

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

ANDRÉ LUÍZ SAMPAIO DE ALENCAR

UMA NOVA METODOLOGIA DE JOGOS DINÂMICOS LINEARES
QUADRÁTICOS

FORTALEZA

2011

ANDRÉ LUÍZ SAMPAIO DE ALENCAR

UMA NOVA METODOLOGIA DE JOGOS DINÂMICOS LINEARES
QUADRÁTICOS

Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de
Teleinformática, da Universidade Federal do
Ceará, como parte dos requisitos exigidos para
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de
Teleinformática.

Orientador: Prof. Dr. José Tarcisio Costa
Filho

FORTALEZA

2011

*A minha família, em especial aos
meus pais.*

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Tarcisio Costa Filho, pela confiança em mim depositada, pelo entusiasmo na transmissão de novos conhecimentos e pela competência com a qual orientou todo o desenvolvimento desta dissertação.

Aos colegas do laboratório CENTAURO/UFC, pelo excelente ambiente de trabalho.

Aos meus pais Osvaldo Simão Alencar Júnior e Rita de Cássia Sampaio Carvalho de Alencar, as minhas irmãs Ana Rúbia Sampaio de Alencar e Ádria Maria Sampaio de Alencar, e a minha namorada Lívia Maria Miranda da Silva, pelo incentivo.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Teleinformática que de forma direta ou indireta participaram do desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

Resumo

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado ao estudo de situações que surgem quando múltiplos agentes de decisão buscam atingir seus objetivos individuais, possivelmente conflitantes entre si. Em sua formulação dinâmica linear quadrática (LQ), as soluções de equilíbrio de Nash dos jogadores podem ser obtidas em termos das equações algébricas de Riccati acopladas, que, a depender do método numérico utilizado para seu cálculo, podem gerar resultados insatisfatórios sob o ponto de vista da estabilidade e precisão numérica. Neste sentido, esta dissertação propõe um novo algoritmo para uma solução alternativa das equações algébricas de Riccati acopladas associadas aos jogos dinâmicos (LQ), com estrutura de informação em malha aberta, utilizando, para isso, conceitos da teoria da dualidade e otimização estática convexa. Em adição, obtém-se uma nova metodologia para a síntese de uma família de controladores ótimos. A teoria dos jogos também revela um enorme potencial de aplicação em problemas de controle multiobjetivo, no qual está incluído o controle H_∞ , que pode ser formulado como um jogo dinâmico de soma-zero. Considerando essa formulação, as novas metodologias propostas neste trabalho são estendidas aos problemas de controle H_∞ com rejeição de perturbação, gerando resultados com melhores propriedades de desempenho e estabilidade que os obtidos via equação algébrica de Riccati modificada. Por fim, através de exemplos numéricos e simulações computacionais, as novas metodologias são confrontadas com as metodologias tradicionais, evidenciando-se os aspectos mais relevantes de cada abordagem.

Palavras-chave: Equação Algébrica de Riccati Acoplada, Equilíbrio de Nash, Jogo Dinâmico Linear Quadrático, Problema de Controle H_∞ .

Abstract

The game theory is a branch of mathematics concerned with the study of situations that arise when multiple decision agents seek to attain their own objectives, possibly conflicting each other. In a dynamic linear quadratic (LQ) formulation, the Nash equilibrium solutions of the players can be obtained in terms of the coupled algebraic Riccati equations, which, depending on the method used for calculation, can yield unsatisfactory results under the stability and the numerical precision points of view. In this sense, this work proposes a new algorithm for an alternative solution for the coupled algebraic Riccati equations associated with the dynamic (LQ) games, with open-loop structure information, through concepts of the duality theory and static convex optimization. In addition, a new methodology for the synthesis of a family of optimal controllers it's obtained.

The game theory also reveals great potential application for multi-objective control problems, where the H_∞ control is included, which can be formulated as a zero-sum dynamic game. Considering this formulation, the new proposed methodologies in this work are extended to H_∞ control problems with disturbance rejection, yielding results with better stability and performance properties than the ones obtained via modified algebraic Riccati equation. Finally, through numerical examples and computational simulations, the new methodologies are confronted with the traditional methodologies, showing the most relevant aspects from each approach.

Keywords: Coupled Algebraic Riccati Equation, Nash Equilibrium, Dynamic Linear Quadratic Game, H_∞ control problem

Lista de Figuras

2.1	Análise gráfica das curvas de reação.	11
2.2	Possíveis Configurações das Curvas de Reação.	13
2.3	Convergência de Soluções de Equilíbrio de Nash.	14
3.1	Diagrama de blocos do sistema de controle.	49
4.1	Convergência dos coeficientes da matriz $\mathbf{M}_i(k)$ com $T = 50$	55
4.2	Trajетórias de estado obtidas através do método tradicional e método I. . .	56
4.3	Trajетórias de estado obtidas através do método tradicional e método I. . .	57
4.4	Trajетórias de controle obtidas através do método tradicional e método I. .	57
4.5	Trajетórias de controle obtidas através do método tradicional e método I. .	58
4.6	Trajетórias de estado obtidas através do método II e método tradicional. .	59
4.7	Trajетórias de estado obtidas através do método II e método tradicional. .	59
4.8	Trajетórias de controle obtidas através do método II e método tradicional. .	60
4.9	Trajетórias de controle obtidas através do método II e método tradicional. .	60
4.10	Contração da matriz $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$	61
4.11	Sistema Térmico.	62
4.12	Trajетórias de estado obtidas através do método tradicional e método I. . .	63
4.13	Trajетórias de controle obtidas através do método tradicional e método I. .	64
4.14	Trajетórias de estado obtidas através do método II e método tradicional. .	64
4.15	Trajетórias de controle obtidas através do método II e método tradicional. .	65
4.16	Contração da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{F}}$	66
4.17	Exemplo de estabilização do sistema com o emprego do método II para a síntese dos controladores.	66

4.18	Trajelórias de estado obtidas através do método II e método tradicional. .	67
4.19	Trajelórias de controle obtidas através do método II e método tradicional.	68
4.20	Estabilizando a saída do sistema com o emprego do método II para a síntese dos controladores.	68

Lista de Tabelas

2.1	Relação entre a otimização e a teoria dos jogos não cooperativos.	10
4.1	Tabela comparativa entre os métodos tradicionais e os novos métodos propostos para solucionar o problema de um jogo dinâmico de 2 jogadores. . .	53
4.2	Custos via novo método e método tradicional.	54
4.3	Comparação entre as matrizes acopladas de Riccati obtidas pelo método tradicional e pelo novo método.	54
4.4	Comparação entre ganhos 1 obtidos pelo método tradicional e pelo método I.	55
4.5	Comparação entre os ganhos 2 obtidos pelo método tradicional e pelo método I.	55
4.6	Análise do condicionamento da matriz $\mathbf{H}$	56
4.7	Comparação entre os valores dos ganhos obtidos pelo método II, com suas respectivas normas.	60
4.8	Análise do condicionamento da matriz $\hat{\mathbf{H}}$	61
4.9	Custos via método tradicional e novo método.	62
4.10	Comparação entre as matrizes acopladas de Riccati obtidas pelo método tradicional e pelo novo método.	62
4.11	Comparação entre os ganhos 1 obtidos pelo método tradicional e pelo novo método.	63
4.12	Comparação os ganhos 2 obtidos pelo método tradicional e pelo novo método.	63
4.13	Análise do condicionamento da matriz $\mathbf{H}$	63
4.14	Comparação entre os ganhos obtidos pelo método II, com suas respectivas normas.	65
4.15	Análise do condicionamento da matriz $\hat{\mathbf{H}}$	65

Lista de Símbolos

$\mathbf{X}$	Notação matricial - Letra em negrito
$(.)^T$	Transposição matricial
$\ \cdot\ = \ \cdot\ _2$	Norma euclidiana
$\equiv$	Equivalente a
$\triangleq$	Definido como
$\square$	Fim da demonstração
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial de números reais com dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrizes de números reais com dimensão $n \times m$
AD_i	i -ésimo jogador
N	Número de jogadores
I	Conjunto de estágios do jogo
$\mathbf{I}$	Matriz identidade com dimensões compatíveis
$\mathbf{u}_i$	Vetor de decisão de AD_i
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{y}_i$	Vetor de observação de AD_i
U_i	Espaço das ações de AD_i
U_{-i}	Espaço das ações dos jogadores, exceto AD_i
Y_i	Espaço das observações de AD_i
X	Espaço dos estados
Φ_i	Espaço das estratégias de AD_i
J_i	Custo funcional de AD_i
N^i	Espaço das informações de AD_i
η_i	Informação recebida e requisitada por AD_i
l_i	Resposta ótima de AD_i

Lista de Siglas

ARE	<i>Algebraic Riccati Equation</i>
CC	Corrente contínua
LQ	Linear quadrático
LQG	Linear quadrático gaussiano

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Siglas	ix

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação e Objetivos da Dissertação	2
1.1.1 Objetivo Geral	3
1.1.2 Objetivos Específicos	3
1.2 Estrutura da Dissertação	4
1.3 Produção Científica	5
2 Fundamentos da Teoria dos Jogos	6
2.1 Introdução	6
2.2 Conceitos Básicos	7
2.3 Estratégia de Equilíbrio de Nash em Jogos Estáticos não Cooperativos . .	10
2.3.1 Resposta Ótima e Curva de Reação	10

2.3.2	Equilíbrio de Nash	11
2.3.3	Estabilidade da Solução de Nash	12
2.3.4	Existência e Unicidade da Solução de Nash	14
2.4	Jogos Dinâmicos Discretos e Determinísticos	16
2.4.1	Formulação Geral	16
2.4.2	Solução de Equilíbrio de Nash em Malha Aberta	19
2.4.3	Jogos de Soma Zero	24
2.5	Comentário Final	26
3	Nova Metodologia para Síntese de Controladores LQ via Jogos Dinâmicos	28
3.1	Introdução	28
3.2	Formulação do Problema	28
3.3	Formulação Estática via Teoria da Dualidade	29
3.4	Solução de Equilíbrio de Nash	32
3.5	Estabilidade da Solução de Equilíbrio de Nash	34
3.6	Novo Algoritmo para a Solução das ARE Acopladas	34
3.7	Síntese de Controladores LQ	42
3.7.1	Método I - Sem Procedimento de Regularização	43
3.7.2	Método II - Com Procedimento de Regularização por Regiões de Confiança	43
3.8	Controle H_∞ via Jogos de Soma Zero	46
3.8.1	Projeto de Controle H_∞ via Nova Metodologia	48
3.9	Comentário Final	50
4	Análise e Resultados	52
4.1	Projeto 1- Jogo Dinâmico LQ	53
4.2	Projeto 2 - Sistema Térmico	61

4.3	Projeto 3 - Controle Digital de Motor CC	67
4.4	Comentário Final	68
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	70
5.1	Trabalhos Futuros	71
	Apêndice A – O Teorema de Ponto Fixo de Banach	73
	Apêndice B – Demonstração da Proposição (2.4.1)	76
	Apêndice C – Procedimento de Regularização por Regiões de Confiança	79
	Referências	83

1 INTRODUÇÃO

Um problema fundamental de importância teórica e prática para a teoria de controle é o projeto de controladores que tenham propriedades aceitáveis de desempenho e de estabilidade não somente para um sistema dinâmico com sinais de controle conhecidos, mas para uma família de sistemas submetidos a vários tipos de sinais de controle e de perturbações. Este problema tem sido tema de muitos trabalhos científicos nos últimos cinquenta anos, e tem como etapa inicial comum desses trabalhos a formulação de um problema bem definido matematicamente. Esta formulação requer a otimização de um índice de desempenho associado a metodologias disponíveis ou a serem desenvolvidas para a solução do problema de projeto de controladores. Duas dessas metodologias, análise de sensibilidade e o projeto Linear Quadrático Gaussiano (LQG) dominaram a teoria de controle nos anos setenta e oitenta. A análise de sensibilidade considerava a presença de pequenas perturbações no modelo nominal, enquanto o projeto LQG permitia uma descrição estatística Gaussiana para as perturbações. Neste período, a tentativa do emprego da teoria dos jogos dinâmicos (Basar & Olsder (1999); Rasmussen (2001); Pachter & Pham (2010); Engwerda & Salmah (2010); Engwerda (2007); Engwerda (2006); Shen & Cruz (2006)) para o projeto de controladores robustos foi considerada com a terminologia de controlador *minmax* adotada da teoria de decisão dos anos cinquenta. Para esta formulação do problema de controle, o objetivo é obter a síntese de controladores que minimizem um dado índice de desempenho sob os piores sinais de perturbação possíveis ou sob as variações paramétricas, onde em tais casos se maximiza o mesmo índice de desempenho. No entanto, a teoria de jogos dinâmicos, considerando as estruturas de informação do problema de controle, apresentava resultados preliminares que não permitiram o desenvolvimento de métodos suficientemente consistentes para o projeto de controladores robustos. Com os importantes desenvolvimentos de técnicas de solução de problemas de jogos dinâmicos, ocorridos nos últimos anos, passou-se a considerar a obtenção de métodos numéricos que pudessem refletir o máximo possível as propriedades físicas do problema, de modo que fosse possível garantir, além de uma boa eficiência computacional para o

método, resultados fisicamente significativos. A partir dos anos noventa, a pesquisa nesta direção revelou um enorme potencial de aplicação de teoria dos jogos dinâmicos e de métodos de programação convexa em diversos problemas de controle até então não resolvidos, como por exemplo, o problema de controle com múltiplos objetivos (normalmente conflitantes) no qual está incluído o problema de controle robusto H_∞ (Zhou et al. (1996); Green & Limebeer (1995); Doyle et al. (1991); Francis (1987); Basar (2003); Boyd et al. (2002); Nogueira & Oliveira (2009); Rank (1998)).

Neste sentido, dentre as várias metodologias distintas para o problema do projeto do controlador H_∞ , a que utiliza ferramentas da teoria de jogos dinâmicos parece ser a mais simples e mais intuitiva, ou seja, o problema original de controle H_∞ é um problema de otimização multiobjetivo, podendo, portanto, ser tratado como um jogo dinâmico de soma zero (Basar & Bernhard (1995); Basar (1991); Xu & Koichi (1994); Stoorvogel (2000)).

1.1 Motivação e Objetivos da Dissertação

Boyd et al. (2002) apresenta uma metodologia para a solução do problema do regulador linear quadrático (Filho & Alencar (2010); Naidu (2003); Lewis & Syrmos (1995); Ogata (1995)), em que o problema dinâmico primal é transformado em um problema estático com estruturas matriciais especiais, que favorecem e possibilitam a proposição de um interessante método alternativo para a obtenção da solução equivalente matricial de Riccati.

Já Vilmar & Filho (2007), em sua dissertação, apresenta uma metodologia para a solução do problema do regulador linear quadrático, onde, através de princípios da dualidade, o problema é redefinido em sua forma dual, via método de Lagrange, e, posteriormente, transformado em um problema estático. Baseando-se nessa nova formulação, é, também, apresentado um novo algoritmo para a solução das equações algébricas de Riccati (ARE) e uma nova metodologia para a síntese de controladores, tanto para o problema do regulador linear quadrático, quanto para o problema de controle H_∞ .

Neste sentido, a motivação para esta dissertação resulta da possibilidade da transformação de problemas dinâmicos em problemas estáticos equivalentes, representando, para a teoria dos jogos, uma forma de se obter, a partir de um jogo dinâmico descrito por equações complexas, um jogo estático dual equivalente descrito por equações mais simples, como pode ser visto em Filho & Bottura (1992).

Essa nova formulação estática do jogo será considerada, nesta dissertação, como um

passo intermediário para a proposição de uma nova metodologia de jogos dinâmicos lineares quadráticos (LQ) (Basar & Olsder (1999); Pachter & Pham (2010); Nian et al. (2006); Engwerda (2006)) de tempo discreto, baseada nas estratégias de equilíbrio de Nash em malha aberta (Engwerda (2005); Engwerda (1998a); Engwerda (1998b); Papavassilopoulos et al. (1979); Shen & Cruz (2006)), em que os seguintes objetivos deverão ser alcançados.

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um novo algoritmo para uma solução alternativa das ARE acopladas associadas aos jogos dinâmicos LQ, baseando-se na teoria da dualidade e otimização estática convexa para a solução do jogo dinâmico LQ, e, conseqüentemente, propor uma nova metodologia para a síntese de uma família de controladores ótimos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Propor uma nova metodologia (método I) via otimização convexa para o projeto e síntese de controladores LQ para o problema de jogos dinâmicos LQ com realimentação de estado e estrutura de informação em malha aberta, em que os controladores não sejam parametrizados em termos do par de equações acopladas de Riccati.
- Propor uma nova metodologia (método II) para o projeto e síntese de controladores LQ para o problema de jogos dinâmicos LQ com realimentação de estado e estrutura de informação em malha aberta, em que, através do emprego de estratégias de regularização em regiões de confiança, seja possível obter uma família de ganhos estabilizantes para o jogo, tais que, com esta metodologia, melhores índices de desempenho possam ser atingidos e soluções melhores condicionadas obtidas, em comparação com os métodos tradicionais via ARE acopladas.
- Formular o problema de controle H_∞ como um jogo de soma zero e estender as novas metodologias desenvolvidas para a síntese de controladores H_∞ , via métodos I e II, aplicando-as em problemas de rejeição de perturbação.
- Comparar, via exemplos numéricos e simulações computacionais, a metodologia tradicional via ARE com a metodologia proposta neste trabalho para o projeto de controladores LQ tanto em jogos dinâmicos de soma não zero quanto em problemas de controle H_∞ (jogos dinâmicos de soma zero).

1.2 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada da maneira descrita a seguir:

► Capítulo 2: Fundamentos da Teoria dos Jogos

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos da teoria dos jogos necessários para a obtenção do jogo em sua formulação tradicional, servindo como um jogo de referência frente às novas metodologias de jogos a serem desenvolvidas na sequência do trabalho. Uma breve pesquisa bibliográfica é realizada na introdução, apresentando-se, desde alguns dos trabalhos pioneiros na área da teoria dos jogos, até as publicações mais recentes. Em seguida, alguns conceitos básicos são sucintamente discutidos e os elementos principais de um jogo são introduzidos. Por fim, o conceito de estratégia de equilíbrio de Nash é definido e sua solução é obtida para jogos estáticos e dinâmicos de soma zero e soma não zero. Considerações acerca da estabilidade, existência e unicidade da solução de Nash são também estabelecidas.

► Capítulo 3: Nova Metodologia para Síntese de Controladores LQ via Jogos Dinâmicos

Neste capítulo, é apresentada, como contribuição desta dissertação, uma nova metodologia para a solução das ARE acopladas presentes em problemas de jogos dinâmicos de soma não zero e, em adição, são propostos dois novos métodos para a síntese de controladores LQ, baseando-se nesta nova metodologia. O problema de controle H_∞ é formulado como um jogo de soma zero e as novas metodologias desenvolvidas são estendidas para esta classe de jogo dinâmicos.

► Capítulo 4: Análise e Resultados

Neste capítulo, são apresentados três exemplos de projetos de síntese de controladores para sistemas dinâmicos, em que se obtém as soluções via jogo de referência e via novas metodologias desenvolvidas no capítulo 3. Com os resultados obtidos, através de simulações computacionais, é possível comprovar a equivalência entre a solução das ARE acopladas via novo método e metodologia tradicional. O mesmo ocorre para o método I, proposto, e o método tradicional, utilizados para a síntese de controladores LQ. Em particular, é mostrado que o método II é bastante atraente para o projeto e síntese de controladores, no sentido de se obter uma família de ganhos estabilizantes que geram soluções bem condicionadas.

► Capítulo 5: Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho.

1.3 Produção Científica

Durante o período de desenvolvimento desta dissertação, foi produzido o seguinte artigo:

- **Regulador Linear Quadrático via Otimização Convexa**, José Tarcisio Costa Filho, André Luíz Sampaio de Alencar, XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Bento Gonçalves, Brasil, Agosto, 2010.

2 *Fundamentos da Teoria dos Jogos*

2.1 Introdução

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado ao estudo de situações que surgem quando múltiplos agentes de decisão buscam atingir seus objetivos individuais, possivelmente conflitantes entre si. Dessa forma, o desempenho de um agente de decisão (no sentido de atingir seu objetivo) é influenciado pela ação dos demais agentes de decisão envolvidos na situação, o que pode contribuir para um aumento da competitividade entre os mesmos, principalmente se o êxito de alguns desses agentes implicar o fracasso de outros.

Embora existam registros de trabalhos anteriores (Bertrand (1883); Neumann (1928); Hotelling (1929)), nos quais identificam-se alguns elementos diretamente relacionados à teoria dos jogos, o tema ganhou maior notoriedade em Neumann & Morgenstern (1944), resultado da parceria entre o matemático húngaro John von Neumann e o economista austríaco Oskar Morgenstern. Neste livro, os autores aprofundam as idéias desenvolvidas até o momento, tanto por eles mesmos quanto por outros pesquisadores, e produzem a mais abrangente obra sobre a teoria dos jogos, até então conhecida na época. Essa obra é responsável pelo surgimento do conjunto de modernos conceitos matemáticos sobre teoria dos jogos, o qual foi inicialmente, inclusive na obra em questão, aplicado na área da economia, tendo o objetivo de examinar as interações entre agentes econômicos, tais como empresas em um mercado. Posteriormente, conflitos de interesses do ponto de vista das ciências políticas, das estratégias militares e da sociologia passaram a ser modelados sob a ótica da teoria dos jogos.

Em Nash (1950) e Nash (1951), o matemático inglês John Nash concebe suas maiores contribuições para a área da teoria dos jogos, destacando-se em sua obra a demonstração do Ponto de Equilíbrio de Nash, que surge quando o autor considera a possibilidade da coexistência entre competição e cooperação.

Avançando algumas décadas, destacam-se alguns trabalhos de J. B. Cruz e M. A. Simaan (Simaan & Cruz (1973a); Simaan & Cruz (1973c); Simaan (1977); Cruz (1978)), que concentraram suas pesquisas na estratégia de Stackelberg, introduzindo as primeiras idéias sobre os jogos hierárquicos. Além disso, em Simaan & Cruz (1973b) é proposta uma metodologia para a obtenção da solução de Nash para o jogo em malha aberta, e em Papavassilopoulos et al. (1979) é feita uma análise acerca da existência de tal solução. Uma contribuição efetiva para a computação assíncrona paralela e distribuída de estruturas especiais de jogos dinâmicos é apresentada em Filho & Bottura (1991).

De particular interesse para esta dissertação, o jogo linear quadrático (Papavassilopoulos & Olsder (1984); Engwerda (2006); Pachter & Pham (2010)), definido na Seção 2.4.2, apresenta características interessantes que auxiliam na análise do jogo, possibilitando a obtenção das soluções de equilíbrio de uma maneira mais simples, tanto em sua forma estática como dinâmica. Em Engwerda & Salmah (2010) são estabelecidas condições necessárias e suficientes para a obtenção da solução analítica de equilíbrio de Nash em malha aberta (Abou-Kandil & Bertrand (1986); Nian et al. (2006)) em termos de suas equações acopladas de Riccati (FREILING et al., 1997). Já em Engwerda (1998b) são considerados os aspectos computacionais para se obter essa solução de equilíbrio nos jogos LQ (lineares quadráticos).

Basar (1991), Xu & Koichi (1994), Basar & Bernhard (1995) e Stoorvogel (2000) mostram que o problema de rejeição de perturbação (Baek (2003); Petersen (2006); Renato et al. (2010)) pode ser solucionado fazendo uso direto de resultados obtidos com os jogos dinâmicos LQ de soma zero, resultando em metodologias alternativas para o projeto de controle H_∞ (Yaesh & Shaked (1991); Stoorvogel et al. (1994); Dong & Yang (2008); Boyd et al. (2002)) para solução deste problema.

2.2 Conceitos Básicos

Ao longo desta seção, serão explanados, de forma sucinta, alguns conceitos básicos relacionados à teoria dos jogos, descrevendo os elementos que compõem um jogo, e diferenciando algumas das várias configurações de jogos disponíveis. Basar & Olsder (1999) é utilizado como referência principal para a escrita dessa seção.

Considerando a situação de jogo descrita na seção 2.1, em que vários agentes de decisão buscam atingir o seu objetivo individual, e sabendo-se que tal procedimento depende não apenas de sua própria ação, mas também da ação dos outros agentes de decisão, podemos

identificar os elementos básicos de um jogo, a saber: o conjunto de agentes de decisão, o conjunto de possíveis ações de cada agente de decisão e o conjunto de funções custo de cada agente de decisão.

