Pablo Mayckon Silva Farias

Um estudo sobre as origens da Lógica Matemática e os limites da sua aplicabilidade à formalização da Matemática

Fortaleza, Ceará

31 de agosto de 2007

Pablo Mayckon Silva Farias

Um estudo sobre as origens da Lógica Matemática e os limites da sua aplicabilidade à formalização da Matemática

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará (UFC), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador:
Tarcísio Haroldo Cavalcante Pequeno

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Fortaleza, Ceará

31 de agosto de 2007

Um Estudo sobre as Origens da Lógica Matemática e os Limites da sua Aplicabilidade à Formalização da Matemática

Pablo Maickon Silva Farias

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos Requisitos para a obtenção do Grau de Mestre em Ciência da Computação.

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tarcísio Haroldo Cavalcante Pequeno (Presidente) UNIFOR

Prof. Dr. Nelson Maculan Filho (UFRJ)

Marcelino C Pequeno

Prof. Dr. Marcelino Cavalcante Pequeno (UFC)

Aprovada em 31 de agosto de 2007

A todos os que contribuíram para o meu aprendizado na feitura deste trabalho,
tanto aqueles que me foram próximos quanto os autores dos
trabalhos que serviram de base para este.

Que deste trabalho outras pessoas possam obter algum benefício,
da mesma maneira que dos destes autores eu tanto o pude.

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para que este trabalho fosse realizado; agora que ele está terminado, é um prazer registrar aqui o meu sincero reconhecimento a todas elas:

· Ao meu grande orientador Tarcísio Pequeno, que com amplo conhecimento técnico e não técnico me iluminou em minhas diversas dúvidas e com paciência e disposição me deixou seguir o caminho que preferi. Sem ele, acredito que este, que é exatamente o trabalho que eu quis fazer, não teria se tornado realidade.

· Aos meus queridos professores Ana Teresa, Carlos Brito, Cláudia Sales, Creto Vidal, Gervásio Bastos (Departamento de Matemática), Manoel Campêlo e Marcelino Pequeno, por terem, no meu mestrado ou na minha graduação, sido complacentes em relação às minhas falhas e me deixado seguir em frente, e por terem se preocupado comigo também enquanto pessoa. Esses professores, a despeito das minhas falta de organização ou inabilidade em seguir restrições de tempo e formato, enxergaram o que eu tinha de melhor, fazendo com que eu passasse por etapas pelas quais, de outra maneira, eu não teria conseguido naquelas circunstâncias. Estejam certos de que tanta compreensão está fortemente gravada em minha memória, e que procurarei tomá-la como exemplo em minha vida.

· Ao meu querido professor Alexandre Fernandes (Departamento de Matemática), que, compreensivo como esses acima, permitiu-me cursar uma disciplina em formato completamente diferente do comum, da qual herdei, além de abundante aprendizado técnico, experiência para minhas reflexões sobre ensino e aprendizado.

· Ao caro professor Nelson Maculan, que fez a gentileza de participar da minha banca examinadora, aceitando tanto o apressado convite a ele feito quanto a trabalhosa incumbência de examinar um trabalho fora da sua especialidade.

· Aos coordenadores do mestrado Joaquim Bento e Manoel Campêlo, pelos conselhos, compreensão e confiança que me deram, e ao secretário do mestrado Manoel Orley, que com desenvoltura resolveu as necessárias questões de ordem prática do meu mestrado.

· Ao CNPq, pela concessão da bolsa (processo 132223/2005-8) que possibilitou a minha dedicação exclusiva às atividades do mestrado.

- À minha amada namorada (Rafaella), pelo companheirismo e pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

- Aos meus amados pais (Francisco e Luzinete), que, antes de todos os acima, me amaram e deram condições para que eu estudasse e seguisse o rumo que escolhi. Como eu disse na ocasião da defesa desta dissertação, enquanto eu me ocupava com os fundamentos da Matemática, eles zelavam pelos fundamentos da minha vida.

E por fim, mas voltando ao início, a Ti, Pai celeste, que por meios e pessoas que eu vi e que eu não vi sempre cuidou, cuida e sempre cuidará de mim. Nas Tuas mãos entrego não apenas estes rabiscos, mas a mim mesmo por completo, para que um dia eu seja reflexo de Ti, que és Perfeito.

... Então a moral deste livro, para aqueles que já o leram, é:
não leia este livro, mas vá e leia os originais;
então você vai ver como o número surgiu.
John Newsome Crossley

Nós temos que saber,
nós vamos saber.
David Hilbert

Resumo

Este trabalho é um estudo sobre as origens da Lógica Matemática e os limites da sua aplicabilidade ao desenvolvimento formal da Matemática. Primeiramente, é apresentada a teoria aritmética de Dedekind, a primeira teoria a fornecer uma definição precisa para os números naturais e com base nela demonstrar todos os fatos comumente conhecidos a seu respeito. É também apresentada a axiomatização da Aritmética feita por Peano, que de certa forma simplificou a teoria de Dedekind. Em seguida, é apresentada a *Begriffsschrift* de Frege, a linguagem formal que deu origem à Lógica moderna, e nela são representadas as definições básicas de Frege a respeito da noção de número. Posteriormente, é apresentado um resumo de questões importantes em fundamentos da Matemática durante as primeiras três décadas do século XX, iniciando com os paradoxos na Teoria dos Conjuntos e terminando com a doutrina formalista de Hilbert. Por fim, são apresentados, em linhas gerais, os teoremas de incompletude de Gödel e o conceito de computabilidade de Turing, que apresentaram respostas precisas às duas mais importantes questões do programa de Hilbert, a saber, uma prova direta de consistência para a Aritmética e o problema da decisão, respectivamente.

Palavras-chave:

1. Lógica Matemática

2. Fundamentos da Matemática

3. Teoremas de incompletude de Gödel

Abstract

This work is a study about the origins of Mathematical Logic and the limits of its applicability to the formal development of Mathematics. Firstly, Dedekind's arithmetical theory is presented, which was the first theory to provide a precise definition for natural numbers and to demonstrate relying on it all facts commonly known about them. Peano's axiomatization for Arithmetic is also presented, which in a sense simplified Dedekind's theory. Then, Frege's *Begriffsschrift* is presented, the formal language from which modern Logic originated, and in it are represented Frege's basic definitions concerning the notion of number. Afterwards, a summary of important topics on the foundations of Mathematics from the first three decades of the twentieth century is presented, beginning with the paradoxes in Set Theory and ending with Hilbert's formalist doctrine. At last, are presented, in general terms, Gödel's incompleteness theorems and Turing's computability concept, which provided precise answers to the two most important points in Hilbert's program, to wit, a direct proof of consistency for Arithmetic and the decision problem, respectively.

Keywords:

1. Mathematical Logic
2. Foundations of Mathematics
3. Gödel's incompleteness theorems

Sumário

1 Introdução

1.1 Um pouco de história

O que é um número natural? Essa é uma questão de caráter genuinamente matemático, ou pelo menos pode ser interpretada como tal. Afinal, uma das tarefas da Matemática é fornecer modelos para objetos e fenômenos do mundo, e a indagação em questão pode ser reformulada como "como modelar a noção de número natural, de forma que do modelo possamos extrair todas as propriedades que conhecemos a respeito desses números?". A pergunta em questão é também bastante antiga, dado que a noção de número surgiu a partir do simples processo de *contagem*. A despeito, porém, da antiguidade e da natureza primitiva dessa questão, não foi senão há relativamente pouco tempo que começaram a ser apresentadas respostas satisfatórias para ela. De fato, até mesmo noções mais elaboradas, como as de número racional, complexo e real, foram fundamentadas anteriormente, apenas tomando-a como base.[1] O desenvolvimento da Matemática, contudo, inevitavelmente levou a um aumento de precisão na expressão, e isso, juntamente com o caráter acumulativo das propostas matemáticas, possibilitou uma análise mais clara da noção de número natural.[2] Assim, em 1888, foi possível ao matemático alemão Richard Dedekind propor uma definição matemática dessa noção, e desenvolver com base nela uma teoria que abrangia todos os fatos comumente conhecidos a seu respeito [5]. A teoria de Dedekind é, em termos atuais, um desenvolvimento da Aritmética que toma por base a Teoria dos Conjuntos. Ela não dá um modelo para a noção de número em si, mas sim para o *conjunto dos números naturais* como um todo. Pouco depois, em 1889, o matemático italiano Giuseppe Peano propôs uma fundamentação metodologicamente diferente para os números naturais [24]. Ao invés de modelá-los em termos de conjuntos, ele escolheu descrevê-los através de um pequeno grupo de propriedades, as quais seria *assumido* serem possuídas pelos números naturais e do que todas as outras seriam demonstradas. Esse pequeno grupo de propriedades posteriormente ficaria conhecido como *os axiomas de Peano*, e desde então constitui a caracterização axiomática padrão dos números naturais.

[1] A respeito dos surgimento e desenvolvimento das várias noções de número, veja [2].
[2] A respeito do aumento de rigor na Matemática a partir do fim do século XVIII, veja [22].

Um pouco antes da aparição dos trabalhos acima, em 1884, o matemático alemão Gottlob Frege também propunha uma fundamentação para os números naturais [9]. O caráter desse trabalho, entretanto, era mais filosófico que matemático: seu objetivo não era mostrar como os conhecidos resultados da Aritmética podiam ser obtidos na teoria, mas sim fornecer um *conceito de número* que fosse lógica e filosoficamente adequado. A aplicação dos conceitos desenvolvidos nesse trabalho à demonstração dos teoremas da Aritmética apareceu em 1893 [10]. Mais uma vez, porém, esse trabalho era marcadamente distinto daqueles de Dedekind e Peano: os teoremas lá provados abarcavam um conteúdo bem menor, mas por outro lado em um nível de detalhe muitas vezes maior. Esse fato não era conseqüência de uma mera preferência particular de Frege, e sim de uma diferença de propósito. Frege defendia que *a Aritmética era parte da Lógica*, no sentido de que as verdades da primeira não eram senão casos particulares das verdades da segunda.[3] Ainda no final da década de 1870, ele procurou verificar essa tese de forma concreta, demonstrando as verdades da Aritmética com base em pressupostos exclusivamente lógicos. Nessa tentativa, porém, ele verificou ser a linguagem ordinária demasiadamente imprecisa para esse propósito, e então empreitou a criação de uma linguagem adequada à representação do conhecimento puramente lógico. O resultado desse trabalho foi a sua *Begriffsschrift* [8] (1879), uma linguagem simbólica puramente *formal* e que viria ser a base da Lógica moderna.[4] Em particular, as inferências representadas nessa linguagem têm necessariamente que ser apresentadas sem saltos de argumentação, e exatamente por essa razão Frege a utilizou para escrever as demonstrações da sua obra de 1893.

Em 1902, porém, quando Frege estava prestes a publicar o segundo volume daquela que ele acreditava ser uma vindicação concreta da sua tese [11], o lógico e matemático Bertrand Russell o comunicou de uma inconsistência na sua obra; em outras palavras, Russell havia descoberto que era possível demonstrar no sistema de Frege proposições contraditórias entre si. Na verdade, o que Russell informou a Frege foi que era possível representar dentro do seu sistema uma inconsistência mais geral, que ele havia descoberto no contexto da Teoria dos Conjuntos. Essa inconsistência, que viria a ficar conhecida como *paradoxo de Russell*, foi a mais importante de um conjunto de paradoxos que desencadearam uma crise matemática na primeira década do século XX. A razão da crise era que a Teoria dos Conjuntos, que havia sido desenvolvida por Georg Cantor de 1874 em diante, já então servia de alicerce para as principais partes da Matemática; fosse ela inconsistente, portanto, os resultados da Matemática como um todo estariam, pelo menos parcialmente, baseados em princípios contraditórios.

[3] As "verdades da lógica" a que me refiro são as conclusões a que se pode chegar exclusivamente por meio do raciocínio, isto é, sem se realizar verificações de fatos no mundo; elas são o conhecimento *a priori* de Immanuel Kant.

[4] "Formal" significa que nessa linguagem as inferências são realizadas com base exclusivamente na *forma* das proposições, independentemente do significado atribuído aos símbolos da linguagem.

Essa crise na Teoria dos Conjuntos foi altamente frutífera, pois levou a inúmeras propostas de solução aos paradoxos. Em 1908, por exemplo, Ernst Zermelo propôs uma *axiomatização* para a Teoria dos Conjuntos, a qual viria a ser posteriormente desenvolvida por Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem. A aplicação do método axiomático à Teoria dos Conjuntos eliminava dela a dependência de uma interpretação para a noção de "conjunto", caracterizando-a exclusivamente por meio dos axiomas; estes, por sua vez, foram escolhidos com o objetivo de tanto viabilizar a demonstração dos teoremas desejados da Teoria dos Conjuntos quanto evitar o aparecimento de contradições. Outra proposta de contorno aos paradoxos foi a *teoria dos tipos*, criada pelo próprio Russell e publicada também em 1908. Em particular, essa teoria seria utilizada no desenvolvimento de uma obra que Russell veio a escrever em conjunto o matemático inglês Alfred Whitehead, o *Principia mathematica* [27] (1910,2,3). Essa obra, a exemplo daquela de Frege, tinha como objetivo ser uma vindicação concreta do *logicismo*, a tese de que a Matemática é parte da Lógica. De fato, nela estavam presentes desenvolvimentos rigorosos de várias teorias matemáticas, e todas as demonstrações se baseavam num pequeno grupo de axiomas. Dois desses axiomas, porém, não foram em geral considerados como tendo caráter puramente lógico, e isso invalidou a obra enquanto defesa da tese logicista. Por outro lado, a obra em questão obteve indiscutível sucesso em demonstrar o poder de expressão da lógica formal, bem como a passibilidade por parte da Matemática de ser rigorosamente desenvolvida com base num pequeno número de postulados.[5]

Uma terceira proposta de solução aos paradoxos da Teoria dos Conjuntos foi sugerida pelo matemático alemão David Hilbert durante a década de 1920. Já em 1900 Hilbert havia fornecido axiomatizações para a Geometria Euclidiana e para a Análise, e ele acreditava que o método axiomático era o instrumento adequado para o desenvolvimento da Matemática. Ele propunha, portanto, uma reescrita axiomática da Matemática utilizando-se o "cálculo" lógico formal. Por outro lado, Hilbert sabia que o mero desenvolvimento axiomático de uma teoria não é suficiente para garantir que ela não possui contradições, como mostrava o próprio caso de Frege. Ele então propôs uma busca por uma *prova de consistência* da Aritmética. A viabilidade dessa busca, porém, estava diretamente associada à noção por ele desenvolvida de *metamatemática*, que consistia na idéia de considerar os próprios símbolos utilizados para formalizar a prática da Matemática como objetos de estudo, de forma que afirmações como a da consistência da Aritmética poderiam ser expressas como afirmações sobre tais objetos. Ainda assim, entretanto, uma prova metamatemática da consistência da Aritmética formalizada seria também uma prova matemática, e, como tal, ficaria sob suspeita de se basear em princípios con-

[5]Digo "rigorosamente" porque a idéia de que, *em princípio*, a Matemática poderia ser desenvolvida com base num pequeno número de axiomas já era popular desde o estabelecimento da Teoria dos Conjuntos.

traditórios. Assim, Hilbert propôs que a prova de consistência fosse também *finitária*, isto é, utilizasse apenas métodos cuja correção pudesse ser verificada em um número finito de passos, de maneira semelhante a como é possível verificar se uma equação como $5+3=6+4\div 2$ (ou outra de maior tamanho mas da mesma natureza) é verdadeira ou falsa apenas pela realização de uma quantidade finita de *manipulações simbólicas imediatas*. Essas propostas ficaram conhecidas como *o programa de Hilbert*, e os estudos metamatemáticos realizados em busca da sua realização deram origem à area conhecida como *teoria da prova*.

Em 1931, porém, o matemático austríaco Kurt Gödel mostrou que o objetivo principal do programa de Hilbert, uma prova finitária de consistência da Aritmética formalizada, era inatingível. Para tanto, Gödel mostrou primeiramente como mapear os objetos de estudo da metamatemática (símbolos, fórmulas, provas) nos números naturais, de forma que relações entre estes podiam ser utilizadas para representar as relações envolvendo aqueles. Além disso, ele demonstrou que essas relações sobre números naturais podiam ser expressas dentro do próprio sistema formal que era alvo da sua análise metamatemática, mostrando assim que esse sistema era capaz de representar proposições sobre si mesmo. Em particular, ele demonstrou que o sistema formal do *Principia mathematica* era capaz de *representar* uma proposição que implicava na sua própria consistência. Utilizando esses fatos, Gödel mostrou que, sendo esse sistema (ω-)consistente, então (1) esse fato não poderia ser demonstrado dentro do próprio sistema e (2) existiriam proposições na linguagem tais que nem ela nem a sua negação seriam formalmente demonstráveis. O primeiro desses resultados mostrava que não era possível se obter uma prova finitária de consistência para o sistema formal em questão, já que se acreditava que todos os métodos considerados finitários eram nele representáveis; o segundo, por sua vez, mostrava que todo sistema formal, correto e com um mínimo de expressividade, era necessariamente incompleto, sendo essa uma limitação inerente ao método axiomático.

Os resultados de Gödel, ao mesmo tempo que demonstraram a impossibilidade da realização do programa de Hilbert como inicialmente concebido, serviram de estímulo para investigações em diversas direções na Lógica Matemática. Em particular, eles contribuíram para o desenvolvimento em 1936 do conceito de *computabilidade*, realizado por Alan Turing [34]. Esse conceito, tendo tornado precisa a noção de procedimento mecânico, serviu para responder outra grande questão introduzida pelo programa de Hilbert:[6] a de se existe ou não um procedimento puramente mecânico que possa decidir, dado um conjunto de axiomas e uma certa afirmação

[6] Outras questões importantes, como as da *independência* dos axiomas e da *completude* do cálculo formal, já tinham sido respondidas anteriormente por Emil Post (1921, completude da lógica proposicional), Paul Bernays (1926, independência dos axiomas da lógica proposicional) e Gödel (1930, completude e independência em relação à lógica de primeira ordem); veja [35], págs. 264 e 582 (em relação à completude da lógica de primeira ordem, o trabalho de Skolem também deve ser mencionado; veja [35], págs. 508–12).

(devidamente formalizados), se esta última é ou não conseqüência do primeiro (*problema da decisão*). Claramente, a existência de um tal procedimento implicaria na solubidade mecânica de todo problema matemático, mas Turing mostrou que, tomando-se o conceito de computabilidade como correspondente formal da noção de mecanicidade, não existe tal procedimento. Se, por fim, em adição a esse fato, considerarmos que foram feitas outras propostas de conceituação dessa noção e que provou-se que elas são equivalentes à de Turing, então entenderemos que esses resultados forneceram uma resposta “negativa” ao problema da decisão proposto por Hilbert.

1.2 Sobre esta dissertação

Este trabalho foi motivado pelo meu interesse em compreender melhor as origens da Lógica Matemática e os limites da sua aplicabilidade ao desenvolvimento formal da Matemática. Desde o momento da sua concepção, não foi a intenção que ele contivesse algum resultado “novo”; ao invés disso, a proposta era produzir um texto que, com bastante *clareza* e *articulação*, apresentasse as questões, acompanhadas das respectivas nuances de raciocínio e acontecimentos históricos, mais relevantes para a compreensão da relação entre a lógica formal e os fundamentos da Matemática.[7]

As contribuições deste trabalho são duas, das quais a primeira em intenção foi o ganho em compreensão que me foi possível obter no curso dos estudos que realizei e da escrita do texto em si. Nesse sentido, é importante explicitar a escolha metodológica, estabelecida desde o início dos trabalhos e seguida até o seu fim, de que os estudos realizados foram feitos principalmente sobre textos originais (ou em tradução), e que a literatura “secundária” foi consultada *a posteriori*, em geral com o intuito do enlarguecimento da minha interpretação. Assim, por exemplo, a grande maioria das leituras realizadas para a escrita do capítulo 2 foram feitas em [6], para o capítulo 3 em [35], [13] e [12], para o capítulo 4 em [35] e para o capítulo 5 em [35] e [4]. Essa escolha teve o intuito de me colocar em contato mais próximo com o contexto que eu iria estudar, contribuindo assim para que as questões consideradas pudessem ser enxergadas da forma mais aguda possível.

A segunda contribuição deste texto, esta orientada para o leitor, consiste na sua pretensa capacidade em proporcionar a este uma compreensão articulada e, na medida em que me possível fazê-lo, bem justificada a respeito de um capítulo importante e intrigante na história da Matemática, um em que os seus próprios alicerces foram alvo de análise. Em particular, é principalmente em relação ao sucesso do texto em fazê-lo que eu acredito que este trabalho deva ser

[7] A proposta deste trabalho é, portanto, mais próxima daquela de um livro-texto que daquela de um artigo, desconsiderada a questão do tamanho.

avaliado. Este texto também pode ser útil enquanto exposição em língua portuguesa do tema por ele abordado, em particular da teoria aritmética de Dedekind e da *Begriffsschrift* de Frege, as quais, a despeito dos marcos matemáticos em que consistiram, não são *em si* amplamente conhecidas.

Finalmente, uma palavra a respeito do 'recorte' dos assuntos escolhidos para serem abordados. Se verificarmos os textos a respeito dos fundamentos da Matemática (sobre, por exemplo, o programa de Hilbert ou os teoremas de incompletude de Gödel), verificaremos que a palavra "Aritmética" ocorre com grande freqüência. Apesar disso, uma exposição abrangente desta teoria não acompanha em geral a apresentação do assunto "Lógica Matemática", que hoje em dia ganhou asas próprias e é ensinado de forma completamente destacada da sua motivação inicial. Numa exposição sobre as origens da Lógica moderna, porém, a Aritmética é o pré-requisito mais imediato. Agora, se além disso atentarmos para o fato de que essa teoria não possui grandes pré-requisitos, então poderemos concluir que a sua apresentação constitui um bom ponto de partida para o assunto abordado no texto presente. Por fim, as teorias aritméticas de Dedekind e Frege têm beleza própria e, não sendo amplamente conhecidas, justificam a sua apresentação. A apresentação da *Begriffsschrift* de Frege se justifica por ela ter sido a primeira expressão da lógica formal como a conhecemos; é instrutivo perceber, por exemplo, como a relação entre a sintaxe formal e a semântica a ela associada era de natureza distinta daquela a que hoje estamos habituados, em grande parte graças aos trabalhos posteriores de Tarski. O capítulo 4 apresenta uma ligação natural entre o aparecimento dos paradoxos na Teoria dos Conjuntos e a expressão mais madura da doutrina formalista de Hilbert. O último capítulo, por fim, apresenta as respostas de Gödel e Turing às duas grandes questões postas pelo programa de Hilbert, a saber, a possibilidade de uma prova direta de consistência da Aritmética e o problema da decisão.[8] Este texto claramente não é uma exposição completa sobre fundamentos da Matemática: a única ocorrência nele da palavra 'intuicionismo', por exemplo, creio que acontece nesta própria frase.[9] Naturalmente, esse assunto é demasiadamente longo para que no tempo de um mestrado eu pudesse atingir uma boa compreensão em relação à maioria das suas partes e ainda elaborasse uma boa síntese a respeito. Assim sendo, procurei escolher um conjunto de assuntos relativamente auto-contido e abordá-lo em uma profundidade satisfatória.

Que este trabalho possa proporcionar ao leitor pelo menos um pouco do prazer que tive em fazê-lo.

[8] Que os trabalhos de Gödel e Turing respondiam às duas principais questões associadas ao programa de Hilbert foi algo particularmente enfatizado a mim pelo meu orientador; já a consideração dos trabalhos de Dedekind e Frege foi resultado da minha insistência nesse sentido.

[9] Parcialmente para aliviar o peso que eu teria na consciência em não mencioná-la uma vez sequer `:-)`.

Escrito depois das revisões pós-defesa: Dada a beleza do assunto, o ideal seria tornar toda a dissertação tão matematicamente satisfatória quanto o capítulo sobre a teoria aritmética de Dedekind. Entretanto, deve-se ter em vista que um grande trabalho histórico também foi realizado, e que o tempo disponível para a escrita de uma dissertação de mestrado é, em relação ao tamanho de uma tal empreitada, curto. Fico satisfeito com o fato de que houve grande dedicação na preparação desse texto, e que desse esforço e outros posteriores herdei a capacidade de elaborar um texto ainda melhor (algo que eu teria prazer em fazer).

2 A fundamentação da Aritmética de Dedekind

2.1 Exposição da teoria

> *Na ciência, nada passível de prova deveria ser aceito sem prova. Apesar de essa exigência parecer tão razoável, ainda assim eu não posso considerá-la como tendo sido satisfeita sequer nos métodos mais recentes para estabelecer os fundamentos da ciência mais simples, a saber, aquela parte da lógica que lida com a teoria dos números.*[1]

Assim começa o texto de [5], cujo objetivo era estabelecer uma fundamentação sólida para a Aritmética.

Parte das definições apresentadas por Dedekind são hoje conhecidas com outros nomes. Listo abaixo algumas delas, seguidas das suas correspondentes atuais:[2]

02. Definição: *Sistema*: Conjunto não-vazio.[3]

21. Definição: *Transformação* [*Abbildung*] de um sistema S em um sistema Z: Função de domínio S e contra-domínio Z.

26. Definição: Transformação *similar* [*ähnlich*]: Função injetiva.

32. Definição: Sistemas *similares*: Conjuntos de mesma cardinalidade. (Um sistema R será similar a um sistema S quando existir uma transformação similar ϕ de S tal que $\phi(S) = R$.)

Outras definições também são importantes para o desenvolvimento do texto e seguem abaixo. Antes, porém, consideremos os seguintes pontos:

---

[1] Tradução do trecho presente em [6], pág. 31.

[2] Adotarei aqui a numeração presente em [6].

[3] Embora Dedekind reconheça que, em outras investigações, possa ser apropriado considerar o conjunto vazio ([6], págs. 45,6).

- Notação: Quando ϕ de domínio D está subentendida no contexto e $A \subseteq D$ e $a \in D$, podemos representar $\phi(A)$ e $\phi(a)$ por A' e a', respectivamente.
- Nas definições e teoremas abaixo (de 37 a 59), subentendamos referência a $\phi : S \to S$ quando uma transformação for utilizada implicitamente.

37. Definição: *Cadeia* [*Kette*]: Um conjunto $K \subseteq S$ tal que $K' \subseteq K$.

44. Definição: *A cadeia de um sistema A*: Se $A \subseteq S$, então 'a cadeia A_0 de A', também denotada por $\phi_0(A)$, é a interseção de todas as cadeias que contém A.

Observe que A_0 é realmente uma cadeia, no sentido de 37, e que $A_0 \subseteq S$, já que S é uma cadeia ($\phi : S \to S$) e contém A.

Com base nessas noções, os seguintes teoremas podem ser provados:

45. Teorema: $A \subseteq A_0$.

50. Teorema: $A' \subseteq A_0$.

58. Teorema: $A_0 = A \cup A'_0$.[4]

Prova: ($\supseteq$) Seja $a \in A \cup A'_0$. Se $a \in A$, como $A \subseteq A_0$ (45), então $a \in A_0$. Caso contrário, então $a \in A'_0$. Logo (44), a pertence a toda cadeia que contenha A'. Mas (deduz-se que) toda cadeia que contém A também contém A', e portanto (44) $a \in A_0$, C.Q.D..

($\subseteq$) Seja $a \in A_0$ e suponhamos que $a \notin A$. Nesse caso, a deve pertencer a A'_0, pois: suponhamos, por absurdo, que $a \notin A'_0$. Nesse caso, como (se prova que) $A \cup A'_0$ é uma cadeia, então existe uma cadeia que contém A e que não possui a, o que implica (44) que $a \notin A_0$, um absurdo. □

Lema: $A_0{}'$ é cadeia e contém A'.

Prova: 1. Seja $b \in A_0{}'$. Queremos mostrar que $b' \in A_0{}'$. Como $b \in A_0{}'$, existe $a \in A_0 \mid a' = b$. Como A_0 é cadeia (44), então (para um tal a) $a' = b \in A_0$ (37), o que implica que $b' \in A_0{}'$, C.Q.D..

2. Seja $b \in A'$. Logo, existe $a \in A \mid a' = b$. Logo (45), (para um tal a) $a \in A_0$, o que implica que $a' = b \in A_0{}'$, C.Q.D.. □

[4] Atente para o detalhe da notação: A'_0 e $A_0{}'$ significam $(A')_0$ e $(A_0)'$, respectivamente.

57. Teorema: ${A_0}' = {A'}_0$ (e, portanto, podemos denotá-los simplesmente por A'_0).

Prova: ($\subseteq$) Como $A_0 = A \cup {A'}_0$ (58), então (deduz-se que) ${A_0}' = A' \cup {{A'}_0}'$. Como ${A'}_0$ é uma cadeia (44), então ${{A'}_0}' \subseteq {A'}_0$ (37), e portanto ${A_0}' \subseteq A' \cup {A'}_0$. Mas $A' \subseteq {A'}_0$ (45), o que implica que ${A_0}' \subseteq {A'}_0$.

($\supseteq$) Seja $b \in {A'}_0$. Logo (44), b pertence a toda cadeia que contenha A'. Logo, pelo lema acima, $b \in {A_0}'$. □

59. Teorema da indução (para cadeias): Para provar que $A_0 \subseteq \Sigma$, independentemente de se $\Sigma \subseteq S$ (o domínio de ϕ) ou não, é suficiente mostrar que:

1. $A \subseteq \Sigma$.
2. $(A_0 \cap \Sigma)' \subseteq \Sigma$.

Prova: Suponhamos que as duas condições sejam verdadeiras. Mostraremos que $A_0 \cap \Sigma$ é uma cadeia que contém A, e que portanto contém A_0 (44), o que implica que $A_0 \subseteq \Sigma$. Que $A \subseteq A_0 \cap \Sigma$ segue de 45 e da primeira condição. Seja agora $a \in A_0 \cap \Sigma$. Pela segunda condição, temos que $a' \in \Sigma$. Como A_0 é uma cadeia (44), então $a' \in A_0$ (37), e portanto $a' \in A_0 \cap \Sigma$. □

Obtidos esses importantes resultados, Dedekind segue para a distinção entre conjuntos finitos e infinitos:

64. Definição: Um sistema será *infinito* quando for similar a um subconjunto próprio seu, e *finito* no caso contrário.

Em seguida, ele enuncia como teorema que "Existem sistemas infinitos" e apresenta como prova uma argumentação que recorre ao domínio dos seus próprios pensamentos, e que por isso veio a ser fortemente criticada como não-matemática.[5] Por outro lado, o reconhecimento por parte de Dedekind da necessidade do pressuposto da existência de conjuntos infinitos em argumentações matemáticas fez com que Zermelo devesse a ele o *axioma da infinidade* na sua axiomatização da Teoria dos Conjuntos[6].

66. Teorema: Existem sistemas infinitos.

[5] Ver, por exemplo, [2], pág. 51.

[6] [35], pág. 204. Veja também a pág. 73 desta dissertação.

Prova: "O domínio dos meus pensamentos, isto é, a totalidade S de todas as coisas que podem ser objetos do meu pensamento, é infinita". Pois se s é um elemento de S, então

"s pode ser um objeto do meu pensamento"

também é um elemento de S, que podemos encarar como tendo sido obtido a partir de s através de uma transformação ϕ. Disso, segue que:

1. $S' \subseteq S$.

2. "S' é certamente parte própria de S, porque existem elementos de S (por exemplo, meu próprio ego) que são diferentes de um tal pensamento s' e portanto não estão contidos em S'".

3. ϕ é similar (26), uma vez que, se a e b são elementos diferentes de S, então 'claramente' a' e b' também são diferentes.

Finalmente, segue dessas três conclusões que S é infinito (64). □

Na seqüência, Dedekind define o que conhecemos hoje como conjuntos infinitos enumeráveis e apresenta outros teoremas.

71. Definição: Diremos que é *simplesmente infinito* um sistema N para o qual existem $\phi : N \to N$ e $1 \in N$ tais que:

β. $N = 1_0$.

γ. $1 \notin N'$.

δ. ϕ é similar.

Nesse caso, dizemos que ϕ *ordena* N e que 1 é o *elemento-base* de N[7]. Observe que, a partir de (δ) e de que $N' \subset N$, é possível concluir que N é realmente infinito (64).

72. Teorema: Se S é infinito, então existe $N \subseteq S$ tal que N é simplesmente infinito.

Prova: Como S é infinito, então existem $\phi : S \to S$ e $s \in S$ tais que ϕ é similar e $s \notin S'$ (64). Façamos então $N = s_0$ e seja ψ a restrição de ϕ a N. Disso, segue que:

1. $\psi(N) \subseteq N$, pois s_0 é cadeia (44, 37).

2. $s \notin \psi(N)$, pois $s \notin \phi(S)$.

3. ψ é similar, pois ϕ o é.

[7]Observe que, dada ϕ, não pode existir um elemento $n \in N$ diferente de 1 e com as suas mesmas propriedades.

