único amigo em C' (as cadeias na horizontal), possuem três amigos em C' . A Regra 10 então se aplica. Pela Exceção (c) da Regra 10, todas as cadeias na horizontal deste exemplo dividem sua sobra entre apenas dois de seus amigos (ao invés de três). Ou seja, enviam carga $1/4$ para dois de seus amigos. Com isso, cada vértice de C' recebe $1/2$ de uma cadeia na vertical e $1/4$ de duas cadeias na horizontal, passando de carga 6 para 7 , ficando satisfeito. Com isso, todos os vértices ficam satisfeitos.

5.5 Propriedades importantes sobre cadeias

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados básicos sobre cadeias.

Lema 5.3. *Seja X uma cadeia com k vértices. Então X tem no máximo k amigos. Além disso, se $v \in X$ é amigo de dois vértices em C' , então qualquer vizinho u de v em X não é amigo de nenhum vértice em C' e v é o único vizinho de u que é amigo de dois vértices de C' .*

Demonstração. Se cada vértice da cadeia X é amigo de no máximo um vértice em C' , então X tem no máximo k amigos. Vamos analisar situações em que um vértice de X é amigo de mais de um vértice em C' .

Devido a impossibilidade (f), temos que qualquer vértice (x, y) só pode ser amigo de no máximo dois vértices $c'_1, c'_2 \in C'$. Além disso, as possibilidades seriam apenas $\{c'_1, c'_2\} = \{(x, y - 2), (x, y + 2)\}$ ou $\{c'_1, c'_2\} = \{(x - 2, y), (x + 2, y)\}$.

Sem perda de generalidade, suponha que (x, y) é amigo de dois vértices $(x, y - 2)$ e $(x, y + 2)$ e que (x, y) pertence a uma cadeia X de tamanho k . Como (x, y) precisa ser vizinho de algum vértice de X , temos que $(x - 1, y) \in X$ ou $(x + 1, y) \in X$ ou ambos. Sem perda de generalidade, suponha que $(x + 1, y) \in X$. Essa situação é ilustrada na Figura 5.8.

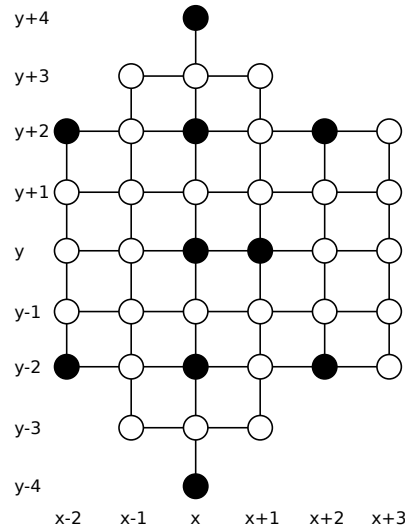


Figura 5.8: Vértice de uma cadeia com dois amigos.

Observe que $(x + 1, y + 2), (x + 1, y - 2), (x - 1, y) \notin C'$ pela Configuração 5.1 sobre os vértices $(x, y + 2), (x, y - 2) \in C'$ e por $(x, y) \in C$. Logo, se $(x + 1, y)$ é amigo de um vértice em C' , a única possibilidade seria o vértice $(x + 3, y)$. Suponha então que $(x + 3, y) \in C'$. Logo, pela Configuração 5.1 sobre $(x + 3, y)$, temos que $(x + 2, y + 1), (x + 2, y - 1) \notin C$. Como $(x, y + 2) \in C'$, então $(x, y + 1), (x + 1, y + 1), (x + 1, y + 2) \notin C$. Portanto, o conjunto de identificação do vértice $(x + 1, y + 1)$ é $\{(x + 1, y)\}$. Simetricamente, como $(x, y - 2) \in C'$, então $(x, y - 1), (x + 1, y - 1), (x + 1, y - 2) \notin C$. Portanto, o conjunto de identificação do vértice $(x + 1, y - 1)$ é $\{(x + 1, y)\}$, que seria idêntico ao do vértice $(x + 1, y + 1)$, o que é uma contradição. Portanto $(x + 3, y) \notin C'$ e $(x + 1, y)$ não é amigo de nenhum vértice em C' .

Suponha que $(x + 1, y)$ é vizinho de outro vértice de X que é amigo de dois vértices em C' . Como $(x, y - 2), (x, y + 2) \in C'$, então a única possibilidade de vizinho para $(x + 1, y)$ em X seria o vértice $(x + 2, y) \in X$. Com argumentos idênticos aos utilizados com relação ao vértice (x, y) , podemos concluir que $(x + 2, y)$ é amigo de $(x + 2, y - 2) \in C'$ e $(x + 2, y + 2) \in C'$. Com argumentos muito semelhantes, concluímos novamente que $(x + 1, y + 1)$ e $(x + 1, y - 1)$ seriam identificados apenas por $\{(x + 1, y)\}$, o que seria uma contradição. Portanto, $(x + 2, y)$ não é amigo de dois vértices em C' e conseqüentemente (x, y) é o único vizinho de $(x + 1, y)$ que é amigo de dois vértices em C' . Seguindo os mesmos argumentos, podemos concluir que, se $(x - 1, y) \in X$, então $(x - 1, y)$ não é amigo de nenhum vértice em C' e (x, y) também é o único vizinho de $(x - 1, y)$ que é amigo de dois vértices em C' .

Resumindo, para todo vértice v de X que é amigo de dois vértices em C' , todo vizinho

u de v em X não é amigo de nenhum vértice em C' e v é o único vizinho de u que é amigo de dois vértices em C' . Com isso, concluímos que X tem no máximo $k = |X|$ amigos. \square

O lema abaixo prova que todo vértice de cadeias de tamanho ≥ 5 terão sobra ≥ 1 . Com isso, temos que, se uma cadeia X de tamanho ≥ 5 envia carga 1 para um vértice $c' \in C'$, então esse envio poderá ser feito pelo amigo $v \in X$ de c' (caso v só seja amigo de c') ou pelos vizinhos de v em X (caso v seja amigo de dois vértices de C'), de acordo com o Lema 5.3.

Lema 5.4. *Seja X uma cadeia com pelo menos 5 vértices. Após a aplicação da Regra 2, todo vértice de X tem sobra pelo menos 1. Consequentemente, $sobra(X) \geq |X|$.*

Demonstração. Seja v um vértice qualquer de X . Vamos analisar a sobra de v e provar que $sobra(v) \geq 1$ após a aplicação da Regra 2. Seja w um vizinho de v em X . Suponha inicialmente que $v \in X \cap C_2$ (ou seja, w é o único vizinho de v em X). Então, no pior caso (ou seja, no caso em que há maior perda de carga), v é vizinho de um vértice de U_1 e dois vértices de U_2 , ficando com $sobra(v) \geq -1$ após a aplicação Regra 1. Pela Regra 2, v recebe carga 2 de seu vizinho w em X , ficando com $sobra(v) \geq 1$. Suponha agora que $v \in X \cap C_3$ (ou seja, v tem exatamente dois vizinhos u e w em X). Então, no pior caso, v é vizinho de um vértice de U_1 e um vértice de U_2 , ficando com $sobra(v) \geq 2.5$ após a aplicação da Regra 1. Se $u, w \in X \cap C_2$, então v é o único vizinho de u e w em X e a cadeia X teria tamanho 3, uma contradição. Portanto, no pior caso, ou $u \in C_2$ ou $w \in C_2$. Sem perda de generalidade, considere que $w \in C_2$ e $u \notin C_2$. Então, pela Regra 2, v envia carga 2 para w , ficando com $sobra(v) \geq 0.5$, e u envia carga 0.5 para v ficando com $sobra(v) \geq 1$. Além disso, v não envia carga 0.5 para u pela Regra 2, pois senão X teria tamanho 4. Suponha agora que $v \in X \cap C_4$ (ou seja, v tem exatamente três vizinhos t, u e w em X). Então, no pior caso, v é vizinho de um vértice de U_1 , ficando com $sobra(v) \geq 6$ após a aplicação Regra 1. Se $t, u, w \in X \cap C_2$, então v é o único vizinho de t, u e w em X e essa cadeia teria então tamanho 4, uma contradição. Portanto, no pior caso e sem perda de generalidade, considere que $u, w \in C_2$ e $t \notin C_2$. Assim, v envia carga 2 para u e w e, no pior caso, enviaria carga 0.5 para t , ficando com $sobra(v) \geq 6 - 2 - 2 - 0.5 = 1.5$. Suponha agora que $v \in X \cap C_5$ (ou seja, v tem exatamente quatro vizinhos $s, t, u, w \in X$). Como v não tem vizinhos em U , então $sobra(v) = 13$ após a aplicação da Regra 1. No pior caso, teríamos que $s, t, u, w \in C_2$ e v enviaria carga 2 para s, t, u, w , ficando com $sobra(v) \geq 13 - 2 \times 4 = 5$. \square

O lema abaixo prova algo mais forte com relação a sobra de cadeias.

Lema 5.5. *Após a aplicação da Regra 2, cada cadeia X satisfaz $sobra(X) \geq 2.5k - 7$, onde k é o tamanho de X .*

Demonstração. Seja X uma cadeia e seja k o tamanho de X . Vamos analisar a sobra de X . Seja F o conjunto das arestas saindo de X (ou seja, arestas entre um vértice de X e um vértice fora de X). Para cada vértice $u \in X$, temos que o número de vizinhos de u que não estão em X é $4 - d_X(u)$, onde $d_X(u)$ é o grau de u no subgrafo induzido pela cadeia X (ou seja, o número de vizinhos de u em X).

Com isso, temos que $|F| = \sum_{u \in X} (4 - d_X(u)) = 4k - \sum_{u \in X} (d_X(u)) = 4k - 2m_X$, onde m_X é o número de arestas no subgrafo induzido pela cadeia X . Como X induz um subgrafo conexo da grade, temos que $m_X \geq k - 1$. Portanto, $|F| \leq 4k - 2(k - 1) = 2k + 2$. Seja $F_i \subseteq F$ o subconjunto das arestas de F cuja extremidade fora de X pertence a U_i , para $i = 1, 2, 3, 4$. Portanto a $sobra(X)$ é igual a:

$$sobra(X) = (20 - 7)k - 7|F_1| - \frac{7}{2}|F_2| - \frac{7}{3}|F_3| - \frac{7}{4}|F_4|$$

Observe que $|F_1| \leq k$, pois, caso contrário, existiria um vértice de X com dois vizinhos em U_1 , o que contradiz o Lema 5.1. Seja $F_{\geq 2} = F_2 \cup F_3 \cup F_4$. Com isso,

$$\begin{aligned} sobra(X) &\geq 13k - 7|F_1| - \frac{7}{2}|F_{\geq 2}| = 13k - \frac{7}{2}|F_1| - \frac{7}{2}(|F_1| + |F_{\geq 2}|) \\ &= 13k - \frac{7}{2}|F_1| - \frac{7}{2}|F| \geq 13k - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}(2k + 2) = 2.5k - 7 \end{aligned}$$

□

Lema 5.6. *Seja X uma cadeia com tamanho maior que 4, ou de tamanho 4 e no máximo 3 amigos, ou de tamanho 4 e $sobra(X) \geq 4$. Então, todo amigo $c' \in C'$ dessa cadeia X fica satisfeito após a aplicação da Regra 4.*

Demonstração. Se X tem tamanho $k \geq 5$, temos, pelo Lema 5.5, que $sobra(X) \geq 2.5 \times k - 7 = k + (1.5 \times k - 7) \geq k + (1.5 \times 5 - 7) \geq k$ após a aplicação da Regra 3 (visto que a Regra 3 não se aplica a cadeias de tamanho maior que 4). Pelo Lema 5.3, sabemos que X tem no máximo k amigos. Assim, a cadeia poderia doar carga 1 para cada um de seus amigos, tornando-os satisfeitos, e ainda assim continuar satisfeita. Se X tem tamanho 4 e tem exatamente 3 amigos, temos, pelo Lema 5.5, que $sobra(X) \geq 2.5 \times 4 - 7 = 3$ e, com isso, X poderia doar carga 1 para cada um de seus amigos. O mesmo é válido se X tem tamanho 4 e $sobra(X) \geq 4$. □

No Lema 5.6, vimos que, se um vértice $c' \in C'$ tem um amigo em uma cadeia X de tamanho pelo menos 5, ou tem um amigo em uma cadeia X de tamanho 4 com no máximo 3 amigos, ou tem um amigo em uma cadeia X de tamanho 4 com $sobra(X) \geq 4$, então c' é satisfeito pela cadeia após a Regra 4. Vamos analisar agora vértices $c' \in C'$ que não são satisfeitos após a aplicação da Regra 4. Nesse caso, um amigo qualquer de c' pode pertencer a uma cadeia de tamanho 4 com 4 amigos, ou pertencer a uma cadeia de tamanho 3, ou ser um vértice isolado. Vamos analisar todas essas possibilidades.

