



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS DISCRETOS

FORTALEZA

2016

RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS DISCRETOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Coorientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

FORTALEZA

2016

RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS DISCRETOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 08/04/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (Orientador)  
Universidade Estadual “Júlio de Mesquita  
Filho” (UNESP)

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
(Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ascânio Dias de Araújo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. André Luís Prando Livorati  
Universidade Estadual “Júlio de Mesquita  
Filho” (UNESP)

---

Prof. Dr. Claudionor Gomes Bezerra  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

T2691 Teixeira, Rivania M. N. .

Leis de escala em mapeamentos discretos / Rivânia Maria do Nascimento Teixeira. – Fortaleza, 2016.  
84.:il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2016.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.  
Orientação: Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Leis de Escala. 3. Expoentes Críticos. 4. Caos. 5. Transição de Fase. I. Título.

CDD:530.13

---

*À minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Raimundo Nogueira da Costa Filho e Edson Denis Leonel pela oportunidade, confiança e receptividade. Pela paciência que tiveram ao longo desses três anos de doutorado. Obrigada pelos recursos, pelos incentivos e por tornar amena as dificuldades. É um momento ímpar trabalhar com quem se admira.

À minha família, pelo apoio e carinho que me ajudaram a chegar até aqui.

Aos meus amigos da UFC pelas discussões informais, amizade e respeito. Pela ajuda nas disciplinas, dúvidas e até mesmo pelas risadas garantidas. Em especial, Naiara Cipriano, Francisco Emmanoel, Márcio Melo, João Paulo, Lucas Miranda, Thiago Bento, Victor Santos, Ivan Jardim e Prof. Saulo Reis.

Aos amigos da UNESP de Rio Claro, pela acolhida nessas minhas viagens, pelas dúvidas sanadas e pela amizade. Aos queridos Amanda Prina, Carlos Awano, André Livorati, Juliano Antônio, Mirian Castejon, João Fonseca, Kátia Lee, Douglas Morais, Leonardo Rossi, Bárbara Carneiro, Francisco Bauke, Beatriz Litoldo, Éverton Carvalho, Rafael Bizão, Tiago Botari e Vinicius Santana pelos muitos incentivos. Vocês tem uma importância enorme nesta jornada!

Minhas companheiras de casa, Samantha Alves e Iara Saraiva, pela paciência e companhia. E aos que já passaram por lá - Stanley Oliveira, Nicolle Colares, Naiara Cipriano e Márcio Melo.

Ao meu querido companheiro Geraldo Pasquoto Júnior pelo amor e amizade. Com você meus dias foram mais leves!

Aos meus amigos de todas as horas - Walnysse Gonçalves, Antenor Costa, Carlos Falcão e Hamilton Moura. Foram em momentos com vocês que me senti mais forte na caminhada. Obrigada por estarem por perto.

Aos professores da UFC que contribuíram para minha formação. As secretárias Rejane e Ana Cleide pela atenção e disposição.

Aos laboratórios da UNESP-RC pelo acesso aos computadores para as simulações computacionais. Aos amigos do grupo de pesquisa da UNESP.

À FUNCAP e CAPES pelo apoio e suporte financeiro.

## RESUMO

Neste trabalho investigamos algumas aplicações do formalismo de escala em mapeamentos discretos. Exploramos os decaimentos assintóticos ao estado estacionário com foco em três tipos de bifurcações em mapeamentos unidimensionais: bifurcação transcritical, bifurcação supercritical de forquilha e bifurcação de duplicação de período. Caracterizamos este comportamento através de uma função homogênea generalizada com expoentes críticos bem definidos. Próximo ao ponto de bifurcação o decaimento ao ponto fixo ocorre através de uma função exponencial cujo o tempo de relaxação é caracterizado por uma lei de potência que independe da não linearidade do mapa. Os resultados obtidos numericamente hamornizam com os resultados analíticos. Aplicamos também o formalismo de escala em mapeamentos bidimensionais conservativos e dissipativos. No caso conservativo, nosso objetivo foi analisar o comportamento de órbitas caóticas próximas à transição de fase de integrável para não integrável. Próximo à esta transição, descrevemos o sistema dinâmico utilizando uma função homogênea generalizada para a qual encontramos um lei de escala que descreve o comportamento da ação quadrática média próximo à transição. Através de uma discussão fenomenológica, encontramos expoentes críticos que corroboram com a descrição analítica. No caso dissipativo, nosso principal objetivo foi investigar a influência na dinâmica ao ser introduzido um termo dissipativo, causando a supressão da difusão ilimitada da variável ação quadrática média. Seguimos uma descrição fenomenológica acompanhada de uma descrição analítica e assim, determinamos os expoentes críticos usando uma função homogênea generalizada.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos. Leis de Escala. Expoentes Críticos. Caos. Transição de Fase.

## ABSTRACT

In this work we are going to investigate the scale formalism in discrete mappings. In 1D mappings, we explore the asymptotic decays to the steady state with focus in three types of bifurcation: transcritical, pitchfork and period-doubling. We identify this behavior through a well defined generalized homogeneous function with critical exponents. Next to the bifurcation point, the decay to the fix point occurs by an exponential function, which is given by a power law that is independent of the non-linearity mapping. The numerical results obtained agree with the analytical results. We also apply the scale formalism in conservative and dissipative bidimensional mappings. In the conservative case, our goal was analyze the behavior of the chaotic orbits next to the phase transition from the integrable to the non-integrable. Next to that transition, we describe the dynamical system using a generalized homogeneous function for which we found a power law that describe the behavior of the criticality. Through a phenomenological discussion, we found critical exponents in agree with the analytical description. In the dissipative case, our main goal was to investigate the influence of a dissipative term in the dynamics, causing a phase transition - suppression of unlimited diffusion of the action variable. Following a phenomenological approach with an analytical description, we were able to determine the critical exponents using a generalized homogeneous function.

**Keywords:** Dynamics Systems. Scaling Law. Critical Exponents. Chaos. Phase Transition.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
	Contexto histórico . . . . .	10
	Oganização da tese . . . . .	15
2	PROPRIEDADES DE ESCALA EM UMA FAMÍLIA DE MAPAS UNIDIMENSIONAIS . . . . .	16
2.1	O mapa . . . . .	16
2.2	O estado estacionário $x = 0$ . . . . .	19
2.3	O uso da Função Homogênea Generalizada para explicar os decaimentos ao ponto fixo . . . . .	21
2.3.1	Decaimento ao ponto fixo quando $\mu = 0$ . . . . .	22
2.3.2	Decaimento ao ponto fixo quando $\mu \neq 0$ . . . . .	22
2.4	Uma abordagem analítica . . . . .	23
2.4.1	Caso 1: $\mu = 0$ . . . . .	23
2.4.2	Caso 2: $\mu \neq 0$ . . . . .	25
2.5	Bifurcação de duplicação de período . . . . .	26
2.5.1	O mapa e os procedimentos ao estado estacionário . . . . .	27
	Conclusões Parciais . . . . .	32
3	PROPRIEDADES DE ESCALA EM MAPEAMENTOS BIDIMENSIONAIS HAMILTONIANOS . . . . .	34
3.1	Mapeamentos Hamiltonianos e parâmetros de controle . . . . .	34
3.2	Uma descrição fenomenológica para os expoentes críticos e lei de escala . . . . .	38
3.3	Função homogênea generalizada aplicada ao comportamento de $I_{RMS}$ . . . . .	40
3.4	Investigação teórica dos expoentes críticos . . . . .	43
	Conclusões Parciais . . . . .	48
4	LEI DE ESCALA EM MAPAS DISSIPATIVOS BIDIMENSIONAIS . . . . .	49
4.1	O mapa e espaço de fases . . . . .	49
4.2	O $I_{RMS}$ e as hipóteses de escala . . . . .	52
4.3	Uma descrição analítica dos expoentes críticos . . . . .	57
4.3.1	Definindo $I_{RMS}$ . . . . .	57

4.3.1.1	$\gamma = 0$	58
4.3.1.2	$\gamma \neq 0$	58
4.3.2	Discussão dos casos particulares	60
4.3.3	A evolução dinâmica	61
4.3.4	Análise para o número de <i>crossover</i>	62
4.3.5	Investigação analítica para o decaimento	62
Conclusões Parciais		64
5	CONCLUSÕES	65
Artigos publicados		66
ANEXO A		67
ANEXO B		72
ANEXO C		75
REFERÊNCIAS		83

## 1 INTRODUÇÃO

Esta tese de doutorado apresentará discussões e resultados sobre a aplicação de leis de escala em mapeamentos discretos. Para tal fim, exploraremos mapeamentos unidimensionais e bidimensionais, cujas associações são conhecidas na literatura, tais como mapa logístico, mapa cúbico e mapa padrão conservativo e dissipativo.

Inicialmente, investigamos uma família de mapeamentos do tipo logístico, cujo principal objetivo é descrever através do formalismo de escala a evolução em torno do equilíbrio em três tipos de bifurcações: transcítica, forquilha e de duplicação de período. Através de observações fenomenológicas, foi possível supor hipóteses de escala que nos levaram a três expoentes críticos bem definidos. É criada uma robustez às observações através de um resultado analítico que harmoniza com os resultados numéricos.

Em seguida, consideramos uma família de mapeamentos bidimensionais hamiltonianos dos quais nosso principal objetivo é caracterizar algumas propriedades estatísticas de órbitas caóticas em torno da transição de fase, de integrável para não integrável, atingida quando a variável ação diverge no limite em que a variável ângulo tende à zero. Aplicamos o formalismo de escala que mostrou-se de acordo com os resultados obtidos nas simulações numéricas.

Por último, abordaremos o mapa padrão com um termo de dissipação. Focaremos na supressão da difusão ilimitada da ação pela introdução de um termo dissipativo. A observação que conduz a hipóteses de escala ficam bem alicerçadas pela função homogênea generalizada em que é obtida uma lei de escala. Nossa descrição teórica corrobora com os resultados numéricos.

### Contexto histórico

A procura por explicação e compreensão a cerca do movimento dos corpos impulsionou a ciência no passado e ainda impulsiona a comunidade científica dos tempos atuais. A formulação de leis que explicassem esses movimentos é alcançada com o surgimento da ciência moderna, no final do século XV, com os trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727). A importante formulação do movimento dos corpos, da mecânica celeste e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial possibilitaram a descrição e previsão de muitos sistemas físicos. Isto fez com que os estudos em sistemas dinâmicos tivesse seus embasamentos originados concomitantemente aos estudos mais antigos sobre o movimento. Contudo, podemos dizer que o desenvolvimento em sistemas

dinâmicos foi uma ramificação da matemática por muito tempo. Os trabalhos do cientista Isaac Newton caracterizam um marco, onde as equações diferenciais tornaram-se a principal técnica pela qual se descreve um sistema dinâmico [1]. O desenvolvimento da mecânica newtoniana nos forneceu uma ferramenta matemática que utilizava a evolução temporal em suas leis, permitindo assim um domínio sobre o comportamento do universo e possibilitando através destas regras matemáticas a previsão certa de estados futuros tanto quanto de estados passados. O entrelaçamento entre efeitos e causas reforçou uma corrente filosófica vigente da época, o Determinismo. O auge dessa corrente filosófica é atingido com as ideias do físico e matemático Pierre Simon Laplace (1724-1827), onde ele afirma que a existência de uma inteligência suficientemente grande seria capaz de conhecer estados presentes e futuros, de modo que nada mais seria encoberto aos seus olhos - inteligência esta que ficou conhecida como “Demônio de Laplace”.

Acontece que muitos fenômenos na natureza são não lineares. A maioria deles não possuíam soluções analíticas, tendo sido evitados até o início do século XX, quando retornaram a ter destaque após o desenvolvimento dos primeiros computadores, na metade deste mesmo século. Além disto, podemos também atribuir a demora em explorar tais problemas devido ao pensamento que dominava a ciência desde Newton, o Determinismo. Nele, era irrefutável a lógica de que, sendo as condições iniciais bem definidas de um dado problema cuja a evolução era conhecida, seus resultados finais seriam inquestionáveis. Porém, essa confiança total na previsibilidade começava a ser abalada no início do século XX pela investigação tanto microscópica, com o desenvolvimento da Mecânica Quântica que trazia um caráter essencialmente probabilista, quanto macroscópica, com os trabalhos de Poincaré sobre o problema de três corpos.

Observamos que a solidificação na área de sistemas dinâmicos ocorre basicamente mediante a dois trabalhos que desempenharam uma referência fundamental na estruturação principalmente da Teoria do Caos - O problema de três corpos, prenunciado por Henri Poincaré em 1890 [2] e o trabalho sobre fluxos determinísticos não periódicos de Edward Lorenz em 1963 [3]. No caso dos três corpos, Poincaré prenunciou um problema de integrabilidade e a não resolução analítica deste problema. A integrabilidade conceitua que um sistema deve possuir graus de liberdade iguais ao número de constantes de movimento desse mesmo sistema. Nessa busca, observou-se que as leis da física até aquele momento pareciam não prever tanto assim o resultado final dos sistemas físicos realísticos. A natureza poderia até demonstrar sinais de ser bem comportada, mas ela era muito sensível às condições iniciais. Essa possivelmente foi a primeira ideia do que viria a ser conhecido na década de 1970 como caos.

No entanto, apesar das ideias começarem a ganhar força no início do século XX,

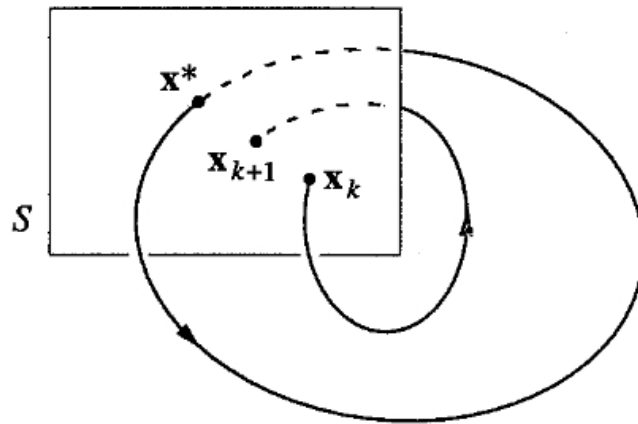


Figura 1: *Ilustração da seção de Poincaré. Figura retirada da referência [8].*

ainda houve atrasos na solidificação da teoria. Há de se pensar em dois principais motivos. Primeiro, a influência da Mecânica Quântica, que demandou esforços de vários cientistas em torno da consolidação da teoria desfoçando o problema da dinâmica não linear; em segundo, essa ciência só obteve destaque e adeptos após o advento dos computadores e seu uso como ferramenta de trabalho científico [4]. Após o aprimoramento dos computadores e a chegada ao mercado de máquinas cada vez mais modernas, os sistemas dinâmicos ganham destaque e começam a despertar um grande interesse da comunidade científica em diversas áreas.

Portanto, sistemas dinâmicos são assim ditos porque possuem uma relação através de uma regra matemática que liga estados presentes e estados futuros de suas variáveis de estado. Em outras palavras - são sistemas nos quais a evolução de suas variáveis de estado dependem do tempo como uma variável. Podem ser classificados em contínuos ou discretos [1, 5]. São ditos contínuos quando utilizam o tempo como uma variável contínua, sendo representados por equações diferenciais cuja solução é conhecida como fluxo. Quando são discretos, utilizam a variável tempo de modo discreto e suas soluções são chamadas de órbitas, nas quais são obtidas a partir da iteração de um mapa. Ao conjunto de todas as órbitas chamamos de espaço de fases. Portanto, os mapeamentos são frequentemente usados para caracterizar a evolução de um sistema dinâmico utilizando o tempo como variável discreta [1, 5, 6, 7]. HHHHHH

A denominação de mapa é dado a uma sistema dinâmico que evolui no tempo de forma discreta [6]. Também pode ser chamado como equação das diferenças finitas. Contudo, o mapa é útil para auxiliar na compreensão de modelos descritos por equações diferenciais de um sistema dinâmico.

