Nicolas de Almeida Martins

Problemas de Coloração de Grafos com Poucos P_4's.

Fortaleza – CE

Fevereiro/2013

Nicolas de Almeida Martins

Problemas de Coloração de Grafos com Poucos P_4's.

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Ceará.

Orientador:
Rudini Menezes Sampaio

Co-orientadora:
Ana Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Fortaleza – CE

Fevereiro/2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

M344p Martins, Nicolas de Almeida.
Problemas de coloração de grafos com poucos P4´s / Nicolas de Almeida Martins. – 2013.
52f. : il. , enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Bancos de Dados.
Orientação: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio.
Coorientação: Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva.

1. Representação dos grafos. 2. Teoria dos grafos. 3. Algoritimos.. I. Título.

CDD 005

Resumo

Os problemas de coloração estão entre os mais estudados dentro da Teoria dos Grafos devido a sua grande importância teórica e prática. O problema da $L(2,1)$-coloração, por exemplo, pode ser aplicado na atribuição de frequências de rádio a torres de transmissão visando a diminuição de interferências nas transmissões. No entanto a maior parte das colorações de Grafos é de difícil resolução(NP-Difíceis).

Nesta dissertação, estudamos os problemas de $L(2,1)$-coloração, coloração harmônica e M-partição. Tendo em vista que os problemas de coloração abordados nesta dissertação são todos NP-difíceis, decidimos estudar as restrições destes problemas a $(q,q-4)$-grafos , com q fixo. As soluções utilizam a decomposição primeval destes grafos. Ressaltamos ainda que esta classe contém os cografos e os grafos $P4$-esparsos. Os algoritmos encontrados desta maneira são chamados de *Fixed Parameter Tractable(FPT)*, pois são polinomiais quando consideramos um determinado parâmetro como um valor fixo.

Além da obtenção de algoritmos para diversos problemas de coloração restritos aos $(q,q-4)$-grafos, com q fixo, também avaliamos a Conjectura de Griggs-Yeh com relação aos grafos P_4-Esparsos e P_4-Laden.

PALAVRAS-CHAVE: $L(2,1)$-Coloração, $(q,q-4)$-grafos, Coloração Harmônica, Decomposição Primeval, M-Partição, Complexidade Parametrizada.

Abstract

The coloring problems are among the most studied in the graph theory due to its great theoretical and practical importance. The $L(2,1)$-labeling problem, for instance, can be applied to the frequency assignment of transmission towers in order to decrease interference in transmissions. However most of the graph coloring problems are difficult to solve (NP-hard).

In this thesis, we study the $L(2,1)$-coloring, the harmonious coloring and M-partition of graphs. Considering that the coloring problems addressed in this thesis are all NP-hard, we decided to study the restrictions of these problems to $(q,q-4)$-graphs, with q fixed. The solutions use the Primeval decomposition of these graphs. We also emphasize that this class contains the cographs and $P4$-sparse graphs. The algorithms found in this way are called *Fixed parameter tractable (FPT)*, because they run on polynomial time if we consider a certain parameter as a fixed value.

Besides obtaining algorithms for several coloring problems restricted to $(q,q-4)$-graphs, with q fixed, we also evaluated Conjecture of Griggs-Yeh graphs with respect to P_4-Sparse and P_4-Laden graphs.

KEYWORDS: $L(2,1)$-Labeling, $(q,q-4)$-graphs, Harmonious Coloring, Primeval Decomposition, M-Partition, Parameterized Complexity.

Agradecimentos

Várias pessoas contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Sou profundamente grato a todas, e dedico agradecimento especial a algumas delas:

À meu orientador, Rudini Sampaio, por todo o tempo dedicado, a paciência, por todos os conselhos, confiança e amizade. Sua mão guiou cada passo deste trabalho com perfeição. Além disso aprendi com ele muito mais do que posso escrever nestas linhas.

À minha noiva, Carliane, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais complicados desse mestrado. Sempre me fazendo sentir melhor com seu sorriso e suas brincadeiras. Nada disso teria sentido se não fosse você ao meu lado durante todos estes anos. Você é e sempre será a minha vida. Te amo.

Aos meus pais, Evandro e Silvia, por terem me criado e me amado durante toda minha vida. Vocês são os melhores pais que eu poderia desejar. Esse trabalho é um pouco de vocês, pois nada disso poderia ser escrito não fosse toda a dedicação que vocês tiveram por mim.

À minha co-orientadora, Ana Shirley por toda a paciência, amizade, tempo dedicado e correções sempre precisas. A qualidade deste trabalho não seria a mesma sem suas pertinentes observações.

Aos meu amigos Arthur, Marcio, Samuel e Vinícius, por todos os momentos divertidos e sufocos compartilhados no laboratório. Vocês sempre conseguem me dar motivos pra gargalhar mesmo durante as horas mais tensas.

Finalmente, ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização da presente dissertação.

Sumário

1 Introdução

O primeiro problema de Coloração de grafos teve sua origem na famosa *Conjectura das Quatro Cores* proposta por Morbiüs em 1840. Esta conjectura afirmava que qualquer mapa poderia ter suas regiões coloridas com no máximo quatro cores sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor. Em 1852 Guthrie formulou a mesma conjectura de maneira independente. Como não obteve êxito em prová-la levou o problema a seu professor, de Morgan, que por sua vez apresentou o problema a Hamilton. Ambos não conseguiram obter uma prova para a conjectura.

Em 1879, Alfred Kempe observou que poderia, a partir de qualquer mapa, obter sua representação estrutural se marcasse em cada região um ponto e ligasse os pontos que representavam regiões vizinhas através de segmentos de linha. Desta maneira, o problema de determinar se as regiões do mapa podem ser coloridas com quatro cores sem que regiões fronteiriças tivessem a mesma cor é equivalente ao problema de determinar se os pontos de sua representação poderiam ser coloridos com quatro cores, de forma que quaisquer dois pontos ligados por um segmento tenham cores diferentes. Utilizando esta nova abordagem Kempe tentou provar a validade da conjectura, mas sua prova continha um erro que foi descoberto apenas 11 anos depois por Heawood.

A Conjectura das Quatro Cores ficou em aberto até 1976 quando Kenneth Appel e Wolfgang Haken provaram a sua validade. A dificuldade é uma constante quando se trata de coloração de grafos, encontrar uma coloração própria ótima de um grafo qualquer, por exemplo, é *NP*-difícil e o mesmo é válido para praticamente todas as outras colorações.

Desde então surgiram diversos problemas relacionados a colorir grafos, dentre estes podemos citar o *Problema da Coloração Própria*, *Problema da Coloração Completa*, também conhecido como *a*-Coloração, *Problema da b-Coloração*, cada um destes com restrições diferentes na forma como se deve colorir os vértices do Grafo e com diferentes definições de otimalidade. Temos também o *Problema da Coloração de Arestas* e o *Problema da Coloração Total*, no qual tanto vértices como arestas devem receber cores.

Por serem assuntos de grande relevância teórica e prática, os problemas de coloração são alguns dos mais estudados dentro da Teoria dos Grafos. Devido a dificuldade de se encontrar colorações ótimas de grafos gerais é comum, no estudo desdes problemas, buscarmos classes de grafos para as quais é possível resolvê-los de forma eficiente ou mesmo limitar o número de cores necessárias para colorir um grafo qualquer.

Neste trabalho, iremos examinar diversos tipos de coloração de grafos quando estes são restritos a classes de grafos que possuem um número de P_4's induzidos limitado. Para isso, iremos utilizar uma decomposição de grafos conhecida como *Decomposição Primeval* para explorarmos propriedades estruturais dos grafos examinados.

Iremos nos concentrar em uma classe de grafos chamada $(q,q-4)$. Obteremos algoritmos polinomiais para esta classe de grafos quando consideramos q um valor fixo. Os algoritmos encontrados são classificados como *Fixed-Parameter Tractable(FPT)*. Um algoritmo é considerado FPT se sua complexidade pode ser escrita como $f(k)n^{O(1)}$, onde f é uma função arbitrária que depende apenas de um parâmetro fixo k e n é o tamanho da entrada.

No Capítulo 2, apresentamos as definições e terminologia que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 3, estudamos o problema de $L(2,1)$-Coloração e mostramos um algoritmo FPT para determinar uma $L(2,1)$-Coloração ótima de um $(q,q-4)$-grafo se considerarmos o parâmetro q fixo. Além disso mostramos que a Conjectura de Griggs-Yeh, que será apresentada mais adiante, é válida para os grafos P_4-esparsos, P_4-Laden e alguns $(q,q-4)$-grafos conexos.

No Capítulo 4, abordaremos uma generalização do problema do Capítulo 3, a $L(h,1)$-coloração. Mostraremos como adaptar um algoritmo que calcula $\lambda(G)$ em espaço polinomial para calcular $\lambda_{(h,1)}(G)$.

No Capítulo 5, estudamos o problema de M-Partição de Grafos e mostramos um algoritmo FPT para determinar se é possível realizar uma M-partição de um $(q,q-4)$-grafo quando consideramos o parâmetro q fixo.

No Capítulo 6, apresentamos o problema de Coloração Harmônica e mostramos um algoritmo FPT para determinar uma coloração harmônica ótima de um $(q,q-4)$-grafo conexo se considerarmos o parâmetro q fixo.

A maior parte dos resuldados utiliza a decomposição primeval dos $(q,q-4)$-grafos para obter um algoritmo para os problemas investigados. Porém, dado que os problemas abordados são bastante distintos, a semelhança entre as provas é vista somente na utilização da decomposição. Os resultados obtidos nesta dissertaçao foram publicados em [Cerioli et al., 2010], [Sales et al., 2010] e [Sales et al., 2011].

2 Conceitos Básicos

2.1 Grafos

Um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ composto de um conjunto, não vazio, $V(G)$ de vértices e um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de arestas. Cada aresta é um par não ordenado de vértices de G. Se o par (u, v) está em $E(G)$, escreve-se $uv \in E(G)$ e diz-se que u e v são *extremidades* da aresta uv.

A denominação grafo vem do fato do mesmo poder ser representado graficamente, os vértices como pontos e as arestas como linhas ligando suas extremidades. Dizemos que dois vértices são *adjacentes* quando eles são extremidades de uma mesma aresta. De maneira análoga duas arestas são adjacentes se compartilham uma extremidade. Uma aresta que possui extremidades iguais é chamada *laço*. Duas arestas distintas com extremidades iguais são chamadas de *arestas múltiplas*.

Um grafo G é *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são finitos. Um grafo G é dito simples se G é finito, não possui laços e não possui arestas múltiplas. A partir de agora, toda vez que mencionarmos grafo, estaremos nos referindo a um grafo simples.

O *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (V, E')$ tal que $uv \in E'$ se e somente se $uv \notin E$. Um grafo que possui uma aresta entre qualquer par de vértices é chamado de *grafo completo*, um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. Um grafo que não possui nenhuma aresta é chamado de *grafo vazio*.

O *grau* de um vértice v em G é o número de vértices que são adjacentes a v em G e é denotado por $d_G(v)$. Se não houver ambiguidade com relação ao grafo a que nos referimos denota-se o grau de um vértice v apenas por $d(v)$. O *grau máximo* de um grafo G é o maior grau de um vértice de G e é denotado por $\Delta(G)$.

Dado um grafo G para todo vértice $v \in V(G)$, $N(v)$ denota o conjunto dos vizinhos, ou vizinhança, de v. De maneira semelhante podemos pensar na vizinhança de um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ como $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$.

Uma *coloração* de um grafo G é uma função c: $V(G) \to \mathbb{N}$. Dizemos que uma coloração c é *própria* se para qualquer aresta $uv \in E(G)$ tem-se $c(u) \neq c(v)$.

Um *caminho* é uma sequência não vazia $W = v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_kv_k$ na qual os termos são alternadamente vértices e arestas sem repetição, tais que, para $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_{i-1}v_i$. Neste caso v_0 e v_k são as *extremidades de W*. Como trataremos apenas de grafos simples, podemos omitir as arestas na descrição de um caminho. Um caminho com n vértices é denotado por P_n e o *comprimento* de um caminho é o número de arestas que este possui. A *distância entre dois vértices u* e v em um grafo G é o comprimento do menor caminho que possui extremidades u e v em G.

Seja um grafo $G = (V,E)$. O grafo $H = (V',E')$ é dito um *subgrafo* de G se $V' \subseteq V$ e se $E' \subseteq E$. Seja um grafo $G = (V,E)$ e $V' \subseteq V$. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' e o conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem ambas as extremidades em V' é chamado de *subgrafo de G induzido por* V' e é denotado por $G[V']$, podemos dizer também que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G. Chamamos um conjunto de vértices que induzem um grafo completo de *clique* e um conjunto de vértices que induzem um grafo vazio de *conjunto independente*.

Um grafo G é a união disjunta de dois grafos G_1 e G_2, escrevemos $G = G_1 \cup G_2$, se $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Além disso um grafo G é um junção de dois grafos G_1 e G_2, escrevemos $G = G_1 \vee G_2$, se $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1) \text{ e } v \in V(G_2)\}$.

2.2 Grafos $(q, q-4)$

Em nosso trabalho estudaremos colorações de grafos. Como os problemas estudados são *NP*-difíceis para grafos gerais, iremos resolvê-los restringindo o número de P_4's induzidos que os grafos estudados podem possuir.

Babel e Olariu definiram em [Babel e Olariu, 1998] um grafo como $(q, q-4)$-*grafo* se nenhum conjunto com no máximo q vértices induz mais do que $q-4$ P_4's distintos. Sendo assim, cografos são grafos $(4,0)$, ou seja, não possuem P_4's induzidos [Corneil et al., 1981] enquanto que grafos P_4-esparsos são grafos $(5,1)$ [Hoàng, 1985]. Estruturalmente, sabe-se que todo cografo é desconexo ou seu complemento é desconexo, e que todo grafo P_4-esparso é desconexo, ou possui complemento desconexo ou é uma "aranha".

Dizemos que um grafo é uma *aranha* (R, C, S) se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos R, C e S, onde $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ e $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ com $k \geq 1$ tais que:

i. C é uma clique;

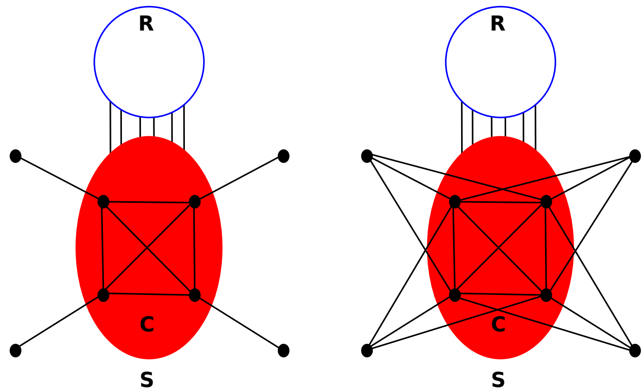
ii. S é um conjunto independente;

iii. Todo vértice de R é adjacente aos vértices de C e não-adjacente aos vértices de S;

iv. (a) s_i é adjacente a c_j se e só se $i = j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha magra*); ou

(b) s_i é adjacente a c_j se e só se $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha gorda*)

Chamamos R, C e S, respectivamente, de cabeça, corpo e patas da aranha. Note que R pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que a aranha é sem cabeça.