5.6 Cadeias de tamanho 4, com sobra menor que 4 e com 4 amigos

Nesta seção, analisaremos cadeias de tamanho 4, com sobra menor que 4 e com 4 amigos insatisfeitos. Para facilitar o entendimento das implicações lógicas em alguns casos, a partir desta seção incluiremos setas entre vértices em algumas figuras. Em geral, uma seta indica uma implicação com relação a pertença do vértice no código de identificação. Por exemplo, suponha que $u \notin C$ e $v \in C$. Se há uma seta na figura do vértice u para o vértice v , isso significa que o fato de $u \notin C$ implica que $v \in C$ (um dos motivos mais comuns para isso é que u precisaria ser identificado por algum vértice e a única possibilidade seria o vértice v). Outro exemplo é quando $u \in C$ e $v \notin C$. Se há uma seta na figura do vértice u para o vértice v , isso significa que o fato de $u \in C$ implica que $v \notin C$ (um dos motivos mais comuns para isso é que, se v estivesse em C , então o fato de $u \in C$ geraria uma cadeia maior que um certo tamanho proibido na situação em particular). Algumas setas terão um número associado nas figuras. Essa numeração indica a ordem lógica das implicações. Por exemplo, se $u, w \in C$ e $v \notin C$ e temos uma seta com número 1 de u para v e uma seta com número 2 de v para w , isso significa que o fato de $u \in C$ implica que $v \notin C$ e que o fato de $v \notin C$ implica que $w \in C$. As setas e as numerações servem apenas para auxiliar o entendimento.

Definição 5.5 (formatos de cadeias de tamanho 3 ou 4). *Seja X uma cadeia de tamanho 3 ou 4. Dizemos que X tem o formato **L** se $\{(x+1, y), (x, y), (x, y+1)\} \subseteq X \subseteq \{(x+1, y), (x, y), (x, y+1), (x, y+2)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Dizemos que X tem formato **I** se $\{(x, y), (x, y+1), (x, y+2)\} \subseteq X \subseteq \{(x, y), (x, y+1), (x, y+2), (x, y+3)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Dizemos que X tem formato **Z** se $X = \{(x, y), (x+1, y), (x+1, y-1), (x+2, y-1)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Dizemos que X tem formato **O** se $X = \{(x, y), (x+1, y), (x+1, y+1), (x, y+1)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Dizemos que X tem formato **T** se $X = \{(x, y+1), (x+1, y+1), (x+1, y+2), (x, y+2)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$.*

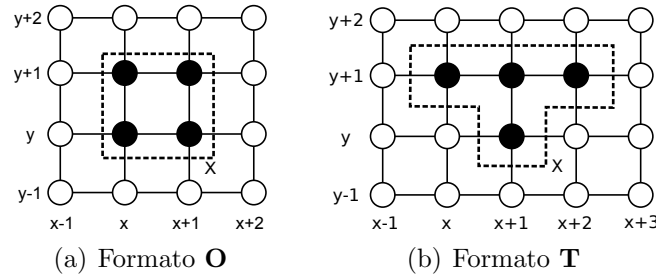


Figura 5.9: Cadeias em formatos **O** e **T**

1), $(x + 2, y + 1), (x + 1, y)\}$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Dizemos ainda que uma cadeia X tem um determinado formato se for análoga a uma cadeia daquele formato.

Agora vamos estudar os casos em que uma cadeia de tamanho 4 tem 4 amigos.

Teorema 5.1. *Se $c' \in C'$ possui um amigo pertencente a uma cadeia de tamanho maior ou igual 4, então c' ficará satisfeito após a aplicação das regras de descarga.*

O Lema 5.6 mostra que se X é uma cadeia com tamanho maior que 4, ou de tamanho 4 e no máximo 3 amigos, ou de tamanho 4 e $\text{sobra}(X) \geq 4$, então todo amigo $c' \in C'$ dessa cadeia X fica satisfeito após a aplicação da Regra 4. Se a cadeia não for análoga a alguma das cadeias presentes no Lema 5.6, então segue a demonstração que será feita ao longo das subseções seguintes, divididas de acordo com o tipo de cadeia.

5.6.1 Cadeia X em formato **O** ou **T**

Seja X uma cadeia em formato **O**, como ilustrado na Figura 5.9(a). Cada vértice dessa cadeia é adjacente a outros dois vértices da cadeia. Assim, cada um tem apenas dois vizinhos fora da cadeia. No caso de maior perda de carga, temos que cada vértice tem no máximo um vizinho em U_1 (pelo Lema 5.1) e o outro em U_2 . Para cada vértice v dessa cadeia, temos que $\text{carga}(v) \geq 20 - 7 - \frac{7}{2} = 9,5$ e portanto $\text{sobra}(v) \geq 9,5 - 7 = 2,5$. Com isso, $\text{sobra}(X) = \sum_{i=1}^4 \text{sobra}(v_i) \geq \sum_{i=1}^4 2,5 = 10$. Como essa cadeia tem no máximo 4 amigos, ela possui carga suficiente para satisfazê-los e ainda se manter satisfeita.

Seja agora $X = \{(x, y + 1), (x + 1, y + 1), (x + 2, y + 1), (x + 1, y)\}$ uma cadeia em formato **T**, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, como ilustrado na Figura 5.9(b). Pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), temos que nenhum vértice de X pode ser amigo de dois vértices de C' . Portanto, como X tem 4 amigos, cada vértice de X é amigo de exatamente um vértice de C' . Pela Configuração 5.1, temos que $(x + 1, y + 1)$ só pode ser amigo de $(x + 1, y + 3) \in C'$.

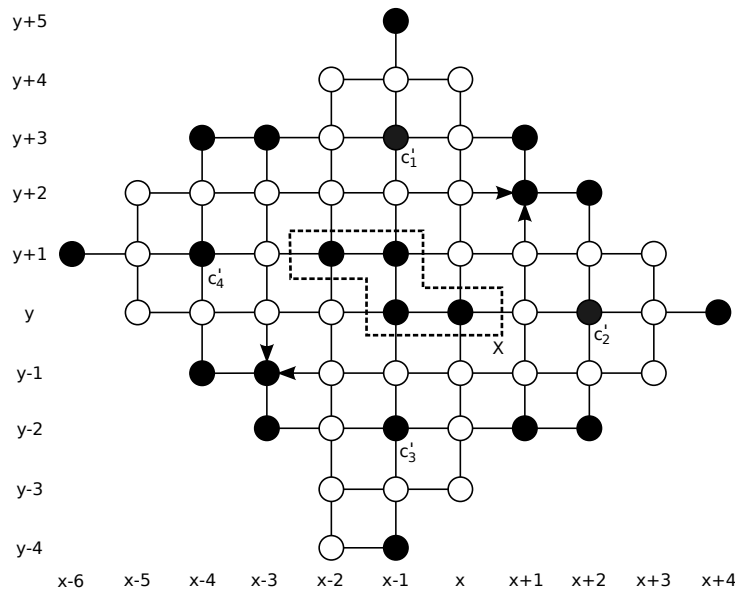


Figura 5.10: Cadeia em formato \mathbf{Z}

Logo, pela Configuração 5.1, temos que $(x + 2, y + 1)$ só pode ser amigo de $(x + 4, y + 1) \in C'$. Como $(x + 1, y)$ só pode ser amigo de $(x + 1, y - 2) \in C'$, temos uma impossibilidade (g) entre $(x + 1, y - 2) \in C'$ e $(x + 4, y + 1) \in C'$, uma contradição. Portanto, X tem menos de 4 amigos.

5.6.2 Cadeia X em formato \mathbf{Z}

Seja $X = \{(x - 2, y + 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y), (x, y)\}$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, uma cadeia em formato \mathbf{Z} (como ilustrado na Figura 5.10). Suponha que X tem 4 amigos. Pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), não é difícil checar que nenhum vértice de X pode ter mais de um amigo. Como X tem 4 amigos, então todo vértice de X é amigo de exatamente um vértice de C' . Novamente, pela Configuração 5.1, não é difícil checar que a única possibilidade de amigos são os vértices $c'_1 = (x - 1, y + 3)$, $c'_2 = (x + 2, y)$, $c'_3 = (x - 1, y - 2)$ e $c'_4 = (x - 4, y + 1)$ (como ilustrado na Figura 5.10). No entanto, pela impossibilidade (g), c'_3 e c'_4 não podem pertencer simultaneamente a C' (o mesmo para c'_1 e c'_2). Portanto, X tem menos de 4 amigos.

Observação 5.1. *Se um vértice $c' \in C'$ possui um amigo em uma cadeia de tamanho 4 de formato O, T ou Z , então c' é satisfeito após a aplicação da Regra 4.*

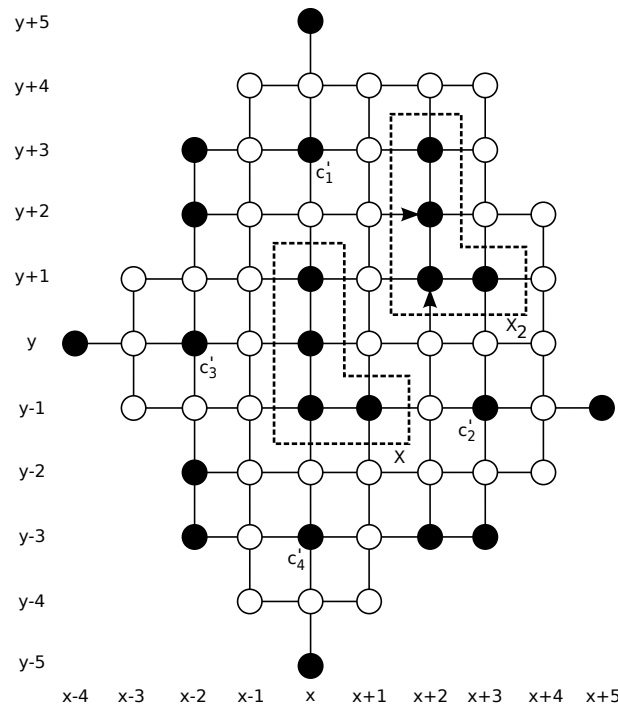


Figura 5.11: Cadeia em formato **L**

5.6.3 Cadeia X em formato **L**

Seja $X = \{(x, y + 1), (x, y), (x, y - 1), (x + 1, y - 1)\}$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, uma cadeia de tamanho 4 em formato **L** (como ilustrado na Figura 5.11).

Pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), não é difícil checar que nenhum vértice de X pode ter mais de um amigo (ou seja, cada um tem exatamente um amigo) e que o vértice (x, y) só pode ser amigo do vértice $c'_3 = (x - 2, y) \in C'$. Com isso, não é difícil checar pela Configuração 5.1 que $(x, y - 1)$ só pode ser amigo de $c'_4 = (x, y - 3) \in C'$. Consequentemente, $(x + 1, y - 1)$ só pode ser amigo de $c'_2 = (x + 3, y - 1) \in C'$. Finalmente, pela Configuração 5.1, temos que $(x, y + 1)$ só pode ser amigo de $c'_1 = (x, y + 3) \in C'$.