A seção de Poincaré é utilizada para reduzir um sistema dinâmico contínuo no tempo com intuito em discretizá-lo, procedimento este que elimina pelo menos uma

variável do sistema. O mecanismo para a obtenção de uma seção de Poincaré é definir uma superfície transversa ao fluxo de trajetórias em um espaço de fases do sistema. Considere um sistema  $n$ -dimensional que evolui de acordo com  $\dot{x} = f(x)$ . Seja  $S$  uma seção de dimensão  $n - 1$ , conforme mostrado na Figura (1). Sendo  $S$  transversal ao fluxo, logo todas as trajetórias interceptam esta seção. Então, o mapa de Poincaré é uma função  $P$  que gera uma sequência de pontos  $x_k \in S$ , definido por:

$$x_{k+1} = P(x_k) \quad . \quad (1.1)$$

Se  $x^*$  é um ponto fixo, então  $P(x^*) = x^*$ . Isto significa que a trajetória começa em  $x^*$  e retorna a  $x^*$ , após um determinado tempo, sendo uma órbita fechada para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Uma análise do comportamento de  $P$  em torno do ponto fixo  $x^*$  nos permite determinar a estabilidade desse ponto fixo. Assim, a seção de Poincaré converte um problema sobre órbitas fechadas a um problema sobre pontos fixos de um mapeamento [8].

Um trabalho interessante foi anunciado por Robert May [9] com aplicações direta na biologia [10]. Este trabalho trata de uma dinâmica que envolve uma população de insetos observada pela regra que relaciona o corrente ano  $x_n$  com o ano posterior  $x_{n+1}$ . Apesar das equações simples, a dinâmica mostrou-se riquíssima neste trabalho. Nesse momento, surgia o caos determinístico - um sistema bem definido em equações geram uma dinâmica imprevisível após a variação dos parâmetros de controle. A variação de tais parâmetros produziam uma mudança estrutural nos pontos fixos, levando ao aparecimento de bifurcações. Em seguida, um grande número de trabalhos utilizando mapeamentos foram aplicados na física, química, biologia, engenharia, matemática, economia, entre outras ciências [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. kkkkkkzzzzz

No capítulo 2 desta tese, trataremos de uma família de mapeamentos unidimensionais, cujo objetivo é caracterizar a dinâmica no ponto de bifurcação e em suas vizinhanças. Um sistema dinâmico possui um ou mais parâmetros que controlam a dinâmica e, quando variados, apresentam alterações em seu espaço de fases. Dentre as alterações, destacamos a bifurcação que é uma mudança estrutural na estabilidade de um ponto fixo. Caracterizamos este comportamento através de uma lei de escala. Analisamos também a bifurcação de duplicação de período.

Os Sistemas Dinâmicos podem ainda ser classificados como conservativos e dissipativos. É dito ser conservativo se durante a evolução temporal há preservação no espaço de fases, isto é, os pontos de um dado volume se movem e com o passar do tempo, estes pontos ocupam um volume que permanece inalterado. Já no caso dissipativo, os pontos que ocupam um determinado volume se movem e, durante uma evolução tem-

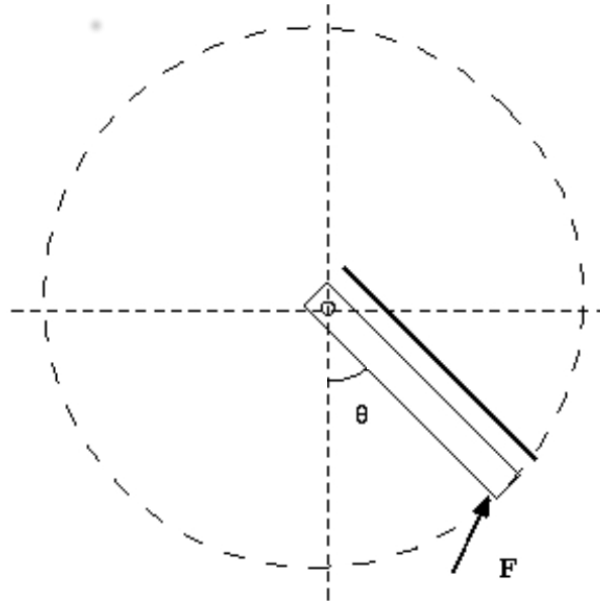


Figura 2: Ilustração do rotor pulsado. Figura extraída da referência [27].

poral, eles ocupam um volume menor; há uma contração do volume no espaço de fases. Os sistemas conservativos também são chamados de sistemas hamiltonianos, por serem regidos pelas equações de Hamilton [26].

Um mapa bastante estudado na literatura é o Mapa Padrão ou mapa de Chirikov [28]. Este mapa possui várias analogias à sistemas físicos reais e sua origem nasce com o modelo do rotor pulsado [28, 26]. O modelo consiste em uma barra presa em uma das extremidades e capaz de girar livremente em um plano, como mostra a Figura (2). A força é aplicada periodicamente na extremidade da barra. Sendo assim, o torque será máximo durante a aplicação da força e nulo nos intervalos em que ela não estiver atuando. O mapa (1.2) representa esse sistema físico:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + k \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde  $p$  representa o momento, a variável  $\theta$  a coordenada e  $k$  controla a intensidade dos pulsos aplicados ao rotor. Para confinar a dinâmica numa geometria toroidal, modula-se as duas equações do mapa em  $2\pi$ .

A família de mapeamentos bidimensionais que abordaremos é composta de um sistema hamiltoniano não linear, tratado nas variáveis ângulo e ação. A medida em que a ação torna-se mínima, a variável ângulo diverge. Dois parâmetros de controle estão presentes nesta dinâmica:  $\epsilon$  que controla a transição de integrabilidade - de integrável para não integrável e  $\gamma$  que relaciona o expoente a ação em que define o ângulo. Para

valores da ação pequenos, o espaço de fases é caótico enquanto que para valores elevados da ação a dinâmica torna-se regular. Mostraremos que a ação média obedece a uma lei de escala com três expoentes críticos bem definidos. As descrições em ambos sistemas envolvem um estudo fenomenológico confirmado por uma investigação analítica.

### **Organização da tese**

Esta tese está organizada da seguinte forma: o presente capítulo faz uma abordagem que contextualiza aspectos históricos com modelos que utilizamos para nossos estudos. No capítulo 2, investigamos uma família de mapeamentos unidimensionais, onde através de um estudo nas condições ao equilíbrio e uma aproximação analítica nos conduz a obtenção de uma lei de escala que descreve este comportamento. Os expoentes críticos foram obtidos tanto numérico quanto analiticamente. No capítulo 3, tratamos de uma família de mapeamentos hamiltonianos, cujo foco reside em caracterizar o comportamento da variável ação próximo à transição de fase de integrável para não integrável. Através de uma descrição fenomenológica usando uma condição inicial da ação muito pequena, com o objetivo de garantir que estas órbitas estejam na região de caos, obtivemos expoentes críticos que descrevem propriedades estatísticas no mar de caos como função do parâmetro  $\epsilon$  e do número de iterações  $n$ , atingindo uma lei de escala que relaciona três expoentes críticos bem definidos. Fizemos também uma conexão com o mapa *standard* possibilitando uma análise na transição do caos local para o caos global. No capítulo 4, estudamos o mapa padrão com a introdução de um termo de dissipação. Aqui, nosso objetivo foi suprimir a difusão ilimitada da ação, através do termo dissipativo. No domínio caótico, fizemos uma descrição fenomenológica e, através de hipóteses de escala associadas a uma função homogênea generalizada obtivemos numericamente três expoentes críticos. Fazendo uma aproximação analítica, obtivemos os mesmos expoentes. Por fim, conclusões e perspectivas no capítulo 5. Salientamos que a letra grega  $\lambda$  será usada nos capítulos 2,3 e 4 para designar diferentes aplicações, com a finalidade de mantermos a mesma estrutura utilizada nos artigos publicados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.



## 2 PROPRIEDADES DE ESCALA EM UMA FAMÍLIA DE MAPAS UNIDIMENSIONAIS

Mapeamentos discretos são usados para descrever diversos sistemas físicos que evoluem no tempo de forma discreta. O mapa é a via pelo qual ocorre a evolução entre um estado anterior e um estado posterior. Na maioria dos casos, os mapeamentos possuem parâmetros de controle que, quando variados, podem ser observadas alterações no sistema. Dentre estas mudanças podemos destacar a ocorrência de caos, bifurcações de vários tipos e até mesmo eventos de crise [29].

Um sistema é dito ser estruturalmente estável quando, uma pequena perturbação nas equações que definem seu fluxo de soluções produzir um novo fluxo que é topologicamente equivalente ao fluxo sem perturbação. Quando essa exigência não é satisfeita, ocorre uma bifurcação, que provoca uma mudança estrutural no estado de equilíbrio do sistema.

Nosso objetivo principal nesse capítulo é estudar a evolução dinâmica para o estado estacionário em mapeamentos unidimensionais, nos parâmetros de controle onde ocorrem bifurcações e em suas vizinhanças. Veremos que os decaimentos ao estado estacionário em mapeamentos unidimensionais são assintóticos e obedecem a uma lei de escala bem definida. Nossos resultados são embasados em um conjunto de hipóteses fenomenológicas associadas a um procedimento analítico que fornecem os expoentes de escala.

### 2.1 O mapa

O mapa que abordaremos é unidimensional e escrito como

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (2.1)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro que controla a não linearidade do mapa e consideraremos nesse trabalho  $\gamma \geq 1$ ,  $R$  é o parâmetro de controle e  $x$  a variável dinâmica.

Os pontos fixos são encontrados resolvendo a equação

$$x_{n+1} = x_n = x^*. \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1), obtemos:

$$x^*[1 - R(1 - x^{*\gamma})] = 0. \quad (2.3)$$

Dois casos devem ser considerados: (i) quando  $\gamma$  for um número par; e (ii) quando  $\gamma$  for

um número qualquer (ímpar, irracional, etc). Vejamos:

- (i) Quando  $\gamma$  for um número par ocorrerá a existência de três pontos fixos: em  $x = 0$  que será assintoticamente estável para  $R \in [0, 1)$  e os outros dois são  $x = \pm[1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , que serão também assintoticamente estáveis para  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . Em  $R = 1$  temos uma bifurcação classificada como supercrítica de forquilha [7, 30], isto é, uma órbita estável no ponto de bifurcação dá origem à duas órbitas também estáveis e, nesse mesmo ponto, a órbita que deu origem torna-se instável [6]; e
- (ii) Quando  $\gamma$  for um número ímpar, irracional, etc. existirão apenas dois pontos fixos: um em  $x = 0$  que é assintoticamente estável para  $R \in [0, 1)$  e o outro em  $x = [1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , sendo assintoticamente estável para  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . Em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação do tipo transcritical, isto é, ocorre uma troca de estabilidade no ponto de bifurcação coexistindo órbitas estáveis e instáveis [6].

Um ponto fixo é dito ser assintoticamente estável se, após uma pequena perturbação na condição inicial em torno do ponto fixo ( $x^*$ ), houver uma convergência para ( $x^*$ ) quando  $t \rightarrow \infty$ . Todas as trajetórias contidas nas proximidades deste ponto serão atraídas a ele [5].

A equação (2.1) trata de mapas conhecidos na literatura para valores específicos de  $\gamma$ . Para  $\gamma = 1$  recuperamos o mapa logístico; para  $\gamma = 2$  recuperamos o mapa cúbico. Para qualquer outro valor temos o mapa “*logistic-like*”.

Na Figura 3, temos o diagrama de órbitas do mapa logístico. Esse mapa foi proposto pelo biólogo Robert May, em 1976 [9], para descrever o crescimento de uma população de insetos, onde  $x_n$  é o número de indivíduos no  $n$ -ésimo intervalo de tempo e  $R$  a taxa de crescimento destes. Apesar da modelagem ser regida por uma equação simples, sua dinâmica tornou-se muito relevante por apresentar uma rica estrutura. Podemos ver ainda na Figura 3 que o ponto fixo  $x = 0$  sofre uma bifurcação transcritical em  $R = 1$ . A partir deste parâmetro o ponto fixo se torna instável até  $R = 4$  cruzando a região do atrator caótico. Neste mesmo ponto em que  $R = 1$ , o ponto fixo  $x = 1 - \frac{1}{R}$  se torna estável e, em  $R = 3$  sofre outra bifurcação, conhecida como bifurcação de duplicação de período. Então, segue-se uma sequência de cascatas de bifurcações e, em seguida, instaura-se o caos no sistema. Em  $R = 4$ , o atrator caótico é destruído abruptamente pelo cruzamento com a órbita instável, fenômeno conhecido como crise de fronteira [29].

Na Figura 4, temos o diagrama de órbitas do mapa cúbico. Podemos notar que o ponto fixo  $x = 0$  dá origem a dois outros em  $R = 1$  que são assintoticamente estáveis. Em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação do tipo supercrítica de forquilha. Em seguida,

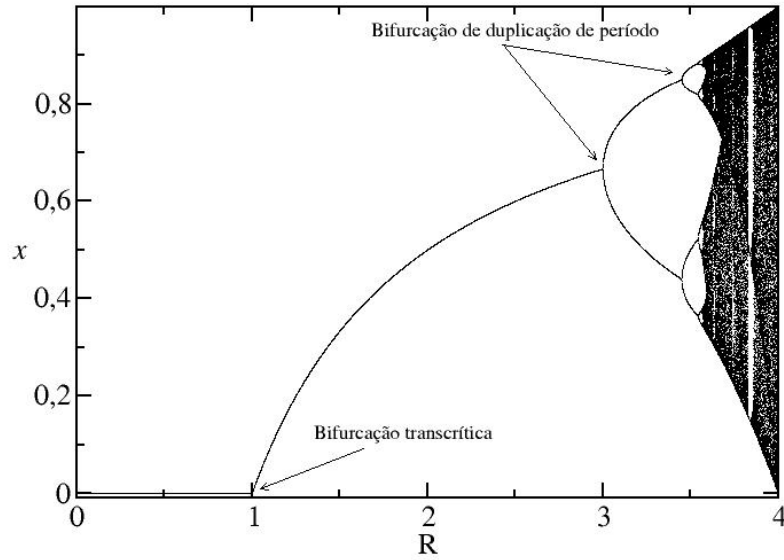


Figura 3: *Esboço do diagrama de órbita do mapa logístico:  $\gamma = 1$ .*

ocorre uma duplicação de período em  $R = 2$  e, na sequência, várias bifurcações até que uma faixa caótica é estabelecida. O ponto fixo instável em  $x = 0$  choca-se com a região dos atratores em  $R = 4$  provocando uma crise. Essa crise é conhecida como crise unindo atratores [29]. Estas bifurcações estão identificadas nas Figuras 3 e 4.

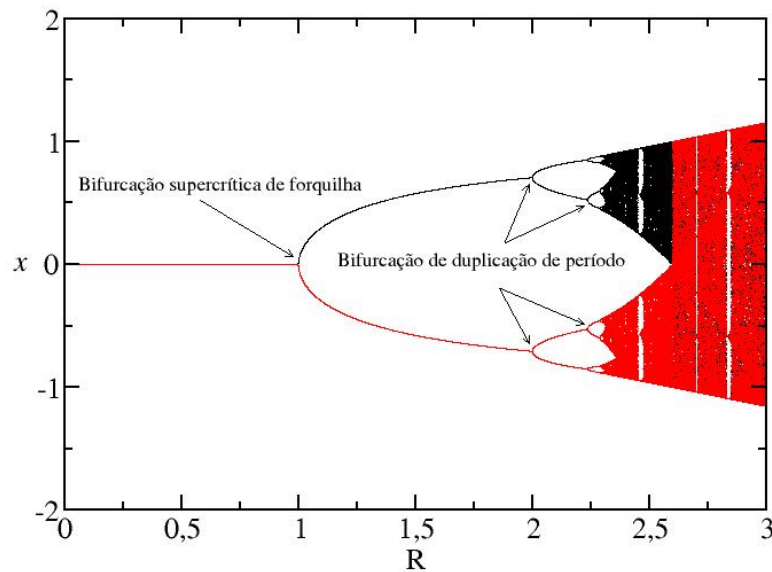


Figura 4: *Diagrama de órbita do mapa cúbico:  $\gamma = 2$ .*

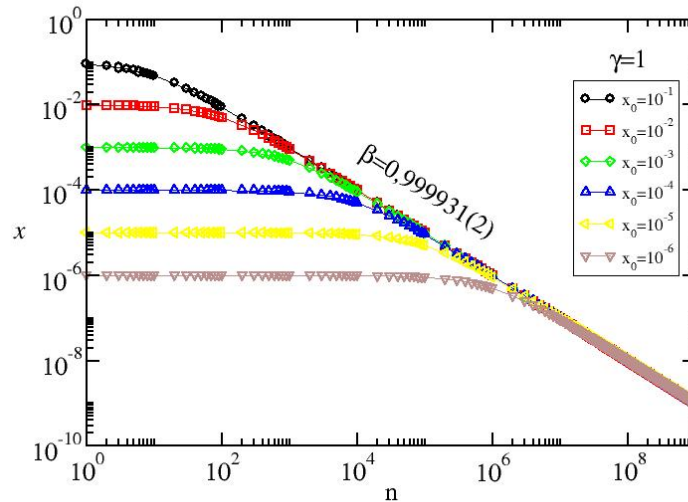


Figura 5: Esboço da convergência ao estado estacionário em  $x = 0$  para  $\gamma = 1$ .

