UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Rafael Teixeira de Araújo

Convexidades de Caminhos e Convexidades Geométricas

FORTALEZA – CE
Fevereiro de 2014

Rafael Teixeira de Araújo

Convexidades de Caminhos e Convexidades Geométricas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação, do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos Grafos (Teoria da Computação).

Orientador: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio

FORTALEZA – CE
Fevereiro de 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

A691c Araújo, Rafael Teixeira de.
Convexidades de Caminhos e Convexidades Geométricas / Rafael Teixeira de Araújo. – 2014.
51 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Teoria dos Grafos (Teoria da Computação).
Orientação: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio.

1. Teoria dos grafos. 2. Grafos bipartidos. I. Título.

CDD 005

Dedico esse trabalho a meus pais que me apoiaram e ajudaram para que eu pudesse estar aqui nesse momento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, principio e fim de tudo.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram, incentivaram e torceram por mim.

A minha amiga Tatiane Fernandes Figueiredo, que foi a primeira pessoa que eu conheci no mestrado e sempre esteve ao meu lado, apoiado, incentivando, suportando, acalmando e encorajando mesmo sem muitas vezes me entender.

Aos meus amigos Marcio Costa e Carlos Vinícius e Arthur Araruna pela ajuda e incentivo nas horas de desespero.

Ao Rennan Dantas grande amigo que conheci e morador do lab 2.

À meus amigos de mestrado Cláudio, Eliezer, Thiago Alves pelos momentos divertidos que passamos nas disciplinas.

Aos professores Manoel Campêlo, Victor Campos e demais professores do ParGO pela ajuda e disponibilidade.

Aos membros da banca Leonardo Sampaio, Fabricio Benevides e Mitre Costa Dourado, pela disponibilidade e pelos excelentes comentários e contribuições.

Ao meu orientador professor Rudini Menezes Sampaio por ter aceito um completo estranho e desconhecido, por todo o apoio e paciência que sempre demonstra ter.

Ao grupo de pesquisa ParGO por ter me acolhido.

Aos amigos, funcionários e professores do MDCC/UFC.

A FUNCAP pelo apoio financeiro.

"A persistência é o menor caminho do êxito".

(Charles Chaplin)

Resumo

Nessa dissertação apresentamos resultados de complexidade relativos ao número de hull e o número de convexidade na convexidade P_3. Mostramos que o número de hull e o número de convexidade é NP-difícil mesmo em grafos bipartidos. Motivados por nossa pesquisa em convexidade baseada em caminhos introduzimos uma nova convexidade a qual definimos como convexidade dos caminhos induzidos de ordem três ou P_3^*. Mostramos uma relação da convexidade geodésica com a convexidade P_3^* no caso onde o grafo é uma junção de um K_m com um grafo não completo. Estudamos também convexidade geométrica e caracterizamos algumas classes de grafos em determinadas convexidade como as florestas de estrela na convexidade P_3, cografos cordais na convexidade P_3^*, e as florestas na convexidade TP. Mostramos também convexidades que são geométricas somente em uma determinada classe de grafos como os cografos na convexidade P_4+-free, os grafos livres de $\mathcal{F}$ na convexidade $\mathcal{F}$-free entre outras. Por fim demonstramos alguns resultados de convexidade geodésica e P_3^* na em grafos com poucos P_4's.

Palavras-chave: convexidade em grafos, número de hull, número de convexidade, convexidade P_3, convexidade geodésica, convexidade P_3^*, convexidade geométrica.

Abstract

In this dissertation we present complexity results related to the hull number and the convexity number for P_3 convexity. We show that the hull number and the convexity number are NP-hard even for bipartite graphs. Inspired by our research in convexity based on paths, we introduce a new convexity, where we defined as convexity of induced paths of order three or P_3^*. We show a relation between the geodetic convexity and the P_3^* convexity when the graph is a join of a K_m with a non-complete graph. We did research in geometric convexity and from that we characterized graph classes under some convexities such as the star florest in P_3 convexity, chordal cographs in P_3^* convexity, and the florests in TP convexity. We also demonstrated convexities that are geometric only in specific graph classes such as cographs in P_4+-free convexity, $\mathcal{F}$ free graphs in $\mathcal{F}$-free convexity and others. Finally, we demonstrated some results of geodesic convexity and P_3^* in graphs with few P_4's.

Key-words: convexity in graph, hull number, convexity number, P_3 convexity, geodetic convexity, P_3^* convexity, geometric convexity.

Sumário

Lista de ilustrações

1 Introdução

Nessa dissertação consideramos 2 temas no contexto de convexidade: Convexidade em Grafos e Convexidade Geométrica. Nos últimos anos, muitos artigos foram publicados estendendo os conceitos e métodos de matemática pura e matemática discreta para teoria dos grafos. O conceito de convexidade é um desses tópicos de interesse. Podemos fazer uma analogia entre os conceitos de conjunto convexo em matemática pura e matemática discreta se consideramos subconjuntos de vértices de um grafo e caminhos entre vértices como um espaço métrico. Assim sendo, dado um conjunto finito V e uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V, dizemos que o par $(V, \mathcal{C})$ é uma *convexidade* se $\emptyset \in \mathcal{C}$, $V \in \mathcal{C}$ e, para todo $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$, temos que $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$. Os conjuntos de C são chamados *conjuntos convexos*. Dada uma convexidade $(V, \mathcal{C})$, o *fecho convexo* (ou *hull set*) de um subconjunto $S \subseteq V$, denotado $\mathcal{H}(S)$ é o menor conjunto convexo que contém S.

Muitos artigos foram publicados a exemplo de (CENTENO et al., 2011), (CENTENO; DOURADO; SZWARCFITER, 2009), (BARBOSA et al., 2011), (DOURADO et al., 2012) e (BENEVIDES et al., 2013), fazendo uma certa extensão do conceito de convexidade matemática para a convexidade em grafos.

Vários tipos de convexidade são estudados considerando os tipo de caminhos (um caminho em um grafo é uma sequência de vértices tal que de cada um de seus vértices há uma aresta para o próximo vértice da sequência), como caminhos induzidos ((DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), (FARBER; JAMISON, 1986), (FARBER; JAMISON, 1987)), caminhos mínimos ((DOURADO et al., 2010a)) e caminhos triangulares ((CHANGAT; MATHEW, 1999)).

Entre as convexidades baseadas em caminhos temos: a P_3, (CAMPOS et al., 2012), onde um conjunto S é convexo se, para todo P_3 $x - y - z$, onde $x, z \in S$, temos que $y \in S$. Temos também a *geodésica* (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013) onde um conjunto S é convexo se, para todo caminho mínimo P entre dois vértices de S, os vértices de P pertencem a S, e temos a *monofônica* (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), onde um conjunto S é convexo se, para todo caminho induzido P entre dois vértices de S, os vértices de P pertencem a S, entre outras convexidades.

No capítulo 2 introduzimos as notações e definições principais que utilizaremos nesse trabalho. Definiremos número de hull, número de intervalo, número de convexidade, número de Carathéodory, número de Radon e tempo máximo de percolação. Definiremos algumas propriedades que classificam uma convexidade como sendo uma *Convexidade Geométrica*. Mostraremos algumas definições para a caracterização de uma determinada classe de grafos em uma convexidade geométrica.

Dizemos que uma convexidade é geométrica se satisfaz a propriedade adicional de Minkowski-Krein-Milman: cada conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos, que são os elementos cuja remoção mantém o conjunto convexo. Sabe-se que essa propriedade é equivalente a propriedade Antiexchange: para qualquer conjunto S e dois pontos distintos $x, y \notin S, x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ implica $y \notin \mathcal{H}(S \cup \{x\})$.

A primeira parte do nosso trabalho é uma exposição de um trabalho nosso publicado no LAGOS - 2013 (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013), onde provamos a NP completude do número de hull e do número de convexidade para a convexidade P_3 em grafos bipartidos.

O Capítulo 4 também é uma exposição do nosso trabalho (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013) onde apresentamos a convexidade dos caminhos induzidos de ordem três e a relação dessa com a convexidade geodésica.

No capítulo 5, estudamos convexidades geométricas, apresentamos alguns resultados conhecidos como a caracterização dos grafos cordais na convexidade monofônica (FARBER; JAMISON, 1987), os grafos Ptolemaicos na convexidade geodésica (FARBER; JAMISON, 1987) e os grafos livres de HHDA na convexidade m^3 (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999). Também apresentamos resultados novos como a caracterização dos grafos estrela na convexidade P_3, os cografos cordais na convexidade P_3^*, as florestas na convexidade TP (que será definida posteriormente) entre outros resultados.

No Capítulo 6, mostramos alguns resultados para a convexidade geodésica e P_3^* em grafos com poucos P_4's. Esse capítulo é uma extensão do nosso trabalho (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013).

2 Conceitos Básicos

2.1 Grafos

Um grafo G é um par ordenado (V, E) que consiste em um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E, disjunto de V, e uma função de incidência ψ_G mapeando elementos de E a pares não ordenados de elementos de V. Utilizamos $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. Se e é uma aresta e $\psi_G(e) = uv$, então dizemos que u e v são extremidades de e.

A denominação grafo vem do fato do mesmo poder ser ser representado graficamente, os vértices como pontos e as arestas como linhas ligando suas extremidades.

Consideraremos apenas os grafos que não possuem laços (arestas com extremidades idênticas) e nem arestas múltiplas (duas arestas com as mesmas extremidades). Além disso as arestas não são orientadas, o que significa que uv e vu representam a mesma aresta.

Dizemos que dois vértices são adjacentes (vizinhos) se $u, v \in V(G)$ e $uv \in E(G)$. O conjunto de vértices adjacentes ao vértice v é chamado de vizinhança de v e representado por $N_G(v)$. O número de vizinhos de v é chamado de grau de v e é representado por $d(v)$.

Um grafo é $k - regular$, $1 \leq k \leq |V(G)| - 1$ se todos os seus vértices possuem grau k. O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo com $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{u, v)|(u, v) \notin E(G)\}$

O grau máximo de um vértice em G é denotado por $\Delta(G)$ e o grau mínimo por $\delta(G)$. Um grafo G é completo se existe uma aresta entre qualquer par de vértices de G, denotado por K_n.

Um caminho em um grafo G é uma sequência de vértices distintos $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tais que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E(G)$. Dizemos que v_1 e v_k são as extremidades do caminho p.

Um ciclo em um grafo G consiste de uma sequência de vértices distintos $c = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tais que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_k, v_1)\} \subseteq E(G)$. Um grafo acíclico é chamado por floresta. Uma floresta conexa é chamada de árvore.

Dizemos que G é conexo se existe um caminho entre u e v para quaisquer $u, v \in V(G)$, caso contrário dizemos que G é desconexo.

Sejam u e v dois vértices de um grafo conexo G, a distância, $d(u, v)$ de u até v é o comprimento (número de arestas) do menor caminho de u até v em G.

Dizemos que H é subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq \{uv \in E(G)|u, v \in V(H)\}$. Se $E(H) = \{uv \in E(G)|u, v \in V(H)\}$, H é subgrafo induzido de G. Por outro lado, se H não é subgrafo induzido de G, então dizemos que G é livre de H.

Dizemos que um grafo é vazio se ele não possui arestas. Chamamos um conjunto de vértices que induz um grafo completo de *clique* e um conjunto de vértices que induz um grafo vazio de conjunto independente .

Um grafo G é bipartido se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que $X \cup Y = V(G)$ e X e Y são conjuntos independentes de G.

Um grafo G é *split* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que $X \cup Y = V(G)$ e X é uma clique de G e Y é um conjunto independente de G.

Um grafo não direcionado G é chamado *cordal* se cada ciclo de tamanho estritamente maior que 3 possui uma corda, ou seja, uma aresta unindo dois vértices não consecutivos do ciclo. Como G não possui subgrafos induzidos isomorfos a $C_n, n > 3$, o maior ciclo de G é um triângulo, e logo G é também chamado *triangulado*.

Um vértice v em um grafo G é dito simplicial se v e sua vizinhaça foram uma clique em G. Uma ordem de eliminação perfeita em um grafo G é uma ordenação dos vértices do mesmo tal que, para cada vértice v, v é simplicial no subgrafo de G induzido por v e os vértices que sucedem na ordem.

Dados os grafos G_1 e G_2, a união disjunta $G_1 \cup G_2$ é o grafo obtido a partir da união dos conjuntos de vértices e conjunto de arestas, e a junção $G_1 + G_2$ é o grafo obtido a partir de $G_1 \cup G_2$ incluindo todas as arestas entre G_1 e G_2.

Essas e outras definições podem ser encontradas em (BONDY; MURTY, 2008)

2.2 Convexidade

Nessa seção, explanaremos um pouco sobre o conceito de convexidade, algumas convexidades estudadas pela literatura e os parâmetros usados nelas.

Espaço de convexidade é um tema clássico, estudado em alguns ramos diferentes da Matemática. O estudo das convexidades aplicados a grafos foi iniciado um pouco mais tarde, cerca de 50 anos atrás. Em seguida, os parâmetros de convexidade motivaram a definição de alguns parâmetros de grafos, cujo estudo tem sido uma das questões centrais em convexidades em grafos. Em particular, os aspectos relacionados com a complexidade do cálculo destes parâmetros tem sido o objetivo principal de várias publicações recentes.

Considere um grafo G. Um conjunto de vértices $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto de $V(G)$ é uma convexidade sobre $V(G)$ se

- $\emptyset$, $V(G) \in \mathcal{C}$ e
- $\mathcal{C}$ é fechado sobre interseções.

Os elementos de $\mathcal{C}$ são chamados conjuntos convexos. Dada uma convexidade $(V, \mathcal{C})$, o *fecho convexo* (ou *hull set*) de um subconjunto $S \subseteq V$, denotado $\mathcal{H}(S)$ é o menor conjunto convexo que contém S. Se $\mathcal{H}(S) = V(G)$, nós dizemos que S é um *conjunto de fecho* (*hull set*).

Muitas convexidades são definidas através de um conjunto $\mathcal{P}$ de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto $\mathcal{C} \in V(G)$ é convexo precisamente quando $\mathcal{C}$ contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de $\mathcal{P}$ cujos vértices extremos estão também em $\mathcal{C}$.