(a) Aranha Magra (b) Aranha Gorda

Um grafo é *p-conexo* se, para toda partição dos vértices de G em conjuntos A e B não vazios, existe um P_4 com vértices de A e B. Uma *p-componente separável* é um subgrafo p-conexo maximal com uma partição (H_1, H_2) tal que todo P_4 $wxyz$ com vértices em H_1 e H_2 é tal que $x, y \in H_1$ e $w, z \in H_2$. Jamison e Olariu provaram um importante resultado estrutural para grafos quaisquer, usando *grafos p-conexos*.

Teorema 2.1 ([Jamison e Olariu, 1995]) *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Então G satisfaz um dos itens abaixo:*

(i) G é desconexo;

(ii) $\overline{G}$ é desconexo;

(iii) G é p-conexo;

(iv) G possui uma p-componente separável H com partição (H_1, H_2) tal que todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

Babel e Olariu provaram em [Babel e Olariu, 1998] que todo $(q, q-4)$-grafo p-conexo é uma aranha sem cabeça ou tem menos do que q vértices. Desta forma, aplicando o teorema acima sobre um $(q, q-4)$-grafo, temos diretamente o resultado abaixo.

Corolário 2.2 ([Babel e Olariu, 1998]) *Seja $q \geq 4$ um inteiro fixo e G um $(q, q-4)$-grafo, então G satisfaz um dos itens a seguir:*

(a) G é desconexo;

(b) $\overline{G}$ é desconexo;

(c) G é uma aranha;

(d) G possui uma p-componente separável H com bipartição (H_1, H_2) com menos de q vértices tal que todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

O Corolário 2.2 leva a uma decomposição dos $(q, q-4)$-grafos. Nesta decomposição as folhas são p-componentes com menos do que q vértices ou grafos aranha sem cabeça. Os nós internos são operações de União disjunta ou Junção, que correspondem respectivamente, aos itens a e b do Corolário, ou uma operação que adiciona todas as arestas entre um grafo e uma parte determinada de outro grafo, correspondendo ao item c(ligando um grafo ao corpo de uma aranha sem cabeça) e ao item d (ligando um grafo ao subgrafo H_1 de uma p-componente separável H com bipartição (H_1, H_2)).

Iremos utilizar esta decomposição para criarmos algoritmos que resolvem recursivamente, em tempo polinomial, os problemas de coloração estudados neste trabalho, se considerarmos q um parâmetro fixo.

3 L(2,1)-Coloração

3.1 Introdução

Normalmente dois transmissores sofrem interferência mútua se estes operam com a mesma frequência e estão fisicamente próximos um do outro. Um problema prático clássico que pode ser modelado como uma coloração em grafos consiste em conceder a cada transmissor de rádio uma determinada frequência, tal que dois transmissores que se interferem não possuam canais iguais. O objetivo neste caso é usar o menor número possível de frequências.

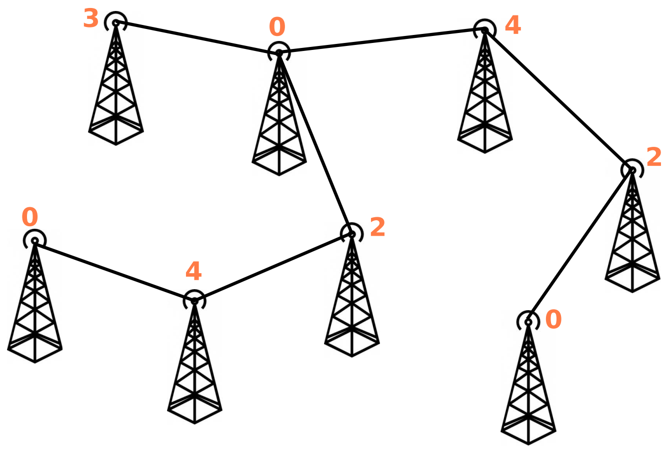
No entanto transmissores muito próximos podem causar interferência mesmo sem operar na mesma frequência bastando que estejam operando em frequências semelhantes, além disso não podemos permitir que dois transmissores enviem informações para um mesmo receptor usando frequências iguais. Como as freqüências são fornecidas em intervalos, o objetivo se torna, então, minimizar o intervalo de freqüências utilizado.

Em 1988, F. S. Roberts [Roberts, 1988] propôs o problema de atribuir, de forma eficiente, frequências de rádio usando inteiros não negativos para representá-las, de modo que transmissores próximos receberiam canais diferentes e transmissores muito próximos receberiam canais com diferença pelo menos dois. Modelando o problema em um grafo temos a seguinte definição de $L(2,1)$-coloração:

Definição 3.1 *Uma função c:* $V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ *é uma* $L(2,1)$*-coloração ou* λ*-coloração de um grafo* $G(V,E)$*, se para cada u,* $v \in V(G)$ *tem-se:*

- *se* $uv \in E(G)$ *então* $|c(u) - c(v)| \geq 2$*;*
- *se a distância entre u e v é 2 então* $c(u) \neq c(v)$.

O termo "eficiente" neste caso não se refere ao número de frequências utilizadas, mas a diferença entre a maior e menor frequências. A diferença entre a maior e menor cores utilizadas na coloraçõa é chamada de *span*. Usualmente iniciamos uma $L(2,1)$-coloração com a cor 0,



(c) Exemplo de $L(2,1)$-coloração de uma rede de transmissores

assim o span é igual ao valor da maior cor utilizada. Desta maneira, o número λ-cromático de uma grafo G é definido da seguinte forma:

Definição 3.2 *O número λ-cromático de G, denotado por $\lambda(G)$, é o menor inteiro k tal que existe uma λ-coloração de G com span k.*

Determinar o número $\lambda(G)$ é NP-completo como mostraram Griggs e Yeh em [Griggs e Yeh, 1992]. Neste mesmo artigo os dois também conjecturaram que se $\Delta(G) \geq 2$, então $\lambda(G) \leq \Delta(G)^2$.

Desde então esta conjectura se tornou um dos problemas mais estudados dentro do escopo das λ-colorações e permanece em aberto, tendo sido provada apenas para algumas classes específicas de grafos. Por exemplo, grafos planares de grau máximo $\Delta \neq 3$ [Heuvel e MacGuinness, 2003] [Bella et al., 2007] e grafos com grau suficientemente grande [Havet et al., 2008].

Decidir se $\lambda(G) \leq k$ é NP-completo para todo $k \geq 4$ fixo como provado por Fiala et al. em [Fiala et al., 2001]. Posteriormente Havet e Tomassé provaram que o problema continua NP-completo mesmo quando G pertence a uma subclasse dos grafos bipartidos, chamada de grafos de incidência [Havet e Thomassé, 2009]. Havet et al. provaram ainda que o resultado também é válido para grafos planares [Havet et al., 2010]. Calamoneri organizou os principais resultados obtidos sobre a $L(2,1)$-coloração em [Calamoneri, 2011].

Neste capítulo mostraremos um algoritmo FPT(Fixed-Parameter Tractable) para determinar uma λ-coloração ótima para um $(q,q-4)$-grafo qualquer, este algoritmo determina esta coloração em tempo polinomial se considerarmos que q é um inteiro fixo. Também provamos que a conjectura de Griggs-Yeh é válida para os grafos P_4-esparsos, P_4-laden e para alguns $(q, q-4)$-grafos conexos.

3.2 Complexidade do Problema de $L(2,1)$-coloração

Nesta seção apresentaremos a prova da *NP*-completude do problema de $L(2,1)$-coloração como mostrada por Griggs e Yeh em [Griggs e Yeh, 1992]. Apresentaremos esta prova pois foi a primeira apresentada para este problema, além de ser bastante simples em relação às demais.

Lema 3.3 ([Griggs e Yeh, 1992]) *Dado um grafo G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma função injetiva* $f : V(G) \to [0, |V(G)|-1]$*, tal que* $|f(x) - f(y)| \geq 2$ *para todo* $xy \in E(G)$*;*

2. $\overline{G}$ *possui um caminho hamiltoniano.*

Prova: Seja f uma função que satisfaz a afirmação (1). Como f é injetiva, a função f^{-1} existe. Agora ordene os vértices de G da seguinte maneira: $v_i = f^{-1}(i)$, $0 \leq i \leq |V(G)|-1$. Assim v_i é adjacente a v_{i+1} em $\overline{G}$, uma vez que $|f(v_i) - f(v_{i+1})| = 1$ e portanto $v_i v_{i+1} \notin E(G)$. Logo $v_0, v_1, \ldots, v_{|V(G)|-1}$ formam um caminho hamiltoniano em $\overline{G}$.

Seja $P = v_0, v_1, \ldots, v_{|V(G)|-1}$ um caminho hamiltoniano em $\overline{G}$. Defina a função $f : V(G) \to [0, |V(G)|-1]$ como $f(v_i) = i$, $0 \leq i \leq |V(G)|-1$. É fácil ver que f é injetiva. Seja $xy \in E(G)$, então $f(x) = f(v_i) = i$ e $f(y) = f(v_j) = j$ para algum $i, j \in [0, |V(G)|-1]$. Como $xy \in E(G)$, i e j não podem ser consecutivos pois x não é vizinho de y em $\overline{G}$, ou seja $|f(x) - f(y)| \geq 2$. Logo f satisfaz a afirmação (1). □

A partir do Lema anterior podemos definir o seguinte problema de decisão.

Coloração injetiva de distância 2(IDL)

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Pergunta: Existe uma função injetiva $f : V(G) \to [0, |V(G)|-1]$, tal que $|f(x) - f(y)| \geq 2$ para todo $xy \in E(G)$?

A *NP*-completude de (IDL) é consequência direta do Lema 3.3 e da *NP*-completude do problema de caminho hamiltoniano.

Considere agora a seguinte forma do problema de $L(2,1)$-coloração:

Coloração de distância 2(DL)

Instância: Grafo $G = (V, E)$ com diâmetro 2.

Pergunta: $\lambda(G) \leq |V(G)|$?

Teorema 3.4 ([Griggs e Yeh, 1992]) *(DL) é NP-completo.*

Prova: Para mostrar que (DL) é NP-completo faremos uma redução de (IDL) para (DL). Seja $G = (V, E)$ uma instância de (IDL). Construa o grafo G' tal que $V(G') = V(G) \cup \{v^*\}$ e faça v^* ser adjacente a todos os vértices de $V(G)$. Então temos que $V(G') = V(G) + 1$ e o diâmetro de G' é 2.

Resta-nos apenas mostrar que existe uma função injetiva $f : V(G) \to [0, |V(G)| - 1]$, tal que $|f(x) - f(y)| \geq 2$ para todo $xy \in E(G)$ se e somente se $\lambda(G') \leq |V(G')|$.

Suponha que existe uma função f que satisfaz as condições acima. Defina $g(v) = f(v)$ para todo $v \in V(G)$ e $g(v^*) = |V(G)| + 1 = |V(G')|$. É facil ver que g é uma $L(2,1)$-coloração mínima de G'. Logo $\lambda(G') = |V(G')|$.

Agora suponha que $\lambda(G') \leq |V(G')|$, isto é, existe uma coloração g que utiliza um intervalo de cores com span no máximo $|V(G)| + 1$ para colorir G'. Suponha que $g(v^*) \neq 0$ e $g(v^*) \neq |V(G)| + 1$, então nenhum vértice $v \in V(G)$ poderia usar as cores $g(v^*)$, $g(v^*) - 1$ e $g(v^*) + 1$. Uma contradição, uma vez que desta maneira teríamos $|V(G)| - 1$ cores para colorir $|V(G)|$ vértices com cores distintas.

Assim temos que $g(v^*)$ é 0 ou $V(G) + 1$. Se $g(v^*) = 0$ definimos $f : V(G) \to [0, |V(G)| - 1]$ como $f(v) = g(v) - 2$. Se $g(v^*) = V(G) + 1$ então definimos $f(v) = g(v)$ e obtemos a função injetiva f desejada. $\square$

3.3 $L(2,1)$-Coloração de $(q, q-4)$-grafos

Nesta seção apresentamos um algoritmo FPT para encontrar uma λ-coloração ótima de um $(q, q-4)$-grafo, para tanto utilizamos a caracterização deste tipo de grafos apresentada no Corolário 2.2.

Se $G = G_1 \cup G_2$ é a união disjunta de dois grafos G_1 e G_2, é fácil ver que $\lambda(G) = \max \Big\{ \lambda(G_1), \lambda(G_2) \Big\}$, pois toda cor usada em G_1 também pode ser usada em G_2 e vice-versa. Portanto, no restante da seção consideraremos que G é conexo.

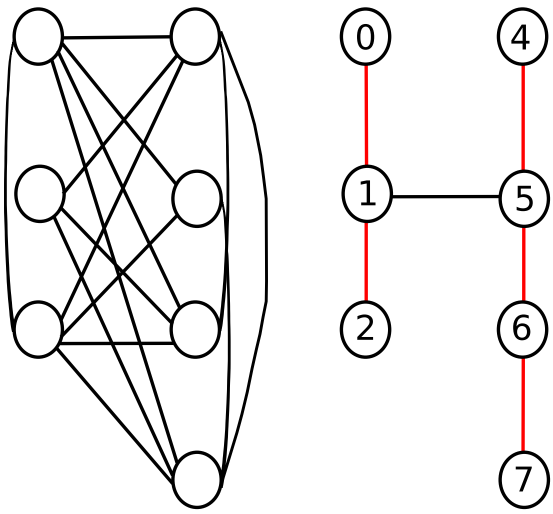
Dado um grafo G, denota-se por $c(G)$ o menor número de caminhos disjuntos necessários para cobrir todos os vértices de G. O seguinte Teorema relaciona $\lambda(G)$ com $c(\overline{G})$.

Teorema 3.5 ([Georges et al., 1994]) *Se G é um grafo com n vértices, temos que*

(a) $\lambda(G) \leq n-1$ *se e somente se* $c(\overline{G}) = 1$.

(b) Para $r \geq 2$, $\lambda(G) = n+r-2$ *se e somente se* $c(\overline{G}) = r$.

Intuitivamente, dada uma cobertura de caminhos no complemento $\overline{G}$ de G, podemos obter uma λ-coloração onde cada vértice tem uma cor distinta do seguinte modo: a cor do $(i+1)$-ésimo vértice do j-ésimo caminho é igual à cor do i-ésimo vértice do mesmo caminho mais um, para $i > 1$, e a cor do primeiro vértice do $(j+1)$-ésimo caminho é igual à cor do último vértice do j-ésimo caminho mais dois para $j > 1$ (a cor do primeiro vértice do primeiro caminho é 0).