O conjunto de **agentes de decisão** ou **jogadores** é formado pelos elementos envolvidos na situação conflituosa ou **jogo**. Neste trabalho, o i -ésimo jogador envolvido no jogo é denotado por AD_i . Os jogadores determinam suas **ações**, **decisões** ou **controles** em resposta a uma **estratégia** ou **regra de decisão** adotada pelos mesmos, onde U_i e Φ_i representam o conjunto (espaço) das ações e estratégias, respectivamente, admissíveis à AD_i . As estratégias podem ser determinísticas ou estocásticas, sendo as primeiras classificadas como **estratégias puras** e as últimas como **estratégias mistas**. Como é sabido, a ação de um jogador qualquer possui influência no resultado do jogo, dessa forma, admitindo-se que os jogadores são racionais, é esperado que cada jogador adote a estratégia que lhe proporcione o melhor resultado do jogo, considerando as informações que ele possui.

A **função objetivo** representa o grau de satisfação do jogador com respeito ao processo de otimização a ser realizado através de um **índice de desempenho**. Com a análise da função objetivo, pode ser possível adotar um critério que permita a formação de uma estratégia para o jogador. Normalmente, é constituída por importantes parâmetros do jogo, como as variáveis de controle (ou variáveis de decisão) dos jogadores e variáveis de estado do sistema (considerando o contexto do controle de sistemas dinâmicos). Quando o critério de otimização é maximizar a função objetivo, ela pode ser chamada de **função utilidade**. Caso o critério seja a minimização da função objetivo, ela pode ser chamada de **função custo**. Matematicamente, a função objetivo de AD_i pode ser representada através do mapeamento abaixo, considerando U_i o conjunto das ações admissíveis desse jogador, e um total de N jogadores envolvidos no jogo:

$$J_i : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Em um **jogo de soma zero**, a soma das funções custo de todos o jogadores envolvidos no jogo é igual a zero, ou seja, considerando, respectivamente, $\mathbf{u}_i$ e J_i como o vetor de decisão e a função custo de AD_i , em um total de N jogadores, temos que $\sum_{i=1}^N J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N) \equiv 0$. Caso o valor desse somatório seja uma constante diferente de zero, temos um **jogo de soma não zero**, que pode ser transformado em um jogo de soma zero através de uma simples translação, sem alterar as características essenciais do jogo.

Quando um jogo possui um número contável de níveis ou estágios, em que um estágio de um jogo pode ser entendido como uma rodada de decisões dos jogadores, ele é classificado como um **jogo discreto**. Se o processo de decisão ocorrer de forma contínua no tempo, o jogo é classificado como um **jogo contínuo**. Neste sentido, em um jogo discreto, cada jogador atua somente em intervalos discretos de tempo, enquanto que, em um jogo contínuo, cada jogador atua ao longo de um intervalo tempo que pode ser fixado *a priori* ou determinado através das regras do jogo e das ações dos jogadores.

Os jogos em que cada jogador possui disponível um conjunto finito de possíveis ações são denominados de **jogos finitos**. Caso o espaço das estratégias seja infinito, têm-se os **jogos infinitos**.

Um **jogo dinâmico** é definido como um jogo no qual se permite que pelo menos um jogador utilize uma estratégia que dependa de ações passadas dele e/ou de outros jogadores. Jogos com um estágio, onde os jogadores atuam de maneira independente entre eles, ou seja, atuam simultaneamente, são denominados de **jogos estáticos**. Entretanto, por um abuso de linguagem, quaisquer jogos com mais de um estágio, mesmo com os jogadores atuando simultaneamente, são considerados dinâmicos.

Em um jogo **não cooperativo**, os jogadores agem de maneira egoísta, sem levar em conta interesses e limitações dos demais jogadores, não sendo possível haver algum tipo de negociação ou acordo entre jogadores, com o objetivo de formular as ações que devem ser tomadas, de tal forma que os interesses e limitações de todos os demais jogadores sejam considerados.

A comunicação entre os jogadores é permitida nos jogos não cooperativos. Entretanto, não pode haver nenhum tipo de acordo entre os mesmos, ou seja, o interesse individual prevalece sobre o interesse dos demais jogadores. Dessa forma, as funções custo associadas à cada jogador devem ser tratadas independentemente e otimizadas simultaneamente, não sendo possível a formulação de um problema de controle ótimo equivalente. Para o caso de um jogo de N jogadores, será associado N problemas de otimização do tipo:

$$\min_{\mathbf{u}_i} J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2)$$

Neste ponto do trabalho, com a apresentação de alguns conceitos relacionados à teoria dos jogos, é possível descrever a partir de quais ramos da matemática a teoria dos jogos se fundamentou. Na Tabela 2.1, observa-se a relação existente entre a otimização e a teoria dos jogos não cooperativos. A teoria dos jogos estáticos constitui uma extensão da

programação matemática, quando se considera um problema com mais de um agente de decisão. Analogamente, a teoria dos jogos dinâmicos constitui uma extensão da teoria de controle ótimo, quando no problema existe mais de um agente de decisão envolvido.

	Um Jogador (Otimização)	Vários Jogadores (Teoria dos Jogos)
Problema Estático	Programação Matemática	Jogos Estáticos
Problema Dinâmico	Controle Ótimo	Jogos Dinâmicos

Tabela 2.1: Relação entre a otimização e a teoria dos jogos não cooperativos.

Neste trabalho, será explorada a relação entre o problema de controle ótimo e o jogo dinâmico para a derivação de importantes resultados relacionados ao controle de sistemas dinâmicos. Além disso, será considerada a possibilidade da transformação de um jogo dinâmico descrito por um conjunto de equações dinâmicas complexas em um jogo estático descrito por um conjunto de equações estáticas mais simples.

2.3 Estratégia de Equilíbrio de Nash em Jogos Estáticos não Cooperativos

Nesta seção, são definidas as estratégias de equilíbrio de Nash para jogos estáticos não cooperativos. Para isso, os conceitos de resposta ótima e curva de reação são formalmente apresentados. Considerações acerca da estabilidade, existência e unicidade da solução de equilíbrio de Nash são posteriormente realizadas.

Algumas definições são necessárias à formulação do jogo. Considera-se um jogo de N jogadores, sendo $\{AD_i\}$, $\forall i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, N\}$ o conjunto destes agentes, em que AD_i possui uma função custo J_i que depende não apenas de sua ação, mas também da ação de alguns ou de todos os outros agentes. A ação de AD_i , denotada por $\mathbf{u}_i$, é representada como um elemento de um espaço de dimensão finita U_i .

2.3.1 Resposta Ótima e Curva de Reação

Os conceitos de **resposta ótima** e **curva de reação** para jogos de soma não zero, estáticos e não cooperativos são estabelecidos através da definição que segue:

Definição 2.3.1 *Em um jogo de soma não zero com N jogadores, considere que o mínimo de $J_1(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ em relação a $\mathbf{u}_1$ seja obtido para cada $\mathbf{u}_{-1} \triangleq (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_N) \in U_{-1} \triangleq (U_2 \times U_3 \times \dots \times U_N)$. Então, o conjunto $l_1(\mathbf{u}_{-1}) \subset U_1$ é chamado de resposta ótima*

ou reação racional e é definido como:

$$l_1(\mathbf{u}_{-1}) = \{\xi \in U_1 : J_1(\xi, \mathbf{u}_{-1}) \leq J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{-1}), \forall \mathbf{u}_1 \in U_1\} \quad (2.3)$$

Se l_1 for um conjunto singleton, ou seja, que possui um único elemento $\mathbf{u}_1 \in U_1$ para todo $\mathbf{u}_{-1} \in U_{-1}$, então, será chamado de curva de reação de AD_1 . As curvas de reação dos outros jogadores são definidas de maneira similar.

Considerando um jogo específico de 2 jogadores, em que $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$, são apresentadas, na Figura 2.1(a), as curvas de nível de $J_1(u_1, u_2)$ e $J_2(u_1, u_2)$ referentes a cada jogador, em que J_1 é estritamente convexa em relação a u_1 e J_2 é estritamente convexa em relação a u_2 . Para $u_1 = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$, a melhor decisão de AD_2 é aquela que minimiza J_2 ao longo da linha $u_1 = k_1$. Uma vez que este problema de minimização admite uma única solução, a resposta ótima de AD_2 é determinada, graficamente, como o ponto onde a linha $u_1 = k_1$ é tangente a uma curva de nível constante de J_2 ou, equivalentemente, através de uma análise em 3 dimensões (Figura 2.1(b)), como o ponto de interseção entre o plano $u_1 = k_1$ e a superfície J_2 , que gera o menor valor de J_2 .

O conjunto de todos os pontos ótimos formam a curva de reação de AD_2 e é indicada na Figura 2.1(a) por l_2 . A curva de reação, l_1 , de AD_1 é similarmente construída.

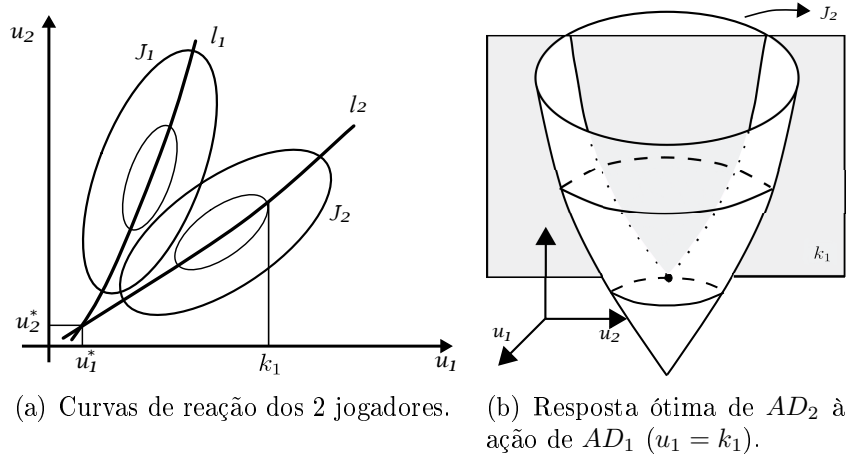


Figura 2.1: Análise gráfica das curvas de reação.

2.3.2 Equilíbrio de Nash

A solução de equilíbrio de Nash para jogos de soma não zero, estáticos e não cooperativos é estabelecida através da definição a seguir:

Definição 2.3.2 *Em um jogo com N jogadores, o conjunto de ações $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_N^*\}$ constitui uma solução de equilíbrio de Nash, se $\forall \mathbf{u}_i^* \in U_i, i \in I$:*

$$\begin{array}{rcl}
 J_1^* \triangleq J_1(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) & \leq & J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) \\
 \vdots & & \vdots \\
 J_i^* \triangleq J_i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) & \leq & J_i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_N^*) \\
 \vdots & & \vdots \\
 J_N^* \triangleq J_N(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) & \leq & J_N(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_N)
 \end{array} \tag{2.4}$$

Observação 2.3.1 *Quando a solução de Nash é obtida, nenhum jogador poderá melhorar o resultado de sua função custo através de uma ação individual.*

Baseando-se nas curvas de reação dos jogadores, pode-se estender uma interpretação gráfica à solução de equilíbrio de Nash. Neste caso, a solução de Nash deve estar, simultaneamente, sobre a curva de reação de todos os jogadores envolvidos no jogo. Considerando o jogo descrito na Figura 2.1, a solução de Nash corresponde ao ponto de interseção entre l_1 e l_2 .

Vale ressaltar que podem existir casos em que a solução de Nash, se existir, poderá ser não-única. Considerando, novamente, um jogo de 2 jogadores, em que $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$, são exibidas nas Figuras 2.2(a) e 2.2(b), duas situações tais que as curvas de nível dos jogadores não se interceptam, conseqüentemente a solução de Nash não existe para esses jogos. Nas Figuras 2.2(c) e 2.2(d), são ilustrados, respectivamente, um jogo com infinitas soluções de Nash e um jogo com três soluções possíveis.

2.3.3 Estabilidade da Solução de Nash

Considerações acerca da estabilidade da solução de equilíbrio são importantes para uma caracterização mais ampla da mesma. Neste sentido, dada uma solução de equilíbrio de Nash em um jogo de 2 jogadores, considere a seguinte seqüência de eventos:

- (i) AD_1 desvia-se de sua estratégia ótima;
- (ii) AD_2 observa a situação, e minimiza sua função custo de acordo com a nova estratégia de AD_1 ;
- (iii) AD_1 volta a empregar sua estratégia ótima, minimizando sua função custo;
- (iv) AD_2 continua reagindo otimamente, etc.

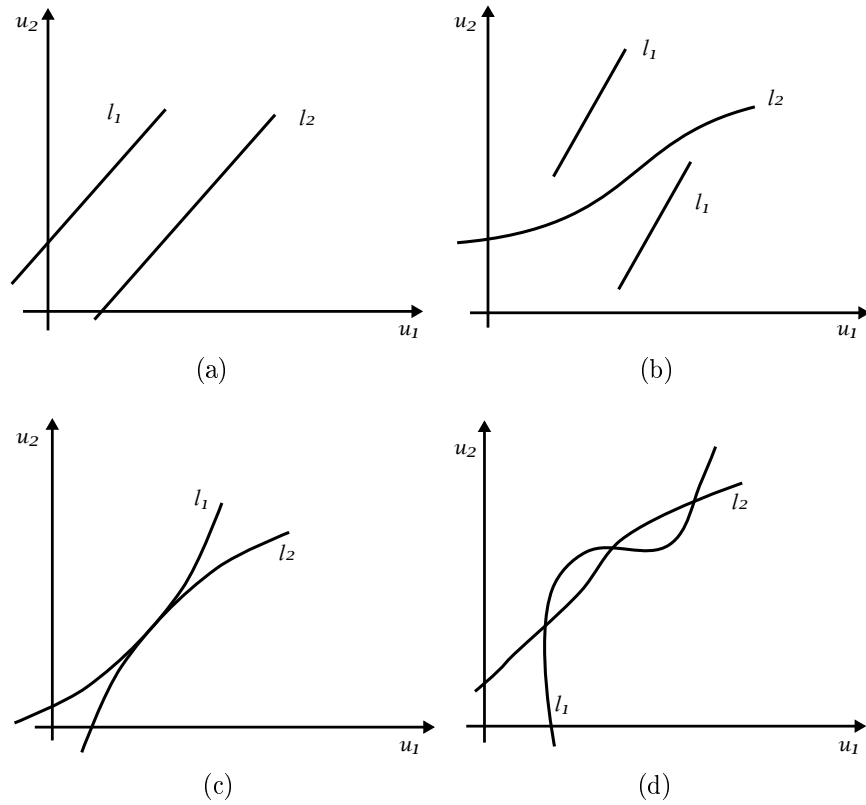


Figura 2.2: Possíveis Configurações das Curvas de Reação.

Se esta seqüência infinita de eventos converge para a solução de equilíbrio de Nash original, independentemente do desvio inicial de AD_1 em relação à sua estratégia ótima, esta solução de equilíbrio de Nash é **estável**. Se a convergência ocorrer somente para pequenos desvios iniciais, a solução é **localmente estável**. Caso contrário, a solução é **instável**.

As curvas de reação de dois diferentes jogos são mostradas na Figura 2.3 (considere $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$). Na Figura 2.3(a), percebe-se que se AD_1 escolher uma ação que não coincida com a da solução de equilíbrio de Nash, e que na seqüência tanto AD_1 como AD_2 reajam iterativamente otimizando suas próprias funções custo, haverá uma convergência para o ponto onde as duas curvas de reação se cruzam, que, como se sabe, corresponde à solução de equilíbrio de Nash. Já na Figura 2.3(b), esta solução de equilíbrio não é obtida a partir do processo iterativo decorrente de uma escolha de AD_1 que não corresponda à solução de equilíbrio, pois a cada jogada aumenta-se a distância em relação ao ponto de cruzamento existente entre as curvas de reação.

Pode-se estender a noção de estabilidade de um jogo de 2 jogadores para um jogo de N jogadores através da seguinte definição formal para uma solução de equilíbrio de Nash estável (BASAR; OLSDER, 1999).

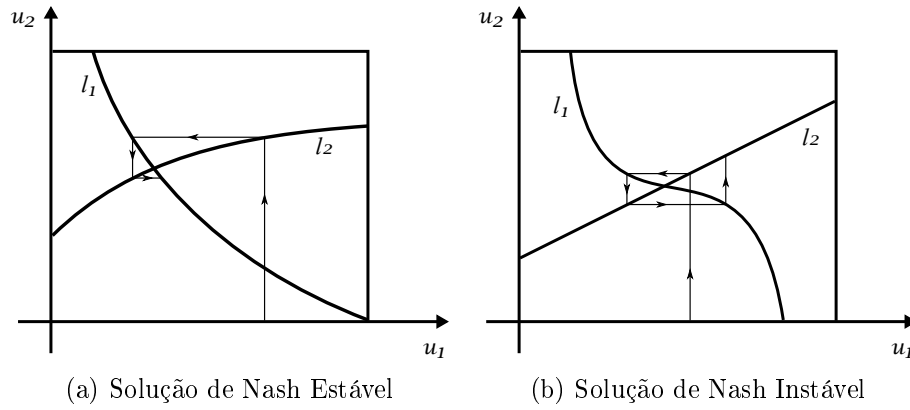


Figura 2.3: Convergência de Soluções de Equilíbrio de Nash.

Definição 2.3.3 Uma solução de equilíbrio de Nash $\mathbf{u}_i^*$, $i \in I$, é estável com respeito a um esquema Ψ de desvio da solução, se pode ser obtida como o limite do processo iterativo:

$$\mathbf{u}_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}_i(k+1) = \arg \min_{\mathbf{u}_i \in U_i} J_i(\mathbf{u}_{-i}^{\Psi_k}, \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{u}_i(0) \in U_i, \quad i \in I, \quad (2.6)$$

onde Ψ_k indica que a escolha de $\mathbf{u}_{-i}^{\Psi_k}$ depende do esquema de desvio selecionado.

Um possível esquema de desvio da solução é:

$$\mathbf{u}_{-i}^{\Psi_k} = \mathbf{u}_{-i}(k), \quad (2.7)$$

que corresponde à situação em que os jogadores reajustam suas ações simultaneamente em resposta às mais recentes ações dos outros jogadores. Se a iteração da Definição 2.3.3 converge para qualquer esquema de desvio da solução, então a solução de equilíbrio de Nash é globalmente estável.

2.3.4 Existência e Unicidade da Solução de Nash

Como visto anteriormente, uma solução de equilíbrio de Nash em jogos de N jogadores pode ser obtida desde que as curvas de reação dos jogadores possuam um ponto de interseção, supondo que todas as curvas de reação sejam bem definidas. Em Basar & Olsder (1999), a existência da solução de Nash é obtida pelo teorema do ponto fixo de Brouwer. Neste trabalho, propõe-se, dada a particularidade do jogo aqui considerado, através do Teorema 2.3.1 e da Proposição 2.3.1, as condições suficientes de existência e unicidade para se obter a solução de equilíbrio de Nash em jogos estáticos de N jogadores.

Proposição 2.3.1 *Seja a função custo $J_i : U_1 \times \dots \times U_N \rightarrow \mathbb{R}$ conjuntamente contínua em todos os seus argumentos e estritamente convexa em $\mathbf{u}_i$, para todo $\mathbf{u}_j \in U_j$, $j \in I$, $j \neq i$. Então, existe uma função $L : U \rightarrow U$ tal que $\mathbf{u} = L(\mathbf{u})$, onde, usando notação vetorial, $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\} \in U \triangleq U_1 \times \dots \times U_N$ e $L = \{l_1, \dots, l_N\}$.*

Demonstração: Devido à convexidade estrita, existe um único mapeamento $l_i : U_{-i} \rightarrow U_i$, tal que $\mathbf{u}_i = l_i(\mathbf{u}_{-i})$ unicamente minimiza $J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ para qualquer $\mathbf{u}_{-i}$. Com efeito, l_i é a curva de reação de AD_i nesse jogo. Dessa forma, usando notação vetorial, pode-se representar os mapeamentos $l_i : U_{-i} \rightarrow U_i$ para todos os N jogadores na forma compacta $\mathbf{u} = L(\mathbf{u})$, onde $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\} \in U \triangleq U_1 \times \dots \times U_N$ e $L = \{l_1, \dots, l_N\}$. $\square$

Teorema 2.3.1 *Considere que para cada $i \in I$, seja U_i um subconjunto compacto e convexo de um espaço Euclidiano¹ S_i dotado de uma métrica d_i , onde $d_i : U_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha S_i completo em relação a d_i . Se o mapeamento $L : U \rightarrow U$, conforme Proposição 2.3.1, for uma contração em relação à métrica d de U , onde $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$, então, o jogo de soma não zero de N jogadores considerado, admite solução de equilíbrio de Nash e essa solução é única.*

Demonstração: Na seqüência será mostrado que as curvas de reação individuais l_i são contínuas em seus argumentos e, por isso, L é um mapeamento contínuo. Já que L promove o mapeamento de um subconjunto compacto U de um espaço de dimensão finita no próprio subconjunto, e que esse mapeamento é uma contração em relação à métrica d de U , então a seguinte equação é válida para quaisquer $\{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}\} \in U$:

$$d(L(\hat{\mathbf{u}}), L(\tilde{\mathbf{u}})) \leq \rho d(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (2.8)$$

Logo, pode-se afirmar, com base no teorema do ponto fixo de Banach (ver Apêndice A), que existe um único $\mathbf{u}^* \in U$ tal que $\mathbf{u}^* = L(\mathbf{u}^*)$, onde $\mathbf{u}^*$ é o ponto fixo de L e, obviamente, os elementos de $\mathbf{u}^*$ constituem a solução de equilíbrio de Nash, que, nesse caso, será única.

Para completar a prova do Teorema 2.3.1, deve ser mostrada a continuidade de l_i . Considere $i = 1$ e considere que, ao contrário, l_1 é descontínua em $(\mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0))$. Além disso, seja $l_1(\mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0)) = \mathbf{u}_1(0)$. Então, existe uma seqüência de vetores $\{\bar{\mathbf{u}}(k) \triangleq (\mathbf{u}_2(k), \dots, \mathbf{u}_N(k)); \quad k = 1, 2, \dots\}$ tal que $(\mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0))$ é o limite desta seqüência, mas $\mathbf{u}_1(0)$ não é o limite de $l_1(\mathbf{u}_2(k), \dots, \mathbf{u}_N(k))$ quando $k \rightarrow \infty$. Pelo fato de os espaços das

¹Espaço linear real de dimensão finita e munido de um produto interno.

ações serem compactos, há uma subsequência de $\{\bar{\mathbf{u}}(k)\}$, denominada $\{\dot{\mathbf{u}}(k)\}$, tal que $\mathbf{l}_1(\dot{\mathbf{u}}(k))$ converge para um limite $\dot{\mathbf{u}}_1(0) \neq \mathbf{u}_1(0)$ e, simultaneamente, a seguinte inequação é válida:

$$J_1(\dot{\mathbf{u}}_1(0), \mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0)) < J_1(\mathbf{u}_1(0), \mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0)), \quad (2.9)$$

que, juntamente a $\dot{\mathbf{u}}_1(0) \neq \mathbf{u}_1(0)$ constitui uma contradição com respeito à hipótese inicial de que $\mathbf{u}_1(0)$ é o único $\mathbf{u}_1$ que minimiza $J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_N(0))$. Logo, l_1 é contínua. A continuidade de $l_i, i > 1$ pode ser demonstrada de maneira análoga. $\square$

2.4 Jogos Dinâmicos Discretos e Determinísticos

Nesta seção, os jogos dinâmicos discretos e determinísticos são formulados e a solução de Nash em malha aberta para esta classe de jogos é obtida. Posteriormente, é proposta uma maneira de se calcular o custo ótimo de AD_i . Uma breve análise do problema em estado estacionário, ou seja, quando o número de estágios do jogo tende ao infinito, é realizada na sequência. Por fim, os jogos dinâmicos de soma zero são introduzidos, obtendo-se a solução de ponto de sela para este tipo de jogo, tanto para horizonte finito como para horizonte infinito.

2.4.1 Formulação Geral

Adotando a terminologia utilizada na teoria de controle de sistemas, define-se um jogo dinâmico discreto determinístico com duração fixa como (BASAR; OLSDER, 1999):

Definição 2.4.1 *Um jogo dinâmico discreto determinístico com N agentes de decisão (jogadores) e com duração fixa é aquele que compreende:*

1. *Um conjunto de N agentes de decisão (AD) indexados pelo conjunto $I = \{1 \dots, N\}$.*
2. *Um conjunto $K = \{0, \dots, T-1\}$ de estágios (instantes) do jogo, onde T é o número máximo possível de jogadas permitidas a cada agente de decisão durante o jogo.*
3. *Um conjunto infinito X , com alguma estrutura topológica, caracterizando o **espaço (conjunto) dos estados** do jogo para o qual o estado $\mathbf{x}(k)$ é obtido para $k \in K$ e $k = T$.*
4. *Um conjunto infinito U_k^i definido para $k \in K$ e $i \in I$, com alguma estrutura topológica, denominado de **espaço dos controles**, para o qual os controles $\mathbf{u}_i(k)$ de AD_i são admissíveis no estágio k ;*

5. Uma função $g_k : X \times U_k^1 \times \dots \times U_k^N \longrightarrow X$ definida para cada $k \in K$, tal que:

$$\mathbf{x}(k+1) = g_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_N(k)), \quad k \in K, \quad (2.10)$$

para o estado inicial do jogo $\mathbf{x}(0) \in X$. A equação (2.10) é denominada: a **equação de estados** do jogo dinâmico e descreve a evolução do processo de decisão.