Na *convexidade* P_3 , um conjunto S é convexo se, para todo P_3 $x - y - z$, onde $x, z \in S$, temos que $y \in S$.

Na *convexidade monofônica*, um conjunto S é convexo se, para todo caminho induzido P entre dois vértices de S, os vértices de P pertencem a S.

Na *convexidade geodésica*, um conjunto S é convexo se, para todo caminho mínimo P entre dois vértices de S, os vértices de P pertencem a S.

Dizemos que um caminho P em um grafo é um *T-caminho* se para quaisquer dois vértices x, y a distância maior do que 2 em P não são adjacentes. Ou seja, as únicas arestas entre vértices de P e que não são arestas de P são entre vértices a distância 2 (ou seja, só criam triângulos).

Em (CHANGAT; MATHEW, 1999), definiu-se um conjunto S como sendo TP-convexo se, para todo $x, y \in S$, todos os vértices em T-caminhos entre x, y pertencem a S. Provou-se que o número de Carathéodory da TP-convexidade é menor ou igual a 2 e o número de Radom é menor ou igual a 4 em qualquer grafo.

Na *convexidade* m^3, um conjunto S é convexo se os vértices de caminhos induzidos de tamanho maior ou igual a 3 entre dois vértices de S pertencem a S.

Diremos que um conjunto é *m-convexo*, *g-convexo*, m^3*-convexo* ou P_3*-convexo* se é convexo na convexidade monofônica, geodésica, m^3 ou P_3, respectivamente.

Agora iremos descrever alguns parâmetros relacionados a convexidade em grafos.

O *número de fecho* $hn(G)$ de G é o tamanho do menor *conjunto hull*. O *número de intervalo* $in(S)$ é o tamanho do menor subconjunto $S \subseteq V(G)$ que não está contido em nenhum conjunto convexo próprio distinto de $V(G)$(ou seja, o único conjunto convexo que contém S é $V(G)$). O *número de convexidade* $cx(G)$ é o tamanho do maior conjunto convexo distinto de $V(G)$. O *número de Carathéodory* $cth(G)$ é o menor inteiro c tal que, para todo vértice u e para todo conjunto S tal que $u \in hull(S)$, existe um conjunto $F \subseteq S$ com $|F| \leq c$ e $u \in hull(F)$. O *número de Radon* $rd(G)$ é o menor k tal que todo subconjunto V' de $V(G)$ de tamanho pelo menos k tem uma partição (V'_1, V'_2) tal que $hull(V'_1) \cap hull(V'_2) \neq \emptyset$.

Claramente, cada um desses parâmetros depende da convexidade que está sendo considerada. Por exemplo, existe o número de hull-P_3 $hn_{P_3}(G)$ e o número de hull geodésico $hn_{gd}(G)$.

Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, seja $\mathcal{I}_{P_3}(S)$ o conjunto com os vértices de S e todos os vértices em algum caminho P_3 entre dois vértices de S (ou seja, todos os vértices com dois vizinhos em S). Seja $t_{P_3}(S)$ o menor k tal que $\mathcal{I}^k_{P_3}(S) = \mathcal{I}^{k+1}_{P_3}(S)$, onde $\mathcal{I}^k_{P_3}(S)$ é a k-ésima função iterada de $\mathcal{I}_{P_3}$. O P_3*-percolation time* $t_{P_3}(G)$ é definido como o maior $t_{P_3}(S)$ entre todos os *conjuntos hull* de G na convexidade P_3. Analogamente definimos o tempo de percolação geodésica $t_{gd}(G)$.

2.3 Convexidade Geométrica

Dada uma convexidade $(V, \mathcal{C})$ e um conjunto convexo $S \subseteq \mathcal{C}$, dizemos que p é um ponto extremo de S se $S \setminus \{p\}$ também é convexo.

Um convexidade $(V, \mathcal{C})$ é *geométrica* (ou *antimatróide*) se satisfaz a propriedade adicional de Minkowski-Krein-Milman: cada conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos. Sabe-se que essa propriedade é equivalente a propriedade Antiexchange: para qualquer conjunto S e dois pontos distintos $x, y \notin S, x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\}$ implica $y \notin \mathcal{H}(S \cup \{x\})$. O termo antiexchange vêm da teoria de matróides.

Para qualquer convexidade geométrica o seguinte resultado fundamental se mantém.

Teorema 2.1. *Seja $(V, \mathcal{C})$ uma convexidade geométrica. Então $S \in \mathcal{C}$ se somente se existe uma ordenação $(x_1, x_2, ..., x_k)$ de $V \backslash S$ tal que x_i é um ponto extremo de $S \cup \{x_i, ..., x_k\}$ para $i = 1, ..., k$ (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999)*

Algumas classes de grafos podem ser caracterizadas da seguinte forma. G é um membro da classe se somente se existe uma ordenação $(v_1, ..., v_n)$ de $V(G)$ tal que v_i satisfaz uma certa propriedade $\mathcal{P}$ no subgrafo induzido por $\{v_i, ..., v_n\}$.

Por exemplo, se a propriedade $\mathcal{P}$ significa *simplicial* (ou seja, a vizinhança do vértice é uma clique), então estamos tratando da classe dos grafos cordais.

O teorema sugere que certas classes de grafos podem estar relacionadas a uma convexidade geométrica. Por isso, é interessante perguntar para quais classe de grafos uma certa convexidade é geométrica.

3 Convexidade P_3

3.1 Introdução

Recentemente vários artigos tem sido publicados referentes a Teoria dos Grafos em diversos temas e um dos temas bastante interessantes é a convexidade. Neste capítulo, mostraremos alguns resultados obtidos na literatura em relação a convexidade P_3 e os resultados que obtivemos (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013) para a convexidade geodésica.

3.2 Convexidade P_3

Em 2011, Centeno et al. (CENTENO et al., 2011) provaram que o número de fecho-P_3 é NP-difícil em grafos gerais. Em 2009, Centeno et al. (CENTENO; DOURADO; SZWARCFITER, 2009) provaram que o número de intervalo-P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos. No mesmo artigo, eles provaram que o número de convexidade-P_3 é NP-difícil em grafos split. Em 2012, R. Barbosa et. al. (BARBOSA et al., 2011) provaram que o número de Carathéodory P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos. Em 2012, R. Barbosa et. al. (DOURADO et al., 2012) provaram que o número Radon-P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos. Em 2012, Benevides et. al. (BENEVIDES et al., 2013) provaram que é NP-completo decidir se o tempo de percolação-P_3 é no máximo 7 em grafos bipartidos.

Resumindo esses resultados temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 ((CENTENO et al., 2011; CENTENO; DOURADO; SZWARCFITER, 2009; BARBOSA et al., 2011; DOURADO et al., 2012; BENEVIDES et al., 2013))**.** *Os seguintes parâmetros da convexidade P_3 são NP-difíceis em grafos bipartidos: número de intervalo, número de Carathéodory, número de Radon e tempo de percolação.*

Neste trabalho, nós provamos a NP-completude em grafos bipartidos dos parâmetros restantes: o número fecho-P_3 e o número de convexidade-P_3. As provas desses resultados estão nas duas próximas seções.

Teorema 3.2. *Tempo de percolação é $NP-$ completo para grafos bipartido e qualquer $k \geq 7$ fixo.*

3.3 A NP-Completude do número de fecho-P_3

Teorema 3.3. *O número de Carathéodory-P_3, o número de Radon-P_3, número de intervalo-P_3 e tempo de percolação-P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos.*

Teorema 3.4. *O número fecho-P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos.*

Para provar o teorema acima, faremos a redução a partir do problema SAT, que foi o primeiro problema NP-completo conhecido, demonstrado no Teorema de Cook. Usaremos o problema do 3-SAT na nossa redução, que é um SAT onde cada cláusula tem 3 literais. Definimos o SAT como uma coleção de clausulas $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ em um conjunto finito U de variáveis tal que $|c_i| = 3$ para $1 \leq i \leq m$. (GAREY; JOHNSON, 1990)

Demonstração. Como em (CENTENO et al., 2011) nós obtemos a redução a partir do SAT com as seguintes restrições:

- cada clausula tem no máximo 3 variáveis.
- cada literal é de alguma clausula.
- os literais x_i ou $\overline{x}_i$ aparece no máximo 3 vezes $\forall i$.

  Consequentemente:

- cada literal está contido em pelo menos uma e no máximo duas cláusulas (e, se for x_i em um, então $\overline{x}_i$ é em dois, e vice-versa).

Dada uma instância ϕ com k variáveis e m cláusulas do problema SAT, construimos um grafo bipatido G tal que ϕ é satisfeito se somente se o número de fecho-P_3 de G é $7k + 3m$.

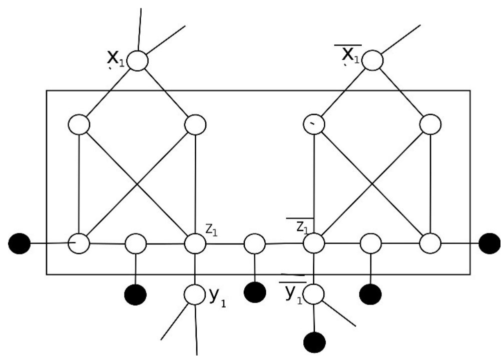

Figura 1 – engrenagem de variável.

Toda engrenagem de x_i variável tem os vértices $y_i, \overline{y_i}, z_i, \overline{z_i}$ Se $x_i(\overline{x_i})$ está em somente uma cláusula se introduz um novo vértice em G e conectamos a $y_i(\overline{y_i})$.

Toda engrenagem de cláusula $C_i = (x_a \vee x_b \vee x_c)$ tem vértices $C_i', C_i^a, C_i^b, C_i^c$ conectado com uma aresta C_i' com os vértices (x_a, x_b, x_c) na variável de engrenagem. Conectar com uma aresta C_i^a com y_a, C_i^b com y_b, e C_i^c com y_c.

Vamos supor que exista uma atribuição de valores verdade para satisfazer ϕ. Seja S o conjunto com todos os vértices de grau 1 e o conjunto $\{z_i : x_i \text{ é } verdadeiro\} \cup \{z_j : x_j$ é $falso\}$.

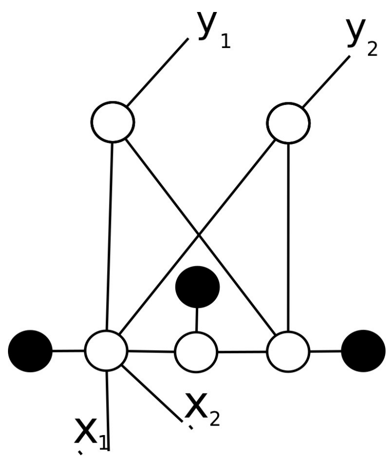

Figura 2 – engrenagem de clausula.

Notemos que G tem $6k + 3m$ vértices de grau 1.

Notemos que $|S| = 7k + 3m$. Afirmamos que S é um conjunto fecho. Observe que, se $z_i \in S$, então todos os vértices do lado esquerdo do engrenagem de variavel são percolados em no máximo quatro passos de tempo, incluindo o vertice x_i. Também observemos que, se $z_i \in S$, então todos os vértices do lado direito do engrenagem de variável são percolados em no máximo quatro passos de tempo, incluindo o vértice $\overline{x_i}$.

Uma vez que C_i é satisfativel, para toda clausula C_i então o vértice da cláusula C_i tem um vizinho percolado e consequentemente a cláusula C_i é percolada em em cinco passos de tempo. (Uma vez que também tem um vizinho de grau 1). Assim, é fácil ver que todos os vértices da engrenagem de cláusula são percolados em no máximo 8 intervalos de tempo.

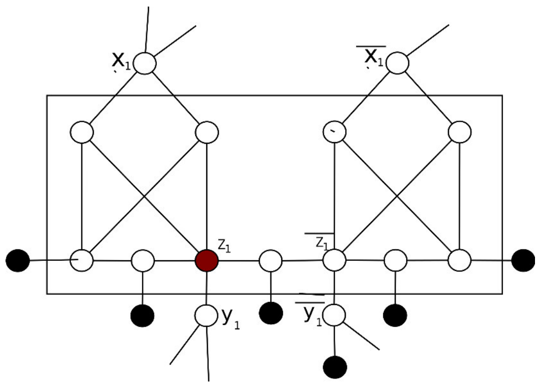

Figura 3 – vértice z_i.

Uma vez que todo literal x_i está em uma ou duas cláusulas, então o vértice y_i é adjacente a um vértice C_j^a, C_j^b ou C_j^c e um vértice de grau 1, ou y_i, e adjacente a de um vértice C_j^a, C_j^b ou C_j^c e outro vértice C_l^a, C_l^b ou C_l^c. Consequentemente, todo vértice y_i é percolado em 9 passos de tempo e todo vértice $\overline{z_i}$ é percolado em no máximo 10 passos de tempo. Novamente todos os vértices da engrenagems são percolados em 14 passos de tempo. Com isso, todos os vértices são percolados e S é um conjunto fecho com 7k + 3m vértices.

Para a volta, vamos supor que G tem um conjunto fecho S com $7k + 3m$ vértices Observemos que o quadrado da engrenagem de variável na figura 4 é um conjunto convexo e, consequentemente, todo conjunto fecho deve ter pelo menos um vértice no quadrado de cada engrenagem de variável. Todo o vértice de grau 1 deve estar em S. Checando todas as possibilidades, não é difícil ver que os possíveis vértices são z_i ou $\overline{z_i}$, para toda variável x_i. Se é z_i ou $\overline{z_i}$ respectivamente, nós vemos que o vértice x_i ou $\overline{x_i}$ respectivamente são percolados em 4 passo de tempo.

Observemos que. se existe alguma clausula C_j sem adjacentes percolados em quatro passo de tempo, então o vértice C_j' não pode ser mais infectado. Como S é um conjunto fecho, isso não pode acontecer. Então, todos os vértices C_j' tem um adjacente percolado na engrenagem de vértice. Isso implica que, ao atribuir o valor de verdade a x_i se S contém z_i e falso, caso contrário, assim, todas as cláusulas serão satisfeitas e isso é uma atribuição de valoração verdadeira para satisfazer ϕ.