(d) Grafo G

(e) Obtenção de uma $L(2,1)$-coloração a partir de uma cobertura por caminhos de $\overline{G}$

Note que se conhecemos $\lambda(G)$, pelo Teorema 3.5, podemos determinar a quantidade mínima de caminhos necessários para cobrir todos os vértices de $\overline{G}$. O inverso no entanto não é verdadeiro. Babel et al. mostraram que podemos determinar $c(G)$ em tempo polinomial para um $(q,q-4)$-grafo G com q fixo em [Babel et al., 2001].

Corolário 3.6 ([Georges et al., 1994]) *Sejam* G_1 *e* G_2 *grafos com* n_1 *e* n_2 *vértices respectivamente e seja* $G = G_1 \vee G_2$ *o grafo resultante da junção de* G_1 *e* G_2*. Então*

$$\lambda(G) \;=\; \max\Big\{n_1 - 1,\; \lambda(G_1)\Big\} \;+\; \max\Big\{n_2 - 1,\; \lambda(G_2)\Big\} \;+2$$

Usando o Corolário 3.6 podemos determinar o valor de $\lambda(G)$, onde G é uma aranha magra e, além disso, mostramos uma $L(2,1)$-coloração ótima de G.

Lema 3.7 *Seja G uma aranha magra com partição (R,C,S), tal que $|C| = |S| = k > 3$. Se $R = \emptyset$, então $\lambda(G) = 2k-2$. Caso contrário $\lambda(G) = \max\left\{|R|-1, \lambda(G[R])\right\} + 2k$.*

Prova:

Começaremos com o caso em que $R \neq \emptyset$.

Considere uma λ-coloração mínima f de $G[C \cup R]$. Seja s_i um vértice de S e c_i o vértice de C adjacente a s_i.

Pelo Corolário 3.6, tem-se $\lambda(G[C \cup R]) = \max\left\{|C|-1, \lambda(G[C])\right\} + \max\left\{|R|-1, \lambda(G[R])\right\} + 2$. Como C induz uma clique, as cores atribuídas aos seus vértices devem ter uma diferença de duas unidades entre si. Sendo assim $\lambda(G[C]) = 2k-2$; logo $\lambda(G) \geq \lambda(C \cup R) = \max\left\{|R| - 1, \lambda(G[R])\right\} + 2k$.

Observe que ao colorirmos $G[C]$ com estas $2k-2$ cores, $k-1$ cores não são de fato utilizadas, além disso, há pelo menos outra cor que não é usada visto que as cores de $G[R]$ e $G[C]$ devem ter uma diferença de pelo menos 2 unidades. Observe também que para cada vértice s_i ε S apenas duas dentre essas k cores não podem ser atribuidas a s_i, a saber, $f(c_i)-1$ e $f(c_i)+1$.

Como $k > 3$, temos sempre uma cor viável para atribuir a qualquer vértice s_i de S e podemos estender f ao grafo inteiro. Assim temos uma λ-coloração de G com $\max\left\{|R|-1, \lambda(G[R])\right\} + 2k$, logo $\lambda(G) = \max\left\{|R|-1, \lambda(G[R])\right\} + 2k$.

Agora considere o caso em que $R = \emptyset$.

Podemos colorir os vértices da clique com um intervalo de $2k-2$ cores. Como anteriormente $k-1$ das cores deste intervalo não são utilizadas de fato. Assim, pelos mesmos motivos ressaltados acima, temos sempre uma cor viável para atribuir aos vértices de S dentro do intervalo.

□

O caso em que G é uma aranha magra com $|C| < 3$ é tratado no Teorema 3.10.

No lema abaixo observe que $|C| > 1$, uma vez que G é conexo, e que se $|C| = 2$ então G também é uma aranha magra. Sendo assim podemos supor que $|C| > 2$.

Lema 3.8 *Seja G uma aranha com partição (R,C,S) e $k = |C| = |S|$. Se G é uma aranha gorda* *com $k > 2$, então*

$$\lambda(G) = \begin{cases} \lambda(G[R]) + 2k, & \textit{se } \lambda(G[R]) \geq |R| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2 \\ |V(G)| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova:

Primeiramente devemos observar que o complemento de uma aranha gorda com partição (R,C,S) é uma aranha magra com partição (R,S,C).

Se $\lambda(G[R]) \geq |R| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$ e $\lceil \frac{k}{2} \rceil \geq 2$ então, de acordo com o Teorema 3.5, temos que $c(\overline{G}[R]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Ou seja, o grafo $\overline{G}[R]$ precisa de pelo menos $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ caminhos disjuntos para ser coberto totalmente. Neste caso, iremos mostrar que é possível cobrir todo $\overline{G}$ usando apenas $c(\overline{G}[R])$ caminhos.

Formamos um caminho usando os vértices c_j de C e seu adjacente s_j em S. Como todos os vértices de R são adjacentes a s_j em $\overline{G}$ podemos agregar um dos caminhos em $\overline{G}[R]$ ainda não utilizados e finalizamos utilizando os vertices s_{j+1} e c_{j+1}. Realizamos o processo para todo $1 \leq j \leq k$ ímpar. Desta maneira, cobrimos $S \cup C$ utilizando $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ caminhos de $\overline{G}$. Basta apenas usar os caminhos restantes em $\overline{G}[R]$ para cobrir $\overline{G}$ completamente.

Observe que, $c(\overline{G}) \geq c(\overline{G}[R])$ uma vez que não podemos utilizar vértices de S para unir dois caminhos de $\overline{G}[R]$ de forma a obter uma cobertura menor que $c(\overline{G}[R])$, pois ao fazê-lo os vértices de C adjacentes a eles formarão um caminho com um único vértice.

Como apresentamos uma cobertura de tamanho $c(G[\overline{R}])$ de $\overline{G}$, então $c(\overline{G}) = c(\overline{G}[R])$. Logo, pelo Teorema 3.5, $\lambda(G) = |R| + |C| + |S| + c(\overline{G}) - 2 = |R| + c(\overline{G}[R]) - 2 + |C| + |S| = \lambda(G[R]) + 2k$.

Agora suponha que $\lambda(G[R]) < |R| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$. Pelo Teorema 3.5, então temos que, $c(\overline{G}[R]) < \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Ou seja, $\overline{G}[R]$ precisa de menos que $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ caminhos disjuntos para ser coberto totalmente.

É fácil ver que o número mínimo de caminhos usados para cobrir o corpo e as patas de uma aranha magra é $\lceil \frac{k}{2} \rceil$, uma vez que todos os k vértices que formam as patas da aranha possuem grau 1. Assim temos que $c(\overline{G}) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Resta-nos apenas apresentar uma cobertura de caminhos de $\overline{G}$ com $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ caminhos para termos o resultado. A formação destes caminhos é similar ao caso anterior. Formamos um caminho usando os vértices c_j de C e seu adjacente s_j em S. Como todos os vértices de R são adjacentes a s_j em $\overline{G}$, podemos agregar um dos caminhos em $\overline{G}[R]$ ainda não utilizados e finalizamos utilizando os vertices s_{j+1} e c_{j+1}. Procedemos desta maneira para $j = 1, 3, 5, \ldots$, até que os caminhos em $\overline{G}[R]$ sejam todos utilizados. Quando isto ocorrer, continuamos o mesmo procedimento exceto que, como não há mais caminhos em $\overline{G}[R]$, os caminhos serão compostos apenas por c_j, s_j, s_{j+1} e c_{j+1}, até que j atinja $|C|$ ou $|C|-1$. Logo temos que $c(\overline{G}) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ e, pelo Teorema 3.5, $\lambda(G) = |V(G)| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$.

□

Lema 3.9 *Seja q um inteiro fixo. Seja G um grafo com mais de $2q$ vértices que contém uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com menos que q vértices tal que todo vértice de $G-H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Para cada cobertura ψ por caminhos de H, sejam $\beta_1(\psi)$, $\beta_2(\psi)$ e $\beta_3(\psi)$, respectivamente, o número de caminhos de ψ com extremidades em H_1, o número de caminhos de ψ com extremidades em H_2 e o número de caminhos de ψ com uma extremidade em H_1 e outra em H_2. Então,*

$$c(G) \;=\; \min_{\psi \in C(H)} \left\{ \max \left\{ c(G-H) - \beta_1(\psi), \left\lceil \frac{\beta_3(\psi)}{2} \right\rceil, 1 \right\} + \beta_2(\psi) \right\}$$

onde $C(H)$ é o conjunto de todas as coberturas por caminhos de H. Além disso, dada uma cobertura por caminhos mínima de $G-H$, é possível obter em tempo linear uma cobertura por caminhos mínima de G.

Prova:

Seja Δ uma cobertura por caminhos de $G-H$ e seja ψ uma cobertura qualquer por caminhos de H. Sejam B_1, B_2 e B_3, respectivamente, o conjunto dos caminhos de ψ com extremidades em H_1, o conjunto dos caminhos de ψ com extremidades em H_2 e o conjunto dos caminhos de ψ com uma extremidade em H_1 e outra em H_2. Portanto, $|B_1| = \beta_1(\psi)$, $|B_2| = \beta_2(\psi)$ e $|B_3| = \beta_3(\psi)$.

Observe que se $|\Delta| < |B_1| + |B_3|/2$, podemos partir alguns caminhos de Δ para obter $|\Delta| = |B_1| + \lceil |B_3|/2 \rceil$, visto que $G-H$ tem mais do que q vértices. Logo, podemos assumir que $|\Delta| \geq |B_1| + \lceil |B_3|/2 \rceil$.

Para cada $i = 1, \ldots, |B_1|$, ligue a segunda extremidade do i-ésimo caminho de Δ com a primeira extremidade do i-ésimo caminho de B_1 e ligue a segunda extremidade do i-ésimo caminho de B_1 com a primeira extremidade do $(i+1)$-ésimo caminho de Δ. Esse procedimento obtém apenas um caminho em G a partir de $|B_1| + 1$ caminhos de Δ e dos caminhos de B_1.

Seja Ω o conjunto do caminho formado por esse procedimento juntamente com os caminhos de Δ não utilizados e os caminhos de B_2.

Para $i = 1, \ldots, |B_3|$, ligue a extremidade do i-ésimo caminho de B_3 que está em H_1 a primeira (se i for par) ou segunda (se i for ímpar) extremidade do $\lceil i/2 \rceil$-ésimo caminho não utilizado de $\Omega \backslash B_2$. Substitua os caminhos de Ω utilizados nesse passo pelos gerados.

Com isso, obtemos uma cobertura por caminhos de G com $|\Delta| - |B_1| + |B_2|$ caminhos. Portanto, $c(G) \leq |\Delta| - |B_1| + |B_2|$. Como isso vale para qualquer $\psi \in C(H)$, então vale para o valor mínimo entre todas as coberturas em $C(H)$.

Seja agora Γ uma cobertura mínima de G. Sejam Δ e ψ respectivamente as coberturas de $G-H$ e de H por caminhos induzidas por Γ. Sejam B_1, B_2 e B_3 definidos como anteriormente. Claramente, os caminhos em B_2 são também caminhos de Γ.

Agora suponha que existe um caminho P em $\psi \cap \Gamma$ com uma extremidade u em H_1. Logo, não existe nenhum caminho em Γ com extremidade em $G-H$, pois caso contrário ligando tal extremidade a u obtem-se uma cobertura por caminhos de G menor do que Γ, o que seria uma contradição. Agora, observe que, como $V(G-H)$ tem pelo menos q vértices e $V(H)$ tem menos do que q vértices, existe ao menos uma aresta $vw \in E(G-H)$ contida em algum caminho P' de Γ. Seja P'_v o subcaminho de P' contendo v e não contendo w. Substituindo P e P' em Γ por $P'_v + P$ e $P' - P'_v$ obtemos uma cobertura por caminhos de G de mesmo tamanho que Γ e que possui menos extremidades de caminhos em H_1. Como a quantidade de extremidades em H_1 é finita, podemos repetir o processo até que não sobre nenhum caminho com extremidade em H_1 em $\Gamma \cap \psi$.

Temos então que todo caminho em $B_1 \cup B_3$ está ligado em Γ a algum caminho de Δ. É fácil ver que a forma mais eficiente de ligar este caminhos é como descrito anteriormente. Desta forma, temos que $|\Delta| \geq |B_1| + \lceil |B_3|/2 \rceil$. Daí, como $B_2 \subseteq \Gamma$, temos que:

$$c(G) = \Delta - |B_1| + |B_2| \geq c(G-H) - \beta_1(\psi) + \beta_2(\psi)$$

Como isso vale para ψ, vale também para o mínimo entre todas as coberturas em $C(H)$.

$\square$

Teorema 3.10 *Seja q um inteiro fixo. Dado um $(q,q-4)$-grafo G, podemos obter uma $L(2,1)$-coloração mínima de G e determinar o número λ-cromático $\lambda(G)$ em tempo $O((2q)^{4q} \cdot n)$.*

Prova: Pelo Corolário 2.2, temos que G é uma união disjunta, uma junção, uma aranha ou possui uma p-componente separável com menos do que q vértices. Os casos de junção e aranha são resolvidos pelo Corolário 3.6 e pelos Lemas 3.7 e 3.8, com exceção de aranhas magras com $k \leq 2$.

No caso em que G possui uma p-componente separável H com menos do que q vértices, temos que $\overline{G}$ é também um $(q,q-4)$-grafo e que $\overline{H}$ é uma p-componente separável de $\overline{G}$ com menos do que q vértices. Se G tem no máximo $2q$ vértices, podemos gerar todas as L(2,1)-

colorações possíveis de G em tempo $O((2q)^{4q})$. Senão, pelo Lema 3.9, conseguimos calcular $c(\overline{G})$ gerando todos as coberturas por caminhos de $\overline{H}$. Uma vez que $\overline{H}$ tem menos do que q vértices, $|C(\overline{H})| \leq q^q$.

Pelo Teorema 3.5, se $c(\overline{G}) > 1$, então $\lambda(G) = |V(G)| + c(\overline{G}) - 2$. Precisamos então analisar o caso em que $c(\overline{G}) = 1$.

Observando a fórmula do Lema 3.9, é fácil ver que $c(\overline{G} - \overline{H}) < q$. Note que os vértices de $G - H$ devem ter cores diferentes entre si e não podem usar cores de H_1 nem de H_2 (todo vértice de H_2 tem um vizinho em H_1, que por sua vez está ligado a todo vértice de $G - H$). Os únicos vértices que podem eventualmente usar cores iguais são os vértices de H_2.

Seja G' o grafo obtido de G substituindo $G - H$ por uma clique de tamanho $c(\overline{G} - \overline{H})$. Intuitivamente, cada vértice dessa clique representa um caminho de $\overline{G} - \overline{H}$. Note que G' tem no máximo $2q$ vértices.

Queremos provar que uma λ-coloração ótima de G' produz uma λ-coloração ótima de G. Considere uma λ-coloração mínima de G'. A cada cor usada em algum vértice de $G' - H$ podemos associar um intervalo de cores do tamanho do caminho representado por este vértice. Aplicando este procedimento sucessivamente, obtemos uma λ-coloração de G com $\lambda(G') + |V(G - H)| - c(\overline{G} - \overline{H})$.