Pela Configuração de c'_1 , temos que $(x, y + 2), (x + 1, y + 2), (x + 1, y + 3) \notin C$. Como X tem tamanho 4, então $(x + 1, y + 1) \notin C$. Assim, para $(x + 1, y + 2)$ ser identificado, temos que $(x + 2, y + 2) \in C$. De modo análogo, podemos concluir, analisando o vértice $(x + 2, y)$, que o único modo dele ser identificado é se $(x + 2, y + 1) \in C$.

Com isso, obtemos uma outra cadeia X_2 de tamanho maior ou igual a 4 tal que $(x + 2, y + 3), (x + 2, y + 2), (x + 2, y + 1), (x + 3, y + 1) \in X_2$. Se X_2 tem tamanho pelo menos 5, então c'_1 e c'_2 são satisfeitos por X_2 pela Regra 4 e c'_3 e c'_4 são satisfeitos por X após a aplicação da Regra 6, caso não tenham sido satisfeitos antes.

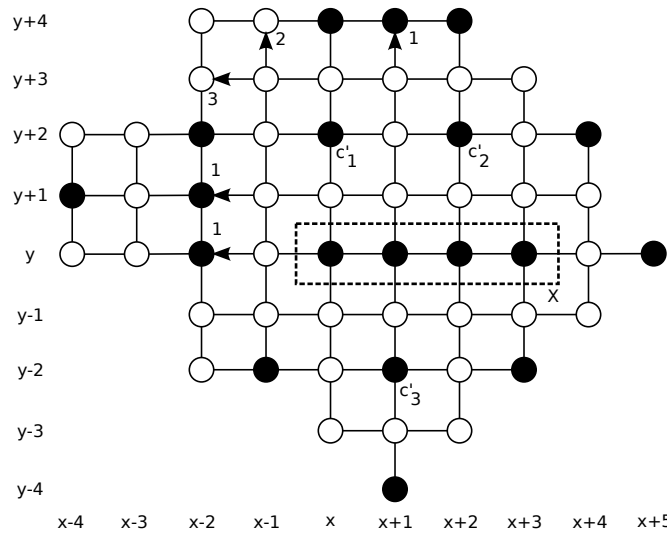


Figura 5.12: Cadeia em formato **I** com 4 amigos, dois deles à distância 2 entre si

Considere então que X_2 tem tamanho 4. Com isso, $(x+4, y+1) \notin C$ e conseqüentemente $(x+4, y+3) \notin C'$. Pela impossibilidade (f) com c'_1 , temos que $(x+2, y+5) \notin C'$ e portanto o vértice $(x+2, y+3)$ de X_2 tem apenas c'_1 como amigo. De modo similar, concluímos que o vértice $(x+3, y+1)$ de X_2 tem apenas c'_2 como amigo. Pela Configuração 5.1, temos que os vértices $(x+2, y+2)$ e $(x+2, y+1)$ não podem possuir amigos. Com isso, a cadeia X_2 tem apenas dois amigos e satisfaz c'_1 e c'_2 pela Regra 4 e a cadeia X satisfaz c'_3 e c'_4 após a aplicação da Regra 6, caso não tenham sido satisfeitos antes.

Nas próximas subseções, vamos analisar cadeias em formato **I** com 4 amigos. Vamos dividir em dois casos: cadeias com 2 amigos à distância 2 entre si e cadeias com todos os amigos à distância maior que 2 entre si.

5.6.4 Cadeia X em formato **I** com 4 amigos, dois deles à distância 2 entre si

Seja $X = \{(x, y), (x+1, y), (x+2, y), (x+3, y)\}$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, uma cadeia de tamanho 4 em formato **I** (como ilustrado na Figura 5.12).

Sejam $c'_1, c'_2 \in C'$ dois amigos de X que estão a distância 2 entre si. Analisando todas as possibilidades, verifica-se que o conjunto $\{c'_1, c'_2\}$ é um dos seguintes: (a) $\{(x, y+2), (x+2, y+2)\}$, (b) $\{(x+1, y+2), (x+3, y+2)\}$, (c) $\{(x, y-2), (x+2, y-2)\}$ ou (d) $\{(x+1, y-2), (x+3, y-2)\}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $c'_1 = (x, y+2)$ e

$$c'_2 = (x + 2, y + 2).$$

Note que (x, y) só pode ser amigo de c'_1 ; caso contrário, pela impossibilidade (f), $(x, y - 2) \in C'$ e, pela Configuração 5.1 sobre o vértice $(x, y - 2)$, teríamos que $(x + 1, y - 1)$ e $(x + 1, y + 1)$ possuem o mesmo conjunto de identificação, uma contradição. O mesmo argumento vale para concluir que $(x + 2, y)$ só pode ser amigo de c'_2 . Note ainda que $(x + 3, y)$ só pode ser amigo de um vértice de C' pela Configuração 5.1 sobre o vértice c'_2 e pela impossibilidade (f). Portanto, $(x + 1, y)$ deve ser amigo de um vértice de C' para que X tenha 4 amigos. Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que a única possibilidade é o vértice $c'_3 = (x + 1, y - 2) \in C'$. Seja $c'_4 \in C'$ o amigo do vértice $(x + 3, y)$, que pode estar em $\{(x + 3, y - 2), (x + 5, y)\}$.

Note que, pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , $(x - 1, y + 1), (x - 1, y + 2), (x, y + 1) \notin C$ e $(x - 2, y + 2) \in C$. Note ainda que $(x - 1, y) \notin C$ pois X tem tamanho 4. Logo, $(x - 2, y + 1) \in C$ para que $(x - 1, y + 1)$ tenha conjunto de identificação não vazio. Além disso, como $(x - 1, y)$ e $(x, y - 1)$ devem ter conjuntos de identificação diferentes, então $(x - 2, y) \in C$.

Note também que $(x, y + 4), (x + 2, y + 4) \in C$, pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e c'_2 . Além disso, $(x + 1, y + 4) \in C$ para que $(x + 1, y + 3)$ tenha conjunto de identificação não vazio. Vamos analisar agora o vértice $(x - 1, y + 3)$. Para que tenha conjunto de identificação não vazio, temos que $(x - 1, y + 4) \in C$ ou $(x - 2, y + 3) \in C$.

No primeiro caso, se $(x - 1, y + 4) \in C$, então teríamos uma outra cadeia $X' \supseteq \{(x', y + 4) : x - 1 \leq x' \leq x + 2\}$ de tamanho pelo menos 4. Nesse caso, c'_1 e c'_2 são satisfeitos por X' pela Regra 4 ou são satisfeitos por X e X' pela Regra 5. Com isso, temos que a perda de carga da cadeia X com c'_1 e c'_2 é de no máximo $1/2$ para cada (no caso da aplicação da Regra 5). Assim, X ainda teria sobra pelo menos 2 para satisfazer c'_3 e c'_4 pela Regra 6. Ou seja, todos os amigos de X estariam satisfeitos após a aplicação das regras.

No segundo caso, se $(x - 2, y + 3) \in C$, então teríamos uma outra cadeia $X'' \supseteq \{(x - 2, y') : y \leq y' \leq y + 3\}$ de tamanho pelo menos 4. Se X'' tem tamanho maior que 4, então X'' satisfaz c'_1 pela Regra 4 e X satisfaz c'_2, c'_3, c'_4 pela Regra 6, caso não tenham sido satisfeitos antes. Suponha então que X'' tem tamanho 4. Com isso, $(x - 3, y), (x - 3, y + 1), (x - 3, y + 2) \notin C$. Logo, como $(x - 1, y + 1)$ e $(x - 3, y + 1)$ devem ter conjunto de identificação diferentes, então $(x - 4, y + 1) \in C$ e conseqüentemente, pela Configuração 5.1, $(x - 4, y), (x - 4, y + 2) \notin C'$. Como $(x - 1, y - 2) \in C$, temos pela Configuração 5.1 que $(x - 2, y - 2) \notin C'$. Assim $(x - 2, y)$ não é amigo de nenhum vértice de C' , $(x - 2, y + 1)$ pode ser amigo de no máximo

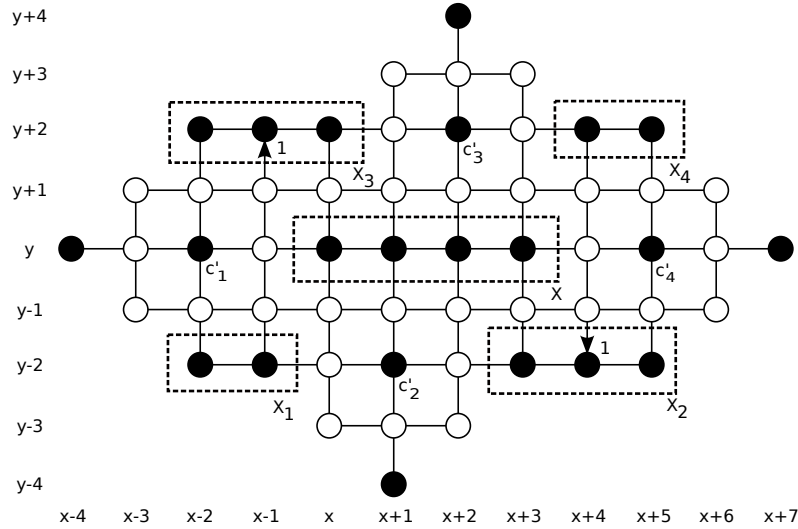


Figura 5.13: Cadeia em formato **I** com 4 amigos, todos a distância maior que 2 entre si

um vértice em C' e $(x - 2, y + 2)$ é amigo apenas de c'_1 . Além disso, $(x - 2, y + 3)$ é amigo de no máximo um vértice de C' pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e pela impossibilidade (f). Com isso, concluímos que X'' tem no máximo 3 amigos e satisfaz c'_1 pela Regra 4 e X satisfaz c'_2, c'_3, c'_4 pela Regra 6, caso não tenham sido satisfeitos antes. Ou seja, todos os amigos de X estariam satisfeitos após a aplicação das regras.

Corolário 5.1. *Se X é uma cadeia de tamanho 4 satisfazendo as Subseções 5.6.1, 5.6.2, 5.6.3 ou 5.6.4, então todos os amigos de X são satisfeitos antes da Regra 7.*

5.6.5 Cadeia X em formato **I** com 4 amigos, todos à distância maior que 2 entre si

Seja $X = \{(x, y), (x + 1, y), (x + 2, y), (x + 3, y)\}$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, uma cadeia de tamanho 4 em formato **I** (como ilustrado na Figura 5.13) com 4 amigos, todos a distância maior que 2 entre si. Se (x, y) é amigo de dois vértices em C' , a única possibilidade seria $(x, y - 2)$ e $(x, y + 2)$ pela impossibilidade (f). No entanto, $(x + 1, y - 1)$ e $(x + 1, y + 1)$ seriam ambos identificados apenas por $\{(x + 1, y)\}$, uma contradição. Logo, (x, y) não pode ser amigo de dois vértices em C' . O mesmo argumento segue para concluirmos que nenhum vértice de X pode ser amigo de dois vértices de C' . Como X tem 4 amigos, então cada vértice de X é amigo de exatamente um vértice de C' . Sejam $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 \in C'$ respectivamente os amigos de $(x, y), (x + 1, y), (x + 2, y)$ e $(x + 3, y)$.