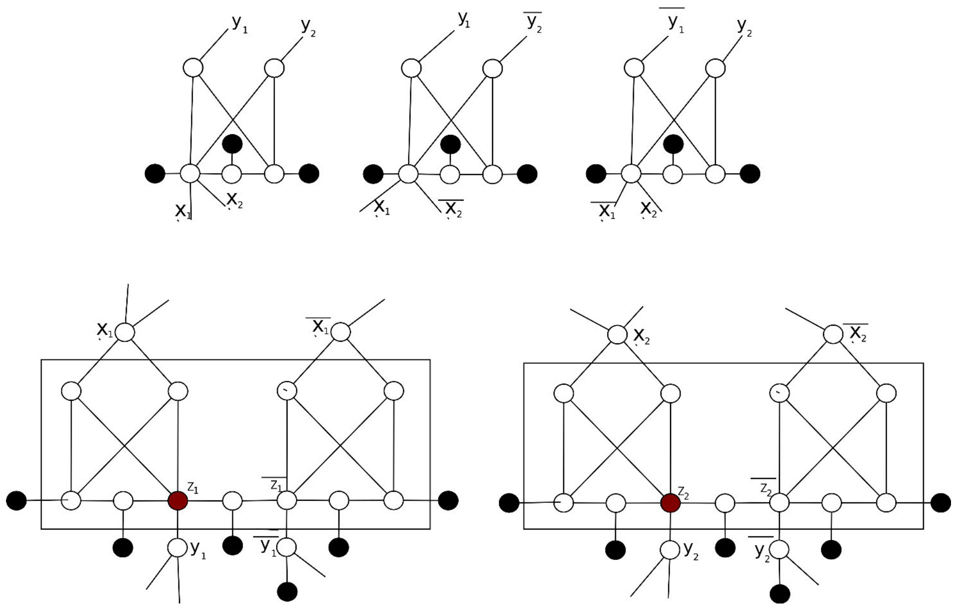

Figura 4 – engrenagem de cláusula e variável

□

3.4 A NP-Completude do número de convexidade-P_3

Teorema 3.5. *O número de convexidade-P_3 é NP-difícil em grafos bipartidos.*

Faremos a redução do Exact Cover para o problema do número de convexidade P_3.

Dada uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, uma cobertura exata é um subconjunto $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{S}$ tal que cada elemento em X pertence a exatamente um subconjunto de $\mathcal{S}^*$. Dizemos que cada elemento de X é coberto por exatamente um subconjunto de $\mathcal{S}^*$. Em ciência da computação, o problema do Exact Cover é um problema de decisão para decidir se existe ou não uma cobertura exata de X com subconjuntos de S. Sabe-se que o problema do Exact Cover é um problema NP-completo (GAREY; JOHNSON, 1990). Usaremos o problema da cobertura exata com conjuntos 3.

Demonstração. Obtemos a redução a partir do Exact Cover by 3-sets.

Seja o conjunto $U = \{U_1, u_2, ..., u_{3n}\}$ e uma familia $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ de três elementos subconjuntos de U, o objetivo é decidir se existe uma subfamília $S' \subseteq S$, com $| S |= n$. Vamos construir um grafo bipartido G tal que existe uma cobertura exata de U se somente se o número de convexidade-P_3 de G é $n + 1$

O grafo é construído da seguinte maneira: Criamos três vértices auxiliares $W, U'eU''$ e duas arestas (WU') e (WU''). Para cada conjunto $S_i \in S$, criamos um vértice S_i em G e conectamos ele com uma aresta de W. Para cada elemento $u_j \in U$, criamos um vértice u_j em G e o conectamos com uma aresta de U' e U''. Se $u_j \in S_i$, criamos uma aresta do vértice u_j para o vértice S_i em G.

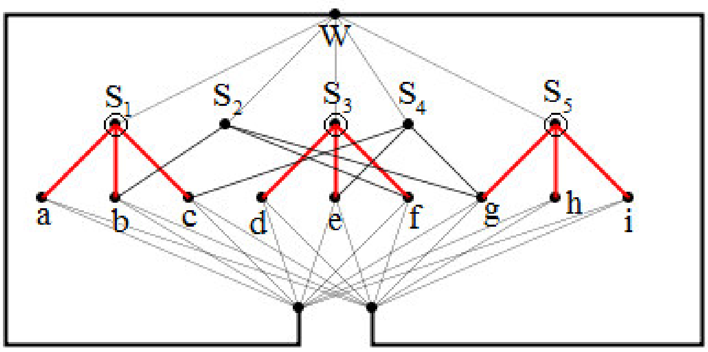

Figura 5 – Grafo G

Se existe uma cobertura exata C de U, é fácil ver que a vértices de G associados aos subconjuntos na cobertura C e o vértice auxiliar W formam um conjunto P_3-convexo em G (uma vez que os adjacentes destes vértices não têm intersecção) com $n + 1$ vértices.

Para a volta, vamos supor que G tem um conjunto P_3-convexo $C \neq V(G)$ com $n + 1$ vértices. Se C tem dois vértices u_j e u_l, então $hull(C) = V(G)$, uma vez que $U', U'' \in hull(\{u_j, u_l\})$, todos os vértices $u_i \in hull(\{U', U''\})$, todo o vértice $S_k \in$

$hull(\{u_1, u_2, ..., u_{3n}\})$ e $W \in (\{S_1, S_2, ..., S_n\})$. Analogamente, C não pode conter um vértice u_j e o vértice W.

Se C contém dois vértices de S_i e S_k tal que o conjunto $S_j \cap S_k \neq \emptyset$ o $hull(\{S_i, S_k\})$, contém o vértice u_j e o vértice W e consequentemente $hull(C) = V(G)$ como foi obser-vando anteriormente.

Agora os casos onde só são possíveis se C contém exatamente um vértice S_i e um vértice u_j, ou C contém o vértice o vértice W e vértices $S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{in}$, tal que $S_{ia} \cap S_{ib} \neq \emptyset$ para qualquer $a < b \in \{1, 2, ..., n\}$. Considerando $n > 1$ o único caso possível é o segundo. Isto implica que $S_{i1}, ..., S_{in}$ formam um exact cover.

□

4 Convexidade dos caminhos induzidos de ordem três

4.1 Introdução

Um dos temas da nossa dissertação é a convexidade dos caminhos induzidos de ordem três, uma métrica para conjuntos convexos na qual conseguimos um paramêtro interessante entre as convexidades conhecidas e que iremos introduzir a partir de agora.

4.2 A convexidade P_3^*

Embora nosso estudo tenha iniciado em busca de resultados para a convexidade geodésica, em meio a nossa busca, construímos uma nova convexidade que relaciona a convexidade P_3 com a convexidade geodésica, que denominamos por convexidade P_3^*.

Na convexidade P_3^*, os conjuntos convexos são fechados sob caminhos induzidos de comprimento dois. Isto é, um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é P_3^*-convexo se todos os vértices de um caminho induzido de comprimento 2 (ou seja, um P_3 entre dois vértices de S também pertence a S.

Uma motivação para o estudo da convexidade proposta é que, além de ser parecida com a convexidade P_3, ela preenche uma lacuna existente entre as convexidades monofônica e m^3.

Mas, de fato, a principal motivação é a forte relação com a convexidade geodésica descrita no teorema abaixo.

Teorema 4.1. *Seja m um inteiro positivo e H um grafo não completo. Seja $G = H + K_m$. Então,*

- $hn_{gd}(G) = hn_{P_3^*}(H)$,
- $in_{gd}(G) = in_{P_3^*}(H)$,
- $cx_{gd}(G) = cx_{P_3^*}(H) + m$,
- $cth_{gd}(G) = \max\{cth_{P_3^*}(H), 2\}$,
- $t_{gd}(G) = \max\{t_{P_3^*}(H), 1\}$.

Para simplicar a prova do teorema acima, vamos dividi-lo em cinco lemas e provar o lema auxiliar abaixo.

Lema 4.1. *Dado um inteiro $m \geq 1$ e um grafo H, seja $G = H + K_m$. Seja $S \subseteq V(H)$ um subconjunto contendo dois vértices não adjacentes. Portanto*

$$\mathcal{H}_{gd,G}(S) = \mathcal{H}_{P_3^*,G}(S) = \mathcal{H}_{P_3^*,H}(S) \cup \{V(K_m)\}$$

$$\mathcal{I}_{gd,G}(S) = \mathcal{I}_{P_3^*,G}(S) = \mathcal{I}_{P_3^*,H}(S) \cup \{V(K_m)\}$$

Demonstração. Todo caminho mínimo em G entre vértices de H é uma aresta ou forma um P_3 induzido. Além disso todo P_3 induzido em H é um caminho mínimo. Finalmente como S tem dois vértices não adjacentes, temos que o intervalo de S contém os vértices da clique K_m. □

Lema 4.2. *Dado um inteiro $m \geq 1$ e um grafo H, temos que $hn_{gd}(H + K_m) = hn_{P_3^*}(H)$ e $t_{gd}(H + K_m) = \max\{t_{P_3^*}(H), 1\}$.*

Demonstração. Seja $G = H + K_m$. Seja C um conjunto hull de H na convexidade P_3^*. Queremos provar que C também é um conjunto hull de G na convexidade geodésica. Considere o seguinte processo de infecção de H na convexidade P_3^*: $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_t$, onde $C_{i+1} = \mathcal{I}_{P_3^*}(C_i)$, para todo $1 \leq i < t$, $C_0 = C$ e $C_t = V(H)$. Podemos supor que $|C_0| < |C_1| < \ldots < |C_t|$.

É fácil ver que C_0 tem dois vértices não adjacentes (caso contrário, C_0 não infectaria ninguém). Também é fácil ver que todos os vértices do K_m estão em $\mathcal{I}_{gd}(C_i)$. Note ainda que todo vértice de G está a uma distância 1 ou 2 de qualquer outro vértice de G. Seja $z \in C_{i+1}$ e $z \notin C_i$, para algum $1 \leq i < t$. Logo existem vértices $x, y \in C_i$ não adjacentes entre si e adjacentes a z. Portanto, xzy é um caminho mínimo entre x e y. Consequentemente, $z \in \mathcal{I}_{gd}(C_i)$, e portanto $C_{i+1} \cup K_m \subseteq \mathcal{I}_{gd}(C_i)$.

Note ainda que todo vértice infectado geodesicamente só pode ter sido infectado segundo o modo descrito acima. Logo, $C_{i+1} \cup K_m = \mathcal{I}_{gd}(C_i)$. Portanto, $C_0, C_1 \cup V(K_m), C_2 \cup V(K_m), \ldots, C_t \cup V(K_m) = V(G)$ é uma infecção geodésica. Logo $C = C_0$ é um conjunto hull de G na convexidade geodésica. Portanto, $hn_{gd}(G) \leq hn_{P_3^*}(H)$. Note que, se $C = V(H)$, então $t = 0$, mas o tempo de percolação geodésica de C em G seria 1. Portanto $t_{gd}(G) \geq \max\{t_{P_3^*}(H), 1\}$.

Seja agora C' um conjunto hull minimal de G na convexidade geodésica. Considere o seguinte processo de infecção de G na convexidade geodésica: $C'_0, C'_1, C'_2, \ldots, C'_{t'}$, onde $C'_{i+1} = \mathcal{I}_{gd}(C'_i)$, para todo $1 \leq i < t'$, $C'_0 = C'$ e $C'_{t'} = V(G)$. Podemos supor que $|C'_0| < |C'_1| < \ldots < |C'_{t'}|$.

Note que os vértices do K_m não infectam ninguém, pois estão a distância 1 de qualquer outro vértice de G. Isso implica que C' não contém vértices do K_m, caso contrário não seria minimal. Seja $z' \in C'_{i+1} \cap V(H)$ e $z' \notin C'_i$, para algum $1 \leq i < t$. Logo existem vértices $x', y' \in C'_i$ tal que z' está em um caminho mínimo entre x', y'. Como, em G, x' e y' estão a distância 2, então z' é adjacente a ambos. Consequentemente, $z' \in \mathcal{I}_{P_3^*}(C'_i)$, e portanto $C'_{i+1} \cap V(H) \subseteq \mathcal{I}_{gd}(C'_i \cap V(H))$. Com isso é fácil concluir que C'_0 é um conjunto hull de

H na convexidade P_3^*. Logo, $hn_{P_3^*}(H) \leq hn_{gd}(G)$. Note que, se $C' = V(H)$, então $t' = 1$, mas o tempo de percolação P_3^* de C' em H seria 0. Portanto $t_{gd}(G) \leq \max\{t_{P_3^*}(H), 1\}$.

Portanto $hn_{gd}(G) = hn_{P_3^*}(H)$ e $t_{gd}(G) = \max\{t_{P_3^*}(H), 1\}$. □

Lema 4.3. *Dado um inteiro $m \geq 1$ e um grafo H, temos que $in_{gd}(H + K_m) = in_{P_3^*}(H)$.*

Demonstração. Segue direto do Lema 4.1. □

Lema 4.4. *Dado um inteiro $m \geq 1$ e um grafo H, temos que $cx_{gd}(H + K_m) = cx_{P_3^*}(H) + m$.*

Demonstração. Seja $G = H + K_m$. Se C é um conjunto convexo P_3^* de H, então $C \cup V(K_m)$ é um conjunto convexo geodésico de G, pois não há vértice fora de C vizinho a dois vértices não adjacentes de C e portanto todos vértices em caminhos de tamanho 2 entre dois vértices de C já pertencem a C.

Seja agora C' um conjunto convexo máximo de G na convexidade geodésica. É fácil ver que C' contém os vértices do K_m, caso contrário não seria máximo. Além disso, $C' \cap V(H)$ é um conjunto convexo na convexidade P_3^*, pois não há vértice fora de C' em um caminho de tamanho 2 entre dois vértices não adjacentes de C'.

Logo, $cx_{gd}(H + K_m) = cx_{P_3^*}(H) + m$.