Considere agora uma λ-coloração mínima de G. Seja r o número de intervalos de inteiros consecutivos que são cores de $G - H$. Claramente $r \geq c(\overline{G} - \overline{H})$ senão teríamos uma cobertura por caminhos de $\overline{G} - \overline{H}$ de tamanho menor do que o mínimo. Seja G'' o grafo obtido de G substituindo $G - H$ por uma clique de tamanho r. Aplicando o procedimento anterior, podemos obter a $L(2,1)$-coloração mínima original de G a partir da $L(2,1)$-coloração de G'' usando $\lambda(G'') + |V(G - H)| - c(\overline{G} - \overline{H})$. Como G' é subgrafo induzido de G'', então $\lambda(G'') \geq \lambda(G')$. Logo a coloração de G induzida por G' tem no máximo o mesmo número de cores que a coloração mínima e, portanto, também é ótima. Como G' tem no máximo $2q$ vértices, podemos obter uma λ-coloração mínima em tempo $O((2q)^{4q})$.

Observe que o raciocínio acima pode ser aplicado para aranhas magras com $k \leq 2$, uma vez que nosso algoritmo obtém $\lambda(G[R])$ e, por consequência, $c(\overline{G}[R])$. $\square$

3.4 Conjectura de Griggs-Yeh para Grafos P_4-Esparsos

Como mencionado na introdução deste capítulo, dentre os problemas relacionados a $L(2,1)$-coloração, a conjectura de Griggs e Yeh é um dos mais estudados na literatura.

Conjectura 3.11 ([Griggs e Yeh, 1992]) *Seja G um grafo qualquer, se $\Delta(G) \geq 2$ então $\lambda(G) \leq \Delta(G)^2$.*

No mesmo artigo em que propuseram a conjectura, Griggs e Yeh observaram que um algoritmo guloso usa, no pior caso, um intervalo com $\Delta(G)^2 + 2\Delta(G)$ cores. Jonas mostrou em [Jonas, 1993] que este limite poderia ser melhorado para $\Delta(G)^2 + 2\Delta(G) - 4$. Chang e Kuo mostraram então que $\lambda(G) \leq \Delta(G)^2 + \Delta(G)$ [Chang e Kuo, 1996]. O melhor limite conhecido é $\Delta(G)^2 + \Delta(G) - 2$ e foi mostrado por Gonçalves em [Gonçalves, 2008] utilizando o mesmo algoritmo de Chang e Kuo.

Um limite natural para $\lambda(G)$, dado um grafo G com n vértices é $2n-2$. Este limite pode ser facilmente obtido se colorirmos, iterativamente, cada vértice com uma cor 2 unidades maior que a última cor utilizada. Este limite será muito utilizado nas provas a seguir.

Definição 3.12 *Um grafo G é P_4-esparso se todo subgrafo induzido de G com 5 vértices, possui no máximo um P_4 induzido.*

Jamison e Olariu provaram o seguinte teorema que caracteriza de forma recursiva a classe dos grafos P_4-esparsos:

Teorema 3.13 ([Jamison e Olariu, 1992]) *Um grafo G é P_4-esparso se, e somente se, todo subgrafo H induzido em G com no mínimo 2 vértices, satisfaz uma das seguintes afirmações:*

1. *H é desconexo*
2. *$\overline{H}$ é desconexo*
3. *H é isomorfo a uma aranha*

Observe que a primeira situação corresponde a operação de União Disjunta entre dois grafos P_4-esparsos. Esta operação preserva a validade da conjectura, isto é dado dois grafos que obedecem a conjectura, o grafo resultante da operações de União entre eles, também obedecerá a conjectura. Sendo assim nos resta apenas mostrar que o segundo e o terceiro caso também tem esta propriedade.

Começaremos analisando o caso em que $\overline{G}$ é desconexo.

Lema 3.14 *Se G é tal que $\overline{G}$ é desconexo e $\Delta(G) = \Delta \geq 2$ então $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Se $\overline{G}$ é desconexo existe uma partição de $V(G)$ em dois conjuntos não vazios V_1 e V_2 tal que $uv \in E(G)$ para todo $u \in V_1$ e para todo $v \in V_2$. Considere $|V_1| = n_1 \geq n_2 = |V_2|$.

Como os vértices de V_2 são adjacentes a todos os vértices de V_1 então $\Delta^2 \geq {n_1}^2$. Pelo Corolário 3.6 temos que $\lambda(G) = \max\left\{n_1 - 1, \lambda(G[V_1])\right\} + \max\left\{n_2 - 1, \lambda(G[V_2])\right\} + 2 \leq 2n_1 - 2 + 2n_2 - 2 + 2 \leq 4n_1 - 2$. Se $n_1 \geq 4$ então $\Delta^2 \geq n_1^2 \geq 4n_1 - 2 \geq \lambda(G)$ que satisfaz a conjectura.

Se $n_1 = 3$ e existirem arestas entre vértices de V_2 então $\Delta^2 \geq 16$ e $\lambda(G) \leq 10$ e a conjectura é respeitada. Caso $n_1 = 3$ e V_2 for um conjunto independente temos, pelo Corolário 3.6, que $\lambda(G) \leq 8 < 9 \leq \Delta^2$.

Se $n_1 = n_2 = 2$ e existirem arestas entre os vertices de V_1 ou entre os vertices de V_2 então $\Delta^2 \geq 9$ e $\lambda(G) \leq 6$ e a conjectura é respeitada. Caso $n_1 = n_2 = 2$ e tanto V_1 como V_2 forem conjuntos independentes temos, novamente pelo Corolário 3.6, que $\lambda(G) = \Delta^2 = 4$. No caso de $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$ temos um P_3 ou um K_3 para os quais a conjectura é válida. A conjectura também é obviamente válida quando $n_1 = 1$ uma vez que neste caso temos um P_2. □

Nos voltamos agora para o caso em que G é isomorfo a uma aranha.

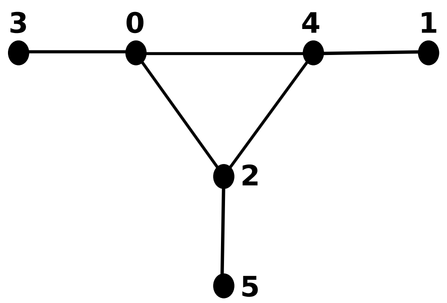
Lema 3.15 *Se G é uma aranha magra com partição (R, C, S) e grau máximo $\Delta > 1$ então, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Admita $|C| = c$ e $|R| = r$. É fácil ver que $\Delta = r + c$, logo $\Delta^2 = r^2 + 2rc + c^2$.

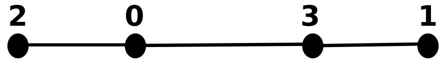
Pelo Lema 3.7, sabe-se que se $c > 3$ então $\lambda(G) = \max\{r - 1, \lambda(G[R])\} + 2c$.

Se $c \leq 3$ e $R \neq \emptyset$, pelo Corolário 3.6, $\lambda(G[C \cup R]) = \max\{r - 1, \lambda(G[R])\} + 2c$, além disso podemos atribuir mais uma cor aos vértices de S e obtemos uma λ-coloração de G, logo $\lambda(G) \leq \max\{r - 1, \lambda(G[R])\} + 2c + 1$. Uma vez que $\lambda(G[R]) \leq 2r - 2$ então $\lambda(G) \leq 2r + 2c - 1$ que é, claramente, menor que $r^2 + 2rc + c^2 = \Delta^2$, pois $c \neq 0$.

Se $c \leq 3$ e $R = \emptyset$ temos as seguintes $L(2,1)$-colorações:



(f) Grafo Aranha com $|C| = 3$ e $R = \emptyset$



(g) Grafo Aranha com $|C| = 2$ e $R = \emptyset$

Se $c = 1$ e $R = \emptyset$, então $\Delta = 1$.

□

Lema 3.16 *Se G é uma aranha gorda com partição (R,C,S) e o grau máximo $\Delta > 1$ então, $\lambda(G) \leq \Delta^2$*

Prova: Admita $|C| = c$ e $|R| = r$. É fácil ver que $\Delta = r + 2c - 2$, assim temos que $\Delta^2 = r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4$. Pelo Lema 3.8 temos que:

$$\lambda(G) = \begin{cases} \lambda(G[R]) + 2c, & \text{se } \lambda(G[R]) \geq r + \lceil \frac{c}{2} \rceil - 2 \\ |V(G)| + \lceil \frac{c}{2} \rceil - 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para analisarmos o primeiro caso, devemos observar que $\lambda(G[R]) \leq 2r - 2$. Assim temos, $\Delta^2 = r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4 \geq 2r - 2 + 2c \geq \lambda(G)$, pois $c \geq 3$ e portanto a conjectura é respeitada.

O segundo caso é ainda mais simples, visto que temos $\Delta^2 = r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4 \geq 2c + r + \lceil \frac{c}{2} \rceil - 2 = \lambda(G)$ uma vez que $c \geq 3$, logo a conjectura também é respeitada.

□

Pelos Lemas 3.15 e 3.16 temos o seguinte resultado:

Teorema 3.17 *Para qualquer grafo P_4-esparso G, com grau máximo $\Delta > 1$, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

3.5 Conjectura de Griggs-Yeh para $(q, q-4)$-Grafos conexos

Como observamos na seção anterior todo grafo aranha G obedece a Conjectura 3.11, o mesmo é válido para qualquer grafo G cujo complemento é desconexo. Logo para verificarmos essa conjectura dentre os $(q, q-4)$-grafos conexos devemos observar apenas o caso (d) do Corolário 2.2.

Lema 3.18 *Seja q um inteiro fixo. Seja G um grafo com mais de $\frac{3q}{2}$ vértices que contém uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com menos que q vértices tal que todo vértice de $G - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Se $\Delta(G) = \Delta \geq 2$ então $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Considere $|V(G-H)| = r$. Dado um vértice $v \in H_1$ temos que $d(v) \geq r + 2$, uma vez que v é adjacente a todos os vértices de $G - H$, a pelo menos um vértice em H_1 e a pelo menos um vértice em H_2. Sendo assim $\Delta^2 \geq r^2 + 4r + 4$.

Sabemos que $\lambda(G) \leq 2|V(G)|-2 \leq 2r+2q-2$. Logo, como G possui mais que $\frac{3q}{2}$ vértices, $r \geq \frac{q}{2}$. Sendo assim temos que $\Delta^2 \geq r^2+4r+4 \geq 2r+2q-2 \geq \lambda(G)$. □

Teorema 3.19 *Para todo* $(q,q-4)$*-grafo conexo* G *com mais de* $\frac{3q}{2}$ *vértices e grau máximo* $\Delta > 1$*, temos que* $\lambda(G) \leq \Delta^2$*. Além disso se* G *é um* $(q,q-4)$*-grafo desconexo tal que todas as suas componentes conexas tenham mais que* $\frac{3q}{2}$ *vértices então* $\lambda(G) \leq \Delta^2$*.*

Prova: O caso em que G é conexo seque diretamente do Corolário 2.2 e dos Lemas 3.15, 3.16, 3.14 e 3.18.

Seja agora o caso em que G é desconexo. Seja $U(G)$ o conjunto de todas as componentes conexas de G, temos que $\lambda(G) = \max\left\{\lambda(H)|H \in U(G)\right\}$. Como $\Delta > 1$ então $\lambda(G) \geq 3$. Admita agora uma componente H que satisfaz $\max\left\{\lambda(H)|H \in U(G)\right\}$, certamente $\Delta(H) > 1$, caso contrário $\lambda(H) \leq 2$. Então pelos Lemas 3.14, 3.15, 3.16 e 3.18, $\lambda(H) \leq \Delta(H)^2$ no entanto, como $\Delta(H) \leq \Delta$, então $\lambda(G) \leq \Delta^2$. □

3.6 Conjectura de Griggs-Yeh para Grafos P_4-Laden

Definição 3.20 *Um grafo* G *é* P_4*-laden se todo subgrafo induzido de* G *com até seis vértices contém no máximo dois* P_4*'s induzidos ou é um grafo split.*

Nesta seção nós investigamos a Conjectura de Griggs-Yeh para grafos P_4-Laden introduzidos por Giakoumakis em [Giakoumakis, 1996]. Tais grafos possuem uma decomposição bastante semelhante aos grafos estudados anteriormente. No entanto antes de abordarmos tal decomposição é necessário definirmos alguns novos tipos de grafos.

Dado um grafo split G com partição (C,S) dos vértices, onde S é um conjunto independente e C uma clique, dizemos que G é *original* se todo vértice de S possui um não vizinho em C e todo vértice de C possui um vizinho em S.

Definição 3.21 *Um grafo* G *é pseudo-split se seu conjunto de vértices possui uma partição* (R,C,S) *tal que* $S \cup C$ *induz um grafo split original com partição* (C,S) *e todo vértice de* R *é adjacente a todo vértice de* C *e não-ajacente a todo vértice de* S*.*

Definição 3.22 *Uma quase-aranha é um grafo obtido de uma aranha* (R,C,S) *com no máximo um vértice de* $S \cup C$ *substituído por um grafo* K_2 *ou* $\overline{K_2}$ *(respeitando-se as adjacências).*

Após definirmos grafos pseudo-split e quase-aranhas podemos avançar para a decomposição dos grafos P_4-laden.

Lema 3.23 ([Giakoumakis, 1996]) *Um grafo G é P_4-laden se e só se exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

(a) G é a união disjunta de dois ou mais grafos P_4-laden.

(b) G é a junção de dois ou mais grafos P_4-laden.

(c) G é uma quase-aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-laden.

(d) G é pseudo-split, tal que a cabeça induz um grafo P_4-laden.

(e) G é isomorfo a $\overline{P_5}$ ou P_5.

(f) V(G) é vazio ou tem apenas um elemento.

Os casos (a) e (b) já foram resovidos nas seções anteriores.Os itens (e) e (f) são triviais. Sendo assim resta-nos apenas examinar os casos em que G é uma quase-aranha ou em que G é pseudo-split.

Começaremos com o caso especial em que G é pseudo-split com $|R| = 0$ e $|C| = 2$.

Lema 3.24 *Seja G pseudo-split com partição (R,C,S) e grau máximo $\Delta > 1$. Se $|R| = 0$ e $|C| = 2$, então $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Sejam $C = \{c_1, c_2\}$ e S_1 e S_2 os subconjuntos dos vértices de S que estão ligados respectivamente à c_1 e c_2. Observe que S_1 e S_2 são não-vazios e disjuntos, uma vez que todo vértice de S deve ter pelo menos um não vizinho em C e G é conexo. Temos também que $\Delta = \max\{|S_1|, |S_2|\} + 1$.

Primeiro provamos que se $|S_1| \neq |S_2|$ então podemos colorir o grafo com $\max\{|S_1|, |S_2|\} + 2$ cores. Suponha s.p.d.g que $|S_1| > |S_2|$ então atribuimos a cor 0 à c_1 e a cor 2 à c_2. Para $i = 1, \ldots, |S_1|$ atribuímos a cor $i + 2$ ao i-ésimo vértice de S_1 e para $j = 1, \ldots, |S_2|$ atribuímos a cor $j + 3$ ao j-ésimo vértice de S_2.