Suponha que $c'_1 = (x, y - 2) \in C'$. Logo, pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que $c'_2 =$

$(x+1, y+2) \in C'$. Com isso, pela Configuração 5.1 sobre c'_2 , temos que $c'_3 = (x+2, y-2) \in C'$, uma contradição, pois c'_1 e c'_3 estariam a distância 2 entre si. Portanto, $c'_1 \neq (x, y-2)$. Analogamente, podemos concluir que $c'_1 \neq (x, y+2)$, $c'_4 \neq (x+3, y-2)$ e $c'_4 \neq (x+3, y+2)$. Logo, $c'_1 = (x-2, y)$ e $c'_4 = (x+5, y)$. Analisando as possibilidades para c'_2 e c'_3 , concluímos que $\{c'_2, c'_3\} = \{(x+1, y-2), (x+2, y+2)\}$ ou $\{c'_2, c'_3\} = \{(x+1, y+2), (x+2, y-2)\}$. Sem perda de generalidade, assumamos que $c'_2 = (x+1, y-2)$ e $c'_3 = (x+2, y+2)$, como ilustrado na Figura 5.13.

Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que $(x-1, y)$, $(x-1, y+1)$, $(x-2, y+1) \notin C$ e, como $|X| = 4$, temos que $(x, y+1) \notin C$. Portanto, para que $(x-1, y+1)$ tenha código não vazio, temos que $(x-1, y+2) \in C$. Analogamente, temos que $(x+4, y-2) \in C$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e c'_3 , temos que $(x-2, y+2)$, $(x, y+2) \in C$. Logo temos uma cadeia X_3 de tamanho pelo menos 3 contendo $(x-2, y+2)$, $(x-1, y+2)$, $(x, y+2)$. Analogamente, temos uma cadeia X_2 de tamanho pelo menos 3 contendo $(x+3, y-2)$, $(x+4, y-2)$, $(x+5, y-2)$. Finalmente, pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e c'_2 , temos que $(x-2, y-2)$, $(x-1, y-2) \in C$. Portanto temos uma cadeia X_1 de tamanho pelo menos 3 contendo $(x-2, y-2)$ e $(x-1, y-2)$. Analogamente, temos uma cadeia X_4 de tamanho pelo menos 3 contendo $(x+4, y+2)$, $(x+5, y+2)$.

Se, após a aplicação da Regra 3, algum vértice em $\{c'_1, c'_2, c'_3, c'_4\}$ fica satisfeito, então X satisfaz os demais insatisfeitos pela Regra 4. Suponha então que a Regra 3 não se aplica a nenhum deles. Se a Regra 4 se aplica a X , então c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 ficam satisfeitos. Suponha então que a Regra 4 não se aplica a X . Se a Regra 5 se aplica a algum c'_i ($1 \leq i \leq 4$), então c'_i fica satisfeito. Se a Regra 5 não se aplica a algum c'_j ($1 \leq j \leq 4$), então c'_j recebe pelo menos $3/4$ de X pela Regra 6. Seja c'_j um vértice nessa situação.

Pelo Lema 5.5, toda cadeia X tem $sobra(X) \geq 1/2$ após a Regra 2. Como nenhuma regra foi aplicada desde então neste caso, todas as cadeias X têm $sobra(X) \geq 1/2$.

Se $j = i$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então X_i é uma cadeia de tamanho 3 (caso contrário, c'_i seria satisfeito na Regra 5). Note que, se c'_i não é satisfeito pelas Regras 7, 8 ou 9, então c'_i recebe pelo menos $1/4$ de X_i pela Regra 10, ficando satisfeito. As exceções da Regra 10 não se aplicam aos pares (c'_i, X_i) com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, pois os pares (c'_1, X_1) e (c'_4, X_4) não se enquadram na exceção (a) da Regra 10 e os pares (c'_2, X_2) e (c'_3, X_3) não se enquadram na exceção (b) da Regra 10.

5.7 Amigo isolado não pertencente a C'

Pelo Teorema 5.1, precisamos analisar apenas os vértices $c' \in C'$ que não possuem amigos pertencentes a cadeias de tamanho maior ou igual a 4. Ou seja, todos os seus amigos pertencem a cadeias de tamanho 3 ou são vértices isolados. Nesta seção, vamos analisar amigos isolados que não pertencem a C' . Em outras seções, serão analisados os casos de amigos isolados pertencentes a C' (seção 5.9) e os casos de cadeias de tamanho 3 (seção 5.8).

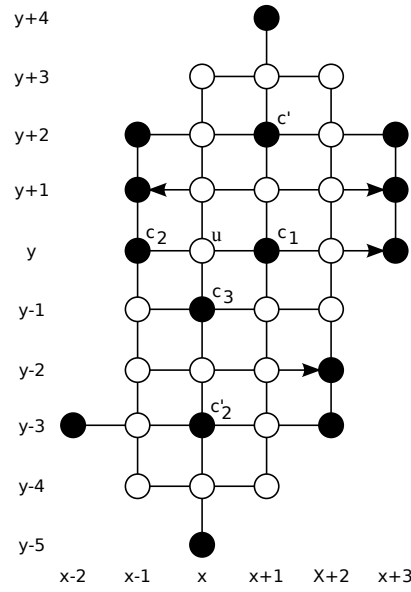
Teorema 5.2. *Seja $c' \in C'$ um vértice insatisfeito após a aplicação da Regra 6 que tem como amigo um vértice isolado $c_1 \notin C'$. Então, c_1 envia carga $\geq 1/2$ para c' pela Regra 7 e $sobra(c_1) \geq 0$ após a aplicação da Regra 7.*

Demonstração. Como $c_1 \in C$, $c_1 \notin C'$ e c_1 é isolado, então c_1 possui um vizinho $u \in U_{\geq 3}$. Queremos mostrar que c' recebe pelo menos carga $1/2$ de c_1 . Pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), temos que c_1 não pode ser amigo de dois vértices de C' . Se $sobra(c_1) \geq 1/2$, então c_1 envia carga $\geq 1/2$ para c' pela Regra 7, como desejado. Se $u \in U_4$, então $sobra(c_1) \geq 3/4$ pela Tabela 5.1 e c_1 envia carga pelo menos $1/2$ para c' pela Regra 7.

Suponha então que $u \in U_3$ e $sobra(c_1) < 1/2$. Sejam c_2 e c_3 tais que $I(u) = \{c_1, c_2, c_3\}$. Pela Tabela 5.1, $sobra(c_1) \geq 1/6$, $sobra(c_2) \geq 1/6$ e $sobra(c_3) \geq 1/6$. Pela Regra 7, temos que c_2 e c_3 enviam carga $1/6$ para c_1 , fazendo com que $sobra(c_1) \geq 1/2$, e c_1 envia carga $1/2$ para c' , como desejado.

No entanto, se, por outra aplicação da Regra 7, c_1 também tivesse que enviar carga $1/6$ para c_2 ou c_3 , a sobra de c_1 poderia ficar negativa. Vamos analisar se essa situação é possível. Para isso ocorrer, c_2 ou c_3 também deveria ser um vértice isolado que é amigo de um vértice $c'_2 \in C'$ insatisfeito. Sejam x e y tais que $u = (x, y)$ e suponha, sem perda de generalidade, que $c_2 = (x - 1, y) \in C$, $c_3 = (x, y - 1) \in C$, $c_1 = (x + 1, y) \in C$ e que $(x, y + 1) \notin C$. Pela Configuração 5.1, temos que $c' = (x + 3, y)$ ou $c' = (x + 1, y + 2)$.

Suponha, por contradição, que c_2 é isolado. Logo $(x - 1, y + 1) \notin C$ e, como c_1 é isolado, $(x + 1, y + 1) \notin C$. Para que $I((x, y + 1)) \neq \emptyset$, temos que $(x, y + 2) \in C$. Logo, pela Configuração 5.1, temos que c' não pode ser $(x + 1, y + 2)$ e portanto $c' = (x + 3, y)$. Com isso, para que $I((x + 2, y + 1)) \neq \emptyset$, temos, pela Configuração 5.1 sobre c' , que $(x + 2, y + 2) \in C$. Além disso, para que c_1 e $(x + 1, y + 1)$ tenham códigos diferentes, temos que $(x + 1, y + 2) \in C$. Com isso, visto que $(x + 3, y + 2) \in C$ pela Configuração 5.1 sobre c' , então obtemos uma

Figura 5.14: Amigo isolado não pertencente a C'

cadeia $X = \{(x', y + 2) : x \leq x' \leq x + 3\}$ de tamanho 4 em formato I com no máximo 3 amigos, que é amiga de c' , uma contradição pois c' já estaria satisfeito após a Regra 4.

Suponha agora, por contradição, que c_3 é isolado e que c_3 é amigo de um vértice $c'_2 \in C'$. Pela Configuração 5.1, temos que a única possibilidade é $c'_2 = (x, y - 3)$. Pela impossibilidade (g), temos que $c' \neq (x + 3, y)$. Portanto, $c' = (x + 1, y + 2)$ como ilustrado na Figura 5.14.

Como c_1 é isolado, então $(x + 2, y), (x + 1, y - 1) \notin C$. Se $(x + 2, y - 1) \in C$, então $(x + 1, y - 1) \in U_3$ e portanto c_1 é vizinho de dois vértices em U_3 , ficando com $sobra(c_1) \geq 4/3$ pela Tabela 5.1, uma contradição pois assumimos que $sobra(c_1) < 1/2$. Logo, $(x + 2, y - 1) \notin C$. Se $(x + 3, y) \notin C$, então $I((x + 1, y)) = I((x + 2, y)) = \{(x + 1, y)\}$, uma contradição. Logo, $(x + 3, y) \in C$. Além disso, $(x + 3, y + 2) \in C$ pela Configuração 5.1 sobre c' e $(x + 3, y + 1) \in C$ para que $(x + 2, y + 1)$ tenha código não vazio. Se $(x + 3, y - 1) \in C$, então teríamos uma cadeia $X = \{(x + 3, y') : y - 1 \leq y' \leq y + 2\}$ de tamanho 4, que é amiga de c_1 e satisfaz a condição do Corolário 5.1, uma contradição pois c_1 estaria satisfeito por X antes da aplicação da Regra 7. Logo $(x + 3, y - 1) \notin C$. Com isso, temos que $(x + 2, y - 2) \in C$ para que $I((x + 2, y - 1)) \neq \emptyset$. Ou seja, $I((x + 2, y - 1)) = \{(x + 2, y - 2)\}$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_2 , temos também que $I((x + 1, y - 2)) = \{(x + 2, y - 2)\}$, uma contradição. \square

5.8 Cadeias X de tamanho 3 com 3 amigos insatisfeitos

Pelo Teorema 5.1, precisamos analisar apenas os vértices $c' \in C'$ que não possuem amigos pertencentes a cadeias de tamanho maior ou igual a 4. Ou seja, todos os seus amigos pertencem a cadeias de tamanho 3 ou são vértices isolados. Seja $c' \in C'$ um vértice nessa situação. Se fosse possível provar que cada amigo de c' envia carga maior ou igual a $1/4$ para c' após a aplicação da Regra 10, então c' receberia carga total maior ou igual a 1, ficando satisfeito. Nesta seção, analisaremos se isso é possível quando o amigo de c' pertence a uma cadeia X de tamanho 3.

Note que, após a aplicação da Regra 7, toda cadeia X de tamanho 3 tem $sobra(X) \geq 1/2$. Isto ocorre pois apenas a Regra 3, dentre as 7 primeiras regras, altera a carga de uma cadeia de tamanho 3. No entanto, as cadeias de tamanho 3 que enviam carga pela Regra 3 possuem sobra maior ou igual a 1,5 (antes da aplicação da Regra 3), devido a presença de um vértice pertencente a $U_{\geq 3}$ na sua vizinhança.