□

Para provar o resultado análogo para o número de Carathéodory, é util usar uma definição alternativa para esse parâmetro. Dizemos que um conjunto S de vértices de um grafo G é um *conjunto de Carathéodory* se o conjunto $\partial\mathcal{H}(S)$ definido como

$$\partial\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(S) \setminus \bigcup_{s \in S} \mathcal{H}(S \setminus \{s\})$$

é não vazio. O número de Carathéodory pode também ser definido como sendo o tamanho do maior conjunto de Carathéodory.

Lema 4.5. *Dado um inteiro $m \geq 1$ e um grafo H, temos que $cth_{gd}(H+K_m) = \max\{cth_{P_3^*}(H), 2\}$.*

Demonstração. Seja $G = H + K_m$. Seja S um conjunto de Carathéodory de H na convexidade P_3^*. Queremos provar que S também é um conjunto de Carathéodory de G na convexidade geodésica. Observe que S não pode ser uma clique pois senão $\partial(S) = \emptyset$. Logo $\mathcal{H}_{gd}(S)$ contém a clique K_m. Portanto, do Lema 4.1, temos o desejado, pois

$$\partial\mathcal{H}_{gd,G}(S) = \mathcal{H}_{gd,G}(S) \setminus \bigcup_{s \in S} \mathcal{H}_{gd,G}(S \setminus \{s\}) =$$

$$= \mathcal{H}_{P_3^*,G}(S) \setminus \bigcup_{s \in S} \mathcal{H}_{P_3^*,G}(S \setminus \{s\}) \supseteq \mathcal{H}_{P_3^*,H}(S) \setminus \bigcup_{s \in S} \mathcal{H}_{P_3^*,H}(S \setminus \{s\}) \neq \emptyset$$

Seja agora S' um conjunto de Carathéodory de G na convexidade geodésica com mais de dois vértices. Queremos provar que S' também é um conjunto de Carathéodory de

H na convexidade P_3^*. É fácil ver que S' não é uma clique, caso contrário $\partial\mathcal{H}(S) = \emptyset$. Observe que S' não contém vértices da clique K_m. Isso porque, se S' tivesse um vértice s da clique K_m então $\mathcal{H}_{gd,G}(S' \setminus \{s\}) = \mathcal{H}_{gd,G}(S')$, pois S' tem dois vértices não adjacentes que infectam s e o vértice s não é extremidade de nenhum caminho mínimo de tamanho maior ou igual a 2. Portanto $S' \subseteq V(H)$. Observe ainda que, como S' tem pelo menos três vértices e pelo menos dois não adjacentes entre si, então existe um vértice $s \in S'$ tal que $\mathcal{H}_{gd,G}(S' \setminus \{s\})$ contém a clique K_m.

Com isso, desses argumentos e do Lema 4.1, temos que

$$\partial\mathcal{H}_{P_3^*,H}(S') = \mathcal{H}_{P_3^*,H}(S') \setminus \bigcup_{s\in S'} \mathcal{H}_{P_3^*,H}(S' \setminus \{s\}) =$$

$$= \mathcal{H}_{gd,H}(S') \setminus \bigcup_{s\in S'} \mathcal{H}_{gd,H}(S' \setminus \{s\}) \supseteq \mathcal{H}_{gd,G}(S') \setminus \bigcup_{s\in S'} \mathcal{H}_{gd,G}(S' \setminus \{s\}) \neq \emptyset$$

Finalmente, note que todo par $\{x, y\}$ de vértices não adjacentes de H forma um conjunto de Carathéodory de G na convexidade geodésica, pois $\mathcal{H}_{gd,G}(\{x, y\})$ contém os vértices da clique K_m, mas $\mathcal{H}_{gd,G}(\{x\}) \cup \mathcal{H}_{gd,G}(\{y\}) = \{x, y\}$. Portanto, $cth_{gd}(G) \geq 2$. □

Observe que, em grafos livre de triângulos, a convexidade P_3^* é idêntica a convexidade P_3, uma vez que cada caminho de comprimento dois é induzido. Temos então, pelos resultados do capítulo anterior, o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Os seguintes parâmetros da convexidade P_3^* são NP-difícies em grafos bipartidos: hull number, interval number, convexity number, Carateheódory number, Radon number e percolation time.*

Com isso, podemos obter reduções polinomiais da convexidade P_3^* para a convexidade geodésica, que implicam o seguinte.

Teorema 4.3. *O hull number, o convexity number, o interval number, o Carathéodory number e o percolation time da convexidade geodésica são NP-difíceis.*

Desses resultados, o único resultado novo de NP-completude é o percolation time geodésico, pois os demais já foram obtidos entre 2010 e 2012 nos artigos (ARAUJO et al., 2011; DOURADO et al., 2012; DOURADO et al., 2010b; DOURADO et al., 2013).

5 Convexidades Geométricas

5.1 Introdução

Dada uma convexidade $(V, \mathcal{C})$ e um conjunto convexo $S \subseteq \mathcal{C}$, dizemos que p é um ponto extremo de S se $S \setminus \{p\}$ também é convexo.

Um convexidade $(V, \mathcal{C})$ é *geométrica* (ou *antimatróide*) se satisfaz a propriedade adicional de Minkowski-Krein-Milman: cada conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos. Sabe-se que essa propriedade é equivalente a propriedade Antiexchange: para qualquer conjunto S e dois pontos distintos $x, y \notin S, x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ implica $y \notin \mathcal{H}(S \cup \{x\})$.

Para qualquer convexidade geométrica, o seguinte resultado fundamental se mantém.

Teorema 5.1 ((FARBER; JAMISON, 1986)). *Seja $(V, \mathcal{C})$ uma convexidade geométrica. Então $S \in \mathcal{C}$ se somente se existe uma ordenação $(x_1, x_2, ..., x_k)$ de $V \backslash S$ tal que x_i é um ponto extremo de $S \cup \{x_i, ..., x_k\}$ para $i = 1, ..., k$*

Algumas classes de grafos podem ser caracterizadas da seguinte forma. G é um membro da classe se somente se existe uma ordenação $(v_1, ..., v_n)$ de $V(G)$ tal que v_i satisfaz uma certa propriedade $\mathcal{P}$ no subgrafo induzipo por $\{v_i, ..., v_n\}$.

Por exemplo, se a propriedade $\mathcal{P}$ significa *simplicial* (ou seja, a vizinhança do vértice é uma clique), então estamos tratando da classe dos grafos cordais.

O teorema sugere que certas classes de grafos podem estar relacionadas a uma convexidade geométrica. Por isso, é interessante perguntar para qual classe de grafos uma certa convexidade é geométrica. Diremos que uma classe de grafos é *caracterizada* por uma certa convexidade se essa convexidade só é geométrica em grafos desta classe.

Nos artigos (HOWORKA, 1981),(FARBER; JAMISON, 1986), (HARARY; HEDETNIEMI, 1970) estudaram quais classes de grafos são caracterizadas pelas convexidades monofônica, geodesica e m^3, ou seja, investigaram em quais grafos essas convexidades são geométricas. Também podemos fazer a pergunta inversa. Dada uma classe de grafos, existe alguma convexidade que só é geométrica nessa classe? Ou seja, existe uma convexidade que caracteriza esta classe?

5.2 Resultados Conhecidos

5.2.1 Convexidade monofônica

Nesta seção, mostraremos os resultados do artigo (FARBER; JAMISON, 1986) provando que a convexidade monofônica caracteriza os grafos cordais. Um grafo é *cordal* se ele não contém ciclos de tamanho maior que 3 em um subgrafo induzido.

Um vértice é *simplicial* se a sua vizinhança induz um subgrafo completo. O seguinte teorema caracteriza os grafos cordais.

Teorema 5.2 ((ROSE, 1970)). *Seja G um grafo. Então as seguintes proposições são equivalentes*

(a) G é cordal.

(b) Cada conjunto de corte minimal de cada subgrafo induzido de G induz um grafo completo.

(c) Cada subgrafo induzido de G tem um vértice simplicial

Observe que um vértice v é ponto extremo de um conjunto m-convexo K se e somente se v é simplicial em $G[K]$. Por isso, a convexidade monofônica de um grafo G é uma convexidade geométrica se G é cordal. O teorema abaixo mostra que essa condição necessária é também suficiente.

Teorema 5.3 ((FARBER; JAMISON, 1986)). *Em um grafo cordal, cada vértice não simplicial encontra-se em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais.*

Demonstração. Vamos provar por indução no número de vértices, o caso base é trivial.

Seja G um grafo cordal com n vértices e suponha que o teorema é válido para cada grafo cordal com menos que n vértices. Suponha que v é um vértice não simplicial de G. Então v tem dois vizinhos não adjacentes, dizemos u_1 e u_2. Seja C um conjunto minimal de vértices de $V \setminus \{u_1, u_2\}$ que satisfaz todos os caminhos $u_1 - u_2$. Claramente $v \in C$. Para $i = 1, 2$, seja W_i o conjunto de vértices da componente de $G - C$ que contém u_i e seja $G_i = G[W_i \cup C]$. Então C é um conjunto de corte minimal de $G[W_1 \cup W_2 \cup C]$, e assim $G[C]$ é um grafo completo pelo teorema 5.2. Pela hipótese de indução, ou u_i é simplicial em G_i ou u_i encontra-se em um caminho induzido entre vértices simpliciais de G_i. Em ambos os casos, G_i tem um vértice simplicial, z_i, em W_i, para $i = 1, 2$, uma vez que $G[C]$ é um grafo completo. Observe que z_i é também simplicial em G. Uma vez que C é um corte minimal em $G[W_1 \cup W_2 \cup C]$, existe um caminho induzido $z_1 - v$, chamamos de P_1, em $G[W_1 \cup \{v\}]$, e um caminho induzido $v - z_2$, chamamos de P_2, em $G[W_2 \cup \{v\}]$. Uma vez que C é um conjunto de corte $P_1 \cdot P_2$ é um caminho coral em G de junção de vértices simpliciais e contendo v.

A validade do teorema segue por indução.

□

A partir do teorema 5.3 nós obtemos um análogo do teorema de Minkowski-Krein-Milman, que segue como corolário.

Corolário 5.1 ((FARBER; JAMISON, 1986))**.** *Se G é cordal, então a convexidade monofônica de G é uma convexidade geométrica.*

Corolário 5.2 ((FARBER; JAMISON, 1986))**.** *Em um grafo cordal $G(V, E)$ um subconjunto K de vértices é m-convexo se e somente se, existe uma ordenação $v_1, v_2, ..., v_l$ de $V \setminus K$ tal que, para cada $i = 1, 2, ..., l$,v_i é simplicial em $G[K \cup \{v_i, v_{i+1}, ..., v_l\}]$*

Demonstração. Isso segue imediatamente de Teorema 5.1, Corolário 5.1, e a relação entre vértices simpliciais e pontos extremos do conjunto m-convexo. □

5.2.2 Convexidade Geodésica

Nesta seção, mostraremos os resultados do artigo (FARBER; JAMISON, 1986) provando que a convexidade geodésica caracteriza os grafos *Ptolemaicos*. Um grafo G é ptolemaico se para quaisquer 4 vértices a, b, x, y de uma mesma componente conexa de G a seguinte desigualdade é válida.

$$d(a, b) \cdot d(x, y) \leq d(a, x) \cdot d(b, y) \; + \; d(b, x) \cdot d(a, y).$$

O teorema abaixo apresenta várias caracterizações para os grafos Ptolemaicos. Por exemplo, mostra que os grafos Ptolemaicos são os grafos cordais livres de 3-fan (ver figura 6), e que são também os grafos cordais que são distância-hereditária (um grafos é *distância-hereditária* se as distâncias em qualquer subgrafo induzido conexo são as mesmas do grafo original).

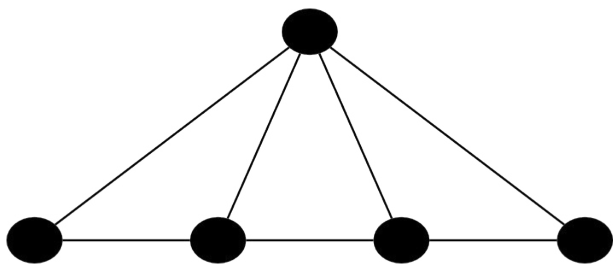

Figura 6 – 3-fan

O teorema seguinte mostra a relação entre essas propriedades.

Teorema 5.4 ((FARBER; JAMISON, 1986))**.** *Seja G um grafo. Então as seguintes propriedades são equivalentes*

(a) G é um grafo Ptolemaico.

(b) G é cordal e cada ciclo de 5 vértices tem no mínimo 3 cordas.

(c) G é cordal e não contém 3-fan induzido.

(d) G é cordal e todo o induzido é um menor caminho.

(e) A convexidade geodésica de G é uma convexidade geométrica.

(f) G é cordal e a convexidade monofônica e geodésica de G são idênticas.

Demonstração. A equivalência de (a), (c) e (d) é devido a Howorka (HOWORKA, 1981), e a equivalência de (b) e (c) é trivial. Vamos estabelecer 3 implicações, ou seja, (d) implica (e), (e) implica (f), e (f) implica (c). O fato da condição (d) implicar a condição (e) segue imediatamente do Corolário 5.1.

Suponha que a condição (e) é válida. Como todo ponto extremo de um conjunto K g-convexo é um vértice simplicial em $G[K]$, então G deve ser cordal pelo Teorema 5.2. Além disso, todo conjunto g-convexo deve ser convexidade monofônica pelo Corolário 5.2. Claramente, qualquer conjunto m-convexo é g-convexo. Portanto, a condição (f) se mantém.

Finalmente, suponha que G é cordal e contém 3-fan, seja u_o, u_1, u_2, u_3 o caminho induzido e $vu_i \in E$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Observe que $\{u_1, u_2\}$ está contido no fecho monofônico de $\{u_0, u_3\}$.Por outro lado, afirmamos que nem u_1 nem u_2 é um fecho convexo de $\{u_0, u_3\}$. Seja A o conjunto de vértices entre o caminho $u_0 - u_3$. Observe que $u_1, u_2 \notin A$. Uma vez que, $d(u_0, u_3) = 2, A \backslash \{u_0, u_3\}$ é um conjunto de corte minimal $G[A]$. Por isso, $A \backslash \{u_0, u_3\}$ induz um subgrafo completo, pelo Teorema 5.2. Disso resulta que A é g-convexo. Por isso, a condição (f) implica a condição (c). □

5.2.3 Convexidade m^3

Nesta seção, mostraremos os resultados do artigo (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) provando que a convexidade m^3 caracteriza os grafos bipolarizados-fracos (*weak bipolarizable*), definidos como os grafos livres de HHDA (ou seja, livre de *Hole* (buraco), *House* (casa), *Dominó* e o grafo A da Figura 7) em (OLARIU, 1989).