Se $|S_1| = |S_2|$ então podemos colorir G com $|S_2| + 3$ cores da mesma maneira que mostramos acima. Assim temos $\lambda(G) \leq \max\{|S_1|, |S_2|\} + 3 \leq (\max\{|S_1|, |S_2|\})^2 + 2\max\{|S_1|, |S_2|\} + 1 = \Delta^2$. $\square$

Lema 3.25 *Se G é pseudo-split com partição (R,C,S) e grau máximo $\Delta > 1$, então $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Observe que se $u \in C$ e $v \in R$ então $|N(u)| \geq |N(v)|$ uma vez que C é uma clique e R é completo a C. O mesmo é válido caso v esteja em S, uma vez que S é um conjunto estável. Logo, existe algum vértice em C cujo grau é máximo em G. Finalmente, observe que, pelo princípio da casa dos pombos, existe algum vértice de C que é adjacente a pelo menos $\left\lceil \frac{|S|}{|C|} \right\rceil$ vértices de S. Logo:

$$\Delta \;\geq\; |R| + |C| - 1 + \left\lceil \frac{|S|}{|C|} \right\rceil \tag{3.1}$$

Se adicionarmos todas as arestas que faltam entre C e S, teremos um novo grafo G' tal que $\lambda(G') \geq \lambda(G)$. Observe que G' é obtido de uma junção entre os grafos $G[R \cup S]$ e $G[C]$. Logo, pelo Corolário 3.6, temos que:

$$\lambda(G') = \max\{|R \cup S| - 1, \lambda(G[R])\} + 2|C| \tag{3.2}$$

Pois $\lambda(G[R \cup S]) = \lambda(G[R])$ uma vez que não existem arestas entre R e S e S é um conjunto independente.

Como $\lambda(G[R]) \leq 2|R| - 2$ e considerando $|S| = s$, $|R| = r$ e $|C| = c$, temos:

$$\lambda(G') \;\leq\; \begin{cases} r + s - 1 + 2c, & \text{se } r + s - 1 \geq \lambda(G[R]) \\ 2r - 2 + 2c, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela Equação 3.1, sabemos que $\Delta \geq r + c$. Logo, no segundo caso temos $\Delta^2 \geq (r+c)^2 \geq 2(r+c-1)c \geq \lambda(G')$.

Agora considere o caso em que $r + s - 1 \geq \lambda(G[R])$. Se $s \leq c$, então temos que $\Delta^2 \geq r^2 + 2rc + c^2 \geq r + 3c - 1 \geq r + s + 2c - 1$, exceto no caso em que $r = 0$ e $c = 2$, que é resolvido pelo Lema 3.24.

Se $s > c$ então queremos mostrar que:

$$\Delta^2 \geq r^2 + 2rc + 2r\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil - 2r + c^2 + 2c\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil - 2c + \left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil^2 - 2\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil + 1 \geq r + s + 2c - 1 \geq \lambda(G) \tag{3.3}$$

Para isso consideramos os casos em que $r \neq 0$ e $r = 0$.

Se $r \neq 0$ então,

- $r^2 \geq 0$,
- $\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil^2 - 2\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq 0$, pois $\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq 2$
- $2rc - 2c + 1 \geq r$,
- $2c\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq s$,
- $c^2 \geq 2c$,
- $2r\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil - 2r \geq 0$.

Se $r = 0$ então,

- $c^2 + \left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil^2 - 2c + 1 \geq 2c - 1$, pois $\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq 2$,
- $c\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq s$,
- $(c-2)\left\lceil \frac{s}{c} \right\rceil \geq 0$, pois $c > 1$.

□

Resta-nos apenas provar que toda quase-aranha também satisfaz a Conjectura 3.11.

Lema 3.26 *Se G é um grafo quase-aranha magra com partição (R,C,S) e grau máximo $\Delta > 1$ então, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Se G for uma aranha magra então temos o resultado pelo Lema 3.15. Sendo assim podemos assumir que G é uma aranha magra que possui um vértice duplicado em $C \cup S$. Chamaremos este par de vértices de v e v'. Tome $|R| = r$ e $c = \max\{|C|,|S|\} - 1$.

Certamente $\Delta \geq r + c$. Observe que se ignorarmos o vértice v' temos exatamente as mesmas restrições de colorirmos uma aranha magra. Sendo assim, como observado no Lema 3.15, podemos fazer uma coloração parcial de G com $\max\left\{r-1, \lambda(G[R])\right\} + 2c + 1 \leq 2r - 2 + 2c + 1$ cores, na qual o único vértice não colorido é v'. Para evitarmos conflitos com os vértices já coloridos podemos atribuir a v' uma cor 2 unidades superior à maior cor da coloração parcial. Assim temos que $\lambda(G) \leq 2r + 2c + 1 \leq r^2 + 2rc + c^2 \leq \Delta^2$ exceto nos casos em que $(c = r = 1)$, $(c = 1, r = 0)$ e $(c = 2, r = 0)$.

Nos casos em que $(c = r = 1)$ e $(c = 1, r = 0)$ temos $\Delta \geq 2$ e $\lambda(G) \leq 4$.

No caso em que $(c = 2, r = 0)$, quando o vértice duplicado ocorre em C temos $\Delta \geq 3$ e $\lambda(G) \leq 5$. Já quando o vértice duplicado pertence a S temos $\Delta \geq 2$ e $\lambda \leq 4$. □

Usando uma abordagem parecida com a do lema anterior conseguimos provar o mesmo resultado para quase-aranha gorda.

Lema 3.27 *Se G é um grafo quase-aranha gorda com partição (R,C,S) e grau máximo $\Delta > 1$ então, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Novamente se G for uma aranha gorda então temos o resultado pelo Lema 3.16. Sendo assim podemos assumir que G é uma aranha gorda que possui um vértice duplicado em $C \cup S$. Chamaremos este par de vértices de v e v'. Tome $|R| = r$ e $c = \max\{|C|,|S|\} - 1$. Observe que $c \geq 3$ caso contrário G seria uma aranha magra ou seria desconexo.

Certamente $\Delta \geq r + 2c - 2$, assim $\Delta^2 \geq r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4$. Novamente devemos observar que se ignorarmos o vértice v' temos exatamente as mesmas restrições de colorirmos uma aranha gorda. Sendo assim, como observado no Lema 3.8, o subgrafo G' induzido por $V(G) - v'$ possui número λ-cromático:

$$\lambda(G') = \begin{cases} \lambda(G[R]) + 2c, & \text{se } \lambda(G[R]) \geq r + \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil - 2 \\ |V(G)| + \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil - 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Da mesma forma em que fizemos no lema anterior para evitarmos conflitos, podemos expandir essa coloração de G' para o grafo G, colorindo v' com uma cor duas unidades superior à maior cor atribuida na coloração parcial. Sendo assim temos que:

$$\lambda(G) \leq \begin{cases} \lambda(G[R]) + 2c + 2, & \text{se } \lambda(G[R]) \geq r + \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil - 2 \\ |V(G)| + \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No primeiro caso temos $\lambda(G) \leq 2r - 2 + 2c + 2 \leq r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4 \leq \Delta^2$, uma vez que $c \geq 3$. Pelo mesmo motivo temos, no segundo caso, $\lambda(G) \leq r + 2c + \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil \leq r^2 + 4rc - 4r + 4c^2 - 8c + 4 \leq \Delta^2$.

$\square$

Teorema 3.28 *Para todo grafo P_4-laden G com grau máximo $\Delta > 1$, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Prova: Se G for desconexo basta aplicar o resultado às componentes conexas de G. Se G tem apenas um elemento o resultado é válido, uma vez que $\Delta = 0$. Se G for isomorfo a um P_5 é fácil observar que $\Delta = 2$ e $\lambda(G) = 4$. Se G for isomorfo a um $\overline{P_5}$ é fácil observar que $\Delta = 3$ e $\lambda(G) = 4$. Os demais casos seguem diretamente dos Lemas 3.23, 3.14, 3.26, 3.27 e 3.25. $\square$

4 Algoritmos Exponenciais

4.1 Introdução

No Capítulo 3 abordamos o problema de $L(2,1)$-coloração para diversas classes específicas de grafos. Neste capítulo iremos estudar este problema para grafos gerais assim como uma generalização da $L(2,1)$-coloração, a $L(h,1)$-coloração.

Enquando na $L(2,1)$-coloração vértices adjacentes deveriam ter cores com diferença pelo menos 2, na $L(h,1)$-coloração esta diferença deve ser de no mínimo h. Mais formalmente podemos escrever:

Definição 4.1 *Uma função c: $V(G) \to \mathbb{N}$ é uma $L(h,1)$-coloração ou $\lambda_{(h,1)}$*-coloração *de um grafo $G(V,E)$, se para cada u, $v \in V(G)$ tem-se:*

- *se $uv \in E(G)$ então $|c(u) - c(v)| \geq h$;*
- *se a distância entre u e v é 2 então $c(u) \neq c(v)$.*

O número $\lambda_{(h,1)}$-cromático, $\lambda_{(h,1)}(G)$, de um grafo G é o menor inteiro k tal que G possui uma $\lambda_{(h,1)}$-coloração com span k.

O problema de determinar se $\lambda_{(h,1)}(G) \leq k$ é obviamente NP-completo para qualquer $k \geq 4$, uma vez que este problema é uma generalização da $L(2,1)$-coloração. Havet *et al.* mostraram um algoritmo que computa $\lambda(G)$ em tempo $O(3.8730^n)$ [Havet et al., 2011]. Esse algoritmo foi melhorado em [Junosza-Szaniawski et al., 2011] e [Rzazewski et al., 2011] atingindo complexidade $O(3.2361^n)$. Kratochvíl *et al.* apresentaram ainda um novo algoritmo para o problema da λ-coloração com complexidade $O(2.2461^n)$ em [Kratochvíl et al., 2011].

No entanto, todos os algoritmos citados no parágrafo anterior utilizam uma quantidade de memória exponencial em relação ao tamanho do grafo de entrada. Em [Liedloff et al., 2011] Liedloff et al. mostraram um algoritmo exponencial com base constante que calcula $\lambda(G)$

usando quantidade polinomial de memória em relação a G. Neste capítulo apresentaremos tal algoritmo além de mostrarmos uma possível adaptação do mesmo para calcular $\lambda_{(h,1)}(G)$ e as dificuldades decorrentes dessa adaptação.

4.2 Algoritmo Exponencial para $L(2,1)$-coloração

O algoritmo que iremos apresentar nesta seção resolve, na verdade, um problema um pouco mais geral que o de $L(2,1)$-coloração e foi originalmente apresentado em [Liedloff et al., 2011]. Seja G um grafo qualquer e $Y,Z,M \subseteq V(G)$. Uma *k-$\widetilde{L}_Z^M(Y)$-coloração* de G é uma $L(2,1)$-coloração parcial de G com intervalo de cores $[1,\ldots,k]$ onde todos os vértices de Y são coloridos de forma que os vértices de M não recebem a cor k e os vértices de Z não recebem a cor 1. Assim como no problema da $L(2,1)$-coloração podemos definir o parâmetro $\Lambda_Z^M(Y,G)$ como o menor k para o qual G admite uma k-$\widetilde{L}_Z^M(Y)$-coloração. Tal parâmetro é, por definição, igual a zero no caso em que $Y=\emptyset$.

Observe que ao atribuirmos as cores neste problema iniciamos com a cor 1, ao contrário do que fazíamos na $L(2,1)$-coloração quando iniciávamos usualmente com a cor 0. Além disso o problema de encontrar $\lambda(G)$ pode ser reduzido ao problema de encontrar $\Lambda_Z^M(Y,G)$, uma vez que $\Lambda_\emptyset^\emptyset(V(G),G)=\lambda(G)+1$.

Um subconjunto $X \subseteq V(G)$ é um *2-pacote* em G se X é um conjunto independente e nenhum par de vértices de X possuem um vizinho em comum. Observe que as classes de cores de uma $L(2,1)$-coloração definem 2-pacotes.

Seja G um grafo, uma *G-partição correta* de $Y \subseteq V(G)$ é uma tripla (A,X,B) tal que:

- Os conjuntos $A,X,B \subseteq Y$ formam uma partição de Y.
- X é um 2-pacote não-vazio em G.
- $|A| \leq \frac{|Y|}{2}$ e $|B| \leq \frac{|Y|}{2}$

O algortimo utiliza uma abordagem de divisão e conquista. No princípio verificamos exaustivamente se $\Lambda_Z^M(Y,G) \leq 3$. Se este não for o caso então para cada G-partição correta (A,X,B) de Y aplicamos uma chamada recursiva do algoritmo para o conjunto A e para o conjunto B. Para X precisamos apenas de uma cor visto que este é 2-pacote.

A ideia principal é resolver o subproblema de colorir A independentemente do subproblema de colorir B. Para tanto, estabelecemos que os vértices de A recebem o intervalo de cores

$[1,\ldots,k_A]$, os vértices de X recebem exatamente a cor k_A+1 e os vértices de B recebem o intervalo de cores $[k_A+2,\ldots,k_A+k_B+1]$. Observe que a importância do conjunto X reside no fato que a cor atribuída a ele impõe uma diferença de pelo menos duas unidades entre as cores utilizadas em A e cores utilizadas em B. Assim A e B podem ser coloridos de maneira independente e devemos apenas nos preocupar com a vizinhança de X.

Algoritmo 1: Encontra-$\Lambda(G,Y,Z,M)$

Entrada: Grafo G e Conjuntos $Y,Z,M \subseteq V(G)$
Saída: $\Lambda_Z^M(Y,G)$
início
    se $Y = \emptyset$ **então**
        retorna 0;
    para $k \leftarrow$ *1* **até** *3* **faça**
        se *Existe uma* $k-\widetilde{L}_Z^M(Y)$*-coloração de* G **então**
            retorna k;
    $k \leftarrow \infty$;
    para cada *G-partição correta* (A,X,B) *de* Y **faça**
        se $(A = \emptyset$ *e* $X \cap Z \neq \emptyset)$ *ou* $(B = \emptyset$ *e* $X \cap M \neq \emptyset)$ **então**
            $k_X \leftarrow 2$;
        senão
            $k_X \leftarrow 1$;
        $k_A \leftarrow$ Encontra-$\Lambda(G,A,Z,N(X))$;
        $k_B \leftarrow$ Encontra-$\Lambda(G,B,N(X),M)$;
        $k \leftarrow \min\{k, k_A+k_X+k_B\}$;
    retorna k;
fim

Liedloff *et al.* mostraram a corretude do Algoritmo 1 e provaram o seguinte Teorema:

Teorema 4.2 ([Liedloff et al., 2011]) *Dado um grafo G,* $\lambda(G)$ *pode ser calculado em tempo* $O(7.4922^n)$ *usando espaço polinomial de memória.*

4.3 Algoritmo Exponencial para $L(h,1)$-coloração

Nesta seção daremos uma ideia de como adaptar o algoritmo anterior para calcularmos $\lambda_{(h,1)}(G)$ e as dificuldades inerentes desta adaptação. Começaremos definindo um problema auxiliar que usaremos para resolver a $L(h,1)$-coloração.