## 2.2 O estado estacionário $x = 0$

Nosso principal objetivo nesse capítulo é investigar o comportamento dinâmico da evolução para o ponto fixo  $x = 0$  no ponto de bifurcação e em suas vizinhanças. O parâmetro de controle onde ocorre a bifurcação é  $R_c = 1$  e, portanto, podemos relacionar sua vizinhança através da expressão

$$\mu = R_c - R \cong 0, \quad (2.4)$$

com  $R \leq R_c$ . A grandeza dinâmica natural que descreve a convergência ao ponto fixo é a distância ao próprio ponto fixo [31]. De fato, sendo o ponto fixo  $x = 0$ , a distância ao ponto fixo é a própria variável dinâmica  $x$ . Esse observável é a distância da iterada do mapa ao ponto fixo e é uma função de  $n$ , ou seja, é função do número de iterações. Além disso, essa distância também é função das condições iniciais e do parâmetro  $\mu$ . Então, no ponto de bifurcação podemos dizer que  $\mu = 0$ , pois  $\mu = R_c - R$ .

As Figuras 5 e 6 mostram a convergência ao estado estacionário  $x = 0$  para diferentes condições iniciais próximas deste estado. Nestas Figuras, consideramos os casos em que  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 2$ , respectivamente, porém, a generalização é imediata.

Podemos observar nas Figuras 5 e 6 que, dependendo da condição inicial, a órbita segue num platô constante e então, em um determinado ponto esse regime é alterado para um decaimento em lei de potência. O ponto em que ocorre a mudança do regime constante para o regime em lei de potência é chamado de *crossover*, e esse decaimento em lei de potência é dado por um expoente crítico no qual chamamos de  $\beta$ . Podemos

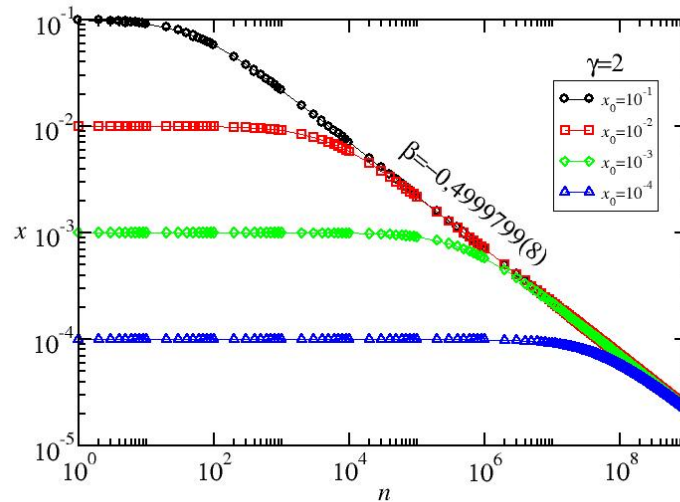


Figura 6: Esboço da convergência ao estado estacionário em  $x = 0$  para  $\gamma = 2$ .

ainda ressaltar que, quanto mais próximo ao ponto fixo essa condição inicial for dada, mais demorada é sua convergência ao ponto fixo. Isso se deve ao fato do expoente quanto maior menos interferir no decaimento ao estado estacionário.

Observando os resultados numéricos obtidos das simulações expostos nas Figuras 5 e 6, podemos então, através de uma descrição fenomenológica do comportamento apresentado nesses gráficos, propor três hipóteses que poderão explicá-los. Vejamos:

1. No regime de platô constante, com um número suficientemente pequeno de  $n$ , ou seja  $n \ll n_x$ , o comportamento  $x$  vs.  $n$  é dado pela equação

$$x(n) \propto x_0^\alpha, \text{ para } n \ll n_x, \quad (2.5)$$

logo podemos concluir que  $x \propto x_0$ . Concluimos, portanto, que o expoente crítico é  $\alpha = 1$ .

2. Para um número suficientemente grande de  $n$ , isto é, no regime do decaimento em lei de potência,  $n \gg n_x$ , a variável dinâmica é escrita como

$$x(n) \propto n^\beta, \text{ para } n \gg n_x, \quad (2.6)$$

onde o expoente  $\beta$  é chamado de expoente de decaimento. O valor numérico não é universal e depende da não linearidade do mapeamento.

3. Finalmente, o número de iterações, *crossover*,  $n_x$ , é dado por

$$n_x \propto x_0^z, \quad (2.7)$$

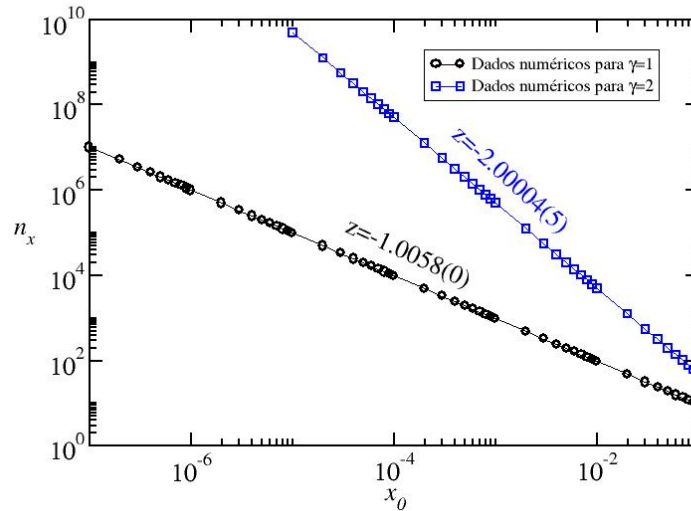


Figura 7: Gráfico do número de iterações de crossover em função das condições iniciais para  $\gamma = 1$ .

onde  $z$  é também um expoente crítico que indica a troca do regime em platô constante para o regime de decaimento em lei de potência.

O expoente  $\beta$  é obtido considerando especificamente o decaimento observado nas Figuras 5 e 6. Depois do platô constante, o ajuste das retas nos fornece o valor de  $\beta$ . O expoente  $z$  é obtido do comportamento de  $n_x$  vs.  $x_0$  e indicado na Figura 7. Esse ajuste de  $z$  para  $\gamma = 1$  que se refere ao caso do mapa logístico, é de  $z = -1,0058(0)$  e para  $\gamma = 2$  que corresponde ao mapa cúbico, é de  $z = -2,00004(5)$ . Note, portanto, que o expoente  $z$  depende de  $\gamma$ , ou seja, da não linearidade do mapa.

Esses comportamentos são descritos fenomenologicamente através de uma função homogênea generalizada, assunto que discutiremos na próxima seção.

### 2.3 O uso da Função Homogênea Generalizada para explicar os decaimentos ao ponto fixo

Funções Homogêneas Generalizadas são funções que satisfazem

$$f(x, y) = lf(l^a x, l^b y) \quad (2.8)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são valores arbitrários. Baseado nas informações das três hipóteses de escala, o comportamento de  $x$  pode ser descrito usando as funções homogêneas generalizadas [32]. O procedimento que será aplicado adiante foi usado previamente em [33], no qual foi verificada a presença de escala no modelo Fermi-Ulam.

### 2.3.1 Decaimento ao ponto fixo quando $\mu = 0$

O comportamento de  $x$  pode ser descrito por uma função homogênea generalizada nas variáveis  $n$  e  $x_0$ . Primeiramente, vamos tratar do caso em que consideramos  $\mu = 0$ . Usando uma função homogênea generalizada do tipo

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n) , \quad (2.9)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Sendo  $l$  o fator de escala, podemos escolher  $l^a x_0 = 1$ , logo:  $l = x_0^{-1/a}$ . Substituindo esse resultado na equação (2.9), obtemos

$$x(x_0, n) = x_0^{-1/a} x(1, x_0^{-b/a} n) . \quad (2.10)$$

Então, podemos assumir que o termo  $x(1, x_0^{-b/a} n)$  é constante para  $n \ll n_x$ . Comparando com a equação (2.10) podemos concluir que  $\alpha = -1/a$ .

Agora, escolhendo uma segunda hipótese na qual temos que  $l^b n = 1$  e, portanto  $l = n^{-1/b}$ , podemos substituir novamente na equação (2.9) obtendo

$$x(x_0, n) = n^{-1/b} x(n^{-a/b} x_0, 1) . \quad (2.11)$$

Supondo novamente que o termo  $x(n^{-a/b} x_0, 1)$  é constante para  $n \gg n_x$ , e comparando com a segunda hipótese de escala, concluímos que  $\beta = -1/b$ .

Finalmente, podemos comparar as duas expressões obtidas nas equações (2.10) e (2.11) do fator de escala, nos levando a expressão  $n_x = x_0^{\alpha/\beta}$ . Portanto, encontramos a relação  $n_x^\beta \sim x_0^\alpha$ . A terceira hipótese de escala nos conduz a obtenção dos três expoentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$  convergindo para a lei de escala

$$z = \frac{\alpha}{\beta} . \quad (2.12)$$

Note que ao conhecermos quaisquer dois expoentes, o terceiro também será conhecido, conforme podemos ver na equação (2.12).

De posse desses expoentes, podemos reescalar as variáveis  $n$  e  $x$  convenientemente na forma  $x \rightarrow x/x_0^\alpha$  e  $n \rightarrow n/x_0^z$  e então conseguimos a projeção de todas as curvas obtendo uma curva universal de  $x$  vs.  $n$ , como apresentado na Figura 8 (a) para  $\gamma = 1$  e na Figura 8 (b) para  $\gamma = 2$ .

### 2.3.2 Decaimento ao ponto fixo quando $\mu \neq 0$

Vamos agora observar o que ocorre em torno das vizinhanças do ponto de bifurcação. Nessas vizinhanças, observamos que o comportamento é caracterizado por

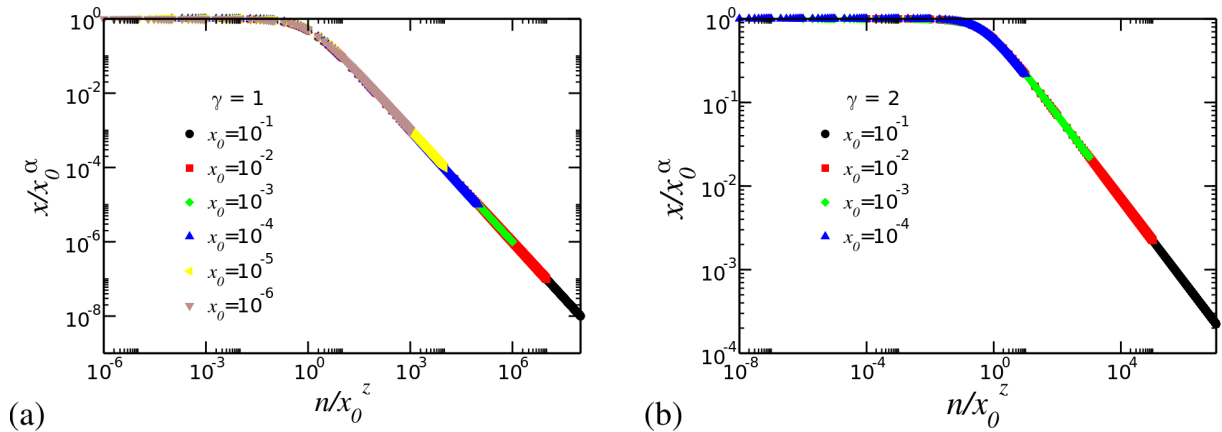


Figura 8: (a) Gráfico da superposição de todas as curvas mostradas na Figura 5 após uma conveniente reescala nos eixos para  $\gamma = 1$ . (b) Gráfico da superposição de todas as curvas mostradas na Figura 6 após uma conveniente reescala nos eixos para  $\gamma = 2$ .

um decaimento exponencial do tipo

$$x(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (2.13)$$

onde  $\tau$  é o tempo de relaxação ao estado estacionário descrito por

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (2.14)$$

e  $\delta$  é o expoente de relaxação. A Figura 9 (a) e (b) mostram o comportamento de  $\tau$  vs.  $\mu$  para diferentes valores de  $\gamma$ . Através do ajuste da reta, encontramos  $\delta \cong -1$  e este expoente é independente do valor escolhido para  $\gamma$ .

## 2.4 Uma abordagem analítica

Nesta seção abordaremos de forma analítica o que foi discutido anteriormente. Nossa abordagem compreende os dois casos:  $\mu = 0$  e  $\mu \neq 0$ .

### 2.4.1 Caso 1: $\mu = 0$

Consideraremos o caso em que  $\mu = 0$ , isto é,  $R = R_c = 1$ . Usando a equação do mapeamento (2.1), podemos substituir esta informação no mapa e obtermos

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}. \quad (2.15)$$



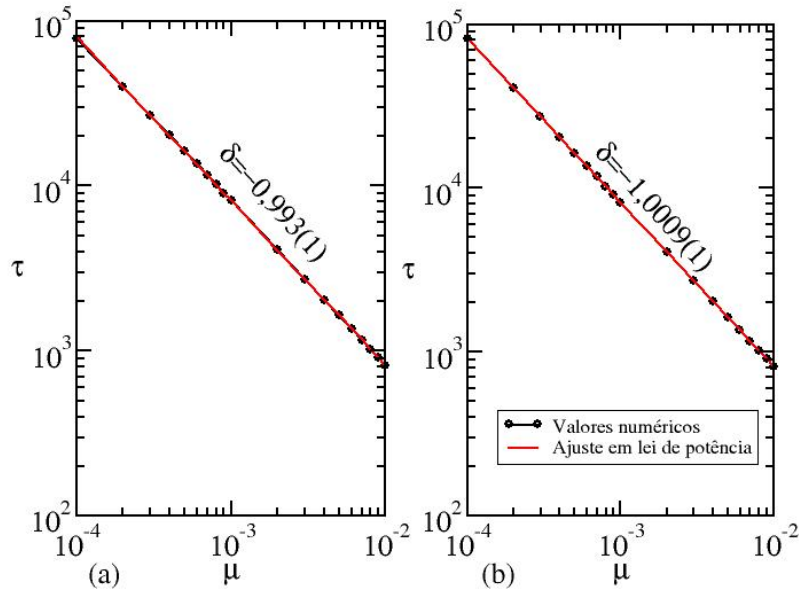


Figura 9: *Comportamento do tempo de relaxação ao ponto fixo para (a)  $\gamma = 1$  e (b)  $\gamma = 2$ .*

Muito próximo ao ponto fixo, podemos considerar que  $x$  seja uma variável contínua. Portanto, a equação (2.15) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n}, \\ &\approx \frac{dx}{dn} = -x^{\gamma+1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agrupando claramente os termos da equação (2.16):

$$\frac{dx}{x^{\gamma+1}} = -dn. \quad (2.17)$$

Tomando as condições iniciais de  $x_0$  para  $n = 0$ , e para um valor qualquer de  $n$  teremos um  $x(n)$  também genérico. Aplicando uma integração e usando esses limites, temos:

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx}{x^{\gamma+1}} = - \int_0^n dn'. \quad (2.18)$$

Resolvendo a equação (2.18) e, com algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte expressão:

$$x(n) = \frac{x_0}{[x_0^\gamma \gamma n + 1]^{1/\gamma}}. \quad (2.19)$$

Tendo encontrado a solução, podemos discutir a equação (2.19) observando os seguintes casos:

- Quando  $x_0^\gamma \gamma n \ll 1$ : Observando a equação (2.19), fica visível que neste caso

$$x(n) \cong x_0 , \quad (2.20)$$

correspondendo ao caso no qual  $n \ll n_x$ , abordado na primeira hipótese de escala. Comparando a equação (2.20) com a equação (2.5) oriunda desta hipótese, podemos concluir que  $\alpha = 1$ ;

- Quando  $x_0^\gamma \gamma n \gg 1$ : Da equação (2.19), podemos ver que:

$$x(n) \approx n^{-1/\gamma} . \quad (2.21)$$

Comparando a equação (2.6) da segunda hipótese de escala com a equação obtida (2.21), nos é permitido concluir que  $\beta = -1/\gamma$ , correspondendo ao regime em que  $n \gg n_x$ ; e

- Quando  $x_0^\gamma \gamma n = 1$ : Neste caso, consideramos que  $n = n_x$  e obtemos:

$$n_x \cong x_0^{-\gamma} . \quad (2.22)$$

Comparando a equação (2.7) com a equação (2.22), concluímos que  $z = -\gamma$ .