Logo, N é simplesmente infinito (71). $\square$

Nesse ponto, Dedekind chega à sua definição do conjunto dos números naturais e aplica a ela alguns resultados obtidos anteriormente:

73. Definição: O *conjunto dos números naturais* ($\mathbb{N}$) é o que se obtém quando, dado um conjunto N simplesmente infinito e ordenado por ϕ, descarta-se qualquer caráter particular de seus elementos, considerando-os apenas do ponto de vista da relação de igualdade e de ϕ.

Dedekind acrescenta que é essa abstração das características particulares dos elementos de N que justifica a sua famosa afirmação: "Os números são uma livre criação da mente humana".

80. Teorema da indução (para números naturais): Se $m \in \mathbb{N}$, então, para mostrar que todo $n \in m_0$ possui uma certa propriedade[8], basta mostrar que:

1. m possui a propriedade.
2. Se um elemento $n \in m_0$ qualquer possui a propriedade, então n' também a possui[9].

Prova: Seja Σ o conjunto dos elementos de m_0 que possuem a propriedade em questão. Como as duas condições acima são verdadeiras, por 59, temos que $m_0 \subseteq \Sigma$, o que implica que $\Sigma = m_0$. $\square$

Definido o conjunto dos números naturais, Dedekind parte para definir noções básicas associadas a ele, como a noção de ordem, e prova alguns resultados relacionados.

89. Definição: Se $m, n \in \mathbb{N}$, diremos que $m < n$ quando $n \in m'_0$.

90. Teorema: Se $m, n \in \mathbb{N}$, então exatamente um dos três casos ocorre:

1. $m = n$.
2. $m < n$.
3. $n < m$.

(Esse resultado pode ser provado por indução em m.)

96. Teorema: Se $T \subseteq \mathbb{N}$, então T possui um menor elemento.[10]

[8] Ou seja, para todo $n \geq m$ (89, 90).
[9] Atente para o fato de que $n' = \phi(n)$, onde ϕ é a relação que ordena $\mathbb{N}$ em consideração no teorema em questão.
[10] Conjuntos vazios não estão sendo considerados (02).

Prova: Se $1 \in T$[11], então 1 é o menor elemento de T, pois (pode-se provar que) 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. Caso contrário, então haverá $k > 1$ tal que $m \notin T$, $\forall m < k$, e $k \in T$ (**). Se assim não fosse, teríamos que, $\forall k > 1$, se $m \notin T$, $\forall m < k$, então $k \notin T$ (*). Daí, poderíamos provar por indução (80) que nenhum elemento de $\mathbb{N}$ pertenceria a T:

$1'$: Como (pode-se provar que) o único elemento menor que $1'$ é 1 e $1 \notin T$, então, por (*), $1' \notin T$.

h.i.: $l \notin T, \forall l \leq n$.

n': Se $m < n'$, então (pode-se provar que) $m \leq n$, o que implica, pela hipótese de indução, que $m \notin T$. Logo, por (*), $n' \notin T$.

Logo, T seria vazio, um absurdo (02). De (**), portanto, segue que k é o menor elemento de T. □

114. Teorema: Se $E \subseteq \mathbb{N}$ é limitado superiormente por um elemento de $\mathbb{N}$, então E possui um maior elemento.

Prova: Provemos por indução (80) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se n é um limite superior para E, então E possui um maior elemento.

1: Se 1 for limite superior de E, então, como (pode-se provar que) o único número ≤ 1 é o próprio 1, então $E = \{1\}$, e portanto E tem um maior elemento.

n': Suponhamos que n' seja um limite superior para E; logo, $\forall e \in E$, $e \leq n'$. São dois casos: se n também for um limite superior para E, então, pela hipótese de indução, E possui um maior elemento. Caso contrário, então existe $m \in E \mid m > n$. Mas $m \leq n'$, e então (pode-se provar que) $m = n'$, o que implica que m é o maior elemento de E, C.Q.D.. □

122. Teorema: Todo $U \subseteq \mathbb{N}$ que não tem um maior elemento é simplesmente infinito.

Prova: Se U não tem um maior elemento, então, $\forall u \in U$, existe $v \in U \mid u < v$. Definamos, então, $\forall u \in U$, o conjunto (não-vazio) M_u dos elementos de U maiores que u. Como todo conjunto M_u possui um (único) menor elemento m_u (96), podemos definir $\phi : U \to U : u \mapsto m_u$. Observemos agora:

1. Sendo k o menor elemento de U (96), temos $k \notin \phi(U)$: Se assim não fosse, existiria $j \in U \mid \phi(j) = k$, e, pela definição de ϕ, teríamos $j < k$, um absurdo.

[11] '1' é o elemento-base de $\mathbb{N}$, segundo a ordem ϕ em questão.

2. ϕ é similar: Sejam dois elementos distintos p e q de U e suponhamos, sem perda de generalidade, que $p < q$. Logo, pela definição de ϕ, temos $p < \phi(p) \leq q < \phi(q)$, o que implica que $\phi(p) \neq \phi(q)$ (90), C.Q.D..

3. $U = \phi_0(k)$: Mostremos por indução (80) que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in U$, se $l \leq n$, então $l \in \phi_0(k)$.

   1: Seja $l \in U \mid l \leq 1$. Disso, demonstra-se que $l = 1$, e, como (é possível mostrar que) 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$, então teremos $k = 1$. Por 45, então, temos $l \in \phi_0(k)$, C.Q.D..

   n': Seja $l \in U \mid l \leq n'$.[12] Se tivermos $l \leq n$, então, pela hipótese de indução, temos que $l \in \phi_0(k)$. Caso contrário, demonstra-se que $l = n'$. São então dois casos: se $k = n'$, então $l \in \phi_0(k)$ (45). Caso contrário, então existem elementos em U menores que n'. Seja então C o conjunto (não-vazio) dos elementos de U menores que n', e, como (pode-se provar que) n é limite superior para C, seja j o maior elemento de C (114). Logo, $\forall u \in U$, se $u > j$, então $u \notin C$, ou seja (90), $u \geq n'$, o que, pela definição de ϕ, implica que $n' = \phi(j)$. Mas $j \leq n$, o que, pela hipótese de indução, implica que $j \in \phi_0(k)$. Logo, como $\phi_0(k)$ é cadeia (44), temos $\phi(j) \in \phi_0(k)$, ou seja, $l \in \phi_0(k)$, C.Q.D..

Assim, concluimos que U é simplesmente infinito (71). □

Em seguida, Dedekind chega a um importante resultado (126), que demonstra a validade de definições recursivas de funções sobre os números naturais.[13]

98. Definição: Se $n \in \mathbb{N}$, então denotaremos por Z_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n.

125. Teorema: Dado um sistema Ω, se $\omega \in \Omega$ e $\theta : \Omega \to \Omega$, então, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe exatamente uma função $\psi_n : Z_n \to \Omega$ tal que:

1. $\psi_n(1) = \omega$.

2. $\psi_n(t') = \theta(\psi_n(t)), \forall t < n$.

Prova: Por indução (80) em n:

[12] Atente para o fato de que, nesse momento, n' denota o elemento obtido a partir de n através da função que ordena $\mathbb{N}$, e não através de ϕ.

[13] Mais precisamente, o teorema 126 essencialmente prova a correção do que hoje conhecemos como esquema de definição por recursão primitiva (com a ressalva de que o teorema em questão trata apenas de funções unárias, mas a extensão para funções $n+1$-árias quaisquer é trivial).

1: Observe que (existência) $f: Z_1 \to \Omega: 1 \mapsto \omega$ satisfaz os requisitos, e que (unicidade) qualquer outra função $g: Z_1 \to \Omega$ que satisfaça a primeira restrição será necessariamente igual a f.

n': (Existência) Como, pela hipótese de indução, o resultado vale para n, então existe uma única função ψ_n com as propriedades acima. Definamos então a função

$$f: Z_{n'} \to \Omega: k \mapsto \begin{cases} \psi_n(k), \forall k < n' \\ \theta(f(n)), \text{se } k = n' \end{cases}$$

e provemos que ela possui as propriedades 1 e 2:

- ○ $f(1) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n(1) \stackrel{\text{h.i.}}{=} \omega$.
- ○: Seja $k \in Z_{n'} \mid k > 1$. Logo, (prova-se que) existe $l \in \mathbb{N} \mid l' = k$. Se $k < n'$, então $f(k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n(k) = \psi_n(l') \stackrel{h.i.}{=} \theta(\psi_n(l)) \stackrel{l<n'}{=} \theta(f(l))$. Caso contrário, então $k = n'$ e $f(k) = f(n') \stackrel{\text{def}}{=} \theta(f(n))$, C.Q.D..

(Unicidade) Seja agora $g: Z_{n'} \to \Omega$ satisfazendo as propriedades acima (*), e chamemos de h a sua restrição a Z_n (**). Logo, pela hipótese de indução, $h = \psi_n$, e, portanto, $\forall k < n', f(k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n(k) \stackrel{h.i.}{=} h(k) \stackrel{**}{=} g(k)$. Por fim, temos também que $f(n') \stackrel{\text{def}}{=} \theta(f(n)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\psi_n(n)) \stackrel{h.i.}{=} \theta(h(n)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(g(n)) \stackrel{*}{=} g(n')$, com o que concluimos que $f = g$, C.Q.D.. □

126. Teorema: Dado um sistema Ω, se $\omega \in \Omega$ e $\theta: \Omega \to \Omega$, então existe uma única função $\psi: \mathbb{N} \to \Omega$ tal que:

1. $\psi(1) = \omega$.
2. $\psi(n') = \theta(\psi(n)), \forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: (Existência) Definamos $f: \mathbb{N} \to \Omega: n \mapsto \psi_n(n)$, onde as funções ψ_n são aquelas que obtemos através do teorema anterior. Mostremos, então que f satisfaz os requisitos acima:

1. $f(1) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1(1) \stackrel{(125.1)}{=} \omega$.
2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Observe que, como $\psi_{n'}$ satisfaz as propriedades 1 e 2 do teorema 125, então é possível mostrar que a sua restrição a Z_n também as satisfaz, e portanto é igual a ψ_n (125). Logo, $\psi_{n'}$ e ψ_n coincidem em todos os elementos de Z_n (*). Temos então:
$$f(n') \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{n'}(n') \stackrel{(125.2)}{=} \theta(\psi_{n'}(n)) \stackrel{*}{=} \theta(\psi_n(n)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(f(n)),$$
C.Q.D..

(Unicidade) Seja $g: \mathbb{N} \to \Omega$ uma função com as propriedades acima. Provemos, por indução (80) em n, que $g(n) = f(n)$:

1: $g(1) \overset{1}{=} \omega \overset{1}{=} f(1)$.

n': $g(n') \overset{2}{=} \theta(g(n)) \overset{h.i.}{=} \theta(f(n)) \overset{2}{=} f(n')$, C.Q.D.. $\square$

Demonstrado o teorema, Dedekind ilustra sua aplicação de duas formas:

1. Definindo rigorosamente o significa da função f^n, obtida compondo-se uma função f com ela mesma n vezes.

2. Dando uma outra caracterização, mais intuitiva, para a noção de *cadeia*.

131. Aplicações do teorema 126: Sejam S um sistema e $f: S \to S$. Definamos então o conjunto Ω das funções $\omega: S \to S$ e a função de composição $\theta: \Omega \to \Omega: \omega \mapsto f \circ \omega$. Assim, pelo teorema 126, existe uma única função $\mathscr{F}: \mathbb{N} \to \Omega$ tal que:

1. $\mathscr{F}(1) = f$.

2. $\mathscr{F}(n') = \theta(\mathscr{F}(n)) \overset{\text{def}}{=} f \circ \mathscr{F}(n)$.

Assim, $\mathscr{F}(1) = f$, $\mathscr{F}(2) = f \circ f$, $\mathscr{F}(3) = f \circ (f \circ f)$, $\ldots$, ou seja, $\mathscr{F}(n)$ é a composição de f com ela mesma n vezes, e podemos denotá-la de forma mais simples por f^n.

Sejam agora sistemas S e $A \subseteq S$ e uma transformação $\phi: S \to S$. Em (44), foi definido o sistema $\phi_0(A)$, que agora caracterizaremos de forma diferente: façamos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \phi^n(A)$, e então definamos

$$U = \bigcup_{\forall n \in \mathbb{N}} A_n.$$ [14]

e $K = A \cup U$. Segue então que $K = \phi_0(A)$.

Prova: ($\subseteq$) Seja $k \in K$. Se $k \in A$, então $k \in \phi_0(A)$ (45). Caso contrário, então $k \in U$, e portanto existe $n \in \mathbb{N} \mid k \in A_n$. Provemos, então, por indução (80), que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $k \in A_n$, então $k \in \phi_0(A)$:

1: Se $k \in A_1 \overset{\text{def}}{=} \phi^1(A) \overset{(131.1)}{=} \phi(A)$, então $k \in \phi_0(A)$ (50).

n': Se $k \in A_{n'} \overset{\text{def}}{=} \phi^{n'}(A) \overset{(131.2)}{=} \phi \circ \phi^n(A) = \phi(\phi^n(A)) \overset{\text{def}}{=} \phi(A_n)$, então existe $j \in A_n \mid \phi(j) = k$. Logo, pela hipótese de indução, $j \in \phi_0(A)$, e, como $\phi_0(A)$ é uma cadeia (44), então $\phi(j) \in \phi_0(A)$, C.Q.D..

[14] Observe que não há problema em definir a união U dos infinitos conjuntos A_n. Podemos estipular, por exemplo, que $x \in U \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n$.

($\supseteq$) Mostraremos que $\phi_0(A) \subseteq K$ demonstrando que K contém A e é cadeia com relação a ϕ (44):

1. $A \subseteq K$, pela definição de K.
2. Seja $k \in K$. Se $k \in A$, então $\phi(k) \in \phi(A) \overset{(131.1)}{=} \phi^1(A) \overset{\text{def}}{=} A_1 \subseteq U \subseteq K$. Caso contrário, então existe $n \in \mathbb{N} \mid k \in A_n \overset{\text{def}}{=} \phi^n(A)$. Logo, $\phi(k) \in \phi(\phi^n(A)) = \phi \circ \phi^n(A) \overset{(131.2)}{=} \phi^{n'}(A) \overset{\text{def}}{=} A_{n'} \subseteq U \subseteq K$, C.Q.D.. $\square$

Em seguida, Dedekind mostra que os sistemas simplesmente infinitos (71) formam uma classe de equivalência segundo a relação de similaridade (32).

132. Teorema: Todos os sistemas simplesmente infinitos são similares ao sistema $\mathbb{N}$.

Prova: Seja Ω um sistema simplesmente infinito ordenado por uma transformação θ e ω o seu elemento-base (71). Pelo teorema 126, portanto, existe $\psi\colon \mathbb{N} \to \Omega$ tal que:

*1. $\psi(1) = \omega$.

*2. $\psi(n') = \theta(\psi(n)), \forall n \in \mathbb{N}$.

Para provar que Ω é similar a $\mathbb{N}$, portanto, é suficiente provar que (32):

- ψ é similar: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $m < n$. Provemos, por indução em m (80), que $\psi(m) \neq \psi(n)$:

  1: Se $m = 1$, como $n \neq m$, então (prova-se que) $\exists l \in \mathbb{N} \mid l' = n$, e portanto $\psi(n) = \theta(\psi(l))$ (*2). Como ω é o elemento-base de Ω, então $\nexists \eta \in \Omega \mid \theta(\eta) = \omega$ (71), o que implica que $\psi(n) = \theta(\psi(l)) \neq \omega \overset{*1}{=} \psi(m)$, C.Q.D..

  k': Suponhamos que $m = k'$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\psi(m) = \theta(\psi(k))$ (*2). Além disso, como $n > m$, (prova-se que) $\exists l \in \mathbb{N} \mid l' = n$, e portanto $\psi(n) = \theta(\psi(l))$ (*2). Como $m < n$, então (prova-se que) $k < l$; logo, como $k < m$ (89, 45), temos, pela hipótese de indução, que $\psi(k) \neq \psi(l)$, e, como θ é similar (71), então $\psi(n) = \theta(\psi(l)) \neq \theta(\psi(k)) = \psi(m)$ (26), C.Q.D..

- $\Omega = \psi(\mathbb{N})$: Como ψ é uma transformação de $\mathbb{N}$ em Ω, falta mostrar apenas que $\Omega \subseteq \psi(\mathbb{N})$. Como $\Omega = \omega_0$ (71), é suficiente mostrar que $\psi(\mathbb{N})$ é uma cadeia—com relação a θ—que contém ω (44). Por (*1), $\omega \in \psi(\mathbb{N})$. Mostremos agora que $\psi(\mathbb{N})$ é uma cadeia: seja $\alpha \in \psi(\mathbb{N})$; temos que mostrar que $\theta(\alpha) \in \psi(\mathbb{N})$. Como $\alpha \in \psi(\mathbb{N})$, $\exists a \in \mathbb{N} \mid \psi(a) = \alpha$; logo, $\psi(a') \overset{*2}{=} \theta(\psi(a)) = \theta(\alpha)$, C.Q.D.. $\square$

133. Teorema: Todo sistema similar a $\mathbb{N}$ é simplesmente infinito.

Prova: Seja Ω um sistema similar a $\mathbb{N}$. Logo, existe uma transformação similar ψ de $\mathbb{N}$ em Ω (32). Definamos então:

$*1.$ $\omega = \psi(1)$.

$*2.$ $\theta : \Omega \to \Omega : \alpha \mapsto \psi(\psi^{-1}(\alpha)')$. (Observe que, como ψ é similar, existe a função $\psi^{-1} : \psi(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, e que, como Ω é similar a $\mathbb{N}$, $\psi(\mathbb{N}) = \Omega$.)

Para mostrar que Ω é simplesmente infinito, é suficiente mostrar que (71):

- $\Omega = \theta_0(\omega)$: ($\supseteq$) Como $\theta : \Omega \to \Omega$ e $\omega \in \Omega$, então Ω é uma cadeia—em relação a θ—que possui ω (37); portanto, $\theta_0(\omega) \subseteq \Omega$ (44), C.Q.D..

  ($\subseteq$) Como $\psi(\mathbb{N}) = \Omega$ (32), então, $\forall \alpha \in \Omega$, $\exists a \in \mathbb{N} \mid \psi(a) = \alpha$. Logo, é suficiente provar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) \in \theta_0(\omega)$, e nós o faremos por indução em n:

  1: $\psi(1) \overset{*1}{=} \omega \overset{(45)}{\in} \theta_0(\omega)$, C.Q.D..

  n': Pela hipótese de indução, $\psi(n) \in \theta_0(\omega)$, e, como $\theta_0(\omega)$ é cadeia (44), então $\theta(\psi(n)) \in \theta_0(\omega)$ (37). Mas, por ($*2$), $\theta(\psi(n)) = \psi(\psi^{-1}(\psi(n))') = \psi(n')$, C.Q.D..

- $\omega \notin \theta(\Omega)$: Suponhamos, por absurdo, que $\exists \alpha \in \Omega \mid \theta(\alpha) = \omega$, e seja $a = \psi^{-1}(\alpha)$. Por ($*2$), portanto, $\omega = \psi(a')$. Mas (pode-se provar que) a' é maior que 1, e, portanto, como $\psi(1) = \omega$ ($*1$), existem dois elementos diferentes em $\mathbb{N}$ nos quais a função ψ vale ω, um absurdo, pois ψ é similar (26).

- θ é similar: sejam $\alpha, \beta \in \Omega \mid \alpha \neq \beta$; devemos mostrar que $\theta(\alpha) \neq \theta(\beta)$. Sejam $a = \psi^{-1}(\alpha)$ e $b = \psi^{-1}(\beta)$; como $\alpha \neq \beta$, então $a \neq b$, pois (pode-se provar que) toda função inversa é injetiva. Como também a função que ordena $\mathbb{N}$ e ψ são similares, então $a' \neq b'$ e $\theta(\alpha) \overset{*2}{=} \psi(a') \neq \psi(b') \overset{*2}{=} \theta(\beta)$, C.Q.D.. □

Feito isso, Dedekind utiliza o teorema 126 para definir as operações básicas sobre os números naturais.

135. Definição: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definiremos

$$m + n = s_m(n),$$

sendo $s_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por (126):

II. $s_m(1) = m'$.

III. $s_m(n') = s_m(n)'$.

A partir dessa definição da soma, várias das suas propriedades comumente conhecidas podem ser provadas por indução:

140. Teorema: $m+n=n+m$.

141. Teorema: $(l+m)+n=l+(m+n)$.

143. Teorema: $m>a \Leftrightarrow m+n>a+n$.

145. Teorema: $m+n=a+n \Rightarrow m=a$.

Definida a soma, a multiplicação e a exponenciação também podem ser definidas:

147. Definição: Dados $m,n \in \mathbb{N}$, definiremos

$$m \cdot n = p_m(n),$$

sendo $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por (126):

II. $p_m(1)=m$.

III. $p_m(n')=p_m(n)+m$.

155. Definição: Dados $a,n \in \mathbb{N}$, definiremos

$$a^n = e_a(n),$$

sendo $e_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por (126):

II. $e_a(1)=a$.

III. $e_a(n')=e_a(n)\cdot a$.

Depois de apresentar várias propriedades das três operações em questão, Dedekind trata do número de elementos de conjuntos finitos.

159. Teorema: Σ é um sistema infinito se e somente se, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto de Σ que é similar a Z_n (98).

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $n \in \mathbb{N}$. Como Σ é um sistema infinito, existe um sistema $N \subseteq \Sigma$ que é simplesmente infinito (71, 72), e, por (132), similar a $\mathbb{N}$. Logo, existe uma transformação similar $f : \mathbb{N} \to N$ (32). Segue então que $f(Z_n)$ é similar a Z_n (32), C.Q.D..

($\Leftarrow$) Se, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe um sistema $C \subseteq \Sigma$ similar a Z_n, então (32) existe uma transformação $\mathscr{F}$ de $\mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}(n)$ é uma transformação similar de Z_n em Σ[15] ($*1$); por conveniência, denotemos as transformações $\mathscr{F}(n)$ por f_n. Seja então o sistema Ω de todas as transformações similares de um sistema Z_n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, em Σ.

Definiremos agora uma transformação $\theta : \Omega \to \Omega$: seja $\beta : Z_n \to \Sigma$, para algum $n \in \mathbb{N}$, um elemento de Ω; então, existe pelo menos 1 elemento de $f_{n'}(Z_{n'})$ que não está em $\beta(Z_n)$— pois, se assim não fosse, $Z_{n'}$ seria similar a um subconjunto de Z_n, e, como este é subconjunto próprio de $Z_{n'}$, $Z_{n'}$ seria infinito (64), um absurdo, pois (é possível provar, por indução, que) todo sistema Z_m é finito. Seja então o menor $k \in \mathbb{N} \mid f_{n'}(k) \notin \beta(Z_n)$ (96). Definiremos então $\theta(\beta)$ como a transformação

$$\gamma\colon Z_{n'} \to \Sigma\colon m \mapsto \begin{cases} \beta(m), \text{ se } m \in Z_n \\ \\ f_{n'}(k), \text{ se } m = n' \end{cases} ,$$

a qual é similar ($*2$), já que β o é e que $\gamma(n') \notin \beta(Z_n)$.

Definida θ, podemos agora, pelo teorema 126, definir a função $\Psi : \mathbb{N} \to \Omega$ tal que:

1. $\Psi(1) = f_1$.
2. $\Psi(n') = \theta(\Psi(n))$.

Se denotarmos, portanto, as funções $\Psi(n)$ por ψ_n, podemos provar por indução que toda a função ψ_n é uma transformação similar de Z_n (80):

1: $\psi_1 = f_1$ é uma transformação similar de Z_1 ($*1$).

n': Como, pela hipótese de indução, ψ_n é uma transformação similar de Z_n, segue, por ($*2$), que $\psi_{n'} = \theta(\psi_n)$ é uma transformação similar de $Z_{n'}$.

Também podemos provar, por indução em n, que, $\forall m,n \in \mathbb{N} \mid m < n$, se $l \in Z_m$, então $\psi_m(l) = \psi_n(l)$:

2: Se $n = 2$, então $m = l = 1$, e segue das definições de θ e Ψ que $\psi_2(1) = \psi_1(1)$.

n': Se $m = n$, então segue das definições de θ e Ψ que, $\forall l \in Z_n$, $\psi_{n'}(l) = \psi_n(l)$. Caso contrário, então $m < n$ e segue pela hipótese de indução que, $\forall l \in Z_m$, $\psi_n(l) = \psi_m(l)$. Logo, como acabamos de provar que $\psi_{n'}$ e ψ_n coincidem em Z_n, então $\psi_{n'}$ e ψ_m coincidem em Z_m, C.Q.D..

Definamos, por fim, a função $\chi : \mathbb{N} \to \Sigma\colon n \mapsto \psi_n(n)$. Provaremos que χ é similar, e, portanto, como $\mathbb{N}$ é infinito (73, 71), que $\chi(\mathbb{N})$ é infinito, e portanto que Σ também o é,

[15] A essa conclusão nós chegamos através do axioma da escolha (sobre este, ver, por exemplo, [28]).

C.Q.D.. Sejam $m, n \in \mathbb{N} \mid m < n$; pela definição de χ, temos que $\chi(n) = \psi_n(n)$ e $\chi(m) = \psi_m(m)$. Mas acabamos de provar que $\psi_m(m) = \psi_n(m)$, o que implica que, como também provamos que toda função ψ_n é similar, $\psi_n(n) \neq \psi_m(m)$, C.Q.D.. □

160. Teorema: Um sistema é finito se e somente se existe um sistema Z_n similar a ele.

Prova: ($\Rightarrow$) Seja Σ um sistema finito e suponhamos, por absurdo, que nenhum sistema Z_n é similar a ele. Provaremos, então, por indução em n, que, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto de Σ que é similar a Z_n, o que, pelo teorema anterior, implica que Σ é infinito, um absurdo:

1: Como Σ possui pelo menos 1 elemento (02), seja $\sigma \in \Sigma$. Como $\{\sigma\}$ é similar a Z_1, o resultado está provado.

n': Pela hipótese de indução, existe um sistema $S \subseteq \Sigma$ que é similar a Z_n. Mas Σ possui elementos que não estão em S, pois, se assim não fosse, Σ seria similar a Z_n, contrariando a hipótese acima. Seja então $\sigma \in \Sigma \mid \sigma \notin S$. Mas $S \cup \{\sigma\}$ é similar a $Z_{n'}$, C.Q.D..

($\Leftarrow$) Sejam Σ e Z_n sistemas similares. Logo, como Z_n é finito, Σ também o é, C.Q.D.. □

161. Definição: Seja Σ um sistema finito. Logo, pelo teorema acima, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Σ é similar a Z_n. E também não pode existir $m \neq n$ tal que Σ também seja similar a Z_m, pois, se assim fosse, poderíamos concluir que um entre Z_m e Z_n seria similar a um subconjunto próprio seu e portanto infinito (64), o que não é o caso.

Concluimos, assim, que a todo sistema finito Σ corresponde exatamente um número natural n, o qual diremos ser *o número de elementos de* Σ.

2.2 Os axiomas de Peano

> *Questões pertinentes aos fundamentos da matemática, embora tratadas por muitos recentemente, ainda carecem de uma solução satisfatória. A dificuldade tem sua principal origem na ambigüidade da linguagem.*
>
> *Por isso é que é da maior importância examinar atentamente cada palavra que usamos. Meu objetivo foi realizar esse exame, e nesse artigo eu apresento os resultados do meu estudo, assim como algumas aplicações à aritmética.*
>
> *Eu denotei por símbolos todas as idéias que ocorrem nos princípios da aritmética, de forma que toda sentença é expressa somente por meio desses símbolos.*[16]

[16] Parágrafos iniciais do prefácio de [24] (extraído de [35], pág. 85).

Em 1889, Peano publicou [24], obra em que ele apresenta aqueles "que ficaram universalmente conhecidos como *os axiomas de Peano*":[17]

1. $1 \in \mathbb{N}$.
6. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a+1 \in \mathbb{N}$.
7. $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a = b \Leftrightarrow a+1 = b+1)$.
8. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a+1 \neq 1$.
9. Se k é um conjunto, $1 \in k \wedge \forall x (x \in \mathbb{N} \wedge x \in k \Rightarrow x+1 \in k) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq k$.

Esses axiomas Peano traz da definição de Dedekind de sistemas simplesmente infinitos (pág. 21, ponto 71),[18] e a partir deles ele deriva inúmeros teoremas a respeito dos números naturais, racionais e até irracionais. Existe, entretanto, uma diferença importante entre as abordagem de Dedeking e Peano: Dedekind 'constrói' o conjunto dos números naturais com base no que hoje chamamos de Teoria dos Conjuntos, no sentido de que ele deduz a existência de uma estrutura com determinadas propriedades e *define que ela é o conjunto dos números naturais*; já Peano apresenta, por assim dizer, um conjunto de axiomas que especificam as propriedades que um objeto matemático deve ter para ser chamado de conjunto dos números naturais e, a partir deles, *deriva as propriedades que tem todo tal objeto*.

Do ponto de vista do conjunto das propriedades de $\mathbb{N}$, as abordagens são equivalentes, pois através de ambas é possível deduzir os resultados tipicamente conhecidos a respeito dos números naturais. Isso torna o enfoque de Peano, por sua brevidade em relação ao de Dedekind, particularmente atrativo quando o interesse é utilizar os números naturais como base para outra teoria (uma sobre números racionais, por exemplo). Por outro lado, o fato de Dedekind considerar o conjunto dos números naturais do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos torna a sua teoria mais abrangente que a de Peano;[19] um bom exemplo disso é o seu teorema 132 (pág. 27), que, expresso em terminologia moderna, afirma aproximadamente que toda estrutura que satisfaz os axiomas de Peano é isomorfa a $\mathbb{N}$.[20]

Essas diferenças e semelhanças entre as abordagens construtiva e axiomática estão presentes de forma perfeitamente análoga no caso da Análise: de um lado, existem teorias em que o conjunto dos números reais é construído a partir do conjunto dos números racionais, como por exemplo a dos Cortes de Dedekind e a das Seqüências de Cauchy (devida a Cantor); do outro

[17] Que eu listo segundo a numeração de [24], mas em notação moderna. Os axiomas originais são 9 ao todo, e os que eu omito dizem respeito à igualdade entre números: reflexividade (2), simetria (3), transitividade (4) e $(a = b \wedge b \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ (5).

[18] Como dito em [35], pág. 83, e corroborado por uma passagem no prefácio de [24].

[19] A respeito de teorias de diferentes abrangências, veja as passagens transcritas na pág. 104.

[20] Esse é basicamente o enunciado do "Teorema de Dedekind" presente em [7], pág. 50.

lado, existem as abordagens axiomáticas, como a pioneira de Hilbert e a mais recente de Tarski, nas quais $\mathbb{R}$ é definido como uma estrutura algébrica que satisfaz determinado conjunto de propriedades. De um lado, a abordagem axiomática tem não só a vantagem de ser mais curta, mas também a de tratar os números reais independentemente da forma como eles são construídos; por outro lado, para ser convincente, ela demanda uma prova de que existe pelo menos uma estrutura que satisfaz os axiomas (e aqui uma construção a partir dos números racionais é particularmente útil) e uma prova da unicidade de tais estruturas a menos de isomorfismo. Esse exemplo deixa claro que as abordagens construtiva e axiomática são complementares, e, no que diz respeito à Teoria Aritmética de Dedekind, ressalta ainda mais a sua importância, uma vez que ela serviu de base para o trabalho de Peano.

3 *A* Begriffsschrift *de Frege*

3.1 Introdução

> *...afirma-se freqüentemente que a aritmética é meramente uma lógica altamente desenvolvida; contudo isso continua questionável enquanto ocorrem nas provas transições que não são feitas de acordo com leis conhecidas da lógica, mas sim que parecem ser baseadas em algo conhecido pela intuição. Somente se essas transições forem divididas em passos logicamente simples nós podemos nos convencer de que a raiz da questão é apenas a lógica.*[1]

Com o objetivo de verificar a tese acima mencionada, de que a Aritmética é parte da Lógica,[2] o matemático alemão *Friedrich Ludwig Gottlob Frege* procurou demonstrar as afirmações da Aritmética exclusivamente por meio da razão. Na tentativa de evitar qualquer suposição advinda da intuição em suas inferências, ele quis excluir qualquer lacuna entre elas, e com isso veio a concluir que a linguagem ordinária era demasiadamente imprecisa para esse propósito. Frege empreitou então a criação de uma linguagem na qual:

1. Fosse possível verificar, da forma mais confiável possível, a correção de cada inferência presente em uma dedução;

2. Fossem expressas todas as pressuposições de cada conclusão presente em uma argumentação— o que permitiria, por exemplo, as investigação e análise das origens dessas pressuposições.[3]

Em 1879, ele publicou o primeiro resultado desses esforços, a sua *Begriffsschrift*[4] [8], que ele descreveu como sendo *uma linguagem de fórmulas, modelada com base naquela da Aritmética, para o pensamento puro*:

[1] [13], pág. 3.
[2] Posteriormente conhecida como *Logicismo* (veja o tópico 4.3.1, pág. 74).
[3] Prefácio de [8] ([35], págs. 5–8).
[4] Em alemão, 'Ideografia' ou 'Escrita conceitual'.