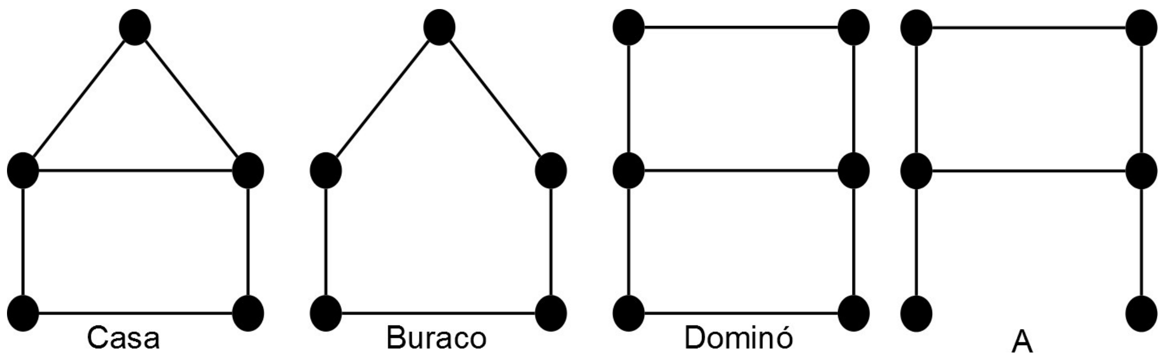

Figura 7 – grafo livre de HHDA

Dizemos que um vértice é *semisimplicial* se não está no meio de um P_4 induzido.

Lema 5.3. *Um vértice v é um ponto extremo de um conjunto m^3-convexo K se e somente se v é semisimplicial em $G[K]$.*

Nesta seção, mostraremos a prova de (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) de que os vértices semisimpliciais estão para a convexidade m^3 e os grafos bipolarizados-fracos assim como os vértices simpliciais estão para a convexidade monofônica e os grafos cordais (ver Lema 5.7).

Mostraremos também a prova de (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) de que a convexidade m^3 é geométrica se e somente se o grafo é bipolarizado fraco (ver Teorema 5.6).

Para a prova desses resultados e por completude são necessarios alguns resultados auxiliares.

Seja $\mathcal{M}^3(G)$ denotado pelo conjunto de todo os conjuntos m^3-convexo de um grafo. Para um conjunto $S \subseteq V$ o m^3-convexo hull m^3-conv(S) é o menor membro de $\mathcal{M}^3(G)$ contendo S.

Um conjunto $H \subseteq V$ é homogêneo se e somente se $N(x) \setminus H = N(y) \setminus H$ para cada par de vértices x, y de H. um conjunto homogêneo é próprio se e somente se $1 < |H| < |V|$.

O próximo lema dá um bom critério para verificar a semisimplicialidade de um vértice.

Lema 5.4. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) Um vértice v de um grafo G é semisimplicial em G se e somente se a componente conexa de todo complemento de $G(N(v))$ são homogêneos em G.*

Demonstração. Se v não é semisimplicial então existe um P_4 contendo v como ponto central, por exemplo $u_1 - v - u_2 - u_3$. Agora u_1 e u_2 pertencem a uma componente conexa C de complemento de $G(N(v))$. Porém C não é homogêneo em G devido a u_3.

Para comprovar o contrário seja C uma componente conexa do complemento de $G(N(v))$ e suponha que C não é homogêneo em G. Então deve haver vértices $x, y \in C$ e um vértice $z \in V \setminus C$ tal que $xy \in E$ mas $yz \notin E$. Podemos escolher x e y tal que a sua distância no complemento de $G(C)$ é minimal. Obviamente, $z \neq v$. Além disso, uma vez que $yz \notin E$ mas cada vértice de $N(v) \setminus C$ deve ser adjacente a cada vértice de C , temos $z \notin N(v)$. Assim $z \in N^2(v)$. Se $xy \notin E$ então $z - x - v - y$ é um P_4. Se $xy \in E$ então seja $x - u_1 - \ldots - u_k - y$ um caminho mais curto no complemento de $G(C)$. Assim, $xu_1 \notin E$. A distância minimal de x, y agora implica $u_1 z \notin E$. Portanto, $z - x - v - u_1$ é um P_4. □

Teorema 5.5. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) Um grafo G é bipolarizado fraco se e somente se cada subgrafo induzido F de G é cordal ou contém um conjunto homogêneo próprio (OLARIU, 1989).*

Seja H um conjunto homogêneo próprio em G e $v \in H$ Então a *redução homogênea* $HREd(G, H, v)$ é o grafo induzido por $V(G) \setminus (H \setminus \{v\})$. Por outro lado, a *extensão homogênea* $HExt(G, v, H)$ de G via um grafo H em v com $V(H) \cap V(G) = \emptyset$ é o grafo obtido ao substituir v por H tal que os vértices de H possui os mesmos vizinhos fora de H como v tem em G.

Lema 5.5. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) Seja H um conjunto homogêneo próprio de um grafo G livre de HHD e seja $v \in H$.*

(1) Se x é semisimplicial em $HRed(G, H, v)$ mas não em G, então $x \in H$, isto é, $x = v$.

(2) Se $x \in H$ é semisimplicial em H mas não em G, então nenhum vértice de H é semisimplicial em G e v não é semisimplicial em $HRed(G, H, v)$.

Demonstração. Uma vez que nenhum P_4 contém um conjunto homogêneo próprio, nós concluimos que qualquer 4-caminhos P de G, ou $P \subseteq H$ ou $|P \cup H| \leq 1$.

(1) Uma vez que x não é semisimplicial em G, deve estar em um ponto médio de algum P_4 induzido. Se $x \notin H$ então a semisimplicidade de x em $HRed(G, H, v)$ implica $|P \cup H| = 1$. Mas agora podemos substituir o vértice de $P \cup H$ por v obtendo um P_4 em $HRed(G, H, v)$, que contém x como um ponto médio, uma contradição. Assim $x \in H$, isto é, $x = v$.

(2) Se $x \in H$ é semisimplicial em H, mas não em G, então nenhum P_4 em G contém x como um ponto médio está completamente contido em H. Assim $P \cup H = \{x\}$ para qualquer P_4 induzido em G com ponto médio x. Uma vez que H é homogêneo podemos substituir x em P por qualquer vértice de H. Assim nenhum vértice de H é semisimplicial em G, e v não é semisimplicial em $HRed(G, H, v)$.

□

Em (FARBER; JAMISON, 1986) é provado que em um grafo cordal cada vértice não simplicial encontra-se em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais. Em seguida apresentamos um resultado mais forte que iremos utilizar subsequentemente.

Lema 5.6. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) Seja G um grafo cordal e $P = v_1 - \ldots - v_k$ um caminho induzido de tamanho pelo menos dois, isto é, $k \geq 3$. Então existem vértices $u_i, i = 1, ..., s$ e $w_j, j = 1, ..., t$ tal que u_1, w_1 são simpliciais e $u_1 - u_2 - \ldots - u_s - v_2 - \ldots - v_{k-1} - w_t - \ldots - w_2 - w_1$ em um caminho induzido em G.*

Demonstração. Se tanto v_1 e v_k são simpliciais então é trivial. Então suponha que v_1 não é simplicial.

Seja M o m-convexo hull de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e S a vizinha de v_1 em M. Evidentemente, S é um separador $v_1 - v_3$ em M, isto é, v_1 e v_3 estão em diferentes componentes conexas de $G(M) \setminus S$. Nós mostramos que S é um separador $v_1 - v_3$ em G também. Assumindo o contrário deve haver um caminho induzido P em $V \setminus S$ juntando v_1 e v_3. Uma vez que S é o conjunto de vizinhos de v_1 em M que contém vértices de $V \setminus M$ uma contradição com a m-convexidade de M. Portanto, S é um separador $v_1 - v_3$ em G.

Recordamos que todos os grafos cordais ou são completos ou contém pelo menos dois vértices simpliciais não adjacentes. Assim $G(M)$ como um grafo cordal deve conter pelo menos dois vértices simpliciais. Uma vez que a retirada de um vértice de um conjunto m-convexo preserva a m-convexidade e desde que M m-convexo hull de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ imediatamente concluímos que v_1 e v_k são os únicos dois vértices simpliciais de M. Assim S é completo.

Uma vez que v_1 não é simplicial e todos os vizinhos de v_1 estão contidos em $F := G(K \cup S)$, em que K é uma componente conexa de $G \setminus S$ contendo v_1, o grafo cordal F não é completo e portanto existem dois vértices simpliciais não adjacentes em F. Pela completude de S no máximo 1 deles está em S. Assim temos um vértice simplicial u_1 em K que também é simplicial em G. Agora considere um caminho P conectando os vértices v_1 e u_1 em K. Nenhum vértice até v_2 de um subcaminho induzido $u_1 - \ldots - u_s - v_2$ do caminho $P \cup v_1v_2$ tem um vizinho em $\{v_3, \ldots, v_k\}$. Consequentemente, $u_1 - \ldots - u_s - v_2 - \ldots - v_k$ é um caminho induzido. Para v_k procedemos de forma análoga.

□

Note que todo vértice simplicial é semisimpicial e assim, todo vértice não semisimplicial é não simplicial.

Lema 5.7. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) Todo vértice não semisimplicial de um grafo bipolarizado fraco G encontra-se em um caminho induzido de tamanho pelo menos 3 entre dois vértices semisimpliciais.*

Demonstração. Provamos a afirmação por indução no tamanho de G. A afirmação é válida para todos os grafos com no máximo quatro vértices já que o único grafo deste tamanho que contém um vértice não semisimplicial é o P_4 Seja x um vértice não semisimplicial de G, ou seja, x é um ponto médio de algum P_4. Se G é cordal então pelo lema 5.6 exite um caminho P de tamanho no máximo 3 contendo x tal que ambas as extremidades de P são simpliciais e assim semisimpliciais em G. Consequentemente, está provado.

Agora assumindo que G não é cordal. Consequentemente, pelo teorema 5.5, G contém um conjunto homogêneo próprio H.

Caso 1. $x \in H$.

Suponha que x é semisimplicial em $HRed(G, H, x)$. Então pelo lema 5.5 (2), o vértice x não é semisimplicial em H. Pela hipótese de indução x encontra-se em um caminho induzido de tamanho pelo menos 3 entre vértices semisimpliciais y, z em H. Pelo lema 5.5 (2), y e z devem ser semisimpliciais em G também.

Agora vamos supor que x não é semisimplicia em $HRed(G, H, x)$. Pela hipótese de indução x encontra-se em um caminho induzido entre vértices semisimplicais y, z em $HRed(G, H, x)$. Em particular, $y, z \notin H$. Assim pelo lema 5.5 (1), tanto y como z devem ser semisimpliciais em G também.

Caso 2. $x \notin H$.

Do lema 5.5 (1) imediatamente concluímos que x não é semisimplicial em $HRed(G, H, v)$, onde v é um vértice semisimplicial no grafo bipolarizado fraco H. Pela hipótese de indução x encontra-se em um caminho induzido entre vértices semisimpliciais y, z em $HRed(G, H, v)$. Suponha que y não é semisimplicial em G. Do lema 5.5 (1), deduzimos $y = v$. Mas agora $y = v$ não é semisimplicial em G também. □

Teorema 5.6. *(DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) As seguintes condições são equivalentes para um grafo G*

(1) G é bipolarizado fraco.

(2) Em cada subgrafo induzido F de G cada vértice não semisimplicial encontra-se em um caminho induzido de tamanho pelo menos 3 entre vértices semisimpliciais de F.

(3) Cada conjunto m^3-convexo de G é o hull dos seus vértices semisimpliciais, isto é, $V(G), \mathcal{M}^3(G))$ é uma convexidade geométrica.

(4) Um conjunto S de G é m^3-convexo se e somente se existe uma ordenação $(v_1, \ldots, v_k)$ de $V(G)\backslash S$ tal que para cada $i = 1, \ldots, k$ o vértice v_i é semisimplicial em $G(\{v_i, \ldots, v_k\} \cup S)$, isto é, S é alcançável.

Demonstração. A prova de (1) $\Longrightarrow$ (2) se devem ao Lema 5.7. A prova de (2) $\Longrightarrow$ (3) se deve ao fato de os vértices semisimpliciais serem extremos na convexidade M^3 (ver Lema 5.3) e a propriedade de Minkowsk-Krein-Milman. A prova de (3) $\Longrightarrow$ (4) se deve ao Teorema 5.1 Só precisamos provar que (4) $\Longrightarrow$ (1)

Afirmação 1. Se S é um conjunto m^3-convexo em $F := Hred(G, H, v)$, onde H é um conjunto homogêneo próprio de G, então

$$S' := \begin{cases} S & v \notin S \\ S \cup H & v \in S \end{cases}$$

é m^3-convexo em G

Suponha que S' não é m^3-convexo em G. Então deve haver vértices $x, y \in S'$ e um caminho induzido de tamanho pelo menos 3 juntando x e y tal que $P \setminus S' \neq \emptyset$ Se $|P \cap H| \leq 2$ então ou P ou $(P \setminus H) \cup \{v\}$ é um caminho induzido em F de tamanho pelo menos 3 juntando os vértices de de S quem tem pelo menos um vértice fora de S, uma contradição a m^3-convexidade de S em F. Agora Suponha $|H \cap P| \geq 2$. Note que $P \setminus H \neq \emptyset$. Faça $P' = u_1 - \ldots - u_k$ ser um maximal pela inclusão do subcaminho de P completamente contido em H. Suponha $K \geq 2$. Se $u_1 = x$ então $u_k \neq y$ uma vez que $P \setminus H \neq \emptyset$. Uma vez que H é homogêneo u_1 deve ser adjacente ao vizinho de u_k em $P \setminus P'$ uma contradição. Se $u_1 \neq x$ então o mesmo argumento pode ser aplicado para u_k e o vizinho de u_1 em $P \setminus P'$. Agora seja $k = 1$. Para $|H \cap P| \geq 2$ deve haver um vértice $z \in H \cap P \setminus N(u_1)$. Mas agora $N(u_1) \setminus H = N(z) \setminus H$ e $|P| \geq 4$ implica algumas cordas em P, novamente uma contradição. Portanto, S' é m^3-convexo em G.