Nossa discussão resulta em obtermos os três expoentes críticos discutidos anteriormente em função do parâmetro e da não linearidade  $\gamma$ . Simulações numéricas foram realizadas para diferentes valores de  $\gamma$ , considerando números pares, ímpares, irracionais dentre outros conjuntos, com a finalidade de verificar a veracidade da lei de escala. Todas as simulações confirmam a validade tanto da lei de escala quanto do procedimento analítico.

#### 2.4.2 Caso 2: $\mu \neq 0$

Nesta seção discutiremos o que ocorre imediatamente antes do ponto de bifurcação, ou seja, em  $R < R_c$ . Usando a equação (2.1) podemos reescrevê-la da forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= x_n(R - 1) - Rx_n^{\gamma+1} , \\ &= \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \approx \frac{dx}{dn} , \\ &= x(R - 1) - Rx^{\gamma+1} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Lembrando que  $\mu = 1 - R$ , logo:  $(R - 1) = -\mu$ . Próximo ao estado estacionário  $x \cong 0$  considerando que  $\gamma > 1$ , o termo  $x^{\gamma+1}$  tende a zero mais rapidamente que o termo que está ligado ao  $x$ . Essa consideração nos permite chegar a uma aproximação para a equação

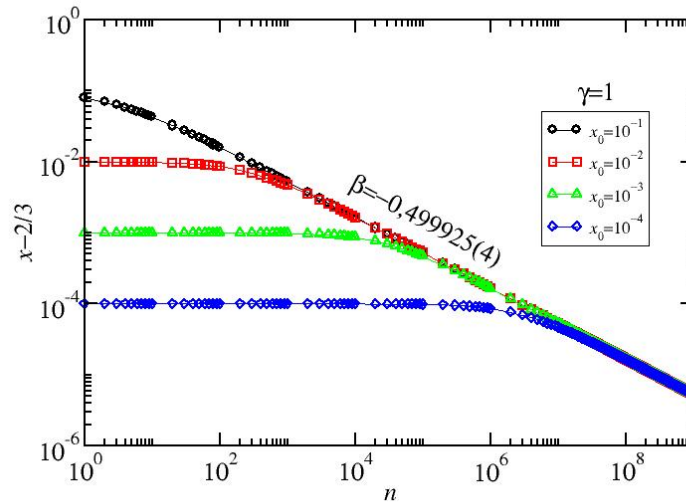


Figura 10: *Convergência ao ponto fixo em  $R = 3$  para  $\gamma = 1$ .*

diferencial

$$\frac{dx}{dn} = -x\mu . \quad (2.24)$$

Considerando os limites de integração sendo  $n = 0$  para  $x_0$  e  $n$  para  $x_n$ :

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx}{x} = -\mu \int_0^n dn' . \quad (2.25)$$

Após integrarmos a equação (2.25) e da reagrupação dos termos, obtemos:

$$x(n) = x_0 e^{-\mu n} . \quad (2.26)$$

Comparando a equação (2.26) com as equações (2.13) e (2.14), podemos concluir que o expoente  $\delta = -1$ . Estes resultados estão de acordo com as simulações obtidas nas Figuras 9 (a) e (b).

## 2.5 Bifurcação de duplicação de período

Investigamos também a convergência ao estado estacionário na bifurcação de duplicação de período, que ocorre quando  $R = 3$  para  $\gamma = 1$ . Neste caso, foi observado nas simulações numéricas que o decaimento ao estado estacionário tem um expoente crítico  $\beta = -1/2$ , de acordo com a Figura 10. Além disso, observamos que, neste caso, o expoente  $\beta$  independe de  $\gamma$ , ou seja, independe da não linearidade do mapa.

Nesta seção, faremos uma descrição analítica da convergência ao estado estacionário na bifurcação de duplicação de período para esta mesma família de mapeamentos unidimensionais. Mostraremos que, no ponto de bifurcação, a convergência ao ponto fixo

é descrita através de uma função homogênea generalizada com três expoentes fixos bem definidos:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ . Veremos que os expoentes  $z$  e  $\beta$  dependem da não linearidade do mapeamento, enquanto que o expoente  $\alpha$  é universal.

No ponto de bifurcação, a convergência é caracterizada por uma função homogênea generalizada. Próximo a esse ponto a evolução ao ponto fixo é dada por um decaimento exponencial. Nossa ideia nesta seção é complementar os resultados obtidos para o estado estacionário na primeira bifurcação do mapeamento (2.1) aplicando o mesmo procedimento analítico para a bifurcação de duplicação de período.

### 2.5.1 O mapa e os procedimentos ao estado estacionário

Vamos reescrever o mapeamento e seus pontos fixos. Então, recapitulando o início do capítulo, temos:

$$x_{n+1} = F(R, x_n) = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (2.27)$$

onde  $\gamma \geq 1$ ,  $R$  é parâmetro de controle e  $x$  a variável dinâmica. A solução de  $x_{n+1} = x_n = x^*$  nos fornece os pontos fixos.

Quando  $\gamma$  é um número par, existem três pontos fixos: um em  $x^* = 0$  que é estável (assintoticamente estável) para  $R \in [0, 1)$  e dois outros em  $x^* = \pm[1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , estáveis para  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . A bifurcação em  $R = 1$  é chamada de supercrítica de forquilha ou *pitchfork*.

Quando  $\gamma$  é um número ímpar (ou irracional, etc...), existem dois pontos fixos: um em  $x^* = 0$  que é estável e outro em  $x^* = [1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , estável para  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . A bifurcação em  $R = 1$  é chamada de transcítica.

Feita a revisão do início do capítulo, nosso objetivo agora é descrever a convergência ao ponto fixo na duplicação de período. Esse ponto é obtido quando:

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} = R - (1 + \gamma)Rx^\gamma = -1, \quad (2.28)$$

onde o valor  $-1$  marca o “*flip incipiente*” no ponto de bifurcação de duplicação de período. Substituindo o ponto fixo onde ocorre a bifurcação, ou seja, em  $x^* = [1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , vamos obter o parâmetro para o qual ocorre a primeira bifurcação de duplicação de período, dada por

$$R_c = \frac{2 + \gamma}{\gamma}. \quad (2.29)$$

Na bifurcação de duplicação de período, as órbitas periódicas são obtidas pela

segunda iteração do mapa. Portanto, a expressão será:

$$\begin{aligned} x_{n+2} = F_R^{(2)}(x_n) &= Rx_{n+1}(1 - x_{n+1}^\gamma) \\ &= R[Rx_n(1 - x_n^\gamma)] \left[ 1 - (Rx_n(1 - x_n^\gamma))^\gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nossa ideia é expandir a equação (2.30) em série de Taylor em torno das variáveis  $x_n = x^* + y_n$  e  $R = R_c + \mu$ , onde  $y_n$  corresponde a distância entre o ponto fixo e a n-ésima iterada e  $\mu$  é a distância na coordenada do parâmetro de controle onde ocorre a bifurcação. Então:

$$\begin{aligned} F_R^{(2)}(x_n) &= \\ &= j_0 + (x_n - x^*)j_1 + (R - R_c)j_2 + (x_n - x^*)^2j_3 + \\ &+ (R - R_c)^2j_4 + (x_n - x^*)(R - R_c)j_5 + (x_n - x^*)j_6 + \\ &+ (R - R_c)^3j_7 + (x_n - x^*)^2(R - R_c)j_8 + \\ &+ (x_n - x^*)(R - R_c)^2j_9 + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde os termos auxiliares são:

$$j_0 = F_R^{(2)}(x^*) = \left[ \frac{2}{2 + \gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.32)$$

$$j_1 = \left. \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right|_{x^*, R_c} = 1, \quad (2.33)$$

$$j_2 = \left. \frac{\partial F^{(2)}}{\partial R} \right|_{x^*, R_c} = 0, \quad (2.34)$$

$$j_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \right|_{x^*, R_c} = 0, \quad (2.35)$$

$$j_4 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial R^2} \right|_{x^*, R_c}, \quad (2.36)$$

$$j_5 = \left. \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x \partial R} \right|_{x^*, R_c} = 2\gamma, \quad (2.37)$$

$$j_6 = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right|_{x^*, R_c}, \quad (2.38)$$

$$j_7 = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial R^3} \right|_{x^*, R_c}, \quad (2.39)$$

$$j_8 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^2 \partial R} \right|_{x^*, R_c}, \quad (2.40)$$

$$j_9 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x \partial R^2} \right|_{x^*, R_c} = \gamma^2. \quad (2.41)$$

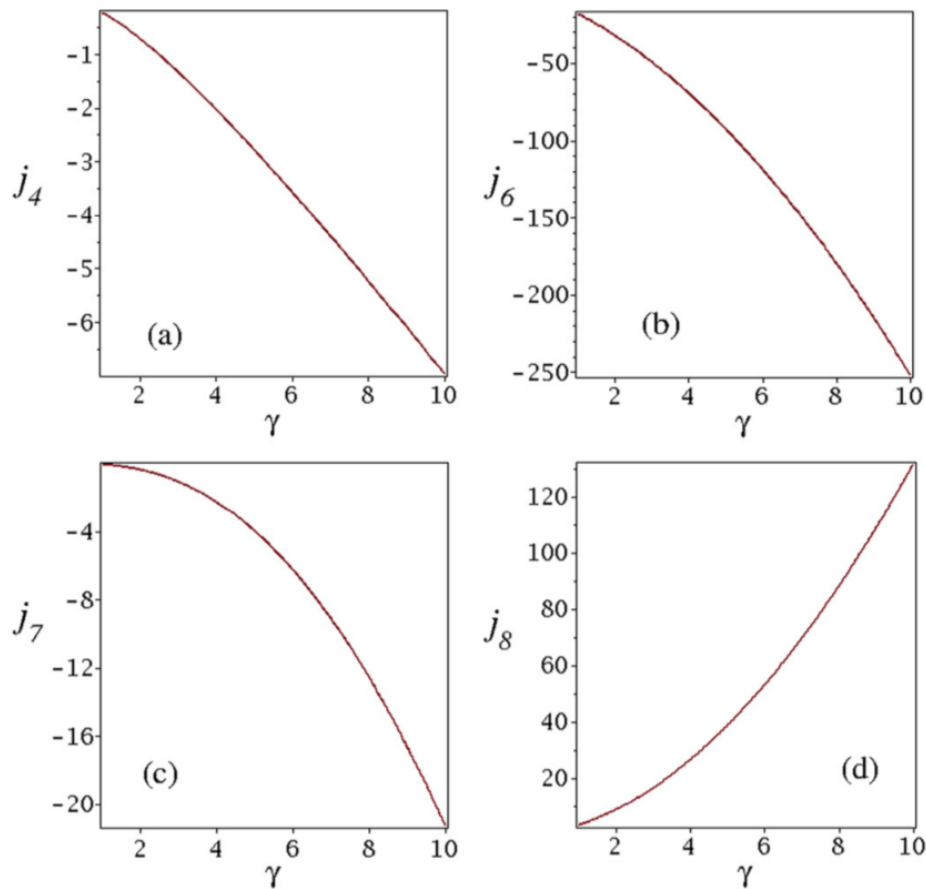


Figura 11: Gráficos do comportamento de  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  e  $j_8$  como função do parâmetro  $\gamma$ . Retirada da referência [34].

Considerando as expressões  $x_n = x^* + y_n$  e  $R = R_c + \mu$  e a expansão de  $F_R^{(2)}(x_n)$  podemos reescrever a Eq. (2.30) convenientemente como

$$\begin{aligned} G(y_n, \mu) &= F_R^{(2)}(x_n) - F_{R_c}^{(2)}(x^*) , \\ &\cong y_n + \mu^2 j_4 + 2\gamma\mu y_n + y_n^3 j_6 + \mu^3 j_7 + y_n^2 \mu j_8 + y_n \mu^2 \gamma^2 . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Agora começaremos a discussão das propriedades para a convergência ao ponto fixo exatamente no ponto de bifurcação. Logo, estamos considerando que  $\mu = 0$ . Com isto, temos que:

$$G(y_n, 0) = y_n + y_n^3 j_6 . \quad (2.43)$$

Sendo  $G(y_n, 0)$  a distância entre o ponto fixo e a  $n$ -ésima iterada,  $y$ , então podemos considerar a seguinte aproximação:

$$G(y_n, 0) - y_n \cong \frac{dy}{dn} = y^3 j_6 , \quad (2.44)$$

$\gamma$	1	2	3	4	5
$j_4$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{9}{25} \sqrt[3]{50}$	$-\frac{8}{9} \sqrt[4]{27}$	$-\frac{25}{49} \sqrt[5]{4802}$
$j_6$	-18	-32	$-\frac{40}{3} \sqrt[3]{50}$	$-40\sqrt{3}$	$-28 \sqrt[5]{392}$
$j_7$	$-\frac{4}{81}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{36}{125} \sqrt[3]{50}$	$-\frac{80}{81} \sqrt[4]{27}$	$-\frac{250}{343} \sqrt[5]{4802}$
$j_8$	3	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt[3]{20}$	$20\sqrt[4]{3}$	$15\sqrt[5]{112}$

Figura 12: Tabela de valores para  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  e  $j_8$  para valores diferentes do parâmetro  $\gamma$ . Retirada da referência [34].

Portanto, devemos resolver a equação diferencial Eq. (2.44) integrando de modo que

$$\int_{y_0}^{y(n)} \frac{dy}{y^3} = j_6 \int_0^n dn \quad . \quad (2.45)$$

Resolvendo a integral da Eq. (2.45), encontramos a expressão

$$y(n) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2j_6 y_0^2 n}} \quad . \quad (2.46)$$

O termo negativo no denominador pode parecer estranho à primeira vista. No entanto, se lembrarmos que  $j_6 < 0$  fica permitido reescrever a Eq. (2.46) da forma

$$y(n) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2|j_6|y_0^2 n}} \quad . \quad (2.47)$$

Podemos discutir através da Eq. (2.47) os resultados numéricos exibidos na Figura 10. Da Figura, notamos dois tipos distintos de comportamento: um para um número pequeno de iterações e outro para um número grande de iterações, sendo marcado a mudança entre os dois regimes por um número de *crossover*,  $n_x$ . Fazendo um procedimento semelhante ao que foi realizado para a primeira bifurcação, a primeira lei escala surge da condição

$$2|j_6|y_0^2 n \ll 1 \quad , \quad (2.48)$$

na qual obtemos

$$y(n) \propto y_0 \quad . \quad (2.49)$$

Comparando com a hipótese de escala proposta em Eq. (2.5), encontramos

$$y(n) \propto y_0^\alpha \quad , \quad (2.50)$$

o que nos possibilita concluir que  $\alpha = 1$ . Este expoente é universal para esta família de mapeamentos discutida neste capítulo e não depende da não linearidade, ou seja, de  $\gamma$ .

A segunda lei de escala é obtida considerando a condição

$$2|j_6|y_0^2n \gg 1 \quad , \quad (2.51)$$

e, quando incorporada à Eq. (2.47), encontramos

$$y(n) \propto \frac{1}{\sqrt{2|j_6|}} n^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (2.52)$$

A segunda hipótese de escala enunciada na Eq. (2.6) argumenta que

$$y(n) \propto n^\beta \quad . \quad (2.53)$$

Então, analiticamente encontramos o expoente  $\beta = -1/2$ . Este expoente está de acordo com resultado da simulação apresentado na Figura (10), cujo expoente é de  $\beta = -0,499925(4)$ . Finalmente, o expoente  $z$  é extraído da condição

$$2|j_6|y_0^2n = 1 \quad . \quad (2.54)$$

Esta condição leva a mudança de regime do platô constante para o regime de decaimento. Portanto, obtemos:

$$n_x = \frac{1}{2|j_6|y_0^2} \quad (2.55)$$

$$n_x = y_0^{-2} \quad . \quad (2.56)$$

A última hipótese de escala, na Eq. 2.7, propõe que

$$n_x \propto y_0^z \quad . \quad (2.57)$$

Numericamente o resultado obtido e mostrado na Figura 7 o expoente é  $z = -2,00004(5)$ , corroborando com o resultado encontrado analiticamente.