- Uma linguagem de fórmulas porque, quando comparada com a linguagem ordinária, contém símbolos próprios, como acontece, por exemplo, nos casos da matemática (‘$2+\sqrt{3}$’) e da química (‘H_2O’, ‘Al^{3+}’).

- É também baseada na linguagem da Aritmética: o esquema de sujeito e predicado da linguagem comum, por exemplo, é nela substituído por um de função e argumentos como o presente na linguagem daquela. Outra importante semelhança é que, como na matemática, onde os objetos são manipulados de acordo com suas definições, seus símbolos são manipulados por meio de regras claro e explicitamente definidas.

- Finalmente, seu objetivo é representar o ‘pensamento puro’, isto é, *a priori*, “livre de adornos retóricos”. Em outras palavras, Frege procurou representar em sua linguagem tudo o que é relevante para a lógica de um raciocínio e nada mais.[5]

Nessa obra, porém, ele apenas esboçou como a sua linguagem poderia ser aplicada à Aritmética;[6] uma demonstração bem mais abrangente dessa possibilidade foi apresentada no primeiro volume da obra *Grundgesetze der Arithmetik*[7] [10], publicada em 1893, em que Frege estende seu formalismo original com outras regras de inferência e incorpora concepções elaboradas após 1879. Nesta obra também estão presentes os correspondentes formais das definições sobre números naturais que Frege havia apresentado em outra obra muito importante: *Die Grundlagen der Arithmetik*[8] [9], de 1884.

Neste capítulo, apresentarei o formalismo de Frege, na versão mais desenvolvida presente em [10].[9] Meu intuito é mostrar como era a Lógica Matemática quando do seu surgimento,[10] não meramente com relação à notação, mas principalmente do ponto de vista das razões pelas quais ela foi concebida. Também apresento os fundamentos da teoria aritmética de Frege, que, além de ter sido a aplicação primeira da *Begriffsschrift*, tem beleza e importância próprias.

[5] [35], pág. 1.

[6] Tratando de “tópicos de uma teoria geral de seqüências.” Lá, entretanto, estão definidas, em notação um pouco diferente, noções que Frege viria a utilizar posteriormente, como as funções $\acute{-}\xi$, $\acute{\smile}\xi$ e $\mathrm{I}\xi$, explicadas mais à frente.

[7] ‘As leis básicas da Aritmética.’ O segundo volume da obra [11] foi publicado em 1903, e nele Frege apresentou sua teoria de números reais. Um terceiro volume foi planejado, mas nunca publicado.

[8] ‘Os fundamentos da Aritmética’.

[9] O sistema lógico dessa obra é inconsistente, mas eu só tratarei disso no capítulo seguinte (pág. 74).

[10] Os trabalhos de Frege apresentaram, pela primeira vez, uma análise de afirmações em função e argumentos, ao invés de em sujeito e predicado, uma teoria da quantificação, de primeira e segunda ordem, e um sistema lógico puramente formal, isto é, em que as inferências são realizadas com base apenas na forma das expressões.

3.2 Exposição do formalismo

Na seqüência faço uma exposição do formalismo de Frege. De antemão, deve-se ter em mente a importante distinção feita por Frege entre *aquilo que nomeia* (isto é, um *nome*) e *aquilo que é nomeado*. Os primeiros são expressões, conjuntos de símbolos, e não devem ser confundidos com aquilo a que eles se referem. Em seu texto, Frege distingue as duas categorias por meio de aspas: uma frase contendo a palavra *Terra*, por exemplo, se referiria ao planeta, enquanto uma que contivesse *"Terra"* se referiria ao conjunto das cinco letras que o nomeiam.

3.2.1 Base conceitual

O formalismo de Frege está apoiado em uma interessante base de conceitos e distinções entre eles, a qual descrevo abaixo.

Sem sujeito e predicado

Na lógica Aristoteliana, cuja tradição predominava até o século XVIII, afirmações eram compostas por *sujeito e predicado*.[11] Na linguagem comum, essa estrutura tem utilidades: podemos, por exemplo, escolher entre as afirmações *"Os Gregos derrotaram os Persas em Platéias"* e *"Os Persas foram derrotados pelos Gregos em Platéias"* e assim direcionar a atenção do leitor para o sujeito adequado, fazendo com que ele perceba mais facilmente a relação da frase com o restante do texto.

Como dito anteriormente, porém, a *Begriffsschrift* foi criada para representar o 'pensamento puro'. Dado um juízo, Frege tencionava expressar deste somente a parte logicamente relevante, aquilo que faz outras afirmações serem ou não conseqüências suas e vice-versa; para esse propósito, portanto, distinções como a mencionada acima não são necessárias. Assim, ao invés de decompor afirmações em sujeito e predicado, Frege o fez, influenciado pelo exemplo da Matemática, através de *função e argumentos*.[12]

Funções e objetos

Frege distingue entre o que é *saturado*, 'completo em si', e o que é *insaturado*, incompleto. O numeral "3" e a expressão "$2+3$", por exemplo, têm um sentido completo: o primeiro representa o número 3 e a segunda o número 5. Nesse sentido, Frege chama de *objeto* tudo

[11] [30], seção 4.
[12] [35], pág. 12, §3.

aquilo que é saturado. Atente para o fato de que, no exemplo em questão, os objetos são os números 3 e 5; "3" e "$2+3$" são apenas nomes para eles.

Consideremos agora a expressão "$x+3$". Ela não representa um número por si só; isso acontece apenas quando substituimos a letra "x" pelo nome de um número qualquer.[13] Nesse sentido, "$x+3$" é um nome para algo incompleto. Aquilo que é insaturado, que necessita ser completado (e que portanto não é um objeto), Frege chama de *função*. Aquilo que completa uma função em um determinado caso é chamado de *argumento* da função naquele caso, e aquilo que se obtém em um tal completamento é chamado *valor* da função para aquele argumento. Os 'lugares' em que uma função precisa ser completada são chamados de *lugares dos argumentos*; as ocorrências da letra "x" em "$(2+3x^2)x$" servem, portanto, para indicar os lugares dos argumentos da função nomeada por essa expressão. Seguindo Frege, a letra "ξ" (e não "x") será, daqui para a frente, usada com essa finalidade.

Funções de dois argumentos necessitam ser completadas duplamente, no sentido de que o que se obtém quando os lugares de um dos seus argumentos são completados é uma função de um argumento; um novo completamento deve ser realizado sobre esta última para que o valor da função original seja obtido. Usando-se a letra "ζ" para indicar um segundo argumento, "$(\xi+\zeta)^2+\zeta$" é portanto um nome para uma função de dois argumentos, "$(\xi+1)^2+1$" é um nome para a função que obtemos completando com 1 os lugares do argumento indicado por "ζ" da função anterior, e "$(3+1)^2+1$" é um nome para o valor da primeira função no caso dos argumentos 3 e 1, respectivamente.[14]

Valores-verdade, conceitos e relações

Os valores de funções, entretanto, não precisam ser números. "$\xi^2=4$" e "$\xi>2$", por exemplo, são nomes válidos de funções, cujos valores, dependendo do argumento, são ou *Verdadeiro* ou *Falso*.[15] Estes últimos são chamados *valores-verdade*, e fazem parte do domínio dos objetos em consideração no Formalismo. Por meio disso é que Frege permite que o esquema de função e argumentos substitua o de sujeito e predicado: ao invés de estruturar afirmações de acordo com o segundo esquema, ele o faz através do primeiro, utilizando funções cujos valores são sempre valores-verdade.

[13]Aqui a palavra *nome* já está sendo usada no sentido de uma expressão qualquer que representa algo. Assim, "7" é um nome para o número 7, mas "$5+2$" também o é.

[14]Em [13], pág. xxxi, Furth diz que, na prática, Frege não precisa de funções de mais que dois argumentos.

[15]Aqui e em parágrafos anteriores, a exemplo do que Frege faz em seu texto, foi feito uso de símbolos comumente usados na Matemática mas ainda não definidos na *Begriffsschrift*. Isso é feito apenas com a intenção de facilitar as explicações; na realidade, uma expressão como "$3>2$" só pode aparecer no formalismo de Frege depois de os símbolos "3", "$>$" e "2" terem sido definidos.

Frege chama de *conceito* as funções de um argumento cujos valores são sempre valores-verdade. Assim, por exemplo, "$\xi > 2$" é um conceito no qual se enquadram apenas os números maiores que dois. Analogamente, funções de dois argumentos cujos valores são sempre valores-verdade são chamadas de *relações*; assim, por exemplo, $\xi < \zeta$ é uma relação segundo a qual 1 e 2 estão, nessa ordem, relacionados.

Sentido e denotação

Em 3.2 (pág. 36), ressaltou-se a diferença entre *o que nomeia* e *o que é nomeado*. Na terminologia de Frege, um nome *denota* aquilo que ele nomeia. Assim, por exemplo, 4 é a *denotação* tanto de "$2+2$" quanto de "2^2".[16] Estas duas últimas expressões, porém, não são iguais, assim como não o são as 'idéias' que elas nos passam. Isso, que é mais próximo do que geralmente entendemos como o 'significado' de uma expressão, Frege chama de seu *sentido*. Assim, "$2^2 = 4$" e "$3 > 2$" denotam o mesmo objeto (a saber, o valor-verdade Verdadeiro), mas não *expressam* o mesmo sentido. O mesmo também se aplica a funções: as expressões "4ξ" e "$3 \cdot (3\xi - 2) - 5\xi + 6$" denotam a mesma função, mas têm sentidos diferentes.[17] Um último termo: Frege chama o sentido de um nome de um valor-verdade de *pensamento*.

3.2.2 Símbolos básicos

Abaixo descrevo os símbolos através dos quais a expressão se dá no formalismo de Frege.

Juízos

Para Frege, um nome de um valor-verdade, como por exemplo "$a \geq 0$", pode ter pelo menos dois usos. Um deles é o de simplesmente *denotar um valor-verdade*, sem que com isso se emita a opinião de que esse valor é o Verdadeiro. Se, por exemplo, é afirmado que *ou* $a \geq 0$ *ou* $a < 0$, então nem se afirma que $a \geq 0$ nem que $a < 0$, mas apenas que uma das duas sentenças é verdadeira. Outra maneira de se usar um nome de um valor-verdade é justamente na *afirmação de que o valor-verdade denotado pelo nome em questão é o Verdadeiro*. Assim, quando se *afirma* que *ou* $a \geq 0$ *ou* $a < 0$, se está emitindo o parecer de que o valor denotado pela expressão "ou $a \geq 0$ ou $a < 0$" é o Verdadeiro.

Na *Begriffsschrift*, a interpretação dada a um nome de um valor-verdade é sempre o valor-

[16] A palavra alemã *Bedeutung*, traduzida para o inglês em [13] como *denotation* (denotação), também é traduzida em [35] como *reference* (referência).

[17] Frege considera funções do ponto de vista extensional ([13], pág. xxxix).

verdade que ele denota. Para explicar como uma afirmação pode ser expressa nessa linguagem, é necessário primeiro apresentar o 'horizontal'. O *horizontal*, que em [8] Frege chamava de 'sinal de conteúdo', é um símbolo que serve como nome para a função de um argumento que vale Verdadeiro quando o argumento é o Verdadeiro e Falso em caso contrário. Em símbolos, essa função é escrita como

$$\text{“}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\,\xi\text{”}.$$

Assim, por exemplo, se os símbolos "2", "3" e "=" já tivessem sido definidos, então "$2 = 2$" e "$2 = 3$" denotariam Verdadeiro e Falso, respectivemente, e portanto "——$2 = 2$" e "——$2 = 3$" também denotariam, respectivamente, Verdadeiro e Falso. É importante, porém, atentar para o fato de que o domínio dos objetos pode não englobar apenas os dois valores-verdade, e que, para quaisquer outros objetos, a função em questão vale Falso, por definição.[18] Assim, portanto, supondo-se que 2 e Verdadeiro sejam objetos diferentes, então "——2" denota Falso.

Para expressar uma *proposição da Begriffsschrift*, isto é, uma afirmação, devemos:

1. Preceder por um horizontal, se ela não já for iniciada por um, a expressão cuja denotação queremos afirmar ser o Verdadeiro.

2. Preceder o horizontal por um 'sinal de juízo'.

O *sinal de juízo* é um símbolo *sui generis* no formalismo de Frege: ele não forma nomes e não tem denotação; quando colocado no início de uma expressão, a interpretação dada ao resultado é *a afirmação de que o sentido expresso pela expressão em questão é um sentido do Verdadeiro*,[19] ou, equivalentemente, *a afirmação de que a expressão em questão denota o Verdadeiro*. O sinal de juízo é um traço vertical, em cujo meio deve ser colocado o horizontal que o segue. Assim, por exemplo, a interpretação da expressão

$$\text{“}|\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\,2 = 2\text{”}$$

é a afirmação de que "$2 = 2$" denota o Verdadeiro,[20] e a de

$$\text{“}|\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\,2 = 3\text{”}$$

[18]De fato, Frege considera outros objetos; ver, por exemplo, o tópico sobre 'curso de valores', na pág. 43.

[19]"um sentido do Verdadeiro": assim como um objeto (ou uma função) pode ser denotado por nomes diferentes, um objeto (ou uma função) também pode ter sentidos diferentes, isso significando que podem existir nomes expressando sentidos diferentes e denotando o mesmo objeto.

[20]Da combinação horizontal-sinal de juízo vem o símbolo moderno "$\vdash$" (veja [35], pág. 169, rodapé 18).

é a afirmação de que “$2 = 3$” denota o Verdadeiro. O sinal de juízo deve ser sempre o símbolo mais à esquerda em uma proposição da *Begriffsschrift*, não podendo fazer parte de uma expressão maior.

Negação

No formalismo de Frege, a expressão

$$\text{“}-\!\!\!\top\!\!\!-\,\xi\text{”}$$

denota uma função, que vale Falso para os argumentos em que função $-\!\!\!-\!\!\!-\,\xi$ vale Verdadeiro e que vale Verdadeiro para os demais. O curto traço vertical presente em “$-\!\!\!\top\!\!\!-$” Frege chama de *sinal de negação*.

O símbolo “$-\!\!\!\top\!\!\!-$” e o conectivo moderno “$\neg$” desempenham aproximadamente o mesmo papel; a diferença entre eles é que o primeiro denota uma função, enquanto o segundo não denota coisa alguma, sendo interpretado somente em conjunto com outros símbolos.

Identidade

Até agora o *sinal de identidade* foi usado informalmente, mas Frege também define a função

$$\xi = \zeta,$$

que vale Verdadeiro quando o ‘argumento ξ’, aquele que ocupa os lugares indicados pela letra “ξ”, é o mesmo objeto que o argumento ζ, e que vale Falso em caso contrário.[21]

A título de ilustração, analisemos a função

$$\xi = (-\!\!\!-\!\!\!-\,\xi).$$

Pela definição da função $-\!\!\!-\!\!\!-\,\xi$, é possível verificar que, se Δ é um valor-verdade, então $-\!\!\!-\!\!\!-\,\Delta$ é o mesmo valor-verdade, donde se conclui que $\Delta = (-\!\!\!-\!\!\!-\,\Delta)$ é o Verdadeiro.[22] Se, por outro lado, Δ não for um valor-verdade, então, como $-\!\!\!-\!\!\!-\,\xi$ é um conceito, então Δ e $-\!\!\!-\!\!\!-\,\Delta$ serão necessariamente objetos diferentes, e portanto $\Delta = (-\!\!\!-\!\!\!-\,\Delta)$ será o Falso. Disso, concluimos que a função em questão é uma codificação em símbolos do predicado *“ser um valor-verdade”*.

[21] Essa função se aplica somente a objetos; ver [13], pág. xliii. (No formalismo de Frege, existem funções que admitem outras funções como argumento; veja a pág. 42 a seguir.)

[22] Frege usa letras gregas maiúsculas “como se elas fossem nomes”, mas sem especificar sua denotação. Elas fazem parte da metalinguagem usada por ele para explicar o formalismo, mas, assim como as letras “ξ” e “ζ”, não são usadas nas deduções formais. Ver [13], notas de rodapé número 15 da pág. 38 e número 27 da pág. xxvii.

Condicionalidade

Também há a função

$$\begin{array}{|l} \xi \\ \zeta, \end{array}$$[23]

que, tendo Γ e Δ como argumentos ξ e ζ, respectivamente, vale:

· Falso, se $——\Delta$ é Verdadeiro e $——\Gamma$ é Falso, ou

· Verdadeiro, em caso contrário.

O traço vertical no símbolo “$\big|$” é chamado por Frege de *sinal de condição*, e o símbolo como um todo corresponde—de forma aproximada, como ressaltado no caso da negação—ao conectivo moderno “$\rightarrow$”.

Observe que, embora concebida para se lidar com afirmações do tipo “*se* Δ *então* Γ”, a definição de condicionalidade de Frege leva em consideração apenas os valores-verdade das afirmações em questão, deixando de lado a relação de causa e conseqüência que costuma estar implícita no uso daquelas palavras. Por um lado, isso permite que se faça relações condicionais entre afirmações sem qualquer ligação, como em

$$\begin{array}{|l} 2 = 2 \\ \cdots \end{array} \quad \text{ou em} \quad \begin{array}{|l} \cdots \\ 2 = 3; \end{array}$$

por outro, permite que a relação de condicionalidade seja formulada de forma potencialmente mais simples do que o poderia levando-se em consideração uma real conexão causal entre antecedente e conseqüente.

Generalidade

Na *Begriffsschrift*, podemos ‘expressar’ um conteúdo de caráter geral através de uma construção como

$$\text{“}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\text{”},$$

[23]A partir daqui, os símbolos apresentados até agora irão algumas vezes aparecer tipografados de forma diferente: “$|——\xi$”, “$——\xi$” e “$—\top—\xi$” aparecerão como “$\vdash \xi$”, “$- \xi$” e “$\top \xi$”, respectivamente.

sendo $\Phi(\xi)$ uma função: a expressão "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$" denota o Verdadeiro se a função $\Phi(\xi)$ vale Verdadeiro para todo argumento, e denota o Falso em caso contrário. Assim, por exemplo, a expressão "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" denota o Verdadeiro, enquanto "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = (\!-\!\!-\!\mathfrak{a})$" denota o Falso. A curva no símbolo "$\smile$" Frege chama de *concavidade*, e acima delas só podem ocorrer *letras góticas*;[24] seus correspondentes modernos (aproximados) são, respectivamente, o símbolo "$\forall$" para a quantificação universal e as chamadas 'variáveis ligadas'.

Antes de o símbolo "$\smile$" ser apresentado, tínhamos visto funções, como $-\!\!-\xi$ e $-\!\!\!\top\!\!-\xi$, que aceitam apenas objetos como argumentos; essas são chamadas por Frege de *funções de primeiro nível*. Entretanto, também é possível conceber funções que recebem outras funções como argumento: podemos, por exemplo, considerar a generalidade como uma função $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\phi(\mathfrak{a})$ que recebe como argumento uma função $\Phi(\xi)$ de primeiro nível, e cujo valor é verdadeiro se $\Phi(\xi)$ vale Verdadeiro para todo argumento, ou Falso em caso contrário. Frege chama de *funções de segundo nível* aquelas cujos argumentos são funções de primeiro nível.

Assim como "$\Phi(\xi)$" é um nome (indefinido) de função de primeiro nível, também "$\Omega_\beta(\phi(\beta))$" é um nome de função de segundo nível; aqui, "Ω" representa a função de segundo nível (analogamente ao que "Φ" faz em "$\Phi(\xi)$"), "ϕ" representa seu argumento (da mesma forma que "ξ" o faz em "$\Phi(\xi)$") e o segundo "β" serve para estar entre os parênteses que seguem "ϕ", indicando que esta última letra representa uma função.[25]

Simulação de outros conectivos

Já em [8] Frege atenta para o fato de que, por meio da negação, da implicação e da quantificação universal, é possível simular a disjunção, a conjunção e a quantificação existencial, como demonstrado abaixo:

Fórmula original	$\Gamma \vee \Delta$	$\Gamma \wedge \Delta$	$\exists x \Phi(x)$
Simulação em notação moderna	$\neg\Gamma \to \Delta$	$\neg(\Gamma \to \neg\Delta)$	$\neg\forall x \neg\Phi(x)$
Simulação na notação de Frege	Δ [26] / $\top\Gamma$	$\top\!\top\Delta$ / Γ	$\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\,\Phi(\mathfrak{a})$

[24]Frege utiliza vários tipos de letras, cada qual com uma função particular.

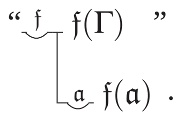
[25]O primeiro "β", em subscrito, serve para indicar que aquilo que vai preencher as ocorrências dos lugares dos argumentos de uma função Φ que sirva de argumento para Ω depende da função Ω.

[26]O símbolo "$\lfloor_\top$" consiste na escrita conjunta dos símbolos "$\lfloor$" e "$\top$".

A sua escolha pela implicação se deu para facilitar o uso da regra que hoje conhecemos como *modus ponens* (ver pág. 53).[27]

Quantificação sobre funções

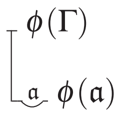
No formalismo de Frege, também é possível quantificar sobre funções, como em



De uma forma geral, analogamente ao caso da generalidade com relação a objetos, a quantificação sobre funções é uma função

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$$

de *terceiro nível*, que recebe como argumento uma função μ, de segundo nível e de 1 argumento, e que vale Verdadeiro quando μ vale Verdadeiro para todo argumento e Falso em caso contrário. Assim, portanto, a expressão acima foi obtida tomando-se a função



como argumento para a função $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$. Uma letra gótica de função deve ocorrer sempre seguida de parênteses, entre os quais deve estar o nome do seu argumento.[28]

Curso-de-valores

Uma inovação importante de [10] em relação a [8] foi o conceito de *curso-de-valores* de uma função de primeiro nível. A primeira parte da sua especificação é a seguinte:

Duas funções têm o mesmo curso-de-valores se e somente, para todo argumento, elas têm o mesmo valor.[29]

[27]Ele poderia ter considerado outros conectivos em conjunto com a implicação, mas não o fez para simplificar o formalismo da *Begriffsschrift*.

[28]De forma estrita, letras góticas não 'denotam' um objeto; elas *indicam* um objeto, indefinidamente. Por isso, o símbolo "$\mathfrak{a}$" não é considerado como sendo um 'nome'. Os parênteses que seguem uma letra gótica de função devem, portanto, conter uma expressão que ou denota ou indica um objeto.

[29]Nesse aspecto, esse conceito é semelhante ao de extensão de uma função, mas eles não devem ser identificados. Em primeiro lugar, a idéia de que o curso-de-valores de uma função $\Phi(\xi)$ seria o 'conjunto' dos 'pares ordenados' $(\Delta, \Phi(\Delta))$ não está explícita ou implicitamente presente no texto de Frege. Além disso, a segunda parte da especificação desse conceito atribui a cursos-de-valores propriedades estranhas àquelas comumente atribuídas a extensões de funções.

O curso-de-valores de uma função $\Phi(\xi)$ é um objeto, denotado por "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$"; a *letra grega minúscula* serve para indicar os lugares de argumento da função. Assim, por exemplo, denota-se o curso de valores da função

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{f}(\xi) \\ \llcorner\, \mathfrak{f}(\xi) \end{array} \quad \text{por "}\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{f}(\varepsilon) \\ \llcorner\, \mathfrak{f}(\varepsilon) \end{array} \right)\text{"},$$

e a afirmação acima pode ser escrita em símbolos como:

$$\text{“}\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\,(\grave{\varepsilon}\,\mathfrak{f}(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\mathfrak{g}(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}))''.$$ [30]

De uma forma geral, temos em $\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$ uma função de segundo nível.

A outra estipulação feita por Frege a respeito de cursos-de-valores é:

- $\grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\!-\,\varepsilon)$ é o Verdadeiro, ou seja, é igual a Verdadeiro o curso-de-valores da função (de 1 argumento) que vale Verdadeiro para o argumento Verdadeiro e Falso para os demais argumentos.

- $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ é o Falso, ou seja, é igual a Falso o curso-de-valores da função (de 1 argumento) que vale Verdadeiro para o argumento Falso e Falso para os demais.

Com isso, fica estabelecida a relação entre os dois tipos de objetos apresentados até aqui, que são os valores-verdade e os cursos-de-valores: o curso-de-valores de uma função só é um valor-verdade se essa função for ou $-\!\!-\!\!-\,\xi$ ou $\xi = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$; se esse não for o caso, o curso-de-valores em questão será um objeto diferente. Os cursos-de-valores são ainda diferenciados entre si: $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ e $\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$ são o mesmo objeto se e somente se $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ forem a mesma função.[31]

Um substituto para o artigo definido

Frege define também a função

$$\backslash\xi.$$

A denotação de "$\backslash\Gamma$" é estipulada como segue:

- Se existe um objeto Δ tal que Γ seja igual a $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Delta)$, então "$\backslash\Gamma$" denotará Δ.[32]

[30] Observe como o sinal de identidade pode ser utilizado para expressar equivalência entre (o que hoje em dia chamamos de) 'fórmulas'.

[31] Deve-se atentar para o fato de que se está considerando funções do ponto de vista extensional, e que portanto "$\Phi(\xi)$" e "$\Psi(\xi)$" podem ser diferentes nomes para uma mesma função.

[32] Ou seja, se Γ é o curso-de-valores de alguma função que vale Verdadeiro para um único argumento e Falso

- Em caso contrário, “$\backslash\Gamma$” denotará o próprio Γ.

Essa função nos serve como um artigo definido. A expressão

$$“\backslash\overset{,}{\varepsilon}(\varepsilon = 2^2)”,$$

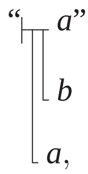
por exemplo, supondo-se que todos os seus símbolos já tivessem sido definidos, denotaria *o* número que é o quadrado de 2. A segunda parte da especificação da sua denotação serve para garantir que, mesmo em casos como

$$“\backslash\overset{,}{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4)”, “\backslash\overset{,}{\varepsilon}(\varepsilon = \neg\,\varepsilon)”, “\backslash\overset{,}{\varepsilon}(\varepsilon^2)” \text{ e } “\backslash 2”,$$

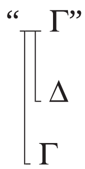
uma expressão do tipo “$\backslash\Gamma$” tem denotação.

Letras romanas

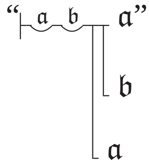
Na *Begriffsschrift*, existe uma maneira de se expressar generalidade sem se usar a concavidade: é através das *letras romanas*. A expressão



por exemplo, representa a afirmação de que, para quaisquer objetos Γ e Δ, a expressão



denota Verdadeiro.[33] As letras romanas funcionam como as letras góticas, com a diferença de que o escopo de uma letra romana sempre engloba toda a fórmula em que ela aparece. Assim, por exemplo, a fórmula



para todos os outros. Observe que não podem existir dois objetos distintos Δ e Δ' com a propriedade em questão; se esse não fosse o caso, então, para tais objetos, $\xi = \Delta$ e $\xi = \Delta'$ seriam funções diferentes e, contudo, possuiriam o mesmo curso-de-valores Γ, contradizendo a propriedade principal dos cursos-de-valores.

[33] As letras romanas devem sempre aparecer numa expressão iniciada pelo sinal de juízo.

e a fórmula inicial são equivalentes. As letras romanas não são, porém, uma redundância do formalismo; elas são úteis, por exemplo, para a expressão da generalidade em fórmulas nas quais se deseja utilizar a regra de inferência *modus ponens*: essa regra não pode ser aplicada em fórmulas da forma "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$", mas o pode em fórmulas da forma

$$\text{“}\begin{array}{l}\ulcorner\,\Delta \\ \llcorner\,\Gamma.\end{array}\text{”}$$

Nesse sentido, as letras romanas têm como equivalentes modernos as chamadas ‘variáveis livres’ de uma fórmula.

As letras romanas também podem ser usadas para representar funções de primeiro nível, como em

$$\text{“}\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))\text{”.}$$ [34]

De uma forma geral, Frege usa para representar funções as letras ‘f’, ‘g’ e ‘h’, tanto romanas quanto góticas, e as demais para representar objetos; a exceção é a letra romana ‘M’, que Frege usa para representar funções de segundo nível, como em

$$\text{“}\begin{array}{l}\ulcorner\, M_\beta(f(\beta)) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)).\end{array}\text{”}$$

Algumas expressões apresentadas até aqui têm denotação, outras não. A expressão "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$", por exemplo, sabidamente denota um e somente um objeto: o Verdadeiro. Expressões como "$\mathfrak{a}$" e "$\top\, a$", porém, nada denotam, fazendo sentido apenas como parte de expressões maiores. De uma forma geral, Frege diz que as letras romanas e góticas *indicam* objetos (ou funções); um qualquer, e não algum em particular. O mesmo é dito de expressões que, como

$$\text{“}\begin{array}{l}\ulcorner\, a \\ \llcorner\, a\end{array}\text{” e “}\grave{\varepsilon}\,\mathfrak{f}(\varepsilon)\text{”,}$$

contém letras romanas ou letras góticas fora do escopo de uma concavidade. Além disso, Frege chama de *marca* uma expressão que possua letras romanas (ou góticas sem concavidade) e que sempre resulta em um nome (isto é, numa expressão com denotação) quando estas são substituídas por nomes. Assim, por exemplo, a expressão

$$\text{“}\begin{array}{l}\ulcorner\, a \\ \llcorner\, a\end{array}\text{”}$$

[34] Essa é uma versão reescrita da fórmula que aparece no tópico sobre cursos-de-valores.

é uma marca de objeto, pois toda substituição de “a” por um nome leva a uma expressão que denota um objeto (a saber, o Verdadeiro).

Definições

No formalismo de Frege, uma definição é expressa por uma igualdade precedida pelo *sinal de definição* “$\Vdash$”; à direita do sinal de identidade deve estar a expressão sendo definida, e à esquerda a expressão utilizada para defini-la. Através de uma definição, fica estipulado que o sentido e a denotação da expressão da direita são os mesmos da expressão da esquerda, a qual só pode conter símbolos previamente definidos, e que portanto tem um significado já conhecido. Assim, por exemplo, a expressão

$$\text{“}\Vdash (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathscr{V}\text{”}$$

serviria para definir um conveniente símbolo para denotar o Verdadeiro. Também é possível definir funções de primeiro nível; nesse caso, os argumentos da função devem ser indicados através de letras romanas, como em

$$\text{“}\Vdash (\!-\!\!\top\!\!-\, a) = \neg a\text{” e em “}\Vdash \left(\begin{array}{l} \top\, b \\ \llcorner\, a \end{array}\right) = a \rightarrow b\text{”.}$$ [35]

Em uma definição, toda letra romana que apareça em um dos lados do sinal de identidade deve também aparecer do outro.

Frege frisa em seu texto que definições não criam novos objetos ou funções; elas apenas criam notações abreviadas, as quais a princípio seriam dispensáveis, mas que são utilizadas porque, além de tornar o texto mais curto, ajudam na sua compreensão, por mais facilmente remeter o leitor aos conceitos que ele conhece.

3.2.3 Deduções

No tópico anterior foram apresentados os símbolos necessários para se expressar proposições individuais na *Begriffsschrift*. Nesse tópico, o restante do formalismo será apresentado, e veremos então como deduções são representadas.

[35] Essas três definições são apenas exemplos, e não figuram no texto de Frege.

Axiomas

No formalismo apresentado em [10], os seguintes axiomas são utilizados:[36]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top a \\ \quad\;\;\llcorner\, b, \\ \;\;\llcorner\, a \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top a \;[39] \\ \;\;\llcorner\, a \end{array} \quad (\mathrm{I} \qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top f(a) \\ \;\;\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) \end{array} \quad (\mathrm{IIa} \qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top M_{\beta}(f(\beta)) \\ \;\;\llcorner\!\smile^{\mathfrak{f}} M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)) \end{array} \quad (\mathrm{IIb}$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top g\left(\smile^{\mathfrak{f}}\!\!\top \begin{array}{l} \mathfrak{f}(a) \\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b) \end{array} \right) \\ \;\;\llcorner\, g(a=b) \end{array} \quad (\mathrm{III} \qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top (\!-\!\!-\!\!-a) = (\!-\!\!-\!\!-b) \\ \;\;\llcorner\!\!\top (\!-\!\!-\!\!-a) = (\!-\!\!\top\!\!-b) \end{array} \quad (\mathrm{IV} \qquad \vdash a = \backslash\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon) \;\; (\mathrm{VI}$$

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \;\; (\mathrm{V}$$

Informalmente, esses axiomas expressam o seguinte:

I. Se Δ é o Verdadeiro, então $\begin{array}{l}\top\Delta\\ \llcorner\,\Gamma\end{array}$ também o é.

IIa. O que vale para todos os objetos vale para qualquer um deles.

IIb. O que vale para todas as funções vale para qualquer uma delas.

III. Se Γ e Δ são o mesmo objeto, então, para toda função "Φ", se $\Phi(\Delta)$ for o Verdadeiro, então $\Phi(\Gamma)$ também o será.