6. Um conjunto Y_k^i , com alguma estrutura topológica, definido para cada $k \in K$ e $i \in I$, denominado de **conjunto de observação** de AD_i no estágio k para o qual $\mathbf{y}_i(k)$ é a variável de observação de AD_i no estágio k .

7. Uma função $h_k^i : X \longrightarrow Y_k^i$ definida para cada $k \in K$ e $i \in I$ tal que:

$$\mathbf{y}_i(k) = h_k^i(\mathbf{x}(k)), \quad k \in K, \quad K = T, \quad i \in I, \quad (2.11)$$

é a **equação de observação** de AD_i relativa ao valor de $\mathbf{x}(k)$.

8. Um conjunto finito η_k^i para $k \in K$ e $i \in I$ é definido como uma sub-coleção de $\{\mathbf{y}_1(0), \dots, \mathbf{y}_1(T); \mathbf{y}_2(0), \dots, \mathbf{y}_2(T); \dots; \mathbf{y}_N(0), \dots, \mathbf{y}_N(T); \mathbf{u}_1(0), \dots, \mathbf{u}_1(T-1); \mathbf{u}_2(0), \dots, \mathbf{u}_2(T-1); \dots; \mathbf{u}_N(0), \dots, \mathbf{u}_N(T-1)\}$ determinando a informação recebida e requisitada por AD_i no estágio k do jogo. A especificação de η_k^i para todo $k \in K$ caracteriza a **estrutura de informação** de AD_i e a coleção destas estruturas para $i \in I$ forma a estrutura de informação do jogo.

9. Um conjunto N_k^i para cada $k \in K$ e $i \in I$ definido apropriadamente como um subconjunto de $\{(Y_0^1 \times \dots \times Y_T^1) \times \dots \times (Y_0^N \times \dots \times Y_T^N \times (U_0^1 \times \dots \times U_{T-1}^1) \times \dots \times (U_0^N \times \dots \times U_{T-1}^N)\}$ compatível com η_k^i , caracterizando o espaço de informação de AD_i no estágio k , induzido por η_k^i .

10. Um conjunto especificado Φ_k^i das funções $\phi_k^i : N_k^i \rightarrow U_k^i$ que definem as estratégias admissíveis de AD_i no estágio k . O conjunto Φ^i para $\phi^i = \{\phi_0^i, \dots, \phi_{T-1}^i\}$ na forma agregada, tal que $\phi_k^i \in \Phi_k^i$, $k \in K$, é denominado de **conjunto de estratégias** de AD_i . Desta forma, a ação (controle) de cada agente de decisão é completamente determinada pela relação:

$$\mathbf{u}_i = \phi^i(\eta^i), \quad i \in I, \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{u}_i = [\mathbf{u}_i^T(0), \mathbf{u}_i^T(1), \dots, \mathbf{u}_i^T(T-1)]^T$, ϕ^i e η^i estão na forma agregada.

11. Um funcional $J_i : (X \times U_1^1 \times \dots \times U_1^N) \times (X \times U_2^1 \times \dots \times U_2^N) \times \dots \times (X \times U_{T-1}^1 \times \dots \times U_{T-1}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido para cada $i \in I$ é denominado de **função custo** de AD_i no jogo.

Definição 2.4.2 Num jogo dinâmico determinístico discreto de duração fixa de N jogadores, a estrutura de informação² de AD_i , $i \in I$, está em **malha aberta** com somente o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ conhecido, se $\eta_k^i = \{\mathbf{x}(0)\}$, $k \in K$.

Definição 2.4.3 Em um jogo dinâmico discreto e determinístico de N jogadores e duração fixa, diz-se que a função custo de AD_i , $i \in I$ é aditiva por estágio se existe $f_k^i : X \times U_k^1 \times \dots \times U_k^N$ para $i \in I$, $k \in K$, tal que:

$$J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = \sum_{k=0}^{T-1} f_k^i(\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_N(k), \mathbf{x}(k)). \quad (2.13)$$

Observação 2.4.1 Se a função $J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ também depender do estado $\mathbf{x}(T)$, será denominada de função custo terminal.

Considera-se uma classe especial de jogos dinâmicos discretos e determinísticos com duração fixa (T estágios) denominados **jogos lineares quadráticos** (Freiling et al. (1997); Basar & Olsder (1999); Nian et al. (2006); Engwerda (2007); Pachter & Pham (2010)), segundo a definição abaixo.

Definição 2.4.4 Um jogo dinâmico discreto determinístico de N jogadores é do tipo linear quadrático se $X = \mathbb{R}^n$, $U_k^i = \mathbb{R}^{m_i}$, ($i \in I, k \in K$) e

$$g_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_N(k)) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i(k)\mathbf{u}_i(k), \quad (2.14)$$

$$f_k^i(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_i(k), \dots, \mathbf{u}_N(k)) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{u}_j(k) \right\}, \quad (2.15)$$

$$f_T^i(\mathbf{x}(T)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i(T) \mathbf{x}(T), \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}_i(k)$, $\mathbf{Q}_i(k)$ e $\mathbf{R}_{ij}(k)$ são matrizes de dimensões $n \times n$, $n \times m_i$, $n \times n$ e $m_i \times m_j$ respectivamente, $\mathbf{Q}_i(k)$ é simétrica semi-definida positiva e $\mathbf{R}_{ii}(k)$ simétrica definida positiva para $i \in I$ e $k \in K$.

²Para informações detalhadas sobre outras estruturas de informação, consultar Basar & Olsder (1999).

2.4.2 Solução de Equilíbrio de Nash em Malha Aberta

Os jogos dinâmicos nos quais a estrutura de informação encontra-se em malha aberta (Definição 2.4.2) têm a solução de Nash denominada “solução de equilíbrio de Nash em malha aberta”. Essa solução pode ser obtida via programação dinâmica (STARR; HO, 1969) ou, como será apresentado nesta seção, através do emprego de técnicas da teoria de controle ótimo (Pindyck (1977); Filho & Bottura (1992); Basar & Olsder (1999)). Há, de fato, uma relação próxima entre a determinação da estratégia de equilíbrio de Nash em malha aberta e o problema de se resolver conjuntamente N problemas de controle ótimo. Como se pode verificar, cada uma das desigualdades de (2.4), juntamente com as equações (2.10) e (2.13) descrevem um problema de controle ótimo, cuja estrutura não é afetada pelas ações de controle dos outros jogadores. A seguir é apresentado um teorema que sintetiza a solução de equilíbrio de Nash em malha aberta.

Teorema 2.4.1 *Dado um jogo dinâmico discreto determinístico de N jogadores do tipo linear quadrático definido em (2.4.4), sejam $\mathbf{E}(k)$ e $\mathbf{M}_i(k)$ ($i \in I, k \in K$) matrizes com dimensões compatíveis, definidas por:*

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{A}^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k) + \mathbf{Q}_i(k), \quad \mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i(T). \quad (2.18)$$

Se as matrizes $\mathbf{E}(k)$ ($k \in K$), definidas de maneira recursiva, são inversíveis, o jogo admite uma única solução de equilíbrio de Nash em malha aberta, dada por:

$$\phi_k^{i*}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{u}_i^*(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k) \mathbf{B}_i^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{x}^*(k) \quad (i \in I, k \in K), \quad (2.19)$$

onde trajetória de estados ótima $\{\mathbf{x}^*(k+1); k \in K\}$ associada ao jogo é determinada por:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{x}^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}(0), \quad (2.20)$$

e ganhos dinâmicos de realimentação de estados do tipo $\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{F}_i(k) \mathbf{x}(k)$ ($i \in I$) podem ser obtidos como:

$$\mathbf{F}_i(k) = \mathbf{R}_{ii}^{-1}(k) \mathbf{B}_i^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k). \quad (2.21)$$

Demonstração: Desde que $\mathbf{Q}_i(k) \geq 0$ e $\mathbf{R}_{ii}(k) > 0$, $J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ é uma função estritamente convexa em $\mathbf{u}_i$ para todo $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^{m_j, T}$, $j \neq i$, $j \in I$ e para todo $\mathbf{x}(0)$. As condições necessárias de otimalidade são dadas pelas equações:

$$\bullet \quad \mathbf{x}^*(k+1) = \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \mathbf{p}_i^*(k+1)} = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k)\mathbf{u}_j^*(k), \quad (2.22)$$

$$\bullet \quad \mathbf{p}_i^*(k) = \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \mathbf{x}^*(k)} = \mathbf{Q}_i(k)\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{p}_i^*(k+1), \quad (2.23)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \mathbf{u}_i^*(k)} = 0 \rightarrow \phi_k^{i*}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{u}_i^*(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{p}_i^*(k+1), \quad (2.24)$$

$$\bullet \quad \mathbf{p}_i^*(T) = \mathbf{Q}_i(T)\mathbf{x}^*(T), \quad (2.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{x}(k), \mathbf{p}_i(k+1), \mathbf{u}_i(k)) = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_i(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k)\mathbf{R}_{ij}(k)\mathbf{u}_j(k) \right\} \\ & + \mathbf{p}_i^T(k+1) \left\{ \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k)\mathbf{u}_j(k) \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

é a função Hamiltoniana.

A partir dessas condições necessárias de otimalidade, uma única solução candidata (BASAR; OLSDER, 1999) é obtida, como se segue:

Considere que os vetores de co-estado $\mathbf{p}_i^*(k)$, $i \in I$ são da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_i^*(k) = \mathbf{M}_i(k)\mathbf{x}^*(k). \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.27) na equação (2.24), obtém-se:

$$\mathbf{u}_i^*(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{x}^*(k+1), \quad (2.28)$$

que é substituída na equação (2.22), onde obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k) \left\{ -\mathbf{R}_{jj}^{-1}(k)\mathbf{B}_j^T(k)\mathbf{M}_j(k+1)\mathbf{x}^*(k+1) \right\}, \\ &\underbrace{\left\{ I + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k)\mathbf{R}_{jj}^{-1}(k)\mathbf{B}_j^T(k)\mathbf{M}_j(k+1) \right\}}_{\mathbf{E}(k)} \mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \\ \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \end{aligned} \quad (2.29)$$

supondo-se que $\mathbf{E}(k)$ é inversível.

A próxima equação é obtida substituindo (2.27) em (2.23):

$$\mathbf{M}_i(k)\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{Q}_i(k)\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{x}^*(k+1). \quad (2.30)$$

Por fim, substituindo (2.29) em (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(k)\mathbf{x}^*(k) &= \mathbf{Q}_i(k)\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \\ \mathbf{M}_i(k)\mathbf{x}^*(k) &= \left\{ \mathbf{Q}_i(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k) \right\} \mathbf{x}^*(k), \end{aligned} \quad (2.31)$$

ou seja,

$$\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{A}^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k) + \mathbf{Q}_i(k), \quad (2.32)$$

onde (2.32) representa as N **equações a diferenças de Riccati acopladas** que surgem na obtenção da solução de Nash em malha aberta para um jogo dinâmico linear quadrático.

A partir de (2.25) e (2.27) é possível obter as condições de contorno associadas às equações de Riccati:

$$\mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i(T), \quad (2.33)$$

permitindo com que as mesmas possam ser resolvidas recursivamente a partir do último instante de tempo T .

Para o cálculo dos ganhos dinâmicos de realimentação de estados, utilizam-se as equações (2.24), (2.23) e (2.27), sendo possível escrever o controle $\mathbf{u}_i(k)$ de AD_i , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^*(k) &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{p}_i^*(k+1), \\ \mathbf{u}_i^*(k) &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)(\mathbf{A}^T(k))^{-1}(\mathbf{p}_i^*(k) - \mathbf{Q}_i(k)\mathbf{x}^*(k)), \\ \mathbf{u}_i^*(k) &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)(\mathbf{A}^T(k))^{-1}(\mathbf{M}_i(k) - \mathbf{Q}_i(k))\mathbf{x}^*(k), \\ \mathbf{u}_i^*(k) &= -\mathbf{F}_i(k)\mathbf{x}^*(k), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{F}_i(k) = \mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)(\mathbf{A}^T(k))^{-1}(\mathbf{M}_i(k) - \mathbf{Q}_i(k)), \quad (2.35)$$

ou, usando a equação (2.32)

$$\mathbf{F}_i(k) = \mathbf{R}_{ii}^{-1}(k)\mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{M}_i(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k). \quad \square \quad (2.36)$$

Observação 2.4.2 Nesta estratégia de controle em malha aberta, as matrizes $\mathbf{R}_{ij}(k)$, $(i, j \in I)$, $i \neq j$ são irrelevantes para a síntese dos controladores, uma vez que estas matrizes não aparecem na solução.

Avaliação do Índice de Desempenho Mínimo

Avaliando o índice de desempenho mínimo do jogo dinâmico LQ descrito anteriormente, propõe-se o seguinte resultado.

Proposição 2.4.1 Dado um jogo dinâmico discreto determinístico de N jogadores do tipo linear quadrático como o definido em (2.4.4) e descrito no Teorema (2.4.1), o valor do índice de desempenho mínimo, ou seja, o valor do custo funcional ótimo deste jogo é dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} J_i^*(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) = & \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0) + \\ & \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \right) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Demonstração: ver Apêndice B. □

Corolário 2.4.1 Para o caso particular de um jogo dinâmico de 2 jogadores, onde ocorrem as seguintes igualdades:

i. $\mathbf{R}_{11}(k) = \mathbf{R}_{21}(k)$,

ii. $\mathbf{R}_{22}(k) = \mathbf{R}_{12}(k)$,

iii. $\mathbf{Q}_1(k) = \mathbf{Q}_2(k)$,

a equação (2.37) reduz-se a

$$J^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}(0) \mathbf{x}^*(0), \quad (2.38)$$

onde $J_1^* = J_2^* = J^*$, $\mathbf{M}_1(k) = \mathbf{M}_2(k) = \mathbf{M}(k)$ ($k \in K$).

Demonstração: ver Proposição 2.4.1. □

Jogo Linear Quadrático com Horizonte Infinito

Considerando o caso no qual o número de estágios do jogo dinâmico tende ao infinito, e considerando o sistema dinâmico definido em (2.4.4) invariante no tempo, o problema de jogos LQ pode ser reescrito como:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^*(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

onde o custo funcional de AD_i é dado por:

$$J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \right\}. \quad (2.40)$$

Nesta situação, considerando que as equações a diferenças acopladas de Riccati (equação (2.32)) possuam comportamento assintótico³, $\mathbf{M}_i(k)$ atingirá um valor de estado estacionário $\hat{\mathbf{M}}_i$, de tal forma que:

$$\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{M}_i(k+1) = \hat{\mathbf{M}}_i, \quad (2.41)$$

resultando nas **Equações Algébricas de Riccati (ARE) acopladas**, dadas por:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{E} = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \hat{\mathbf{M}}_j, \quad (2.42)$$

em matrizes de ganho de realimentação de estado invariantes no tempo, dadas por:

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}}_i - \mathbf{Q}_i), \quad (2.43)$$

e em custos funcionais ótimos, dados por:

$$\begin{aligned} J_i^*(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{x}^*(0) + \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \right) \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{x}^*(k+1) + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^*(k+1)^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{x}^*(k+1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

³Em Freiling et al. (1997) são estabelecidas as condições necessárias para a existência das soluções das equações algébricas acopladas de Riccati.

2.4.3 Jogos de Soma Zero

Nesta subseção, é considerado o jogo de tempo discreto de 2 jogadores, onde um dos jogadores, AD_1 , deseja minimizar uma determinada função objetivo J , enquanto o outro jogador, AD_2 , deseja maximizá-la. Esta situação pode ser representada matematicamente através da seguinte consideração: $f_k^1 = -f_k^2 \triangleq f_k$, ou equivalentemente, $J_1 = -J_2 \triangleq J$. Com isso, nota-se que o equilíbrio de Nash representado pelas desigualdades de (2.4) reduz-se a uma desigualdade de ponto de sela, dada por:

$$J(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2) \leq J(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) \leq J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^*) \quad (2.45)$$

que, nesse caso, representa um **equilíbrio minimax**.

Essa classe especial de jogos dinâmicos de soma não zero é designada por jogos dinâmicos de soma zero de 2 jogadores. De particular interesse para essa dissertação, considere-se o caso onde a função objetivo associada ao jogo é quadrática, resultando nos **jogos dinâmicos quadráticos de soma zero de 2 jogadores**, que podem ser descritos pela equação de estado linear:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1(k)\mathbf{u}_1(k) + \mathbf{B}_2(k)\mathbf{u}_2(k), \quad k \in K \quad (2.46)$$

e pela função objetivo:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}(T) \mathbf{x}(T) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}_1^T(k) \mathbf{u}_1(k) - \mathbf{u}_2^T(k) \mathbf{u}_2(k)), \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde as matrizes de ponderação dos controles são, sem perda de generalidade, dadas por $\mathbf{R}_1(k) = \mathbf{R}_{11}(k) = -\mathbf{R}_{21}(k) = 1$ e $\mathbf{R}_2(k) = \mathbf{R}_{12}(k) = -\mathbf{R}_{22}(k) = -1$. Dessa maneira, a hipótese de que $\mathbf{R}_{11}(k) \geq 0$ e $\mathbf{R}_{22}(k) \geq 0$, considerada no Teorema (2.4.1), é mantida. Considerando também a hipótese de que $\mathbf{Q}(k) \geq 0$, ($\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q}_1(k) = -\mathbf{Q}_2(k)$), segue que $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é estritamente convexa em $\mathbf{u}_1$. Uma vez que se está lidando com um problema minimax, a concavidade estrita de $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ em relação à $\mathbf{u}_2$ deve ser garantida. O lema a seguir estabelece as condições necessárias e suficientes para que a equação (2.47) seja estritamente côncava em $\mathbf{u}_2$.

Lema 2.4.1 *Para um jogo dinâmico quadrático de soma zero de 2 jogadores, a função*

objetivo $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é estritamente côncava em $\mathbf{u}_2$ ($\forall \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{m_1, T}$) se, e somente se,

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}_2^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{B}_2(k) > 0, \quad (k \in K), \quad (2.48)$$

onde $\mathbf{S}(k)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k) &= \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{A}(k) \\ &\quad + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{B}_2(k)[\mathbf{I} - \mathbf{B}_2^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{B}_2(k)]^{-1}\mathbf{B}_2^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{A}(k), \\ \mathbf{S}(T) &= \mathbf{Q}(T). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Demonstração: ver Basar & Olsder (1999). $\square$

Neste momento, a solução de ponto de sela para um jogo dinâmico de soma zero de 2 jogadores, cuja estrutura de informação encontra-se em malha aberta, pode ser apresentada através do teorema que segue.

Teorema 2.4.2 *Dado um jogo dinâmico LQ de soma zero de 2 jogadores descrito pelas equações (2.46) e (2.47), com $\mathbf{Q}(k) \geq 0$ ($\forall k \in K$), e considerando a condição dada pela equação (2.48) satisfeita, sejam $\mathbf{E}(k)$ e $\mathbf{M}(k)$ ($k \in K$) matrizes com dimensões compatíveis, definidas por:*

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{I} + (\mathbf{B}_1(k)\mathbf{B}_1^T(k) - \mathbf{B}_2(k)\mathbf{B}_2^T(k))\mathbf{M}(k+1), \quad (2.50)$$

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{A}^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k) + \mathbf{Q}(k), \quad \mathbf{M}(T) = \mathbf{Q}(T). \quad (2.51)$$

Se as matrizes $\mathbf{E}(k)$ ($k \in K$), definidas de maneira recursiva, são inversíveis, o jogo admite uma única solução de ponto de sela em malha aberta, dada por:

$$\phi_k^{1*}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{u}_1^*(k) = -\mathbf{B}_1^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \quad (2.52)$$

$$\phi_k^{2*}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{u}_2^*(k) = \mathbf{B}_2^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \quad (k \in K), \quad (2.53)$$

onde trajetória de estados ótima $\{\mathbf{x}^*(k+1); k \in K\}$ associada ao jogo é determinada por:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}(0), \quad (2.54)$$

ganhos dinâmicos de realimentação de estados do tipo $\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{F}_i(k)\mathbf{x}(k)$ ($i \in \{1, 2\}$) podem ser obtidos como:

$$\mathbf{F}_1(k) = \mathbf{B}_1^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k) = \mathbf{B}_1^T(k)(\mathbf{A}^T(k))^{-1}(\mathbf{M}(k) - \mathbf{Q}(k)), \quad (2.55)$$

$$\mathbf{F}_2(k) = -\mathbf{B}_2^T(k)\mathbf{M}(k+1)\mathbf{E}^{-1}(k)\mathbf{A}(k) = -\mathbf{B}_2^T(k)(\mathbf{A}^T(k))^{-1}(\mathbf{M}(k) - \mathbf{Q}(k)), \quad (2.56)$$

e o valor da função objetivo no ponto de sela é dado por:

$$J^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0). \quad (2.57)$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é obtida de forma análoga à demonstração do Teorema 2.4.1, introduzindo-se as seguintes igualdades: $f_k^1 = -f_k^2 \triangleq f_k$, $\mathbf{p}_1^*(k) = -\mathbf{p}_2^*(k) \triangleq \mathbf{p}^*(k)$, $\mathbf{H}_1 = -\mathbf{H}_2 \triangleq \mathbf{H}$, $\mathbf{R}_1(k) = \mathbf{R}_{11}(k) = -\mathbf{R}_{21}(k) = 1$, $\mathbf{R}_2(k) = \mathbf{R}_{12}(k) = -\mathbf{R}_{22}(k) = -1$ e $\mathbf{Q}_1(k) = -\mathbf{Q}_2(k) \triangleq \mathbf{Q}(k)$. $\square$

Considerando o caso de horizonte infinito ($T \rightarrow \infty$), como anteriormente feito para os jogos lineares quadráticos de soma não zero, em que a equação a diferenças de Riccati (equação (2.51)) possui um comportamento assintótico, $\mathbf{M}(k)$ também atingirá um valor de regime $\hat{\mathbf{M}}$, resultando na equação algébrica de Riccati, dada por:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{I} + (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \hat{\mathbf{M}}. \quad (2.58)$$

Neste caso, as matrizes de ganho de realimentação de estado invariantes no tempo são dadas por:

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{B}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{B}_1^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{Q}), \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = -\mathbf{B}_2^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{B}_2^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{Q}), \quad (2.60)$$

e o valor da função objetivo no ponto de sela é dado por:

$$J^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\hat{\mathbf{M}}\mathbf{x}(0). \quad (2.61)$$

2.5 Comentário Final

Neste capítulo, os aspectos mais importantes da teoria dos jogos necessários para fundamentação da metodologia proposta no capítulo 3 foram discutidos. De fundamental importância, cabe ressaltar a proposta de teoremas e proposições, que são de particular interesse para esta dissertação, no que tange as condições de estabilidade, existência e unicidade da solução de equilíbrio de Nash para jogos estáticos não cooperativos. Tais resultados são significativos para a proposição de uma nova metodologia para a solução do problema de jogo dinâmico LQ sem o uso das tradicionais ARE acopladas.

O objetivo de considerar neste capítulo o jogo dinâmico LQ dinâmico via equações acopladas de Riccati é apresentá-lo como um jogo de referência frente à nova proposta a ser desenvolvida no próximo capítulo.

3 Nova Metodologia para Síntese de Controladores LQ via Jogos Dinâmicos

3.1 Introdução

Neste capítulo, a teoria da dualidade (Bazaraa et al. (1993); Luenberger (1997); Stephen & Vandenbergue (2008)) é utilizada para que um jogo dinâmico LQ, descrito por equações complexas, possa, através da sua formulação dual, ser transformado em um jogo estático, descrito por equações mais simples. Baseado nesta nova formulação de jogo, é apresentado um novo algoritmo para a solução das equações algébricas acopladas de Riccati em jogos dinâmicos LQ de tempo discreto e, em adição, são propostos dois novos métodos para a síntese de controladores LQ. Além disso, considerando a possibilidade da formulação do problema de rejeição de perturbação como um jogo dinâmico LQ de soma zero, estende-se a metodologia desenvolvida até o momento, ao problema de controle H_∞ , com o objetivo de obter um novo método de projeto de controladores para este tipo de problema.

3.2 Formulação do Problema

Considerando o sistema dinâmico linear e invariante no tempo, o jogo dinâmico LQ descrito na definição (2.4.4) é, logo abaixo, reescrito como um problema de minimização quadrático com restrição linear:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u}_i} J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) &= \sum_{k=0}^T \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \right\}, \forall i \in I, \\
s.a. \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

em que, sem perda de generalidade e por simplicidade de notação, as matrizes de ponderação do custo funcional são consideradas invariantes no tempo, ou seja, $\mathbf{Q}_i(k) = \mathbf{Q}_i$ e $\mathbf{R}_{ij}(k) = \mathbf{R}_{ij}$, $\forall i, j \in I$. As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{Q}_i$ e $\mathbf{R}_{ij}$ são de dimensões $n \times n$, $n \times m_i$, $n \times n$ e $m_i \times m_j$, respectivamente, $\mathbf{Q}_i$ é simétrica **semi-definida** positiva e $\mathbf{R}_{ii}$ simétrica **definida positiva**. Ressalta-se que $\mathbf{u}_j(T) = 0, \forall j \in I$.