Agora, discutiremos o caso em que  $\mu = 0$  e, para tal, devemos considerar, da Eq. (2.42), que:

$$G(y_n, \mu) \cong y_n + 2\gamma y_n \mu + j_6 y_n^3 \quad . \quad (2.58)$$

Transformando a equação de diferenças numa equação diferencial, temos que

$$G(y_n, \mu) - y_n \cong \frac{dy}{dn} = y(2\gamma\mu + j_6 y^2) \quad . \quad (2.59)$$



Logo, devemos resolver a integração

$$\int_{y_0}^{y(n)} \frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = \int_0^n dn . \quad (2.60)$$

Resolvendo a integração e agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} \left[ 1 + \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (2.61)$$

Para uma maior clareza da Eq. (2.61) é conveniente fazermos um expansão em Série de Taylor. Portanto, temos:

$$y(n) \cong \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right] . \quad (2.62)$$

Considerando apenas a potência linear de  $\mu$ , desprezando os termos de ordem  $\mu\sqrt{\mu}$ , a Eq. (2.62) pode ser escrita como

$$y(n) - \sqrt{\frac{2\gamma\mu}{|j_6|}} \cong \sqrt{\frac{\gamma\mu}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n} . \quad (2.63)$$

A Eq. (2.63) permite uma comparação com a Eq. (2.14), de onde extraímos que

$$y(n) \propto e^{-4\gamma\mu n} , \quad (2.64)$$

na qual a hipótese de escala é:

$$y(n) \propto e^{-\frac{n}{\tau}} , \quad (2.65)$$

onde  $\tau \propto \mu^\delta$ . Comparando as Eq. (2.64) e (2.65) podemos concluir que  $\delta = -1$ , confirmando os dados numéricos obtidos da simulação exibida na Figura (9).

### Conclusões Parciais

Ao longo deste capítulo consideramos a convergência ao estado estacionário para uma família de mapeamentos unidimensionais no ponto de bifurcação e vizinhanças. Investigamos o comportamento na bifurcação transcítica, na supercrítica de forquilha e duplicação de período. Usamos uma descrição através da observação adquirida das simulações numéricas exibindo um comportamento inicialmente constante e, após um determinado número de iterações, um decaimento. A partir dessa observação, pudemos supor três hipóteses de escala afim de explicar esse comportamento. Fazendo uso da função homogênea generalizada, obtivemos a relação entre três expoentes críticos gerando

uma lei de escala do tipo  $z = \alpha/\beta$ . Próximo ao ponto de bifurcação a convergência ao ponto fixo é dada por um decaimento exponencial, cujo o tempo de relaxação é descrito por uma lei de potência do tipo  $\tau \propto \mu^\delta$ . Encontramos  $\delta = -1$  que independe da não linearidade do mapeamento. Estes resultados fenomenológicos são confirmados por uma descrição analítica válida para qualquer  $\gamma \geq 1$ . Para a bifurcação de duplicação de período encontramos os expoentes  $\alpha = 1$ ,  $\beta \cong -1/2$ ,  $z = -2$  e são independentes da não linearidade do mapa.

### 3 PROPRIEDADES DE ESCALA EM MAPEAMENTOS BIDIMENSIONAIS HAMILTONIANOS

Neste capítulo trataremos de uma família de mapeamentos hamiltonianos bidimensionais que são descritos em termos das variáveis ângulo ( $\theta$ ) e ação ( $I$ ), consideraremos que a variável ângulo diverge quando temos uma ação muito pequena, ou seja, no limite em que a variável ação tende a zero. Nosso interesse está na transição de integrabilidade para não integrabilidade. Portanto, focaremos na transição de fase de integrável para não integrável onde espaço de fases é do tipo misto. Um espaço de fases deste tipo contém uma rica dinâmica, exibindo ilhas de periodicidade, envoltas em uma mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning*. O mar de caos preenche todo o espaço de fases, porém não penetra dentro das ilhas de estabilidade e também não cruza uma região de curvas invariantes. Por outro lado, as curvas invariantes funcionam como uma barreira física que impedem a passagem de órbitas caóticas. Quando as curvas invariantes são destruídas, o mar de caos cresce ilimitadamente levando o sistema a uma difusão ilimitada da variável ação. Usaremos o formalismo de lei de escala para caracterizar o comportamento das propriedades estatísticas do mar de caos. Por último, faremos uma descrição fenomenológica e também analítica para o comportamento da média da ação e obteremos uma lei de escala que controla a transição integrabilidade do sistema. O mesmo formalismo será estendido para outros sistemas incluindo mapas dissipativos dando continuidade aos trabalhos da tese.

#### 3.1 Mapeamentos Hamiltonianos e parâmetros de controle

Consideraremos uma Hamiltoniana genérica [30] que descreve um sistema dinâmico de dois graus de liberdade. Essa Hamiltoniana é composta por duas partes, dada por:

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) \quad (3.1)$$

A parte integrável é denotada por  $H_0(I_1, I_2)$  enquanto que a parte não integrável é dada por  $H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$  e controlada por um parâmetro de controle  $\epsilon$ , cujo parâmetro controla a transição de integrável para não integrável no sistema. Quando  $\epsilon = 0$  o sistema é integrável, ou seja, a quantidade de constantes do sistema é igual ao número de graus de liberdade e, para  $\epsilon \neq 0$ , o sistema é dito ser não integrável. Neste último caso, o espaço de fases gerado é misto, composto por ilhas de periodicidade rodeadas por um mar de caos limitado por um conjunto de curvas invariantes. Essas curvas invariantes são do tipo *spanning*, invariantes por iterada e atuam como barreiras impedindo que o mar de caos

se difunda ilimitadamente.

Como  $H$  não depende do tempo, podemos eliminar a variável  $I_2$ , restando três variáveis. Aplicando a seção de Poincaré [30] podemos reduzir o fluxo tridimensional para uma aplicação de um mapeamento bidimensional no plano  $I_1 \times \theta_1$  para  $\theta_2$  constante. Então, o mapeamento genérico pode ser escrito

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + k(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde  $h(\theta_n, I_{n+1})$ ,  $k(I_{n+1})$  e  $p(\theta_n, I_{n+1})$  são funções não lineares de suas variáveis. O índice  $n$  é inteiro e denota a  $n$ -ésima iterada do mapa (3.2).

O mapeamento da Eq. (3.2) preserva área no espaço de fase [35] e, portanto, o determinante da matriz jacobiana é igual a 1. De fato, podemos escrever os coeficientes da matriz da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= 1 + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon \left[ \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right]}, \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \\ &= \left[ \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ &= 1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \left[ \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dados os coeficientes, o determinante da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  é dado por:

$$\text{Det} \mathbf{J} = \frac{1 + \epsilon \left[ \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \right]}{1 - \epsilon \left[ \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right]}. \quad (3.5)$$

Podemos perceber que o mapeamento preserva a área no espaço de fases somente quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0 . \quad (3.6)$$

Em alguns casos [30] é conveniente considerar  $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ . Considerando uma função periódica para  $h$ , do tipo:  $h(\theta_n) = \sin(\theta_n)$ , diferentes aplicações são encontradas na literatura, na qual podemos destacar:

- $k(I_{n+1}) = I_{n+1}$ : descreve o mapa padrão ou mapa *standard* [28];
- $k(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$ : obtemos o modelo Fermi-Ulam (FUM - Fermi-Ulam Model) [36];
- $k(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$ : onde  $\zeta$  é uma constante, descreve o modelo *bouncer* [37];
- No caso:

$$k(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - \frac{1}{\zeta^2}}) & \text{se } I_{n+1} > \frac{1}{\zeta} , \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + k(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) . & \end{cases}$$

com  $\zeta$  constante, recuperamos o modelo Fermi-Ulam híbrido [38, 39, 40]; e

- $k(I_{n+1}) = I_{n+1} + \zeta I_{n+1}^2$ , obtemos o mapa logístico *twist* [41].

Consideraremos para este trabalho que  $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$  e  $k = \frac{1}{I_{n+1}^\gamma}$  com  $\gamma > 0$  e  $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ . Fazendo tais considerações, podemos reescrever o mapeamento (3.2) como:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left[ \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right] \text{ mod}(2\pi) \end{cases} . \quad (3.7)$$

Quando  $\epsilon = 0$  o espaço de fases do mapeamento (3.7) apresenta uma dinâmica regular, na qual nos fornece um regime periódico ou quase periódico. Para  $\epsilon \neq 0$  a regularidade é destruída e o espaço de fases exibe uma composição mista. Dependendo das condições iniciais será mais visível na dinâmica exibida pelo espaço de fase caos ou regularidade, ou ambos, acompanhado pela presença de ilhas de periodicidade, podendo exibir ainda curvas invariantes que limitam o mar de caos do sistema. Um espaço de fase típico para o mapeamento (3.7) é mostrado na Figura 13.

Um aspecto interessante nesta dinâmica é que quando  $I$  é suficientemente pequeno, o termo  $\left[ \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right]$  fica descorrelacionado com o termo  $\theta_{n+1}$ , levando o  $\sin(\theta_n)$  a se comportar como uma função randômica e produzindo difusão na variável ação  $I$ .

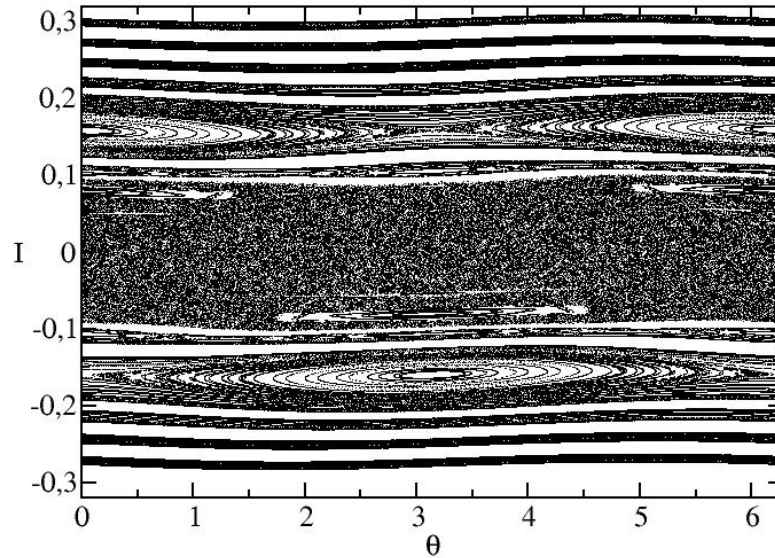


Figura 13: *Esboço do espaço de fase para o mapeamento (3.7). Consideramos para a construção deste gráfico os parâmetros  $\epsilon = 10^{-2}$  e  $\gamma = 1$ .*

Quando a ação cresce, aparece uma correlação entre  $\theta_n$  e  $\theta_{n+1}$  produzindo uma regularidade no espaço de fase. Para valores elevados da ação, é observada a existência de curvas invariantes do tipo *spanning*. A primeira curva invariante funciona como um limite no qual não permite que órbitas que pertençam a região do mar de caos ultrapassem essa fronteira.

O comportamento da média da ação como função do número de iterações  $n$  é o observável mais importante que queremos descrever neste capítulo. Quando  $\epsilon = 0$  a média da ação é uma constante e não muda com a função  $n$ , uma consequência de ser integrável. No entanto, quando  $\epsilon \neq 0$  o cenário muda completamente e o sistema apresenta uma região caótica na qual tem sua difusão limitada, cujo comportamento observaremos ao analisarmos a variável  $I$  em função de  $n$ ,  $I_0$  e  $\epsilon$ . Observamos também que existe simetria no espaço de fase para  $\epsilon = 0$ , particularmente na integrabilidade, e é quebrada quando  $\epsilon \neq 0$ , levando o espaço de fase a conter partes não integráveis. Isto é o que caracteriza a transição de integrável para não integrável.

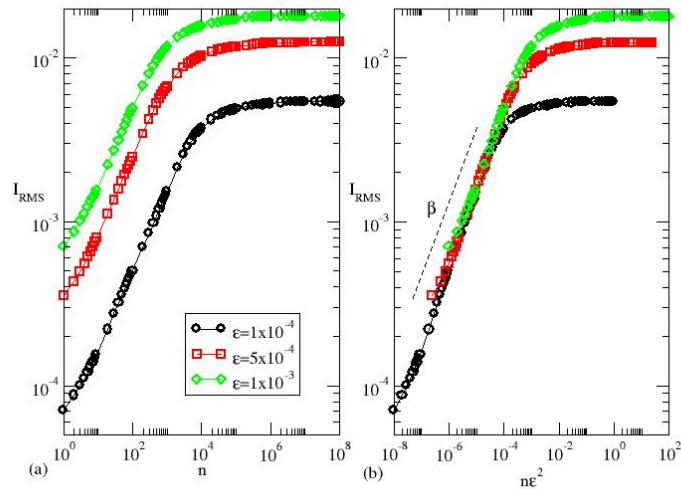


Figura 14: a) Gráfico de  $I_{RMS}$  vs.  $n$  para três parâmetros de controle diferentes. b) O mesmo gráfico de (a) após uma transformação  $n \rightarrow n\epsilon^2$ .

### 3.2 Uma descrição fenomenológica para os expoentes críticos e lei de escala

Discutiremos nesta seção as propriedades de escala da ação quadrática média, medida no mar de caos, usando uma descrição fenomenológica cuja equação será descrita

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2 \right], \quad (3.8)$$

onde  $M$  corresponde a média do ensemble de condições iniciais da variável ângulo de  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $n$  é o número de iterações do mapa. É válido ressaltar que o somatório em  $j$  é tomado ao longo da órbita enquanto que o somatório em  $i$  é realizado sobre o ensemble das condições iniciais. Para investigarmos a difusão na ação quadrática média iniciaremos com uma condição inicial muito pequena na ação, por exemplo  $I_0 = 10^{-3}\epsilon$ , na qual  $\epsilon$  é também muito pequeno, garantindo que estejamos próximo a transição de integrabilidade para não integrabilidade. Esta última condição garante um rendimento máximo na difusão da ação. Pelo fato de existirem curvas invariantes tipo *spanning*, a ação se difunde visitando “todos” os estados acessíveis do espaço de fases e então satura num valor constante. As Figuras 14 e 15 mostram o comportamento de  $I_{RMS} = \sqrt{\bar{I}^2}$  vs.  $n$  para três diferentes parâmetros de controle. O índice em  $I_{RMS}$  significa *Root Mean Square* indicando o valor quadrático médio da variável ação.

A Figura 14 mostra que as curvas de  $I_{RMS}$  para cada condição inicial diferente denotam um comportamento similar uma das outras. Elas começam a crescer de acordo com o crescimento de  $n$  e, num determinado ponto, elas mudam esse regime passando a

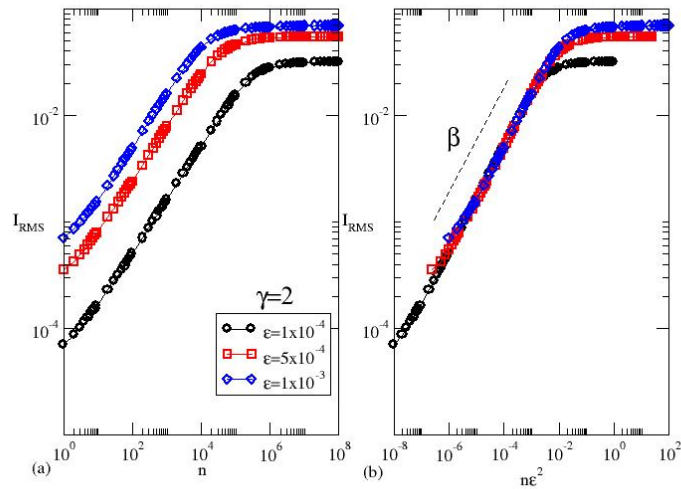


Figura 15: a) Gráfico de  $I_{RMS}$  vs.  $n$  para três parâmetros de controle diferentes. b) O mesmo gráfico de (a) após uma transformação  $n \rightarrow n\epsilon^2$ .

assumir um comportamento de saturação marcado por um platô constante. A esse ponto onde ocorre a mudança de regime chamamos de *crossover*.

Aplicando a transformação empírica  $n \rightarrow n\epsilon^2$  podemos observar que todas as curvas colapsam juntas para valores pequenos de  $n$ . Aqui, esta transformação foi realizada empiricamente; no entanto, veremos mais adiante uma outra forma onde essa transformação será obtida naturalmente. No ponto onde o regime muda seu comportamento de crescimento para um platô constante, fica caracterizado o número de iteração de *crossover*  $n_x$ . Usaremos um procedimento similar ao utilizado no capítulo 2 para analisarmos fenomenologicamente o comportamento apresentado na Figura 14 através das hipóteses de escala.