IV. Se $-\!\!-\!\!-\Gamma$ e $-\!\!\top\!\!-\Delta$ não são iguais, então $-\!\!-\!\!-\Gamma$ e $-\!\!-\!\!-\Delta$ o são.[40]

V. Duas funções têm o mesmo curso-de-valores quando são iguais.

VI. *O* objeto que pertence ao "conjunto" dos objetos iguais a Γ é Γ.

A veracidade das afirmações expressas por cada uma das fórmulas acima segue da interpretação apresentada para os símbolos da linguagem.

Regras de inferência

1. Fusão de horizontais É fácil verificar que as funções $-\!\!-\!\!-(-\!\!-\!\!-\xi)$ e $-\!\!-\!\!-\xi$ assumem os mesmos valores para argumentos iguais. Com base nisso, Frege estabelece a regra de inferência chamada *fusão de horizontais*:[41]

[36]Eles são diferentes daqueles apresentados em [8].
[39]Essa fórmula pode ser derivada a partir da outra (ver pág. 56).
[40]Eu acredito que essa tenha sido a maneira escolhida por Frege para codificar em seu sistema a informação de que as funções $-\!\!-\!\!-\xi$ e $-\!\!\top\!\!-\xi$ só assumem dois valores (que são os valores-verdade).
[41]*Amalgamation of horizontals*, em inglês.

> Se parte de uma fórmula tem a forma "——(——Δ)", então a partir dela pode-se inferir a fórmula em que essa parte é substituída por "——Δ".

Da mesma forma, verifica-se que as funções ——(—┬—ξ) e —┬—(——ξ) são ambas iguais à função —┬—ξ. Por isso, pode-se considerar o traço horizontal do símbolo "—┬—" como sendo dividido em metades pelo sinal de negação (que é o traço vertical), cada qual sendo um 'horizontal', o símbolo definido por Frege. Analogamente, pode-se considerar cada um dos traços horizontais ao redor da concavidade do símbolo "—⌣—" como sendo um horizontal, e o mesmo vale para os três traços horizontais do símbolo "┬└" (considera-se o traço horizontal na ponta superior do sinal de condição como sendo dividido por este em duas partes). Assim, por exemplo, de "—$\mathfrak{a}$⌣— - $\Phi(\mathfrak{a})$" podemos obter simplesmente "—$\mathfrak{a}$⌣— $\Phi(\mathfrak{a})$", bem como "┬ ┬ Δ" pode ser obtido de "┬ - ┬ Δ" e até

$$\text{“}\vdash\!\top\!\top\,\Delta\;\text{”}\quad\text{de}\quad\text{“}\vdash\text{-}\top\text{-}\top\text{-}\,\Delta\;\text{”}.$$
$$\quad\llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\qquad\qquad\llcorner\text{-}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$$

[42]

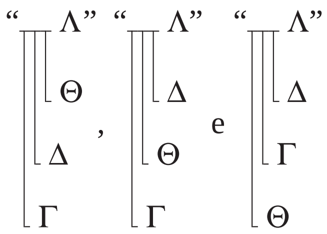
2. Inversão de subcomponentes Para explicar a próxima regra de inferência, é necessário conhecer um pouco mais da terminologia de Frege. O que atualmente nós conhecemos como 'antecedente' e 'conseqüente' de uma implicação, Frege chamava respectivamente de *subcomponente* e *componente principal*. Assim, por exemplo, na expressão

$$\text{“}\top\top\,\Theta\text{”}$$
$$\;\;\llcorner\,\Delta$$
$$\llcorner\,\Gamma,$$

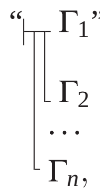
"Θ" e "Δ" são, com relação à implicação mais interna, a componente principal e a subcomponente, respectivamente, enquanto que, no caso da implicação mais externa, "┬ Θ" / └ Δ" e "Γ" desempenham esses papéis, nessa ordem. Acrescente-se a isso que, em fórmulas como aquela acima, que consistem em aplicações iteradas da implicação, Frege também se refere ao conseqüente da implicação mais interna como sendo 'a componente principal', e aos antecedentes de todas as implicações, indistintamente, como 'subcomponentes'; na fórmula acima, portanto, "Θ" é a componente principal, enquanto "Γ" e "Δ" são subcomponentes.

Da definição de condicionalidade, segue que expressões como

[42] Lembre-se de que o símbolo "⊦ " é formado por um sinal de juízo *e* um horizontal; é fácil verificar que "⊦ Δ" é equivalente a "⊦ (- Δ)".

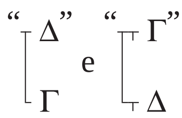


denotam o mesmo valor-verdade. Assim sendo, Frege inclui entre as regras de inferência do seu formalismo a *inversão de subcomponentes*, que permite se inferir, a partir de uma fórmula da forma



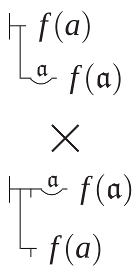
qualquer outra que dela resulte por meio da alteração da ordem de suas subcomponentes.[43]

3. Contraposição Segue da definição de condicionalidade que



têm a mesma denotação. Frege incorpora essa observação na regra de inferência que ele chama de *contraposição*, indicada pelo *sinal de transição* "$\times$". Assim, por exemplo, em

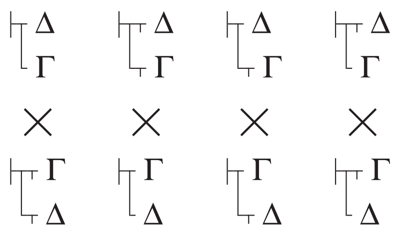
IIa



temos uma inferência, em que a fórmula inferior é derivada a partir da superior por contraposição; na *Begriffsschrift*, as inferências são representadas verticalmente, com a conclusão sendo colocada abaixo da premissa. Na realidade, a inferência acima é também uma dedução completa, pois é iniciada a partir de um axioma.

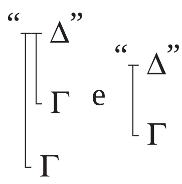
[43] Em [8], essa regra de inferência não aparecia. Havia, em seu lugar, o axioma "$((d \to b) \to a) \to ((b \to d) \to a)$" (escrevo em notação moderna para economizar espaço). No caso de fórmulas maiores, a permissibilidade da alteração da ordem das subcomponentes era deduzida. A incorporação dessa regra se deu por conveniência (ver [13], págs. 2 e 3).

A contraposição pode ser aplicada das seguintes maneiras:

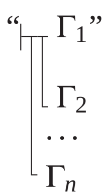


É possível ainda aplicá-la quando outras subcomponentes estão presentes, como em:

4. Fusão de subcomponentes idênticas É fácil vericar que



têm a mesma denotação. Com base nisso, Frege estabelece também a regra de *fusão de subcomponentes idênticas*, através da qual é possível a transição de uma fórmula da forma



e que possua uma subcomponente "Γ_i" que ocorra mais de uma vez para outra em que essa subcomponente só apareça uma vez; nenhuma restrição é imposta sobre a ordem das subcomponentes, nem na fórmula original nem naquela que é dela obtida, uma vez que essa ordem poderia ser modificada através da regra de inversão de subcomponentes.

5. Regra de generalização Do significado atribuído à letras romanas, segue que "$\vdash \Phi(x)$" e "$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$" representam afirmações equivalentes. Com base nisso, Frege estabele a regra que permite a transição de uma fórmula contendo uma letra romana para aquela que se obtém substituindo-se essa letra por uma letra gótica e, além disso, incluindo-se uma concavidade contendo essa letra gótica após o sinal de juízo. Em símbolos, essa transição é representada assim:

$$\vdash \Phi(x)$$

$$\smile$$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$$

Uma restrição importante a ser acrescentada é que, no caso de na premissa a letra romana em questão estar dentro do escopo de uma letra gótica, esta última deve ser diferente daquela escolhida para a substituição, para que não haja modificação no sentido da expressão. Assim, por exemplo, em

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; a = \mathfrak{a}$$

$$\smile$$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

a letra "$\mathfrak{a}$" não poderia ter sido escolhida no lugar de "$\mathfrak{b}$"para substituir "a"; de fato, a fórmula "$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" não representa a mesma afirmação que aquelas acima.[44]

Consideremos agora a seguinte inferência:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \Phi(x) \\ \;\;\llcorner\, \Gamma \end{array} \qquad \text{(F1)}$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top \Phi(\mathfrak{a}) \\ \qquad\llcorner\, \Gamma \end{array} \qquad \text{(F2)}$$

Observe que, em F1, a expressão "Γ" não é indicada como sendo uma função aplicada a "x", o que significa que nela esta última não aparece. Disso, segue que F2 é equivalente à fórmula

$$\text{“}\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})\text{”} \\ \;\;\llcorner\, \Gamma \qquad\quad , \end{array} \qquad \text{(F3)}$$

pois:

1. Se em F1 "x" não ocorre em "Γ", então em F2 não há ocorrência da letra "$\mathfrak{a}$" em "Γ" que esteja ligada à concavidade que segue o sinal de juízo, ou seja, a denotação de "Γ" independe dessa concavidade.

[44] Em "$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" temos a afirmação de que "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" denota o Verdadeiro, o que equivale a dizer que, em todo objeto "$\mathfrak{a}$", a função $\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ vale o Verdadeiro. Essa função, entretanto, é constante, seu valor não dependendo do seu argumento e o nome deste não estando relacionado com as ocorrências da letra "$\mathfrak{a}$" no nome da função. A afirmação equivale, portanto, a dizer que "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" isso denota o Falso, ou seja, que existe um objeto "$\mathfrak{a}$" para o qual "$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" denota o Falso. Isso, além de não ser verdade, é diferente da afirmação presente em "$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; a = \mathfrak{a}$", que diz simplesmente que, para qualquer objeto "a", existe um objeto "$\mathfrak{a}$" igual a ele (o que é trivialmente verdadeiro).

2. Se “Γ” denotar o Falso, então nem F2 nem F3 afirmam algo de útil. Em caso contrário, então ambas as fórmulas afirmam que a função $\Phi(\xi)$ vale Verdadeiro para todo argumento.

Com base nessa observação, Frege permite a transição direta

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\; \Phi(x) \\ \quad\llcorner\; \Gamma \\ \quad\smile \\ \vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \Phi(\mathfrak{a}) \\ \qquad\llcorner\; \Gamma \end{array}\ .$$

De uma forma geral, a concavidade introduzida através dessa inferência pode ser colocada no início de qualquer *componente principal* que contenha todas as ocorrências da letra romana sendo substituída.

A regra de generalização também pode ser aplicada a letras romanas que indicam funções de primeiro nível, como em

$$\text{IIa}\quad \begin{array}{l}\vdash\!\!\top\; f(a) \\ \quad\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; f(\mathfrak{a}) \\ \quad\smile \\ \vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{f}(a) \\ \qquad\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \end{array}\ .$$

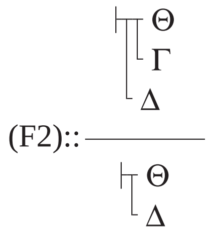
E, como um último adendo, várias letras romanas podem ser substituídas em uma única inferência, como em

$$\text{V}\quad \begin{array}{l}\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \\ \qquad\qquad\smile \\ \vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\, (\grave{\varepsilon}\mathfrak{f}(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\mathfrak{g}(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}))\end{array}\ .$$

6. *Modus ponens* O formalismo de Frege possui a regra de inferência que hoje conhecemos como *modus ponens*: de “$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \Delta \\ \quad\llcorner\, \Gamma\end{array}$” e de “$\vdash \Gamma$” podemos inferir “$\vdash \Delta$”. Se rotularmos as premissas de F1 e F2, respectivamente, então podemos representar essa inferência de duas formas:

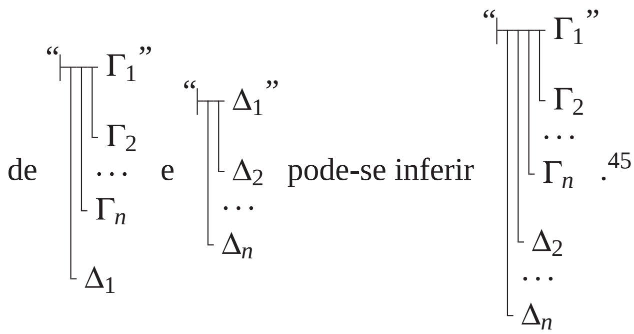
$$\text{(F2)::}\ \frac{\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \Delta \\ \quad\llcorner\, \Gamma\end{array}}{\vdash \Delta} \qquad \text{(F1):}\ \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Delta}$$

Quando uma fórmula é citada, pode-se fazer uso tácito da inversão de subcomponentes. Assim, por exemplo, em

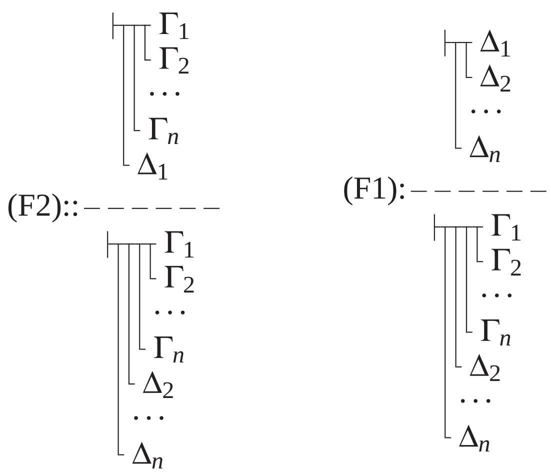


fica implícito que as subcomponentes “Γ” e “Δ” foram invertidas antes de se aplicar a regra de inferência.

7. Inferência “b” A regra que Frege chama de inferência “b”, e que pode ser vista como uma generalização da regra anterior, é como segue:

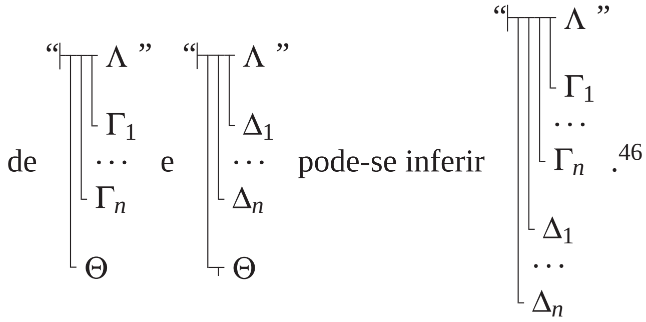


Como antes, nem as subcomponentes das premissas nem as da conclusão precisam estar em alguma ordem particular, uma vez que isso poderia ser modificado através da regra de inversão de subcomponentes; da mesma forma, pela regra de fusão de subcomponentes idênticas, subcomponentes repetidas da conclusão podem ser aparecer apenas uma vez. Se rotularmos as premissas acima de F1 e F2, respectivamente, então essa inferência pode ser expressa em símbolos das duas formas abaixo:

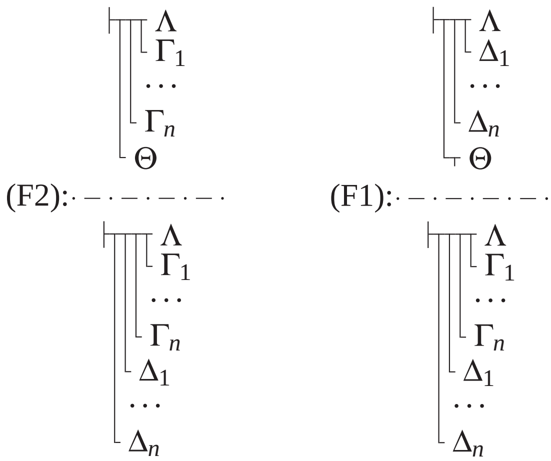


[45]Essa regra de inferência não estava presente em [8]; em seu lugar, havia o axioma “$(c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$”, e fórmulas semelhantes eram deduzidas.

8. Inferência "c" A regra que Frege chama de inferência "c" é como segue:



Como antes, pode-se fazer uso tácito da inversão de subcomponentes e da fusão de subcomponentes idênticas, tanto nas premissas quanto na conclusão. Se rotularmos as premissas acima de "F1" e "F2", respectivamente, então essa inferência pode ser representada de duas formas:



Essa regra, diferentemente das duas anteriores, não tem a forma "::", e é indiferente qual das premissas é escrita explicitamente e qual delas é citada.

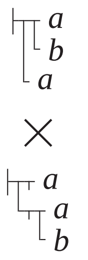
Deduções

Na apresentação das regras de inferência, algumas curtas deduções foram apresentadas; aqui, complementamos as instruções sobre como elas devem ser representadas.

Em uma dedução, uma fórmula só pode ser derivada a partir dos axiomas apresentados ou definições; toda outra fórmula que for utilizada em uma inferência deve ter sido deduzida anteriormente. Toda proposição deduzida ou definição que se queira utilizar posteriormente deve ser acompanhada de um índice à sua direita, como em

[46] Dadas as regras de inferência anteriores, esta é redundante, e Frege a utiliza apenas por conveniência.

I

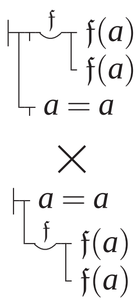


(Ic;[47]

esse índice deverá sempre estar à esquerda da proposição em seus usos posteriores, como no caso do axioma utilizado na inferência acima.

Quando uma proposição (ou axioma ou definição) é utilizada após a sua primeira aparição, ela pode aparecer modificada. Uma letra romana, por exemplo, pode ser substituída por um nome ou marca do tipo adequado, isto é, se a letra em questão indica objetos, então a expressão que a substitui deve denotar (ou indicar) um objeto, e não uma função (e vice-versa), e se a letra em questão for "*M*", então a expressão deve denotar/indicar uma função de segundo-nível. Assim, por exemplo, a dedução

III



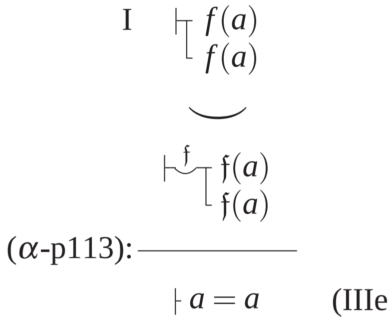
(α-p113

é perfeitamente válida: em III, a letra romana de função "*g*" fui substituída pela marca de função "$\neg\!\!-(\xi)$" e a letra romana de objeto "*b*" foi substituída por "*a*".[48]

Também é possível aplicar sem menção explícita as regras de inferência para as quais não foi apresentado um sinal de transição, isto é, a fusão de horizontais, a inversão de subcomponentes e a fusão de subcomponentes idênticas. Assim, por exemplo, em

[47]Muitas das fórmulas aqui presentes vêm do texto de Frege, e eu mantenho a indexação para facilitar eventuais consultas.

[48]Observe que não há problema em substituir "*b*" por "*a*" com esta última já aparecendo na fórmula original: em III, se afirma algo sobre objetos quaisquer indicados por "*a*" e "*b*", e isso não exclui o caso em que um mesmo objeto é indicado por ambas as letras. O oposto, porém, não poderia acontecer: todas as ocorrências de uma letra romana devem ser substituídas pela mesma expressão.



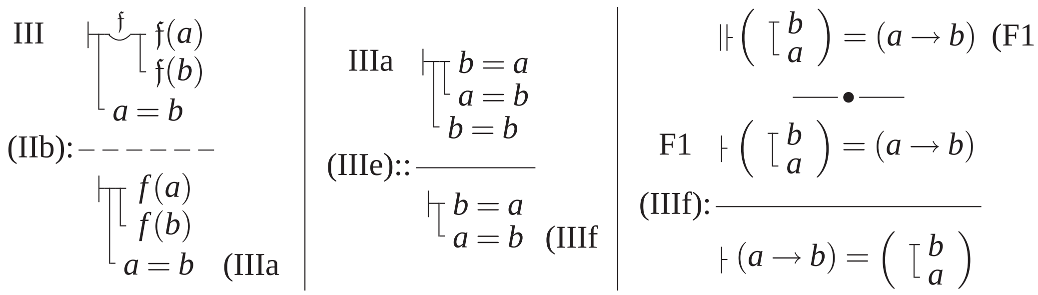
o axioma I foi utilizado da seguinte forma: a letra “b” foi substituída por “a”, as duas subcomponentes idênticas foram unidas e a letra “a” foi substituída por “$f(a)$”.

Quando uma fórmula é citada, letras gregas minúsculas e góticas também podem ser trocadas por outras do mesmo tipo, exceto por uma que já pertença à fórmula e em cujo escopo haja uma ocorrência da letra sendo substituída. Assim, por exemplo, ao citar a fórmula

$$\text{“}\vdash\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\text{”},$$

poderíamos substituir “$\mathfrak{a}$” por “$\mathfrak{c}$”, mas não por “$\mathfrak{b}$”.

Quando uma definição é citada, o sinal de definição pode ser substituído pelo sinal de juízo, para que assim as regras de inferência sejam aplicáveis. A seguinte derivação é um exemplo:



O símbolo “——•——” é um separador, que Frege utiliza quando abaixo de uma fórmula segue uma inferência em que ela não é a premissa (pelo menos não na forma que em que ela aparece; na derivação acima, F1 é a premissa da última inferência, mas iniciada pelo sinal de juízo, e não pelo de definição).[49]

3.3 A Aritmética de Frege

Em [8] Frege apresentou a primeira versão do seu formalismo, mas foi em [9] que foi apresentada a sua proposta de fundamentação para a Aritmética. Nesta obra, a exposição foi crítica,

[49]Esse símbolo é muito mais freqüentemente usado no texto de Frege do que parece pela sua única aparição até aqui, pois lá todas as derivações são apresentadas numa única seqüência vertical, diferentemente de como eu fiz por economia de espaço.

mas não simbólica; a teoria formalizada foi apresentada em [10]. Neste tópico, apresentarei sinteticamente os conceitos e definições da teoria aritmética de Frege e a sua representação na *Begriffsschrift*.

3.3.1 O conceito de número

"Quantos patos há na lagoa? O número de patos na lagoa é 5." Frege enxergava o número de patos na lagoa como um objeto, que seria o resultado da função número de aplicada ao predicado[50] ser um pato na lagoa. Além disso, a proposta de Frege para a função numero de era a seguinte:

> O "número que pertence ao conceito F" (isto é, o resultado da função numero de aplicada a F) é a extensão do conceito ser eqüinumeroso ao conceito F.[51]

Dois conceitos F e G são 'eqüinumerosos' quando existe uma função bijetiva do conjunto dos objetos que se enquadram em F no conjunto daqueles que se enqüadram em G. Informalmente, portanto, a definição de número de Frege pode ser reescrita como: *o número associado a um predicado F é o conjunto dos predicados cuja quantidade dos objetos que neles se enquadram é igual à dos que se enquadram em F*. Atentando para o fato de que a expressão *"número associado ao predicado F"* é sinônimo de *"quantidade de objetos que se enquadram em F"*, pode-se pensar que, nesta frase, a quantidade de objetos que se enquadram num conceito F está sendo definida circularmente; este, porém, não é o caso, pois a expressão *"predicado cuja quantidade de objetos que nele se enquadram é igual à dos que se enquadram em F"* está sendo usada como sinônimo para *"predicado eqüinumeroso a F"*, e esta última não é definida em termos de quantidade de objetos que se enquadram num conceito, mas de relação um-para-um entre conjuntos.

A propósito de uma ilustração informal, provemos a correção da seguinte afirmação: *"o número de olhos que Pablo tem é igual ao número dos seus braços"*. Chamemos os predicados ser um olho de Pablo e seu um braço de Pablo de "$O(\xi)$" e "$B(\xi)$", respectivamente. Assim, o número N_O dos objetos a que $O(\xi)$ se aplica é o conjunto dos predicados eqüinumerosos a $O(\xi)$, e o análogo vale para o número N_B dos objetos a que $B(\xi)$ se aplica. Mas $O(\xi)$ e $B(\xi)$ são eqüinumerosos, pois é um-para-um a relação que, por exemplo, associa o olho esquerdo de Pablo ao seu braço esquerdo e que faz o mesmo para os correspondentes direitos destes. Disso,

[50] Conceito, no sentido técnico de Frege.

[51] [12], págs. 79 e 80. Uso aqui o neologismo "eqüinumeroso", assim como Frege o faz com "*Gleichzablig*".

como a relação de eqüinumerosidade é transitiva, segue que qualquer predicado que pertence a N_O também pertence a N_B, e vice-versa. N_O e N_B são, portanto, iguais.

A definição de Frege pode parecer estranha a primeira vista, mas é na realidade bastante interessante. Diante da dificuldade de definir a noção de número em si (isto é, a quantidade de objetos a que se aplica um predicado), Frege a define recorrendo à noção de ‘eqüinumericidade’; esta, por sua vez, também tem que ser definida, mas, ao invés de fazê-lo pela comparação entre números (como seria intuitivo fazer, mas também circular), ele o faz recorrendo à noção de relação um-para-um; isso certamente implica a necessidade de se definir quando uma relação é desse tipo, mas Frege consegue fazê-lo em seu formalismo, como veremos a seguir.[52] Por outro lado, a estratégia adotada por Frege toma como dada a existência da extensão de um predicado qualquer, e uma aplicação descuidada desse pressuposto leva ao Paradoxo de Russell.[53]

3.3.2 Formalização

A função $\xi\frown\zeta$

Se nós tentássemos formalizar o conceito de número como apresentado acima, precisaríamos de mais axiomas do que aqueles que foram listados anteriormente. Para ilustrar isso, vejamos o caso da relação de eqüinumerosidade: dois conceitos $\Gamma(\xi)$ e $\Delta(\xi)$ são eqüinumerosos se *existe* uma relação um-para-um entre os elementos que se enquadram em $\Gamma(\xi)$ e aqueles que se enquadram em $\Delta(\xi)$. Já vimos anteriormente como simular o quantificador existencial (pág. 42: $\exists a \rightsquigarrow \neg\forall a\neg \rightsquigarrow \top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top$); nesse caso, porém, fazê-lo implicaria quantificar sobre funções de dois argumentos, e assim precisaríamos de um axioma, análogo ao IIb (pág. 48), que tratasse de tais quantificações.

Para evitar tais adições, Frege define a seguinte função:

$$\Vdash \backslash\grave{\alpha}\left(\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ u = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = a\frown u. \qquad (A$$

Para entendê-la, observemos que a função

$$\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\Delta) = \xi \\ \Gamma = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array},$$

[52]Nisso vejo uma convergência de posturas entre as teorias aritméticas de Dedekind e Frege. Embora ambas sirvam para esclarecer questões relativas à noção de número, nenhuma a explica completamente—esperá-lo de uma teoria matemática, entretanto, pode não ser sequer razoável. Além disso, pensando agora por outro lado, tanto uma quanto outra são demonstrações concretas de que, partindo-se de um pequeno número de pressupostos razoavelmente intuitivos a respeito dos números naturais, é possível deduzir a vasta gama das suas outras propriedades que são tidas como verdadeiras quando a Aritmética é utilizada dentro de alguma outra teoria.

[53]Veja os tópicos 4.1, pág. 68, e 4.3.1, pág. 74.

que chamaremos temporariamente de $\mathscr{F}(\xi)$, é verdadeira para um argumento Π somente quando Γ é o curso-de-valores de uma função $\mathfrak{g}(\xi)$ e Π é o valor *dessa* função para o argumento Δ.[54] Assim sendo, dois casos são possíveis:

1. Se Γ é o curso-de-valores de uma função $\mathfrak{g}(\xi)$, então o único argumento Π em que $\mathscr{F}(\xi)$ vale Verdadeiro é $\mathfrak{g}(\Delta)$; em todos os outros a função vale Falso. Isso significa dizer que $\mathscr{F}(\xi)$ assume, para todos os argumentos, os mesmos valores que a função $\mathfrak{g}(\Delta) = \xi$, o que, pelo axioma V, implica que $\dot{\alpha}(\mathscr{F}(\alpha)) = \dot{\alpha}(\mathfrak{g}(\Delta) = \alpha)$, que, pelo axioma VI, implica que $\backslash\dot{\alpha}(\mathscr{F}(\alpha)) = \backslash\dot{\alpha}(\mathfrak{g}(\Delta) = \alpha) = \mathfrak{g}(\Delta)$.

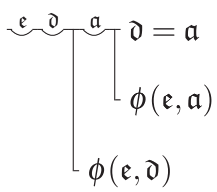
2. Se, por outro lado, não existe $\mathfrak{g}(\xi)$ tal que $\Gamma = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)$, então $\mathscr{F}(\xi)$ vale Falso para todo argumento. Nesse caso, não existe um objeto Σ tal que a função $\Sigma = \xi$ assuma, para todos os argumentos, os mesmos valores que $\mathscr{F}(\xi)$. Pela definição (semântica) da função $\backslash\xi$, portanto (pág. 44), $\backslash\dot{\alpha}\mathscr{F}(\alpha)$ é igual a $\dot{\alpha}\mathscr{F}(\alpha)$.

Tendo entendido o valor de $\backslash\dot{\alpha}\mathscr{F}(\alpha)$, podemos agora compreender a função $\xi \frown \zeta$: da sua definição, segue que, quando u é o curso-de-valores de uma função $g(\xi)$, $a \frown u = g(a)$, ou seja:

$$a \frown (\dot{\varepsilon} g(\varepsilon)) = g(a).$$ [55]

Cursos-de-valores duplos e a função Iξ

Vejamos como a função acima definida pode ser útil. Definamos, para uso posterior, um conceito de segundo nível no qual se enquadrem as relações $\phi(\xi,\zeta)$ de primeiro nível tais que, escrevendo em notação moderna, $\phi(e,d) \wedge \phi(e,a) \rightarrow d = a$ (isto é, as relações que representam funções injetivas). Isso poderia ser feito da seguinte maneira:



Chamemos temporariamente esse conceito de $\mathscr{I}_{\beta,\gamma}(\phi(\beta,\gamma))$.[56] Acontece que quantificar sobre o argumento dessa função, como em

[54] Lembre que, pelo axioma V, se Γ é o curso-de-valores de uma função $\mathfrak{g}(\xi)$, então Γ não é o curso-de-valores de nenhuma *outra* função (do ponto de vista extensional).

[55] Em [13], pág. 123, essa fórmula é deduzida (na verdade, a fórmula "$\vdash f(a) = a \frown \dot{\varepsilon} f(\varepsilon)$").

[56] Essa é a notação de Frege para funções que recebem relações de primeiro nível como argumento, como explicado no tópico sobre generalidade (pág. 42).

$$\text{“}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathscr{I}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))\text{”},$$

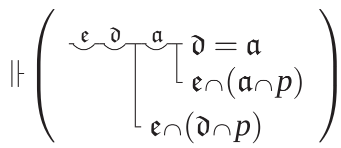
significa quantificar sobre funções de dois argumentos, e, como dito no tópico anterior, o intuito é evitar fazê-lo.

Através da função $\xi \frown \zeta$, nós podemos quantificar sobre objetos e ainda manipular relações de primeiro nível. Para entender como isso é possível, atentemos para o fato de que, se $\Phi(\xi,\zeta)$ é uma função de dois argumentos, então $\Phi(\xi,\Delta)$ é uma função de um único argumento.[57] Assim sendo, podemos aplicar a função $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$ a esta última, para obter $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon,\Delta)$. Mas isso é válido para qualquer Δ, o que nos leva à função $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon,\zeta)$. Esta última, por sua vez, também é uma função de um argumento, e portanto podemos aplicar a ela a função $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$ e obter $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon,\alpha)$. Frege chama tais objetos de *cursos-de-valores duplos*, mas nós podemos perceber que, como apresentados, eles não são o resultado de uma nova função $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon,\alpha)$, mas apenas de aplicações iteradas da função $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$ já conhecida. Observemos agora que, em acordo com a discussão anterior a respeito da aplicação da função $\xi \frown \zeta$ a cursos-de-valores, as seguintes igualdades são válidas:

$$\Gamma \frown (\Delta \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon,\alpha)) = \Gamma \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon,\Delta) = \Phi(\Gamma,\Delta)^{58}$$

Isso significa que, onde for necessário aplicar uma relação $\Phi(\xi,\zeta)$, nós podemos usar o seu curso-de-valores duplo. Isso não se aplica a todas as situações, uma vez que tanto “$\phi(\Gamma,\Delta)$” quanto “$\Gamma \frown (\Delta \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon,\alpha))$” denotam funções de segundo nível (isto é, funções cujos argumentos são funções $\phi(\xi,\zeta)$ de primeiro nível); entretanto, se a relação aparecer quantificada, como na expressão “$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathscr{I}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$” já mencionada, então a substituição do uso da relação em si pelo do seu curso-de-valores duplo significará passar a quantificar sobre objetos, e não mais sobre funções. Nós tiraremos proveito disso quando da definição do conceito de número, mais à frente.