Afirmação 2 Todo conjunto homogêneo H de um grafo G é m^3-convexo.

Seja x, y vértices não adjacente de um conjunto homogêneo H em G. Se x tem um vizinho z fora de H então $yz \in E$ e vice versa. Assim qualquer caminho induzido entre vértices não adjacentes de H contendo vértices a partir de $V \setminus H$ deve ser de tamanho 2. Consequentemente H é m^3-convexo em G.

Afirmação 3 Seja H o conjunto homogêneo próprio de um grafo G. Se S é m^3-convexo em $G(H)$ então ele é assim em G

Uma vez que S é um subconjunto de H podemos usar os mesmo argumentos da prova da Afirmação 2.

Afirmação 4 Se v é um vértice simplicial em um grafo G então qualquer conjunto m^3-convexo de $G \setminus \{v\}$ é m^3-convexo em G.

Uma vez que a vizinhança de um vértice simplicial v é completa nenhum caminho induzido de tamanho 3 pode conter v como um ponto interior.

Agora vamos provar por indução no tamanho de G que qualquer grafo que satisfaz (4) é bipolarizado fraco, isto é, livre de HHDA. Uma vez que qualquer (singleton) de $V(G)$ é um conjunto m^3-convexo, G possui uma ordenação simplicial, e portanto não contém um buraco ou dominó (ver 7). Seja F um subgrafo induzido de G isomorfo a casa 7 e K uma 3-clique. Agora o conjunto m^3-convexo K deve ser satisfeito, mas nenhum vértice de $F \setminus K$ é simplicial em F - uma contradição. Portanto, G é um grafo livres de HHD.

Caso 1 G contém um conjunto próprio homogêneo H.

Seja v um vértice de H, $F := Red(G, H, v)$ e S um conjunto m^3-convexo em F. Então S' tal como definido na Afirmação 1 é m^3-convexo em G e assim satisfeito. Por isso, S é satisfeito em F uma vez que cada vértice semisimplicial de G é semisimplical em cada subgrafo induzido que contém este vértice. Portanto, F satisfaz (4) e, pela hiótese de indução, é livre de HHDA. Aplicando o mesmo argumento a um conjunto m^3-convexo de H e usando a Afirmação 3 implica que H é livre de HHDA. Concluímos que G por ele mesmo é livre de HHDA com a extensão homogênea do grafo F livre de HHDA pelo grafo H livre de HHDA.

Caso 2 G tem um conjunto homogêneo próprio.

Suponha que G contém um A induzido pelo ciclo de tamanho 4 $x{-}c{-}d{-}y{-}x$ e vértices (pendant) a, b onde $ax \in E$ e $by \in E$. Provamos também que $M := D(a,1) \cup D(b,1)$ é m^3-convexo em G. Assim M deve ser satisfeito, mas nem c nem d são simpliciais em A uma contradição;

Primeiro note que todo vértice semisimplicial v de G é simplicial devido ao lema 5.4. A partir da Afirmação 4 concluímos que $G \setminus \{v\}$ é satisfaz (4), pela hpótese de indução, é livre de HHDA. Portanto, a e b são os únicos vértices simpliciais de G, e $D(a,1), D(b,1)$ são completos.

- Se existe um vizinho z em comum de a e b, então z é adjacente a todos os vértices a, b, c, d, x, y.

Considere o ciclo $z-a-x-y-b-z$ implica as arestas zx e zy. Agora $\{z,x,y,c,d\}$ induz uma casa (ver 7), portanto $zc \in E$. Supondo $zc \notin E$. Então $zd \in E$ e $\{a,z,x,c,d\}$ induz uma casa. Consequentemente ambos $zc \in E$ e $zd \in E$.

- $N(a) \subseteq N(c)$ e $N(b) \subseteq N(d)$

  Seja w um vizinho de a e suponha $wc \notin E$. Assim $w \neq x, wx \in E$, e $wb \neq E$. Uma vez que $G \setminus \{a\}$ é livre de HHDA w deve ser adjacente a y ou d. Se $wy \in E$ então o grafo induzido por $\{w,x,y,c,d\}$ implica $wd \in E$. Assim $wd \in E$. Mas agora $\{a,x,w,c,d\}$ induz uma casa.

- Cada vértice de $N(a)$ é adjacente a cada vértice de $N(b)$

  Se $w \in N(a) \cap N(b)$ então w é adjacente a todos os vértices de $N(a) \cup N(b)$ uma vez que tanto $D(a,1)$ e $D(b,1)$ são completos. Então suponha o contrário, que existe vértices não adjacentes $z \in N(a) \setminus N(b)$ e $w \in N(b) \setminus N(a)$. Desde que $xy \in E$ temos ou $z = x$ e $w = y$, $z \neq x$ e $w = y$ ou $z \neq x$ e $w \neq y$.

  Primeiro assumimos $z = x$ (analogamente $w = y$) O grafo induzido por $\{w,d,y,c,z\}$ implica $wc \in E$ Mas agora $\{b,y,w,z,c\}$ induz uma casa. Então seja $x \neq z$ e $y \neq w$ Pelos mesmos argumentos acima podemos assumir $zy \in E$ e $wx \in E$. Agora considere $\{w,d,y,z,c\}$ então $zd \in E$ ou $wc \in E$. Por simetria, temos $wc \in E$. Mas isso gera uma casa induzida por $\{b,y,w,z,c\}$.

Para completar a prova suponha que $M = D(a,1) \cup D(b,1)$ não é m^3-convexo em G.Então deve haver vértices não adjacentes $w, z \in M$ e um caminho induzido P e tamanho pelo menos 3 juntando w e z tal que $P \setminus M$ é não vazio. Um avez que cada vértice de $N(a)$ é adjacente a todo vértice de $N(b)$ concluímos $\{w,z\} \cap \{a,b\} \neq \emptyset$. Dizemos $z = a$. Então $w \neq D(a,1)$. Seja z'o vizinho de z em P, isto é, $z' \in N(a)$. Se $w \in N(b)$ então $z'w \in E$. Uma contradição. Consequentemente $w = b$. Agora considere o vizinho w' de w em P. A partir de $w' \in N(b)$ concluímos $z'w' \in E$ novamente uma contradição. □

5.3 Resultados Novos

5.3.1 Convexidade P_3

Nesta seção, provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.7. *A convexidade P_3 é geométrica em G se e somente se G é uma floresta de estrelas.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a convexidade P_3 é geométrica em G.

Se G possui um K_3 $\{x,y,z\}$, temos que $S = \{z\}$ é um conjunto convexo, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de triângulos. Se G possui um C_4 induzido $\{a, b, c, d\}$ com arestas ab, bc, cd, da, temos que $S = \{c, d\}$ é um conjunto convexo pois G é livre de triângulos e portanto não existe vértice adjacente a c e d. Portanto, $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$ e $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de C_4. Se G possui um C_5 induzido $\{a, b, c, d, e\}$ com arestas ab, bc, cd, de, ea, temos que $S = \{c, d, e\}$ é um conjunto convexo. Isso porque $\{c, d\}$ e $\{d, e\}$ não infectam nenhum vértice, visto que G é livre de K_3, e $\{c, e\}$ não infectam nenhum vértice v, caso contrário teríamos um C_4 induzido $\{c, d, e, v\}$ (note que vd não pode ser aresta pois G é livre de K_3. Portanto, $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$ e $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de C_5. Se G possui um P_4 induzido $wxyz$, temos que $S = \{w, z\}$ é um conjunto convexo. Isso porque se existisse um vértice u adjacente a w e z, teríamos que ux e uy não seriam arestas (pois G é livre de triângulos) e portanto $\{wxyzu\}$ seria um C_5 induzido, uma contradição. Portanto, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de P_4.

Resumindo, G é livre de K_3, C_4 e P_4 induzidos (note que ser livre de P_4 implica ser livre de C_5). Ou seja, G é um cografo livre de K_3 e C_4 (lembre que os cografos são os grafos livres de P_4). Sabe-se que todo cografo conexo G é a junção de dois cografos G_1 e G_2. Se G_1 possui uma aresta ab então teríamos um K_3 $\{abz\}$ com qualquer vértice z de G_2, uma contradição. Logo, G_1 e G_2 não possuem arestas. Se G_1 e G_2 possuem mais de 2 vértices cada, então teríamos um C_4 induzido $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ com quaisquer vértices $u_1, v_1 \in V(G_1)$ e $u_2, v_2 \in V(G_2)$, uma contradição. Portanto, G_1 ou G_2 possui apenas um vértice. Isso significa que a junção de G_1 e G_2 gera uma estrela $K_{1,i}$.

Como G pode ser desconexo, isso significa que G é uma floresta de estrela.

Por outro lado, se G é uma estrela com pelo menos 3 vértices e centro c, note que c é o único vértice com grau maior do que um. Logo c é o único vértice que pode ser infectado, isso satisfaz a propriedade *Antiexchange* e portanto a convexidade P_3 é geométrica. □

5.3.2 Convexidade P_3^*

Nesta seção provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.8. *A convexidade P_3^* é geométrica em G se e somente se G é um cografo cordal.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a convexidade P_3^* é geométrica em G.

Se G possui um C_4 induzido $\{a, b, c, d\}$ com arestas ab, bc, cd, da, temos que $S = \{c, d\}$ é um conjunto convexo pois cd é uma aresta. Portanto, $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$ e $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de C_4 induzido.

Se G possui um P_4 induzido $\{a, b, c, d\}$ com arestas ab, bc, cd, temos que o conjunto $S = \{a, d\} \cup (N(a) \cap N(d))$ formado pelos vértices a, d e todos os vértices $v \in N(a) \cap N(d)$ (ou seja, avd é um P_3 induzido) forma um conjunto convexo. Isso porque, se $N(a) \cap N(d)$ contém dois vértices v e v' não adjacentes entre si, então $avdv'$ induziria um C_4, uma contradição. Ou seja, $N(a) \cap N(d)$ induz uma clique e consequentemente S é convexo. Portanto, $b \in \mathcal{H}(S \cup \{c\})$ e $c \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de P_4. Resumindo, G é livre de C_4 e P_4 induzidos. Se G tivesse um ciclo induzido de tamanho maior do que 4, então G teria um P_4 induzido, uma contradição. Portanto, G é cordal. Além disso G é um cografo pois é livre de P_4's. Ou seja G é um cografo cordal.

Por outro lado, se G é um cografo cordal, então todo caminho induzido tem tamanho no máximo 2, pois G é livre de P_4. Portanto, a convexidade monofônica é equivalente a convexidade P_3^* em G. Ou seja, todo conjunto convexo de G na convexidade monofônica é convexo na convexidade P_3^* e vice versa. Como a convexidade monofônica é geométrica em grafos cordais, então a convexidade P_3^* é geométrica em G. □

5.3.3 convexidade TP

Relembre que um caminho P em um grafo é um *T-caminho* se para quaisquer dois vértices x, y a distância maior do que 2 em P não são adjacentes. Ou seja, as únicas arestas entre vértices de P e que não são arestas de P são entre vértices a distância 2 em P (ou seja, só criam triângulos). Relembre ainda que um conjunto S é TP-convexo se, para todo $x, y \in S$, todos os vértices em T-caminhos entre x, y pertencem a S.

Nesta seção provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.9. *A convexidade TP é geométrica em G se e somente se G é uma floresta.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a convexidade TP é geométrica em G. Se G possui um K_3 induzido $\{x, y, z\}$, temos que $S = \{z\}$ é um conjunto convexo, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ (pois há o T-caminho yxz entre y e z passando por x com uma única corda yz que forma um triângulo) e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$ (pelo mesmo motivo anterior), o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de triângulos.

Se G possui um ciclo induzido $v_1, v_2, \ldots, v_k$ para $k \geq 4$, temos que $S = \{v_2, v_3\}$ é um conjunto T-convexo, pois não existem T-caminhos entre v_2 e v_3 visto que G é livre de triângulos. Note que $v_1 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_4\})$ e $v_4 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_1\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de ciclos induzidos. Como todo ciclo contém um ciclo induzido, temos que G é livre de ciclos. Ou seja G é uma floresta.

Por outro lado, suponha que G é uma floresta. Logo G não contém triângulos. Com isso, todo T-caminho de G é um caminho induzido, e vice-versa. Ou seja, todo conjunto T-convexo de G é monofonicamente convexo, e vice-versa. Isso quer dizer que a convexidade TP e a convexidade monofônica são idênticas em G. Como G é uma floresta, então G é cordal, o que implica que a convexidade monofônica é geométrica em G e portanto a convexidade TP também é geométrica em G.

□

5.3.4 Convexidade P_4^+-free

Nessa seção, tentamos encontrar uma convexidade de grafos que caracteriza os cografos (ou seja, uma convexidade que é geométrica se e somente se o grafo for um cografo). Lembre que os cografos são os grafos livres de P_4 induzido.

Lembre que, dado um grafo G, um conjunto S é P_3^*-convexo, se $\forall P_3$ induzido abc, se $ac \in S$, então $b \in S$. Similarmente, definimos um conjunto S como sendo P_4^+-*convexo*, se $\forall P_4$ induzido $abcd$, se $acd \in S$, então $b \in S$.

Teorema 5.10. *A convexidade P_4^+ é geométrica em G se e somente se G é um cografo (livre de P_4)*

Demonstração. Se G é livre de P_4, então, por definição, todo subconjunto de vértices de G é P_4^+-convexo. Portanto, a propriedade Antiexchange é sempre satisfeita e a convexidade é geométrica.