Portanto, vamos supor que:

1. Quando  $n \ll n_x$ , as curvas são descritas como

$$I_{RMS} \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (3.9)$$

onde  $\beta$  é chamado de expoente de aceleração;

2. Para  $n \gg n_x$ , todas as curvas se direcionam ao regime de saturação no qual o platô constante é dado por

$$I_{RMS,SAT} \propto \epsilon^\alpha, \quad (3.10)$$

e  $\alpha$  é chamado de expoente de saturação;



3. Por fim, o número de iterações que marca o *crossover* é dado por:

$$n_x \propto \epsilon^z , \quad (3.11)$$

no qual  $z$  é chamado de expoente de *crossover*.

Utilizaremos a função homogênea para descrever o comportamento destas hipóteses.

### 3.3 Função homogênea generalizada aplicada ao comportamento de $I_{RMS}$

Baseado nas três hipóteses da seção anterior, utilizaremos a função homogênea dada por

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = l I_{RMS}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon) , \quad (3.12)$$

para descrever o comportamento de  $I_{RMS}$ , onde  $l$  é o fator de escala,  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Sendo  $l$  o fator de escala, podemos escolher, portanto:

$$l^a n\epsilon^2 = 1 \Rightarrow l = (n\epsilon^2)^{-1/a} . \quad (3.13)$$

Substituindo a equação (3.13) na equação (3.12), obtemos:

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-1/a} I_{RMS}(1, (n\epsilon^2)^{-b/a} \epsilon) , \quad (3.14)$$

chamando

$$I_{RMS}(1, (n\epsilon^2)^{-b/a} \epsilon) = I_A((n\epsilon^2)^{-b/a} \epsilon) , \quad (3.15)$$

então:

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-1/a} I_A((n\epsilon^2)^{-b/a} \epsilon) , \quad (3.16)$$

considerando que  $n \ll n_x$ . Comparando a equação (3.16) com a equação (3.10), onde assumimos  $I_A$  constante para  $n \ll n_x$ , que é a primeira hipótese de escala, obtemos o expoente:

$$\beta = -\frac{1}{a} . \quad (3.17)$$

Nossas simulações fornecem um expoente  $\beta \cong 1/2$ , logo  $a = -2$ .

Agora, escolhendo

$$l^b \epsilon = 1 \Rightarrow l = \epsilon^{-1/b} , \quad (3.18)$$

e substituindo a equação (3.18) na equação (3.12) obteremos:

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-1/b} I_{RMS}(\epsilon^{-a/b} n\epsilon^2, 1) , \quad (3.19)$$

para o qual

$$I_{RMS}(\epsilon^{-a/b}n\epsilon^2, 1) = I_B(\epsilon^{-a/b}n\epsilon^2) . \quad (3.20)$$

Portanto, usando as equações (3.19) e (3.20), podemos escrever:

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-1/b}I_B(\epsilon^{-a/b}n\epsilon^2) , \quad (3.21)$$

para o regime onde  $n \gg n_x$ . Comparando a equação (3.21) com a segunda hipótese de escala dada pela relação da equação (3.9) e assumindo  $I_B$  constante para  $n \gg n_x$ , chegaremos ao expoente:

$$\alpha = -\frac{1}{b} . \quad (3.22)$$

Dos resultados da simulação numérica, nesse regime de platô constante, podemos concluir que  $\alpha = 1$  e, conseqüentemente,  $b = -1$ .

Para o expoente  $z$  podemos obtê-lo combinando as equações (3.13) e (3.18) que são expressões distintas para o fator de escala  $l$ , temos,

$$(n\epsilon^2)^{-1/a} = \epsilon^{-1/b} , \quad (3.23)$$

e, substituindo as relações para  $\beta$  e  $\alpha$ , a seguinte relação é obtida:

$$\begin{aligned} (n\epsilon^2)^\beta &= \epsilon^\alpha \\ n_x &= \epsilon^{\frac{\alpha}{\beta}-2} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comparando a equação (3.24) com a equação (3.11) da terceira hipótese de escala, concluímos que:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2 . \quad (3.25)$$

Note que a equação (3.25) envolve os três expoentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ , definindo uma lei de escala. Conhecendo-se pelo menos dois expoentes o terceiro é obtido naturalmente.

O expoente de aceleração  $\beta$  é obtido fazendo-se um ajuste em lei de potência para o regime de crescimento, ou seja, em  $n \ll n_x$ . O ajuste numérico obtido para este expoente foi de  $\beta \cong 1/2$ . Já o expoente crítico  $\alpha$  é obtido no regime em que  $n \gg n_x$  para valores elevados de  $n$  e para valores onde a média da ação é dada aproximadamente pelo regime de saturação. Estamos considerando aqui que o parâmetro  $\epsilon$  é muito pequeno desde a transição de fase e, para obtermos o expoente crítico  $\alpha$ , mantivemos fixo o parâmetro  $\gamma$  e variamos  $\epsilon$  num intervalo de  $\epsilon \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ .

A Figura 16 (a) mostra o comportamento de  $I_{RMS,SAT}$  vs.  $\epsilon$  para o parâmetro  $\gamma = 1$ . Neste gráfico, obtivemos o expoente crítico através de uma ajuste em lei de potência de  $\alpha = 0,519(4)$ . Para a Figura 16 (b) temos o comportamento também de

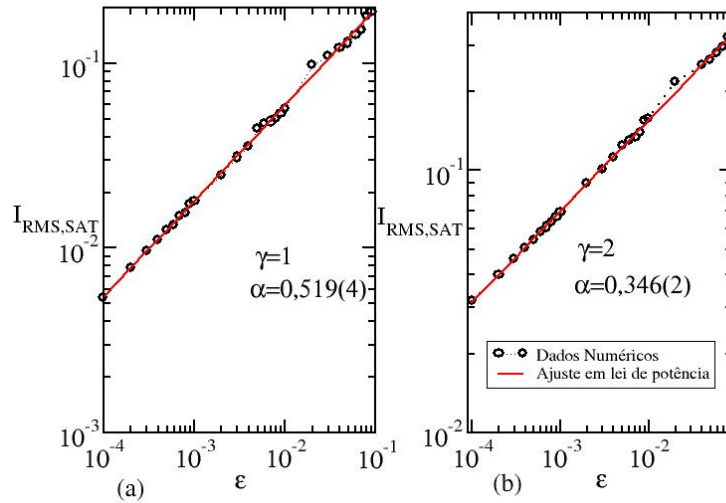


Figura 16: Comportamento de  $I_{RMS}$  vs.  $\epsilon$  para: (a)  $\gamma = 1$  onde o expoente crítico obtido é  $\alpha = 0,519(4)$ ; (b)  $\gamma = 2$  cujo expoente crítico obtido é  $\alpha = 0,346(2)$ .

$I_{RMS,SAT}$  vs.  $\epsilon$  agora para o parâmetro  $\gamma = 2$  e, para este caso, obtivemos um ajuste em lei de potência de  $\alpha = 0,346(2)$ .

No caso do expoente crítico  $z$  sua obtenção se dá através do gráfico  $n_x$  vs.  $\epsilon$  para um determinado valor fixo de  $\gamma$ . De fato,  $n_x$  corresponde ao ponto onde a curva de  $I_{RMS}$  muda de regime, passando do regime de crescimento para o regime de saturação. A Figura 17 mostra esse comportamento para  $\gamma = 1$ . Obtivemos através de simulação numérica o expoente crítico  $z = -1,12(1)$  para  $\gamma = 1$ , sendo estes resultados bem compatíveis com a equação (3.25) da lei de escala. Para a Figura 18, na qual o parâmetro é  $\gamma = 2$ , obtivemos também por simulação numérica um expoente crítico  $z = -1,30(2)$ , cujos resultados também estão compatíveis com o comportamento da lei de escala.

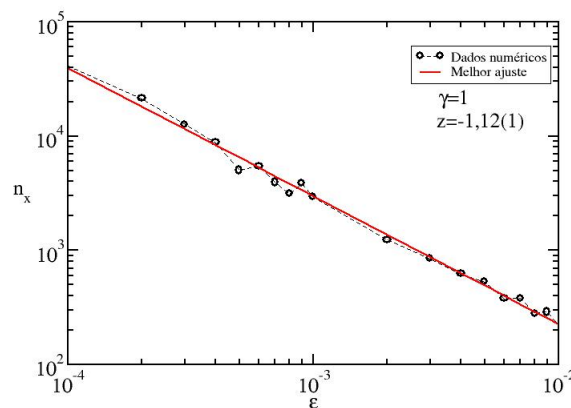


Figura 17: Comportamento de  $n_x$  vs.  $\epsilon$   $\gamma = 2$ . Obtivemos dos dados numéricos o expoente  $z = -1,12(1)$ .

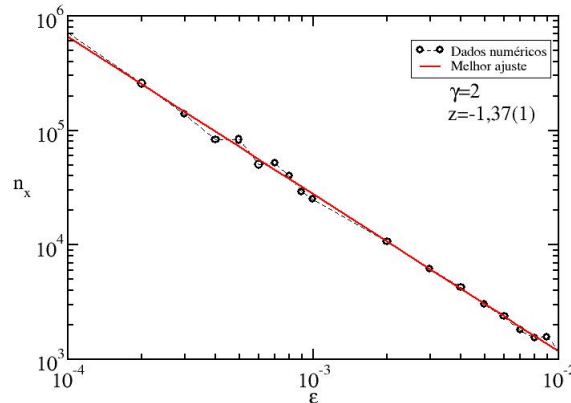


Figura 18: Comportamento de  $n_x$  vs.  $\epsilon$  para  $\gamma = 2$ . Da simulação, obtivemos  $z = -1,37(1)$ .

O conjunto de expoentes críticos obtidos na região caótica, próxima a transição de integrabilidade para não integrabilidade, é invariante de escala. Para visualizarmos isso, podemos agrupar todas as curvas de  $I_{RMS}$  obtidas para diferentes  $\epsilon$  em uma mesma curva universal, através das transformações  $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^\alpha$  e  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . A Figura 19 mostra todas as curvas plotadas em uma única curva universal após esta transformação de escala para  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 2$ .

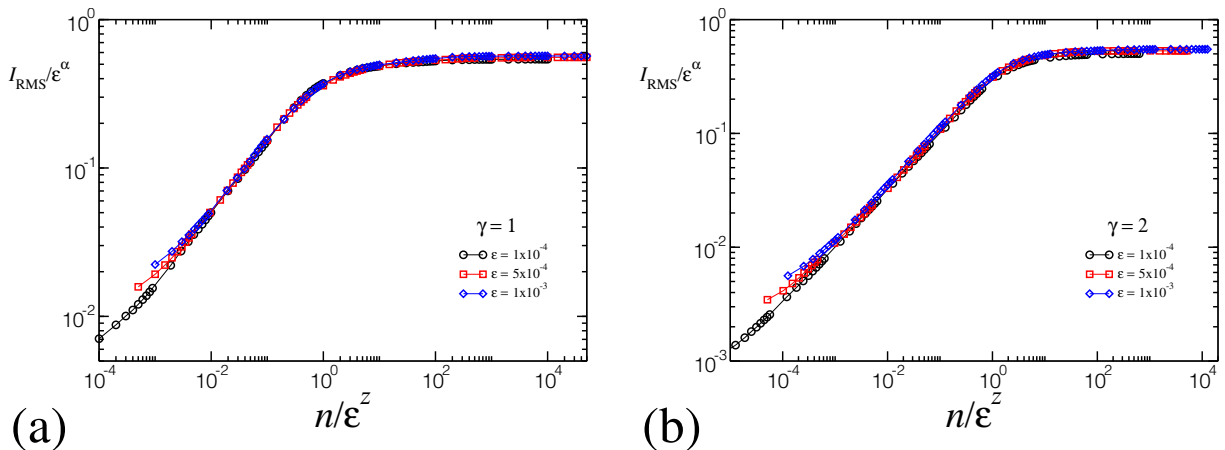


Figura 19: Sobreposição de todas as curvas mostradas na Figura 14 plotadas numa mesma curva universal após as transformações  $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^\alpha$  e  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . O parâmetro usado foi  $\gamma = 1$ . Em (a) para  $\gamma = 1$  e (b) para  $\gamma = 2$ .

### 3.4 Investigação teórica dos expoentes críticos

Na seção anterior, discutimos como os expoentes críticos foram obtidos, descrevendo o comportamento da ação quadrática média ao longo do mar de caos, usando uma descrição fenomenológica. Nesta seção, será abordado um caminho diferente para obtermos estes mesmos expoentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ . O mar caótico é limitado por um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* e a curva mais baixa limita a difusão da

órbita caótica. Acima da curva invariante mais baixa no espaço de fases há regiões de regularidade e de caos local. Abaixo da curva, a região é composta por ilhas periódicas e caos, mas devemos destacar que é caracterizada principalmente pela ausência de curvas invariantes. Portanto, a curva invariante mais baixa caracteriza a transição do comportamento caótico local para o global. A curva invariante separa duas regiões: I) Abaixo da curva, onde o comportamento caótico global domina a dinâmica; e II) Acima da curva, onde observamos caos local.

Um regime similar que relaciona o que descrevemos acima é observado no mapa *standard* [30], descrito pelo mapeamento:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + k \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \text{ mod}(2\pi) \end{cases} , \quad (3.26)$$

onde  $k$  é o parâmetro que controla a transição da integrabilidade - quando  $k = 0$  o sistema é integrável e quando  $k \neq 0$  o sistema é não integrável. O sistema exibe um espaço de fases misto para valores pequenos de  $k$  e a transição do caos local para o caos global ocorre quando  $k_c \simeq 0.9716\dots$ , valor no qual a última curva invariante é destruída [42]. Usaremos esta propriedade aqui, extendendo o que foi usado em [43] para estimar a localização da curva invariante *spanning* mais baixa, dando também uma expressão para a correção de segunda ordem da localização da curva.

O primeiro passo para a localização da primeira curva invariante é considerar que próximo a ela a variável dinâmica pode ser escrita

$$I_n = \tilde{I} + \Delta I_n , \quad (3.27)$$

onde  $\tilde{I}$  corresponde ao valor característico da ação ao longo da curva invariante e  $\Delta I_n$  uma perturbação de  $\tilde{I}$ . Usando essa aproximação, a primeira equação do mapeamento (3.2) é dada por:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \Delta I_{n+1} &= \Delta I_n + \epsilon \sin(\theta_n) , \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \left[ \theta_n + \frac{1}{I_{n+1}^\gamma} \right] \text{ mod} 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \left[ \theta_n + \frac{1}{(\tilde{I} + \Delta I_{n+1})^\gamma} \right] \text{ mod} 2\pi . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Manipulando algebricamente a equação (3.29) e eliminando o  $\text{mod}2\pi$  temos:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^\gamma} \\ &= \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^{-\gamma}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Como  $\frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} \rightarrow 0$  ( $\Delta I_{n+1}$  é muito pequeno comparado com  $\tilde{I}$ ), podemos fazer a expansão em Série de Taylor, o que conduz a:

$$\left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^{-\gamma} = 1 + (-\gamma) \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} + \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) \left(\frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^2 + \dots \quad (3.31)$$

Sendo  $\frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}$  muito pequeno, desconsideraremos os termos a partir da segunda ordem. Portanto:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left(1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right) \\ &= \left[\theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}\right].\end{aligned}\quad (3.32)$$

Para fazermos a conexão com o mapa *standard*, temos que multiplicar a equação (3.28) por  $-\frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}}$  e, na sequência, adicionar o termo  $\frac{1}{\tilde{I}^\gamma}$ :

$$\begin{aligned}-\frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \Delta I_{n+1} &= -\frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \Delta I_n - \frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \epsilon \sin(\theta_n) \\ -\frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \Delta I_{n+1} + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} &= -\frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \Delta I_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \epsilon \sin(\theta_n).\end{aligned}$$

Definindo convenientemente o conjunto das novas variáveis

$$J_n = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \quad (3.33)$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \quad (3.34)$$

então:

$$\begin{aligned}J_{n+1} &= J_n - \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + J_{n+1}.\end{aligned}$$

Fazendo ainda:  $\phi_n = \theta_n + \pi$ , obtemos o mapeamento:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n - \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + J_{n+1}] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (3.35)$$

onde  $k_{ef} = \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}}$  é o parâmetro de controle efetivo.