Nós podemos agora definir uma nova função para caracterizar funções injetivas:[59]



$= \mathrm{I}p$ (Γ

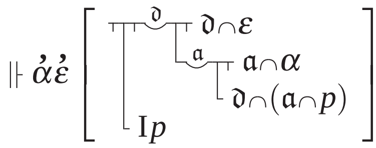
A função $\mathrm{I}(\xi)$ é análoga à sua predecessora $\mathscr{I}_{\beta,\gamma}(\phi(\beta,\gamma))$; a diferença é que ela é um conceito de primeiro nível, e foi definida para receber como argumentos cursos-de-valores de relações

[57] Independentemente de que objeto seja Δ (ele poderia ser, por exemplo, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$).
[58] Esse uso iterado da função $\xi = \zeta$ não é formal.
[59] Já presente em [8] (veja [35], pág. 74, fórmula 115).

de primeiro nível, e não as relações em si. Assim, por exemplo, a expressão "$\mathrm{I}(\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon,\alpha))$" denota o valor-verdade de $\Phi(\xi,\zeta)$ representar uma função injetiva (o mesmo que "$\mathscr{I}_{\beta,\gamma}(\Phi(\beta,\gamma))$").

A função $\rangle\xi$

Progredindo rumo à definição da relação de eqüinumericidade, Frege define seguinte função:



$= \rangle p$ (Δ.

Com base nas explicações anteriores sobre as funções $\xi\cap\zeta$ e $\mathrm{I}\xi$, o leitor pode verificar que

$$\text{“}\dot{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)\cap(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\cap\rangle\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}X(\varepsilon,\alpha))\text{”}$$

denotará Verdadeiro quando (1) a relação $X(\xi,\zeta)$ representar uma função injetiva, no sentido de que $\mathrm{I}(\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}X(\varepsilon,\alpha))$ seja Verdadeiro, e (2), para todo $\mathfrak{d}$ que se enquadre em $\Phi(\xi)$, existir um $\mathfrak{a}$ que se enquadre em $\Psi(\xi)$ tal que $X(\mathfrak{d},\mathfrak{a})$.[60]

As funções $\mathscr{U}\xi$ e $\mathscr{N}\xi$[61]

Dois conceitos $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ são eqüinumerosos quando existe uma relação bijetiva entre os elementos que se enquadram em um e em outro. A função $\rangle\xi$ já nos dá uma maneira de saber se uma relação $X(\xi,\zeta)$ mapeia injetivamente os elementos que se enquadram em $\Phi(\xi)$ naqueles que se enquadram em $\Psi(\xi)$; para completar a bijeção, nós podemos considerar a relação inversa de $X(\xi,\zeta)$ e verificar se ela mapeia injetivamente os elementos que se enquadram em $\Psi(\xi)$ naqueles que se enquadram em $\Phi(\xi)$. Para isso, Frege define a seguinte função:

$$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha\cap(\varepsilon\cap p)) = \mathscr{U}p \qquad \text{(E.}$$

Se lembrarmos que a função $\xi\cap(\zeta\cap\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}X(\varepsilon,\alpha))$ assume os mesmos valores que $X(\xi,\zeta)$, fica fácil perceber que a função $\zeta\cap(\xi\cap\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}X(\varepsilon,\alpha))$ é a relação inversa de $X(\xi,\zeta)$, e portanto que $\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha\cap(\varepsilon\cap\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}X(\varepsilon,\alpha)))$ é simplesmente o curso-de-valores duplo dessa inversa.

Feito isso, Frege pode finalmente formalizar seu conceito de número: o número associado a um conceito $\Phi(\xi)$ será o conjunto dos conceitos eqüinumerosos a $\Phi(\xi)$, ou seja, o curso-de-valores do conceito "ser eqüinumeroso a $\Phi(\xi)$". Um conceito $\Psi(\xi)$ será eqüinumeroso a $\Phi(\xi)$

[60] Informalmente, a expressão em questão denotará Verdadeiro quando $X(\xi,\zeta)$ mapear injetivamente o conjunto dos objetos que se enquadram em $\Phi(\xi)$ no conjunto daqueles que se enquadram em $\Psi(\xi)$.

[61] As formas dos símbolos '$\cap$' e '$\rangle$' são semelhantes às daqueles presentes em [13], mas as destes que apresento agora não o são (as definições das funções são, contudo, as mesmas).

quando existir uma relação $X(\xi,\zeta)$ que mapeie injetivamente os elementos que se enquadram em $\Phi(\xi)$ naqueles que se enquadram em $\Psi(\xi)$ e cuja inversa faça o mesmo na direção oposta. É isso que está codificado na definição abaixo:

$$\Vdash \grave{\varepsilon}\left(\smile^{\mathfrak{q}}\!\!\top\; \begin{array}{l} \varepsilon \frown (u \frown \rangle \mathfrak{q}) \\ u \frown (\varepsilon \frown \rangle \mathscr{U}\mathfrak{q}) \end{array} \right) = \mathscr{N} u \qquad \text{(Z.}$$

Como se pode perceber pelo uso da função $\rangle\xi$, o argumento da função $\mathscr{N}\xi$ não deve ser um conceito $\Phi(\xi)$ em si, mas sim o seu curso-de-valores. Atente para o fato de que a quantificação necessária para codificar a condição "existir uma relação $X(\xi,\zeta)$ tal que ..." é feita sobre objetos, e não sobre as relações em si (como prometido na pág. 61).

Definições de *zero* e *um*

Agora que já definimos o número associado a um conceito qualquer, como definiríamos o número *zero*? Dado o ponto de vista de Frege, isso equivale a perguntar: a que conceito associaríamos o número zero? Pelo significado da quantidade nula, o conceito deveria ser tal que nenhum objeto se enquadrasse nele. A sugestão de Frege é o conceito "não ser idêntico a si mesmo":

$$\Vdash \mathscr{N}\grave{\varepsilon}(\neg\, \varepsilon = \varepsilon) = \mathbf{0} \qquad (\Theta.$$

E como definiríamos o número *um*? O conceito tem que ser tal que somente um objeto se enquadre nele; a sugestão de Frege é "ser igual a $\mathbf{0}$":

$$\Vdash \mathscr{N}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \mathbf{0}) = \mathbf{1} \qquad (\mathrm{I}$$

Definição de f

Como podemos agora definir o conceito "ser um número"?[62] Para que um objeto seja um número, precisa existir um conceito cujo número a ele associado seja o objeto em questão. Isso leva ao conceito

$$\smile^{\mathfrak{u}}\!\top\; \mathscr{N}\mathfrak{u} = \xi.$$

Esse conceito não impõe, entretanto, restrições sobre o 'tamanho' do número; são considerados, por exemplo, números infinitos, isto é, números associados a conceitos em que se enquadram uma quantidade infinita de objetos, bastando para isso que existam tais conceitos.

Como podemos então definir os números naturais? Frege começa definindo uma relação

[62] Eu me refiro aqui a números cardinais, isto é, a números utilizados como medidas de tamanho para conjuntos.

que responde a seguinte pergunta: quando um número natural é imediatamente maior que outro, ou seja, quando um número natural é sucessor de outro? Uma resposta plausível é: quando o primeiro é uma unidade maior que o segundo. Isso pode ser reformulado assim: n é sucessor de m se e somente:

1. Existe um conceito $\Phi(\xi)$ cujo número associado é n, e
2. Existe um objeto $\mathfrak{a}$ que se enquadra em $\Phi(\xi)$[63] tal que m é o número associado ao conceito "se enquadrar em $\Phi(\xi)$ e ser diferente de $\mathfrak{a}$".[64]

Colocando isso em símbolos, ζ é sucessor de ξ quando:

$$\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{u}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\top\ \mathscr{N}\mathfrak{u} = \zeta \\ \qquad\quad \llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\quad \llcorner\ \mathscr{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\ \varepsilon = \mathfrak{a} \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \mathfrak{u} \end{array} \right) = \xi. \end{array}$$

Essa é a relação que Frege quer definir, mas, continuando a prática de utilizar os cursos-de-valores duplos das relações ao invés destas em si, Frege define:

$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{u}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\top\ \mathscr{N}\mathfrak{u} = \alpha \\ \qquad\quad \llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\quad \llcorner\ \mathscr{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\ \varepsilon = \mathfrak{a} \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \mathfrak{u} \end{array} \right) = \varepsilon \end{array} \right] = \mathbf{f} \qquad \text{(H}$$

Assim, por exemplo, "$\mathbf{0} \frown (\mathbf{1} \frown \mathbf{f})$" expressa que $\mathbf{1}$ é sucessor de $\mathbf{0}$, e

$$\text{“}\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\ \mathrm{I}\mathbf{f} \\ \quad \llcorner\ \mathrm{I}\mathscr{U}\mathbf{f} \end{array}\text{”}$$

afirma que a relação representada por $\mathbf{f}$ é um-para-um.[65]

A seqüência dos números naturais

Até agora, a teoria de Frege esclareceu dois questionamentos: *"o que e qual é o número associado a um conceito?"*, através da função $\mathscr{N}\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$, e *"o que significa um número suceder outro?"*, através da relação definida por $\mathbf{f}$. Entretanto, o conjunto dos números naturais ainda não foi apresentado, e, mais ainda, a 'relação' $\mathbf{f}$ não garante que todo número tem um sucessor; ela serve apenas para sabermos quando dois dados objetos são ou não sucessor um do outro.

[63] De fato, para quaisquer dois números naturais $m < n$, tem-se $n \geq 1$.

[64] Esse conceito é o que faz n ser uma unidade maior que m, pois nele se enquadram todos os objetos que se enquadram em $\Phi(\xi)$, exceto $\mathfrak{a}$.

[65] Esta última fórmula é, de fato, o teorema 90 de [10] (segundo [13], pág. 102).

Como podemos então garantir que, para todo número natural, existe outro que o sucede? Dado o ponto de vista de Frege, isso equivale a descobrir, para cada número natural *n*, um conceito em que se enquadrem $n+1$ objetos. Mas que conceito seria esse? A sugestão de Frege, tão interessante quanto sua definição de número associado a um conceito, é a seguinte:

> O sucessor de um número natural *n* é o número associado ao conceito *"pertencer à seqüência de números naturais que termina em n"*.

De fato, consideremos a seqüência dos números naturais: 0, 1, 2, etc. Quantos números pertencem à seqüência de números que termina em 0? Somente um, que é o próprio 0. E quantos pertencem àquela que termina em 1? Dois: 0 e 1. E àquela que termina em 2? 3! Dessa forma, portanto, Frege garante que, a cada número natural, sucede-se outro.[66]

A relação *seguir um objeto numa seqüência*

Para completar a definição acima, porém, precisamos definir precisamente o conceito "pertencer à seqüência de números naturais que termina em *n*". Para tanto, Frege define primeiramente uma relação mais geral: um objeto Θ segue um objeto Δ na seqüência definida por uma relação $T(\xi,\zeta)$[67] se e somente se, para todo conceito $\mathfrak{F}(\xi)$:

1. Se, para todo objeto $\mathfrak{d}$ que se enquadra em $\mathfrak{F}(\xi)$, vale que todo objeto $\mathfrak{a}$ tal que $T(\mathfrak{d},\mathfrak{a})$ também se enquadra em $\mathfrak{F}(\xi)$,
2. e se todo objeto $\mathfrak{a}$ tal que $T(\Delta,\mathfrak{a})$ se enquadra em $\mathfrak{F}(\xi)$,
3. então Θ se enquadra em $\mathfrak{F}(\xi)$.[68]

É interessante observar que a forma dessa definição é bastante similar à do princípio de indução; na realidade, nós podemos dizer informalmente que, pela definição de Frege, se Θ segue Δ segundo $T(\xi,\zeta)$, então nós podemos aplicar o princípio de indução para deduzir que Θ tem uma determinada propriedade.[69]

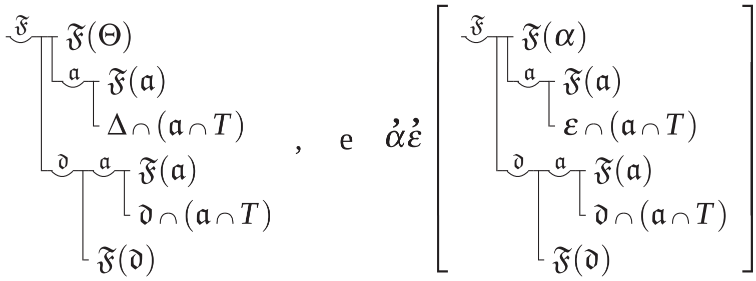
[66] Compare isso com o modo pelo qual Dedekind provou a existência de um conjunto infinito (pág. 20, teorema 66).

[67] A "seqüência" em questão pode ser mais geral que uma ordem linear como a dos números naturais, mas nós nos restringiremos a esse caso particular.

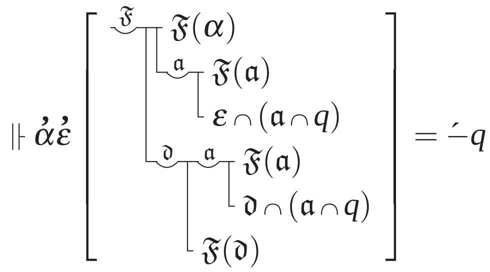
[68] A definição é portanto: Θ segue Δ na seqüência definida por $T(\xi,\zeta)$ se e somente, para todo conceito $\mathfrak{F}(\xi)$, $(1 \wedge 2 \Rightarrow 3)$. (1), (2) e (3) podem ser escritas em linguagem moderna da seguinte forma: (1) $\forall\mathfrak{d}[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}(T(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}))]$, (2) $\forall\mathfrak{a}(T(\Delta,\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}))$ e (3) $\mathfrak{F}(\Theta)$. Nós podemos ainda reescrever informalmente a definição como: Θ segue Δ na seqüência definida por $T(\xi,\zeta)$ se e somente se, para toda propriedade $\mathfrak{F}(\xi)$ que se propaga com a relação $T(\xi,\zeta)$, o fato de todos os elementos com que Δ se relaciona (segundo $T(\xi,\zeta)$) terem a propriedade $\mathfrak{F}(\xi)$ implicar que Θ também tenha essa propriedade.

[69] A analogia só não é completa porque a base do princípio de indução exige que *o primeiro elemento* da seqüência tenha a propriedade em questão, e não *aqueles que o seguem*.

Em símbolos, Θ segue Δ na seqüência definida por $T(\xi, \zeta)$ quando



é o curso-de-valores duplo da relação que obtemos se considerarmos, no lugar de Θ e Δ, argumentos quaisquer ζ e ξ. Se, agora, considerarmos no lugar de T um argumento q qualquer, então podemos finalmente definir:[70]



(K

Assim, por exemplo, "$\Delta \cap (\Theta \cap \acute{\smile} T)$" expressa que Θ segue Δ[71] na seqüência definida pela relação representada por T, e "$\mathbf{0} \cap (\mathbf{1} \cap \acute{\smile} \mathbf{f})$" que $\mathbf{1}$ segue $\mathbf{0}$ na seqüência definida por $\mathbf{f}$.

A relação *pertencer à seqüência de um objeto*

Como podemos então utilizar a função $\acute{\smile}\xi$ para definir o conceito "pertencer à seqüência de números naturais que termina em *n*"? Primeiramente, devemos observar que o sentido da expressão "$\Delta \cap (\Theta \cap \acute{\smile} T)$" pode ser formulado tanto como "Θ segue Δ na seqüência definida por T" quanto como "Δ precede Θ na seqüência definida por T". Assim, portanto,

$$\xi \cap (\Theta \cap \mathbf{f})$$

é o conceito "preceder Θ na seqüência dos números naturais". Este conceito é bastante semelhante àquele que queremos definir, mas não idêntico: todo número que precede *n* na seqüência dos números naturais pertence à seqüência terminada por *n*; entretanto, existe um único número, que é o próprio *n*, que pertence à seqüência terminada por *n* mas que não o precede. Por isso, Frege define a seguinte função:[72]

[70] Frege já havia definido essa relação desde [8] (veja [35], págs. 59 e 60, fórmula 76).

[71] Não necessariamente de forma imediata, ou seja, "$\Delta \cap (\Theta \cap \acute{\smile} T)$" não implica que "$\Delta \cap (\Theta \cap T)$"

[72] Também já definida em [8] (veja [35], pág. 69, fórmula 99).

$$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\, \alpha = \varepsilon \\ \llcorner\!\!\top\, \varepsilon \cap (\alpha \cap \acute{-}q) \end{array} \right) = \acute{\smile} q \qquad (\Lambda$$

Assim, por exemplo, "$\Delta \cap (\Theta \cap \acute{\smile} T)$" expressa que, se Θ não segue Δ na seqüência definida por T, então $\Theta = \Delta$, o que equivale a dizer que Θ pertence à seqüência definida por T com início em Δ, o que, por fim, é o mesmo que dizer que Δ pertence à seqüência definida por T terminando em Θ. Dessa forma, nós podemos finalmente definir o conceito "pertencer à seqüência de números naturais que termina em Θ":

$$\xi \cap (\Theta \cap \acute{\smile} \mathbf{f}).$$

Mais ainda, como $\Theta \cap \acute{\smile} \mathbf{f}$ é o curso-de-valores desse conceito, então $\mathscr{N}(\Theta \cap \acute{\smile} \mathbf{f})$ é o número associado ao conceito em questão, ou seja, o sucessor de Θ. Nós podemos então expressar em símbolos a afirmação "todo número natural tem um sucessor":[73]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, n \cap (\mathscr{N}(n \cap \acute{\smile} \mathbf{f}) \cap \mathbf{f}) \\ \llcorner\, \mathbf{0} \cap (n \cap \acute{\smile} \mathbf{f}). \end{array}$$

Observe que o conceito de número natural de Frege é "estar na seqüência definida por **f** iniciada por $\mathbf{0}$".

[73] A fórmula abaixo aparece na pág. 104 de [13] (mas como ilustração na explicação de Frege sobre a função $\acute{\smile}\xi$, e não como um teorema).

4 O início do século XX

4.1 O paradoxo de Russell

4.1.1 História

Em 1901, Bertrand Russell descobriu o paradoxo que ficou conhecido pelo seu nome:[1]

> *Cantor tinha uma prova de que não existe um número maior que todos os outros, ...*[2]

Teorema: A cardinalidade do conjunto das partes de qualquer conjunto C é estritamente maior que a de C.

Prova: A cardinalidade de $\mathscr{P}(C)$ é maior ou igual à de C, pois a função $u : C \to \mathscr{P}(C) : c \mapsto \{c\}$ é injetiva. Além disso, não existe função bijetiva de C para $\mathscr{P}(C)$: suponhamos, por absurdo, que esse não é o caso, e que f é uma tal função. Consideremos então o conjunto $K = \{c \in C \mid c \notin f(c)\}$, que é elemento de $\mathscr{P}(C)$.[3] Como f é sobrejetiva, existe $k \in C$ tal que $K = f(k)$. Agora, ou $k \in K$ ou $k \notin K$. Suponhamos que a primeira possibilidade é a verdadeira: logo, como todo elemento c de K não pertence a $f(c)$, k não pertence a $f(k) = K$, um absurdo. Logo, $k \notin K$; entretanto, como K possui todo elemento $c \in C$ tal que $c \notin f(c)$, então K possui k, um absurdo. Logo, não pode existir bijeção entre C e $\mathscr{P}(C)$, o que implica que a cardinalidade deste último é estritamente maior que a do primeiro. □

> *... e me parecia que o número de todas as coisas do mundo deveria ser o maior possível. Assim sendo, eu examinei a prova dele em detalhe, e tentei aplicá-la à classe de todas as coisas que existem. ...*

[1] Sobre a descoberta de Russell, veja [21], anotação 1.

[2] Trecho da autobiografia de Russell (veja ⟨`http://www.cut-the-knot.org/selfreference/russell.shtml`⟩). A reconstrução que apresento na seqüência é essencialmente a presente em ⟨`http://www.io.com/~pelliott/pme/russell/`⟩, exceto pelas intercalações com o texto de Russell.

[3] A estratégia que leva à escolha desse conjunto é conhecida como *argumento da diagonal de Cantor*.

Seja T o conjunto de todas as coisas, que podemos especificar como sendo $\{x \mid x = x\}$. Logo, dado qualquer elemento p de $\mathscr{P}(T)$, temos que $p \in T$, o que implica que a cardinalidade de T é maior ou igual que a de $\mathscr{P}(T)$. Isso já implica uma contradição com o teorema acima.

Se, entretanto, seguirmos o curso da prova, colocando T no lugar de C e $i : T \to T : t \mapsto t$ no lugar de f, somos levados ao conjunto $R = \{t \in T \mid t \notin i(t) = t\}$ e ao elemento r de T tal que $R = i(r)$, os quais, pela definição de i, são iguais.

> ... *Isso me levou a considerar aquelas classes que não pertencem a si mesmas, e a perguntar se a classe destas pertence ou não a si mesma. Eu descobri que as respostas implicam uma na outra.*

De fato, como na prova do teorema, em que $k \in K \Leftrightarrow k \notin K$, $R = r \in R \Leftrightarrow r \notin R$. A novidade é, porém, que podemos definir o conjunto $R = \{r \mid r \notin r\}$ independentemente do teorema acima, e, da mesma forma, $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$; daí o paradoxo.

4.1.2 Significância

Era bastante problemático que se pudesse definir um conjunto R tal que $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$: pressupondo-se a lei do terceiro excluído, segundo a qual toda afirmação ou é verdadeira ou falsa, podia-se deduzir $R \in R$ e $R \notin R$, um absurdo.[4] Isso implicava que, na hipótese da validade desta lei, se fosse possível definir o conjunto R, então a teoria em questão seria inconsistente! Agora, a teoria em questão não era senão a Teoria dos Conjuntos, na qual se apoiava a maior parte da Matemática; no caso, portanto, de ela ser inconsistente, as provas matemáticas nela baseadas perderiam confiabilidade, ficando sob suspeita de se basearem em princípios contraditórios entre si.[5]

Uma saída para o problema seria argumentar que não se pode definir o conjunto R em questão. Essa foi, na realidade, a saída escolhida por Georg Cantor, o criador da Teoria dos Conjuntos: antes mesmo de o paradoxo de Russell se tornar público, ele percebeu que a consideração de certos conjuntos levava a contradições. Assim, ele dividiu a noção de "multiplicidade" (totalidade) de objetos em dois tipos: as *multiplicidades consistentes*, totalidades de objetos cuja consideração conjunta não levava a contradições, e as *multiplicidades inconsistentes*, totalidades (como R) de objetos que, se considerados em uma unidade, levavam a contradições;

[4] Sobre as leis do terceiro excluído e da não-contradição, veja [19].

[5] A propósito disso, é sabido que, usando-se as regras de inferência da lógica clássica, toda afirmação segue de uma contradição. Assumindo-se, por exemplo, afirmações P e $\neg P$, podemos derivar uma afirmação qualquer Q da seguinte forma: de P, segue $P \vee Q$, e, desta última e de $\neg P$, segue Q (como mostrado em [21]).

além disso, Cantor somente considerava como *conjuntos* as multiplicidades consistentes. Entretanto, quando podemos dizer que uma multiplicidade leva ou não a contradições? Sob que pressupostos, e através de que regras de inferência? Em particular, como provar que uma dada multiplicidade é consistente? O critério parece difícil de se manipular, se não impreciso, e, por isso, outras formas de se lidar com o paradoxo se faziam necessárias.[6]

4.2 A busca por soluções para os paradoxos

Na primeira década do século XX, a Teoria dos Conjuntos sofria uma crise:

> "Apesar dos grandes avanços que a Teoria dos Conjuntos estava fazendo, a própria noção de conjunto continuava vaga. A situação se tornou crítica depois da aparição do paradoxo de Burali-Forti e intolerável depois daquela do paradoxo de Russell, o último envolvendo as meras noções de conjunto e elemento."—[35], pág. 199.

Como mencionado acima, além do paradoxo de Russell, o de Burali-Forti também era conhecido, e neste último uma contradição surgia da consideração do conjunto de todos os números ordinais.[7] Além disso, ambos deixavam claro que nem todas as "totalidades" podiam ser consideradas conjuntos; mais especificamente falando, não era possível supor que, para toda propriedade $P(x)$, existia o conjunto C_P que continha todos os elementos que possuíam essa propriedade e nenhum outro. O problema era, então, descobrir as propriedades que definiam e as que não definiam conjuntos.

4.2.1 A Teoria dos Tipos de Russell

O próprio Bertrand Russell propôs soluções para os paradoxos, a mais importante das quais se chama *Teoria dos Tipos*.[8] Nela, Russell tenta evitar uma característica compartilhada pelos dois paradoxos mencionados anteriormente e outros mais: a *auto-referência*, ou *reflexividade*. Ele observou que quando se considera uma totalidade, como em "a totalidade T dos objetos x

---

[6]Veja [35], pág. 114, onde Cantor expõe sua distinção, e pág. 131, onde Hilbert a considera imprecisa. É interessante observar, porém, que a distinção entre as totalidades que podem ser consideradas conjuntos e aquelas que são "grandes demais" para isso foi tornada precisa na posterior axiomatização da Teoria dos Conjuntos de John von Neumann (veja a pág. 73).

[7]O artigo de Burali-Forti, que "é a primeira declaração publicada de um paradoxo moderno", está traduzido em [35], págs. 104–112.

[8]Reproduzido em [35], págs. 150–182.

tais que $P(x)$”, um objeto é envolvido nessa consideração que pode estar entre aqueles considerados na definição da totalidade T, e isso pode gerar contradições. No caso do paradoxo de Russell, por exemplo, ao considerarmos como sendo um conjunto a totalidade R dos conjuntos C tais que $C \notin C$, o próprio R, sendo um conjunto, está entre os objetos matemáticos C para os quais devemos saber se $C \in C$ ou não, e acabamos por verificar que cada uma das possibilidades nos leva a concluir a sua negação. No caso do paradoxo de Burali-Forti, ao considerarmos a totalidade dos números ordinais como formando um conjunto C, obtemos a partir deste um número ordinal Ω, que deveria ser maior que todos os elementos de C e que, por ser um número ordinal, também pertenceria a C, donde concluimos que Ω deveria ser maior do que a si mesmo. É importante ressaltar que o acima referido “objeto envolvido na consideração da totalidade dos objetos tais que etc” não necessariamente é um conjunto: neste segundo caso, por exemplo, se tratava de um número ordinal, e, no caso da definição

> “Um número é *finito* se e somente se possui todas a propriedades ϕ possuídas apenas por zero e seus sucessores.”,

consiste na propriedade P “ser uma propriedade ϕ possuída apenas por zero e seus sucessores”— veja que nós podemos perguntar “a propriedade P possui a propriedade P?”; era nesse tipo de consideração reflexiva que Russell acreditava se encontrar o problema.

Por causa disso, Russell quis fazer com que, sempre que uma expressão se referisse à “coleção de todos os objetos tais que etc”, essa coleção não pudesse estar entre os objetos por ela mesma possuídos, e, para efetivar essa restrição, propôs a *Doutrina* ou *Teoria dos Tipos*. No que diz respeito à Teoria dos Conjuntos, essa teoria associava, a cada conjunto, um tipo, e fazia duas exigências:

1. Todos os elementos de um conjunto deveriam ser de um mesmo tipo.

2. O tipo de um conjunto deve ser maior que o dos seus elementos.

Assim, toda vez que fosse construído um “conjunto de todos os x tais que etc”, este teria um tipo superior ao de seus elementos, não podendo portanto estar entre eles; isto imediatamente impede a existência dos conjuntos que contêm “todos os conjuntos” e “todos os conjuntos que não contém a si mesmos”, evitando assim os paradoxos neles baseados. É interessante observar que as exigências acima a respeito dos tipos são mais fortes do que a simples restrição de que “um conjunto não pode conter a si mesmo”: esta última não exclui, *a priori*, a possibilidade de um conjunto A ser elemento de um conjunto B e de este, por sua vez, ser elemento do primeiro, ao passo que as condições acima tornam impossível tal configuração. Generalizando essa observação, a condição 2 acima implica que, para qualquer seqüência de conjuntos $C_1 \in C_2 \in \cdots \in C_n$, $i \neq j \Rightarrow C_i \neq C_j$.

A teoria previa também o primeiro tipo, ou o tipo mais baixo: aqueles que dele fossem seriam, portanto, os elementos dos conjuntos do segundo nível, os quais, por sua vez, pertenceriam aos conjuntos de terceiro nível, e assim por diante. O próprio Russell, porém, afirmou que o que era relevante do ponto de vista da Matemática eram os *tipos relativos* entre os conjuntos, isto é, a relação de superioridade entre os tipos a eles associados. A propósito disso, é interessante destacar que, seguindo a distinção entre os tipos, Russell distinguia também entre as proposições: aquelas cujas variáveis se referiam a objetos do primeiro tipo eram chamadas *proposições de primeira ordem*; aquelas que se referiam a objetos do segundo nível, *proposições de segunda ordem*, e assim por diante. Daí vieram a se originar as classes de lógicas modernas: nas lógicas de primeira ordem, as variáveis quantificadas indicam elementos do domínio; nas de segunda ordem, há também as variáveis que denotam conjuntos de elementos do domínio, e assim por diante.

4.2.2 As teorias axiomáticas dos conjuntos

Outra importante proposta de solução para os paradoxos da Teoria dos Conjuntos foram as *teorias axiomáticas dos conjuntos*. A primeira delas foi proposta por Ernst Zermelo em 1908, o mesmo ano em que Russell propôs a sua Teoria dos Tipos.[9] Como vimos anteriormente, a situação criada pelos paradoxos exigia que fosse especificado quais propriedades definiam e quais não definiam conjuntos; além disso, o próprio conceito de conjunto dado por Cantor era impreciso: “uma coleção, considerada como um todo (isto é, um único objeto), de certos objetos bem determinados das nossas percepção ou pensamento”.[10] A abordagem axiomática veio justamente para eliminar estas imprecisões: ela deixava de lado a tarefa de definir *o que eram* conjuntos, se restringindo a especificar *quais existiam* e *que propriedades* eles tinham.[11]

Os axiomas de Zermelo eram apenas sete, dos quais o terceiro, o *axioma da separação*,

[9] Tradução do artigo em [35], págs. 199-215.

[10] [35], pág. 200.

[11] Essa abordagem é análoga à adotada por Peano em relação aos números naturais (veja a seção 2.2, pág. 31). Este é, na verdade, um traço característico do método axiomático: os conceitos primitivos são deixados indefinidos, sendo caracterizados apenas pelas propriedades a eles impostas através dos axiomas; estas, por sua vez, passam a ser os únicos pressupostos em que um argumento pode se basear para chegar a alguma conclusão. Nesse sentido, conceitos passam a ser, de certa forma, apenas *termos*, destituídos de qualquer significado. Naturalmente, ainda se pode atribuir sentido a eles, mas isso passa a se dar por meio de uma *interpretação*; além disso, interpretações diferentes podem atribuir significados diversos a um mesmo conceito. Um bom exemplo desse fato é encontrado na teoria dos grupos: formalmente, um *grupo* é definido como uma estrutura matemática que satisfaz 3 axiomas básicos “abstratos”, mas eles podem ser interpretados em termos de números inteiros, matrizes e diversos outros objetos matemáticos.

era particularmente importante no que dizia respeito aos paradoxos: basicamente, dados um conjunto C e uma propriedade P, ele garantia a existência de um subconjunto C_P de C que contivesse exatamente os elementos de C que possuíssem a propriedade P. Esse axioma era o substituto do pressuposto pré-axiomático de que a cada propriedade correspondia um conjunto: observe que ele garante a existência do conjunto C_P desejado, mas somente no caso em que já se conhece um conjunto C contendo todos os elementos que devem estar em C_P e possivelmente outros; isso impedia a definição de um conjunto a partir apenas de uma propriedade, evitando assim a construção daqueles que levavam aos paradoxos. Outros axiomas também garantiam a existência de um conjunto a partir de outros já conhecidos, mas apenas dois asseguravam independentemente a existência de algum conjunto. Um deles, o segundo, garantia a existência do conjunto vazio, e, a partir deste, por meio também dos demais axiomas, uma infinidade de outros conjuntos passava a existir. Por si só, porém, isso ainda não garantiria a existência de um conjunto infinito: para tanto, havia o *axioma da infinidade*, número sete, que garantia a existência de um conjunto Z que possuísse pelo menos o conjunto vazio e, para cada elemento A seu, também o conjunto $\{A\}$; Z possuía portanto pelo menos os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, etc.[12]

A axiomatização de Zermelo tinha, entretanto, suas limitações. Uma delas dizia respeito à ausência de conjuntos cuja existência seria esperada: se chamarmos de Z_0 o conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\ldots\}$ e de Z_{i+1} o conjunto $\mathscr{P}(Z_i)$, então cada um dos conjuntos $Z_0,Z_1,Z_2,\ldots$ tinha existência garantida pelos axiomas, mas não o conjunto $\{Z_0,Z_1,Z_2,\ldots\}$. Outra limitação dizia respeito ao axioma da separação: nele, Zermelo fazia menção ao conceito de *propriedade definida*, o qual era importante para eliminar certas classes de paradoxos e que ele definia de forma bastante imprecisa. Emendas para ambas as limitações foram propostas por Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem, dando assim origem à teoria hoje conhecida como ZFC.[13]

Em 1925, John von Neumann propôs outra axiomatização para a Teoria dos Conjuntos,[14] cujo objetivo era "dar uma apresentação axiomática logicamente inquestionável da teoria dos conjuntos".[15] Um dos pontos em que se podia argumentar contra a axiomatização de Zermelo era a inexistência de certas "totalidades": nela, era possível se provar, por exemplo, que não existia um conjunto que possuísse todos os conjuntos; assim, não havendo objetos de outro

---

[12] Zermelo deveu esse axioma a Dedekind, por causa do seu teorema 66 (veja a pág. 20).