Se X tem exatamente um amigo insatisfeito antes da aplicação da Regra 10, então X envia carga maior ou igual a $1/2$ para c' até a aplicação da Regra 10. Se X tem exatamente dois amigos insatisfeitos antes da aplicação da Regra 10, então X envia carga maior ou igual a $1/4$ para c' pela Regra 10. O problema ocorre quando X tem exatamente 3 amigos insatisfeitos antes da aplicação da Regra 10. Tal situação ocorre no exemplo da Figura 5.6. Nesses casos, vamos provar que X pode ser ajudado por uma outra cadeia X' , que chamaremos de *parceira* de X , que possui exatamente um amigo e este é também amigo de X . As exceções da Regra 10 contemplam tais casos, fazendo com que X' envie carga $1/2$ para o seu único amigo e X envie carga $1/4$ para seus amigos que não são amigos de X' . Mais formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 5.6. *Sejam X e X' duas cadeias de tamanho 3. Dizemos que X' é parceira de X se X é amiga de três vértices $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$ e uma das configurações abaixo ou análogas ocorre para algum $x, y \in \mathbb{Z}$:*

- (a) $X' \supseteq \{(x, y + 2), (x + 1, y + 2)\}$, $c'_1 = (x, y)$, $c'_2 = (x + 3, y - 2)$, $c'_3 = (x + 5, y + 1)$ e $X = \{(x + 2, y), (x + 3, y), (x + 3, y + 1)\}$,
- (b) $X' = \{(x, y + 2), (x + 1, y + 2), (x + 2, y + 2)\}$, $c'_1 = (x, y)$, $c'_2 = (x + 3, y - 2)$, $c'_3 = (x + 6, y)$ e $X = \{(x + 2, y), (x + 3, y), (x + 4, y)\}$,

(c) $X' = \{(x, y + 2), (x + 1, y + 2), (x + 2, y + 2)\}$, $c'_1 = (x, y)$, $c'_2 = (x + 4, y - 1)$,
 $c'_3 = (x + 2, y - 4)$ e $X = \{(x + 2, y), (x + 2, y - 1), (x + 2, y - 2)\}$,

ou se X é amiga de dois vértices $c'_1, c'_2 \in C'$, c'_2 tem um amigo $c'_3 \in C'$ e a configuração abaixo ou análoga ocorre para algum $x, y \in \mathbb{Z}$:

(d) $X' = \{(x, y + 2), (x + 1, y + 2), (x + 2, y + 2)\}$, $c'_1 = (x, y)$, $c'_2 = (x + 4, y - 1)$,
 $c'_3 = (x + 6, y - 1)$ e $X = \{(x + 2, y), (x + 2, y - 1), (x + 2, y - 2)\}$.

A Figura 5.15 ilustra os casos da Definição 5.6. Em algumas situações, para deixar mais claro, diremos que X' é *parceira de X com relação a c'_1* se X e X' são amigas de c'_1 e X' é parceira de X .

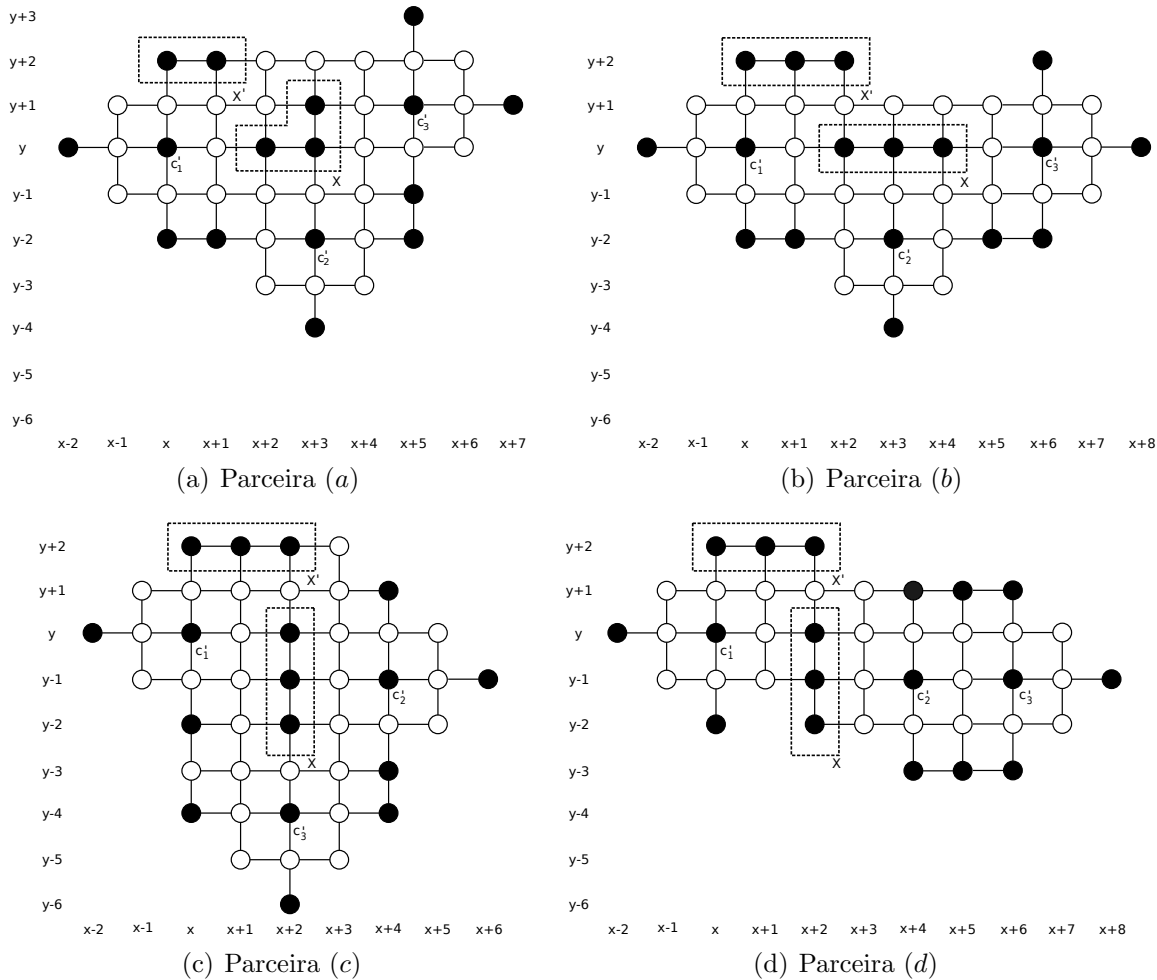


Figura 5.15: Cadeias parceiras.

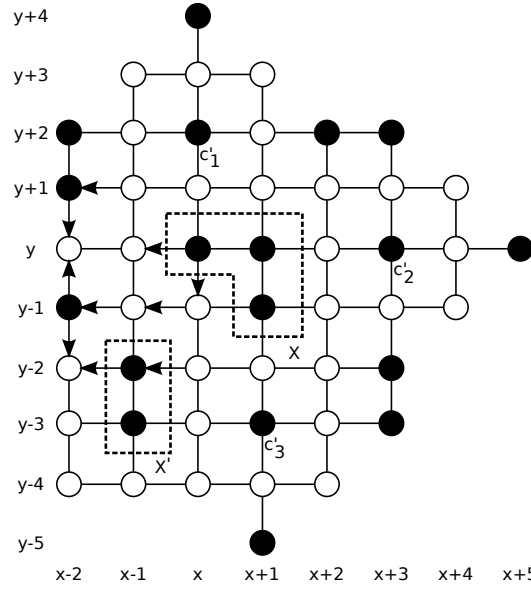


Figura 5.16: Cadeia em formato **L** de tamanho 3 com 3 amigos.

Teorema 5.3. *Seja X uma cadeia de tamanho 3 amiga de três vértices insatisfeitos antes da aplicação da Regra 10 tal que $sobra(X) < 3/4$. Então existe uma cadeia X' , parceira de X , e um amigo $c'_1 \in C'$ de X tais que c'_1 é o único amigo insatisfeito de X' antes da aplicação da Regra 10 ou c'_1 recebeu carga $1/2$ de X' antes da aplicação da Regra 10.*

Demonstração. Analisaremos os casos em que uma cadeia de tamanho 3 possui 3 amigos.

Caso 1 : Cadeia de tamanho 3 em formato **L** com 3 amigos insatisfeitos.

Seja $X = \{(x, y), (x + 1, y), (x + 1, y - 1)\}$ uma cadeia de tamanho 3 em formato **L**, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, com 3 amigos insatisfeitos $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$. Pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), vemos que nenhum vértice de X pode ser amigo de dois vértices de C' . Portanto, todos são amigos de exatamente um vértice de C' . O vértice $(x + 1, y)$ pode ser amigo de $(x + 1, y + 2)$ ou $(x + 3, y)$. Sem perda de generalidade, suponha que seja $c'_2 = (x + 3, y)$. Pela Configuração 5.1, temos que $(x + 1, y - 1)$ só pode ser amigo de $c'_3 = (x + 1, y - 3)$. Pela impossibilidade (g), temos que $(x - 2, y) \notin C'$ e portanto (x, y) só pode ser amigo de $c'_1 = (x, y + 2)$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.16.

Como X tem tamanho 3, então $(x - 1, y) \notin C$ e $(x, y - 1) \notin C$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_3 , temos que $(x - 1, y - 3) \in C$ e $(x, y - 3), (x, y - 2), (x + 1, y - 2) \notin C$. Portanto $(x - 1, y - 2) \in C$ para que $I((x, y - 2)) \neq \emptyset$. Note ainda que $(x - 1, y - 1) \notin C$, caso contrário $(x, y - 1) \in U_3$ e $sobra(X) \geq 3/2$, uma contradição. Além disso, para que $I((x - 1, y - 1)) \neq I((x, y - 2)) = \{(x - 1, y - 2)\}$, temos que $(x - 2, y - 1) \in C$ e

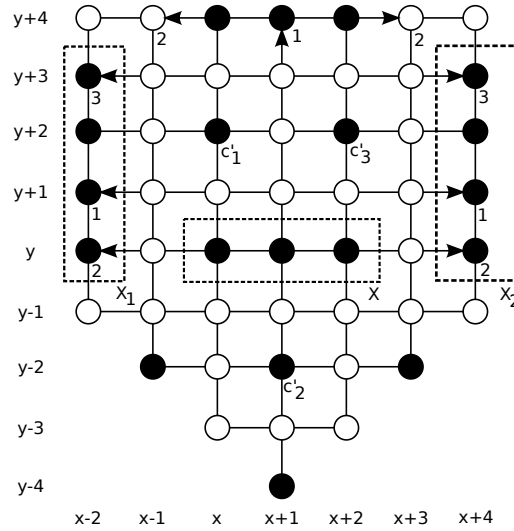


Figura 5.17: Cadeia de tamanho 3 em formato **I** com 2 amigos à distância 2.

portanto $I((x-1, y-1)) = \{(x-2, y-1), (x-1, y-2)\}$. Como $I((x-1, y-1)) = \{(x-2, y-1), (x-1, y-2)\} \subseteq I((x-2, y-2))$, temos que $|I((x-2, y-2))| \geq 3$. Finalmente, note que $(x-2, y-2) \notin C$, pois senão teríamos uma cadeia amiga de c'_3 que contém $\{(x-2, y-1), (x-2, y-2), (x-1, y-2), (x-1, y-3)\}$, de tamanho maior ou igual a 5 ou de tamanho 4 em formato **Z**, uma contradição visto que c'_3 estaria satisfeito antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1). Ou seja, $(x-2, y-2) \in U_{\geq 3}$. Com isso, temos uma cadeia $X' \supseteq \{(x-1, y-2), (x-1, y-3)\}$ de tamanho maior ou igual a 3 com $sobra(X') \geq 3/2$ pela Tabela 5.1. Se $|X'| \geq 4$, então c'_3 é satisfeito por X' pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1, uma contradição. Logo $|X'| = 3$ e, pela Definição 5.6, X' é parceira de X . Portanto, X' envia carga $1/2$ para c'_3 pela Regra 8, como desejado.