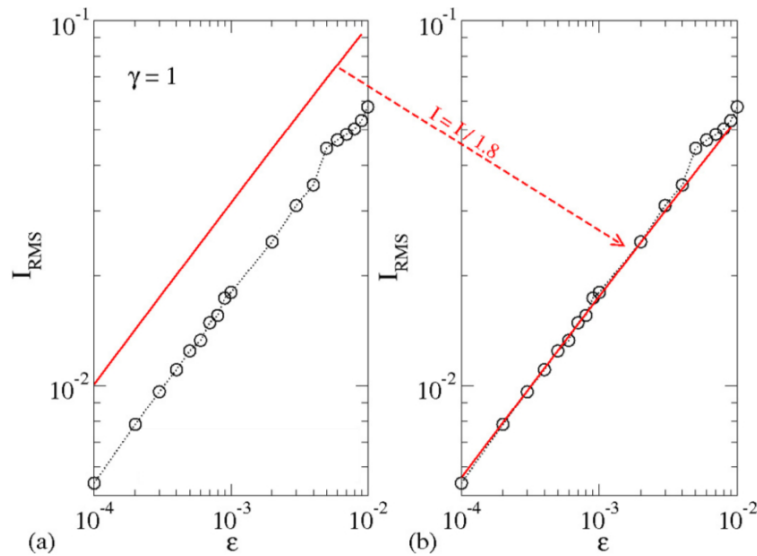


Figura 20: (a) Gráfico do comportamento de  $I$  vs.  $\epsilon$  onde os círculos abertos correspondem a saturação quando  $n \rightarrow \infty$  e a linha contínua corresponde a previsão teórica, ver equação (3.33) para a mais baixa curva invariante. (b) Mesmo gráfico mostrado em (a) após a transformação  $I \rightarrow I/1.8$  para a curva invariante. O parâmetro usado para compor os gráficos foi  $\gamma = 1$ .

De acordo com [30], próximo à curva invariante o parâmetro de controle efetivo  $k_{ef} \cong 0,9716\dots$ , onde ocorre a transição do caos local para o caos global. Portanto, podemos concluir que a localização da curva invariante mais baixa para o menor valor da ação é dada por

$$\tilde{I} = \left( \frac{\gamma}{k_{ef}} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (3.36)$$

A correção de segunda ordem para curva invariante mais baixa é:

$$\circ^2 \left( \frac{\Delta I}{\tilde{I}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{k_{ef}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (3.37)$$

A posição da curva invariante mais baixa define o limite do mar caótico. O comportamento de  $I_{RMS}$  deve ser relacionado com  $\tilde{I}$ . O valor numérico de  $I_{RMS}$  que ocorre para  $n \gg n_x$  é definido a partir de uma fração de  $\tilde{I}$ . Então,  $\tilde{I}$  deixa explícito a regra para a qual  $I_{RMS}$  obedece. Comparando as equações (3.36) com (3.10) podemos concluir que

$$\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}. \quad (3.38)$$

Esta relação fornece a conexão entre o expoente  $\alpha$  e o parâmetro de controle  $\gamma$ , onde definindo um dos três expoentes críticos os outros dois estarão definidos.

A Figura 20(a) mostra o comportamento de  $I$  vs.  $\epsilon$  para o valor de saturação, correspondendo a linha que contém os círculos abertos, obtido quando  $n \rightarrow \infty$ , enquanto que a linha contínua corresponde a previsão teórica da equação (3.36). As curvas se

sobrepõem após a aplicação  $I \rightarrow I/1,8$  na previsão teórica, mostrado na Figura 20(b). O fator de transformação 1,8 foi obtido empiricamente e corresponde somente a uma estimativa.

Agora, vamos discutir como obter o expoente  $\beta$ . Usando a primeira equação do mapeamento (3.7) e elevando ambos os lados da equação ao quadrado:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ I_{n+1}^2 &= I_n^2 + 2I_n\epsilon \sin(\theta_n) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Extraindo a média da equação (3.39) sobre o ensemble de condições iniciais de  $\theta \in [0, 2\pi]$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{\sin(\theta_n)} &= 0 \\ \overline{\sin^2(\theta_n)} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{I}_{n+1}^2 = \overline{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2} . \quad (3.40)$$

Quando  $\epsilon$  é suficientemente pequeno e sendo  $\overline{I}_{n+1}^2 - \overline{I}_n^2$  também muito pequeno, podemos usar a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{n+1}^2 - \overline{I}_n^2 &= \frac{\overline{I}_{n+1}^2 - \overline{I}_n^2}{(n+1) - n} \\ &\cong \frac{d\overline{I}^2}{dn} = \frac{\epsilon^2}{2} . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Então, temos a equação (3.41) é uma EDO de primeira ordem e deve ser resolvida

$$\int_{I_0}^{I(n)} d\overline{I}^2 = \int_n^0 \frac{\epsilon^2}{2} dn' . \quad (3.42)$$

Integrando ambos os lados e aplicando a raiz quadrada teremos:

$$I_{RMS} = \sqrt{I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n} . \quad (3.43)$$

No limite em que  $I_0$  é suficientemente pequeno, concluímos que a equação (3.43) se reduz a

$$I_{RMS} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(n\epsilon^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.44)$$

Comparando a equação (3.44) com a equação (3.9), poderemos concluir que o expoente de aceleração  $\beta = 1/2$ , resultado este bastante coerente com o resultado encontrado



numericamente. Outra observação é que o termo  $n\epsilon^2$  que foi acrescentado empiricamente à equação (3.9) e agora aparece naturalmente na equação (3.44).

O expoente  $z$  pode ser também obtido analiticamente. Basta usar os limites de integração que foram usados na equação (3.42) quando  $I_0 \rightarrow 0$  e  $I(n) = \tilde{I}/1,8$ . Em tais limites, uma boa aproximação para  $n_x$  é

$$\frac{1}{1,8} \left[ \frac{\gamma\epsilon}{k_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} = \left[ \frac{n_x\epsilon^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Isolando  $n_x$ , obteremos

$$n_x = \frac{2}{(1,8)^2} \left[ \frac{\gamma}{k_{ef}} \right]^{\frac{2}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}}. \quad (3.46)$$

Uma comparação da equação (3.46) com a equação (3.11) nos permite concluir que

$$z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (3.47)$$

As expressões obtidas para os expoentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$  estão de acordo com os resultados obtidos previamente na literatura [44] bem como nesta seção.

### Conclusões Parciais

Neste capítulo caracterizamos a dinâmica na transição de fase de integrável para não integrável usando dois procedimentos para tal fim - um que observa o fenômeno e outra uma aproximação teórica. Na observação fenomenológica, consideramos um regime cuja condição inicial  $I_0$  é suficientemente pequena para garantir que as órbitas estejam no mar de caos. obtivemos expoentes críticos através da observação do comportamento das curvas e usamos hipóteses de escala para descrevê-los. Em seguida, comparamos os resultados obtidos com uma função homogênea generalizada, obtendo três expoentes críticos:  $\alpha$  que é o expoente de saturação,  $\beta$  que é o expoente de aceleração e  $z$  o expoente de *crossover*. Validando as hipóteses de escala, os mesmos expoentes foram obtidos analiticamente, utilizando uma conexão com o mapa *standard*, na localização da menor curva invariante *spanning*. A primeira curva invariante separa duas regiões - abaixo dela pode-se observar um comportamento caótico local enquanto que acima dessa curva há um comportamento caótico global. Semelhante a este regime dinâmico, temos o mapa *standard* que exibe o mesmo comportamento de transição do caos local para caos global. A partir da transformação da equação de diferença em uma equação diferencial de primeira ordem e após obter sua solução, encontramos os mesmos expoentes propostos nas hipóteses de escala, avaliando a solução nos limites de saturação e crescimento.

## 4 LEI DE ESCALA EM MAPAS DISSIPATIVOS BIDIMENSIONAIS

Abordaremos, neste capítulo, propriedades dinâmicas do mapa padrão dissipativo. Como vimos no capítulo anterior, o mapa padrão ou mapa de Chirikov, originou vários modelos amplamente discutidos na literatura, tais como o modelo Fermi-Ulam, modelo *bouncer*, mapa *twist* e suas variações. Muitos destes modelos em versões dissipativas, também são conhecidos pela comunidade científica. Nossa proposta é descrever fenomenológico e analiticamente a transição quando a ação deixa de se difundir ilimitadamente através da introdução de um termo dissipativo. Mostraremos que o comportamento da ação quadrática média segue uma lei de escala bem definida em ajuste numérico e justificado analiticamente.

### 4.1 O mapa e espaço de fases

O mapeamento é escrito como

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + k \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde as variáveis dinâmicas são  $I$  e  $\theta$ , ação e ângulo respectivamente. O parâmetro  $k$  controla a não linearidade do sistema e  $\gamma$  é o parâmetro de dissipação. Observe que quando  $\gamma = 0$  recuperamos o caso conservativo, ou seja, sem dissipação.

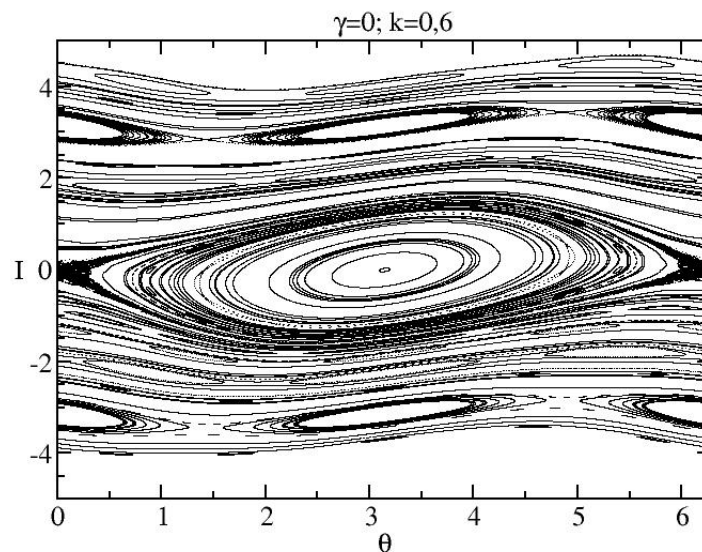


Figura 21: Esboço do espaço de fases para o mapeamento 4.1. Os parâmetros de controle usados foram  $\gamma = 0$  e  $k = 0,6$ .

Usando o mapeamento 4.1, obtivemos um espaço de fases típico, onde para essa construção consideramos  $k = 0,6$ ,  $\gamma = 0$  e usamos uma grade de 140 condições iniciais e  $10^3$  de iterações no mapa, mostrado na Figura 21. Observamos que o espaço de fases é misto, composto por ilhas de estabilidade, caos e curvas invariantes. Destacaremos três tipos de transição que este mapeamento apresenta ao variarmos os parâmetros  $k$  e  $\gamma$ .

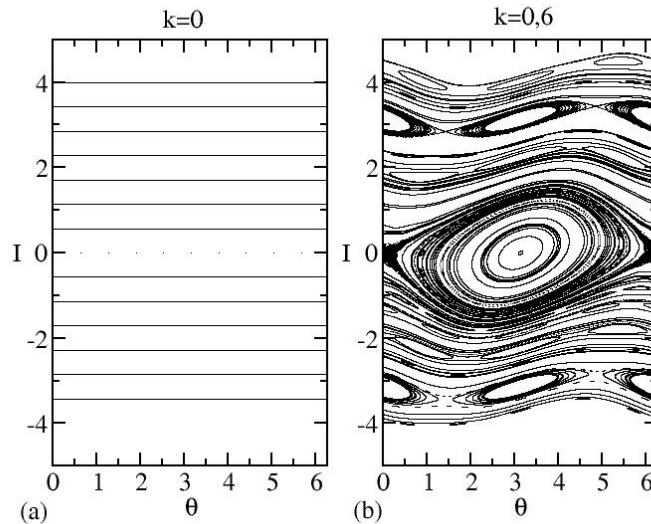


Figura 22: Em a) o espaço de fases é integrável. A Figura b) exibe um espaço de fases com ilhas periódicas, caos e curvas invariantes do tipo *spanning*.

Destacamos então três transições consideráveis:

- 1) Quando  $k = 0$  o sistema é integrável<sup>1</sup> e quando  $k \neq 0$  o sistema é não integrável - neste caso, o espaço de fase apresenta uma composição mista, contendo ilhas de periodicidade, caos e curvas invariantes do tipo *spanning*, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros de controle. Portanto, o parâmetro  $k$  controla a transição de integrabilidade de integrável para não integrável. A Figura 22 mostra o espaço de fase obtido para  $k = 0$  e  $k = 0,6$ .
- 2) Em  $k > 0,9716\dots$  e  $\gamma = 0$  (conservativo) ocorre a transição de caos local para caos global [30]. Neste valor crítico de  $k$ , é observada a destruição das curvas invariantes e a difusão ilimitada da ação, podendo ser observado na Figura 23. As curvas invariantes funcionam como uma barreira física impedindo a difusão de órbitas caóticas pelo espaço de fases. Ao serem destruídas, uma consequência imediata é a difusão ilimitada da ação no espaço de fases.

<sup>1</sup>Um sistema é dito ser integrável quando para  $N$  graus de liberdade existirem  $N$  constantes de movimento independentes.

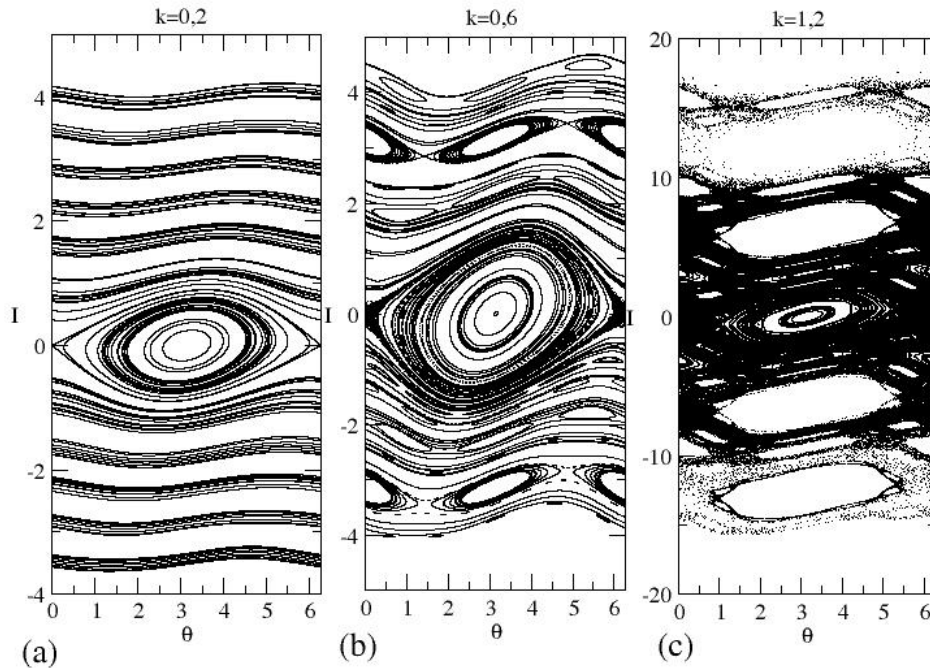


Figura 23: Em a) o espaço de fases exibe curvas invariantes bem definidas; na Figura b) podemos ver ainda a existência destas curvas, porém em menor quantidade; e na Figura c) ocorre a destruição das curvas invariantes e a difusão ilimitada da ação no espaço de fases. O parâmetro utilizado para construir as figuras foi  $\gamma = 0$ .

- 3) Supressão da difusão ilimitada da ação - transição da difusão ilimitada da ação para limitada através da introdução do parâmetro de dissipação  $\gamma$ . Na Figura 24, podemos observar que, mantendo o  $k = 1$  e variando o parâmetro  $\gamma$ , quanto mais próximo ao limite conservativo (quando  $\gamma \rightarrow 0$ ) mais a ação se difunde.

Quando um sistema é conservativo, o volume no espaço de fase é preservado. É através dos coeficientes da matriz jacobiana que, fazendo o determinante desta matriz, podemos descobrir se o sistema é conservativo ou não. Se o determinante desta matriz for  $\pm 1$  então o sistema é conservativo. Quando  $\gamma \neq 0$  o sistema exibe atratores. Atratores constituem-se de um ponto ou um conjunto de pontos para os quais as órbitas convergem em tempos suficientemente longos [5]. Considerando que estes atratores não estejam no infinito, uma consequência imediata de  $\gamma \neq 0$  é a supressão da difusão ilimitada da ação, marcando assim uma transição entre a difusão ilimitada para limitada. Concentraremos nesta transição nossas análises e veremos que na vizinhança dessa transição a ação quadrática média que será o nosso observável, apresenta comportamento de escala semelhante aos presentes em transição de fase já discutida na literatura [45, 46].