Definição 4.3 *Dado um grafo G, conjunto* $Y \subseteq V(G)$ *e famílias de subconjuntos de vértices* $\mathscr{M} = (M_1,\ldots,M_{h-1})$ *e* $\mathscr{Z} = (Z_1,\ldots,Z_{h-1})$ *e um inteiro h. Uma* $k-\widetilde{L}_{\mathscr{Z}}^{\mathscr{M}}(Y,h)$-coloração *de G* *é uma $L(h,1)$-coloração parcial de G com cores $\{1,\ldots,k\}$, onde todos os vértices de Y são coloridos tais que:*

- *Os vértices em M_i não recebem as cores $\{k-h+i+1,\ldots,k\}$, ou seja, as $h-i$ últimas cores.*
- *Os vértices em Z_i não recebem as cores $\{1,\ldots,h-i\}$, ou seja, as $h-i$ primeiras cores.*

O parâmetro $\Lambda^{\mathscr{M}}_{\mathscr{Z}}(Y,h,G)$ é o menor k para o qual G admite uma $k-\widetilde{L}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{Z}}(Y,h)$-coloração. Tal parâmetro é, por definição, igual a zero no caso em que $Y=\emptyset$. De maneira similar à seção anterior temos que o problema de encontrar $\lambda_{(h,1)}(G)$ pode ser reduzido ao problema de encontrar $\Lambda^{\mathscr{M}}_{\mathscr{Z}}(Y,h,G)$, uma vez que $\Lambda^{\mathscr{M}}_{\mathscr{Z}}(V(G),h,G) = \lambda_{(h,1)}(G)+1$, se para todo $1\leq i<h$, $M_i=\emptyset$ e $Z_i=\emptyset$.

Uma familia de $h-1$ subconjuntos de vértices $\mathscr{X}=(X_1,\ldots,X_{h-1})$ é um *h-pacote* em G se $\bigcup_{1\leq i<h} X_i$ é um conjunto independente, tal que para todo par de vértices $u,v\in X_i$, $N(u)\cap N(v)=\emptyset$. Observe que em qualquer $L(h,1)$-coloração de G, um intervalo contíguo de $h-1$ classes de cor formam um h-pacote.

Dado um grafo G, uma (G,h)-partição correta de um conjunto $Y\subseteq V(G)$ é uma $(h+1)$-tupla $(A,X_1,\ldots,X_{h-1},B)$ tal que:

- Os conjuntos $A,X_1,\ldots,X_{h-1},B$ formam uma partição de Y.
- $(X_1,\ldots,X_{h-1})$ é um h-pacote não vazio em G.
- $|A|\leq\frac{|Y|}{2}$ e $|B|\leq\frac{|Y|}{2}$.

A ideia inicial se resume a resolver, para toda (G,h)-partição correta $(A,X_1,\ldots,X_{h-1},B)$ de Y, os subproblemas dos vértices de A e de B e, assim como no algoritmo anterior, colorir o h-pacote $\mathscr{X}=(X_1,\ldots,X_{h-1})$ com $h-1$ cores contíguas, uma para cada conjunto X_i. Feito isso temos uma diferença de pelo menos h entre as cores utilizadas em A e as cores utilizadas em B e podemos resolver ambos de maneira independente.

No entanto caso A(respectivamente B) precise de menos que $h-1$ cores para ser colorido podemos ter que algum vértice de $\mathscr{X}$ receba uma cor que esteja proibida por um dos conjuntos de $\mathscr{Z}$(respectivamente $\mathscr{M}$). Neste caso teríamos de adicionar algumas cores de "folga" entre $\mathscr{X}$ e A ($\mathscr{X}$ e B).

O problema então reside em encontrar a melhor folga a ser aplicada entre estes conjuntos, visto que ao alterarmos a quantidade de cores entre os mesmos mudamos os subproblemas gerados para os conjuntos A e B. No entanto é fácil de verificar que se quaisquer um dos conjuntos forem coloridos com menos que $h-1$ cores tal conjunto deve ser independente, caso contrário teríamos pelo menos dois vértices adjacentes que, por tanto, deveriam receber cores cuja diferença deve ser de pelo menos h.

Mesmo que a aplicação da folga só seja nescessária nos casos em que A ou B são conjuntos independentes o cálculo da mesma não é trivial. Poderemos ter que utilizar mais de uma cor nestes conjuntos devido a vértices com vizinhos em comum. Deixaremos este problema para ser tratado em trabalhos futuros.

5 M-Partição

5.1 Introdução

Os problemas de coloração de vértices consistem, em sua maioria, em dado um grafo $G = (V, E)$, particionarmos $V(G)$ em classes de cor, sendo estas classes sujeitas a regras de particionamento tanto internas quanto entre duas classes de cor distintas. Uma vez que estamos estudando problemas de coloração em grafos com poucos P_4's é natural que nos voltemos para problemas de coloração mais gerais para esta classe de grafos. Abaixo definimos uma *Coloração Generalizada* de um grafo G, problema também conhecido como M-partição.

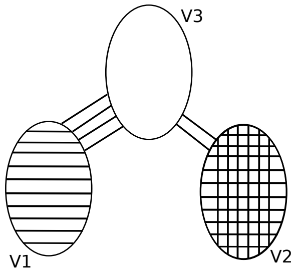
Definição 5.1 *Seja $M \in \{0, 1, *\}^{k \times k}$ uma matriz simétrica, M é dita uma matriz de partição. Um grafo $G = (V, E)$ admite uma M-partição se seus vértices podem ser particionados em k conjuntos disjuntos $V_1, \ldots, V_k$ tal que:*

- *Para todo $i \in 1, \ldots, k$, se $M_{i,i} = 0$ então V_i é um conjunto independente, e se $M_{i,i} = 1$ então V_i é uma clique;*
- *Para todo $i, j \in 1, \ldots, k$ com $i \neq j$, se $M_{i,j} = 0$ então não existem arestas entre V_i e V_j, e se $M_{i,j} = 1$, então existem todas as arestas entre V_i e V_j.*

*As entradas * significam ausência de restrição.*

O *problema de M-partição* consiste em, dado um grafo G, determinar se G admite uma M-partição. Uma variação natural deste problema consiste em associar um conjunto de listas L aos vértices de G. Uma lista $L(v)$ de um vértice v é um subconjunto de $\{1, \ldots, k\}$ que determina em que partes v pode ser colocado. Observe que esta é uma generalização do problema original visto que o caso trivial em que todas as listas são $\{1, \ldots, k\}$ corresponde exatamente ao problema sem listas.

$$\begin{array}{c|ccc} & V1 & V2 & V3 \\ \hline V1 & * & 0 & 1 \\ V2 & 0 & 1 & * \\ V3 & 1 & * & 0 \end{array}$$



(h) Exemplo de matriz e partição dos vértices a ser calculada

É grande o interesse no estudo deste problema visto que o mesmo generaliza diversos problemas de coloração de grafos, por exemplo, o problema da k-Coloração Própria. Por este motivo é claro que se trata de um problema $NP-completo$, de fato, ele permanece NP-completo mesmo quando restrito a classe dos grafos cordais [Feder et al., 2005].

Um grafo G que não admite uma M-partição é chamado de *M-obstrução*. Também podemos dizer que *G obstrui M*. Seja Υ um conjunto de matrizes, dizemos que G é uma Υ-obstrução se G é uma M-obstrução para todo $M \in \Upsilon$.

Quando desejamos nos referir a restrição do conjunto de listas L a um certo conjunto de vértices S escrevemos L_S.

O complemento de uma matriz M é a matriz $\overline{M}$ obtida de M trocando os elementos 1 da matriz original por 0 e os elementos 0 por 1. Um fato importante a ser observado é que G admite uma M-partição se e somente se $\overline{G}$ admite uma $\overline{M}$-partição.

5.2 M-Partição de $(q,q-4)$-grafos

Nesta seção apresentamos um algoritmo FPT, considerando um inteiro q fixo, para determinar, dado um $(q,q-4)$-grafo e listas L, se este admite uma M-partição obedecendo L . Para tanto utilizaremos novamente a caracterização recursiva dos $(q,q-4)$-grafos apresentada no Corolário 2.2.

Dados dois conjuntos de índices $P,Q \subseteq \{1,\ldots,k\}$, denotamos $M_{P,Q}$ como a submatriz de M tomando as linhas em P e as colunas em Q. Também denotamos $M_{P,P}$ por M_P.

Lema 5.2 ([Feder et al., 2006]) *Sejam Υ um conjunto de matrizes, $G = G_1 \cup G_2$ e L um conjunto de listas relacionadas aos vértices de G.*

Então G é uma Υ-obstrução se e somente se para qualquer matriz $M \in \Upsilon$ e quaisquer dois conjuntos P,Q de índices de M tais que $M_{P,Q}$ não possui 1, o grafo G_1, com suas respectivas *listas, é uma M_P-obstrução, ou o grafo G_2, com suas respectivas listas, é uma M_Q-obstrução.*

O Lema 5.2 nos fornece um algoritmo eficiente para resolver o problema de M-partição para as operações de União e Junção. Considere um nó t na árvore de decomposição de G que representa um subgrafo G_t de G. Se t é um nó com filhos t' e t'', tal que $G_t = G_{t'} \cup G_{t''}$, então sabemos que G obstrui M_X se e somente se para qualquer $P \subseteq X$, $Q \subseteq X$ onde $M_{P,Q}$ não contém 1, ou o grafo $G_{t'}$ obstrui M_P ou o grafo $G_{t''}$ obstrui M_Q. Assim podemos obter a família de submatrizes de M que são obstruídas por G_t a partir das famílias de submatrizes de M obstruídas por G_t' e G_t''. Se $G_t = G_{t'} + G_{t''}$ utilizamos as propriedades do complemento como discutido na introdução deste capítulo (lembre-se que a dimensão da matriz M é fixa).

Obviamente ao calcularmos para um nó t as submatrizes de M que são obstruídas por G_t também obtemos as submatrizes que são admitidas por G_t. Desta maneira podemos associar a cada nó t uma família de submatrizes Υ_t que tem esta propriedade. Como o Conjunto Υ_t possui no máximo 2^k elementos, uma vez que há no máximo esta quantidade de subconjuntos de $\{1,\ldots,k\}$, podemos calcular Υ_t em tempo $O(2^k)$ para as operações de União e Junção. Este resultado foi mostrado por Feder et al. em [Feder et al., 2006].

Os próximos dois Lemas nos fornecem um algoritmo para resolver o problema de M-partição para um grafo aranha com partição (R,C,S) se fornecidas todas as submatrizes de M que são admitidas por $G[R]$. Tal algorimo foi mostrado por Hannnebauer em [Hannnebauer, 2010].

Lema 5.3 ([Hannnebauer, 2010]) *O problema de M-partição com listas para grafos aranha sem cabeça pode ser resolvido em tempo $O(nk + 16^k k^2)$, onde n corresponde ao número de vértices do grafo.*

O lema a seguir é apresentado em [Hannnebauer, 2010] para aranhas. Porém durante nosso estudo do artigo em questão, percebemos que o lema é válido para qualquer grafo G com partição (R,H), tal que $H = (H_1 \cup H_2)$ e todo vértice de R é adjacente a todo vértice de H_1 e não-adjacente a todo vértice de H_2. Abaixo escrevemos o lema de forma distinta à encontrada em [Hannnebauer, 2010] para englobar tais grafos.

Lema 5.4 ([Hannnebauer, 2010]) *Seja $G = (R \cup H, E)$ um grafo com listas L e $H = (H_1 \cup H_2)$ tal que todo vértice de R é adjacente a todo vértice de H_1 e não adjacente a todo vértice de H_2.*

Então G admite uma matriz $M \in \{0,1,*\}^{k\times k}$ se e somente se existem submatrizes $M_{\mathscr{R}}$,$M_{\mathscr{H}}$ de M (com $\mathscr{H},\mathscr{R} \subset \{1,\ldots,k\}$) tais que $G[R]$ com listas L_R admite $M_{\mathscr{R}}$ e $G[H]$ admite $M_{\mathscr{H}}$ com *listas L' definidas abaixo:*

$$L'(h) \;=\; \begin{cases} L(h) \backslash \{x \in [k] \mid \text{ Existe } y \in \mathscr{R} \text{ para o qual } M_{x,y} = 0\}, & \text{se } h \in H_1 \\ L(h) \backslash \{x \in [k] \mid \text{ Existe } y \in \mathscr{R} \text{ para o qual } M_{x,y} = 1\}, & \text{se } h \in H_2. \end{cases}$$

Prova: Suponha que o grafo G com listas L admite uma matriz $M \in \{0,1,*\}^{k\times k}$. Então G possui uma M-partição com partes $A_1,\ldots,A_k$ que obedece às listas de L. Sejam $\mathscr{R} \subseteq \{1,\ldots,k\}$ o conjunto de índices i tais que A_i possui pelo menos um vértice de R e $\mathscr{H} \subseteq \{1,\ldots,k\}$ o conjunto de índices i tais que A_i possui pelo menos um vértice de H.

Como G admite a uma M-partição com partes $A_1,\ldots,A_k$ que obedece às listas de L, esta mesma M-partição será válida quando restrita a $G[R]$ com listas L_R. O mesmo argumento pode ser aplicado ao grafo $G[H]$ com listas L_H. Como todos os vértices de R estão em partes A_i com $i \in \mathscr{R}$ e todos os vértices de H estão em partes A_i com $i \in \mathscr{H}$, então $G[R]$ com listas L_R admite $M_{\mathscr{R}}$ e $G[H]$ com listas L_H admite $M_{\mathscr{H}}$.

Devemos provar ainda que $G[H]$ admite $M_{\mathscr{H}}$ com listas L' ao invés de L_H. Pela definição de L', isto é verdade se não há partes $x \in \mathscr{H}$ e $y \in \mathscr{R}$ tais que:

- $\exists h \in H_1$ tal que $h \in A_x$ e $M_{x,y} = 0$
- $\exists h \in H_2$ tal que $h \in A_x$ e $M_{x,y} = 1$

Ambos casos não podem acontecer uma vez que se $y \in \mathscr{R}$ então $A_y \cap R \neq \emptyset$. Sendo assim como todo $r \in R$ é adjacente a todo $h_1 \in H_1$ e não adjacente a todo $h_2 \in H_2$ teríamos que $A_1,\ldots,A_k$ não é uma M-partição válida para G. Desta maneira $G[H]$ com listas L' admite $M_{\mathscr{H}}$.

Agora suponha $\mathscr{R},\mathscr{H} \subset \{1,\ldots,k\}$, tais que $G[R]$ com listas L_R admite $M_{\mathscr{R}}$ e $G[H]$ com listas L' admite $M_{\mathscr{H}}$.