[13] As iniciais de *Zermelo*, *Fraenkel* e *Choice*, esta última palavra em referência ao axioma da escolha (número seis na axiomatização de Zermelo). Alguns dos principais artigos em que esses 3 pesquisadores apresentaram suas contribuições estão traduzidos em [35], iniciando nas páginas 199, 284 e 290.

[14] Tradução em [35], págs. 393–413.

[15] "O sistema apresentado por von Neumann ([35], págs. 393–413) foi simplificado, revisado e expandido por R. M. Robinson (1937), Bernays (1937–1954, 1958) e Gödel (1940), e veio a ser conhecido como a teoria dos conjuntos von Neumann–Bernays–Gödel", ou simplesmente NBG ([35], pág. 394).

tipo, a essa totalidade simplesmente não se era possível referir. Esta situação era diferente, por exemplo, daquela na teoria de Cantor, onde, embora houvesse imprecisão na distinção, haviam as multiplicidades consistentes e as inconsistentes, e portanto não apenas os conjuntos de fato. A axiomatização de von Neumann deu substância a esta distinção, que posteriormente ficaria conhecida como aquela entre *conjuntos* e *classes*; em particular, todo conjunto era também uma classe, mas algumas classes, como a de todos os conjuntos e a de todos os números ordinais, não eram conjuntos. Outra importante vantagem da axiomatização de von Neumann em relação à de Zermelo estava no número finito dos seus axiomas—o “axioma da separação” de Zermelo era, na realidade, um infinito *esquema de axiomas*, já que, para cada propriedade P, haveria uma versão do axioma para ‘separar’ C_P de C.[16]

4.3 Correntes de pensamento sobre os fundamentos da Matemática

No início do século XX, houve intenso estudo sobre os alicerces em que se apoiava a Matemática. Em grande parte, tais estudos consistiam numa continuação natural do desenvolvimento da Matemática durante o fim do século XIX, pois foi nessa época que o conceito de número real foi definido em termos do de número natural, que este por sua vez foi definido em termos de conjuntos e que a teoria destes últimos foi estabelecida. Entretanto, a necessidade de se investigar os pressupostos matemáticos mais básicos foi tornada urgente quando os paradoxos da Teoria dos Conjuntos vieram à tona: afinal, eles colocavam em dúvida a própria credibilidade dos resultados da Matemática, aos quais normalmente estavam associadas certeza e correção.[17] Assim, foi iniciada uma busca por meios de se conferir maior segurança aos teoremas matemáticos, e através dela surgiram importantes correntes de pensamento a respeito dos fundamentos dessa ciência.

4.3.1 O logicismo de Frege e Russell

O *logicismo* é uma corrente de pensamento que defende a tese de que as verdades da Matemática são também e apenas verdades da Lógica, no sentido de poderem ser verificadas sem a necessidade de se recorrer aos fatos que ocorrem no mundo. Em seus trabalhos, Frege enuncia essa tese para o caso particular da Aritmética, e, na tentativa de verificá-la, foi levado a criar

[16]Não é possível, entretanto, se obter um conjunto finito de axiomas que seja logicamente equivalente a ZFC. (Richard Montague, *Contributions to the Axiomatic Foundations of Set Theory*, 1957, Universidade da Califórnia em Berkeley, tese de doutorado.)

[17]Veja, por exemplo, o comentário de Hilbert em [35], pág. 375, penúltimo parágrafo.

a sua *Begriffsschrift*. Entretanto, Russell descobriu que o sistema formal desta última, na sua versão mais elaborada [10], era inconsistente. A falha descoberta por Russell foi a de que o paradoxo que leva o seu nome podia ser reproduzido no formalismo em questão: assim como não se pode associar a toda propriedade o conjunto dos elementos que a possuem, também a estipulação de Frege de que a toda função de primeiro nível corresponde um curso-de-valores (extensão) leva a uma contradição. Frege chegou a propor uma modificação do seu axioma V, onde residia o problema, mas esta foi posteriormente demonstrada ser insuficiente para conferir consistência ao sistema.[18]

A inconsistência descoberta no sistema de Frege destruiu aquilo que ele tencionava que fosse uma vindicação concreta da tese logicista, uma vez que a transição de um conceito à sua extensão era central na sua proposta de fundamentação para a Aritmética. Entretanto, outros apresentaram propostas de contorno aos paradoxos na Teoria dos Conjuntos, e, dentre esses, Russell utilizou a sua (Teoria dos Tipos) para continuar em busca de uma tal demonstração. O resultado dessa busca veio a ser a obra *Principia Mathematica* [27], co-escrita com o seu antes orientador e depois colaborador Alfred Whitehead. Seus três volumes foram publicados de 1910 a 1913 e continham deduções rigorosas de resultados da Teoria dos Conjuntos, da Aritmética e da Análise, entre outros assuntos, todas baseadas num pequeno conjunto de axiomas. Em relação aos trabalhos de Frege, as demonstrações lá presentes eram, no conjunto, bem menos rigorosas, mas, por outro lado, apresentadas em notação superior.[19] Essa obra foi um marco para a Lógica Matemática, em particular, por ter sido uma demonstração vasta do poder expressivo da lógica formal, e por essa mesma razão serviu de estímulo para o estudos posteriores sobre sistemas formais em geral. Enquanto defesa da tese logicista, entretanto, os *Principia* não alcançaram o objetivo planejado. A razão foi que dois dos pressupostos em que eram baseadas as suas deduções, os *axiomas da infinidade e da reducibilidade*, foram de forma geral considerados como não sendo de caráter puramente lógico.[20]

Com a falha da obra de Russell e Whitehead em atingir o ideal logicista, a possibilidade da sua realização continuou sem prova. É interessante observar que as falhas das duas tentativas logicistas acima mencionadas estão diretamente ligadas. Frege tinha plena consciência de que, para se atingir o seu propósito, a existência de infinitos números era algo que tinha que ser

[18]Isso foi feito por Stanisław Leśniewski, após o falecimento de Frege (veja [13], pág. *xlviii*, e ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frege.html`⟩). A comunicação entre Russell e Frege sobre a descoberta do paradoxo é reproduzida em [35], págs. 124–128, e a discussão feita por Frege sobre a inconsistência do seu sistema em [13], págs. 127–143.

[19]Veja [13], pág. vi, e [20], *significance of Principia Mathematica*.

[20]Isto é, foram considerados como expressando afirmações para as quais faltava uma justificativa que não recorresse a verificações de fatos que ocorrem no mundo. Isto é particularmente fácil de se verificar quanto ao axioma da infinidade, que basicamente afirma que existe uma quantidade infinita de objetos distintos.

provado.[21] De fato, a sua teoria apresenta uma tal prova, que entretanto se baseia em um axioma forte demais, no sentido de que leva a contradições. Já nos *Principia*, a não obtenção de uma maneira de se provar a existência de infinitos números partindo-se de pressupostos puramente lógicos levou à necessidade de se incluir esse fato entre os axiomas da teoria, o que consistia numa violação imediata às restrições logicistas.[22] É interessante ainda comparar esta última situação com aquela da teoria axiomática dos conjuntos proposta por Zermelo. Nesta, o axioma da infinidade também estava presente, e, entretanto, isso não ia contra os objetivos da teoria. A razão para tanto é que o objetivo de uma teoria axiomática dos conjuntos é fornecer pressupostos (sobre conjuntos) que sejam suficientes para servir de base para o desenvolvimento desta e outras teorias matemáticas—naturalmente, esses axiomas devem também ser consistentes, pois não se deseja ter teorias baseadas em suposições contraditórias. Dessa forma, os pressupostos de uma teoria axiomática sobre conjuntos—ou números naturais, ou grupos, ou quaisquer outros objetos matemáticos—estão sujeitos à restrição de serem *matematicamente plausíveis*, isto é, de, por assim dizer, consistirem em verdades matemáticas básicas, o que, a priori, não os obriga a serem considerados também *logicamente plausíveis*, ou seja, verdades lógicas básicas.[23]

4.3.2 O programa formalista de Hilbert

Em 1899, o matemático alemão David Hilbert propôs uma axiomatização rigorosa para a Geometria, apresentando também uma *prova relativa de consistência* desta em relação à Análise.[24] Em 1900, Hilbert apresentou uma axiomatização também para a Análise, cuja consistência poderia ser reduzida àquela da Aritmética. No caso desta última, porém, outra prova relativa de consistência parecia bem mais difícil de se obter, pela falta de uma teoria mais sim-

[21] Veja [12], pág. 91.

[22] Em [35], pág. 182, há um comentário de Russell a respeito da impossibilidade de se provar a existência de uma classe infinita a partir apenas dos pressupostos da Teoria dos Tipos.

[23] À luz desse contraste, portanto, fica claro que a tese logicista de que “a Matemática é parte da Lógica” é mais forte que a de que simplesmente a prática matemática consiste num desenvolvimento lógico baseado em pressupostos matemáticos. Para verificar esta última, seria suficiente uma reescrita dos teoremas matemáticos existentes estritamente baseada em axiomas matemáticos (como, por exemplo, os de ZFC) e regras de inferência conhecidas da lógica. Em vista dos *Principia Mathematica* e outras obras do gênero, como a mais recente série de livros do grupo Bourbaki, a possibilidade de uma tal reescrita parece bastante plausível, sendo as dificuldades envolvidas de ordem basicamente prática, associadas à extensão de uma tal empreitada.

[24] Em outras palavras, ele mostrou que, se uma contradição pudesse ser derivada a partir dos seus axiomas para a Geometria, então uma também poderia ser encontrada na Análise. Essa obra (que já está em domínio público: ⟨`http://www.gutenberg.org/etext/17384`⟩) foi de grande importância para a Geometria, em particular devido à sua abordagem puramente axiomática. Por sua vez, a abordagem axiomática de Hilbert, que viria a ser central também em seus trabalhos futuros, foi fortemente influenciada por Moritz Pasch, matemático alemão que defendeu o método axiomático como forma de eliminar pressupostos intuitivos das deduções matemáticas e assim esclarecer as relações de dependência lógica entre os seus passos (veja [32], *axiomatics perfected*).

ples à qual se realizar uma redução.[25] Assim, Hilbert passou a buscar uma *prova direta de consistência* para a Aritmética, tendo inclusive incluído a questão na sua famosa lista dos principais problemas matemáticos da época, também apresentada em 1900 [16]. Pouco depois, entretanto, o paradoxo de Russell ficou publicamente conhecido, e com isso o problema da consistência da Matemática mais alarmante. Em 1904, Hilbert apresentou um esboço do seu ponto de vista a respeito de como o problema deveria ser abordado, ponto de vista esse que ele viria a novamente apresentar, desta vez de forma desenvolvida, numa série de artigos de 1917 até o fim da década seguinte.[26]

Hilbert acreditava (segundo ele, seguindo Kant) que o conteúdo da Matemática tem verdade garantida independentemente da Lógica, e que, em vista disso, esta não poderia por si só garantir a correção dos resultados daquela—sua tese era, portanto, contrária àquela do logicismo. Ele acreditava que as contradições encontradas na Teoria dos Conjuntos tiveram origem em usos ilegítimos das regras de inferência da lógica, mais especificamente, na não observação de condições necessárias para o seu uso. Para explicar o seu ponto de vista, ele faz uso de exemplos elementares da Aritmética. Nesta, argumenta ele, os objetos de estudo são os *numerais*, como "1", "11" (2) e "11111" (5),[27] e nós também fazemos uso de símbolos como "+", "=" e "$>$" para transmitir informações. Assim, por exemplo, "$2+3$" representa o numeral que se obtém pela justaposição dos numerais "11" e "111" ("11111"), "$3=2+1$" comunica o fato de que "3" e "$2+1$" representam o mesmo numeral ("111") e "$4>2$" que "11" (2) é um segmento próprio de "1111" (4). Agora, a correção de fórmulas como "$4=2+3$" (falsa) e "$5>2$" (verdadeira) é prontamente *verificável*, pois, mesmo que as expressões fossem extensas, a tarefa indubitavelmente consistiria numa aplicação *finita* de passos de verificação.[28] Era sobre premissas dessa natureza que Hilbert achava que devia ser aplicada uma inferência, se esta devia ser considerada segura:

> "Se inferência lógica é para ser confiável, tem que ser possível examinar esses objetos completamente em todas as suas partes, e o fato de que eles ocorrem, de que eles diferem um do outro, de que eles seguem um ao outro, ou estão concatenados, é imediatamente dado intuitivamente, juntamente com os objetos, como algo que nem pode ser reduzido a alguma outra coisa nem requer redução." ([35], pág. 376).

[25] Em vista da teoria aritmética de Dedekind, poder-se-ia argumentar que uma redução poderia ser feita à Teoria dos Conjuntos. Isso veio, de fato, a ser feito por Zermelo (1909), mas a dificuldade se transfere então para esta teoria.

[26] Alguns desses artigos estão em [35], págs. 129–138, 367–392 e 464–479.

[27] 1. Esta concepção de Hilbert, de que os numerais são os objetos em consideração e de que em si eles não têm significado algum, é contrária à de Frege: compare [35], p. 377, e [13], págs. 10,1 e 32. 2. Hilbert considera numerais como "2" e "5" como sendo abreviações.

[28] Outro exemplo de expressão de caráter finitário é "$P(30)$", com "P" representando o predicado "ser um número primo" ([37], 2.2).

Ainda assim, entretanto, nem toda inferência lógica aplicada a premissas consideradas como sendo de caráter finitário leva a conclusões da mesma natureza. Hilbert cita o seguinte exemplo: se $\mathfrak{p}$ é um número primo qualquer, digamos, 3, então é possível provar por meios finitários a afirmação “existe um número primo $\geq \mathfrak{p}+1$ e $\leq \mathfrak{p}!+1$”. No caso, a aplicação da quantificação existencial (existe x tal que $\ldots$) é limitada, e deve ser encarada como uma abreviação de “ou 4 $(= 3+1)$ é primo, ou 5 é primo, ou 6 é primo ou 7 $(= 3!+1)$ é primo”; atente para o fato de que esta última afirmação é imediatamente verificável. Agora, tentemos aplicar à primeira afirmação o conhecido método de inferência pelo qual podemos inferir “A” a partir de “$A \wedge B$”: isso nos leva à afirmação “existe um número primo $\geq \mathfrak{p}+1$”. Esta inferência, apesar de poder parecer inofensiva, nos levou a uma afirmação que não é finitariamente verificável, uma vez que é impossível analisar-se todos os números naturais em uma quantidade finita de passos.

Para contornar o problema em questão, Hilbert propõe uma atitude análoga a outras encontradas na Matemática: a introdução de *objetos ideais*. Como exemplo, ele cita o caso da geometria bidimensional (entre outros): inicialmente, os únicos objetos realmente existentes são os pontos e as retas. Em particular, é verdadeiro o fato de que, dadas duas retas (distintas), elas têm no máximo um ponto em comum, embora existam aquelas sem interseção alguma (paralelas). Daí, são acrescentados ao sistema pontos e uma reta “no infinito”, de forma que, para todo par de retas (distintas), passa a haver exatamente um ponto de interseção. Com isso, além de as relações de conexão ficarem mais simples (sem exceções), obtém-se também uma simetria entre ponto e reta—já que também entre cada dois pontos (distintos) passa exatamente uma reta—a partir da qual se chega ao importante Princípio da Dualidade da Geometria. Hilbert propõe então que, de forma análoga, em adição às *proposições matemáticas finitárias*, sejam consideradas também *proposições matemáticas ideais*, às quais nenhum significado *finitário* estaria associado. Assim, dois objetivos poderiam ser alcançados ao mesmo tempo: primeiramente, utilizando-se as regras de inferências de um cálculo lógico formalizado, aplicadas a axiomas lógicos *e axiomas aritméticos*, as provas matemáticas poderiam ser desenvolvidas de forma rigorosa; em segundo lugar, as regras de inferência desse cálculo poderiam ser aplicadas normalmente, sem a restrição de sempre levar a sentenças finitárias.

Agora, dada a decisão acima de se considerar também as proposições matemáticas não finitárias, o propósito de Hilbert, como até aqui apresentado, pode parecer simplesmente o de embutir a Aritmética numa lógica formalizada, incluindo nessa formalização os axiomas matemáticos próprios daquela teoria; em particular, o ponto de vista finitário pode parecer descartável, e a doutrina de Hilbert apenas uma modificação do logicismo. Isso, entretanto, está longe de ser verdade. Hilbert sabia que, ao decidir pelo uso de um sistema lógico formal, ele estava essencialmente escolhendo utilizar uma forma estritamente rigorosa do método axiomático. Além disso, nenhuma axiomatização, por mais rigorosa que seja, está livre de contradições: a própria obra de Frege é um exemplo desse fato. Além da reescrita formal, portanto, se fazia necessária uma *prova de consistência*. Nesse momento, voltamos a um ponto anterior, em que era procurada uma prova de consistência para a Aritmética. Hilbert tem então uma percepção fundamental: ele verifica que, uma vez que uma teoria se encontra formalizada, é possível considerá-la não mais do ponto de vista que engloba os seus objetos e as relações entre eles, mas sim de um ponto de vista "superior", em que os objetos passam a ser *os próprios símbolos do cálculo formal*, e entre os quais passam a se dar as relações que são alvo de estudo. Surge então o conceito de *metamatemática*: uma teoria matemática cujo objeto de estudo é a própria matemática formalizada. Ainda assim, porém, restava a questão de como se provar a consistência de uma teoria aritmética formalizada. Hilbert então observou que, em uma teoria contraditória, tomando-se por base as regras de inferência clássicas, toda afirmação se torna um teorema. Uma maneira, portanto, de se verificar a consistência de uma teoria seria descobrir se ela possui toda afirmação como teorema. Aplicando-se, então, essa idéia à Aritmética, podemos concluir que ela seria consistente se e somente se, digamos, "$1 = 2$" não fosse um teorema seu. A tarefa estava, então, caracterizada.

Para Hilbert, porém, restava ainda um problema: uma prova de consistência da aritmética formalizada seria em si mesma uma prova matemática, a qual recorreria aos próprios fatos matemáticos cuja confiabilidade estava posta em questão, e pelo quê uma prova de consistência estava sendo procurada. Havia, portanto, a possibilidade de a Matemática ser de fato inconsistente, e de, por esse mesmo motivo, uma prova de consistência (baseada em princípios contraditórios) ser encontrada. É então que o ponto de vista finitário volta a ser de importância: se, por um lado, as inferências matemáticas em geral estavam sob suspeita, por outro, as conclusões a que se podia chegar por meio de afirmações estritamente finitárias pareciam ser incontestáveis. Assim, uma *prova finitária de consistência da aritmética formalizada* seria uma demonstração última da correção dessa teoria.

Com essa discussão, a proposta de Hilbert foi então apresentada. Em resumo, os seus objetivos eram:

1. Realizar uma reescrita formal da Aritmética.

2. Obter uma prova finitária de consistência da aritmética formalizada.

É interessante observar que, desse ponto de vista, o primeiro objetivo foi inusitadamente útil, uma vez que o propósito de uma reescrita formal dos teoremas da Aritmética deu objetividade à idéia de uma prova de consistência—afinal, sem a consideração de um sistema formal, composto por um conjunto de símbolos fixo e regras de inferência bem determinadas, a própria concepção de uma prova de consistência é dificultada. Outro fato digno de menção é o seguinte: uma prova finitária de consistência da aritmética formalizada poderia ser também um resultado pertencente à própria Aritmética, dependendo dos conceitos a que ela recorressse; nesse caso, ela seria então uma prova de *auto-consistência da Aritmética*.

A doutrina acima exposta ficou conhecida como *o programa de Hilbert*. O conceito de metamatemática nela desenvolvido e as suas investigações sobre questões de consistência, completude e independência consistiram no início da área que ele mesmo batizou de *Teoria da Prova*.[29] O objetivo último da doutrina, entretanto, uma prova finitária de consistência da aritmética formalizada, foi demonstrado ser inatingível no início da década de 1930, como veremos na seqüência.

[29] Veja [35], pág. 473: "… *according to my proof theory…*".

5 A década de 1930

Neste capítulo, são analisados dois importantes trabalhos de Gödel e Turing, os quais forneceram respostas às duas principais questões do programa de Hilbert.

5.1 A incompletude de Gödel

> *O desenvolvimento da matemática rumo a uma maior precisão levou ... à formalização de grandes partes suas, de forma que se pode provar qualquer teorema usando nada além de umas poucas regras mecânicas. Os sistemas formais mais abrangentes que foram organizados até aqui são o sistema do* Principia Mathematica ... *e o sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjuntos ... Esses dois sistemas são tão abrangentes que neles todos os métodos de prova hoje utilizados na matemática estão formalizados, isto é, reduzidos a uns poucos axiomas e regras de inferência. Poder-se-ia então conjecturar que esses axiomas e regras de inferência sejam suficientes para decidir qualquer questão matemática que possa ser formalmente expressa nesses sistemas. Será mostrado abaixo que esse não é o caso...* ([35], págs. 596,7).

Em 1931, o matemático austríaco Kurt Gödel publicou um artigo intitulado "Sobre proposições formalmente indecidíveis do *Principia mathematica* e sistemas relacionados I" [14]. Esse trabalho posteriormente seria reconhecido como um marco na história da Lógica Matemática, tanto pelos importantes e fecundos resultados nele contidos quanto pelos métodos utilizados para obtê-los, que vieram a se tornar ferramentas padrão na área. Em particular, ele mostrou que o objetivo principal do programa de Hilbert, uma prova finitária de consistência da aritmética formalizada, era inatingível. Na seqüência, apresento a idéia geral da argumentação e pontos importantes relacionados.

5.1.1 Numeração de Gödel

Como mencionado anteriormente (pág. 79), os objetos de estudo da metamatemática são as provas matemáticas formalizadas, as quais, em última análise, consistem em seqüências de símbolos. Gödel concebeu então uma maneira conveniente de se lidar com esses objetos: a eles seriam associados números, e estes seriam manipulados no lugar daqueles.[1] Para que isso fosse viável, entretanto, três condições teriam que ser satisfeitas: (1) para que não houvesse ambigüidade, objetos metamatemáticos distintos deveriam ser associados a números também distintos; (2) dado um número qualquer, deveria ser possível descobrir se ele estava associado a algum objeto, e, nesse caso, que objeto seria esse; por fim, e principalmente, (3) a numeração deveria ser 'estruturada' o suficiente para garantir a manipulabilidade dos números resultantes. Como a terceira condição foi satisfeita será mostrado no tópico seguinte; com relação às duas primeiras, observemos primeiramente que provas formalizadas podem ser consideradas como sendo seqüências de fórmulas, e que estas por sua vez são apenas seqüências de símbolos. Gödel então associou um número distinto a cada símbolo que poderia ocorrer numa fórmula:[2]

Símbolo:	0	f	$\neg$	$\vee$	$\forall$	$($	$)$
Número:	1	3	5	7	9	11	13

Em adição aos símbolos acima, variáveis também poderiam ocorrer, e a cada uma das infinitas delas foi associado um número primo maior que 13: x_1 - 17, x_2 - 19, etc.[3] Dado um número qualquer, portanto, era possível saber se ele estava a associado a algum símbolo e, estando, que símbolo era esse.

Para se numerar as fórmulas, a principal dificuldade reside em se encontrar uma maneira de combinar os números associados aos símbolos que as compõem de forma a associar números diferentes a fórmulas diferentes. Gödel fez então uma bela aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética:[4] dada uma fórmula consistindo na seqüência de símbolos $s_1 s_2 \ldots s_k$, chamando-se de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ os números associados a esses símbolos, podemos associar o número $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ à formula em questão, com p_i representando o i-ésimo número primo. Utilizando-se essa atribuição, quaisquer duas fórmulas de tamanhos distintos são associadas

[1] A "conveniência" seria manipular objetos de propriedades bem conhecidas (os números naturais).

[2] Veja [35], pág. 601. O formalismo utilizado no artigo de Gödel foi basicamente aquele do *Principia mathematica*. Na tabela acima, '$\neg$' e '$\forall$' são os equivalentes modernos dos originais '$\sim$' e '$\prod$', e f representa a função sucessor dos axiomas de Peano (veja a pág. 32).

[3] Isso é, na verdade, uma simplificação da numeração original, pois as variáveis do formalismo de Gödel possuíam cada uma um *tipo*, que era um número natural e também era codificado. Para a presente exposição, porém, isso é irrelevante.

[4] Esse teorema afirma que todo número natural pode ser unicamente decomposto como um produto de potências de números primos.

a números também distintos, assim como quaisquer fórmulas ϕ e ψ de mesmo tamanho mas distintas, já que estas certamente diferem em pelo menos 1 símbolo, e portanto os números a elas associados diferirão no expoente de pelo menos 1 número primo; além disso, é possível verificar quando um número natural qualquer consiste num produto de potências de k primeiros números primos, para algum k, e quando os expoentes dessas potências correspondem aos símbolos do formalismo.

Numeradas as fórmulas, resta apenas numerar também as provas. Agora, como uma prova consiste numa seqüência de fórmulas e como a cada fórmula já foi associado um número, pode-se simplesmente repetir o procedimento utilizando anteriormente: dada uma prova consistindo numa seqüência de fórmulas $f_1 f_2 \ldots f_k$ e sendo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ os números associados a essas fórmulas, podemos associar o número $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ à prova em questão. Como antes, a numeração é inambígüa, e, dado um número n qualquer, é fácil descobrir se ele está associado a alguma prova ou não, e, estando, quais são as fórmulas que a compõem. Nesso momento é possível perceber-se a beleza da estratégia em questão: ela pode ser aplicada iterativamente a tantos níveis quanto se queira, e por isso vai além até mesmo da necessidade presente.[5]

5.1.2 Funções recursivas primitivas

Foi mostrado acima como os objetos de estudo da metamatemática podem ser mapeados nos números naturais. A tarefa seguinte é, intuitivamente, descobrir como manipular tais números tendo em vista os objetos por eles representados. Gödel o fez através das *funções recursivas primitivas*, que ele chamava simplesmente de “recursivas”. Essas funções apareceram inicialmente na teoria aritmética de Dedekind, quando ele mostrou que especificações recursivas sobre os números naturais determinavam funções sobre esses números de forma consistente e única.[6] Aplicado ao caso particular da Aritmética, o resultado mostrado por Dedekind foi o de que, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, existe uma e apenas uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} \varphi(0) = n \\ \varphi(i+1) = \mu(\varphi(i)) \end{cases}$$

Agora, na teoria de Dedekind, a única função $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inicialmente conhecida é aquela associada à própria definição do conjunto $\mathbb{N}$, que é a função sucessor (veja a pág. 22, def. 73).

[5] É interessante observar ainda que, por essa mesma estratégia ou alguma obtida modificando-a ligeiramente, é possível obter-se numerações que não apenas associam números diferentes a objetos diferentes mas pertencentes a um mesmo ‘nível’ (o nível dos símbolos, o nível das fórmulas, o nível das provas, etc), mas que também associam números diferentes a objetos diferentes quaisquer, isto é, não necessariamente pertencentes a um mesmo nível.

[6] Veja o teorema 126, pág. 25, e também o comentário em [35], pág. 493.

Assim, as funções que inicialmente se pode obter pelo esquema acima são determinadas exclusivamente pela escolha do número n. Contudo, uma vez que esse primeiro grupo de funções é obtido, pode-se com base nelas definir novas funções, as quais por sua vez levam a outras mais e assim sucessivamente. Assim, por exemplo, dado $k \in \mathbb{N}$, é possível obter-se a função k^x exclusivamente por meio desse esquema de recursão:[7]

$$\begin{cases} +k(0) = k \\ +k(i+1) = (+k(i))' \end{cases} \begin{cases} \times k(0) = 0 \\ \times k(i+1) = +k(\times k(i)) \end{cases} \begin{cases} k^\wedge(0) = 1 \\ k^\wedge(i+1) = \times k(k^\wedge(i)). \end{cases}$$

O exemplo acima mostra que diversas funções podem ser criadas desta maneira, mas também deixa claro que a restrição a funções de uma única variável é indesejável. Vimos acima, por exemplo, que é possível, fixado um $k \in \mathbb{N}$, obter-se a função que soma k a qualquer número natural, mas isso é bastante diferente de possuirmos uma função $+(x,y)$ que calcula a soma de qualquer par de números naturais.

Posteriormente, Thoralf Skolem desenvolveu o estudo das funções obtidas por esquema de recursão. Diferentemente de Dedekind, que investigou os alicerces em que se apoiavam as definições recursivas, ele as considerou do ponto de vista das suas aplicações. Em particular, ele mostrou que elas poderiam ser utilizadas não apenas para calcular o valor das funções aritméticas comuns, mas também para representar predicados. Se, por exemplo, denotarmos por $D(x,y)$ o predicado "x é divisível por y", então podemos estabelecer que

$$D(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists n(x = yn),$$

com a observação de que a soma e a igualdade podem ser definidas recursivamente (observe que Skolem já trata de funções com mais de uma variável). Agora, observemos: as funções definidas pelo esquema de recursão de Dedekind possuem a propriedade de que, dado um argumento, é possível calcular-se o valor da função em um número finito de passos, apenas seguindo-se a própria definição recursiva da função. No caso da definição que foi sugerida para a relação de divisibilidade, porém, o processo de verificação não é finitário, pois a variável n varre todo o conjunto dos números naturais. Nesse caso, portanto, a definição apresentada não tem o mesmo caráter das definições recursivas anteriores. Esse fato é, porém, facilmente contornável, bastando para isso observar-se que, para os propósitos da definição em questão, a variável n não precisa percorrer todos os números naturais: se houver um número n tal que $x = yn$, então esse número certamente não será maior que o próprio x. A relação em questão pode, portanto, ser

[7]No primeiro esquema de recursão, x' denota o sucessor de x (veja a pág. 19), e k é uma abreviação para o k-ésimo sucessor de 0.

assim redefinida:

$$D(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists_{1\leq n\leq x}(x = yn).$$

Com essa nova definição, o predicado em questão passa a ser *finitariamente verificável*, isto é, dados dois números quaisquer, é possível decidir se um deles é ou não divisível pelo outro através da realização de um número finito de passos.[8] Skolem mostrou que o mesmo pode ser feito em relação a outros predicados, e empreitou então uma fundamentação da Aritmética baseada no "modo recursivo de pensamento"—posteriormente conhecida como "Aritmética Recursiva Primitiva"—como uma alternativa àquela baseada na axiomatização da Teoria dos Conjuntos.[9]

Tomando então como base esses desenvolvimentos anteriores, Gödel utilizou as funções recursivas (primitivas) para manipular a Aritmética formalizada.[10] Primeiramente, ele forneceu uma definição precisa para elas, que se tornou padrão:

1. A função 0-ária $\varphi() = 0$ e a função sucessor $\varphi(x) = x'$ são recursivas (primitivas).

2. Se $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ são funções recursivas (primitivas), então

   $$\varphi(\mathfrak{x}) = \eta(\eta_1(\mathfrak{x}_1), \eta_2(\mathfrak{x}_2), \ldots, \eta_k(\mathfrak{x}_k))$$

   também o é.

3. Se ψ e μ são funções recursivas (primitivas), então a função φ definida por

   $$\begin{cases} \varphi(0,\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}_1) \\ \varphi(i+1,\mathfrak{x}) = \mu(i,\varphi(i,\mathfrak{x}),\mathfrak{x}_2) \end{cases}$$

   também o é.

4. Uma função φ é recursiva (primitiva) se e somente se existe uma seqüência $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k = \varphi$ tal que, para todo i, ou φ_i é uma das duas funções iniciais ou é obtida por composição ou recursão a partir das funções anteriores $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$.

[8]Ainda assim, porém, o predicado em questão não está escrito na forma de recursão esperada, em que uma função é definida em termos de si própria. É possível, entretanto, definir-se uma função recursiva para fazer o papel do quantificador existencial limitado, de forma que o predicado em questão pode ser reescrito de forma "puramente recursiva".

[9]Tradução do artigo em [35], págs. 302–33. Com relação à opinião de Skolem sobre a fundamentação da Aritmética baseada na teoria dos conjuntos axiomatizada, veja [35], págs. 299–301.

[10]Hilbert e Ackermann também já haviam feito estudos importantes a respeito; veja [35], págs. 493 e 593. Em particular, Hilbert estudou extensões do esquema de recursão que permitiam funções receberem outras funções como argumento, e criou uma hierarquia de funções definidas em $\mathbb{N}$. Nessa hierarquia, as funções hoje conhecidas como recursivas primitivas são do tipo 1, e Ackermann conseguiu obter um exemplo de função do tipo 2, isto é, um exemplo de função (definida sobre $\mathbb{N}$) que, em particular, não é passível de ser definida segundo o esquema recursivo primitivo (veja a pág. 93 a seguir).