Suponha então que G possui um P_4 induzido $abcd$. Note que $S' = \{a, d\}$ é P_4^+-convexo. Note ainda que $b \in \mathcal{H}(S' \cup \{c\})$ e que $c \in \mathcal{H}(S' \cup \{b\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo, a convexidade não é geométrica. □

5.3.5 Convexidade $\mathcal{F}$-free

Definição 5.8. *Seja H um grafo com pelo menos dois vértices. Dado um grafo G, dizemos que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é H-*free convexo *se para todo $S' \subseteq S, |S'| = |V(H)|-1$ temos que, se $S' \cup \{x\}$ induz um grafo H, então $x \in S$. Dada uma família $\mathcal{F}$ de grafos com pelo menos dois vértices, dizemos que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é $\mathcal{F}$-*free convexo *se é H-free convexo para todo $H \in \mathcal{F}$.*

Teorema 5.11. *A convexidade $\mathcal{F}$-free é geométrica em G se e somente se G é livre de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Se G não possui nenhum subgrafo induzido $H \in \mathcal{F}$, então por definição todo subconjunto $S \subseteq V(G)$ é H-free convexo. Portanto, a propriedade *Antiexchange* é sempre satisfeita e a convexidade é geométrica.

Suponha então que G possui algum subgrafo de $\mathcal{F}$. Seja H um grafo de $\mathcal{F}$ que aparece em G e tem um número mínimo de vértices. Seja S um conjunto de vértices de G que induz H. Sejam x, y dois vértices distintos de S e seja $S' = S \setminus \{x, y\}$. Note que S' é $\mathcal{F}$-free convexo, pela minimalidade de H. Note ainda que $y \in \mathcal{H}(S' \cup \{x\})$ e que $x \in \mathcal{H}(S' \cup \{y\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo, a convexidade não é geométrica. □

Os dois corolários a seguir seguem diretamente do teorema acima e das caracterizações dos grafos bipartidos (grafos sem ciclos ímpares) e dos grafos planares (grafos livres de uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$, de acordo com o Teorema de Kuratowski.

Corolário 5.9. *Seja $\mathcal{F} = \{C_{2k+1} :\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$ a família infinita dos ciclos ímpares. A convexidade $\mathcal{F}$-free é geométrica em G se e somente se G é bipartido.*

Corolário 5.10. *Seja $\mathcal{F} = \{TK_5, TK_{3,3}\}$, onde T representa* topological minor*, a família infinita dos grafos que podem ser obtidos a partir do K_5 ou do $K_{3,3}$ através de subdivisão de arestas. A convexidade $\mathcal{F}$-free é geométrica em G se e somente se G é planar.*

6 Grafos com poucos P_4

6.1 Introdução

Babel e Olariu em (BABEL; OLARIU, 1998) definiram um grafo como $(q, q-4)$-*grafo* se nenhum conjunto com q vértices induz mais do que $q-4$ diferentes P_4's. Assim sendo, cografos são $(4, 0)$-grafos, ou seja, não possuem P_4's induzidos (CORNEIL; LERCHS; BURLINGHAM, 1981). Grafos P_4-esparsos são $(5, 1)$-grafos (PERFECT..., 1985). Estruturalmente, sabe-se que todo cografo é desconexo ou seu complemento é desconexo, e que todo grafo P_4-esparso é um cografo ou é uma *aranha*.

Dizemos que um grafo é uma *aranha* (R, C, S) se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos R, C e S, *grafo aranha* onde $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ e $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ para $k = |C| = |S|$ tais que:

i. C induz uma clique;

ii. S induz um conjunto independente;

iii. Todo vértice de R é adjacente aos vértices de C e não-adjacente aos vértices de S;

iv. (a) s_i é adjacente a c_i se e só se $i = j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha magra*); ou

(b) s_i é adjacente a c_i se e só se $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha gorda*)

Podemos visualizar R, C e S respectivamente como a cabeça, o corpo e as pernas da aranha.

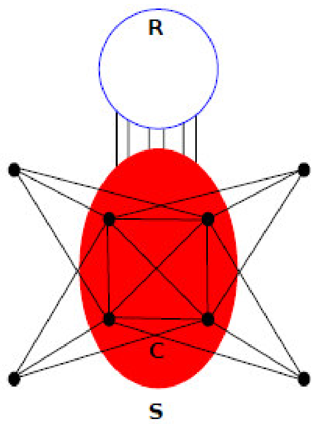

Figura 8 – Aranha gorda.

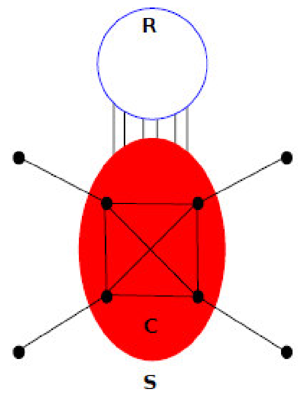

Figura 9 – Aranha magra.

Note que R pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que a aranha é sem cabeça.

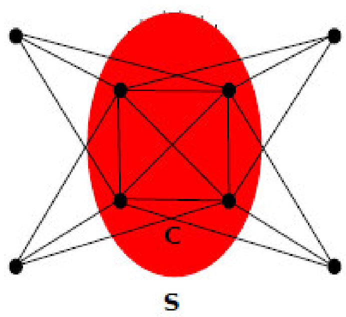

Figura 10 – Aranha sem cabeça.

A *união disjunta* (ou simplesmente *união*) de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$, onde $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. A *junção* de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \vee G_2$, onde $V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$. A operação de junção é a operação de união com a inclusão de todas as arestas possíveis entre G_1 e G_2.

(JAMISON; OLARIU, 1995) provaram um importante resultado estrutural para grafos quaisquer, usando *grafos p-conexos*. Um grafo é *p-conexo* se, para toda partição dos vértices de G em conjuntos A e B não vazios, existe um P_4 com vértices de A e B. Uma *p-componente separável* é um subgrafo p-conexo maximal com uma bipartição (H_1, H_2) tal que todo P_4 $wxyz$ com vértices em H_1 e H_2 é tal que $x, y \in H_1$ e $w, z \in H_2$.

Teorema 6.1 ((JAMISON; OLARIU, 1995))**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Então G satisfaz um dos itens abaixo:*

(i) G é desconexo;

(ii) $\overline{G}$ é desconexo (onde $\overline{G}$ é o complemento de G);

(iii) *G é p-conexo;*

(iii) *G possui uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ tal que todo vértice de $V(G)-H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.*

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

(BABEL; OLARIU, 1998) também provaram que todo $(q, q-4)$-grafo p-conexo é uma aranha sem cabeça ou tem menos do que q vértices. Portanto, pelo teorema acima e pelo fato de que o complemento de um $(q, q-4)$-grafo é também um $(q, q-4)$-grafo, temos diretamente o seguinte resultado.

Corolário 6.1. *Seja $q \geq 4$ um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo $G = (V, E)$, então G satisfaz um dos itens a seguir:*

(a) *$G = G_1 \cup G_2$ é a união de dois $(q, q-4)$-grafos G_1 e G_2;*

(b) *$G = G_1 \vee G_2$ é a junção de dois $(q, q-4)$-grafos G_1 e G_2;*

(c) *G é uma aranha (R, C, S) tal que $G[R]$ é um $(q, q-4)$-grafo;*

(d) *G tem menos de q vértices;*

(e) *G possui uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com menos de q vértices tal que todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.*

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

Em 2011, Canpos et al em (CAMPOS et al., 2012) obtiveram um algoritmo em tempo polinomial para todos os parâmetros P_3 convexos em grafos $(q, q-4)$, para todo q fixo, que são os grafos, tal que cada conjunto conjunto com no máximo q vértices induz no máximo $q-4$ P_4's. Cografos e grafos P_4-esparsos são respectivamente o grafos $(4, 0)$ e o grafo $(5, 1)$.

Obtivemos algoritmo em tempo linear para cada parâmetro geodésico e P_3^* em grafos em grafos P_4-esparsos.

O teorema a seguir é válido para as convexidades P_3^* e geodésica.

Teorema 6.2. *Se $G = G_1 \cup G_2$ então:*

- $hn(G) = hn(G_1) + hn(G_2)$,
- $cx(G) = max\{n_1 + cx(G_2), cx(G_1) + n_2\}$,
- $in(G) = in(G_1) + in(G_2)$,

- $cth(G) = max\{cth(G_1), cth(G_2)\}$,
- $rd(G) = rd(G_1) + rd(G_2) - 1$ *e*
- $t(G) = max\{t(G_1), t(G_2)$.

Demonstração. A prova é direta. □

6.2 Convexidade Geodésica em grafos $(q, q-4)$

Para a junção de dois grafos, temos 3 possibilidades: (a) os dois grafos são completos, (b) só um dos grafos é completo e (c) nenhum dos grafos é completo. O caso (b) já foi tratado na Seção 4 no Teorema 4.1. O caso (a) é trivial e enunciamos abaixo.

Lema 6.2. *Se $G = G_1 + G_2$ são cliques, então:*

- $hn_{gd}(G) = n$,
- $in_{gd}(G) = n$,
- $cx_{gd}(G) = n - 1$,
- $cth_{gd}(G) = 1$,
- $t_{gd}(G) = 0$ *e*
- $rd_{gd}(G) = 1$.

Demonstração. É fácil ver que o número de hull será o número de vértices do grafo todo, pois, se um vértice não pertence ao conjunto, ele nunca será infectado pois estará a distância 1 de qualquer outro vértice. O mesmo argumento vale para o número de intervalo. É fácil ver que o número de convexidade é $n - 1$ pois todo vértice v está a distância 1 de qualquer outro vértice e portanto não será alcançado. É fácil ver que o número de Carathéodory é 1, pois qualquer par $\{x, y\}$ de vértices forma uma aresta e portanto o hull de $\{x, y\}$ é igual a união do hull de $\{x\}$ e o hull de $\{y\}$. O $t_{gd}(G) = 0$ pois se algum vértice não for infectado no tempo 0 ele nunca mais será infectado. Note que, para qualquer subconjunto S com pelo menos 2 vértices, não há como particioná-lo em dois conjuntos de modo que o hull das duas partes se intersectem, pois ambas as partes formam cliques. Por isso o número de Radon é igual a 1. □

O caso (c) é tratado no teorema abaixo.

Teorema 6.3. *Seja $G = G_1 + G_2$ Se G_1 e G_2 não são cliques então:*

- $hn_{gd}(G) = cth(G) = 2$,

- $cx_{gd}(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$,
- $rd_{gd}(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + 1$,
- $in_{gd}(G) = min\{4, in_{P_3^*}(G_1), in_{P_3^*}(G_2)\}$ *e*
- $t_{gd}(G) \in \{1, 2\}$

Demonstração. É fácil ver que o número de hull é 2, pois quaisquer dois vértices não adjacentes em G_1 ou G_2 infectarão o grafo inteiro. É fácil ver que o número de convexidade será o tamanho da maior clique de G, pois, caso tenhamos pelo menos dois vértices não adjacentes em G_1, eles infectarão todos os vértices de G_2 e dois vértices não adjacentes de G_2 infectarão todos os vértices de G_1. Logo o número de convexidade deve ser $\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$. O número de Radon é o tamanho da maior clique de G mais 1, pois qualquer conjunto desse tamanho deve possuir dois vértices não adjacentes que irão infectar o grafo todo. É fácil ver que $in_{gd}(G) \leq 4$, pois dois vértices não adjacentes de G_1 com dois vértices não adjacentes de G_2 conseguem infectar o grafo inteiro em um passo. Além disso, $in_{gd}(G) \leq in_{P_3^*}(G_1)$, pois qualquer conjunto de intervalo de G_1 deve ter dois vértices não adjacentes, que irão infectar G_2. Pelo mesmo motivo, $in_{gd}(G) \leq in_{P_3^*}(G_2)$. O tempo máximo é 1 se, para todo par $\{x, y\}$ de vértices não adjacentes, x e y são adjacentes a todos os demais vértices. Caso contrário o tempo máximo é 2, pois qualquer par de vértices não adjacentes de G_1 infecta G_2 em um passo e qualquer par de vértices de G_2 infecta G_1 em um passo. □

Para a prova em aranhas, o resultado é a mesmo tanto para aranhas magras como gordas, pois os vértices das patas são simpliciais e portanto não existem caminhos mínimos passando por elas.