Então $G[R]$ possui uma $M_{\mathscr{R}}$-partição com partes ${}_RA_i(i \in \mathscr{R})$ e listas L_R e $G[H]$ tem uma $M_{\mathscr{H}}$-partição com partes ${}_HA_i(i \in \mathscr{H})$ e listas L'. Os outros conjuntos de partes são vazios, ${}_RA_i = \emptyset(i \in \{1,\ldots,k\} \backslash \mathscr{R})$ e ${}_SA_i = \emptyset(i \in \{1,\ldots,k\} \backslash \mathscr{H})$. Podemos provar que a união destas partes $A_i = {}_RA_i \cup {}_SA_i (1 \leq i \leq k)$ é uma M-partição de G com listas L.

Os conjuntos $A_1,\ldots,A_k$ são superconjuntos de ${}_RA_1,\ldots,{}_RA_k$ e ${}_HA_1,\ldots,{}_HA_k$ que obedece às listas L' que são restrições das listas L, então não há um par de vértices do mesmo subgrafo $G[R]$ ou $G[H]$ que violem a partição em $A_1,\ldots,A_k$. Além disso se um par de vértices u,v viola a partição, então $u \in R \cap A_y$ para algum $y \in \mathscr{R}$ e $v \in H \cap A_x$ para algum $x \in \mathscr{H}$. Se $v \in H_1$ então

$x \in L'_v$ e desta forma, pela definção de L', $M_{x,y} \neq 0$, assim u, v não podem corresponder a uma violação da partição. O raciocínio é análogo se $v \in H_2$.

Desta maneira a partição $A_1, \dots, A_k$ do grafo G é uma M-partição válida, ou seja, G com listas L admite M.

□

Os Lemas 5.3 e 5.4 nos fornecem um algoritmo linear em $|C|$ para encontrarmos todas as submatrizes de M que são admitidas por um grafo aranha G com partição (R, C, S), se fornecidas todas as submatrizes de M admitidas por $G[R]$. Tal algoritmo e seu tempo de execução são apresentados no lema a seguir.

Lema 5.5 ([Hannnebauer, 2010]) *Seja um grafo aranha G com partição (R, C, S) e listas L. Sejam ainda $M \in \{0, 1, *\}^{k \times k}$ e $\mathscr{M}_R$ o conjunto de todas as submatrizes de M admitidas por $G[R]$ com listas L_R.*

Então, o conjunto de todas as submatrizes de M admitidas por G pode ser calculado em tempo $O(4^k ck + 64^k k^2)$, onde $c = |C| = |S|$.

Prova: Para cada conjunto de partes $\mathscr{R} \subset \{1, \dots, k\}$ tal que $G[R]$ com listas L_R admite a submatriz $M_{\mathscr{R}}$ de M os três passos abaixo são executados. Note que $M_{\mathscr{R}} \in \mathscr{M}_R$.

Passo 1: Sejam as listas L' para o grafo $G[C \cup S]$ definidas como no Lema 5.4. Calcular L' leva tempo $O(ck^2)$: temos $2c$ listas para calcular e cada uma contém no máximo k partes. Para todo $v \in (C \cup S)$ e para cada parte $i \in L(v)$ temos que verificar $|\mathscr{R}| \leq k$ elementos de M para saber se i permanece ou não na lista.

Passo 2: Aplicando o Lema 5.3 para todas as submatrizes de M existentes, calculamos o conjunto $\mathscr{M}_{CS}$ de todas as submatrizes de M que são aceitas por $G[C \cup S]$ com listas L' em tempo $O(2^k(ck + 16^k k^2)) = O(2^k ck + 32^k k^2)$.

Passo 3: Para cada conjunto de partes $\mathscr{H}$ tais que $M_{\mathscr{H}} \in \mathscr{M}_{CS}$, o Lema 5.4 implica que G admite $M_{\mathscr{R} \cup \mathscr{H}}$, como temos no máximo 2^k submatrizes em $\mathscr{M}_{CS}$ e $|\mathscr{R} \cup \mathscr{H}| \leq k$, podemos unir $\mathscr{R}$ e todos os $M_{\mathscr{H}} \in \mathscr{M}_{CS}$ em tempo $O(2^k k)$.

Todo o processo leva tempo $O(2^k ck + 32^k k^2)$, uma vez que o tempo dos passos 1 e 3 são dominados pelo tempo do passo 2. Como este processo deve ser repetido para cada um dos, no máximo, 2^k conjuntos de partes $\mathscr{R} \in \mathscr{M}_R$, calculamos todas as submatrizes admitidas por G em tempo $O(2^k(2^k ck + 32^k k^2)) = O(4^k ck + 64^k k^2)$. □

Podemos utilizar o Lema 5.4 e uma ideia bastante semelhante à do algoritmo acima para obtermos um algoritmo para o caso em que G possui uma p-componente separável com menos do que q vértices.

Lema 5.6 *Seja um grafo G com listas L, tal que G possui uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com menos do que q vértices. Sejam ainda $M \in \{0,1,*\}^{k \times k}$ uma matriz e $\mathscr{M}_R$ o conjunto de todas as submatrizes de M admitidas por $G \backslash H$ com suas respectivas listas.*

Então, o conjunto de todas as submatrizes de M admitidas por G pode ser calculado em tempo $O(4^k k^q)$.

Prova: Observe que o Lema 5.4 se aplica também a estes grafos. O Algoritmo é análogo ao do Lema 5.5 considerando $G \backslash H$, H_1 e H_2 respectivamente como $G[R]$, $G[C]$ e $G[S]$. Abaixo analisamos a complexidade de cada passo a ser executado.

Passo 1: Calcular L' leva tempo $O(qk^2)$, temos no máximo q listas para calcular e cada uma contém no máximo k partes. Para cada parte $i \in L(v)$ temos que verificar $|\mathscr{R}| \leq k$ elementos de M para saber se i permanece ou não na lista.

Passo 2: Calcular o conjunto $\mathscr{M}_H$ de todas as submatrizes de M que são aceitas por $G[H]$ com listas L' leva tempo $O(2^k k^{q+1} q^3)$. Para cada submatriz M' de M, verificamos se $G[H]$ possui uma M'-partição investigando todas as partições possíveis de H; isto pode ser feito em tempo kq^3. Como há no máximo k^q tais partições e como M tem 2^k submatrizes obtem-se o tempo estimado.

Passo 3: Como temos no máximo 2^k submatrizes em $\mathscr{M}_H$ e $|\mathscr{R} \cup \mathscr{H}| \leq k$, podemos unir $\mathscr{R}$ e todos os $M_{\mathscr{H}} \in \mathscr{M}_H$ em tempo $O(2^k k)$.

Todo o processo leva tempo $O(2^k k^{q+1} q^3)$, uma vez que o tempo dos passos 1 e 3 são dominados pelo tempo do passo 2. Como este processo deve ser repetido para cada um dos, no máximo, 2^k conjuntos de partes $\mathscr{R} \in \mathscr{M}_{\mathscr{R}}$, calculamos todas as submatrizes admitidas por G em tempo $O(4^k k^{q+1} q^3)$. $\square$

Assim temos nosso resultado principal.

Teorema 5.7 *Seja G um $(q, q-4)$-grafo, onde q é fixo, e L um conjunto de listas relacionadas aos vértices de G. Podemos determinar se G possui uma M-partição que obedece às listas L em tempo linear para qualquer matriz de partição M de dimensão constante.*

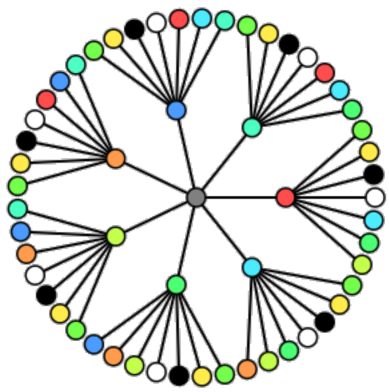
Prova: Diretamente do Corolário 2.2 e dos Lemas 5.2, 5.5 e 5.6. $\square$

6 Coloração Harmônica

6.1 Introdução

Definição 6.1 *Uma coloração harmônica c de um grafo $G(V,E)$ é uma coloração própria de $V(G)$ tal que para cada par (i, j) de cores distintas existe no máximo uma aresta $uv \in E(G)$ tal que $c(u) = i$ e $c(v) = j$.*

Uma das motivações para o estudo de colorações harmônicas é obter um rotulamento único das arestas de um grafo a partir de uma coloração dos seus vértices. O número cromático harmônico $h(G)$ é o número mínimo k tal que existe uma k-coloração harmônica de G. Dizemos que uma coloração harmônica de um grafo G é ótima se ela usa exatamente $h(G)$ cores.



(i) Exemplo de coloração harmônica

Muitos problemas NP-completos em grafos possuem algoritmos de tempo polinomial se o grafo de entrada pertencer a certas classes específicas, como os grafos de intervalos, grafos split, cografos ou grafos P_4-esparsos. Entretanto, o problema da coloração completa continua NP-completo mesmo para cografos como provou Bodlaender em [Bodlaender, 1989].

Definição 6.2 *Uma coloração completa c de um grafo $G(V,E)$ é uma coloração própria de $V(G)$ tal que para todo par de cores i e j, existe uma aresta $uv \in E(G)$, com $c(u) = i$ e $c(v) = j$.*

É fácil ver que o número acromático $\chi_a(G)$ e o número cromático harmônico $h(G)$ estão relacionados. Por exemplo Chartrand e Zhang mostraram em [Chartrand e Zhang, 2009] que,

$$1 \leq \chi_a(G) \leq \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1+8m}}{2} \right\rfloor \leq h(G) \leq n,$$

onde n e m são respectivamente o número de vértices e o número de arestas de G.

Se uma coloração não é completa, existem duas classes de cor i e j tais que não há arestas entre seus vértices. Desta forma, podemos fundir as classes i e j em uma única classe, diminuindo o número de cores, até obtermos uma coloração completa. O número acromático $\chi_a(G)$ de um grafo G, introduzido por Harary e Hedetniemi em [Harary e Hedetniemi, 1970], é o maior número k tal que G possui uma k-coloração completa.

A prova da NP-completude do problema da coloração completa para cografos, obtida por [Bodlaender, 1989], também estabelece diretamente a NP-completude para cografos de outro problema de coloração: a coloração harmônica. Isto se dá devido ao fato de que toda coloração completa ótima é também uma coloração harmônica ótima no grafo utilizado na redução que prova a NP-completude da coloração completa.

Apesar de ser NP-completo para cografos, o problema da coloração harmônica é fácil para cografos conexos, como mostraremos mais adiante.

No que diz respeito a outras classes de grafos, Asdre et al. provaram em [Asdre et al., 2007] que determinar $h(G)$ é NP-Difícil mesmo para grafos de intervalos conexos, grafos de permutação e grafos *split*. Em 2010, Ioannidou e Nikolopoulos [Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] provaram que o problema também é NP-Difícil para grafos colineares.

Sendo difícil para classes tão simples de grafos, surge a questão sobre quais classes possuem algoritmos polinomiais para o problema da coloração harmônica. Neste Capítulo nós mostraremos um algoritmo FPT para determinar o número harmônico de um $(q, q-4)$-grafo conexo G, considerando o parâmetro q fixo. Além disso ao obtermos este resultado, também determinamos uma coloração harmônica ótima de G.

6.2 Complexidade do Problema de Coloração Harmônica

Nesta seção apresentaremos a prova da NP-completude do problema de coloração harmônica como mostrada por Bodlaender em [Bodlaender, 1989]. Para tanto usaremos a seguinte descrição do problema:

Problema do Número Harmônico(HN)

Instância: Grafo $G = (V, E)$ e inteiro $K \leq |V(G)|$.

Pergunta: $\lambda(G) \leq K$?

Para provarmos que (HN) é NP-completo utilizaremos uma redução a partir do problema de 3-*Partição* descrito abaixo:

Problema de 3-Partição(3P)

Instância: Conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$, inteiro positivo B e função de peso $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ para todo $a \in A$, tal que $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$ e $\sum_{a \in A} s(a) = mB$.

Pergunta: O conjunto A pode ser particionado em conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, de tal forma que para cada conjunto A_i, $\sum_{a \in A_i} s(a) = B$?

Observe que devido a restrição $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$, cada conjunto A_i deve possuir exatamente 3 elementos. Além disso, podemos supor que para todo $a \in A$, $s(a) > m$, caso contrário podemos multiplicar todos os $s(a)$ e B por $m+1$. Garey et al. provaram em [Garey et al., 1975] que o problema (3P) é NP-completo.

Teorema 6.3 ([Bodlaender, 1989]) *(HN) é NP-completo mesmo quando restrito a cografos.*

Prova: Dada uma instância de (3P) geramos o seguinte grafo. Tome uma clique com m vértices, uma clique com B vértices, adicione um vértice v^* adjacente a todos os vértices das cliques. Para cada $a \in A$ adicione uma árvore de altura 1 com $s(a)$ folhas. O grafo resultante é um cografo desconexo G, uma vez que não possui P_4's induzidos.

Resta-nos mostrar apenas que $\lambda(G) \leq m+B+1$ se e somente se A pode ser particionado em conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, de tal forma que para cada conjunto A_i, $\sum_{a \in A_i} s(a) = B$.

Primeiro observe que o número de arestas em G é:

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} + m + B + \sum_{i=1}^{3m} s(a_i) = \frac{(m+B+1)(m+B)}{2} = \binom{m+B+1}{2}$$

Para toda coloração harmônica de G e todo par de cores distintas i, j deve haver no máximo uma aresta com extremidades coloridas com as cores i e j. Portanto o número cromático harmônico de G não pode ser menor que $m+B+1$. Além disso caso seja igual, em qualquer coloração harmônica de G com $m+B+1$ cores devemos ter, para cada par de cores distintas i e j, exatamente uma aresta com extremidades coloridas com i e j.

Agora suponha que existe uma partição de A em conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, tal que para cada conjunto A_i, $\sum_{a \in A_i} s(a) = B$. Vamos mostrar como obter, a partir desta partição, uma coloração harmônica de G com $m+B+1$ cores. Atribua cores $1,\dots,m$ aos vértices da primeira clique. Atribua cores $m+1,\dots,m+B$ aos vértices da segunda clique. Se $a_i \in A_j$, então atribua cor j a raiz da i-ésima árvore. Agora cada cor $j \in \{1,\dots,m\}$ está atribiuda as raizes de três árvores que possuem, somadas, B folhas. Atribua a cada uma dessas B folhas uma cor diferente em $\{m+1,\dots,m+B\}$. Como resultado temos uma coloração harmônica de G com exatamente $m+B+1$ cores.

Suponha que $\lambda(G) = m+B+1$. Considere uma coloração harmônica f de G que utiliza $m+B+1$ cores. Sem perda de generalidade podemos supor que $f(v^*) = m+B+1$. Como v^* já é adjacente a outros $m+B$ vértices, nenhum outro vértice possui cor $m+B+1$. Desta maneira podemos supor, sem perda de generalidade, que os vértices da primeira clique possuem cores $1,\dots,m$ e que os vértices da segunda clique possuem cores $m+1,\dots,m+B$.