Esse esquema é uma re-escrita daquele apresentado por Gödel (veja [35], pág. 602). As letras alemãs acima são um artifício para representar n-uplas de variáveis: $\mathfrak{x}$ representa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $\mathfrak{x}_j$ representa uma "sub-tupla" qualquer de $\mathfrak{x}$.[11] É interessante observar que, além da operação de recursão em si, também é incluída a de composição de funções, que é parte importante da definição.

Tendo tornado precisa a noção de funções recursivas (primitivas), Gödel segue para fazer o caminho inverso em relação ao que foi feito anteriormente; em particular, ele constrói predicados recursivos (primitivos) para, dado, um número, determinar se ele é ou não o número associado a algum objeto metamatemático (uma variável, uma fórmula, uma prova, etc). A construção desses predicados depende da maneira como as fórmulas são construídas na linguagem formal, mas a idéia básica é a de usar o quantificador existencial limitado (como explicado acima) para "buscar" números satisfazendo determinadas propriedades. Suponhamos, por exemplo, que desejamos construir um predicado "$P(x,y)$" para informar se x e y são ou não números associados a fórmulas φ e $\varphi \vee \psi$, respectivamente, de forma que a fórmula associada a y poderia ser obtida a partir daquela associada a x pela regra de introdução da disjunção. Nós podemos então construir esse predicado da seguinte maneira:

$$P(x,y) \overset{\text{def}}{=} \text{Form}(x) \wedge \exists_{z<y}(\text{Form}(z) \wedge y = x * 2^7 * z).$$

Na expressão acima, o número 7 corresponde ao símbolo '$\vee$', conforme a tabela da pág. 82. Agora, lembrando que o número associado a uma fórmula $s_1 s_2 \ldots s_k$ foi $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ (onde $n_1, \ldots, n_k$ são os números associados aos símbolos dessa fórmula), então, se quisermos construir uma 'fórmula' composta por um símbolo 's' apenas, o número associado a ela será 2^n (sendo n o número associado a s); disso segue que 2^7 é o número associado à *seqüência de símbolos* (unitária) '$\vee$'. Na definição acima também está presente o predicado '$\text{Form}(n)$', que informa se o número n está associado a alguma fórmula ou não. Por fim, também ocorre a função '$*(m,n)$', que, dados dois números m e n associados a seqüências $a_1 \ldots a_m$ e $b_1 \ldots b_n$, respectivamente, calcula o número associado à seqüência $a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$, obtida a partir das duas anteriores por concatenação. Dito isso, nós podemos então compreender a definição acima: $P(x,y)$ será verdadeiro se e somente (1) o número x estiver associado a alguma fórmula φ, e (2) existir um número z (menor que y) tal que (2.1) z também esteja associado a alguma fórmula ψ, e (2.2) y seja o número associado à expressão resultante da concatenação de 'φ', '$\vee$' e 'ψ'. Naturalmente, para que o predicado $P(x,y)$ pudesse ser assim definido, várias outras funções recursivas (primitivas) foram utilizadas, e, num caso concreto, todas teriam que ser definidas previamente. Observemos, por fim, que a quantificação da variável z foi limitada ao valor de

[11] Esse artifício foi posteriormente substituído pelo uso das funções de projeção; veja [4], págs. 43 e 239.

y: de fato, se z e y estão associados a fórmulas ψ e $\varphi \vee \psi$, respectivamente, então o primeiro é necessariamente menor que o segundo.[12]

5.1.3 Idéia geral da prova de incompletude

Tendo definido uma série de funções recursivas (primitivas) que lhe serviriam como meios de expressão sobre objetos metamatemáticos, Gödel seguiu rumo à demonstração dos seus resultados. O primeiro deles, teorema V, estabelecia uma importante observação a respeito das funções recursivas (primitivas): informalmente falando, ele mostrava que toda tal função era *definível* no formalismo P de Gödel. Como mencionado anteriormente, a linguagem formal P utilizada por Gödel (aquela cujos símbolos seriam o alvo da análise metamatemática) era uma modificação inessencial daquela do *Principia mathematica*;[13] o que o resultado em questão estabelecia era, portanto, que essa linguagem era capaz de representar todo cálculo feito por meio de funções recursivas (primitivas). Mais precisamente ainda, Gödel mostrou que, para toda relação recursiva (primitiva) $R(x_1, \ldots, x_n)$, existe um número natural r que 'codifica' um certo símbolo relacional da linguagem, e que, para toda n-upla de números naturais $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, (1) se $R(a_1, \ldots, a_n)$ for verdadeiro, então a fórmula que resulta da aplicação desse símbolo relacional aos argumentos em questão é demonstrável a partir dos axiomas de P, e, (2) se $R(a_1, \ldots, a_n)$ for falso, então a negação dessa fórmula é demonstrável. Esse teorema é altamente significativo: tendo definido o conjunto de funções recursivas (primitivas) mencionado no início do parágrafo, Gödel havia mostrado que era possível expressar afirmações sobre os objetos da metamatemática predicando-se exclusivamente sobre os números naturais; agora, com o teorema em questão, Gödel dá um passo adiante e mostra que várias relações metamatemáticas, isto é, fatos a respeito do sistema formal P, podem ser expressas e 'calculadas' dentro do próprio sistema P.

O próximo resultado demonstrado por Gödel, teorema VI, é o teorema central do seu trabalho. Nele, ele usa a seguinte definição: um conjunto K de fórmulas é dito *ω-consistente* se e somente se a adição das fórmulas de K aos axiomas do sistema P não fizer com que, para algum predicado $P(x)$, tanto a fórmula $\neg\forall x P(x)$ quanto as fórmulas $P(1), P(2), P(3)$, etc, sejam demonstráveis. Todo conjunto K ω-consistente é consistente, mas a recíproca não é verdadeira.

[12] O exemplo acima ilustra uma forma de utilização de funções recursivas (primitivas) para a manipulação de objetos metamatemáticos. Deve-se ter em mente, contudo, que a complexidade envolvida nessa tarefa é bem maior que a sugerida por essa exposição. O predicado 'Form(x)' definido por Gödel é um ótimo exemplo desse fato: não apenas o cálculo do limite superior da quantificação lá encontrada é complexo, mas a própria concepção da sua forma teve de ser bastante engenhosa, dada a elaboração da tarefa (veja a definição do predicado em questão em [35], pág. 605).

[13] As modificações introduzidas na linguagem apenas "servem para simplificar a prova e são dispensáveis em princípio" ([35], pág. 599).

Dito isso, o teorema VI afirma então que, dado qualquer conjunto recursivo (primitivo) K de fórmulas que seja ω-consistente, existem fórmulas φ de P tais que nem φ nem $\neg\varphi$ são demonstráveis a partir das fórmulas de K (utilizando-se o sistema P); mais especificamente, as fórmulas φ em questão têm a forma $\forall x R(x)$, onde $R(x)$ é um predicado recursivo (primitivo).[14] A condição de que o conjunto K é recursivo (primitivo) significa que existe um predicado recursivo (primitivo) que informa, para todo número natural n, se n codifica alguma fórmula pertencente a K.[15] Atente para a observação de que as fórmulas *indecidíveis*, isto é, as fórmulas φ tais que nem φ nem $\neg\varphi$ são demonstráveis, têm a forma $\forall x R(x)$, sendo $R(x)$ um predicado recursivo (primitivo); isso significa que as fórmulas em questão são indecidíveis mesmo sendo possível calcular-se em um número finito de passos se, dado um número natural n qualquer, $R(n)$ é verdadeiro ou falso.

O curso da argumentação usada para provar o teorema acima foi aproximadamente como segue. Dado um conjunto K como no enunciado, seja P_K o sistema formal que obtemos adicionando as fórmulas de K aos axiomas do sistema P. Agora, chamemos de *predicado unário* uma fórmula de P com exatamente 1 variável livre.[16] Assim, dados um predicado unário $T(x)$ qualquer e um número natural n qualquer, $T(n)$ será verdadeiro ou falso, 'dependendo da definição de $T(x)$'. Todo predicado unário, porém, sendo uma fórmula da linguagem de P, é codificado em um número; logo, se um dado predicado $T(x)$ é codificado no número y, $T(y)$ também será verdadeiro ou falso. Definamos então o predicado $Q(x,y)$, que será verdadeiro se e somente se os números naturais x e y *não forem tais que* (1) y codifique um predicado unário $T(z)$ e (2) x codifique uma prova em P_K para a fórmula $T(y)$. Gödel fornece uma definição recursiva (primitiva) para esse predicado, e isso significa que tanto (1), dados x e y, é possível verificar finitariamente se $Q(x,y)$ é verdadeiro ou falso, quanto (2), pelo teorema anterior (V), o predicado Q é definível dentro do sistema P. Agora, seja p o número que codifica o predicado $P(y)$ dado por $\forall x Q(x,y)$; intuitivamente, esta última fórmula significa "nenhum número x codifica uma prova em P_K para $T(y)$", onde $T(z)$ é o predicado codificado por y, ou ainda "a fórmula $T(y)$ não é demonstrável em P_K".[17] Disso, segue imediatamente que a fórmula $P(p)$ significa "a fórmula $P(p)$ não é demonstrável em P_K", a qual surpreendentemente 'afirma' algo sobre si mesma. Mostremos agora que, além disso, ela é uma fórmula ϕ com as propriedades mencio-

[14] Como foi mencionado, nem todo conjunto consistente é ω-consistente. Isso significa que a condição de ω-consistência é mais forte que a de simplesmente consistência, e que portanto uma versão desse teorema que exigisse apenas esta última seria uma versão mais forte. Essa versão mais geral do teorema em questão foi provada em 1936 por (John Barkley) Rosser ([4], págs. 230–5).

[15] Em outras palavras, dada uma fórmula qualquer, é possível decidir em um número finito de passos se ela pertence ou não ao conjunto K.

[16] Gödel as chama de "símbolo de uma classe" (*class sign*); [35], pág. 598.

[17] Observe que essa fórmula já não é finitariamente verificável, pois verificá-la para algum y implicaria checar a propriedade em questão para todo número natural x.

nadas no enunciado. (1) Se $P(p)$ fosse demonstrável em P_K, então existiria um número natural n que codificaria uma prova para $P(p)$. Disso, segue que $Q(n,p)$ é falso, o que, pelo teorema V, implica que a fórmula $\neg Q(n,p)$ é demonstrável. Agora, por definição, $P(p)$ é a fórmula $\forall x Q(x,p)$, da qual segue, em particular, $Q(n,p)$, que contradiz a fórmula anterior. Logo, P_K seria inconsistente, o que, pela suposição inicial, não é o caso; $P(p)$ não pode, portanto, ser demonstrável. (2) Suponhamos agora que $\neg P(p)$ fosse demonstrável em P_K. Como já foi demonstrado, $P(p)$ é indemonstrável, isto é, para todo número natural n, n não codifica uma prova para $P(p)$, ou seja, $Q(n,p)$ é verdadeiro. Pelo teorema V, portanto, segue que, para todo n, $Q(n,p)$ é demonstrável $(*)$. Agora, por suposição, $\neg P(p)$ é demonstrável, ou seja, $\neg\forall x Q(x,p)$ é demonstrável, o que, diante de $(*)$, leva à conclusão de que K não é ω-consistente. Esse, porém, pela suposição inicial não é o caso, com o que concluimos que $\neg P(p)$ não pode ser demonstrável. (3) Por fim, observemos que a fórmula $P(p)$ é por definição a fórmula $\forall x Q(x,p)$, e que, como mencionado anteriormente, $Q(x,p)$ é um predicado recursivo (primitivo), C.Q.D..

O teorema VI é conhecido como *o primeiro teorema da incompletude de Gödel*, pois ele mostra que todo sistema formal com determinadas características é incompleto, ou seja, possui proposições indecidíveis. Duas observações são importantes. A primeira é a seguinte: diante da demonstração de que existem fórmulas indecidíveis no sistema P, poder-se-ia conjecturar que esse ‘problema’ poderia ser resolvido pela adição dessas fórmulas indecidíveis ao sistema, na forma de axiomas. Como mostrado pelo enunciado, porém, isso não é possível: no momento em que um conjunto K de fórmulas for adicionado aos axiomas do sistema P, o teorema imediatamente nos leva a uma nova proposição indecidível no sistema P_K.[18] A única possibilidade de a adição de novos axiomas ao sistema P invalidar a aplicação do teorema acima seria a de o conjunto dos novos axiomas não ser recursivo (primitivo); isso significaria, porém, que não existiria uma função recursiva (primitiva) para, dada uma fórmula qualquer, decidir, em um número finito de passos, se ela pertence ao conjunto K ou não, e essa possibilidade parece improvável para conjuntos regulares de axiomas. A segunda observação é a de que o resultado acima não diz respeito somente ao sistema P e àqueles que dele resultam por inclusão de axiomas. De fato, as propriedades do sistema formal que são essenciais para a prova são (1) a de que se possa definir por funções recursivas (primitivas) as noções que definem o sistema (axiomas, regras de inferência, etc) e (2) a de que funções recursivas (primitivas) sejam representáveis no sistema (teorema V). Entre os sistemas que possuem essas propriedades, Gödel destacou as axiomatizações da Teoria dos Conjuntos propostas por Zermelo e Fraenkel e von Neumann.[19]

[18] Observando os passos da prova, o leitor poderia indagar-se sobre que dependência teria a fórmula $P(p)$ lá construída em relação ao conjunto de fórmulas K. A dependência está no fato de que o predicado $P(x)$ é construído com base no predicado $Q(x,y)$, que significa “o número x não codifica uma prova *em* P_K da fórmula $T(y)$”. A definição deste último, portanto, envolve as fórmulas de K.

[19] Veja [35], pág. 610. Veja também a pág. 616, onde, em anotação posterior, Gödel afirma que, devido a avanços

No artigo de Gödel estava presente ainda aquele que ficou conhecido como *o segundo teorema da incompletude de Gödel*. Esse teorema afirma que, dado um conjunto consistente e recursivo (primitivo) K de fórmulas, a consistência de P_K não pode ser provada formalmente nesse sistema. Esse resultado segue como corolário do teorema VI, e a argumentação da sua prova é basicamente esta apresentada na seqüência. Primeiramente, é feita a observação de que a consistência do sistema P_K pode ser expressa por uma fórmula desse sistema, já ele será consistente se e somente se existir pelo menos uma fórmula de P que não seja demonstrável em P_K (pois toda fórmula é derivável partindo-se de uma contradição). Depois disso, a observação crucial é a de que os métodos utilizados nas provas dos teoremas anteriores podem ser formalizados no sistema P (e portanto também em P_K). Assim, como, no teorema VI, a não demonstrabilidade da fórmula $P(p)$ seguiu diretamente da consistência de P_K, é possível demonstrar em P_K a fórmula $w \to \forall x Q(x, p)$, onde w é uma fórmula que afirma que P_K é consistente e $\forall x Q(x, p)$ afirma que $P(p)$ não é demonstrável em P_K. Logo, a fórmula w fosse demonstrável em P_K, isto é, se a consistência de P_K pudesse ser provada dentro do próprio P_K, então a fórmula $P(p)$ também seria demonstrável. Isso é, entretanto, um absurdo, pois, nesse caso, existiria um número natural n tal que a fórmula $\neg Q(n, p)$ seria demonstrável (teorema V), ao passo que de $P(p)$, que é igual a $\forall x Q(x, p)$, seguiria $Q(n, p)$. Disso, segue que a consistência de P_K não pode ser provada dentro do próprio P_K, C.Q.D..

5.1.4 Conseqüências

Os resultados descobertos por Gödel tiveram significância imediata para o programa de Hilbert. Como vimos anteriormente, o objetivo último desse programa era a obtenção de uma prova finitária da consistência da Aritmética formalizada. Agora, embora o conceito de *procedimento finitário* nunca tenha sido definido precisamente pela escola formalista de Hilbert, a idéia de que esses procedimentos eram todos representáveis dentro do formalismo do *Principia mathematica* era de forma geral acreditada. Em face disso, o segundo teorema da incompletude de Gödel foi rapidamente considerado como uma demonstração da inexistência de uma tal prova de consistência, e portanto também da inviabilidade do programa de Hilbert como originalmente concebido. Além disso, o primeiro teorema da incompletude de Gödel, tendo apontado a existência de proposições formalmente indecidíveis até mesmo da forma $\forall x P(x)$, com $P(x)$ recursivo (primitivo),[20] demonstrou limites talvez surpreendentes para a provabilidade axiomática formal.

teóricos subseqüentes, a noção geral de sistema formal foi tornada precisa, e que com base nela é possível mostrar que os seus resultados se estendem a qualquer sistema formal consistente que possua um mínimo de "teoria dos números finitária".

[20]Na suposição, é claro, de que o sistema é (ω-)consistente.

Esses fatos não foram, porém, o fim da teoria da prova criada por Hilbert. Tendo demonstrado limites para o objetivo inicial da teoria, os resultados de Gödel estimularam a busca por métodos alternativos para conferir 'segurança' às teorias matemáticas. Um bom exemplo disso foi a prova publicada por Gerhard Gentzen, em 1936, da consistência da Aritmética formalizada, na qual, para chegar a esse resultado, ele recorreu a um único teorema de prova não finitária, e ainda assim de caráter—num certo sentido—construtivo.[21]

O trabalho de Gödel foi ainda o primeiro de uma série de resultados sobre indecidibilidade, insolubilidade e computabilidade que seriam obtidos a partir de então.[22] Em particular, ele contribuiu para a descoberta posterior de que, ao contrário do que acontece para a lógica proposicional, não existe um procedimento que possa ser utilizado para decidir, dada uma fórmula qualquer da lógica de primeira ordem, se ela é verdadeira ou falsa, e também para o desenvolvimento posterior da noção de computabilidade.

5.2 A computabilidade de Turing

> *Computar é normalmente feito escrevendo-se certos símbolos no papel. Nós podemos supor que esse papel é dividido em quadrados como um livro de aritmética de uma criança. Na aritmética elementar o caráter bidimensional do papel é usado às vezes, mas tal uso é sempre evitável, e eu acho que concordar-se-á que o caráter bidimensional do papel não é uma necessidade da computação. Eu assumo então que a computação é realizada em papel unidimensional, isto é, numa fita divida em quadrados...* ([4], pág. 135)

Nesta seção, estudaremos brevemente o conceito de computabilidade proposto por Turing, com base no qual ele solucionou o "problema da decisão" proposto por Hilbert (e Ackermann).

5.2.1 O problema da decisão

O *problema da decisão* (ou decidibilidade), também conhecido como *Entscheidungsproblem*, é o de determinar, dada uma certa linguagem formal, se existe ou não um procedimento mecânico capaz de asseverar, para cada afirmação e conjunto de axiomas devidamente formalizados na linguagem, se a primeira é ou não conseqüência do segundo. Claramente, esse problema é altamente relevante para o desenvolvimento do conhecimento humano, pois, uma

[21] O "princípio da indução transfinita". Sobre a construtividade deste princípio, veja os comentários de Gentzen no final do artigo de 1936, em [31].

[22] A esse respeito, veja [35].

vez que se possua tal procedimento para uma certa linguagem, qualquer questão que possa ser representada nessa linguagem é passível de ser respondida de forma mecânica, isto é, não assistida pelo raciocínio humano.

Considerações sobre este problema datam já do século XVII: Leibniz, que havia construído uma calculadora mecânica capaz de efetuar as quatro operações aritméticas básicas,[23] vislumbrou a possibilidade (1) da criação de uma linguagem (*characteristica universalis*) capaz de representar todos os conceitos e inferências do pensamento humano, e (2) da resolução de qualquer questão expressa nessa linguagem, por meio de manipulações puramente mecânicas (*calculus ratiocinator*) dos símbolos presentes nas expressões envolvidas (veja [3], págs. 3–20). Essa idéia, embora ambiciosa e otimista, foi um grande adiantamento de questões que apenas se tornariam palpáveis dois séculos depois, com a criação da *Begriffsschrift* de Frege.

Posteriormente, em 1928, Hilbert e Ackermann colocaram a questão na forma acima, para o caso particular da linguagem da lógica de primeira ordem. Mais precisamente, eles colocaram a questão de se é possível determinar se uma dada fórmula φ é ou não satisfeita em qualquer interpretação, isto é, de se $\models \varphi$, "pois a questão da dependência lógica de uma afirmação sobre um sistema de axiomas pode ser reduzida à questão de se uma dada fórmula ... é ou não universalmente válida" ([18], pág. 108).[24]

5.2.2 A noção de procedimento mecânico

> *Nenhuma tentativa foi ainda feita de mostrar que os números "computáveis" incluem todos os números que seriam naturalmente considerados como computáveis. Todos os argumentos que podem ser dados estão fadados a ser, fundamentalmente, apelos à intuição, e por essa razão matematicamente insatisfatórios.* ([4], pág. 135)

O que é um procedimento mecânico? Para que se pudesse apresentar uma solução concreta ao problema acima apresentado, era necessário responder essa questão de forma precisa. Quando Gödel publicou seu trabalho sobre a incompletude da Aritmética, ele também definiu uma classe de funções cujos valores assumidos eram mecanicamente calculáveis: as funções recursivas primitivas, apresentadas anteriormente. Entretanto, seria todo cálculo mecânico passível de ser definido na forma de uma função recursiva primitiva? Em 1928, Ackermann

[23]A qual servia, portanto, para decidir a veracidade de algumas afirmações (como "$2 \cdot 3 = 6$"), embora de um domínio bastante restrito do conhecimento humano.

[24]No caso em que o conjunto de axiomas é finito, temos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \varphi \iff \models (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \varphi$.

mostrou que a função φ definida por

$$\begin{cases} \alpha(a,0)=0 \\ \alpha(a,1)=1 \\ \alpha(a,n+2)=a \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(a,b,0)=a+b \\ \varphi(a,0,n+1)=\alpha(a,n) \\ \varphi(a,b+1,n+1)=\varphi(a,\varphi(a,b,n+1),n). \end{cases}$$

é diferente de qualquer função recursiva primitiva ([35], pág. 494). Agora, para quaisquer valores de entrada, é possível, seguindo-se a definição acima, calcular o valor assumido pela função (embora a recursão aconteça com relação a duas variáveis simultaneamente, o cálculo em questão em algum momento chega ao fim). Logo, as funções recursivas primitivas não abrangem todos os cálculos que seria razoável considerar como sendo "mecânicos". Foi em 1936 que várias respostas foram apresentadas para essa questão, das quais a que ficou mais conhecida foi aquela proposta por Alan Turing [34].[25]

Turing descreveu o conceito de calculabilidade finita em termos de 'máquinas', as quais ficaram conhecidas como *máquinas de Turing*.[26] Uma máquina possui uma *fita*, que consiste, por assim dizer, numa extensão linear de *células*, ilimitada em ambos os sentidos (que aqui chamaremos de 'esquerda' e 'direita').[27] Cada célula é capaz de armazenar um único *símbolo*, podendo também estar vazia. A fita é para a máquina o análogo do papel para um humano a realizar cálculos, sendo um instrumento através do qual esta pode *armazenar* símbolos para uso futuro. Em cada momento, existe exatamente uma das células da fita que está sendo *lida* pela máquina, sendo ela a única cujo conteúdo é a esta acessível naquele momento. Em relação à fita, a máquina pode, em cada momento, executar duas ações: *primeiramente*, ela pode *alterar o conteúdo* da célula que está sendo lida; *depois*, ela pode alterar *qual célula será lida no instante seguinte*; ambas as ações são passíveis de não serem executadas, isto é, uma máquina pode, num determinado instante, tanto não modificar o conteúdo da célula que está sendo lida quanto manter esta célula para ser lida no instante seguinte. A alteração do conteúdo da célula que está sendo lida pode ser feita ou *apagando-se* o símbolo nela armazenado ou *escrevendo-se* um

[25]Outras propostas foram feitas por Post ([4], págs. 288–91), Kleene ([4], págs. 236–53) e Church ([4], págs. 88–107) e são todas equivalentes à de Turing ([4], págs. 225,6). O trabalho de Kleene, a propósito, contém uma bela generalização do esquema de recursão primitiva (inicialmente obtida por Herbrand e Gödel mas posteriormente estudada por ele). A proposta de Post, por fim, é bastante similar à de Turing, mas existem boas razões para que o trabalho deste último tenha ficado mais conhecido: além de ter apresentado uma detalhada justificação do conceito proposto, Turing exibiu amplas classes de números computáveis, criou o conceito de *computação universal*, exibiu um novo exemplo de problema mecanicamente insolúvel e etc (alguns desses resultados também foram obtidos por Church e Kleene, nas suas respectivas propostas).

[26]Creio não ser descabido chamar aqui atenção para o fato de que o também matemático inglês Charles Babbage projetou em 1837 (mas nunca construiu) o seu 'motor analítico', que seria um computador de propósito geral; veja [36].

[27]O enfoque desta exposição está na estrutura do conceito. Pretendo ser preciso, mas não me deterei aos detalhes de como o conceito em questão pode ser matematicamente modelado em termos de conjuntos.

símbolo diferente.[28] A alteração de qual célula será lida no instante seguinte consiste em fazer com que esta passe a ser *aquela à direita* ou *aquela à esquerda* daquela sendo lida atualmente.[29]

A máquina também possui um conjunto finito de *estados*, e, em cada momento, ela se encontra em exatamente um deles. Em cada momento, *após* as operações de escrita e mudança de célula, ou a máquina *permanece no estado em que se encontra* ou acontece *uma mudança para outro estado qualquer*. Essas 3 operações, realizadas na ordem mencionada, são as únicas de que a máquina é capaz a cada momento. Em cada momento, se 'e' é o estado em que se encontra a máquina e 's' é o símbolo armazenado na célula que está sendo lida, dizemos que o par 'e, s' é a *configuração* da máquina naquele momento. As operações que uma determinada máquina realiza a cada momento são determinadas exclusivamente pela configuração em que ela se encontra.[30] Em outras palavras, dada uma certa máquina $\mathfrak{M}$, o fato de, em um determinado instante, ela se encontrar numa certa configuração 'e, s' determina (1) o símbolo 's'' que será escrito (podendo este ser '$\not{b}$', o próprio 's' ou algum outro), (2) se haverá mudança na célula lida (e para qual delas, a da direita ou a da esquerda, a mudança se dará) e (3) o estado 'e'' em que a máquina estará no instante seguinte (podendo este ser o próprio 'e' ou algum outro). Essa última propriedade das máquinas de Turing é o que caracteriza a "mecanicidade" do seu funcionamento: não há "influência externa"; não há, em particular, interpretação humana sobre o significado dos estados ou dos símbolos da fita; o comportamento da máquina em um determinado momento é função exclusiva da configuração em que ela se encontra naquele momento. Uma última propriedade: uma máquina pode lidar apenas com um conjunto finito de símbolos. Disso, portanto, como também o conjunto de estados de uma máquina é finito, segue que o conjunto de todas as configurações em que uma máquina pode vir a se encontrar é igualmente finito; isso implica, por fim, que o próprio *funcionamento* de uma máquina é expressível em termos também finitos, já que, como estipulado acima, este consiste apenas na associação, para cada par estado-símbolo (configuração), de um trio símbolo-direção-estado (as 3 ações), por assim dizer.

Uma máquina realiza, por assim dizer, uma tarefa específica.[31] Consideremos, por exem-

[28] Não há problema em realizar a operação de apagar numa célula que esteja vazia, ou a de escrever numa célula o mesmo símbolo que nela já se encontra armazenado; essas operações apenas não consistem numa 'modificação' do conteúdo da célula. Na realidade, a especificação formal de Turing da possibilidade de não se alterar o conteúdo de uma célula se dá justamente através da escrita do conteúdo que a célula já possui; quando a célula está vazia, isso é feito através da escrita de um símbolo especial, chamado *branco* e denotado por '$\not{b}$' (a escrita do branco substitui, portanto, a operação de apagar).

[29] Como antes, Turing especifica que esta operação sempre ocorre, seja para passar à célula à direita, ou àquela à esquerda ou para permanecer naquela que está sendo lida.

[30] Tratarei aqui apenas das máquinas de Turing *determinísticas*, que ele chamava de *automáticas* ([4], pág. 118).

[31] É possível, entretanto, construir-se uma máquina $\mathscr{U}$ que, recebendo na sua fita a descrição do funcionamento de uma máquina $\mathfrak{M}$ qualquer, é capaz de simular o funcionamento desta. Ela é chamada *máquina de Turing universal*, mas não será apresentada aqui (veja [4], pág. 127, §6).

plo, a máquina descrita abaixo:

1. Estados: e_1, e_2.

2. Símbolos (manipulados): $0, 1, \not{b}$.

3. Transições (funcionamento): $\langle e_1, \not{b} : P0, R, e_2 \rangle, \langle e_2, \not{b} : P1, R, e_1 \rangle$.

4. Fita: em branco.

5. Estado inicial: e_1.

Observe que foram descritas todas as características anteriormente mencionadas a respeito de uma máquina: o conjunto dos seus estados, os símbolos com que ela pode lidar e o seu funcionamento. O funcionamento da máquina foi especificado na forma de *transições*: elas têm a forma $\langle e, s : Ps', d, e' \rangle$, e informam que, estando a máquina na configuração 'e, s', deve ser impresso o símbolo 's'' ('E', apagar, pode ser usado como sinônimo para '$P\not{b}$'), a fita deve ser movimentada na direção 'd' e o próximo estado deverá ser 'e'' (como explicado anteriormente); a direção d pode ser especificada pelas letras 'R' (a próxima célula a ser lida é a da direita), 'L' (idem, esquerda) e 'N' (a próxima celula a ser lida é a que já está sendo lida). O trabalho de uma máquina é efetuado sobre a sua fita; faz parte da sua especificação, portanto, a informação de como deverá estar a fita no início do seu funcionamento. Na máquina acima, por exemplo, foi especificado que a fita deve começar "em branco", isto é, toda célula deve conter o símbolo '$\not{b}$'. Finalmente, também deve ser especificado em que estado a máquina está quando do início do seu funcionamento; no caso da máquina acima, esse estado é e_1. Vejamos então como se dá a execução dessa máquina:

$$:\ \frac{\overline{}}{\texttt{1}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{0}}}{\texttt{2}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{01}}}{\texttt{1}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{010}}}{\texttt{2}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{0101}}}{\texttt{1}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{01010}}}{\texttt{2}}\ :\ \frac{\overline{\texttt{010101}}}{\texttt{1}}\ :\ \ldots$$

Acima são mostradas as primeiras 7 *configurações completas* da máquina em questão; diremos que a configuração completa de uma máquina em um determinado momento consiste nas informações de (1) em que estado a máquina se encontra, (2) quais são os símbolos armazenados na fita e (3) que posição desta última está sendo lida. As configurações completas acima estão separadas por ':'; na parte superior de cada uma, é exibido o conteúdo da fita (a parte em branco é omitida), e, na parte inferior, abaixo da célula que está sendo lida, é mostrado o número do estado em que a máquina se encontra. Verificamos, portanto, que a máquina acima descrita escreve na fita uma seqüência ilimitada de 0's e 1's alternados.

Observemos que a descrição da máquina acima não especifica nenhuma transição para, por exemplo, a configuração ‘$e_1, 0$’; de fato, isso não é necessário, pois, dada a especificação da máquina, toda vez que uma célula for lida, ela vai estar em branco. A especificação de uma máquina não precisa, portanto, incluir transições para todas as configurações possíveis. Na verdade, ela não precisa incluir sequer transições para todas as configurações passíveis de serem atingidas em algum momento do seu funcionamento: se, em algum momento, for atingida uma configuração para a qual não foi definida uma transição, a máquina simplesmente *pára*. Essa é uma propriedade importante das máquinas de Turing, pois, diferentemente da máquina acima, há máquinas cujo funcionamento é concebido para ser finito. Um exemplo de tal máquina seria uma que recebesse na fita dois números escritos na base unária e calculasse a sua soma, como ilustrado abaixo:

$$\underline{\overline{\texttt{|11..(x)..1|11..(y)..1|}}}_{\texttt{1}} \rightsquigarrow \underline{\overline{\texttt{|11..(x+y)..1|}}}_{\texttt{f}}.$$

Esse exemplo ilustra a dupla utilidade da fita: ela serve como (1) *memória* para armazenar informações temporárias, com base nas quais os cálculos da máquina são realizados, e como (2) *instrumento de entrada e saída*, isto é, um meio de receber informações acerca de um problema e de retornar uma resposta para ele.

As explicações acima apresentaram, portanto, o conceito de máquina de Turing. A despeito da simplicidade dos exemplos citados, a classe das tarefas realizáveis por essas máquinas é vastíssima. Esse fato é particularmente perceptível em face à observação de que a definição de uma máquina que realiza uma tarefa T qualquer pode ser utilizada na construção de outra para realizar uma tarefa T' da qual T faz parte (tais usos, consistindo apenas em abreviações, não aumentam o poder de cálculo das máquinas, mas são bastante úteis do ponto de vista da abstração).[32] Turing definiu *computabilidade* como a passibilidade por parte de uma tarefa de ser realizada por meio de uma máquina de Turing. Desde então, esse conceito tem sido geralmente aceito como um equivalente preciso da noção intuitiva de “calculabilidade finita” (ou mecânica), e a afirmação de que esse é de fato o caso é geralmente conhecida como *tese de Church*.[33] Essa tese é corroborada pela equivalência existente entre várias propostas matemáticas de representação dessa noção, a saber: computabilidade (Turing), definabilidade-λ (Church), recursividade geral (Herbrand, Gödel e Kleene) e processos combinatórios finitos (Post).