Caso 2 : Cadeia de tamanho 3 em formato **I** com 3 amigos insatisfeitos, dois deles à distância 2 entre si.

Seja $X = \{(x, y), (x+1, y), (x+2, y)\}$ uma cadeia de tamanho 3 em formato **I**, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, com 3 amigos insatisfeitos $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$, dois deles à distância 2 entre si. Sem perda de generalidade, suponha que $c'_1 = (x, y+2) \in C'$ e $c'_3 = (x+2, y+2) \in C'$ são os amigos de X que estão a distância 2 entre si. Pela Configuração 5.1, pela impossibilidade (f) e pelo fato de X ter tamanho 3, temos que $c'_2 = (x+1, y-2) \in C'$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.17.

Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e c'_3 , temos que $(x-2, y+2), (x, y+4), (x+2, y+4), (x+4, y+2) \in C$ e $(x-1, y+1), (x-1, y+2), (x-1, y+3), (x, y+3), (x+1, y+2), (x+1, y+3), (x+2, y+3), (x+3, y+1), (x+3, y+2), (x+3, y+3) \notin C$. Portanto, $(x+1, y+4) \in C$ para

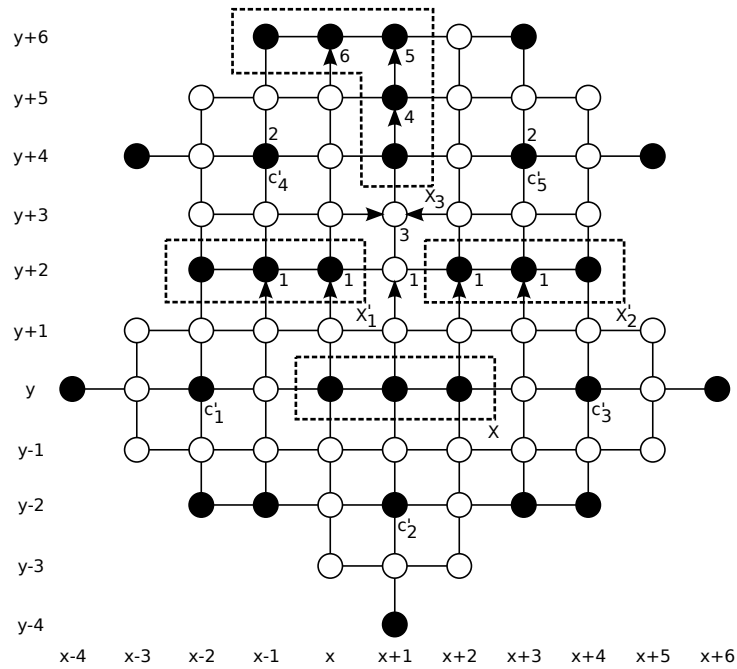


Figura 5.18: Cadeia de tamanho 3 em formato **I** com 3 amigos insatisfeitos, todos à distância maior que 2 e dois deles com uma das coordenadas iguais

que $I((x+1, y+3)) \neq \emptyset$. Como c'_1 e c'_3 estão insatisfeitos antes da aplicação da Regra 10, temos que $(x-1, y+4), (x+3, y+4) \notin C$, caso contrário teríamos uma cadeia de tamanho maior ou igual a 4 que satisfaria c'_1 e c'_3 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1). Como X tem tamanho 3, temos que $(x-1, y), (x, y+1), (x+1, y+1), (x+2, y+1), (x+3, y) \notin C$. Com isso, conclui-se que $(x-2, y+1), (x-2, y+3), (x+4, y+1), (x+4, y+3) \in C$ para que os códigos dos seguintes vértices não sejam vazios: $(x-1, y+1), (x-1, y+3), (x+3, y+1), (x+3, y+3)$.

Pela Configuração 5.1 sobre c'_2 , temos que $(x, y-2), (x, y-1), (x+1, y-1), (x+2, y-2), (x+2, y-1) \notin C$. Assim, para que $I((x, y-1)) \neq I((x-1, y))$, temos que $(x-2, y) \in C$. Analogamente, para que $I((x+2, y-1)) \neq I((x+3, y))$, temos que $(x+4, y) \in C$. Com isso, obtemos duas cadeias $X_1 \supseteq \{(x-2, y') : y \leq y' \leq y+3\}$ e $X_2 \supseteq \{(x+4, y') : y \leq y' \leq y+3\}$ de tamanhos maiores ou iguais a 4, uma contradição, pois c'_1 e c'_3 estariam satisfeitos antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1). Portanto, concluímos que essa configuração é impossível.

Caso 3 : Cadeia X de tamanho 3 em formato **I** com 3 amigos insatisfeitos, todos à distância maior que 2 entre si e dois deles com uma das coordenadas iguais.

Seja $X = \{(x, y), (x+1, y), (x+2, y)\}$ uma cadeia de tamanho 3 em formato **I**, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, com 3 amigos insatisfeitos $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$ tais que $c'_1 = (x-2, y) \in C'$ e

$c'_3 = (x + 4, y) \in C'$. A outra possibilidade que temos é ter $c'_1 = (x + 1, y + 2) \in C'$ e $c'_3 = (x + 1, y - 2) \in C'$. No entanto, essa possibilidade não gera um código de identificação, pois teremos necessariamente dois vértices com o mesmo código de identificação. Sem perda de generalidade, suponha que $c'_2 = (x + 1, y - 2) \in C'$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.18.

Como X tem tamanho 3, temos que $(x, y + 1), (x + 1, y + 1), (x + 2, y + 1) \notin C$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_1, c'_2 e c'_3 , temos que $(x - 2, y + 1), (x - 1, y - 1), (x - 1, y), (x - 1, y + 1), (x, y - 2), (x, y - 1), (x + 2, y - 2), (x + 2, y - 1), (x + 3, y - 1), (x + 3, y), (x + 3, y + 1), (x + 4, y + 1) \notin C$. Portanto, temos que $(x - 1, y + 2), (x, y + 2), (x + 2, y + 2), (x + 3, y + 2) \in C$, para que os códigos dos seguintes vértices sejam válidos: $(x - 1, y + 1), (x, y + 1), (x + 2, y + 1), (x + 3, y + 1)$. Como c'_1 e c'_3 estão insatisfeitos, temos que $(x + 1, y + 2) \notin C$, senão teríamos uma cadeia de tamanho maior ou igual a 7 amiga de c'_1 e c'_3 , uma contradição, e que $X'_1 = \{(x - 2, y + 2), (x - 1, y + 2), (x, y + 2)\}$ e $X'_2 = \{(x + 2, y + 2), (x + 3, y + 2), (x + 4, y + 2)\}$ são cadeias de tamanho 3, senão c'_1 ou c'_3 estariam satisfeitos antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1). Note que X'_1 e X'_2 são parceiras de X (ver Definição 5.6(b)).

Se c'_1 é o único amigo de X'_1 insatisfeito antes da Regra 10, então temos o desejado. Suponha então que X'_1 possui um amigo $c'_4 \neq c'_1$ insatisfeito antes da Regra 10. Se c'_3 é o único amigo de X'_2 insatisfeito antes da Regra 10, então também temos o desejado. Suponha então que X'_2 possui um amigo $c'_5 \neq c'_3$ insatisfeito antes da Regra 10.

Note que $c'_4 \neq (x - 4, y + 2)$ pela impossibilidade (f) com c'_1 e que $c'_4 \neq (x - 2, y + 4)$ senão $(x - 1, y + 1)$ e $(x - 1, y + 3)$ teriam o mesmo código ou X'_1 não seria de tamanho 3. Analogamente, temos que $c'_5 \neq (x + 6, y + 2)$ e $c'_5 \neq (x + 4, y + 4)$. Portanto, $c'_4 \in \{(x - 1, y + 4), (x, y + 4)\}$ e $c'_5 \in \{(x + 2, y + 4), (x + 3, y + 4)\}$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_4 e c'_5 , temos que $c'_4 = (x, y + 4)$ e $c'_5 = (x + 2, y + 4)$, ou $c'_4 = (x - 1, y + 4)$ e $c'_5 = (x + 3, y + 4)$. Se $c'_4 = (x, y + 4)$ e $c'_5 = (x + 2, y + 4)$, então $(x + 1, y + 3)$ tem código vazio pela Configuração 5.1 sobre c'_4 e c'_5 , uma contradição. Portanto, $c'_4 = (x - 1, y + 4)$ e $c'_5 = (x + 3, y + 4)$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.18.

Se $(x + 1, y + 3) \in C$, então c'_4 e c'_5 teriam filho adjacente a duas cadeias e teriam sido satisfeitos pela Regra 3 (caso ambas as cadeias tenham tamanho 3) ou pela Regra 4 (caso contrário, de acordo com o Lema 5.6), uma contradição. Logo $(x + 1, y + 3) \notin C$. Note que $I((x + 1, y + 3)) = \{(x + 1, y + 4)\}$. Portanto, para que $I((x + 1, y + 4)) \neq I((x + 1, y + 3))$, temos que $(x + 1, y + 5) \in C$. Para que $I((x + 1, y + 5)) \neq I((x + 1, y + 4)) = \{(x + 1, y + 4), (x + 1, y + 5)\}$, então $(x + 1, y + 6) \in C$ pois $I((x + 1, y + 5)) \subseteq \{(x + 1, y + 4), (x + 1, y + 5), (x + 1, y + 6)\}$

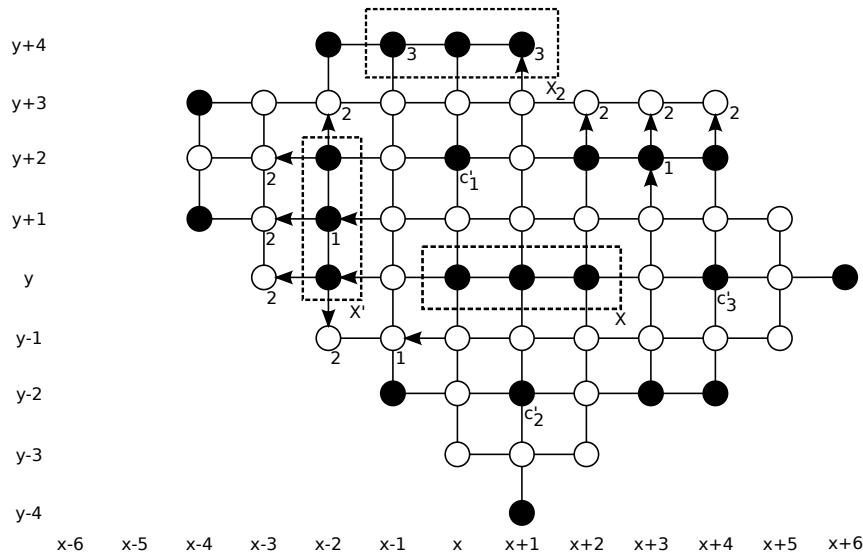


Figura 5.19: Cadeia de tamanho 3 em formato **I** com 3 amigos insatisfeitos, de modo que não existem dois deles com uma das coordenadas iguais

devido a Configuração 5.1 aplicada a c'_4 e c'_5 . Finalmente, para que $(x, y + 5)$ e $(x + 2, y + 5)$ tenham códigos diferentes, temos que $(x, y + 6) \in C$ ou $(x + 2, y + 6) \in C$. Com isso, obtemos uma cadeia de tamanho maior ou igual 5 que satisfaria c'_4 e c'_5 pela Regra 4, uma contradição. Portanto, X'_1 ou X'_2 é parceira de X com apenas um amigo insatisfeito antes da Regra 10, como desejado.

Caso 4 : Cadeia de tamanho 3 em formato **I** com 3 amigos insatisfeitos, de modo que não existem dois deles com uma das coordenadas iguais.