3.3 Formulação Estática via Teoria da Dualidade

Utilizando o método de Lagrange no problema (3.1), a restrição pode ser incorporada à função custo, dando origem à função custo aumentada (J_i^A) ou ao Lagrangeano associado ao problema:

$$J_i^A = \sum_{k=0}^T \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k)] + \mathbf{p}_i^T(k+1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k) - \mathbf{x}(k+1)] \right\}, \tag{3.2}$$

$\forall i \in I$, onde $\mathbf{p}_i(T+1) = \mathbf{p}_i(0) = 0$. Essa equação pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
J_i^A &= \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k)] + \mathbf{p}_i^T(k+1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k)] \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} - \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(T).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dessa forma, a função dual $L_i(\mathbf{p}_i)$ associada ao problema (3.1), é definida como:

$$L_i(\mathbf{p}_i) = \min_{\mathbf{u}_i} J_i^A(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N), \tag{3.4}$$

em que $\mathbf{p}_i = [\mathbf{p}_i^T(1), \dots, \mathbf{p}_i^T(T)]^T$ encontra-se na forma agregada. Com efeito, associando ao custo funcional, dado pela equação (3.4), as condições necessárias de otimalidade dadas pelas equações (2.23) e (2.24) como restrições lineares, têm-se o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}_i} \min_{\mathbf{u}_i} J_i^A &= \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k)] + \mathbf{p}_i^T(k+1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k)] \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} - \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(T), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}_i^{-1} (\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(k+1)), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(T), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(k+1). \quad (3.8)$$

Teorema 3.3.1 *Dada a concavidade estrita da função dual $L_i(\mathbf{p}_i)$ e as restrições dadas por (3.6), (3.7) e (3.8), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:*

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad & L_i(\boldsymbol{\beta}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i, \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^{nT}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{H}_{ii}^i$ é uma matriz simétrica, bloco tridiagonal, definida negativa e composta por blocos de dimensão $nT \times nT$. O vetor $\mathbf{b}_i$ possui dimensão $nT \times 1$, $\mathbf{c}_i$ é um escalar e

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(1) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i(T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nT}. \quad (3.10)$$

Demonstração: A função custo aumentada J_i^A , mostrada em (3.5), pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_i^A &= \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(0) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(0) + \mathbf{u}_i^T(0) \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_i(0)] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p}_i^T(1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(0) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(0)] \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{T-1} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_i(k)] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p}_i^T(k+1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k)] - \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} \\ &\quad - \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(T). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo as restrições (3.6), (3.7) e (3.8) em (3.11), obtém-se:

$$\begin{aligned}
J_i^A = & \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(0) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(0) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(1) \right. \\
& + \left. \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{p}_i^T(1) \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(0) - \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(1) \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{T-1} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{p}_i^T(k) - \mathbf{p}_i^T(k+1) \mathbf{A}] \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^{-1} [\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(k+1)] \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(k+1) \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(k+1) \\
& + \left. \mathbf{p}_i^T(k+1) \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} [\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(k+1)] + \mathbf{p}_i^T(k+1) \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k) \right. \\
& + \left. \mathbf{p}_i^T(k+1) \mathbf{B}_i [-\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(k+1)] - \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{Q}_i^{-1} [\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(k+1)] \right\} \\
& - \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(T) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(T). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
J_i^A = & \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(0) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(0) - \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(1) \overbrace{\mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T}^{\mathbf{V}_1} \mathbf{p}_i(1) \right. \\
& + \left. \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{p}_i^T(1) \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(0) \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{T-1} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(k) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(k) \overbrace{[\mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T]}^{\mathbf{V}_2^T} \mathbf{p}_i(k+1) \right. \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(k+1) \overbrace{[\mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T]}^{\mathbf{V}_3} \mathbf{p}_i(k+1) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(k+1) \overbrace{[\mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1}]}^{\mathbf{V}_2} \mathbf{p}_i(k) \\
& + \left. \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{p}_i^T(k+1) \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \underbrace{\mathbf{u}_j(k)}_{-\mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(k)} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(T). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o somatório, obtém-se $L_i(\beta_i)$ como dado em (3.9). Para $k = 1, \dots, T$ e $\mathbf{V}_{kk}^i = -\mathbf{V}_3 - \mathbf{Q}_i^{-1}$, $\mathbf{V}_{kk+1}^i = \mathbf{V}_2^T$, $\mathbf{V}_{kk-1}^i = \mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_{11}^i = -\mathbf{V}_1 - \mathbf{Q}_i^{-1}$ têm-se que:

$$\mathbf{H}_{ii}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^i & \mathbf{V}_{12}^i & & & \\ \mathbf{V}_{21}^i & \mathbf{V}_{22}^i & \mathbf{V}_{23}^i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{V}_{T-1,T}^i & \\ & & & \mathbf{V}_{T,T-1}^i & \mathbf{V}_{T,T}^i \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}(0) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(1) \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(2) \\ \vdots \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(T) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{c}_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}(0)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k). \quad \square \quad (3.16)$$

Observação 3.3.1 *Pode-se garantir que a matriz $\mathbf{H}_{ii}^i$ seja definida negativa através de um Lema proposto em Vilmar & Filho (2007).*

3.4 Solução de Equilíbrio de Nash

A obtenção da solução de equilíbrio de Nash para o jogo quadrático estático definido em (3.9) envolve a determinação das curvas de reação de cada agente. Como o problema dual é um problema de maximização, ou seja, $L_i(\boldsymbol{\beta}_i)$ é uma função estritamente côncava, as curvas de reação podem ser definidas como o resultado da maximização das respectivas funções objetivo ($L_i(\boldsymbol{\beta}_i)$) em relação às variáveis de decisão, como é mostrado abaixo:

$$\mathbf{W}_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N) = \frac{\partial L_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i}, \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\mathbf{W}_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N) = \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i - \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{H}_{ij}^i \boldsymbol{\beta}_j}_{\mathbf{b}_i} + \mathbf{r}_i, \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{H}_{ij}^i$ é a matriz bloco diagonal $nT \times nT$ com blocos $n \times n$ dada por:

$$\mathbf{H}_{ij}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Dessa forma, uma solução de equilíbrio de Nash deve satisfazer o sistema de equações:

$$\mathbf{W}_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N) = 0, \quad i \in I, \quad (3.21)$$

que pode ser reescrito na seguinte forma compacta:

$$\mathbf{H}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\mathbf{r}} = 0, \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & -\mathbf{H}_{12}^1 & \cdots & -\mathbf{H}_{1N}^1 \\ -\mathbf{H}_{21}^2 & \mathbf{H}_{22}^2 & \cdots & -\mathbf{H}_{2N}^2 \\ & & \ddots & \\ -\mathbf{H}_{N1}^N & -\mathbf{H}_{N2}^N & \cdots & \mathbf{H}_{NN}^N \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)$ e $\tilde{\mathbf{r}}^T = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, sendo então possível estabelecer a unicidade e a existência da solução de equilíbrio de Nash, através da seguinte proposição:

Proposição 3.4.1 *O jogo estático e quadrático de Nash de N jogadores definido pelas funções objetivo (3.9), onde $\mathbf{H}_{ii}^i < 0$, admite uma solução única $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ se, e somente se, a matriz definida por (3.23) for inversível.*

Demonstração: De (3.22), têm-se que:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = -\mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}. \quad \square \quad (3.24)$$

3.5 Estabilidade da Solução de Equilíbrio de Nash

Normalmente, a estabilidade é tratada somente depois da especificação de um procedimento de ajuste (ou de uma classe de procedimentos) em que os jogadores individualmente ajustam os valores de suas variáveis de decisão em cada iteração. A maioria dos algoritmos iterativos são procedimentos de ajuste, sendo que, neste trabalho, são equivalentes à solução de sistemas de equações lineares.

Nesta dissertação, através do Teorema 2.3.1, têm-se estabelecido as condições de suficiência para estabilidade de procedimentos de ajuste (métodos iterativos) baseando-se nas hipóteses de convexidade estrita e na contração das curvas de reação. Estas hipóteses levam ao tratamento teórico seguro da garantia da existência, unicidade e estabilidade da solução de equilíbrio de Nash, particularmente para o caso especial do sistema de equações (3.21).

Os procedimentos de ajuste podem, então, ser definidos a partir dos algoritmos iterativos, como:

$$\tilde{\beta}(t+1) = \tilde{\mathbf{L}}(\tilde{\beta}(t)), \quad t = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

onde $\tilde{\mathbf{L}}$ é o procedimento de ajuste sobre $\mathbb{R}^{nNT}$. Neste sentido, a definição de jogo completamente estável com relação aos procedimentos de ajuste considerados é dada na sequência.

Definição 3.5.1 *Um jogo estático não cooperativo é completamente estável se todos os procedimentos básicos de ajuste convergem para $\tilde{\beta}^{*T} = (\beta_1^{*T}, \dots, \beta_N^{*T})$.*

Uma condição especial de suficiência para a estabilidade completa do jogo é dada pelo Teorema 2.3.1.

3.6 Novo Algoritmo para a Solução das ARE Acopladas

Em conformidade com a formulação estática do jogo dinâmico LQ, são derivados dois importantes resultados: Proposições 3.6.1 e 3.6.2, que permitem a obtenção de um novo algoritmo para a solução das ARE acopladas.

Proposição 3.6.1 *O jogo linear quadrático descrito em (3.1) de 2-jogadores e T estágios de tempo, tem o custo funcional ótimo de AD_i dado pela seguinte equação:*

$$\begin{aligned}
J_i^*(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \{ \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A} \} \mathbf{x}(0) \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T \left\{ \sum_{k=1}^T [(\mathbf{h}_{i1}^{k1} + \mathbf{h}_{i2}^{k1})^T \mathbf{T}_{jj} (\mathbf{h}_{j1}^{k1} + \mathbf{h}_{j2}^{k1}) - (\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})^T \mathbf{T}_{ij} (\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})] \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \\
\forall i \in I, \quad j &= I - \{i\}, \quad I = \{1, 2\},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde:

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, é considerado um jogo com $N = 2$ jogadores, $I = \{1, 2\}$, e com $T = 2$ instantes de tempo, $K = \{0, 1\}$. Dessa maneira, o problema descrito pela equação (3.1) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(2) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(2) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^T(0) \mathbf{R}_{i1} \mathbf{u}_1(0) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T(0) \mathbf{R}_{i2} \mathbf{u}_2(0) \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(1) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(1) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^T(1) \mathbf{R}_{i1} \mathbf{u}_1(1) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T(1) \mathbf{R}_{i2} \mathbf{u}_2(1) \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(2) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(2).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

O objetivo é, então, reescrever a equação (3.27) de uma maneira alternativa, que possa evidenciar alguma estrutura ou característica relevante para a obtenção da ARE acoplada de AD_i .

O custo ótimo pode ser obtido substituindo as restrições dadas pelas equações (3.6), (3.7) e (3.8) em (3.27), resultando em:

$$\begin{aligned}
J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(1) - \mathbf{p}_i^T(1) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(2) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{p}_i^T(2) \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(1) + \mathbf{p}_i^T(2) \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(2) \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T(2) \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{p}_1^T(1) \underbrace{\mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{i1} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T}_{\mathbf{T}_{i1}} \mathbf{p}_1(1) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_2^T(1) \underbrace{\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{i2} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T}_{\mathbf{T}_{i2}} \mathbf{p}_2(1) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{p}_1^T(2) \underbrace{\mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{i1} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T}_{\mathbf{T}_{i1}} \mathbf{p}_1(2) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_2^T(2) \underbrace{\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{i2} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T}_{\mathbf{T}_{i2}} \mathbf{p}_2(2),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{G}_{i1} \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{G}_{i2} \boldsymbol{\beta}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \boldsymbol{\Pi}_i \boldsymbol{\beta}_i, \tag{3.29}$$

onde

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(1) \\ \mathbf{p}_i(2) \end{bmatrix}, \forall i \in I, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij} \end{bmatrix}, \forall i, j \in I, \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^{-1} & -\mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_i^{-1} \end{bmatrix}, \forall i \in I. \tag{3.32}$$

Por outro lado, define-se a inversa da matriz $\mathbf{H}$, com dimensões $nNT \times nNT$, dada na equação (3.23), para $N = 2$, como:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{11} & \bar{\mathbf{H}}_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}_{21} & \bar{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

onde cada bloco $\bar{\mathbf{H}}_{ij}, \forall i, j \in I$, com dimensões $nT \times nT$, é definido, para $T = 2$, como:

$$\bar{\mathbf{H}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ij}^{11} & \mathbf{h}_{ij}^{12} \\ \mathbf{h}_{ij}^{21} & \mathbf{h}_{ij}^{22} \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

de tal forma que cada sub-bloco $\mathbf{h}_{ij}^{lc}, \forall l, c \in \{1, \dots, T\}$ e $\forall i, j \in I$, possui dimensões $n \times n$.

Utilizando a equação (3.24) juntamente com a equação (3.33), têm-se:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{11} & \bar{\mathbf{H}}_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}_{21} & \bar{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \forall i \in I$. O resultado do produto é dado pelas seguintes equações:

$$\beta_1 = -(\bar{\mathbf{H}}_{11} + \bar{\mathbf{H}}_{12})r, \quad (3.36)$$

$$\beta_2 = -(\bar{\mathbf{H}}_{21} + \bar{\mathbf{H}}_{22})r, \quad (3.37)$$

que podem ser expandidas utilizando-se a equação (3.34):

$$\beta_1 = - \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) & (\mathbf{h}_{11}^{12} + \mathbf{h}_{12}^{12}) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) & (\mathbf{h}_{11}^{22} + \mathbf{h}_{12}^{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}(0) \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})\mathbf{Ax}(0) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})\mathbf{Ax}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\beta_2 = - \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) & (\mathbf{h}_{21}^{12} + \mathbf{h}_{22}^{12}) \\ (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) & (\mathbf{h}_{21}^{22} + \mathbf{h}_{22}^{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}(0) \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})\mathbf{Ax}(0) \\ (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})\mathbf{Ax}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

A seguir, explora-se a identidade abaixo para que substituições futuras possam ser efetuadas adequadamente:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & -\mathbf{H}_{12}^1 \\ -\mathbf{H}_{21}^2 & \mathbf{H}_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{11} & \bar{\mathbf{H}}_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}_{21} & \bar{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

dando origem, então, às seguintes equações:

$$\mathbf{H}_{11}^1 \bar{\mathbf{H}}_{11} - \mathbf{H}_{12}^1 \bar{\mathbf{H}}_{21} = \mathbf{I}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{H}_{11}^1 \bar{\mathbf{H}}_{12} - \mathbf{H}_{12}^1 \bar{\mathbf{H}}_{22} = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{H}_{22}^2 \bar{\mathbf{H}}_{21} - \mathbf{H}_{21}^2 \bar{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{H}_{22}^2 \bar{\mathbf{H}}_{22} - \mathbf{H}_{21}^2 \bar{\mathbf{H}}_{12} = \mathbf{I}. \quad (3.45)$$

Considera-se, sem perda de generalidade, a função custo, dada pela equação (3.29), de AD_1 , que é reescrita logo abaixo:

$$J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{G}_{11} \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{G}_{12} \boldsymbol{\beta}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{\Pi}_1 \boldsymbol{\beta}_1. \quad (3.46)$$

Expandindo a equação (3.42) em termos das submatrizes dadas pelas equações (3.14), (3.19) e (3.34), têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11}^1 \bar{\mathbf{H}}_{11} - \mathbf{H}_{12}^1 \bar{\mathbf{H}}_{21} &= \mathbf{I}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^1 & \mathbf{V}_{12}^1 \\ \mathbf{V}_{21}^1 & \mathbf{V}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^{11} & \mathbf{h}_{11}^{12} \\ \mathbf{h}_{11}^{21} & \mathbf{h}_{11}^{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{21}^{11} & \mathbf{h}_{21}^{12} \\ \mathbf{h}_{21}^{21} & \mathbf{h}_{21}^{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{11}^{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{11} & \mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{11}^{12} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{11}^{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{12} \\ \mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{11}^{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{21} & \mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{11}^{12} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{11}^{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

o mesmo procedimento é realizado para a equação (3.43), resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{12}^{11} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{12}^{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{11} & \mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{12}^{12} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{12}^{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{12} \\ \mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{12}^{11} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{12}^{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{21} & \mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{12}^{12} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{12}^{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Os termos individuais que compõem a função custo de AD_1 , que podem ser vistos através da equação (3.46), são explorados através das substituições que seguem:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{G}_{11} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ &+ \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\blacktriangleright \beta_1^T \Pi_1 \beta_1$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & -\mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}, \\
&= \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_1^{-1}) (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \beta_2^T \mathbf{G}_{12} \beta_2$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}, \\
&= \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \tag{3.52}
\end{aligned}$$

somando (3.50) com (3.51), e agrupando os termos em comum, obtém-se:

$$\blacktriangleright \beta_1^T \mathbf{G}_{11} \beta_1 + \beta_1^T \Pi_1 \beta_1$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \underbrace{[\mathbf{Q}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T]}_{-\mathbf{V}_{11}^1} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1}}_{\mathbf{V}_{21}^1} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \underbrace{\mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{V}_{12}^1} (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\
&\quad + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T)}_{-\mathbf{V}_{22}^1} (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \\
&= -\mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{V}_{11}^1 (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) + (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{V}_{21}^1 (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{V}_{12}^1 (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) + (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{V}_{22}^1 (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

utilizando as equações (3.48) e (3.49) na equação (3.53), e desenvolvendo, têm-se:

$$\begin{aligned}
&= -\mathbf{x}^T(0)\mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \underbrace{[\mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{11}^{21}]}_{\mathbf{I} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{11}} + \underbrace{[\mathbf{V}_{11}^1 \mathbf{h}_{12}^{11} + \mathbf{V}_{12}^1 \mathbf{h}_{12}^{21}]}_{\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{11}} \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \underbrace{[\mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{11}^{21}]}_{\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{21}^{21}} + \underbrace{[\mathbf{V}_{21}^1 \mathbf{h}_{12}^{11} + \mathbf{V}_{22}^1 \mathbf{h}_{12}^{21}]}_{\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{h}_{22}^{21}} \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \\
&= -\mathbf{x}^T(0)\mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T + (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \tag{3.54}
\end{aligned}$$

substituindo as equações (3.52) e (3.54) na equação (3.46), obtém-se:

$$\begin{aligned}
J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \left\{ \mathbf{Q}_1 - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{A} \right\} \mathbf{x}(0) \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) + (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \right. \\
&- (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \\
&- \left. (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0). \tag{3.55}
\end{aligned}$$

A função custo de AD_2 pode ser obtida através de um procedimento análogo, resultando em:

$$\begin{aligned}
J_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \left\{ \mathbf{Q}_2 - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{A} \right\} \mathbf{x}(0) \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) + (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \right. \\
&- (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \\
&- \left. (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Ao se estender a metodologia desenvolvida até o momento para um jogo com T estágios, obtém-se a equação (3.26). $\square$

Corolário 3.6.1 *Considerando o caso particular de um jogo de 1 jogador, ou seja, um problema de controle ótimo, a equação (3.26) torna-se:*

$$J_1^*(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \{ \mathbf{Q}_1 - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11}) \mathbf{A} \} \mathbf{x}(0). \tag{3.57}$$

Demonstração: Nesse caso, têm-se que $\mathbf{T}_{22} = \mathbf{T}_{12} = 0$, já que $\mathbf{B}_2 = 0$. Além disso, $\mathbf{h}_{12}^{11} = 0$, pois $\bar{\mathbf{H}}_{12} = 0$, já que não existe um segundo jogador. Dessa forma, substituindo estas igualdades na equação (3.55), obtêm-se a equação (3.57). Tal resultado fora anteriormente obtido em Vilmar & Filho (2007) para o projeto de controladores ótimos.

Proposição 3.6.2 *O jogo linear quadrático descrito em (3.1) para $N = 2$ jogadores e T estágios de tempo, tem a matriz de Riccati de AD_i , no instante $k = 0$, dada pela seguinte equação:*

$$\mathbf{M}_i(0) = \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})\mathbf{A} \quad (3.58)$$

Demonstração: Utilizando a equação (2.37) ($\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_j(k) = \mathbf{B}_j$, $\mathbf{R}_{ij}(k) = \mathbf{R}_{ij}$ e $\mathbf{Q}_i(k) = \mathbf{Q}_i$ ($\forall i, j \in I$, $I = \{1, 2\}$)), e considerando, sem perda de generalidade, um jogo com $T = 2$ estágios, chega-se ao seguinte custo funcional ótimo ($i = 1$):

$$\begin{aligned} J_1^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_1(0)\mathbf{x}^*(0) + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_2(k+1) \mathbf{T}_{22} \mathbf{M}_1(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_2(k+1) \mathbf{T}_{12} \mathbf{M}_2(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

desenvolvendo o somatório e substituindo a equação (2.27), têm-se:

$$\begin{aligned} J_1^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_1(0)\mathbf{x}^*(0) + \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{p}_2^*(1)^T \mathbf{T}_{22} \mathbf{p}_1^*(1) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p}_2^*(1)^T \mathbf{T}_{12} \mathbf{p}_2^*(1) - \mathbf{p}_2^*(2)^T \mathbf{T}_{22} \mathbf{p}_1^*(2) + \mathbf{p}_2^*(2)^T \mathbf{T}_{12} \mathbf{p}_2^*(2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

substituindo as equações (3.38) e (3.39) na equação anterior, têm-se:

$$\begin{aligned} J_1^*(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_1(0)\mathbf{x}^*(0) - \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{A}^T \left\{ (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{T}_{22} (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \right. \\ &\quad - (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})^T \mathbf{T}_{12} (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) + (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{T}_{22} (\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21}) \\ &\quad \left. - (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})^T \mathbf{T}_{12} (\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21}) \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}^*(0). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Como dito na Seção 2.4.2, em um jogo linear quadrático onde $\mathbf{Q}_i \geq 0$ e $\mathbf{R}_{ii} > 0$, a solução de equilíbrio de Nash $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ é única. Logo, os custos ótimos dados pelas equações (3.61) e (3.55) devem ser iguais, uma vez que os mesmos foram obtidos para o mesmo jogo linear

quadrático. Com efeito, tal igualdade só ocorrerá se a igualdade abaixo for válida:

$$\mathbf{M}_1(0) = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{A}, \quad (3.62)$$

concluindo, então, a demonstração. $\square$

Para o caso de um jogo linear quadrático em **estado estacionário** ($T \rightarrow \infty$) de 2 jogadores, a **equação algébrica acoplada de Riccati** de AD_i é novamente dada por:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})^T \mathbf{A}. \quad (3.63)$$

Observação 3.6.1 Na prática, não é, de fato, necessário fazer $T \rightarrow \infty$ para se obter a $\hat{\mathbf{M}}_i$. Devido ao comportamento assintótico característico das equações a diferenças acopladas de Riccati, existe um $t \in \mathbb{N}$ finito, tal que $\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{M}_i(k+1) = \hat{\mathbf{M}}_i$ para $k \geq t$.

Observação 3.6.2 Como se pode observar pela equação (3.63), para o cálculo da matriz de Riccati só são utilizadas duas submatrizes da matriz $\mathbf{H}^{-1}$, que pode ser vista logo abaixo. Para o caso de AD_1 , são utilizadas as matrizes $\mathbf{h}_{11}^{11}$ e $\mathbf{h}_{12}^{11}$ em cinza claro, e para o caso de AD_2 são utilizadas as matrizes $\mathbf{h}_{21}^{11}$ e $\mathbf{h}_{22}^{11}$ em cinza escuro, independentemente do número de estágios do jogo.