Como para todo $a \in A$ $s(a) > m$ não podemos colorir a raiz de uma das árvores com uma cor de $\{m+1,\dots m+B\}$. Caso contrário os vértices com esta cor seriam adjacentes a mais que $m+B$ outros vértices. Assim teríamos mais de duas arestas com as mesmas cores nas suas extremidades, uma contradição. Desta maneira as raízes de cada árvore recebem cores de $\{1,\dots,m\}$.

Agora faça $a_i \in A_j$ se e somente se a raiz da i-ésima árvore(com $s(a_i)$ folhas) é colorida com a cor j. Cada cor j deve ser adjacente as cores $m+1,\dots,m+B$ por meio das arestas das árvores. Cada uma dessas B cores deve ser atribuida a apenas uma folha de uma das árvores cuja raiz foi colorida com a cor j. Assim para todo conjunto A_i, $\sum_{a\in A_i} s(a) = B$. □

6.3 Coloração harmônica de $(q,q-4)$-grafos conexos

Nesta seção apresentamos um algoritmo FPT para encontrar uma coloração harmônica ótima de um $(q,q-4)$-grafo conexo. Para tanto utilizamos a caracterização deste tipo de grafos apresentada no Corolário 2.2

Lema 6.4 *Seja G um grafo tal que $\bar{G}$ é desconexo. Então $h(G) = |V(G)|$.*

Prova: Seja $k > 1$ o número de componentes conexas de $\bar{G}$. Seja $(C_1,\dots,C_k)$ uma partição de $V(G)$ que induz as componentes conexas de $\bar{G}$. Logo, para todos $1 \le i < j \le k$, cada vértice de C_i é adjacente a cada vértice de C_j no grafo G.

Seja c uma coloração harmônica de G. Sejam x_i e x_j vértices de C_i e C_j respectivamente. Claramente, a cor $c(x_i)$ de x_i deve ser diferente da cor $c(x_j)$ de x_j. Se $|C_j| > 1$, seja y_j outro vértice de C_j. Como c é harmônica, então a cor $c(y_j)$ deve ser diferente da cor $c(x_j)$, pois senão teríamos duas arestas x_ix_j e x_iy_j cujas extremidades estariam coloridas com o mesmo par de cores.

Portanto, uma cor não pode ocorrer em componentes diferentes e nem pode ocorrer duas vezes na mesma componente. Ou seja, cada vértice deve ter uma cor distinta. $\square$

No lema abaixo, observe que uma aranha gorda com $|C| = 1$ é desconexa e com $|C| = 2$ é também uma aranha magra. Por isso, podemos supor que $|C| > 2$.

Lema 6.5 *Seja G uma aranha com partição (R,C,S). Se G é uma aranha magra, então $h(G) = |R| + |C| + 1$, e se G é uma aranha gorda com $|C| > 2$, então $h(G) = |V(G)|$.*

Prova: Considere uma coloração harmônica de G. Como C induz uma clique, todos os seus vértices devem ter cores diferentes entre si. Por um raciocínio análogo ao do Lema 6.4, sabemos que cada vértice de $R \cup C$ deve ser colorido com uma cor distinta dos demais.

Considere agora que G é uma aranha magra. Seja s_i um vértice de S. Seja c_i o vértice de C que é adjacente a s_i. A cor de s_i não pode ser uma cor de um vértice c_j de $C \setminus \{c_i\}$, pois senão c_is_i e c_ic_j seriam duas arestas com o mesmo par de cores nas extremidades. Pelo mesmo motivo, a cor de s_i não pode ser uma cor de um vértice r_j de R. Portanto, deve ser uma nova cor. Assim, $h(G) \geq |R| + |C| + 1$. Se colorirmos cada vértice de S com essa nova cor, não haverá duas arestas com o mesmo par de cores nas extremidades, pois essa nova cor aparece apenas em S e cada vértice de S está ligado a exatamente um vértice de C diferente dos demais. Ou seja, $h(G) \leq |R| + |C| + 1$.

Considere agora que G é uma aranha gorda com $|C| > 2$. Pelos mesmos motivos anteriores, os vértices de S não podem receber cores de C nem de R. Resta saber se dois vértices s_i e s_j de S podem receber a mesma cor. Como $|C| > 2$, existe um vértice c_k de C que é adjacente a s_i e s_j. Portanto, s_i e s_j devem receber cores diferentes em uma coloração harmônica. Ou seja, todos os vértices devem receber cores distintas. $\square$

Aplicando o Lema 2.2 sobre um $(q,q-4)$-grafo conexo G, temos a ocorrência dos itens (b), (c) ou (d), visto que G é conexo. Os dois lemas desta seção calculam o número cromático harmônico para os casos (b) e (c). Suponha então que G satisfaz o item (d). Como $G - H_2$ é um Join então temos, pelo Lema 6.4, que este deve ser colorido com $|V(G - H_2)|$ cores. Resta saber como colorir $H = H_1 \cup H_2$. Intuitivamente, como H é pequeno (tem menos do que q vértices), podemos obter todas as colorações possíveis de H em tempo constante e, a partir delas, calcular o número cromático harmônico de G. Essa é a ideia do lema abaixo.

Lema 6.6 *Seja q um inteiro fixo e seja G um grafo $(q, q-4)$ conexo. Suponha que existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 de vértices de G tais que $H = H_1 \cup H_2$ tem menos do que q vértices e todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Então, podemos obter uma coloração harmônica mínima de G em tempo linear no número de vértices.*

Prova: Sabemos que qualquer coloração harmônica válida do grafo $G - H_2$ deve atribuir uma cor diferente a cada vértice. Sendo assim podemos nos ater ao problema de colorir H_2 considerando que os vértices de $G - H_2$ foram previamente coloridos com cores $\{1, \ldots, |V(G - H_2)|\}$.

Como H_2 possui menos do que q vértices podemos gerar todas as colorações possíveis para o mesmo em tempo $O(q^q)$, como cada vértice em H_2 possui no máximo $q-2$ vizinhos em G podemos verificar se cada coloração gerada é válida apenas checando a vizinhança de cada vértice, fazemos isso em tempo $O(q^2)$.

Assim geramos todas as colorações harmônicas válidas de G em tempo $O(q^q)$, consequentemente encontramos uma coloração harmônica ótima e calculamos o número harmônico de G.

□

Teorema 6.7 *Seja q um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo conexo G, podemos em tempo linear no número de arestas determinar o número cromático harmônico $h(G)$ de G e obter uma coloração harmônica mínima de G.*

Prova: Segue do Corolário 2.2 e dos Lemas 6.4, 6.5 e 6.6. □

7 Conclusões

Os problemas de coloração de grafos são amplamente estudados na literatura e estão entre os mais importantes da teoria dos grafos. Esta importância das colorações de grafos advém não só de sua relevância prática, com inúmeras aplicações reais, como também do interesse do ponto vista teórico, uma vez que estes problemas desempenham papel importante na área de Teoria da Complexidade. No entanto, devido a dificuldade dos mesmos não conhecemos algoritmos polinomiais para resolvê-los.

Ao estudarmos estes problemas restringindo-os aos $(q,q-4)$-grafos, com o parâmetro q fixo, passamos a observá-los sob o prisma da Complexidade Parametrizada. Isso nos permite a busca por algoritmos eficientes para os mesmos. Nesta dissertaçao estudamos os problemas de $L(2,1)$-coloração, Coloração Harmônica e M-partição de Grafos quando restritos aos $(q,q-4)$-grafos. Para todos os problemas obtivemos êxito em encontrar algoritmos FPT de resolução. O que nos leva a crer que a técnica utlizada nesse trabalho pode ser aplicada com sucesso em outros problemas de coloração.

Além disso, ao abordarmos o problema de $L(2,1)$-coloração, pudemos comprovar a validade da famosa conjectura de Griggs-Yeh para P_4-esparsos, P_4-laden e alguns $(q,q-4)$-grafos. Também indicamos uma possível adaptação de um algortimo exponencial que calcula $\lambda(G)$ para calcular uma forma mais geral do parâmetro, $\lambda_{(h,1)}(G)$.

Os resultados obtidos nesta dissertaçao foram publicados em [Cerioli et al., 2010], [Sales et al., 2010] e [Sales et al., 2011].

Referências Bibliográficas

[Asdre et al., 2007] K. Asdre, K. Ioannidou e S. Nikolopoulos, The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 2377–2382.

[Babel e Olariu, 1998] L. Babel e S. Olariu, On the structure of graphs with few P_4s, *Discrete Applied Mathematics* **84** (1998), 1–13.

[Babel et al., 2001] L. Babel, T. Kloks, J. Kratochvl, D. Kratsch, H. Muller and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few P_4's, *Discrete Mathematics* **235** (2001), 29–51.

[Bella et al., 2007] P. Bella, D. Kr'al', B. Mohar and K. Quittnerova, Labeling planar graphs with a condition at distance two, *European Journal of Combin.* **28** (2007), Issue 8, 2201–2239.

[Bodlaender, 1989] H. L. Bodlaender, Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs, *Information Processing Letters* **31** (1989), 135–138.

[Calamoneri, 2011] Tiziana Calamoneri, The L(h, k)-Labelling Problem: An Updated Survey and Annotated Bibliography, *The Computer Journal* **54** (2011), 1344-1371.

[Cerioli et al., 2010] M. Cerioli, N. A. Martins, D. Posner e R. M. Sampaio, Um Algoritmo FPT para o problema da $L(2,1)$-coloração, *Anais do XLIII SBPO* (2011).

[Chang e Kuo, 1996] G. J. Chang e D. Kuo, The L(2,1)-labeling problem on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **9** (1996), 309–316.

[Chartrand e Zhang, 2009] G. Chartrand e P. Zhang, *Chromatic Graph Theory* [Capítulo 13], CRC Press (2009).

[Corneil et al., 1981] D. Corneil, H. Lerchs e L. K. Stewart, Complement reducible graphs, *Discrete Applied Mathematics* **3** n.3 (1981), 163–174.

[Feder et al., 2005] Tomás Feder, Pavol Hell, Sulamita Klein, Loana Nogueira e Fábio Protti, List matrix partitions of chordal graphs, *Journal Theoretical Computer Science* **349** (2005), 52–66.

[Feder et al., 2006] Tomás Feder, Pavol Hell e Winfried Hochstättler, Generalized Colourings (Matrix Partitions) of Cographs, *Graph Theory in Paris, Trends in Mathematics* (2006), 149–167.

[Fiala et al., 2001] J. Fiala, T. Kloks, J. Kratochv'ıl, Fixed-parameter complexity of λ-labelings, *Discrete Applied Mathematics* **113** (2001), 59–72.

[Garey et al., 1975] Garey, Michael R. and David S. Johnson, Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints, *SIAM Journal on Computing* **4** (1975), 397–411.

[Georges et al., 1994] J. Georges, D. W. Mauro e M. Whittlesey, Relating path covering to vertex labelings with a condition at distance two, *Discrete Math.* **135** (1994), 103-111.

[Giakoumakis, 1996] V. Giakoumakis, P4-laden graphs: a new class of brittle graphs, *Information Processing Letters* **60** (1996) 29–36.

[Gonçalves, 2008] D. Gonçalves, On the L(p, 1)-labelling of graphs, *Discrete Math.* **308** (2008), 1405–1414.

[Griggs e Yeh, 1992] J.R. Griggs e R.K. Yeh, Labeling graphs with a condition at distance 2, *SIAM J. Discrete Math.* **5** (1992), 586-–595.

[Hannnebauer, 2010] Christoph Hannnebauer, Matrix Colorings of P_4-sparse Graphs (2010).

[Havet et al., 2008] Havet, F., Reed, B. and Sereni, J.-S, L(2, 1)-Labeling of graphs, *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm (SODA '08)* (2008), 621–630.

[Havet e Thomassé, 2009] Havet, F. e Thomassé, S., Complexity of (p, 1)-total labelling, *Discrete Applied Mathematics* **157** (2009), 2859–2870.

[Havet et al., 2010] N. Eggemann, F. Havet e Steven D. Noble, $k-L(2,1)$-labelling for planar graphs is NP-complete for $k \geq 4$, *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010), 1777–1788.

[Havet et al., 2011] F. Havet, M. Klazar, J. Kratochvíl, D. Kratsch e M. Liedloff, Exact algorithms for $L(2,1)$-labelings of graphs, *Algorithmica* **59** (2011), 169–194.

[Harary e Hedetniemi, 1970] F. Harary e S. Hedetniemi, The achromatic number of a graph, *J. Combin. Theory* **8** (1970) 154–161.

[Heuvel e MacGuinness, 2003] J. van den Heuvel and S. McGuinness, Coloring the square of a planar graph, *J. Graph Theory* **42** (2003), no. 2, 110–124.

[Hoàng, 1985] C. Hoàng, Perfect graphs, *PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal* (1985).

[Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] K. Ioannidou e S. Nikolopoulos, Harmonious Coloring on Subclasses of Colinear Graphs, *WALCOM: Algorithms and Computation: 4th International Workshop* (2010)

[Jamison e Olariu, 1992] B. Jamison e S. Olariu, A tree representation for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **35** (1992), 115–129.

[Jamison e Olariu, 1995] B. Jamison e S. Olariu, P-components and the homogeneous decomposition of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **8** (1995), 448–463.

[Jonas, 1993] T. K. Jonas, Graph Coloring Analogues with a Condition at Distance Two: L(2, 1)-Labelings and List λ-Labelings, *Ph.D. thesis, University of South Carolina* (1993).

[Junosza-Szaniawski et al., 2011] Junosza-Szaniawski K. e Rzazewski P., On improved exact algorithms for $L(2,1)$-labelings of graphs, *Lecture Notes in Computer Science* **6460** (2011), 34–37.

[Král' e Škrekovski, 2003] D. Král' e R. Škrekovski , A theorem about the channel assignment problem, *SIAM J. Discrete Math.* **16** (2003), 426–437.

[Kratochvíl et al., 2011] Junosza-Szaniawski K., Kratochvíl J., Liedloff M., Rossmanith P., Rzazewski P., Fast exact algorithm for $L(2,1)$-labeling of graphs, *Lecture Notes in Computer Science* **6648** (2011), 82–93.

[Liedloff et al., 2011] K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedloff e P. Rzazewski, Determining $L(2,1)$-Span in Polynomial Space, *Lecture Notes in Computer Science* **7551** (2012), 126–137.

[Roberts, 1988] F. S. Roberts, comunicação privada com J. R. Griggs.

[Rzazewski et al., 2011] Junosza-Szaniawski K. e Rzazewski P., On the complexity of exact algorithm for $L(2,1)$-labelings of graphs, *Information Processing Letters* **111** (2011), 697–701.

[Sales et al., 2010] C. Linhares Sales, N. A. Martins e R. M. Sampaio, Coloração Harmônica de $(q,q-4)-grafos$ conxexos, *Anais do XLII SBPO* (2010).

[Sales et al., 2011] V. Campos, C. Linhares Sales, K. Maia, N. A. Martins e R. Sampaio, Restricted coloring problems on graphs with few $P_4's$, *Eletronic Notes in Discrete Mathematics* **37** (2011), 57–62.