[32] Veja [4], pág. 121, §4.

[33] Afirmação essa certamente também feita por Turing, mas anteriormente por Church (veja [4], pág. 100, §7).

5.2.3 A existência de problemas mecanicamente insolúveis

Nós podemos agora tratar brevemente de como Turing utilizou o seu conceito de computabilidade para resolver o problema da decisão.[34] Recapitulando, na forma proposta por Hilbert e Ackermann, o problema era o de se saber se existe ou não um procedimento mecânico capaz de asseverar, para cada afirmação da lógica de primeira ordem, se ela é válida (isto é, satisfeita em qualquer interpretação) ou não. Primeiramente, nós mostraremos a existência de problemas mecanicamente insolúveis, e então veremos como isso fornece uma resposta negativa ao problema da decisão.

Como vimos anteriormente, quando uma máquina M recebe uma certa entrada E, ou ela finalmente pára (após ter realizado um certo número de operações) ou ela continua funcionando indefinidamente. Dessa forma, a cada máquina M está associado o conjunto P_M composto das entradas para as quais M pára, o qual nós chamaremos o *conjunto de parada* de M. Agora, Turing mostrou que a descrição de qualquer máquina pode ser representada por meio de um número natural, de forma que, para toda máquina M, existe um número n_M que codifica o seu funcionamento (e o de nenhuma outra), e que todo número natural codifica a descrição de alguma máquina. Logo, como, dados um número natural n e uma maquina M, temos que ou $n \in P_M$ ou $n \notin P_M$, então, dada uma máquina M, ou $n_M \in P_M$ ou o contrário. Seja então D o conjunto dos números naturais m tais que, se M é a máquina de número m, então $m \notin P_M$; logo, D é o conjunto dos números das máquinas que *não páram* recebendo o seu próprio número como entrada.

Nós podemos agora mostrar que o problema de determinar se um dado número natural n pertence ou não a D é mecanicamente insolúvel, tomando computabilidade por máquinas de Turing como equivalente de realizabilidade mecânica (tese de Church). Suponhamos, por redução ao absurdo, que existe uma máquina R que, recebendo como entrada um número n, responde se $n \in D$ ou não (deixando, por exemplo, os símbolos 1 ou 0 na fita, respectivamente, para indicar a resposta). Nós podemos então construir, a partir de R, uma máquina S que possui basicamente o mesmo funcionamento, mas que, ao invés de escrever 0 na fita e parar quando $n \notin D$, funciona ininterruptamente (digamos, lendo sempre a próxima célula à direita e não fazendo nenhuma modificação na fita). Logo, S, recebendo um número n como entrada, pára se e somente $n \in D$. Agora, S, como toda máquina, possui um número n_S, e também ou $n_S \in D$ ou o contrário. Vejamos então qual dos casos acontece:

1. Suponhamos que $n_S \in D$. Logo, pelo funcionamento de S, S pára recebendo n_S como

[34] A essência deste trecho foi tomada de [3], cap. 7 (págs. 161–3).

entrada. Agora, como $n_S \in D$, então, pela definição de D, $n_S \notin P_S$, ou seja, S não pára recebendo n_S como entrada, mas isso é um absurdo, pois nós já havíamos concluído que, pelo funcionamento de S, se $n_S \in D$, então S pára recebendo n_S como entrada.

2. Logo, não é possível que $n_S \in D$, ou seja, é verdade que $n_S \notin D$. Logo, pelo funcionamento de S, S não pára recebendo n_S como entrada. Agora, pela definição de D, como $n_S \notin D$, então $n_S \in P_S$, ou seja, S pára recebendo n_S como entrada, mas isso é um absurdo, pois, pelo funcionamento de S, se $n_S \notin D$, então S não pára recebendo n_S como entrada.

Nós vemos então que ambas as possibilidades levam a um absurdo, e que portanto não pode existir uma máquina como S;[35] entretanto, a existência de uma tal máquina segue diretamente da existência de uma máquina como R, com o que concluimos que não pode existir uma máquina como R, ou seja, *que não existe uma máquina que decida a pertinência em D*, sendo portanto esse problema mecanicamente insolúvel.[36]

Nós vimos então que existem problemas mecanicamente insolúveis, e podemos agora ver como esse fato fornece uma resposta ao problema da decisão (para a lógica de primeira ordem). Turing mostrou como o funcionamento das suas máquinas pode ser mapeado em deduções da lógica de primeira ordem, de forma que, dadas uma máquina M e um número n de entrada para M, existe uma fórmula φ que é derivável, e portanto também válida, se e somente se $n \in P_M$, isto é, se M pára recebendo n como entrada. Logo, se houvesse uma máquina de Turing que respondesse, para cada fórmula φ, se ela é válida ou não, essa máquina poderia ser utilizada para descobrir-se, para cada M, se $n_M \in P_M$ ou não, ou seja, se $n_M \notin D$ ou não, e portanto a pertinência em D seria mecanicamente solúvel; como este sabidamente não é o caso, então conclui-se que não existe uma máquina que responda, para cada fórmula da lógica de primeira ordem, se ela é válida ou não, e portanto *a resposta para o problema da decisão para a lógica de primeira ordem é negativa*.[37]

[35] Essa é mais uma aplicação do argumento da diagonal de Cantor (pág. 68).

[36] A argumentação acima também serve para mostrar que é mecanicamente insolúvel um problema mais geral que a pertinência em D, conhecido como *o problema da parada*. Este problema consiste em descobrir, dados um número m qualquer e o número n_M de uma máquina M, se $m \in P_M$ ou não. Claramente, se houvesse uma máquina que resolvesse o problema da parada, então também existiria uma máquina para decidir a pertinência em D; como este último não é o caso, então o problema da parada também é mecanicamente insolúvel.

[37] A solução negativa para o problema da decisão da lógica de primeira ordem foi encontrada por Church independentemente e também um pouco antes de Turing; o modelo computacional de Turing, entretanto, torna a interpretação do resultado para qualquer "procedimento mecânico" mais convincente.

6 Conclusão

6.1 Revisão do trabalho realizado

A motivação inicial deste trabalho foi a pergunta *"Por que não se utiliza a lógica formal para formalizar a prática da Matemática, obtendo-se assim mais segurança nos resultados desta?"*. A orientação que me foi dada apontou então as origens da Lógica Matemática e os teoremas de incompletude de Gödel como tópicos importantes para o esclarecimento dessa dúvida. De fato, com o estudo do primeiro desses assuntos, percebi que a reescrita precisa da Matemática não era apenas uma aplicação interessante da lógica formal, mas que havia sido o seu próprio berço, o fim para o qual esta havia sido concebida: qualquer pessoa que anseie por uma forma "infalível" de se apresentar argumentações matemáticas vai reconhecer imediatamente o mesmo desejo em [8], a primeira apresentação da *Begriffsschrift* de Frege. Agora, embora essa obra logre em obter um sistema formal essencialmente adequado à representação do "pensamento puro", ela não apresenta uma reescrita vasta de qualquer teoria da Matemática: a criação da linguagem e a representação de inferências lógicas básicas já haviam consistido num trabalho suficientemente grande. Essa esperada demonstração de aplicabilidade apenas apareceu 14 anos depois, em [10], depois que Frege já havia concebido os fundamentos de uma nova teoria Aritmética [9] e também adaptado a sua "linguagem de fórmulas" às necessidades da empreitada. Em tese, os objetivos de Frege teriam sido alcançados com esta obra, não tivesse ela sido descoberta inconsistente.

A inconsistência do sistema de Frege, e, de forma mais geral, as inconsistências da Teoria dos Conjuntos deram continuação natural aos estudos deste trabalho: a questão de interesse já não era apenas a de como "formalizar" a Matemática, mas, antes disso, a de como *fundamentá-la*, de forma a garantir não apenas a sua invulnerabilidade a erros de inferência e pressuposições despercebidas, mas, principalmente, a sua solidez frente às contradições então descobertas.[1]

[1]Esta sintética mas importantíssima distinção entre aplicar a Lógica para "formalizar" e para "fundamentar" a Matemática foi particularmente destacada a mim pelo meu orientador, na ocasião da defesa desta dissertação. Com relação a isso, é interessante mencionar que, embora o meu objetivo inicial fosse realmente o de investigar os limites da aplicabilidade da Lógica Matemática à *formalização* da Matemática, os estudos subseqüentes, seguindo os acontecimentos históricos, naturalmente tomaram o rumo da investigação dos limites da sua aplicabilidade à

Algumas propostas de solução para a questão da fundamentação da Matemática foram então estudadas. A primeira delas foi a *axiomatização* proposta por Zermelo para a Teoria dos Conjuntos, que bloqueia os paradoxos baseados em conjuntos definidos por propriedades mal fundamentadas através do “(esquema do) axioma da separação”; essa axiomatização, na sua forma melhorada e hoje conhecida como ZFC, é atualmente a mais difundida apresentação da Teoria dos Conjuntos. Outra proposta de contorno aos paradoxos na Teoria dos Conjuntos que foi brevemente estudada foi a *Teoria dos Tipos* de Russell, que, em particular, deu origem às diversas classes de lógicas hoje conhecidas: lógica de primeira ordem, de segunda ordem, etc. Além disso, essa teoria foi utilizada como base no famoso *Principia Mathematica* [27], que, como os *Grundgesetze* de Frege, tencionava ser uma vindicação concreta do *logicismo*, mas dessa vez invulnerável aos paradoxos então conhecidos. Estando baseada em axiomas de caráter questionavelmente lógico, como o axioma da infinidade, essa obra falhou enquanto defesa da tese logicista, mas, por outro lado, obteve sucesso em demonstrar a passibilidade da Matemática de ser formalmente reescrita com base em axiomas e regras de inferência (comentários na seção seguinte). Por fim, também foi estudado o *programa de Hilbert* [17], cujo objetivo mais destacado era a obtenção de uma prova “finitária” de consistência da Aritmética formalizada. As investigações de Hilbert tiveram amplas e profícuas conseqüências: elas desenvolveram o conceito de “metamatemática” e incitaram o estudo de questões associadas, como consistência, completude e independência, dando assim origem à *Teoria da Prova*; esses estudos sobre consistência, por sua vez, levaram ao trabalho de Gödel, ao qual se seguiu uma série de resultados limitativos obtidos durante a década de 1930; ainda durante essa década, foi desenvolvido o conceito de *computabilidade*, fruto de investigações sobre o problema da decisão proposto por Hilbert e Ackermann no fim da década de 1920.

A continuação natural dos estudos sobre o programa de Hilbert foram os já inicialmente mencionados *teoremas de incompletude de Gödel* [14], os quais mostraram que não se pode obter uma prova finitária de consistência da Aritmética formalizada, e, portanto, que o objetivo maior do programa de Hilbert não poderia ser atingido.[2] Eles também mostraram uma limitação inerente ao método axiomático formal, provando a invariável existência de afirmações indemonstráveis em sistemas consistentes e suficientemente expressivos. Como mencionado acima, esses resultados, além de altamente significativos, abriram espaço para muitos outros que se sucederam, tendo, em particular, introduzido novas e profícuas ferramentas matemáticas, como a chamada “numeração de Gödel”. Por fim, foi rapidamente estudado o trabalho de Turing em que ele apresenta as chamadas *máquinas de Turing*, as quais são consideradas como um

---

fundamentação da Matemática.

[2] O que não invalida a tentativa do programa formalista em si, nem muito menos os frutos que ela gerou.

modelo matemático que, de forma plenamente satisfatória, torna precisa a noção de "calculabilidade mecânica", e que assim viabilizou uma resposta para o problema da decisão proposto por Hilbert e Ackermann.

6.2 Conclusões em relação aos objetivos do trabalho

Dos estudos realizados neste trabalho, o que mais diretamente sugeriu uma resposta à motivação inicial acima mencionada foi aquele sobre os teoremas de incompletude de Gödel, mais especificamente falando, o primeiro deles,[3] pois este mostra que, em todo sistema formal consistente e suficientemente expressivo, existem afirmações que são formalmente indecidíveis—isto é, tais que nem ela nem a sua negação são demonstráveis no sistema—e que, não obstante, são passíveis de serem concluídas verdadeiras. Disso, segue que, seja qual for o conjunto de axiomas que escolhamos como base para uma teoria matemática (suficientemente expressiva), existirão afirmações (supondo o sistema[4] consistente) que serão verdadeiras mas não deriváveis a partir desses axiomas. Pode-se, entretanto, querer concluir que, assim sendo, "a Matemática não é formalizável", e isso merece uma discussão.

Não é verdade que, dada a demonstração de um teorema matemático, não é possível formalizá-la (ou pelo menos não existe disso um exemplo que, atualmente, seja amplamente conhecido). Algo relacionado e que é verdade, mas também bastante diferente da afirmação anterior, é que, em muitas demonstrações matemáticas, se faz uso de conjuntos aos quais não se pode fazer referência em certos sistemas formais; por exemplo: numa teoria aritmética formalizada em lógica de primeira ordem, os elementos do domínio (do discurso) são os números naturais, e, portanto, não se pode ter uma variável (numa fórmula) que denote um conjunto de números. Agora, desenvolver a Aritmética (ou outra teoria matemática) com restrições desse gênero é altamente restritivo: o matemático, na sua prática, não limita os conceitos que lhe servem de instrumento, mas apenas cuida para que a sua teoria seja rigorosa. Esse é, de fato, um ponto importante: o primeiro teorema de incompletude de Gödel nos dá um exemplo de uma afirmação verdadeira mas formalmente indemonstrável na aritmética de primeira ordem; agora, como a afirmação exibida por Gödel tem apenas um significado *meta-matemático*, houve uma busca por afirmações indemonstráveis (na aritmética de primeira ordem) e de significado

[3] O segundo teorema de incompletude de Gödel é altamente relevante para o programa de Hilbert, pois mostra a impossibilidade de se obter uma prova finitária de consistência da aritmética formalizada; isso é, contudo, uma limitação para a *fundamentação* da Matemática, e não para a sua *formalização* (conforme distinção feita na seção anterior).

[4] Aqui, a palavra "sistema (formal)" significa a junção de um cálculo dedutivo formal (particularmente, os seus axiomas lógicos e regras de inferência) com o conjunto de axiomas que define a teoria matemática em questão.

de fato *matemático*. Tais afirmações foram realmente encontradas,[5] mas elas se tornam demonstráveis quando se passa a poder fazer menção a conjuntos de números, ou conjuntos de conjuntos de números, etc.[6] É verdade que o primeiro teorema de incompletude de Gödel nos mostra que, a cada tal adição (ao sistema formal em questão), passam a haver novas afirmações indemonstráveis, mas o que se está discutindo aqui é a *possibilidade de as provas matemáticas serem reproduzidas formalmente, não necessariamente com base em um conjunto fixo de axiomas*.

Na verdade, a limitação sobre o "tipo" dos elementos do discurso (isto é, sobre o tipo das variáveis, nas lógicas de n-ésima ordem) é uma herança da *Teoria dos Tipos* de Russell (como medida para evitar os paradoxos na Teoria dos Conjuntos), mas ela não é, de forma alguma, uma restrição necessária. É possível, por exemplo, formalizar uma axiomatização da Teoria dos Conjuntos, como ZFC, e não aplicar qualquer restrição de tipo aos elementos do domínio do discurso,[7] como indicado em [7], VII.§2, de onde retiro o seguinte trecho:

> "... De forma mais geral: a experiência nos mostra que todas as afirmações matemáticas podem ser formalizadas em L_S (ou variantes suas), e que as afirmações matematicamente prováveis têm formalizações que são deriváveis a partir de Φ_0. Portanto é em princípio possível imitar todo raciocínio matemático em L_S usando as regras do cálculo de seqüentes. Nesse sentido, a lógica de primeira ordem é suficiente para a Matemática." [pág. 106][8]

De fato, não é difícil justificar a tese de que toda demonstração matemática é formalizável: uma prova é, em última instância, um aglomerado finito de símbolos, que compõem afirmações, as quais, por sua vez, encadeiam-se numa argumentação. Agora, com a sua *Begriffsschrift*, Frege nos mostrou como modelar afirmações em termos de relações, conectivos e quantificadores, e as primeiras em termos de variáveis, constantes e funções, todas essas coisas podendo ser escritas em linguagem simbólica; mostrou, além disso, que o encadeamento entre as afirmações de uma argumentação pode ser decomposto em pequenas inferências, as quais, por sua vez, também podem ser, de acordo com o seu tipo, representadas por meio de símbolos, de modo

[5] Veja [33], pág. 343; a *indução transfinita (ou "infinita") até* ε_0 foi a primeira afirmação a ser reconhecida como tal (esse resultado foi obtido por Gentzen em 1943; veja [31], págs. 287–308).

[6] Com relação às sentenças de Gödel, veja [35], págs. 610 (rodapé 48a) e 617, e, com relação à indução transfinita até ε_0, [33], pág. 317, e [31], pág. 285.

[7] Ou seja, o domínio passa a ser *o universo dos objetos matemáticos*, e portanto uma variável (numa fórmula) pode denotar um número natural, um conjunto de números naturais, uma função ou qualquer outro objeto matemático concebível na teoria em questão.

[8] Nesse trecho, L_S e Φ_0 são formalizações [de uma linguagem para] e [dos axiomas de] ZFC, respectivamente; o "cálculo de seqüentes" é o cálculo dedutivo utilizado no livro, mas o mesmo se aplica aos vários outros cálculos a ele equivalentes.

que é possível não apenas reescrever argumentações de forma simbólica, mas também verificar a sua correção[9] por meio de uma análise que leva em consideração apenas a estrutura das suas afirmações e inferências, ou seja, sem que se recorra à interpretação pretendida para os símbolos utilizados.[10]

Em resumo, eu argumento que Frege resolveu, *em essência*,[11] a questão de como se *formalizar* a Matemática. De fato, há tempos já existem formalizações de amplas partes da Matemática, como os 3 volumes do *Principia Mathematica* [27] (baseados na Teoria dos Tipos e publicados em 1910–3) e a série de 9 livros de *Nicolas Bourbaki*[12] (baseada na axiomatização de Zermelo e publicada em 1935–83); nenhuma dessas obras está escrita num nível completamente formal (como Frege havia feito), mas, em ambas, a possibilidade desse refinamento adicional era um quesito mínimo de rigor. Agora, uma questão associada e ainda em discussão é a do custo-benefício e da viabilidade prática da empreitada de reescrever as teorias matemáticas de maneira completamente formal: eu não vou me deter nesse ponto, me restringindo apenas a mencionar que o nível de automatização de tarefas permitido pelos computadores atuais abriu novas e promissoras possibilidades nessa área; para uma maior discussão a respeito, recomendo que o leitor consulte [15] (onde há, também, uma interessante revisão histórico-filosófica do assunto).

Finalmente, eu gostaria de fazer últimas considerações a respeito das implicações do primeiro teorema de incompletude de Gödel. Como já exposto acima, eu não as considero, no tocante a sistemas formais baseados na estratificação de tipos (Teoria dos Tipos) como impeditivas no que diz respeito à *formalização* da Matemática; entretanto, o teorema em questão se aplica também às axiomatizações para a Teoria dos Conjuntos, como ZFC, e isso ainda não foi discutido. O resultado particular é o mesmo: prova-se que, se ZFC for uma teoria consistente, então existem sentenças da teoria que são verdadeiras e, entretanto, formalmente indemonstráveis (na teoria em questão). Agora, ZFC é uma axiomatização que, há décadas, vem sendo utilizada como fundamentação para grande parte da Matemática (além de investi-

[9] Essa "correção" se refere às inferências, não dizendo respeito aos axiomas—pode-se, por exemplo, fazer deduções (inferências) corretas partindo-se de pressupostos incoerentes entre si.

[10] Observemos que o fato de que a segunda versão do formalismo de Frege [10] é inconsistente não contradiz o que está sendo dito: nessa segunda versão da *Begriffsschrift*, Frege introduziu o conceito de "curso-de-valores" de um predicado, e isso implicava, em particular, em estabelecer que todo predicado que se pudesse definir na linguagem possuía uma extensão, dando margem assim ao paradoxo de Russell. Agora, o conceito em questão não é de forma alguma necessário a um cálculo dedutivo (Frege o introduziu para levar a frente a sua defesa da tese logicista, isto é, a reescrita da Matemática baseada exclusivamente em axiomas "lógicos"), que é aquilo a que o texto acima se refere.

[11] Já que, apesar das diferenças entre o formalismo de Frege e o cálculo axiomático formal moderno, as principais características deste último já estavam presentes no primeiro.

[12] "Nicolas Bourbaki" é um pseudônimo para um grupo de matemáticos franceses, e a sua primeira publicação foi [1]. Uma descrição da série está presente em [15], págs. 9–12, e uma crítica (relacionada aos teoremas de incompletude de Gödel) em [23].

gada em si mesma), e o fato de que não se descobriu, até agora, qualquer inconsistência nessa teoria gera uma acreditação crescente na sua consistência (como dito em [7], pág. 111). Logo, o teorema em questão nos leva a crer que existem sentenças de ZFC que são verdadeiras mas que são indemonstráveis nessa teoria; isso, entretanto, não contradiz a tese aqui defendida de que toda demonstração matemática é passível de ser formalmente reescrita, pois não exibe uma demonstração matemática que não o seja. Mais uma vez, eu destaco que a tese em questão não é a de que ZFC (ou qualquer outra teoria matemática) seja suficiente para demonstrar qualquer teorema matemático: de fato, essa tese é insustentável, porque, se ZFC for consistente, então o teorema em questão mostra que existe uma afirmação verdadeira que essa teoria não pode demonstrar (e se, por outro lado, ZFC for inconsistente, então essa discussão perde o sentido), o mesmo acontecendo para qualquer outra teoria consistente e suficientemente expressiva. Nesse último fato, eu vejo, discutindo agora a questão da *fundamentação* da Matemática, a principal implicação do teorema em questão (e, em conjunto, dos vários resultados de incompletude obtidos para a Aritmética de primeira ordem): numa teoria, podem existir afirmações (matematicamente relevantes) que sejam nela formuláveis mas que, entretanto, somente sejam demonstráveis em teorias “mais fortes”; essa opinião está claramente ilustrada, para o caso particular da Aritmética, em [25]:

> “Na aritmética de primeira ordem (PA) o modo mais simples de raciocínio matemático é formalizado, onde apenas números naturais (isto é, objetos discretos) são utilizados. Outras, mais complicadas noções matemáticas (os números reais, os conjuntos infinitos arbitrários de Cantor) são formalizadas (como deveria ser) em teorias mais complicadas. Essas teorias mais complicadas são mais “poderosas” que PA, no sentido de que elas podem discutir objetos mais complicados (números reais, conjuntos infinitos arbitrários). Contudo, e quanto ao “poder” delas em discutir propriedades de números naturais? Poderiam elas provar um teorema sobre números naturais que não pode ser provado em PA?” (Cap. 3, §2: “Como encontrar a Aritmética em outras teorias formais”.)
>
> “… Portanto, nós obtivemos uma resposta positiva para a questão colocada na seção 3.2: sim, existem afirmações que envolvem apenas a noção de números naturais (isto é, você pode formulá-las na linguagem da aritmética de primeira ordem) mas que podem ser provadas apenas usando-se conceitos mais poderosos, por exemplo, da teoria dos conjuntos.” (Cap. 5, §4: “O segundo teorema de Gödel”.)

6.3 Desenvolvimentos posteriores

Neste trabalho, foram discutidos, em particular, tópicos importantes a respeito da Lógica Matemática durante as primeiras quatro décadas do século XX; entretanto, grandes foram os desenvolvimentos do assunto de 1930 em diante, e por isso alguns deles serão aqui mencionados.

Como mencionado anteriormente, os resultados de Gödel, que diziam respeito a conjuntos de axiomas ω-consistentes, foram generalizados (Rosser) para conjuntos simplesmente consistentes. Além disso, foram definidos (1) o conceito de *função recursiva (geral)* (Herbrand, Gödel, Kleene), generalizando o conceito de função recursiva primitiva, (2) o conceito de *definabilidade-λ* (Church, Kleene) e (3) o conceito de *processo combinatório finito* (Post), e todos eles foram provados serem equivalentes ao conceito de computabilidade de Turing, assim corroborando a tese de que a noção de *calculabilidade mecânica* havia sido precisamente capturada. Por fim, vários outros problemas (em adição ao problema da consistência de uma teoria) foram descobertos serem insolúveis, e uma teoria de insolubilidade de problemas foi desenvolvida. Vários dos principais artigos em que essas descobertas foram publicadas se encontram traduzidos em [4], e o leitor é encorajado a consultá-los.

Com relação ao programa de Hilbert, Gentzen provou em 1936 a consistência da aritmética de primeira ordem, recorrendo entretanto (como esperado, em face aos resultados de Gödel) a um teorema, a *indução transfinita até ε_0*, que não pode ser demonstrado naquela teoria; esse resultado foi um impulso no sentido dos estudos sobre como seria possível "contornar" as conclusões sobre consistência obtidas por Gödel (sem, naturalmente, contradizê-las). A respeito dos resultados de Gentzen, recomendo que o leitor consulte [31], e, a respeito do desenvolvimento da Teoria da Prova como um todo, o leitor pode consultar [33]. Em anos mais recentes, houve ainda trabalhos sobre um "programa de Hilbert relativizado"; o leitor pode consultar, por exemplo, [29] e os artigos subseqüentes do mesmo volume.

Por fim, eu gostaria de mencionar um fruto particularmente apreciado dos desenvolvimentos da Lógica Matemática como um todo: a *Análise Não-padrão*. Trata-se de um desenvolvimento da Análise que toma como base, no lugar das considerações envolvendo números reais tão pequenos quanto se queira (ε's e δ's), números *infinitesimais* e *infinitos*, da maneira inicialmente concebida por Leibniz. Baseado no trabalho de Skolem, que mostrou a existência de modelos não-padrões para a Aritmética (isto é, não isomorfos ao conjunto dos números naturais), Abraham Robinson baseou a Análise em modelos não-padrões do corpo dos números reais, dando uma fundamentação precisa para noções que haviam desempenhado papéis importantes no desenvolvimento do Cálculo. A respeito desse assunto, o leitor é recomendado a consultar a famosa obra de Robinson a respeito: [26].

Referências Bibliográficas

[1] Nicolas Bourbaki. *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)*. Éléments de Mathématique. Hermann, Paris, 1939. 50 páginas.

[2] John Newsome Crossley. *The emergence of number*. World Scientific, Singapura, 1987. ISBN: 9971-50-414-6.

[3] Martin David Davis. *The universal computer: the road from Leibniz to Turing*. W. W. Norton, New York, 2000. ISBN-10: 0-393-04785-7.

[4] Martin David Davis, editor. *The Undecidable*. Dover publications, Mineola (New York), 2004. ISBN-10: 0-486-43228-9. Obra originalmente publicada em 1965 por Raven Press Books.

[5] Julius Wilhelm Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig ('Brunswick', em inglês), 1888.

Traduzido para o inglês em [6].

[6] Julius Wilhelm Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers*. Dover Publications, New York, 1963. ISBN: 0-486-21010-3. Tradução de Wooster Woodruff Beman.

Contém uma tradução para o inglês de [5] (e outro artigo). Esta obra (original de 1901) entrou em domínio público e está livremente disponível em ⟨`http://www.gutenberg.org/etext/21016`⟩.

[7] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Mathematical logic*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994. ISBN-10: 0-387-94258-0.

[8] Friedrich Ludwig Gottlob Frege. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Louis Nebert, Halle, 1879.

Traduzido para o inglês em [35], págs. 1–82.

[9] Friedrich Ludwig Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Verlag Wilhelm Koebner, Wrocław ('Breslau', em alemão), 1884.

Traduzido para o inglês em [12].

[10] Friedrich Ludwig Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume 1. Verlag Hermann Pohle, Jena, 1893.

Porções introdutórias traduzidas para o inglês em [13].

[11] Friedrich Ludwig Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume 2. Verlag Hermann Pohle, Jena, 1903.

Apêndice traduzido para o inglês em [13].

[12] Friedrich Ludwig Gottlob Frege. *The Foundations of Arithmetic, a logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Northwestern University Press, Evanston (Illinois), second edition, 1980. Tradução para o inglês, por John Langshaw Austin, de [9]. ISBN: 0-8101-0605-1. Obra originalmente publicada em 1950 (2 ed. em 1953, revisada), por Basil Blackwell Publisher, contendo também o texto em alemão.

[13] Montgomery Furth, editor. *The Basic Laws of Arithmetic, Exposition of the System*. University of California Press, 1967. Segunda impressão (primeira em 1964). Tradução para o inglês das porções introdutórias de [10] e do apêndice de [11]. Introdução (de 55 págs.) e tradução feitas pelo editor.

[14] Kurt Friedrich Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–98, 1931.

Traduzido em [35] e [4].

[15] John Harrison. Formalized mathematics. Technical Report 36, Turku Centre for Computer Science, August 1996. Acessível em ⟨`http://www.tucs.fi/Publications/techreports/TR36.php`⟩.

[16] David Hilbert. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–79, 1902.

Tradução de palestra proferida em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris. Livremente disponível em ⟨`http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183417035`⟩.

[17] David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95(1):161–90, December 1926. DOI: 10.1007/BF01206605.

Texto de palestra proferida em 4 de junho de 1925. Traduzido para o inglês em [35], págs. 367–92.

[18] David Hilbert and Wilhelm Friedrich Ackermann. *Principles of Mathematical Logic*. American Mathematical Society, 1999. ISBN-13: 978-0-8218-2024-7.

Tradução da segunda edição do texto original. Edições originais, em alemão, de 1928 e 1938, por Julius Springer.

[19] Laurence R. Horn. Contradiction. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2006. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/fall2006/entries/contradiction/`⟩.

[20] Andrew D. Irvine. Principia mathematica. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2006. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/fall2006/entries/principia-mathematica/`⟩.

[21] Andrew D. Irvine. Russell's paradox. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2004. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/russell-paradox/`⟩.

[22] Felix Christian Klein. The arithmetizing of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2(8):241–9, 1896.

Tradução de palestra proferida em 02/11/1895, na reunião pública da Real Academia de Ciências de Göttingen. Livremente disponível em ⟨`http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183414645`⟩.

[23] Adrian R. D. Mathias. The Ignorance of Bourbaki (a commentary on the foundational stance of the Bourbaki group). *Mathematical Intelligencer*, 14(3):4–13, 1992.

A versão consultada está datada "22 de agosto de 1990" e disponível em ⟨`http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ardm/bourbaki.pdf`⟩.

[24] Giuseppe Peano. *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Fratres Bocca, Torino (em português: Turim), 1889.

Parcialmente traduzido, para o inglês, em [35].

[25] Karlis Podnieks. What is Mathematics: Gödel's Theorem and Around. Versão digital e ampliada do livro "Around Goedel's theorem", publicado em 1992 (2a edição), em russo. Acessível em ⟨`http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html`⟩.

[26] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis*. Princeton landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton (New Jersey), second edition, 1996. ISBN-10: 0-691-04490-2.

Nova impressão da segunda edição da obra, que havia sido publicada em 1966 e 1974.

[27] Bertrand Russell and Alfred Whitehead. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, 1910,2,3 (3 volumes).

Os três volumes estão publicamente acessíveis em ⟨`http://name.umdl.umich.edu/AAT3201.0001.001`⟩.

[28] Eric Schechter. *A home page for the Axiom of Choice*. Disponível em: ⟨`http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/choice.html`⟩. Acesso em: 02/02/2007.

[29] Wilfried Sieg. Hilbert's program sixty years later. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(2):338–48, 1988.

Esse é o primeiro de 3 artigos que foram publicados no mesmo volume (págs. 337–84) em função de um simpósio sobre o programa de Hilbert realizado em 29/12/1985 (Washington, EUA).

[30] Robin Smith. Aristotle's logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2006. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/win2006/entries/aristotle-logic/`⟩.

[31] M. E. Szabo, editor. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969. ISBN: 7204 2254 X.

[32] Roberto Torretti. Nineteenth century geometry. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2007. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/spr2007/entries/geometry-19th/`⟩.

[33] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Number 43 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, second edition, July 2000. ISBN-13: 9780521779111. DOI: 10.2277/0521779111.

[34] Alan Mathison Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. In *Proceedings of the London Mathematical Society*, volume 42, pages 230–65, 1936–7. Correções no volume 43 (1937), págs. 544–46.

Reproduzido em [4], págs. 115–54.

[35] Jean Louis Maxime van Heijenoort, editor. *From Frege To Gödel*. Harvard University Press, 2002. ISBN: 0-674-32449-8.

Edição mais recente da obra que foi originalmente publicada em 1967, na série *Source Books*, cujo editor geral era Edward H. Madden.

[36] John Walker. *The Analytical Engine*. Disponível em: ⟨`http://www.fourmilab.ch/babbage/contents.html`⟩. Acesso em: 16/08/2007.

[37] Richard Zach. Hilbert's program. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2003. ⟨`http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program/`⟩.