Seja $X = \{(x, y), (x + 1, y), (x + 2, y)\}$ uma cadeia de tamanho 3 em formato **I**, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, com 3 amigos insatisfeitos $c'_1, c'_2, c'_3 \in C'$ tais que, sem perda de generalidade, $c'_1 = (x, y + 2)$, $c'_2 = (x + 1, y - 2)$ e $c'_3 = (x + 4, y)$, como ilustrado na Figura 5.19.

Como X tem tamanho 3, então $(x - 1, y), (x, y + 1), (x + 1, y + 1), (x + 2, y + 1), (x + 3, y) \notin C$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_3 , temos que $(x + 3, y + 1), (x + 4, y + 1) \notin C$. Logo, para que $(x + 3, y + 1)$ tenha código não vazio, temos que $(x + 3, y + 2) \in C$. Como $(x + 2, y + 2), (x + 4, y + 2) \in C$ pela Configuração 5.1 sobre c'_1 e c'_3 , então temos uma cadeia que contém $\{(x', y + 2) : x + 2 \leq x' \leq x + 4\}$. Observe que $(x + 2, y + 3), (x + 3, y + 3), (x + 4, y + 3) \notin C$, pois, caso contrário, teríamos uma cadeia de tamanho ≥ 4 que satisfaria c'_1 e c'_3 antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1). Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que $(x, y + 3), (x + 1, y + 2), (x + 1, y + 3) \notin C$ e $(x, y + 4) \in C$. Portanto, para que $(x + 1, y + 3)$ tenha código não vazio, temos que $(x + 1, y + 4) \in C$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_2 , temos

que $(x, y - 2), (x, y - 1), (x + 1, y - 1) \notin C$. Para que $(x, y - 1)$ e $(x - 1, y)$ tenham códigos diferentes, temos que $(x - 2, y) \in C$. Além disso, para que $(x - 1, y + 1)$ tenha código não vazio, temos que $(x - 2, y + 1) \in C$. Como $(x - 2, y + 2) \in C$ pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos uma cadeia $X' = \{(x - 2, y') : y \leq y' \leq y + 2\}$ (note que se esta cadeia tivesse tamanho maior ou igual a 4, então c'_1 estaria satisfeito antes da Regra 10 pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1, uma contradição). Como X' tem tamanho 3, então $(x - 2, y + 3) \notin C$ e, para que $(x - 1, y + 3)$ tenha código não vazio, $(x - 1, y + 4) \in C$. Com isso, temos uma cadeia $X_2 \supseteq \{(x - 1, y + 4), (x, y + 4), (x + 1, y + 4)\}$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.19.

Observe que, pela Definição 5.6(c), X' é parceira de X . Desejamos provar que c'_1 é o único amigo de X' , o que terminaria a prova. Suponha por contradição que X' tem um amigo $c'_4 \neq c'_1$. Como X' tem tamanho 3, então $(x - 3, y), (x - 3, y + 1), (x - 3, y + 2) \notin C$. Note que, pela Configuração 5.1 sobre c'_4 , temos que $c'_4 \notin \{(x - 2, y - 2), (x, y), (x, y + 1), (x - 2, y + 4)\}$. Portanto $c'_4 \in \{(x - 4, y + 2), (x - 4, y), (x - 4, y + 1)\}$. Se $c'_4 = (x - 4, y + 2)$ ou $c'_4 = (x - 4, y)$, então $(x - 3, y + 1)$ e $(x - 1, y + 1)$ teriam o mesmo código $\{(x - 2, y + 1)\}$, uma contradição. Portanto, $c'_4 = (x - 4, y + 1)$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_4 , temos que $(x - 4, y + 2) \notin C$ e conseqüentemente $(x - 2, y + 4) \in C$, para que $(x - 3, y + 2)$ e $(x - 2, y + 3)$ tenham códigos diferentes. Com isso, $X_2 \supseteq \{(x - 2, y + 4), (x - 1, y + 4), (x, y + 4), (x + 1, y + 4)\}$ teria tamanho maior ou igual a 4 e no máximo 3 amigos, visto que $(x - 4, y + 4) \notin C'$ pela Configuração 5.1. Com isso, X_2 teria satisfeito c'_1 pela Regra 4, uma contradição. Portanto, X' é uma cadeia parceira de X que tem um único amigo insatisfeito (c'_1) antes da aplicação da Regra 10, como desejado. \square

5.9 Vértices de C' com um amigo em C'

Como dito nas seções anteriores, se fosse possível provar que todo amigo de um vértice de C' envia para ele uma carga de $\geq 1/4$, então todo vértice de C' estaria satisfeito. No entanto, se um vértice de C' tem como amigo um outro vértice de C' , ambos estão insatisfeitos após a aplicação da Regra 2 e não podem se ajudar. Como na seção anterior, vamos provar que existirão cadeias que vão auxiliar no envio da carga faltante.

Teorema 5.4. *Seja $c'_2 \in C'$ um vértice insatisfeito antes da Regra 10, com um amigo $c'_3 \in C'$. Então c'_2 fica satisfeito após a Regra 10 e existe uma cadeia X de tamanho 3 que envia carga $1/2$ para c'_2 pela Regra 10 exceção (d). Ademais, se X tem um amigo $c'_1 \neq c'_2$*

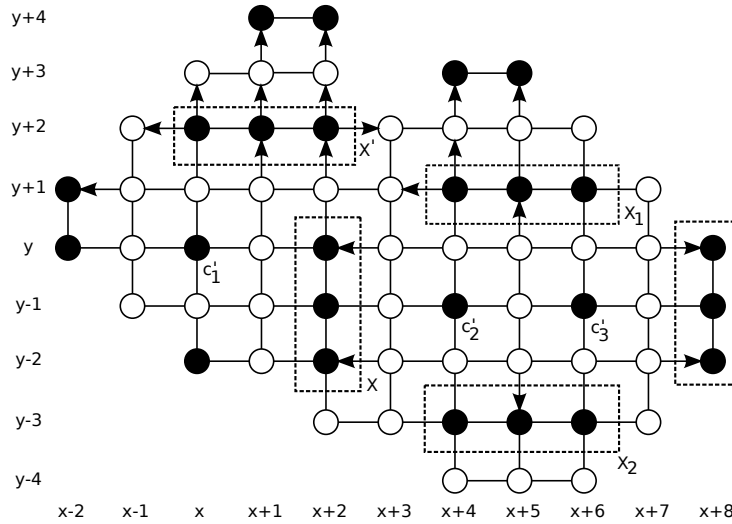


Figura 5.20: Vértice $c'_2 \in C'$ com um amigo $c'_3 \in C'$

insatisfeito antes da Regra 10, então existe uma cadeia X' , parceira de X com relação a c'_1 , tal que c'_1 é o único amigo insatisfeito de X' antes da Regra 10.

Demonstração. Sem perda de generalidade, sejam $c'_2 = (x + 4, y - 1)$ e $c'_3 = (x + 6, y - 1)$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$. Pela Configuração 5.1 sobre c'_2 e c'_3 , temos que $(x + 2, y - 1)$, $(x + 4, y - 3)$, $(x + 4, y + 1)$, $(x + 6, y - 3)$, $(x + 6, y + 1)$, $(x + 8, y - 1) \in C$ e que os seguintes vértices não estão em C $(x + 3, y - 2)$, $(x + 3, y - 1)$, $(x + 3, y)$, $(x + 4, y - 2)$, $(x + 4, y)$, $(x + 5, y - 2)$, $(x + 5, y - 1)$, $(x + 5, y)$, $(x + 6, y - 2)$, $(x + 6, y)$, $(x + 7, y - 2)$, $(x + 7, y - 1)$, $(x + 7, y)$.

Para que $(x + 5, y - 2)$ e $(x + 5, y)$ tenham código não vazio, temos que $(x + 5, y - 3)$, $(x + 5, y + 1) \in C$. Se $(x + 3, y - 3) \in C$, então teríamos uma cadeia contendo $\{(x', y - 3) : x + 3 \leq x' \leq x + 6\}$ de tamanho ≥ 4 que satisfaria c'_2 antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1), uma contradição. Portanto, $(x + 3, y - 3) \notin C$ e, analogamente, conclui-se que $(x + 3, y + 1)$, $(x + 7, y - 3)$, $(x + 7, y + 1) \notin C$. Seja $X_1 = \{(x', y + 1) : x + 4 \leq x' \leq x + 6\}$ e seja $X_2 = \{(x', y - 3) : x + 4 \leq x' \leq x + 6\}$.

Para que $(x + 3, y - 2)$ tenha código não vazio, então $(x + 2, y - 2) \in C$ e, analogamente, conclui-se que $(x + 2, y)$, $(x + 8, y - 2)$, $(x + 8, y) \in C$. Se $(x + 2, y - 3) \in C$, então temos uma cadeia $\{(x + 2, y') : y - 3 \leq y' \leq y\}$ de tamanho ≥ 4 que satisfaria c'_2 antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1), uma contradição (note que $(x + 2, y + 2) \notin C'$, pois, caso contrário, $(x + 4, y + 2) \in C$ pela Configuração 5.1 e X_1 teria tamanho ≥ 4 , uma contradição). Analogamente, temos que $(x + 2, y + 1) \notin C$. Seja $X = \{(x + 2, y') : y - 2 \leq y' \leq y\}$. Esta configuração é ilustrada na Figura 5.20.

Se, além de c'_2 e c'_3 , X_1 tem um amigo $c'_4 \notin \{c'_2, c'_3\}$, então $c'_4 = (x+5, y+3)$ pelo fato de X_1 ter tamanho 3 e, pela Configuração 5.1 sobre c'_4 , teríamos que $(x+3, y+1)$ e $(x+4, y+2)$ teriam o mesmo código $\{(x+4, y+1)\}$, uma contradição. Logo X_1 , e analogamente X_2 , tem apenas dois amigos c'_2 e c'_3 . Com isso, pela Regra 10, X_1 e X_2 enviam carga $\geq 1/4$ para c'_2 cada. Agora, nos resta provar que X envia carga $\geq 1/2$ para c'_2 .

Se X tem apenas c'_2 como amigo em C' , então ele envia pelo menos $1/2$ para c'_2 e estamos satisfeitos. Suponha que X tem um amigo $c'_1 \in C'$, $c'_1 \neq c'_2$, insatisfeito antes da Regra 10. Se $c'_1 = (x+2, y+2)$, então, pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que $(x+4, y+2) \in C$ e X_1 teria tamanho ≥ 4 , uma contradição. Portanto, $c'_1 \neq (x+2, y+2)$ e, analogamente, $c'_1 \neq (x+2, y-4)$. Se $c'_1 = (x, y-1)$, então o vértice $(x+2, y-1)$ da cadeia X tem apenas dois vizinhos em U_2 e, portanto, $sobra(X) \geq 4$, uma contradição, pois c'_1 e c'_2 estariam satisfeitos por X antes da Regra 10. Logo, $c'_1 = (x, y)$ ou $c'_1 = (x, y-2)$. Sem perda de generalidade, considere que $c'_1 = (x, y)$. Pela Regra 10 exceção (d), temos que X não envia carga para c'_1 . Assim, antes da aplicação da Regra 10, c'_2 é o único amigo de X insatisfeito e X possui *sobra* pelo menos $1/2$. Isto encerra a primeira parte do teorema. Agora vamos provar a segunda parte.