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{11} & \bar{\mathbf{H}}_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}_{21} & \bar{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix}_{nNT \times nNT} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{h}_{11}^{11} & \mathbf{h}_{11}^{12} & \dots & \mathbf{h}_{11}^{1T} & \mathbf{h}_{12}^{11} & \mathbf{h}_{12}^{12} & \dots & \mathbf{h}_{12}^{1T} \\ \mathbf{h}_{11}^{21} & \mathbf{h}_{11}^{22} & \dots & \mathbf{h}_{11}^{2T} & \mathbf{h}_{12}^{21} & \mathbf{h}_{12}^{22} & \dots & \mathbf{h}_{12}^{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{11}^{T1} & \mathbf{h}_{11}^{T2} & \dots & \mathbf{h}_{11}^{TT} & \mathbf{h}_{12}^{T1} & \mathbf{h}_{12}^{T2} & \dots & \mathbf{h}_{12}^{TT} \\ \hline \mathbf{h}_{21}^{11} & \mathbf{h}_{21}^{12} & \dots & \mathbf{h}_{21}^{1T} & \mathbf{h}_{22}^{11} & \mathbf{h}_{22}^{12} & \dots & \mathbf{h}_{22}^{1T} \\ \mathbf{h}_{21}^{21} & \mathbf{h}_{21}^{22} & \dots & \mathbf{h}_{21}^{2T} & \mathbf{h}_{22}^{21} & \mathbf{h}_{22}^{22} & \dots & \mathbf{h}_{22}^{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{21}^{T1} & \mathbf{h}_{21}^{T2} & \dots & \mathbf{h}_{21}^{TT} & \mathbf{h}_{22}^{T1} & \mathbf{h}_{22}^{T2} & \dots & \mathbf{h}_{22}^{TT} \end{array} \right].$$

3.7 Síntese de Controladores LQ

Nesta seção, são sugeridos dois métodos de se obter uma lei de controle com realimentação de estado para um jogo de 2 jogadores ($I = \{1, 2\}$) com estrutura de informação em malha aberta, sem a utilização das correspondentes ARE acopladas, onde a realimentação

de estado é do tipo:

$$\mathbf{u}_1(k) = -\hat{\mathbf{F}}_1 \mathbf{x}(k), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{u}_2(k) = -\hat{\mathbf{F}}_2 \mathbf{x}(x). \quad (3.65)$$

3.7.1 Método I - Sem Procedimento de Regularização

A proposição que segue ilustra o primeiro método de se calcular os ganhos de realimentação.

Proposição 3.7.1 *Considere um jogo linear quadrático de 2 jogadores que utiliza realimentação de estado do tipo dado pelas equações (3.64) e (3.65). Os ganhos de realimentação de estado podem ser dados por:*

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = -\mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11}) \mathbf{A}, \quad (3.66)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = -\mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11}) \mathbf{A}. \quad (3.67)$$

Demonstração: Com efeito, as equações (3.66) e (3.67) são obtidas substituindo a equação (3.63) na equação (2.60) para $i \in I$. $\square$

Observação 3.7.1 *Como se pode observar nas equações (3.66) e (3.67), o algoritmo proposto no método I necessita da inversa da matriz $\mathbf{H}$. À primeira vista, isto pode representar um obstáculo para aplicações em tempo real com horizonte infinito, entretanto, esta inversa pode ser, previamente, computada off-line utilizando diversos métodos numéricos diretos tais como: fatorização de House-Holder, rotação de Givens, fatoração de Cholesky e decomposição em valores singulares (GOLUB; LOAN, 1996).*

3.7.2 Método II - Com Procedimento de Regularização por Regiões de Confiança

Nesta subseção, é proposta uma estratégia para a obtenção de um problema equivalente ao original (3.9), de tal forma que o mesmo seja resolvido através de subproblemas auxiliares, empregando regiões de confiança (*Trust Regions Subproblems*). Dessa maneira, é possível garantir que a matriz Hessiana $\mathbf{H}_{ii}^i$ tenha dominância bloco diagonal (Zhang et al. (2010); Feingold & Varga (1962)), possibilitando uma redução nas dimensões da

mesma. Portanto, define-se o seguinte problema de otimização baseado em regiões de confiança, para AD_i :

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad & L_i(\boldsymbol{\beta}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \\ \text{s.a.} \quad & \|\boldsymbol{\beta}_i\| \leq \Delta_i, \quad \Delta_i > 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

A estrutura especial do problema (3.68) proporciona caracterizações dos maximizadores muito mais poderosas que no caso geral de otimização irrestrita (MARTÍNEZ; A.SANTOS, 1998). No Apêndice C, encontra-se uma descrição mais detalhada sobre a estratégia aqui adotada. Neste apêndice, são apresentados dois teoremas que garantem a existência de uma solução $\boldsymbol{\beta}_i^*$ para o problema que satisfaz à (3.9).

Através de experimentos, é possível verificar que para T pequeno, o erro do resíduo $\|\nabla L_i(\boldsymbol{\beta}_i)\|$ é reduzido, tornando a matriz $\mathbf{H}_{ii}^i$ melhor condicionada (VILMAR; FILHO, 2007). Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz $\mathbf{H}_{ii}^i$, de nT para nd ($d \in \mathbb{N}$), onde $d \ll T$, o que possibilita diminuir seu fator de condicionamento, e ratifica o fato de que pode-se resolver o problema de otimização (3.9) por intervalos ao se resolver sucessivas vezes o problema (3.68).

Seguindo essa proposta de redução da ordem do sistema, considera-se $d = 2$. Dessa forma, o problema (3.9), para $N = 2$ jogadores, é aproximado ao problema (3.68), de modo que a equação (3.22) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & -\mathbf{H}_{12}^1 \\ -\mathbf{H}_{21}^2 & \mathbf{H}_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I}_{2n \times 2n} & \mathbf{0}_{2n \times 2n} \\ \mathbf{0}_{2n \times 2n} & \alpha_2 \mathbf{I}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \right)}_{\hat{\mathbf{H}}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

sendo possível, através da redução o valor de α_i ($i \in I$), ou apenas fazendo $\alpha_i < \min\{0, -\sigma_n\}$ (ver Apêndice C), situar os autovalores de $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ dentro de uma determinada região, obtendo-se dominância bloco diagonal e, conseqüentemente, boas propriedades de convergência, e uma maior estabilidade numérica.

A Proposição 3.7.2 ilustra o segundo método proposto para a obtenção de ganhos de realimentação. Este método é viável para jogos de 2 jogadores em que a matriz hessiana $\mathbf{H}_{ii}^i$ ($i \in I$) possui dimensões $2n \times 2n$, ou seja, jogos de $T = 2$ estágios.

Proposição 3.7.2 *Considere um jogo linear quadrático de 2 jogadores que utiliza realimentação de estado do tipo dado pelas equações (3.64) e (3.65). Os ganhos de realimentação de estados podem ser gerados a partir da alocação de pólos na matriz $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$, de forma que com os ganhos obtidos, os autovalores desta matriz coincidam com os autovalores da matriz Θ_i ($i \in I$), onde*

$$\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}} = (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

e

$$\Theta_i = -\mathbf{Q}_i^{-1} \left\{ -(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})\mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{21} + \mathbf{h}_{i2}^{21})\mathbf{A} \right\}. \quad (3.71)$$

Demonstração: Utilizando as equações (3.64) e (3.65) pode-se reescrever a equação (2.22), para $N = 2$, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{F}}_1\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{F}}_2\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{F}}_1 - \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{F}}_2)\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \left(\mathbf{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}} \right) \mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}})\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}})^{k+1}\mathbf{x}(0). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por outro lado, a partir da equação (2.23), reescrita logo abaixo, para $k = 1$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{Q}_i^{-1}(\mathbf{p}_i(1) - \mathbf{A}^T\mathbf{p}_i(2)), \quad (3.73)$$

escolhendo arbitrariamente $i = 1$ e substituindo a equação (3.38), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{Q}_1^{-1} \left\{ -(\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})\mathbf{A}\mathbf{x}(0) \right\}, \\ \mathbf{x}(1) &= \underbrace{-\mathbf{Q}_1^{-1} \left\{ -(\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})\mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{11}^{21} + \mathbf{h}_{12}^{21})\mathbf{A} \right\}}_{\Theta_1} \mathbf{x}(0). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Logo, comparando as equações (3.74) e (3.72), para $k = 0$, têm-se que o ganho $\tilde{\mathbf{F}}$ e conseqüentemente os ganhos $\hat{\mathbf{F}}_1$ e $\hat{\mathbf{F}}_2$ podem ser obtidos por alocação de pólos (Kautsky & Dooren (1985); Chen (1999)) na matriz $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$. Em outras palavras, o algoritmo de alocação de pólos fornece um ganho $\tilde{\mathbf{F}}$ que faz com que os autovalores das matrizes $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ e Θ_i ($i \in I$) sejam os mesmos. $\square$

Observação 3.7.2 *Através de ajustes em α_i , é possível situar os autovalores de Θ_i numa determinada região de interesse, ou seja, em uma região que gere ganhos que atendam satisfatoriamente às especificações de projeto dos controladores. Neste sentido, variando-se α_i , pode-se gerar uma família de ganhos de realimentação sem a utilização das ARE acopladas.*

Observação 3.7.3 *Caso fosse considerado $i = 2$ na equação (3.73), a nova equação obtida seria:*

$$\mathbf{x}(1) = \underbrace{-\mathbf{Q}_2^{-1} \left\{ -(\mathbf{h}_{21}^{11} + \mathbf{h}_{22}^{11})\mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{21}^{21} + \mathbf{h}_{22}^{21})\mathbf{A} \right\}}_{\Theta_2} \mathbf{x}(0). \quad (3.75)$$

Note que as equações (3.74) e (3.75) são obtidas a partir da condição necessária de otimalidade em (3.73). Portanto, para o cálculo de $\tilde{\mathbf{F}}$, pode-se utilizar também a equação (3.75) e obter os mesmos resultados.

3.8 Controle H_∞ via Jogos de Soma Zero

Dada a possibilidade da formulação de um **problema de controle H_∞ com rejeição de perturbação** como um **jogo dinâmico de soma zero** (Basar (1991); Basar & Bernhard (1995); Baek (2003); Dong & Yang (2008); Renato et al. (2010)), os resultados apresentados na Subseção 2.4.3, para jogos de soma zero, possuem importantes aplicações em problemas de controle H_∞ . Nesta seção, apresenta-se sucintamente, como extensão da Subseção 2.4.3, a síntese do controlador H_∞ via nova metodologia. Para maiores detalhes sobre a teoria de controle H_∞ , ver Doyle et al. (1991); Green & Limebeer (1995); Zhou et al. (1996); Stoorvogel (2000).

Seja o sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\mathbf{w}(k), \quad (3.76)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \quad (3.77)$$

para $k \in K$, em que $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ é a entrada de controle, $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ é a perturbação e $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^q$ é a variável controlada. Considera-se que: $\mathbf{C}^T \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{Q} \geq 0$.

O objetivo é encontrar o controle $\mathbf{u}(k) \in l_2[0, \infty)$, dado por $\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)$, que minimiza a norma H_∞ da função de transferência $\mathbf{T}_{zw}$ da entrada $\mathbf{w}(k)$ para a saída $\mathbf{z}(k)$. Neste sentido, de acordo com Basar & Bernhard (1995), a função objetivo a ser minimizada, pode ser definida como:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}(k)) &= \sum_{k=0}^T (\|\mathbf{z}(k)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(k)\|_2^2), \\ &= \sum_{k=0}^T (\mathbf{z}^T(k) \mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k) \mathbf{w}(k)), \\ &= \sum_{k=0}^T (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{u}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k) \mathbf{w}(k)), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde é importante observar que a minimização da função objetivo da equação (3.78) implica na escolha de uma entrada de controle levando-se em consideração que a perturbação $\mathbf{w}(k)$ é a pior possível para o sistema.

Nota-se que existe uma semelhança entre este problema de controle H_∞ e o jogo de soma zero comentado na Subseção 2.4.3. Nos dois casos, há um jogador tentando minimizar uma função objetivo ($\mathbf{u}_1(k)$ no jogo de soma zero e $\mathbf{u}(k)$ no problema de controle H_∞), e um jogador tentando maximizar a mesma função objetivo ($\mathbf{u}_2(k)$ no jogo de soma zero e $\mathbf{w}(k)$ no problema de controle H_∞). Desta maneira, a perturbação $\mathbf{w}(k)$ atua no sistema dinâmico como um jogador que tenta maximizar a função objetivo, enquanto o controle $\mathbf{u}(k)$ atua como um jogador que tenta minimizar a mesma função. Com efeito, fazendo $\mathbf{u}_1(k) = \mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}_2(k) = \mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{R}_2(k) = -\gamma^2$ na equação (2.47), obtêm-se o problema de controle H_∞ através do jogo de soma zero.

Uma vez que $\mathbf{Q} \geq 0$, sabe-se que $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ é estritamente convexa em $\mathbf{u}$. A condição necessária e suficiente para que $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ seja estritamente côncava em relação a $\mathbf{w}$ é estabelecida no Lema 2.4.1, efetuando-se as seguintes modificações:

- i. A equação (2.48) torna-se:

$$\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S}(k+1) \mathbf{B}_2 > 0, \quad (k \in K); \quad (3.79)$$

ii. A equação (2.49) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}(k+1) \mathbf{A} \\ &+ \mathbf{A}^T \mathbf{S}(k+1) \mathbf{B}_2 [\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S}(k+1) \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{S}(k+1) \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

A solução de ponto de sela com estrutura de informação em malha aberta para esse problema de controle H_∞ é dada através do Teorema 2.4.2, efetuando-se as seguintes modificações:

i. A equação (2.50) torna-se:

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{I} + (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{M}(k+1); \quad (3.81)$$

ii. A equação (2.53) torna-se:

$$\mathbf{w}^*(k) = \gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T \mathbf{M}(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A} \mathbf{x}^*(k); \quad (3.82)$$

iii. A equação (2.56) torna-se:

$$\mathbf{F}_w(k) = -\gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T \mathbf{M}(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A} = -\gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{M}(k) - \mathbf{Q}). \quad (3.83)$$

Considerando o caso em horizonte infinito ($T \rightarrow \infty$) em que $\mathbf{M}(k) = \mathbf{M}(k+1) = \hat{\mathbf{M}}$ e uma lei de controle com realimentação de estado do tipo $\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{F}} \mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{w}(k) = -\hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{x}(k)$, obtêm-se os seguintes ganhos:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{B}_1^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{Q}), \quad (3.84)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_w = -\gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = -\gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{Q}), \quad (3.85)$$

sendo $\mathbf{E} = \mathbf{I} + (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \hat{\mathbf{M}}$.

Na Figura 3.1, pode-se visualizar o diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados, utilizando a formulação do controle H_∞ .

3.8.1 Projeto de Controle H_∞ via Nova Metodologia

Considerando a metodologia desenvolvida na Seção 3.6, o jogo dinâmico de soma zero, descrito pelas equações (3.76) e (3.78) e obtido a partir do problema de controle H_∞ , tem

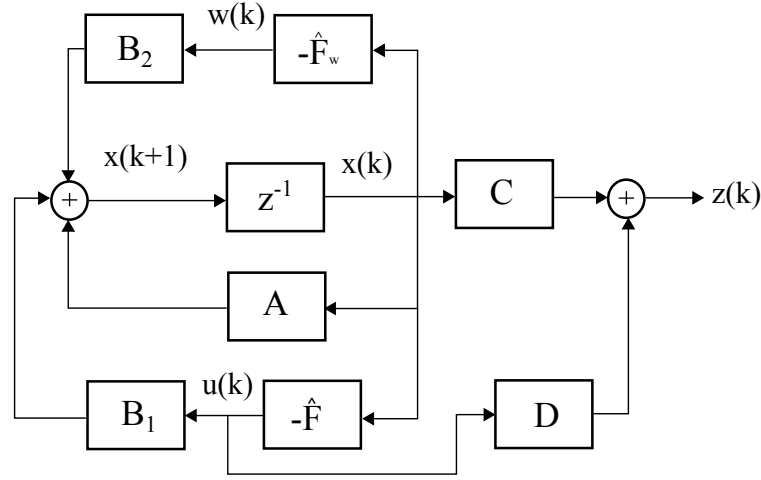


Figura 3.1: Diagrama de blocos do sistema de controle.

sua equação algébrica de Riccati, conforme Proposição 3.6.2 e equação (3.63), dada por:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{A}. \quad (3.86)$$

O objetivo agora é, a partir do índice de desempenho derivado da norma H_∞ , obter uma lei de controle com realimentação de estado sem a utilização da ARE. Para isso, utilizam-se as metodologias de projeto desenvolvidas nas Subseções 3.7.1 e 3.7.2.

Neste sentido, considerando uma realimentação do tipo $\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{w}(k) = -\hat{\mathbf{F}}_w\mathbf{x}(k)$, os ganhos gerados pelo método I são obtidos, para este caso, substituído a equação (3.86) nas equações (3.84) e (3.85), resultando em:

$$\hat{\mathbf{F}} = -\mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{A}. \quad (3.87)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_w = \gamma^{-2} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{h}_{11}^{11} + \mathbf{h}_{12}^{11})^T \mathbf{A}. \quad (3.88)$$

Vale ressaltar, que como a função objetivo deve ser estritamente côncava em relação a $\mathbf{w}$, deve-se escolher um γ tal que a matriz $\mathbf{H}_{22}^2$ se mantenha definida positiva, caso contrário não se pode garantir a existência de uma solução de ponto de sela para o problema, e, conseqüentemente, o projeto de ganhos estabilizantes para o problema de controle H_∞ fica comprometido.

Considerando que o procedimento de regularização em regiões de confiança tenha sido empregado neste jogo, obtêm-se, para $d = 2$, o seguinte sistema de equações matriciais lineares:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T & \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} & -\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{Q}^{-1} - \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{Q} + \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I}_{2n \times 2n} & \mathbf{0}_{2n \times 2n} \\ \mathbf{0}_{2n \times 2n} & \alpha_2 \mathbf{I}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(1) \\ \mathbf{p}_1(2) \\ \mathbf{p}_2(1) \\ \mathbf{p}_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix}. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Portanto, pode-se utilizar o método II através da alocação de pólos na matriz $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$, de acordo com os autovalores da matriz Θ_i , em que:

$$\Theta_i = -\mathbf{Q}_i^{-1} \left\{ -(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{21} + \mathbf{h}_{i2}^{21}) \mathbf{A} \right\} \quad i \in I = \{1, 2\}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}} = (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{F}}), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

para o cálculo de $\hat{\mathbf{F}}$, e

$$\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}} = (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{F}}), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_w \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

para o cálculo de $\hat{\mathbf{F}}_w$. Utiliza-se do fato de o sistema ser linear para que os ganhos possam ser obtidos separadamente.

É sabido que com o procedimento de regularização pode-se conseguir dominância bloco diagonal através de variações do parâmetro α_i ($i \in I$), sendo possível situar os autovalores de $\mathbf{H}_{ii}^i$ ($i \in I$) dentro de uma determinada região. Neste problema de controle H_∞ , têm-se que $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$ para que a condição de que $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ seja estritamente convexa em relação a $\mathbf{u}$ e estritamente côncava em relação a $\mathbf{w}$ seja respeitada.

3.9 Comentário Final

Neste capítulo, foi apresentado, sob a forma de proposições matemáticas, um novo algoritmo para a solução das ARE acopladas que surgem em problemas de jogos dinâmicos com estrutura de informação em malha aberta. Além disso, também sob a forma de

proposições matemáticas, foram apresentados dois novos métodos para a síntese de controladores LQ com realimentação de estado sem o emprego das ARE acopladas, comumente necessárias, para jogos dinâmicos. O segundo método (método II) mostrou-se particularmente interessante, pois, por recorrer a um procedimento de regularização visando tornar o problema melhor condicionado e de ordem reduzida, possibilita a obtenção de uma família de ganhos de realimentação de estado através de ajustes em um parâmetro escalar (α_i).

Na seqüência, o problema de rejeição de perturbação com o emprego do controle H_∞ foi formulado como um jogo de soma zero. As novas propostas desenvolvidas até o momento foram, então, estendidas para esse tipo de jogo, resultando em um novo algoritmo para a solução da ARE modificada e dois novos métodos para a síntese de controladores H_∞ , de modo que o segundo método apresenta as mesmas características interessantes do método II descrito anteriormente.

4 *Análise e Resultados*

Neste capítulo, a nova metodologia desenvolvida no capítulo 3 é confrontada com o jogo de referência descrito no capítulo 2. Para isso, são ilustrados três exemplos de projetos de controladores, em que através de simulações computacionais evidenciam-se as características de cada uma das abordagens utilizadas e suas particularidades frente às especificações de projeto.

O projeto 1, utilizado como um exemplo didático, considera a nova metodologia para a solução das ARE acopladas e síntese de controladores LQ em jogos de soma não-zero, e a compara com a metodologia tradicional via ARE. Enquanto os projetos 3 e 4 consideram a formulação do problema de controle H_∞ como um jogo de soma zero e obtêm os controladores via nova metodologia.

Na Tabela 4.1, encontra-se um resumo com os principais resultados apresentados ao longo desta dissertação, evidenciando se os mesmos são oriundos das metodologias tradicionais descritas no Capítulo 2 ou das novas metodologias propostas no Capítulo 3. Para evitar qualquer tipo de confusão entre os novos métodos e os métodos tradicionais, a matriz de Riccati em regime permanente e o ganho de realimentação, associados à AD_i , obtidos pelo método tradicional serão designados por $\overline{\mathbf{M}}_i$ e $\overline{\mathbf{F}}_i$. Enquanto a matriz de Riccati em regime permanente e o ganho de realimentação associados à AD_i e obtidos pelo novo método serão designados por $\hat{\mathbf{M}}_i$ e $\hat{\mathbf{F}}_i$.

Modelo do Jogo Dinâmico	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(k) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(k)$		
Custo Funcional	$J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \right\}$		
Custo Funcional Ótimo	Método tradicional		
	$J_i^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0) + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{T}_{jj} \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right.$ $\left. + \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{T}_{ij} \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\}, \quad j = I - \{i\}$		
	Método Proposto		
	$J_i^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \left\{ \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A} \right\} \mathbf{x}(0), \quad j = I - \{i\}$ $- \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A}^T \left\{ \sum_{k=1}^T [(\mathbf{h}_{i1}^{k1} + \mathbf{h}_{i2}^{k1})^T \mathbf{T}_{jj} (\mathbf{h}_{j1}^{k1} + \mathbf{h}_{j2}^{k1}) - (\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})^T \mathbf{T}_{ij} (\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})] \right\} \mathbf{A} \mathbf{x}(0)$		
ARE	Método tradicional	Método Proposto	
	$\overline{\mathbf{M}}_i = \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_i$	$\hat{\mathbf{M}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})^T \mathbf{A}$	
Controle a ser Aplicado	$\mathbf{u}_i(k) = -\hat{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}(k)$		
Ganhos de Realimentação	Via ARE	Método I	Método II
	$\overline{\mathbf{F}}_i = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\overline{\mathbf{M}}_i - \mathbf{Q}_i)$	$\hat{\mathbf{F}}_i = -\mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A}$	Alocação de pólos em Θ_i

Tabela 4.1: Tabela comparativa entre os métodos tradicionais e os novos métodos propostos para solucionar o problema de um jogo dinâmico de 2 jogadores.

4.1 Projeto 1- Jogo Dinâmico LQ

Como um exemplo didático, considera-se o sistema dinâmico estudado em (FILHO; BOTTURA, 1992), dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,35 & 1,2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2(k), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

cuja função objetivo a ser minimizada é

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(k) \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}_1^2(k) + \mathbf{u}_2^2(k). \quad (4.3)$$

Para esse jogo em particular, as condições descritas no Corolário (2.4.1) são válidas, logo $J_1 = J_2 = J$ e o desempenho otimizado pode ser dado por:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0), \quad i = 1 \text{ ou } 2, \quad (4.4)$$

ou, utilizando a nova metodologia, por:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \{ \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A} \} \mathbf{x}(0), \quad i = 1 \text{ ou } 2, . \quad (4.5)$$

Na Tabela 4.2, encontram-se os custos ótimos obtidos utilizando as duas abordagens consideradas.

Custo ótimo via método tradicional (J^*)	0,0295
Custo ótimo via novo método (J^*)	0,0295

Tabela 4.2: Custos via novo método e método tradicional.

Utilizando a equação a diferenças de Riccati (2.32), é possível evidenciar a característica assintótica que a matriz $\mathbf{M}_i(k)$ adquire à medida que o número de estágios T do jogo é aumentado. Como o valor de $\mathbf{M}_i(k)$ é obtido recursivamente de trás para frente (*backward*) em termos dos instantes de tempo ($\mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i$), o valor de regime ($\hat{\mathbf{M}}_i$) será atingido à medida que $k \rightarrow 0$, desde que T seja suficientemente grande para o jogo em questão.

Considerando que a matriz $\mathbf{M}_i(k)$ seja dada por:

$$\mathbf{M}_i(k) = \begin{bmatrix} m_{11}(k) & m_{12}(k) \\ m_{21}(k) & m_{22}(k) \end{bmatrix}, \quad m_{pq}(k) \in \mathbb{R}, \quad \forall p, q \in \{1, 2\}, \quad \forall k \in K, \quad (4.6)$$

é possível observar na Figura 4.1 o comportamento dos elementos da matriz $\mathbf{M}_i(k)$ ao longo do tempo e sua convergência para os coeficientes da matriz $\hat{\mathbf{M}}_i$.

Na Tabela 4.3, pode-se comparar o novo método para o cálculo da matriz de Riccati em regime permanente ($\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_1 = \hat{\mathbf{M}}_2$) com o método tradicional via ARE ($\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}_1 = \bar{\mathbf{M}}_2$).