Teorema 6.4. *Se G é uma aranha (R, K, S) e $R \neq \emptyset$, então:*

- $hn_{gd}(G) = hn_{P_3^*}(G[R]) + k$,
- $in_{gd}(G) = in_{P_3^*}(G[R]) + k$,
- $cx_{gd}(G) = n - 1$,
- $cth_{gd}(G) = max\{cth_{P_3^*}(G[R]), 2\}$,
- $rd_{gd}(G) = \omega(G[R]) + k + 1$ *e*
- $t_{gd}(G) = max\{t_{P_3^*}(G[R]), 1\}$

onde $k = |K| = |S|, n = |V(G)|$ e $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G

Demonstração. É fácil ver que todo vértice simplicial deve estar em todo conjunto de hull, pois não existem caminhos mínimos passando por eles. Por esse motivo, todos os vértices de S devem estar em todo conjunto hull, pois são simpliciais. Com isso, todos os vértices do corpo são infectados pelas patas. Além disso, nenhum subconjunto de vértices de $K \cup S$ consegue infectar algum vértice de R. Portanto, para infectar R, é preciso um conjunto de vértices V' de R tal que todos os demais vértices de R estejam em um caminho mínimo (ou seja, de tamanho dois) entre dois vértices de V'. Logo $hn_{gd}(G) = hn_{P_3^*}(G[R]) + k$. Usando os mesmos argumentos, temos que $in_{gd}(G) = in_{P_3^*}(G[R]) + k$. É fácil ver que $cx_{gd}(G) = n - 1$, pois o conjunto de vértices com exceção de uma pata é um conjunto convexo. É fácil ver que o $rd_{gd}(G) > \omega(G[R]) + k$, pois o conjunto formado pela maior clique de $G[R]$ e K forma uma clique e, portanto não satisfaz a propriedade de Radon. Considere então um conjunto X de tamanho $\omega(G[R]) + k + 1$. Então certamente X contém dois vértices $\{x_1, x_2\}$ não adjacentes. Considere a partição de X em dois conjuntos $\{x_1, x_2\}$ e $X \setminus \{x_1, x_2\}$. A parte $\{x_1, x_2\}$ infecta K e, se X contém algum vértice de K então está seria uma partição Radon. Suponha então que X não contém vértices de K. Se $X \setminus \{x_1, x_2\}$ contém dois vértices não adjacentes então eles infectariam K, o que implicaria que isso também é uma partição Radon. suponha então que $X \setminus \{x_1, x_2\}$ é uma clique de $G[R]$. Logo $|X| - 2 \leq \omega(G[R])$. Como $|X| = \omega(G[R]) + k + 1$ e $k \geq 2$ temos uma contradição.É fácil ver que todos os vértices da pata são infectados no tempo 0, se todos os vértices da cabeça $G[R]$ estiverem infectados no tempo 0, o corpo será infectado no tempo 1 e assim todo o grafo é infectado. Como as patas são sempre infectadas no tempo 0 e os vértices de $G[R]$ estão a distância 1 ou 2 entre sí, caso nem os vértices da cabeça não sejam infectados no tempo 0 então o tempo será a maior quantidade de interações que levará para infectar toda a cabeça. Os vértices do corpo são sempre infectados em tempo 1, ou por dois vértices da para ou dois vértices não adjacente da cabeça ou 1 vértice da pata e 1 da cabeça. Lembrando novamente que os vértices da cabeça estão a distância 1 ou 2 entre si então o tamanho do menor caminho está limitado. Logo o $t_{gd}(G) = max\{t_{P_3^*}(G[R]), 1\}$. □

Teorema 6.5. *Se G é uma aranha (R, K, S) e $R = \emptyset$ então:*

- $hn_{gd}(G) = k$,
- $in_{gd}(G) = k$,
- $cx_{gd}(G) = n - 1$,
- $cth_{gd}(G) = 2$,
- $rd_{gd}(G) = k + 1$ *e*
- $t_{gd}(G) = 1$

onde $k = |K| = |S|, n = |V(G)|$ e $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G

Demonstração. É fácil ver que todo vértice simplicial deve estar em todo conjunto de hull, pois não existem caminhos mínimos passando por eles. Por esse motivo, todos os vértices de S devem estar em todo conjunto hull, pois são simpliciais. Com isso, todos os vértices do corpo são infectados pelas patas, como $G[R]$ é vazio logo $hn_{gd}(G) = k$. Usando os mesmos argumentos, temos que $in_{gd}(G) = k$. É fácil ver que $cx_{gd}(G) = n - 1$, pois o conjunto de vértices com exceção de uma pata é um conjunto convexo. É fácil ver que todos os vértices da pata são infectados no tempo 0, se todos os vértices da cabeça $G[R]$ estiverem infectados no tempo 0, o corpo será infectado no tempo 1 e assim todo o grafo é infectado. Como as patas são sempre infectadas no tempo 0. Os vértices do corpo são sempre infectados em tempo 1, ou por dois vértices da pata. Logo o $t_{gd}(G) = 1$. Com relação com o número de Carathéodory, é fácil ver que $cth(G) \geq 2$ pois, para qualquer par $\{s_1, s_2\}$ de vértices de S, temos que $\partial\mathcal{H}_{gd}(\{s_1, s_2\}) \neq \emptyset$, pois $\mathcal{H}_{gd}(\{s_1, s_2\})$ contém vértices de K, mas $\mathcal{H}_{gd}(\{s_1\}) \cup \mathcal{H}_{gd}(\{s_2\}) = \{s_1, s_2\}$. Também é fácil ver que $cth(G) < 3$, pois, para qualquer conjunto X com 3 vértices, $\partial\mathcal{H}_{gd}(X) = \emptyset$. Para isso basta checar os casos em que X possui 3 vértices de K, ou X possui 3 vértices de S, ou X possui 2 vértices de K e um vértice de S, ou X possui um vértice de K e 2 vértices de S. É fácil ver que $rn(G) = k + 1$, pois se pegarmos os vértices de K para qualquer modo que particionemos eles não conseguem infectar ninguém e por isso a interseção será vazia. Agora pegamos K mais um vértice $\{v\} \in S$, como existe pelo menos um vértice de K que não é adjacente a v colocamos esses dois vértices na mesma partição e o resto em outra partição. Assim a interseção dos conjuntos hull não será vazia.

□

6.3 Convexidade P_3^* em grafos $(q, q-4)$

Nessa seção vamos provar os parâmetros conhecidos de convexidade a partir da nossa nova convexidade em grafos $(q, q - 4)$. Para o caso da união o teorema é o mesmo da convexidade geodésica (ver Teorema 6.2). Como no caso da convexidade geodésica da seção anterior dividimos a junção em 2 casos com (G_1) ou (G_2) sendo uma clique e o outro sem cliques. Começaremos com o caso sem cliques.

Teorema 6.6. *Seja $G = G_1 + G_2$. Se G_1 e G_2 não são cliques, então:*

- $hn_{P_3^*}(G) = cth_{P_3^*}(G) = 2$,
- $cx_{P_3^*}(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$,
- $rd_{P_3^*}(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + 1$,
- $in_{P_3^*}(G) = \min\{4, in_{P_3^*}(G_1), in_{P_3^*}(G_2)\}$ *e*

- $t_{P_3^*}(G) \in \{1, 2\}$.

Demonstração. A argumentação para todos os parâmetros desse teorema é idêntica a do Teorema 6.3

□

Agora o caso em que temos uma clique.

Teorema 6.7. *Se $G = G_1 + K_m$ e G_1 não é uma clique, então:*

- $hn_{P_3^*}(G) = hn_{P_3^*}(G_1)$,
- $in_{P_3^*}(G) = in_{P_3^*}(G_1)$,
- $cx_{P_3^*}(G) = cx_{P_3^*}(G_1) + m$,
- $cth_{P_3^*}(G) = \max\{cth_{P_3^*}(G_1), 2\}$,
- $t_{P_3^*}(G) = \max\{t_{P_3^*}(G_1), 1\}$ *e*
- $rd_{P_3^*}(G) = \omega(G_1) + m + 1$.

Demonstração. A demonstração deste teorema é idêntica a do Teorema 4.1, pois todo P_3 induzido é um caminho mínimo em G e vice-versa. □

Agora para o caso quando o grafo for uma aranha.

Teorema 6.8. *Se G é uma aranha (R, K, S) e $R \neq \emptyset$, então:*

- $hn_{P_3^*}(G) = hn_{P_3^*}(G[R]) + k$,
- $in_{P_3^*}(G) = in_{P_3^*}(G[R]) + k$,
- $cx_{P_3^*}(G) = n - 1$,
- $cth_{P_3^*}(G) = \max\{cth_{P_3^*}(G[R]), 2\}$,
- $rd_{P_3^*}(G) = \omega(G[R]) + 2k + 1$ *e*
- $t_{P_3^*}(G) = \max\{t_{P_3^*}(G[R]), 1\}$,

onde $k = |K| = |S|, n = |V(G)|$ e $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G

Demonstração. A demonstração deste Teorema é idêntica a do Teorema 6.4. □

Para o caso de aranha sem cabeça temos resultados diferentes se a aranha é gorda ou magra.

Teorema 6.9. *Se G é uma aranha (R, K, S) e $R = \emptyset$, então:*

- $hn_{P_3^*}(G) = k + \delta$,
- $in_{P_3^*}(G) = k + \delta$,
- $cx_{P_3^*}(G) = n - 1$,
- $cth_{P_3^*}(G) = 2$,
- $rd_{P_3^*}(G) = k + 1$ *e*
- $t_{P_3^*}(G) = 1$,

onde $\delta = 1$ se G é uma aranha magra, e $\delta = 0$, caso contrário.

Demonstração. É fácil ver que o $hn_{P_3^*}(G) \geq k$, pois todos os vértices de S devem estar infectados no início pois não há caminhos passando por eles. Também é fácil ver que o conjunto S mais um vértice de K é suficiente para infectar o grafo inteiro e portanto $hn_{P_3^*}(G) \leq k + 1$. No entanto, se G é uma aranha magra, S é convexo e portanto $hn_{P_3^*}(G) > k$ e consequentemente $hn_{P_3^*}(G) = k + 1$. Mas se G é uma aranha gorda, S é um conjunto hull e portanto $hn_{P_3^*}(G) = k$. O mesmo argumento vale para o número de intervalo. É fácil ver que o número de convexidade é $n - 1$ pois o conjunto de vértices inteiro com exceção de um vértice de S é convexo. O tempo será 1 pois todos os demais vértices serão infectados no primeiro passo. É fácil ver que $cth(G) \geq 2$ pois, para qualquer par $\{s_1, c_2\}$, onde $s_1 \in S$, $c_2 \in K$ e s_1c_2 não é aresta, temos que $\partial\mathcal{H}_{P_3^*}(\{s_1, c_2\}) \neq \emptyset$, pois $\mathcal{H}_{P_3^*}(\{s_1, c_2\})$ contém vértices de K, mas $\mathcal{H}_{P_3^*}(\{s_1\}) \cup \mathcal{H}_{P_3^*}(\{c_2\}) = \{s_1, c_2\}$. Também é fácil ver que $cth(G) < 3$, pois, para qualquer conjunto X com 3 vértices, $\partial\mathcal{H}_{P_3^*}(X) = \emptyset$. Para isso basta checar os casos em que X possui 3 vértices de K, ou X possui 3 vértices de S, ou X possui 2 vértices de K e um vértice de S, ou X possui um vértice de K e 2 vértices de S. É fácil ver que $rn(G) = k + 1$, pois se pegarmos os vértices de K, para qualquer modo que particionemos, os conjuntos hull das partes não se intersectam, visto que as partes são cliques. Agora pegamos K mais um vértice $\{v\} \in S$, como existe pelo menos um vértice de K que não é adjacente a v colocamos esses dois vértices na mesma partição, assim a interseção não será vazia. □

Referências

ARAUJO, J. et al. On the hull number of some graph classes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 38, n. 0, p. 49 – 55, 2011. ISSN 1571-0653. ¡ce:title¿The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011¡/ce:title¿. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-/S1571065311000783>.

ARAÚJO, R.; SAMPAIO, R.; SZWARCFITER, J. The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 44, n. 0, p. 109 – 114, 2013. ISSN 1571-0653. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-/S1571065313002333>.

BABEL, L.; OLARIU, S. On the structure of graphs with few P_4'*s*. *Discrete Appl. Math.*, v. 84, n. 1-3, p. 1–13, 1998. ISSN 0166-218X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10-.1016/S0166-218X(97)90120-7>.

BARBOSA, R. M. et al. On the carathéodory number for the convexity of paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 38, n. 0, p. 105 – 110, 2011. ISSN 1571-0653. ¡ce:title¿The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011¡/ce:title¿. Disponível em: <http://www-.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065311000874>.

BENEVIDES, F. et al. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: algorithmic aspects. 2013.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. New York: Springer, 2008. xii+651 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244). ISBN 978-1-84628-969-9. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>.

CAMPOS, V. et al. Graphs with few p4's under the convexity of paths of order three. In: *CTW*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 60–63.

CENTENO, C. C. et al. Irreversible conversion of graphs. *Theoret. Comput. Sci.*, v. 412, n. 29, p. 3693–3700, 2011. ISSN 0304-3975. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016-/j.tcs.2011.03.029>.

CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. In: *DIMAP Workshop on Algorithmic Graph Theory*. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009, (Electron. Notes Discrete Math., v. 32). p. 11–18. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2009.02.003>.

CHANGAT, M.; MATHEW, J. On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 206, n. 1–3, p. 91 – 95, 1999. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X9800394X>.

CORNEIL, D.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, n. 3, p. 163 – 174, 1981. ISSN 0166-218X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X81900135>.

DOURADO, M. et al. On the radon number for p_3-convexity. In: FERNáNDEZ-BACA, D. (Ed.). *LATIN 2012: Theoretical Informatics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012, (Lecture Notes in Computer Science, v. 7256). p. 267–278. ISBN 978-3-642-29343-6. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29344-3_23>.

DOURADO, M. C. et al. Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 310, n. 4, p. 832 – 837, 2010. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X09004543>.

DOURADO, M. C. et al. Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Math.*, v. 310, n. 4, p. 832–837, 2010. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2009.09.018>.

DOURADO, M. C. et al. On the convexity number of graphs. *Graphs Combin.*, v. 28, n. 3, p. 333–345, 2012. ISSN 0911-0119. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007-/s00373-011-1049-7>.

DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, n. 12, p. 1268 – 1274, 2010. ISSN 0166-218X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article-/pii/S0166218X0900479X>.

DOURADO, M. C. et al. On the carathéodory number of interval and graph convexities. *Theoretical Computer Science*, v. 510, n. 0, p. 127 – 135, 2013. ISSN 0304-3975. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397513006749>.

DRAGAN, F. F.; NICOLAI, F.; BRANDSTÄDT, A. Convexity and HHD-free graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, v. 12, n. 1, p. 119–135 (electronic), 1999. ISSN 0895-4801. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/S0895480195321718>.

FARBER, M.; JAMISON, R. Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, v. 7, n. 3, p. 433–444, 1986.

FARBER, M.; JAMISON, R. E. On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 66, n. 3, p. 231 – 247, 1987. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www-.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X87900999>.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990. ISBN 0716710455.

HARARY, F.; HEDETNIEMI, S. The achromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, v. 8, n. 2, p. 154 – 161, 1970. ISSN 0021-9800. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021980070800722>.

HOWORKA, E. A characterization of ptolemaic graphs. *Journal of Graph Theory*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 5, n. 3, p. 323–331, 1981. ISSN 1097-0118. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190050314>.

JAMISON, B.; OLARIU, S. P-components and the homogeneous decomposition of graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, v. 8, n. 3, p. 448–463, ago. 1995. ISSN 0895-4801. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/S0895480191196812>.

OLARIU, S. Weak bipolarizable graphs. *Discrete Mathematics*, v. 74, n. 1–2, p. 159 – 171, 1989. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science-/article/pii/0012365X89902082>.

PERFECT graphs. Montreal: PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, 1985.

ROSE, D. J. Triangulated graphs and the elimination process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 32, n. 3, p. 597 – 609, 1970. ISSN 0022-247.