Pela Configuração 5.1 sobre c'_1 , temos que $(x, y+2) \in C$. Para que $(x+1, y+1)$ tenha código não vazio, temos que $(x+1, y+2) \in C$. Para que $(x+2, y+1)$ e $(x+3, y)$ tenham códigos diferentes, então $(x+2, y+2) \in C$. Seja X' a cadeia que contém $\{(x', y+2) : x \leq x' \leq x+2\}$. Se X' tem tamanho ≥ 4 , X' satisfaria c'_1 antes da Regra 10 (pelo Lema 5.6 ou pelo Corolário 5.1), uma contradição. Logo X' tem tamanho 3. Portanto $(x-1, y+2), (x, y+3), (x+1, y+3) \notin C$ e, para que $(x-1, y+1)$ tenha código não vazio, temos que $(x-2, y+1) \in C$. Além disso $(x+2, y+3), (x+3, y+2) \notin C$ e, para que tenham códigos diferentes, temos que $(x+2, y+4) \in C$. Finalmente, $(x+1, y+1), (x+1, y+3) \notin C$ e, para que tenham códigos diferentes, temos que $(x+1, y+4) \in C$. Com isso, pela Configuração 5.1 e pela impossibilidade (f), temos que X' tem apenas um amigo (c'_1). Assim, como desejado, podemos concluir que X' é parceira de X com relação a c'_1 .

Na próxima seção, fazemos uma conclusão sobre como a aplicação das regras de descarga asseguram que todos os vértices ficam satisfeitos baseado no que foi provado neste capítulo.

□

5.10 Conclusão

Como mencionado, temos pela Tabela 5.1 que os vértices com sobra negativa são vértices de C' ou vértices de cadeias com apenas um vizinho na cadeia. Os vértices do segundo caso são satisfeitos na Regra 2 (direto para cadeias de tamanho 3 ou 4 e pelo Lema 5.4 para cadeias de tamanho ≥ 5). Com isso, os vértices com sobra negativa após a Regra 2 são os vértices de C' . Seja então $c' \in C'$.

Se a Regra 3 se aplica a c' , então c' é satisfeito e as cadeias de tamanho 3 que enviam carga para c' ficam com sobra ≥ 1 pela Tabela 5.1, visto que ambas tem um vértice de $U_{\geq 3}$ vizinho a elas. Se $c' \in C'$ tem um amigo em uma cadeia de tamanho ≥ 4 , então, pelo Teorema 5.1, c' fica satisfeito após a aplicação das regras.

Suponha então que $c' \in C'$ não tem amigo em cadeia de tamanho ≥ 4 e está insatisfeito após a aplicação da Regra 6. Sejam c_1, c_2, c_3, c_4 os quatro amigos de c' . Nesse caso, os amigos de C' são vértices isolados ou pertencem a cadeias de tamanho 3. Se c_1 é isolado e $c_1 \notin C'$, então temos pelo Teorema 5.2 que c_1 envia carga $\geq 1/2$ para c' pela Regra 7 e $sobra(c_1) \geq 0$ após a aplicação das regras. Se $c_1 \in C'$, temos pelo Teorema 5.4 que c' é satisfeito após a aplicação das regras.

Suponha então que c_1 pertence a uma cadeia X de tamanho 3. Como já mencionado, temos que toda cadeia de tamanho 3 tem sobra de carga $\geq 1/2$ após a aplicação da Regra 7. Então, após a aplicação da Regra 10, c' recebe carga $\geq 1/4$ de X ou o par (X, c') cai numa das exceções da Regra 10. Se X não envia carga $\geq 1/4$, então, pelos Teoremas 5.3 e 5.4, X possui uma cadeia parceira X' que envia carga $1/2$ para c' pela Regra 10, ficando com $sobra(X') \geq 0$ após a aplicação das regras. Se X' é parceira apenas de X com relação a c' , então estamos terminados. Caso contrário, se X' é parceira de X e de outra cadeia X_2 de tamanho 3 ambas com relação a c' , então estamos na configuração determinada pela Observação 5.2 abaixo, que sai diretamente da Definição 5.6 (com ajuda da Figura 5.15).

Observação 5.2. *O único modo de uma cadeia X' ser parceira de duas cadeias distintas X e X_2 com relação a um mesmo vértice c'_1 é se o caso (a) da Definição 5.6 ocorrer duas vezes, ou seja, se ocorrer uma configuração análoga a seguinte (ilustrado na Figura 5.21), para algum $x, y \in \mathbb{Z}$:*

- $X' = \{(x - 1, y + 2), (x, y + 2), (x + 1, y + 2)\}$, $c'_1 = (x, y)$, $c'_2 = (x + 3, y - 2)$, $c'_3 = (x + 5, y + 1)$, $X = \{(x + 2, y), (x + 3, y), (x + 3, y + 1)\}$ e $X_2 = \{(x - 2, y), (x - 3, y), (x - 3, y + 1)\}$.

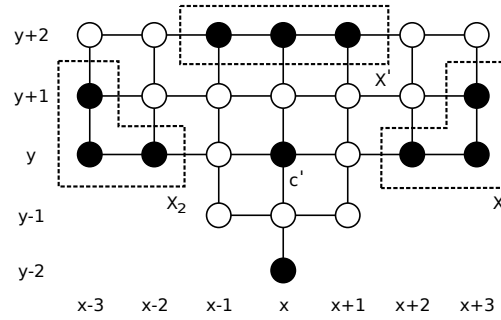


Figura 5.21: X' é parceira de X e X_2 com relação a c'_1

Nesse caso, para que $(x - 1, y + 1)$ e $(x - 2, y + 2)$ tenham códigos diferentes, então $(x - 2, y + 3) \in C$. Além disso, para que $(x - 2, y + 2)$ e $(x - 1, y + 3)$ tenham códigos diferentes, então $(x - 1, y + 4) \in C$ (ou seja, $(x - 1, y + 3) \in U_{\geq 3}$). Analogamente, $(x + 1, y + 3) \in U_{\geq 3}$. Com isso, temos pela Tabela 5.1 que $sobra(X') \geq 2.5$ após a Regra 2. Além disso, pela Configuração 5.1, temos que c' é o único amigo de X' . Assim, X' envia carga $1/2$ para c' pela Regra 8 e envia carga $1/2$ para c' novamente pela Regra 9. Com isso, c' recebe carga 1 de X' , ficando satisfeito.

Capítulo 6

Conclusão

Desde de que o conceito de código de identificação foi introduzido por ([Karpovsky et al., 1998]), muitas pesquisas foram realizadas sobre códigos e suas variantes. Como pode-se encontrar grafos com códigos de basicamente todos os tamanhos ([Charon et al.,2005]), geralmente se restringe a pesquisa a alguns grafos ou classes de grafos para a obtenção de resultados mais significativos. Uma classe de grafo que desperta especial interesse dos pesquisadores que estudam códigos de identificação é a classe de grafos infinitos. Como o conjunto de vértices é infinito nesse tipo de grafo, passamos a pesquisar a densidade do código de identificação ao invés do seu tamanho. Dentre os grafos infinitos mais estudados, temos as grades quadradas infinitas. Alguns limites para a densidade do código nessa grade foram obtidos em [Cohen et al.,1999], [Gravier et al.,1999] e em [Karpovsky et al., 1998]. Em 2005, Ben-Haim et al. provaram que $d^*(\mathcal{G}_S) = 7/20$ ([Ben-Haim e Litsyn, 2005]).

No nosso trabalho, fizemos uma revisão de vários resultados envolvendo códigos de identificação e grades infinitas e usamos a técnica do método da descarga para mostrar que a densidade mínima de um código de identificação em grades quadradas infinitas é $\frac{7}{20}$, como foi feito de outra forma em [Ben-Haim e Litsyn, 2005]. Nosso trabalho é consideravelmente mais extenso que o resultado de [Ben-Haim e Litsyn, 2005]. Apesar de mais extenso, acreditamos que o nosso trabalho é de mais fácil compreensão.

O método da descarga foi uma ferramenta desenvolvida para tentar resolver o Problema das 4 cores, problema matemático bastante conhecido especialmente no ramo da combinatória. Nos últimos anos, esse método foi utilizado para resolver dezenas de outros problemas. Além disso, essa ferramenta ser bastante promissora para a resolução de vários outros problemas em aberto. Neste trabalho, fazemos um breve histórico desse técnica e

mostramos como ela funciona quando aplicada aos problemas.

Referências Bibliográficas

- [Appel e Haken, 1976] K. Appel e W. Haken. Every planar map is four colorable, *Bulletin of the American Mathematical Society* **82** (5) (1976), 711-712.
- [Ben-Haim e Litsyn, 2005] Y. Ben-Haim e S. Litsyn. Exact minimum density of identifying vertices in square grids, *SIAM J. Discrete Math.* **19** (1) (2005),69–82.
- [Bondy and Murty, 2008] J.A.Bondy and U.R.S.Murty. Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics series, *Springer*, New York, (2008).
- [Bouznif et al., 2012] M. Bouznif, F. Havet e M. Preissman. Minimum-density identifying in square grids, *Manuscript* (2012).
- [Charon et al.,2001] Irène Charon, Iiro Honkala, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. General bounds for identifying codes in some infinite regular graphs, *Electron. J. Combin.* **8** (1) (2001),Research Paper 39, 21 pp. (electronic).li
- [Charon et al.,2004] Irène Charon, Iiro Honkala, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. The minimum density of an identifying code in the king lattice, *Discrete Math.* **276** (1-3) (2004), 95–109.
- [Charon et al.,2005] Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Possible cardinalities for identifying codes in graphs, *Australas. J. Combin.*, **32** (2005), 177–195.
- [Charon et al.,2007] Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs, *Discrete Math.* **307**(3-5)(2007), 356–366.
- [Cohen et al.,1999] Gérard Cohen, Iiro Honkala, Antoine Lobstein, and Gilles Zémor. New bounds for codes identifying vertices in graphs, *Electron. J. Combin.* (6) (1999), Research Paper 19, 14 pp. (electronic).
- [Cohen et al.,2000] Gérard Cohen, Iiro Honkala, Antoine Lobstein, and Gilles Zémor. Bounds for codes identifying vertices in the hexagonal grid, *SIAM J. Discrete Math.* **13** (4) (2000), 492–504 (electronic).
- [Cohen et al.,2001] Gérard D. Cohen, Iiro Honkala, Antoine Lobstein, and Gilles Zémor. On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals, *IEEE Trans. Comput.*, **50** (2) (2001), 174–176.

- [Cranston et al.,2009] Daniel W. Cranston and Gexin Yu. A new lower bound on the density of vertex identifying codes for the infinite hexagonal grid, *Electron. J. Combin.* **16** (1) (2009), Research Paper 113, 16.
- [Cukierman et al.,2013] Ari Cukierman and Gexin Yu. New bounds on the minimum density of a vertex identifying code for the infinite hexagonal grid, *Discrete Applied Mathematics* **161** (2013), 2910–2924.
- [Daniel et al., 2004] M. Daniel, S. Gravier e J. Moncel. Identifying codes in some subgraphs of the square lattice, *Theoretical Computer Science* **319** (2004), 411-421.
- [Duenha, 2002] Liana Dessandre Duenha. O Problema das 4 Cores, *Dissertação de Mestrado, Departamento de Computação e Estatística, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul* (2002).
- [Foucaud et al.,2011] Florent Foucaud, Eleonora Guerrini, Matjž Kovše, Reza Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov. Extremal graphs for the identifying code problem, *European Journal of Combinatorics* **32**(4)(2011),628–638.
- [Gravier et al.,1999] Gérard Cohen, Iiro Honkala, Michel Mollard, Sylvain Gravier, Antoine Lobstein, Charles Payan, and Gilles Zémor. Improved identifying codes for the grid, *Electron. J. Combin.* **6** (1999),Research Paper 19, Comment, 3 pp. (electronic).
- [Karpovsky et al., 1998] M.G. Karpovsky, K. Chakrabarty e L.B. Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory* **44** (2) (1998), 599–611.
- [Lobstein] Antoine Lobstein. Internet bibliography,
<http://www.infres.enst.fr/~lobstein/bibLOCDOMetID.html>
- [Salavatipour, 2003] Mohammad R. Salavatipour. Graph Coloring via the Discharging Method, *Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of Toronto* (2003).
- [Stanton, 2011] Brendon Michael Stanton. On Vertex Identifying Codes For Infinite Lattices, *Ph.D. thesis, Iowa State University* (2011).