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{M}}$	$\hat{\mathbf{M}}$	$\ \bar{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}\ $
3	$\begin{bmatrix} 0,0168 & -0,0193 \\ -0,0193 & 0,0759 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0168 & -0,0193 \\ -0,0193 & 0,0759 \end{bmatrix}$	$6,2542 \times 10^{-17}$
10	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0922 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0922 \end{bmatrix}$	$8,8967 \times 10^{-17}$
100	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0923 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0923 \end{bmatrix}$	$2,6930 \times 10^{-16}$

Tabela 4.3: Comparação entre as matrizes acopladas de Riccati obtidas pelo método tradicional e pelo novo método.

Nas Tabelas 4.4 e 4.5, podem-se visualizar os ganhos obtidos utilizando o método I,

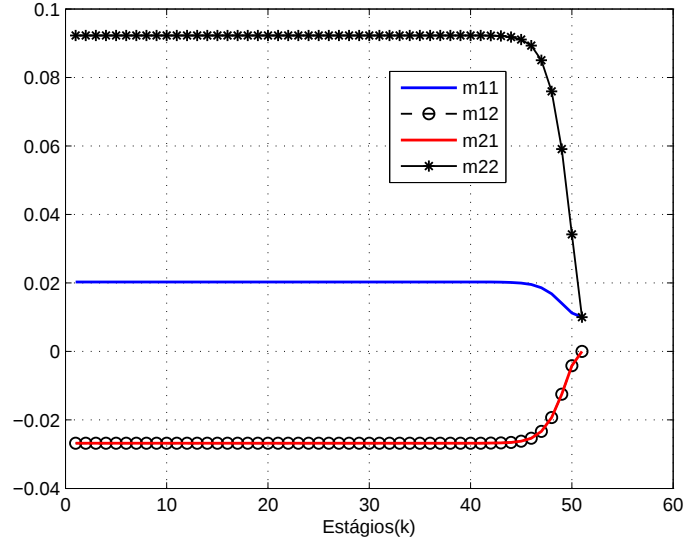


Figura 4.1: Convergência dos coeficientes da matriz $\mathbf{M}_i(k)$ com $T = 50$.

proposto na Subseção 3.7.1, variando-se o número de estágios do jogo, e o quão próximos estes ganhos estão dos obtidos pelo método tradicional.

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{F}}_1$	$\hat{\mathbf{F}}_1$	$\ \bar{\mathbf{F}}_1 - \hat{\mathbf{F}}_1\ $
3	$\begin{bmatrix} 0,0041 & -2,3355 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0041 & -0,0002 \end{bmatrix}$	$1,6457 \times 10^{-17}$
10	$\begin{bmatrix} 0,0084 & -0,0096 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0084 & -0,0096 \end{bmatrix}$	$4,1921 \times 10^{-17}$
100	$\begin{bmatrix} 0,0084 & -0,0096 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0084 & -0,0096 \end{bmatrix}$	$1,0889 \times 10^{-16}$

Tabela 4.4: Comparação entre ganhos 1 obtidos pelo método tradicional e pelo método I.

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{F}}_2$	$\hat{\mathbf{F}}_2$	$\ \bar{\mathbf{F}}_2 - \hat{\mathbf{F}}_2\ $
3	$\begin{bmatrix} -0,0195 & 0,0551 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0195 & 0,0551 \end{bmatrix}$	$3,6222 \times 10^{-17}$
10	$\begin{bmatrix} -0,0293 & 0,0765 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0293 & 0,0765 \end{bmatrix}$	$2,4237 \times 10^{-16}$
100	$\begin{bmatrix} -0,0294 & 0,0766 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0294 & 0,0766 \end{bmatrix}$	$6,0591 \times 10^{-17}$

Tabela 4.5: Comparação entre os ganhos 2 obtidos pelo método tradicional e pelo método I.

Observando as Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, percebe-se a equivalência entre o novo método e o método tradicional, tanto para o cálculo da matriz acoplada de Riccati, quanto para o cálculo dos ganhos de realimentação de estado. Além disso, como anteriormente dito na Observação 3.6.1, não há mudanças significativas nos resultados com o aumento dos estágios do jogo, desde que com o número atual de estágios tenha-se atingido o regime permanente. Como com $T = 10$ o sistema dinâmico já atingiu o regime permanente, conforme Figura 4.1, não há melhoria significativa ao se utilizar $T = 100$. Além disso, o

fator de condicionamento da matriz $\mathbf{H}$, a ser invertida, aumenta para valores maiores de T , como mostrado na Tabela 4.6, podendo gerar um problema numericamente instável, devido ao fato de que alterações nos dados da matriz $\mathbf{H}$ podem ocasionar grandes erros no resultado do problema. O fator de condicionamento da matriz $\mathbf{H}$ é definido como $\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|$.

Observação 4.1.1 *Conforme esta definição, o fator de condicionamento é dependente de uma norma. Em geral, se uma matriz é bem ou mal condicionada com relação a uma norma, ela é também bem ou mal condicionada com relação a outras normas. Para uma análise mais detalhada do condicionamento de matrizes, consultar Golub & Loan (1996).*

Estágios (T)	$cond(\mathbf{H})$
3	49,8910
10	336,7061
100	614.2560

Tabela 4.6: Análise do condicionamento da matriz $\mathbf{H}$.

Nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, pode-se observar a equivalência, tanto para as trajetórias de controle quanto de estado, entre os resultados obtidos pelo método I e pelo método tradicional. Nos dois métodos utiliza-se $T = 10$ para o cálculo dos ganhos de realimentação.

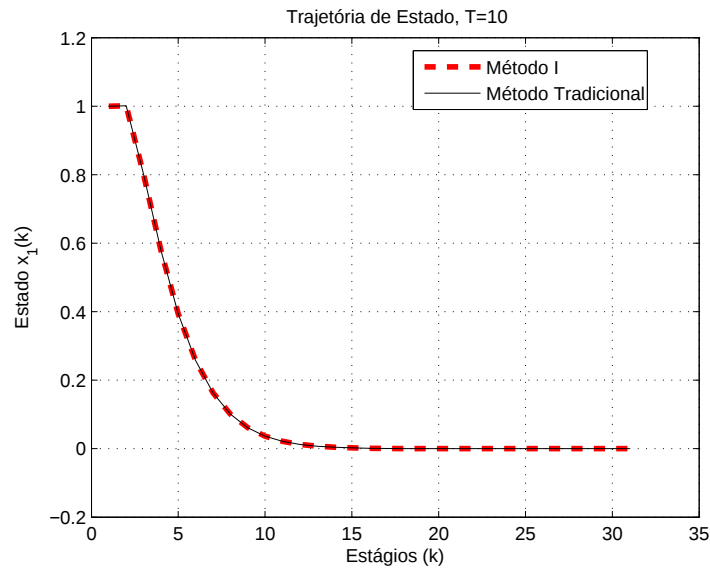


Figura 4.2: Trajetórias de estado obtidas através do método tradicional e método I.

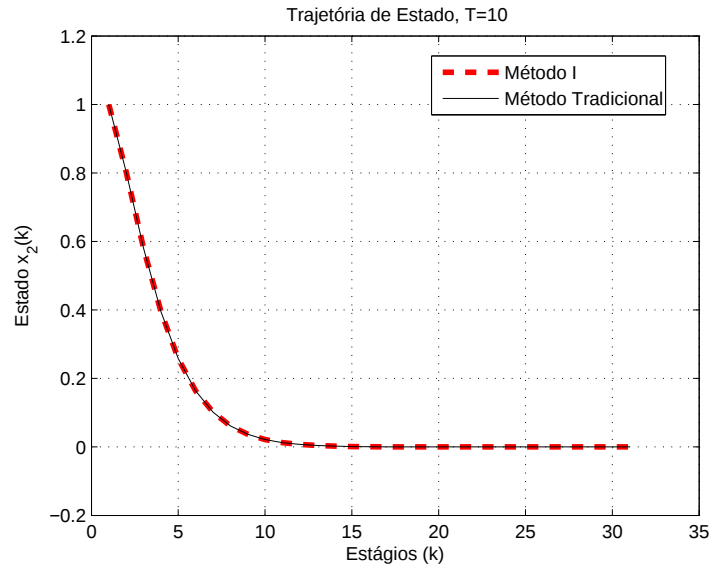


Figura 4.3: Trajetórias de estado obtidas através do método tradicional e método I.

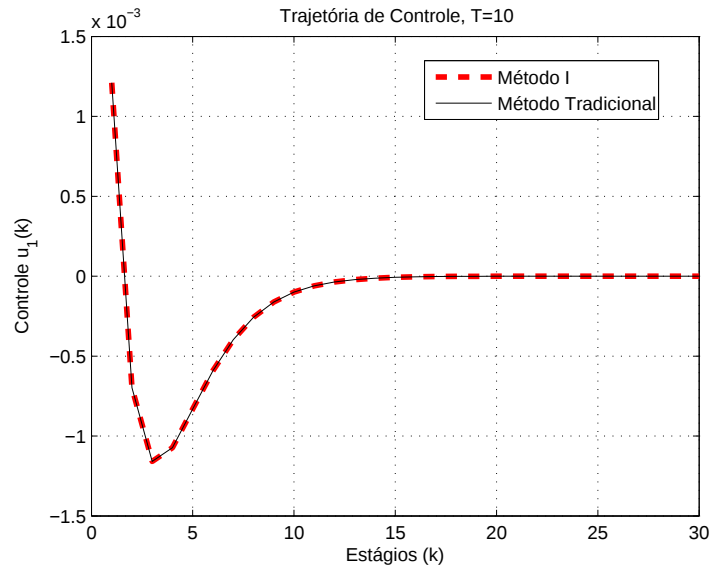


Figura 4.4: Trajetórias de controle obtidas através do método tradicional e método I.

Empregando a estratégia de regularização por regiões de confiança, com $d = 2$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha < 0$, realiza-se o cálculo dos ganhos através do método II, como proposto na Subseção 3.7.2, obtendo-se os resultados mostrados nas Figuras 4.6-4.9, nas quais também apresenta-se o resultado obtido pelo método tradicional, com $T = 10$. Como se pode observar, através da variação do parâmetro α podem ser obtidos resultados mais eficientes, uma vez que o transitório da trajetória de estados é reduzido, sendo o regime atingido mais rapidamente. De fato, é possível compor uma família de ganhos estabilizantes através da variação do parâmetro α .

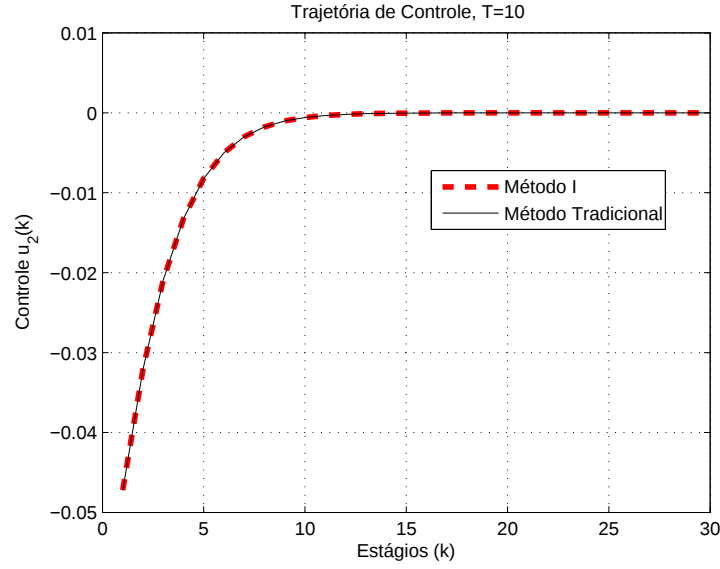


Figura 4.5: Trajetórias de controle obtidas através do método tradicional e método I.

Observação 4.1.2 Para uma melhor análise do método II, a redução $d \ll T$ é associada à contração de matrizes. Para tanto, neste trabalho, define-se a norma espectral da matriz $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}} = \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$, como a norma induzida pela norma euclidiana, ou seja:

$$\|\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}\mathbf{x}\|. \quad (4.7)$$

Do quociente de Rayleigh (GOLUB; LOAN, 1996), resulta de imediato a seguinte propriedade:

$$\|\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}\| = \sqrt{\rho_M(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}^T \mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}})}, \quad (4.8)$$

em que $\rho_M(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}^T \mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}})$ representa o máximo autovalor de $(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}^T \mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}})$ ou, equivalentemente, o maior valor singular de $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$, designado por $\sigma_M(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}})$.

Uma matriz é dita pequena quando ela produz uma grande atenuação para todas as direções dos vetores sobre os quais opera (Figura 4.10). Assim, diz-se que $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ é pequena, se, e somente se, $\sigma_M(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}) \ll 1$. Como o objetivo dos controladores ótimos é levar o estado $\mathbf{x}(k)$ para zero, uma contração em $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ é desejável. Pode-se observar, pelo exposto anteriormente, que com o ajuste do parâmetro α é possível obter uma família de ganhos, de modo que $\sigma_M(\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}) \ll 1$, ou seja, os autovalores de $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ situem-se no círculo unitário.

Na Tabela 4.7, pode-se comparar a norma dos ganhos obtidos pelo método tradicional e pelo método II, para três valores distintos de α . Analisando esta tabela, juntamente com a Figura 4.10, que mostra a contração da matriz $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$, conclui-se que os bons resultados obtidos pelo método II ocorrem às custas de maiores ganhos, no que se refere às suas

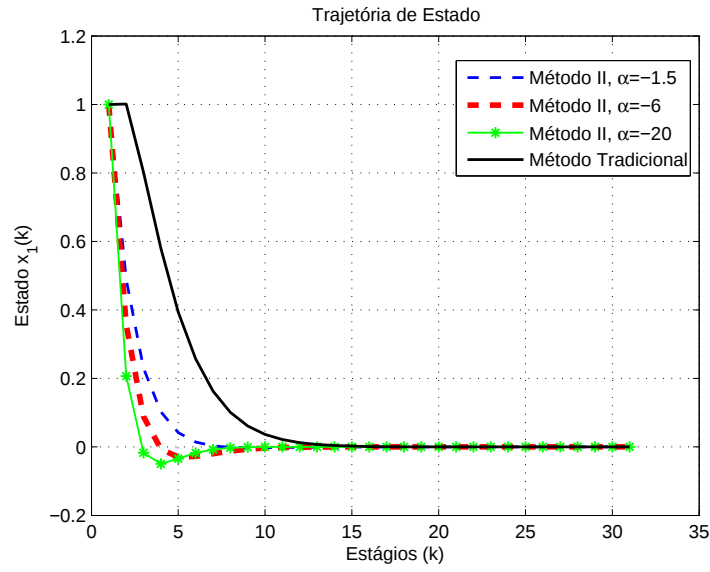


Figura 4.6: Trajetórias de estado obtidas através do método II e método tradicional.

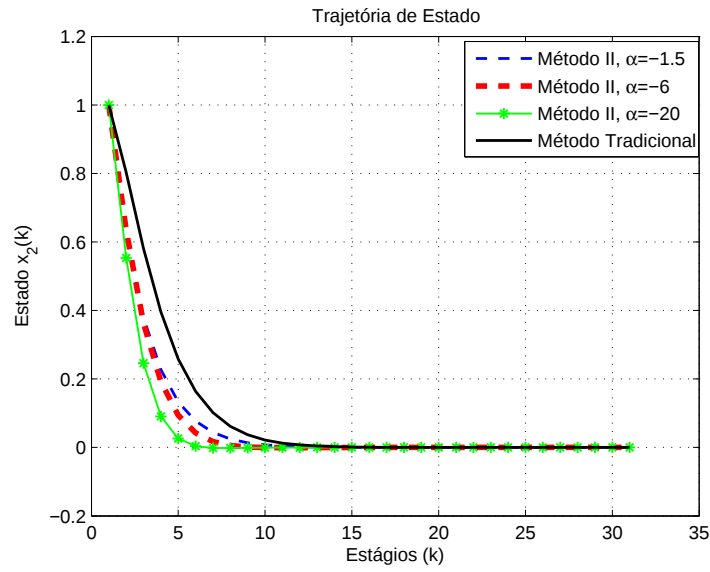


Figura 4.7: Trajetórias de estado obtidas através do método II e método tradicional.

normas, quando comparados aos ganhos obtidos via método tradicional, intensificando a contração da matriz $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$ na medida em que α é diminuído. Dessa forma, a utilização do método II no projeto exige um maior esforço de controle, como pode ser visto nas Figuras 4.8 e 4.9.

A Tabela 4.8 ilustra a redução do fator de condicionamento de $\hat{\mathbf{H}}$ na medida em que α é diminuído, o que representa mais uma vantagem em se utilizar o método II para a síntese de controladores LQ.

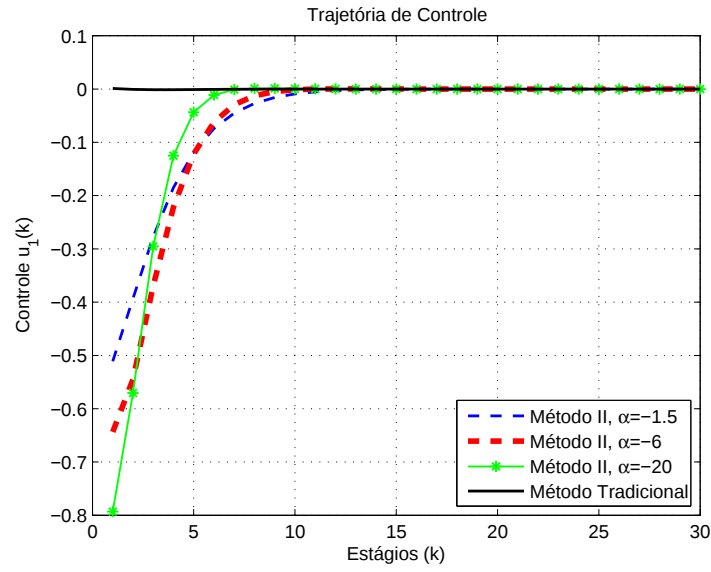


Figura 4.8: Trajetórias de controle obtidas através do método II e método tradicional.

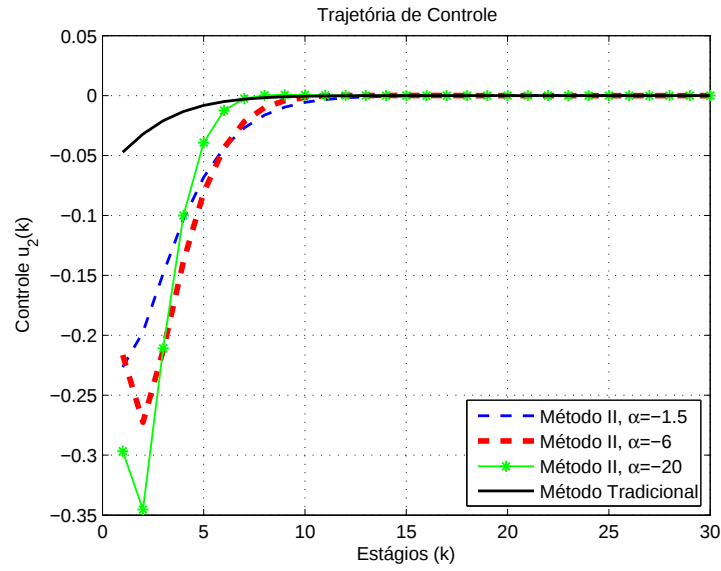


Figura 4.9: Trajetórias de controle obtidas através do método II e método tradicional.

	$\bar{\mathbf{F}}_1$	$\bar{\mathbf{F}}_2$	$\ \bar{\mathbf{F}}_1\ $	$\ \bar{\mathbf{F}}_2\ $
$T = 10$	$\begin{bmatrix} 0,0084 & -0,0096 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0294 & 0,0766 \end{bmatrix}$	0,0128	0,0820
α	$\hat{\mathbf{F}}_1$	$\hat{\mathbf{F}}_2$	$\ \hat{\mathbf{F}}_1\ $	$\ \hat{\mathbf{F}}_2\ $
-1,5	$\begin{bmatrix} -0,5563 & 1,0672 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,4172 & 0,6437 \end{bmatrix}$	1,2035	0,7671
-6	$\begin{bmatrix} -0,4950 & 1,1385 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,4885 & 0,7050 \end{bmatrix}$	1,2415	0,8578
-12	$\begin{bmatrix} -0,4357 & 1,1654 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5154 & 0,7643 \end{bmatrix}$	1,2442	0,9219

Tabela 4.7: Comparação entre os valores dos ganhos obtidos pelo método II, com suas respectivas normas.

Estágios (T)	Valor de α	$cond(\hat{\mathbf{H}})$
$d = 100$	0	614,2560
$d = 2$	-1,5	17,4136
$d = 2$	-6	14,8865
$d = 2$	-12	12,5213

Tabela 4.8: Análise do condicionamento da matriz $\hat{\mathbf{H}}$.

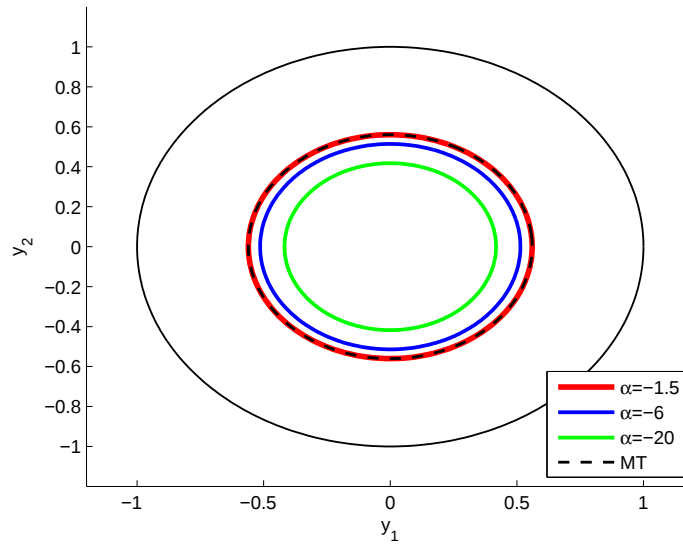


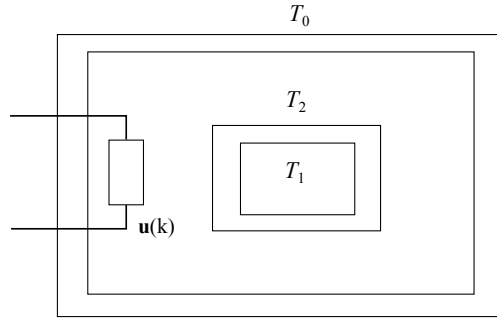
Figura 4.10: Contração da matriz $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$.

4.2 Projeto 2 - Sistema Térmico

Este projeto considera o sistema térmico (Figura 4.11) estudado em Jacquot (1995), no qual um elemento térmico, representado por $\mathbf{u}(k)$, é responsável pelo aquecimento ou resfriamento do meio 2, enquanto deseja-se controlar a temperatura do meio 1, possivelmente perturbada pela temperatura ambiente variável T_0 . O modelo nominal deste sistema é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,6277 & 0,3597 \\ 0,0899 & 0,8526 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,0126 \\ 0,0575 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} 0,0251 \\ 0,1150 \end{bmatrix} \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

(4.9)

**Figura 4.11:** Sistema Térmico.

e a função objetivo a ser minimizada é

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\|\mathbf{x}(k)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(k)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(k)\|_2^2) \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n \times n}$. Considera-se a perturbação $\mathbf{w}(k)$ como sendo ruído branco gaussiano com média zero e variância 0,03.

Na Tabela 4.9, pode-se observar a equivalência entre os custos ótimos obtidos através das duas abordagens consideradas.

Custo ótimo via método tradicional (J^*)	12,1628
Custo ótimo via novo método (J^*)	12,1628

Tabela 4.9: Custos via método tradicional e novo método.

Analisando as Tabelas 4.10, 4.11 e 4.12, juntamente com as Figuras 4.12 e 4.13, é possível, mais uma vez, comprovar a equivalência entre o novo método (método I para o cálculo dos ganhos) e método tradicional para o cálculo da matriz de Riccati e dos ganhos de realimentação de estado. A Tabela 4.13 mostra o aumento do fator de condicionamento da matriz $\mathbf{H}$ na medida em que se aumenta o número de estágios do jogo.

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{M}}$	$\hat{\mathbf{M}}$	$\ \bar{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}\ $
10	$\begin{bmatrix} 2,0084 & 1,8651 \\ 1,8651 & 6,7469 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0084 & 1,8651 \\ 1,8651 & 6,7469 \end{bmatrix}$	$9,2421 \times 10^{-16}$
50	$\begin{bmatrix} 2,0805 & 2,1287 \\ 2,1287 & 7,7097 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0805 & 2,1287 \\ 2,1287 & 7,7097 \end{bmatrix}$	$6,4724 \times 10^{-14}$
100	$\begin{bmatrix} 2,0805 & 2,1288 \\ 2,1288 & 7,7098 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0805 & 2,1288 \\ 2,1288 & 7,7098 \end{bmatrix}$	$1,0612 \times 10^{-13}$

Tabela 4.10: Comparação entre as matrizes acopladas de Riccati obtidas pelo método tradicional e pelo novo método.

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{F}}$	$\hat{\mathbf{F}}$	$\ \bar{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{F}}\ $
10	$\begin{bmatrix} 0,2193 & 0,7252 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2193 & 0,7252 \end{bmatrix}$	$1,3878 \times 10^{-16}$
50	$\begin{bmatrix} 0,2531 & -0,8486 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2531 & -0,8486 \end{bmatrix}$	$7,9606 \times 10^{-15}$
100	$\begin{bmatrix} 0,2531 & -0,8486 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2531 & -0,8486 \end{bmatrix}$	$1,3253 \times 10^{-14}$

Tabela 4.11: Comparação entre os ganhos 1 obtidos pelo método tradicional e pelo novo método.

Estágios (T)	$\bar{\mathbf{F}}_w$	$\hat{\mathbf{F}}_w$	$\ \bar{\mathbf{F}}_w - \hat{\mathbf{F}}_w\ $
3	$\begin{bmatrix} -0,1715 & -0,5667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1715 & -0,5667 \end{bmatrix}$	$4,1198 \times 10^{-15}$
10	$\begin{bmatrix} -0,1979 & -0,6631 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1979 & -0,6631 \end{bmatrix}$	$2,4081 \times 10^{-14}$
100	$\begin{bmatrix} -0,1979 & -0,6632 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1979 & -0,6632 \end{bmatrix}$	$4,3578 \times 10^{-14}$

Tabela 4.12: Comparação os ganhos 2 obtidos pelo método tradicional e pelo novo método.

Estágios (T)	$cond(\mathbf{H})$
10	186,2163
50	$2,3156 \times 10^3$
100	$3,7341 \times 10^3$

Tabela 4.13: Análise do condicionamento da matriz $\mathbf{H}$.

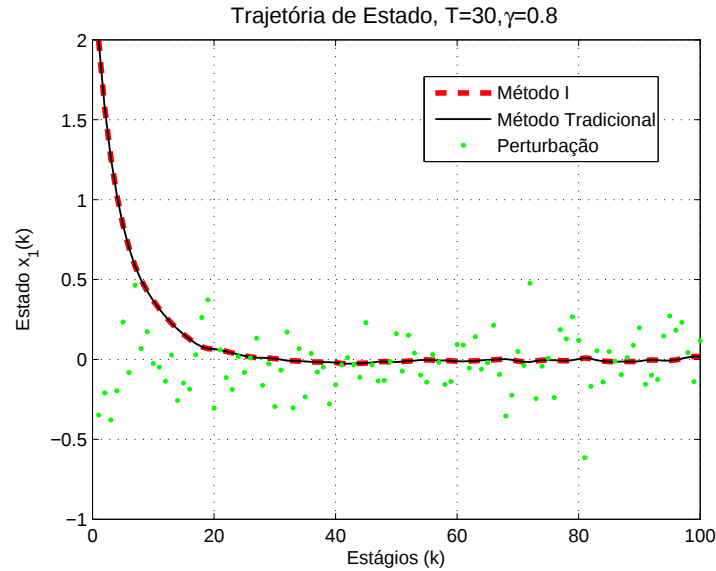


Figura 4.12: Trajetórias de estado obtidas através do método tradicional e método I.

Nas Figuras 4.14 e 4.15 são mostrados os resultados obtidos com a utilização método II, onde $d = 2$ e $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha < 0$. Mais uma vez, percebe-se que os estados tendem mais rapidamente para zero com a diminuição do α , gerando resultados com melhor de-

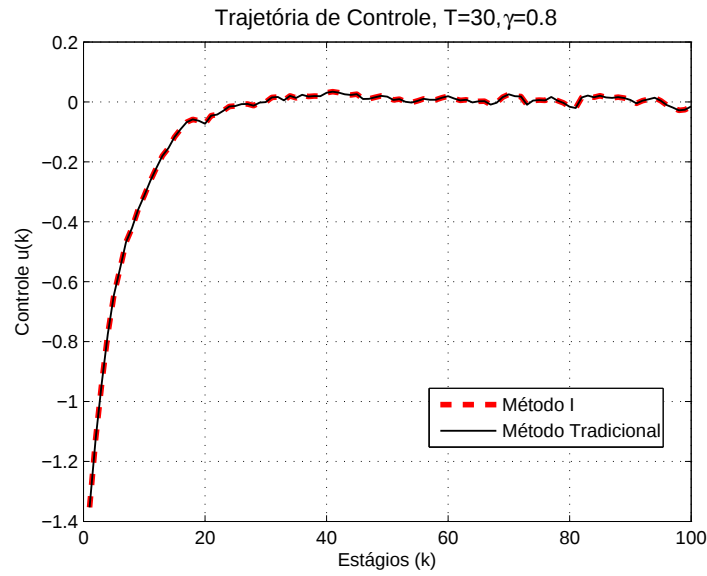


Figura 4.13: Trajetórias de controle obtidas através do método tradicional e método I.

sempenho que os obtidos pelo método tradicional. Observando a Figura 4.15, juntamente com a Tabela 4.14, conclui-se que os bons resultados obtidos pelo método II advêm de um maior esforço de controle resultante de ganhos de realimentação maiores (em norma) e uma conseqüente intensificação da contração da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{F}}$, ver Figura 4.16. A Tabela 4.15 ilustra o melhor condicionamento de $\hat{\mathbf{H}}$ com a diminuição de α .

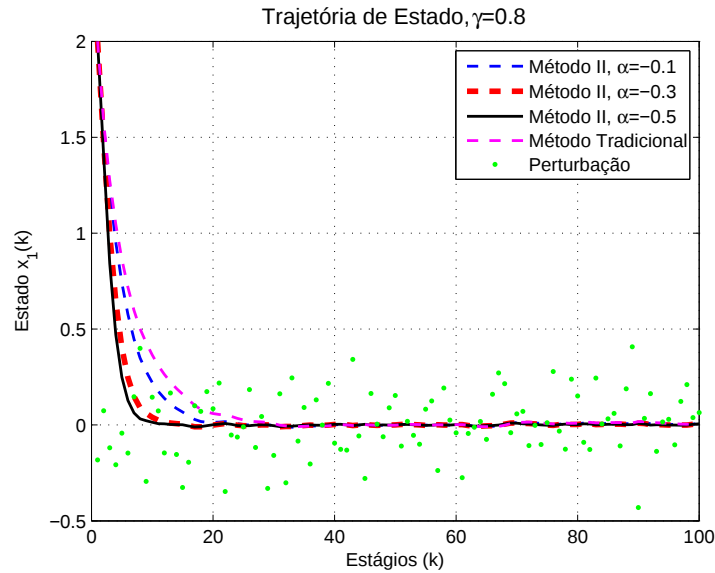


Figura 4.14: Trajetórias de estado obtidas através do método II e método tradicional.

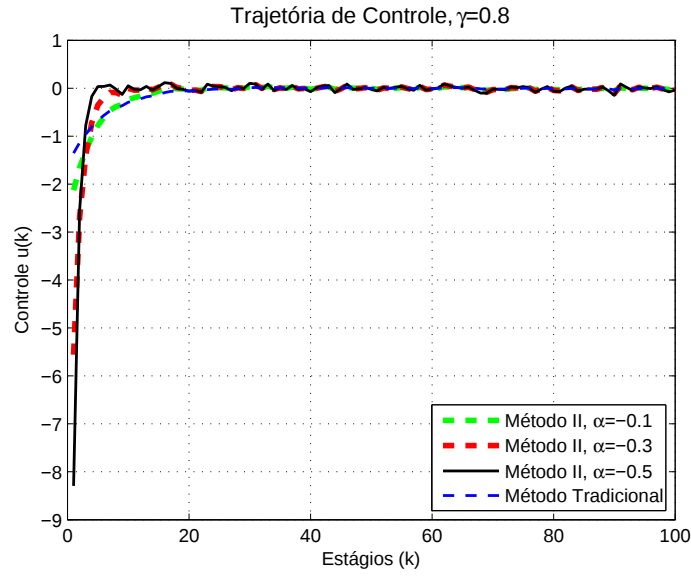


Figura 4.15: Trajetórias de controle obtidas através do método II e método tradicional.

	$\bar{\mathbf{F}}$	$\bar{\mathbf{F}}_w$	$\ \bar{\mathbf{F}}\ $	$\ \bar{\mathbf{F}}_w\ $
$T = 30$	$\begin{bmatrix} 0,2528 & 0,8475 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1976 & -0,6623 \end{bmatrix}$	0,8844	0,6912
α	$\hat{\mathbf{F}}$	$\hat{\mathbf{F}}_w$	$\ \hat{\mathbf{F}}\ $	$\ \hat{\mathbf{F}}_w\ $
-0,1	$\begin{bmatrix} 0,1069 & 1,9144 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2129 & 3,8288 \end{bmatrix}$	1,9174	3,8347
-0,3	$\begin{bmatrix} 0,7843 & 3,9892 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,5677 & 7,9772 \end{bmatrix}$	4,0656	8,1298
-0,5	$\begin{bmatrix} 1,5584 & 5,1788 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,1164 & 10,3549 \end{bmatrix}$	5,4082	10,8137

Tabela 4.14: Comparação entre os ganhos obtidos pelo método II, com suas respectivas normas.

Estágios (T)	Valor de α	$cond(\hat{\mathbf{H}})$
$d = 30$	0	$1,2675 \times 10^3$
$d = 2$	-0,3	5,7665
$d = 2$	-0,3	4,3545
$d = 2$	-0,5	3,5878

Tabela 4.15: Análise do condicionamento da matriz $\hat{\mathbf{H}}$.

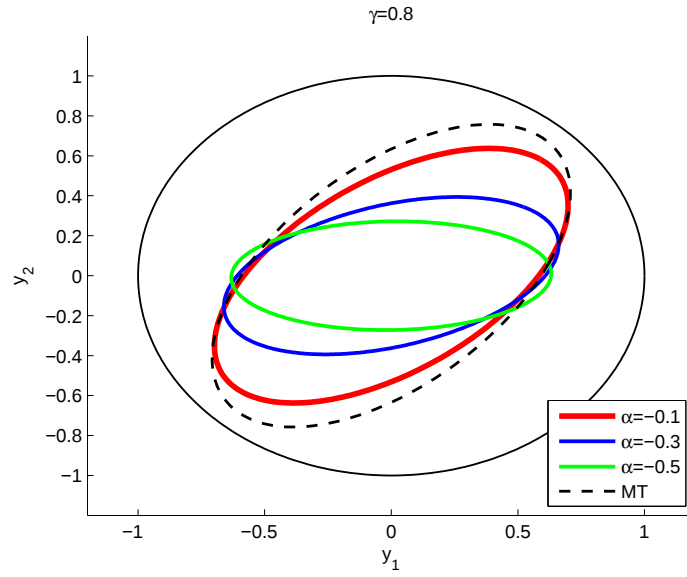


Figura 4.16: Contração da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{F}}$.

Considerando o caso de um projeto de controle via método tradicional, ou método I, com $\gamma = 0,4$, têm-se violada a condição de concavidade estrita de $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ em relação a $\mathbf{w}(k)$, estabelecida no Lema 2.4.1, ou, equivalentemente, viola-se a condição de que $\mathbf{H}_{22}^2 > 0$. Neste sentido, com os ganhos obtidos com este projeto, os estados do sistema não tendem para zero, resultando no projeto de controladores instáveis para o sistema, ver Figura 4.17(b). Entretanto, essa situação pode ser revertida com a utilização do método II, sem necessidade de se alterar o parâmetro γ . Através da escolha adequada do parâmetro α , pode-se ter a condição de concavidade estrita novamente respeitada, resultando no projeto de ganhos estabilizantes, como pode ser visto na Figura 4.17(a).

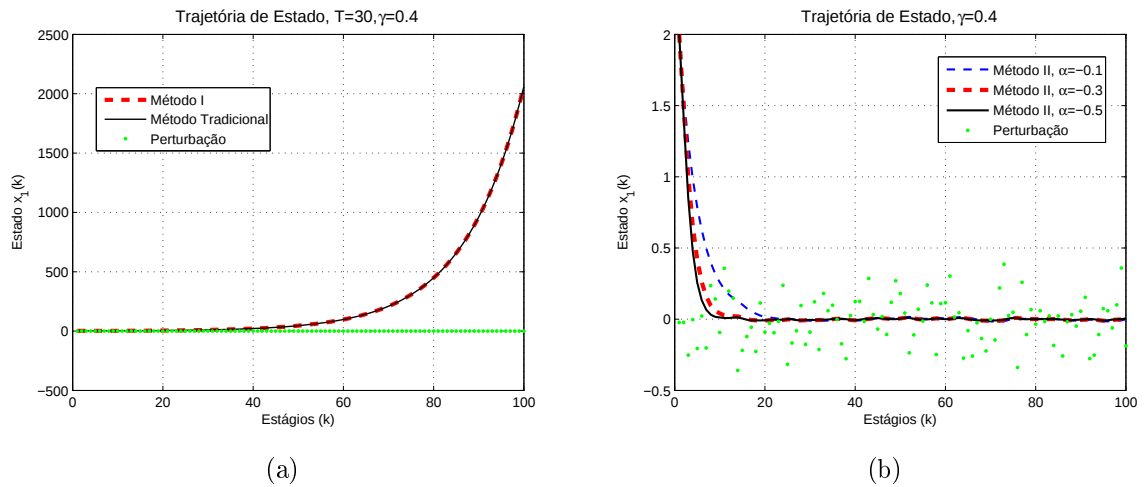


Figura 4.17: Exemplo de estabilização do sistema com o emprego do método II para a síntese dos controladores.

4.3 Projeto 3 - Controle Digital de Motor CC

Nesta seção, utiliza-se o método II para a síntese de um controlador digital de velocidade de um motor de corrente contínua (CC) com realimentação de estado. O modelo discretizado do motor fora obtido anteriormente, através de métodos de identificação experimental (AGUIRRE, 2007), em Alencar & Filho (2008), e é dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = 0,9587\mathbf{x}(k) + 0,0401\mathbf{u}(k) + 0,1\mathbf{w}(k). \quad (4.11)$$

A função objetivo associada é:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\|\mathbf{x}(k)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(k)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(k)\|_2^2). \quad (4.12)$$

Considera-se a perturbação $\mathbf{w}(k)$ como sendo ruído branco gaussiano com média zero e variância 0,01.

Na Figura 4.18, observam-se os melhores desempenhos gerados pelo método II em comparação com o método tradicional. Na Figura 4.19, é possível, mais uma vez, observar o maior esforço de controle necessário para levar os estados mais rapidamente para a referência, ao empregar o método II.

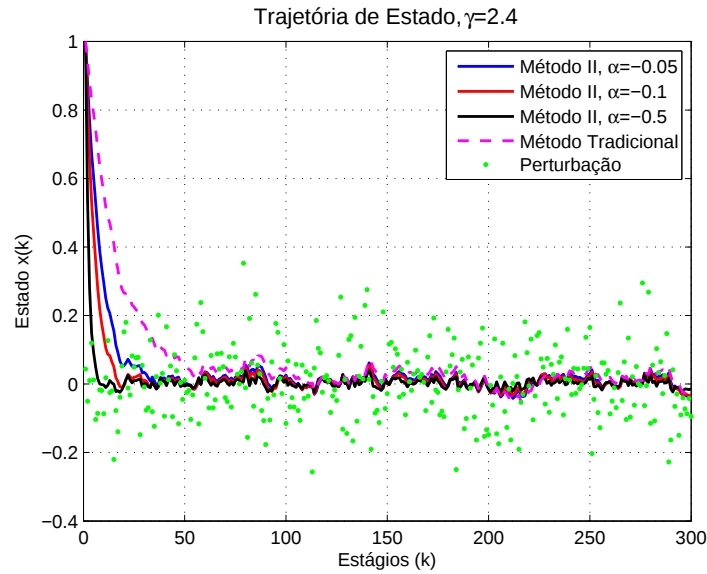


Figura 4.18: Trajetórias de estado obtidas através do método II e método tradicional.

A Figura 4.20 ilustra, novamente, um caso em que com um determinado valor de

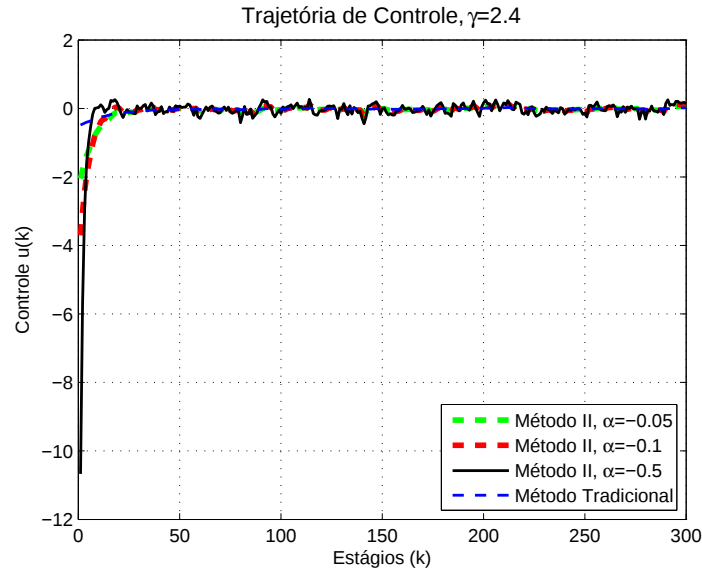


Figura 4.19: Trajetórias de controle obtidas através do método II e método tradicional.

γ , o projeto de controle via metodologia tradicional gera controladores instáveis (Figura 4.20(a)), mas que com o emprego do método II, e uma escolha adequada do parâmetro α , a estabilidade do sistema pode ser recuperada para o mesmo valor do γ utilizado anteriormente (Figura 4.20(b)).

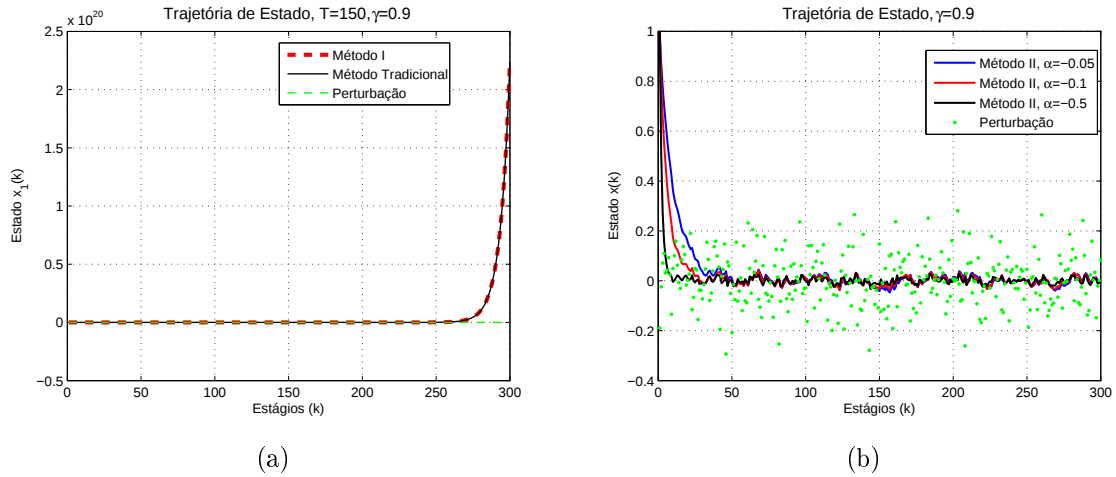


Figura 4.20: Estabilizando a saída do sistema com o emprego do método II para a síntese dos controladores.

4.4 Comentário Final

Neste capítulo, foram apresentados três exemplos de projetos de controladores LQ para sistemas dinâmicos, sendo, os dois últimos, projetos de controle H_∞ que se baseiam

em sua formulação como um jogo de soma zero. Foram empregadas tanto a metodologia tradicional, apresentada no capítulo 2, quanto a nova metodologia, proposta no capítulo 3, para obtenção das matrizes acopladas de Riccati e para a síntese dos controladores LQ. Com os exemplos numéricos e simulações computacionais foi possível comprovar a equivalência entre as metodologias consideradas, tanto para o cálculo da matriz acoplada de Riccati, como para o cálculo dos ganhos de realimentação de estado via método I proposto.

O método II mostrou ser uma opção bastante atraente para a síntese de controladores, pois, além de permitir a utilização de modelos de ordem reduzida, pôde proporcionar uma boa diminuição nos transitórios do sistema, através de escolhas adequadas do parâmetro α , conferindo características de desempenho satisfatórias. Em adição, o método II mostrou-se bastante flexível no sentido de ser possível compensar escolhas não adequadas do parâmetro γ (que levam o sistema à instabilidade) através de ajustes em α , resultando em boas condições de estabilidade. Entretanto, vale ressaltar que o atuador presente na planta deve ser capaz de gerar a energia demandada pelo método, pois, como foi visto nos resultados apresentados, um maior esforço de controle é exigido ao empregá-lo.

5 *Conclusões e Trabalhos Futuros*

Este trabalho apresentou, sob a forma de uma proposição matemática, uma nova metodologia para a solução das equações algébricas de Riccati acopladas associadas aos jogos dinâmicos lineares quadráticos com estrutura de informação em malha aberta. Na metodologia de jogos dinâmicos LQ proposta, empregou-se a programação convexa e a formulação via regiões de confiança, para redução da ordem dos problemas de otimização, garantindo a convexidade da solução alternativa das equações acopladas de Riccati, com as equações matriciais bem condicionadas. Além disso, com a introdução do parâmetro α , foi possível garantir dominância bloco diagonal às matrizes Hessianas associadas aos jogadores, resultando em soluções numericamente melhores condicionadas. Uma simplicidade algébrica de cálculo *off-line* foi obtida, sendo possível dispor de uma variedade de métodos numéricos com boas propriedades de estabilidade e precisão numérica. Estas características, normalmente críticas em outras metodologias distintas, mas matematicamente equivalentes, puderam reduzir significativamente a sensibilidade da síntese dos controladores com relação ao condicionamento das matrizes computadas. Tal abordagem via jogos dinâmicos LQ tornou possível atingir especificações de desempenho e estabilidade aceitáveis para uma ampla faixa de ganhos. As novas metodologias de síntese de controladores para problemas de jogos dinâmicos LQ propostas (métodos I e II) estão matematicamente consolidadas através de proposições originalmente formuladas.

O problema de controle H_∞ foi abordado de uma maneira não usual, onde o mesmo foi formulado como um jogo dinâmico de soma zero, em que o controle tenta minimizar a função objetivo, enquanto a perturbação tenta maximizá-la. Essa formulação foi de fundamental importância para que as novas metodologias propostas neste trabalho pudessem ser naturalmente empregadas em problemas de controle H_∞ com rejeição de perturbação. O projeto de controladores para sistemas dinâmicos discretos com ganho estático de realimentação de estado foi, então, desenvolvido (sem o emprego de equações modificadas de Riccati) a partir da metodologia de projeto via jogos dinâmicos proposta. Com esta metodologia, basta definir um γ (controle sub-ótimo) para em seguida, através do fator de

ajuste α , obter uma matriz de ganho de realimentação de modo que os pólos desta matriz estejam dentro de uma determinada região, com o cuidado de computar-se a norma e verificar se esta é menor que γ . Com isso, considerando problemas de controle H_∞ em que as soluções via ARE são instáveis para um determinado valor de γ , foi possível recuperar a estabilidade do sistema através de ajustes do parâmetro α , o que não pode ser feito, efetivamente, via métodos convencionais. Assim, não só é possível evitar a equação mal condicionada de Riccati, mas também atender especificações distintas na síntese de controladores, para explorar limites de desempenho e estabilidade.

Com a análise dos resultados obtidos via simulação, foi possível comprovar a equivalência entre o novo algoritmo e o algoritmo tradicional para a solução das ARE acopladas, e a equivalência entre o método I e o método tradicional via ARE para a síntese de controladores. O método II, desde que adequadamente ajustado, mostrou ser uma boa opção de projeto para a síntese de controladores, com melhores propriedades de desempenho que os obtidos via ARE, inclusive em problemas de rejeição de perturbação, em que a nova metodologia foi formulada como um jogo de soma zero e empregada para o projeto de controle H_∞ .

5.1 Trabalhos Futuros

Como perspectivas futuras, são possíveis destacar:

- ▶ Estender o conceito de jogo de Stackelberg para incluir jogos multiníveis dinâmicos e discretos, onde os agentes são divididos em dois grupos: um grupo de agentes líderes (múltiplos coordenadores) e um grupo de agentes seguidores (controladores locais), e cada jogador pode ou não estar cooperando dentro de seu grupo, segundo as estratégias de equilíbrio em malha fechada de Stackelberg, Nash, e Pareto.
- ▶ Estender a metodologia desenvolvida para problemas de jogos dinâmicos que empreguem outros tipos de estrutura de informação, além da malha aberta, e com restrições dinâmicas não lineares e funções objetivo não quadráticas.
- ▶ O estudo e desenvolvimento de metodologias, baseadas na teoria de jogos multiníveis, para resolver o problema do controle misto H_2/H_∞ para a obtenção de um controlador prático que seja capaz de prover desempenho e estabilidade robusta, em face das incertezas no comportamento do sistema dinâmico.
- ▶ Avaliar a possibilidade de se embarcar o algoritmo de síntese de controladores LQ

proposto neste trabalho em um *chip*, visando favorecer e facilitar o emprego desta metodologia de projeto em aplicações reais encontradas na indústria, e, até mesmo, tornar possível sua comercialização como uma nova tecnologia na área de controle e automação.

APÊNDICE A – O Teorema de Ponto Fixo de Banach

Teorema A.0.1 *Seja S um conjunto dotado de uma métrica d e suponha S completo em relação a d . Seja U um subconjunto fechado de S e seja $L : U \rightarrow U$ uma função de U em U . Supondo que L seja uma contração em relação à métrica d , ou seja, exista um número ρ com $0 \leq \rho < 1$ tal que $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in U$ valha:*

$$d(L(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leq \rho d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\text{A.1})$$

Então, a equação de ponto fixo $\mathbf{x} = L(\mathbf{x})$ tem solução em U e essa solução é única. Além disso, para qualquer $\mathbf{x}(0) \in U$, a seqüência $\mathbf{x}(n) = L(\mathbf{x}(n-1))$, $n \geq 1$, obtida aplicando-se repetidamente L a partir de $\mathbf{x}(0)$, converge (rapidamente) ao ponto fixo $\mathbf{x}$ na métrica d . A saber, tem-se que

$$d(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}) \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(0)). \quad (\text{A.2})$$

Demonstração: Como U é um subconjunto fechado de um espaço métrico completo, então U é também completo em relação à mesma métrica. Com efeito, pode-se provar que $\{\mathbf{x}(n)\}$ é uma seqüência de Cauchy em U . Para isso, sejam m e n dois números naturais quaisquer tais que $m \leq n$. Então, usando a desigualdade triangular $n - m$ vezes, têm-se:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(n)) &\leq d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(m+1)) + d(\mathbf{x}(m+1), \mathbf{x}(n)) \\ d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(n)) &\leq d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(m+1)) + d(\mathbf{x}(m+1), \mathbf{x}(m+2)) + d(\mathbf{x}(m+2), \mathbf{x}(n)) \\ &\vdots \\ d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(n)) &\leq d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(m+1)) + d(\mathbf{x}(m+1), \mathbf{x}(m+2)) + \dots + d(\mathbf{x}(n-1), \mathbf{x}(n)). \end{aligned}$$

Pela propriedade de contração, segue que:

$$d(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(a+1)) = d(L(\mathbf{x}(a-1)), L(\mathbf{x}(a))) \leq \rho d(\mathbf{x}(a-1), \mathbf{x}(a)) \leq \dots \leq \rho^a d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)), \quad a \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.3})$$

Logo,

$$d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(n)) \leq (\rho^m + \rho^{m+1} + \dots + \rho^{n-1})d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)), \quad (\text{A.4})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}(n)) &\leq \rho^m(1 + \rho + \dots + \rho^{n-1-m})d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)) \leq \rho^m \left(\sum_{a=0}^{\infty} \rho^a \right) d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)) \\ &= \frac{\rho^m}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Isso prova que $\{\mathbf{x}(n)\}$ é uma seqüência de Cauchy, pois ρ^m pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando m grande, para qualquer $n > m$.

Como $\{\mathbf{x}(n)\}$ é uma seqüência de Cauchy em U e U é completo, deve haver um $\mathbf{x}$ em U único ao qual a seqüência converge. Usando a desigualdade triangular, segue que:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(m)) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(n)) + d(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(m)). \quad (\text{A.6})$$

Tomando $m < n$, têm-se:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(m)) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(n)) + \frac{\rho^m}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)). \quad (\text{A.7})$$

Como $\mathbf{x}(n)$ se aproxima de $\mathbf{x}$ para n grande, pode-se fazer o termo $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(n))$ arbitrariamente pequeno, tomando n grande, sem alterar os demais. Com isso, conclui-se que:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(m)) \leq \frac{\rho^m}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)), \quad (\text{A.8})$$

sendo possível verificar que $\mathbf{x}(m)$, de fato, aproxima-se exponencialmente rápido de $\mathbf{x}$.

O objetivo agora é demonstrar que $\mathbf{x}$, o limite da seqüência $\{\mathbf{x}(n)\}$, é um ponto fixo de L . Para isso, calcula-se $d(\mathbf{x}, L(\mathbf{x}))$. Pela desigualdade triangular, segue que:

$$d(\mathbf{x}, L(\mathbf{x})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}(m+1)) + d(\mathbf{x}(m+1), L(\mathbf{x})), \quad (\text{A.9})$$

para todo m . Usando a equação (A.8) e a contratividade de L , segue que:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, L(\mathbf{x})) &\leq \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)) + \rho d(\mathbf{x}(m), \mathbf{x}) \leq \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)) + \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)) \\ &= 2 \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho} d(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Como m é arbitrário, pode-se fazer $m \rightarrow \infty$ e obter $d(\mathbf{x}, L(\mathbf{x})) = 0$, o que implica que $\mathbf{x} = L(\mathbf{x})$.

Por fim, resta demonstrar que $\mathbf{x}$ é o único ponto fixo de L . Para isso, supõe-se que haja um outro $\hat{\mathbf{x}} = L(\hat{\mathbf{x}})$. Usando a contratividade, têm-se:

$$d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = d(L(\mathbf{x}), L(\hat{\mathbf{x}})) \leq \rho d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}), \quad (\text{A.11})$$

ou seja, $(1 - \rho)d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \leq 0$. Entretanto, $\rho < 1$, o que implica $d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = 0$, que por sua vez implica $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. Isso completa a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach. $\square$

APÊNDICE B – Demonstração da Proposição (2.4.1)

A função custo do i -ésimo jogador é:

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) &= \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{u}_j(k) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i(T) \mathbf{x}(T). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Multiplicando os dois lados da equação (2.31) por $\mathbf{x}^*(k)^T$, obtém-se:

$$\mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{M}_i(k) \mathbf{x}^*(k) = \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{A}^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1), \quad (\text{B.2})$$

substituindo a equação (2.29) na equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{M}_i(k) \mathbf{x}^*(k) &= \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{E}^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1), \\ \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{M}_i(k) \mathbf{x}^*(k) &= \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}^*(k) \\ &+ \mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \right)^T \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{Q}_i(k) \mathbf{x}^*(k) &= \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{M}_i(k) \mathbf{x}^*(k) - \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \\ &- \mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \right) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Também, da equação (2.28), têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{u}_j(k) = \\ (-\mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k)) \mathbf{R}_{ij}(-\mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1)). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Logo, substituindo as equações (B.4) e (B.5) na equação (B.1), obtém-se o custo ótimo J_i^* , dado por:

$$\begin{aligned} J_i^*(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) = \\ \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^*(k)^T \mathbf{M}_i(k) \mathbf{x}^*(k) - \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) - \right. \\ \left. \mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \right) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) + \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\} + \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(T)^T \mathbf{Q}_i(T) \mathbf{x}^*(T), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

desenvolvendo o somatório para os dois primeiros termos e rearranjando, têm-se:

$$\begin{aligned} J_i^*(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) = \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0) - \mathbf{x}^*(T)^T \mathbf{M}_i(T) \mathbf{x}^*(T) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(T)^T \mathbf{Q}_i(T) \mathbf{x}^*(T) + \\ \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \right) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) + \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Da equação (2.33), sabe-se que $\mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i(T)$, logo, a equação (B.7) torna-se:

$$\begin{aligned}
 J_i^*(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_N^*) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0) + \\
 &\sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ -\mathbf{x}^*(k+1)^T \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \right) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) + \right. \\
 &\left. \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^*(k+1)^T \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{B}_j(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{R}_{ij}(k) \mathbf{R}_{jj}^{-1}(k) \mathbf{B}_j^T(k) \mathbf{M}_j(k+1) \mathbf{x}^*(k+1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

APÊNDICE C – Procedimento de Regularização por Regiões de Confiança

Neste apêndice é considerado o problema de otimização quadrática sobre uma bola:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad & L_i(\boldsymbol{\beta}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \\ \text{s.a.} \quad & \|\boldsymbol{\beta}_i\| \leq \Delta_i, \quad \Delta_i > 0. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathbf{H}_{ii}^i \in \mathbb{R}^{nT \times nT}$ é simétrica, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{nT}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}$ e $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, convenção adotada daqui em diante.

Para se obter um subproblema (C.1) que forneça uma solução para (3.9) apresentando matrizes bem condicionadas e convergência garantida, consideram-se os seguintes teoremas (MARTÍNEZ; A.SANTOS, 1998):

Teorema C.0.2 *Se $\boldsymbol{\beta}_i^*$ é solução de (C.1), então $\boldsymbol{\beta}_i^*$ é solução da equação*

$$(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) = -\mathbf{b}_i^*, \quad (\text{C.2})$$

com $\alpha_i \leq 0$, $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0$ e $\alpha_i(\boldsymbol{\beta}_i^{*T} \boldsymbol{\beta}_i^* - \Delta_i^2) = 0$.

Demonstração: O problema (C.1) é equivalente a

$$\max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad L_i(\boldsymbol{\beta}_i) \quad (\text{C.3})$$

$$\text{s.a.} \quad \boldsymbol{\beta}_i^T \boldsymbol{\beta}_i \leq \Delta_i^2. \quad (\text{C.4})$$

Como $\boldsymbol{\beta}_i^*$ é solução de (C.1), $\boldsymbol{\beta}_i^*$ satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker (Bazaraa

et al. (1993); Stephen & Vandenbergue (2008)) para (C.3), isto é, existe $\alpha_i \leq 0$ tal que

$$\mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i^* + \mathbf{b}_i + \alpha_i \boldsymbol{\beta}_i^* = 0, \quad (\text{C.5})$$

e

$$\alpha_i (\boldsymbol{\beta}_i^{*T} \boldsymbol{\beta}_i^* - \Delta_i^2). \quad (\text{C.6})$$

Portanto, $\boldsymbol{\beta}_i^*$ e α_i verificam (C.1).

Para mostrar que $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0$, considera-se inicialmente que $\boldsymbol{\beta}_i^* \neq 0$. Como $\boldsymbol{\beta}_i^*$ é solução de (C.1), $\boldsymbol{\beta}_i^*$ também é maximizador global de $L_i(\boldsymbol{\beta}_i)$ sujeita a $\|\boldsymbol{\beta}_i\| = \|\boldsymbol{\beta}_i^*\|$. Então

$$L_i(\boldsymbol{\beta}_i^*) \geq L_i(\boldsymbol{\beta}_i), \quad (\text{C.7})$$

para todo $\|\boldsymbol{\beta}_i\| = \|\boldsymbol{\beta}_i^*\|$. Substituindo (C.2) em (C.7), têm-se:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_i^{*T} (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta}_i \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i^* - \boldsymbol{\beta}_i^{*T} (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta}_i^*. \quad (\text{C.8})$$

Rearranjando (C.8), segue que:

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_i^*)^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_i^*) \leq 0 \quad (\text{C.9})$$

para todo $\boldsymbol{\beta}_i$ tal que $\|\boldsymbol{\beta}_i\| = \|\boldsymbol{\beta}_i^*\|$. Como $\boldsymbol{\beta}_i^* \neq 0$, as direções tais que $\|\boldsymbol{\beta}_i\| = \|\boldsymbol{\beta}_i^*\|$ envolvem todas as direções do espaço exceto as ortogonais a $\boldsymbol{\beta}_i^*$. Agora, qualquer vetor ortogonal $\boldsymbol{\beta}_i^*$ é o limite de uma sequência de vetores $\mathbf{v}_k$ para os quais, neste caso $\mathbf{v}_k^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_k \leq 0$. Portanto, passando ao limite, a expressão $\mathbf{v}^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \mathbf{v} \leq 0$ vale também para os vetores $\mathbf{v}$ ortogonais a $\boldsymbol{\beta}_i^*$. Portanto, $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0$.

Se $\boldsymbol{\beta}_i = 0$, por (C.2) têm-se que $\mathbf{b}_i = 0$. Então $\boldsymbol{\beta}_i = 0$ é solução de

$$\max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{c}_i \quad (\text{C.10})$$

$$s.a. \quad \boldsymbol{\beta}_i^T \boldsymbol{\beta}_i \leq \Delta_i^2, \quad (\text{C.11})$$

uma vez que $\mathbf{H}_{ii}^i \leq 0$, já que $\mathbf{v}^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \mathbf{v} \leq 0$ vale para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n^T}$ com $\alpha_i = 0$. $\square$

O próximo teorema fornece condições suficientes que garantem que $\boldsymbol{\beta}_i$ é solução de (C.1).

Teorema C.0.3 *Sejam $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\beta}_i^* \in \mathbb{R}^{n^T}$ tais que*

$$(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta}_i^* = -\mathbf{b}_i \quad \text{com} \quad (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0. \quad (\text{C.12})$$

(a) Se $\alpha_i = 0$ e $\|\beta_i^*\| \leq \Delta_i$, então β_i^* é solução de (C.1).

(b) Se $\|\beta_i^*\| = \Delta_i$, então β_i^* é solução de

$$\max_{\beta_i} L_i(\beta_i) \quad (C.13)$$

$$s.a. \quad \|\beta_i\| = \Delta_i. \quad (C.14)$$

(c) Se $\alpha_i \leq 0$ e $\|\beta_i^*\| = \Delta_i$, então β_i^* é solução de (C.1).

Além disso, se $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) < 0$, então β_i^* é única em (a), (b) e (c).

Demonstração: Se α_i e β_i^* satisfazem (C.12), β_i^* é maximizador da quadrática:

$$\hat{L}_i(\beta_i) = \frac{1}{2} \beta_i^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \beta_i + \mathbf{b}_i^T \beta_i + \mathbf{c}_i. \quad (C.15)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \beta_i^T (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \beta_i + \mathbf{b}_i^T \beta_i + \mathbf{c}_i \leq \frac{1}{2} \beta_i^{*T} (\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \beta_i^* + \mathbf{b}_i^T \beta_i^* + \mathbf{c}_i \quad (C.16)$$

para todo $\beta_i \in \mathbb{R}^{n^T}$. De (C.16) segue que:

$$L_i(\beta_i) \leq L_i(\beta_i^*) + \frac{\alpha_i}{2} (\beta_i^{*T} \beta_i^* - \beta_i^T \beta_i) \quad (C.17)$$

para todo $\beta_i \in \mathbb{R}^{n^T}$.

As afirmações (a), (b) e (c) são conseqüências imediatas de (C.17). A unicidade segue de (C.16), pois se $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) < 0$, a desigualdade é estrita para $\beta_i^* \neq \beta_i$. $\square$

Os Teoremas (C.0.2) e (C.0.3) mostram que se existe uma solução β_i^* do problema (C.1) situada na fronteira da bola, esta deve satisfazer, com seu multiplicador correspondente α_i , as seguintes equações:

$$(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \beta_i^* = -\mathbf{b}_i, \quad \|\beta_i^*\| = \Delta_i, \quad (C.18)$$

com $\alpha_i \leq 0$ e $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0$. Soluções de (C.1) no interior da bola só podem existir se $\mathbf{H}_{ii}^i$ é semidefinida negativa e, nesse caso, β_i^* , com norma menor que Δ_i , deve ser solução de (C.1).

Se $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n$, são os autovalores de $\mathbf{H}_{ii}^i$, a condição de $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I}) \leq 0$ é equivalente à $\alpha_i \leq -\sigma_n$. Assim, as limitações sobre o multiplicador α_i , para detectar soluções de fronteira, se resumem em:

$$\alpha_i \leq \min\{0, -\sigma_n\}. \quad (C.19)$$

Portanto, para encontrar soluções de (C.1) na superfície da bola, basta perceber que $\alpha_i \leq 0$, uma vez que $\mathbf{H}_{ii}^i$ no problema (3.9) é definida negativa, portanto o sistema $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}_i^* = -\mathbf{b}_i$ tem solução única $\boldsymbol{\beta}_i^* = -(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}_i$, já que, neste caso, $(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I})$ é não-singular. Portanto, encontrar $\alpha_i \leq 0$ satisfazendo (C.18) é equivalente a resolver:

$$\|(\mathbf{H}_{ii}^i + \alpha_i \mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}_i\| = \Delta_i. \quad (\text{C.20})$$

Referências

- ABOU-KANDIL, H.; BERTRAND, P. Analytic solution for a class of linear quadratic open-loop nash games. *International Journal of Control*, v. 43, p. 997–1002, 1986.
- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. ISBN 978-85-7041-584-4.
- ALENCAR, A. L. S.; FILHO, J. T. C. *Controle de Velocidade de Motor CC para um Robô Móvel Utilizando DSP*. 2008.
- BAEK, K. Disturbance attenuation for constrained discrete-time systems via receding horizon controls. In: *42nd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 935–940.
- BASAR, T. A dynamic games approach to controller design: Disturbance rejection in discrete-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 8, p. 936–952, 1991.
- BASAR, T. Paradigms for robustness in controller and filter designs. 2003.
- BASAR, T.; BERNHARD, P. *H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems, A Dynamic Game Approach*. [S.l.]: Birkhäuser, 1995.
- BASAR, T.; OLSDER, G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. [S.l.]: SIAM, 1999.
- BAZARAA, M. S.; SHERALI HANIF, D.; SHETTY C., M. *Nonlinear programming, Theory and Algorithms*. [S.l.]: Wiley, New York :, 1993.
- BERTRAND, J. Book review of *théorie mathématique de la richesse sociale et of recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. *Journal des Savants*, v. 67, p. 499–508, 1883.
- Robust linear programming and optimal control*.
- CHEN, C.-T. *Linear System, Teory and Design*. 198 Madison Avenue, New York, New York 10016: Oxford University Press, Inc, 1999. ISBN 0-19-511777-8.
- CRUZ, J. B. Leader-follower strategies for multilevel systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 2, p. 244–255, 1978.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Brief paper: h_∞ control for fast sampling discrete-time singularly perturbed systems. *Automatica*, Pergamon Press, Inc., v. 44, p. 1385–1393, May 2008.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. *Feedback Control Theory*. [S.l.]: Prentice Hall Professional Technical Reference, 1991. ISBN 0023300116.

- ENGWERDA, J. *Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games*. [S.l.], 1998. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/ner/tilbur/urnnbnlui12-75998.html>>.
- ENGWERDA, J. *On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games*. [S.l.], 1998.
- ENGWERDA, J. *The Open-Loop Linear Quadratic Differential Game Revisited*. [S.l.], 2005. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/dgr/kubcen/200534.html>>.
- ENGWERDA, J. *Linear Quadratic Games: An Overview*. [S.l.], 2006.
- ENGWERDA, J. *A Note on Cooperative Linear Quadratic Control*. [S.l.], 2007.
- ENGWERDA, J.; SALMAH, Y. *Necessary and Sufficient Conditions for Feedback Nash Equilibria for the Affine Quadratic Differential*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/dgr/kubcen/201078.html>>.
- FEINGOLD, D. G.; VARGA, R. S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the gerschgorin circle theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 12, p. 1241–1250, 1962.
- FILHO, J. T. C.; ALENCAR, A. L. S. Regulador linear quadrático via otimização convexa. *XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010.
- FILHO, J. T. C.; BOTTURA, C. P. Hierarchical multidecision making on a computer network with distributed coordination and control. In: *39th Annual Allerton Conference on Communication Control and Computing*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 703–704.
- FILHO, J. T. C.; BOTTURA, C. P. *Proposta para computação assíncrona paralela e distribuída de estruturas especiais de jogos dinâmicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica, 1992.
- FRANCIS, B. A. *A Course in H-infinity Control Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1987. (Lecture Notes in Control and Information Sciences). ISBN 3-540-17069-3. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BFb0007371>>.
- FREILING, G.; JANK, G.; ABOU-KANDIL, H. Discrete time riccati equations in open loop nash and stackelberg games. In: *Proceedings of ECC 97, Brüssel*. [S.l.: s.n.], 1997.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 3rd. ed. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. N. *Linear robust control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1995. ISBN 0-13-102278-4.
- HOTELLING, H. Stability in competition. *The Economic Journal*, v. 39, n. 153, p. 41–57, 1929.
- JACQUOT, R. G. *Modern Digital Control Systems/Book and Disk*. 2nd. ed. New York, NY, USA: Marcel Dekker, Inc., 1995.
- KAUTSKY, N. K. J.; DOOREN, P. V. Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of Control*, v. 41, n. 5, p. 1129–1155, 1985.

- LEWIS, F.; SYRMOS, V. *Optimal control*. [S.l.]: J. Wiley, 1995. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471033783.
- LUENBERGER, D. G. *Optimization by Vector Space Methods*. 1st. ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- MARTÍNEZ j. M.; A.SANTOS, S. *Métodos Computacionais de Otimização*. [S.l.]: Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1998.
- NAIDU, D. S. *Optimal Control Systems*. [S.l.]: CRC Press, 2003. (Electrical engineering textbook series). ISBN 9780849308925.
- NASH, J. Equilibrium points in n-person games. In: *Proceedings of National Academy of Science*. [S.l.: s.n.], 1950. v. 36, p. 48–49.
- NASH, J. Non-cooperative games. In: *Annals of Mathematics*. [S.l.: s.n.], 1951. v. 54, p. 286–295.
- NEUMANN, J. V. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, v. 100, n. 1, p. 295–320, 1928.
- NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1944.
- NIAN, X.; DUAN, Z.; TANG, W. Analytical solution for a class of linear quadratic open-loop nash game with multiple players. *Journal of Control Theory and Applications*, v. 3, p. 239–244, 2006.
- NOGUEIRA, A.; OLIVEIRA, G. H. *Controle Robusto H_∞ de Sistemas Discretos Sujeitos a Restrições No Controle e Na Saída*. 2009.
- OGATA, K. *Discrete-time control systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. ISBN 9780130342812.
- PACHTER, M.; PHAM, K. D. Discrete-time linear-quadratic dynamic games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 146, p. 151–179, 2010.
- PAPAVASSILOPOULOS, G. P.; MEDANIC, J. V.; CRUZ, J. B. On the existence of nash strategies and solutions to coupled riccati equations in linear-quadratic games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 28, n. 1, p. 49–76, 1979.
- PAPAVASSILOPOULOS, G. P.; OLSDER, G. J. On the linear-quadratic, closed-loop, no-memory nash game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 42, p. 551–560, 1984.
- PETERSEN, I. R. Minimax lqg control. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 16, p. 309–323, 2006.
- PINDYCK, R. S. Optimal economic stabilization policies under decentralized control and conflicting objectives. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 4, p. 517–530, 1977.

- RANK, M. L. *Robust and Optimal Control: Robust Sampled-Data H_2 and Fault Detection and Isolation*. Tese (Doutorado) — Technical University of Denmark, Department of Automation, 1998.
- RASMUSEN, E. *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. Blackwell Publishers, 2001. Hardcover. ISBN 0631210954. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/0631210954>>.
- RENATO, M. et al. Dynamic tracking with zero variation and disturbance rejection applied to discrete-time systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- SHEN, D.; CRUZ, J. B. *Nash Strategies for Dynamic Noncooperative Linear Quadratic Sequential Games*. 2006.
- SIMAAN, M. A. Stackelberg optimization of two-level systems. *j-ieee-smc*, v. 7, p. 554–557, 1977.
- SIMAAN, M. A.; CRUZ, J. B. Additional aspects of the stackelberg strategy in nonzero-sum games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 11, n. 6, p. 613–626, 1973.
- SIMAAN, M. A.; CRUZ, J. B. On the solution of the open-loop nash riccati equations in linear quadratic differential games. *International Journal of Control*, v. 18, n. 1, p. 57–63, 1973.
- SIMAAN, M. A.; CRUZ, J. B. On the stackelberg strategy in nonzero-sum games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 11, n. 5, p. 533–555, 1973.
- STARR, A. W.; HO, Y. C. Nonzero-sum differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 3, n. 3, p. 184–206, 1969.
- STEPHEN, B.; VANDENBERGUE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- STOORVOGEL, A. A. *The H_∞ control problem: a state space approach*. 2000.
- STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A.; CHEN, M. B. The discrete-time h_∞ control problem with strictly proper measurement feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 9, p. 1936–1939, 1994.
- VILMAR, N. A.; FILHO, J. T. C. *Uma Contribuição ao Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis*. 2007.
- XU, H.; KOICHI, M. Linear-quadratic zero-sum differential games for generalized state space systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 1, p. 143–147, 1994.
- YAESH, I.; SHAKED, U. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: h_∞ -optimal linear control and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 11, p. 1264–1271, 1991.
- ZHANG, C. et al. The eigenvalue distribution of block diagonally dominant matrices and block H -matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra Society*, v. 20, p. 621–639, 2010.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-456567-3.