A Figura 23 mostra três espaços de fases construídos para  $k = 10$ ,  $k = 100$ ,  $k = 1000$  e  $\gamma = 10^{-2}$  em que podemos observar apenas um atrator caótico em todo o

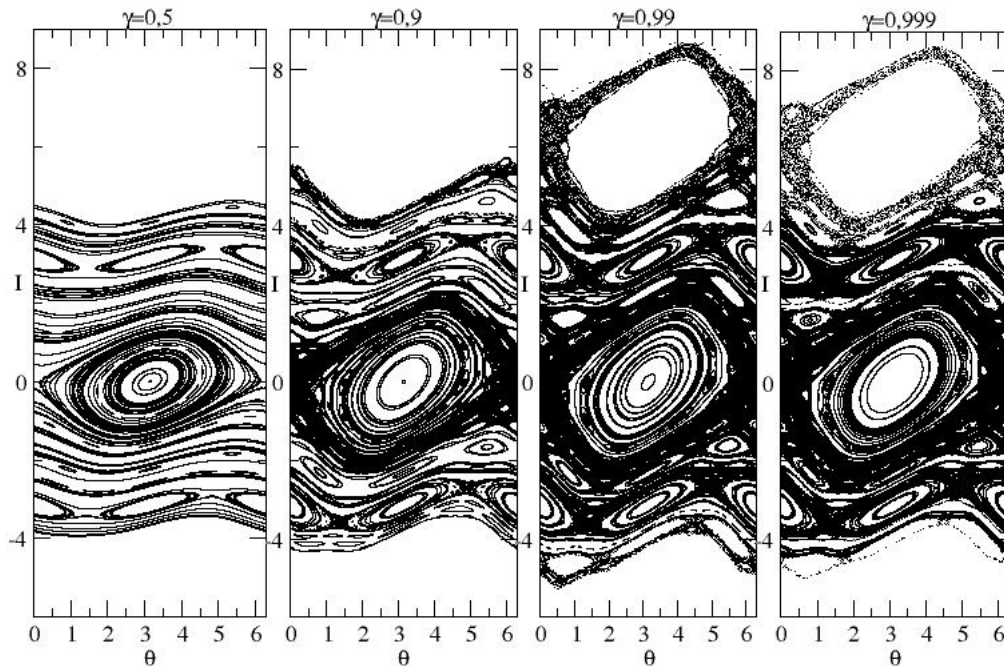


Figura 24: Espaço de fases quando  $k = 1$  e  $\gamma$  varia de acordo com as indicações nos gráficos.

espaço de fases em cada figura. A estrutura existente para parâmetros de menor valor de  $k$  foram destruídas e substituídas por um atrator. Podemos ainda ressaltar que o tamanho desse atrator é proporcional à  $k$ . Podemos observar isto na Figura 25.

## 4.2 O $I_{RMS}$ e as hipóteses de escala

O observável que iremos utilizar é a média quadrática da ação, que chamaremos de  $I_{RMS}$  (*root mean square*), pois somente a média feita em  $I$  não constitui um bom observável. Definimos  $I_{RMS}$  como

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{n,j}^2 \right]}, \quad (4.2)$$

que são duas médias realizadas na variável  $I$ : a primeira,  $M$ , é realizada sobre o ensemble de condições iniciais de  $\theta \in [0, 2\pi]$  e a segunda,  $n$ , é realizada ao longo da órbita. Vemos, na Figura ?? o comportamento de  $I$  vs.  $n$  para diferentes combinações de  $k$  e  $\gamma$ . Considerando  $I_0 \approx 0$  para tempos muito curtos observamos uma comportamento crescente das curvas de acordo com uma lei de potência. Após um determinado número de iterações  $n_x$ , esse comportamento muda e ao ponto onde ocorre essa mudança chamamos de número de *crossover*. Após o *crossover*, as curvas passam a se comportarem em regime de saturação

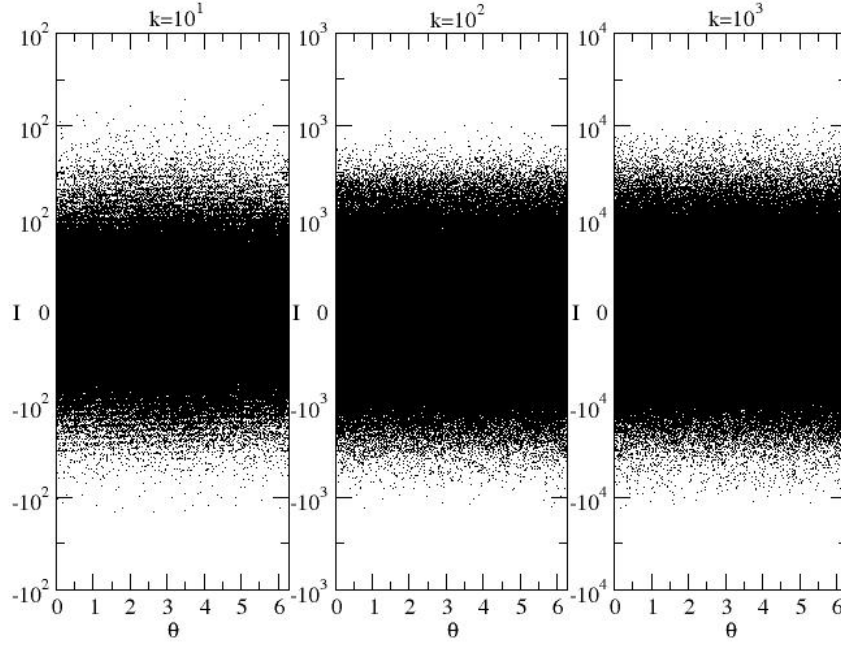


Figura 25: Espaço de fases para três valores diferentes de  $k$  e fixo em  $\gamma = 10^{-2}$ .

bem marcado por um platô constante. Analisando a Figura 26 observamos que quanto

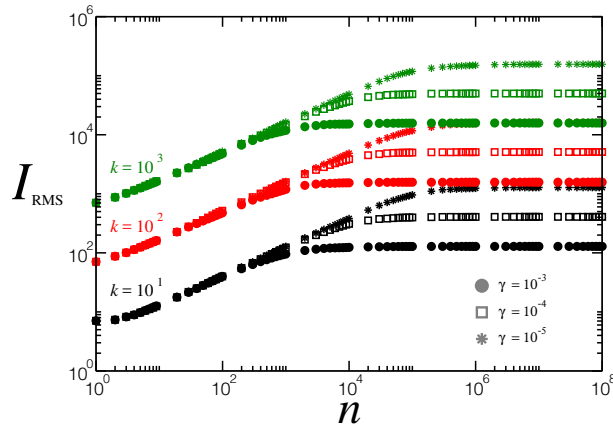


Figura 26: Comportamento de  $I_{RMS}$  vs.  $n$  para diferentes parâmetros de controle.

maior o parâmetro de controle  $k$  maior será a saturação daquela curva, à medida que, quanto menor o parâmetro de dissipação  $\gamma$ , também será maior o valor da saturação.

Baseado no comportamento das curvas observadas na Figura 26, iremos propor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para  $n \ll n_x$ , as curvas podem ser descritas como

$$I_{RMS} \propto (nK^2)^\beta, \quad (4.3)$$

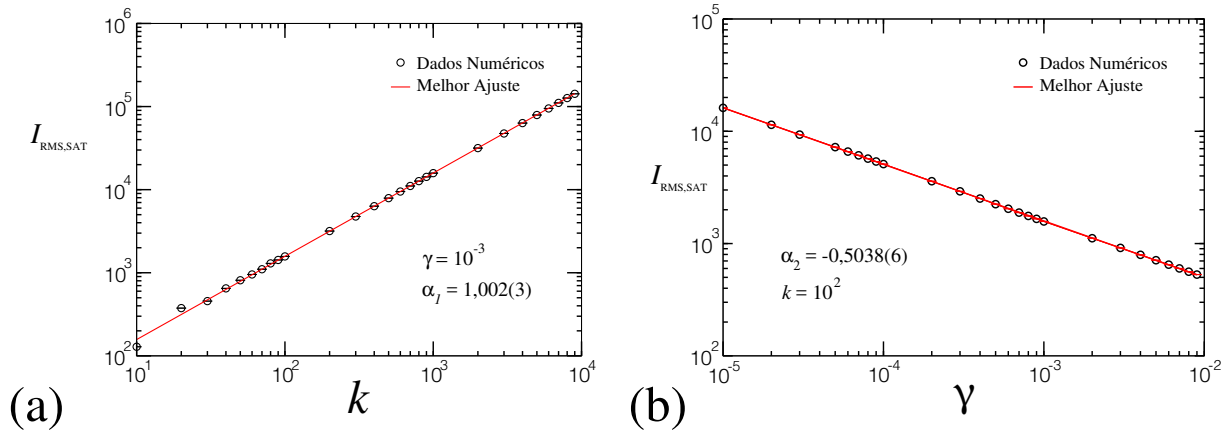


Figura 27: (a) Comportamento de  $I_{RMS}$  vs.  $k$  para  $\gamma = 10^{-3}$ . Um ajuste em lei de potência nos fornece  $\alpha_1 = 1,002(3)$ . (b) Comportamento de  $I_{RMS}$  vs.  $\gamma$  para  $k = 10^2$ . Um ajuste em lei de potência nos fornece  $\alpha_2 = -0,5038(6)$ .

onde  $\beta$  é chamado de expoente de aceleração.

2. Para  $n \gg n_x$ , todas as curvas convergem em direção a um regime de saturação, marcado por um platô constante, podendo ser descritas como

$$I_{RMS,SAT} \propto k^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \quad (4.4)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são chamados de expoentes de crescimento.

3. Finalmente, o número de *crossover*  $n_x$ , dado por

$$n_x \propto k^{z_1} \gamma^{z_2} \quad (4.5)$$

em que  $z_1$  e  $z_2$  são expoentes de crescimento.

Os expoentes críticos  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $z_1$  e  $z_2$  podem ser obtidos a partir de gráficos específicos. O expoente  $\beta$  foi obtido do crescimento das curvas de  $I_{RMS}$  vs.  $n$  através de um ajuste em lei de potência cujo resultado foi  $\beta \simeq 0,5$ . O expoente  $\alpha_1$  é obtido a partir do gráfico  $I_{RMS}$  vs.  $k$  como função do parâmetro  $k$  para  $\gamma$  fixo. A Figura 27 (a) mostra este comportamento e, do ajuste da reta em lei de potência, obtivemos um expoente  $\alpha_1 = 1,002(3)$ . Já o expoente  $\alpha_2$  é obtido do ajuste em lei de potência do gráfico  $I_{RMS}$  vs.  $\gamma$  e  $k$  fixo em  $k = 10^2$ , cujo expoente é  $\alpha_2 = -0,5038(6)$ , conforme indicado na Figura 27 (b).

Agora, para obtermos os expoentes  $z_1$  e  $z_2$  precisamos analisar o comportamento de  $n_x$  vs.  $k$  e  $n_x$  vs.  $\gamma$ , respectivamente, que estão indicados nas Figuras 28 (a) e (b), para os quais obtivemos os expoentes  $z_1 = -0,002(1)$  e  $z_2 = -1,16(1)$ . Na Figura 28 (a) o expoente crítico ser aproximadamente 0 indica a independência entre  $n_x$  e  $k$ .

Então, podemos utilizar a função homogênea generalizada para escrever o com-

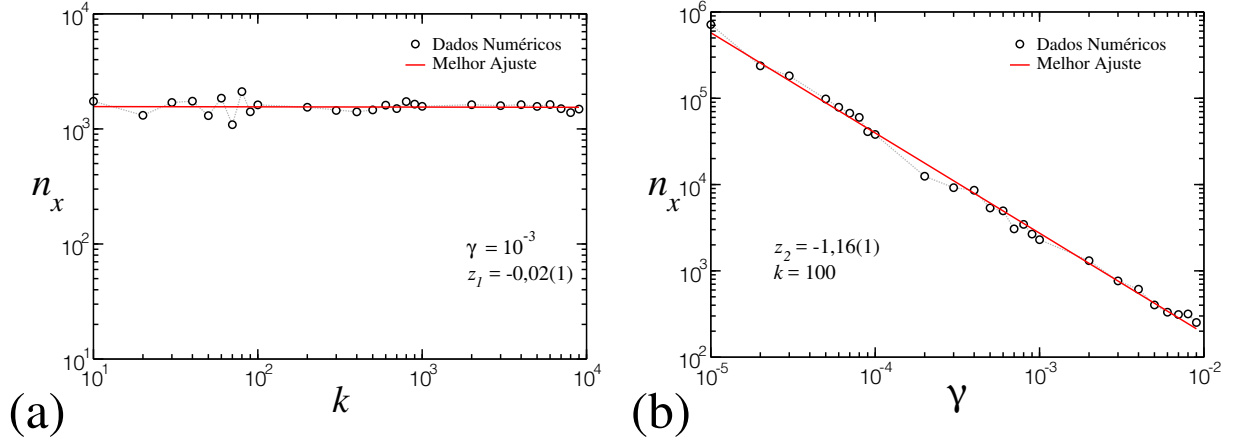


Figura 28: (a) Comportamento de  $n_x$  vs.  $k$  para  $\gamma = 10^{-3}$ . Um ajuste em lei de potência nos fornece  $z_1 = -0,002(1)$ . (b) Comportamento de  $n_x$  vs.  $\gamma$  para  $k = 10^2$ . Um ajuste em lei de potência nos fornece  $z_2 = -1,16(1)$ .

portamento anteriormente proposto pelas hipóteses de escala. Podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$I_{RMS}(nk^2, k, \gamma) = l I_{RMS}(l^a nk^2, l^b k, l^c \gamma) \quad , \quad (4.6)$$

no qual  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são expoentes característicos.

Escolhemos  $l^a nk^2 = 1$ , que nos leva a

$$l = (nk^2)^{-1/a} \quad . \quad (4.7)$$

Substituindo na Eq.(4.7) na Eq.(4.6), obtemos

$$I_{RMS} = (nk^2)^{\frac{-1}{a}} I_{RMS}(1, (nk^2)^{\frac{-b}{a}} k, (nk^2)^{\frac{c}{a}} \gamma), \quad (4.8)$$

assumindo ser constante o termo  $I_{RMS}(1, (nk^2)^{\frac{-b}{a}} k, (nk^2)^{\frac{c}{a}} \gamma)$  para  $n \ll n_x$ . Comparando a Eq.(4.8) com a Eq.(4.3), concluímos que

$$\beta = -1/a \quad . \quad (4.9)$$

Em nossas simulações numéricas, obtivemos um expoente  $\beta \simeq 1/2$ , portanto  $a = 2$ .

Agora escolhemos  $l^b k = 1$ , encontrando

$$l = k^{-1/b} \quad (4.10)$$

Substituindo a Eq.(4.10) na Eq.(4.6) obtemos

$$I_{RMS} = k^{-1/b} I_{RMS}(nk^2 k^{-\frac{a}{b}}, 1, k^{-\frac{c}{b}} \gamma) \quad . \quad (4.11)$$

Considerando que o termo  $I_{RMS}(nk^2 k^{-\frac{a}{b}}, 1, k^{-\frac{c}{b}} \gamma)$  é constante para  $n \gg n_x$  e, comparando



a Eq.(4.11) com a Eq.(4.4), chegamos ao resultado

$$\alpha_1 = -1/b \quad . \quad (4.12)$$

Finalmente, escolhemos  $l^c \gamma = 1$ , e encontramos

$$l = \gamma^{-1/c} \quad . \quad (4.13)$$

Substituindo a Eq.(4.13) em Eq.(4.6), obtemos

$$I_{RMS} = \gamma^{-\frac{1}{c}} I_{RMS}(\gamma^{-\frac{1}{c}} n k^2, \gamma^{-\frac{b}{c}}, 1) \quad . \quad (4.14)$$

Então, podemos consideraa que o termo  $I_{RMS}(\gamma^{-\frac{1}{c}} n k^2, \gamma^{-\frac{b}{c}}, 1)$  é constante para  $n \gg n_x$ . Comparando a Eq.(4.5) com a Eq.(4.14), concluimos que

$$\alpha_2 = -1/c \quad . \quad (4.15)$$

Agora, podemos comparar diferentes expressões obtidas para os fatores de escala  $l$ . Comparando as expressões Eq.(4.7) com Eq.(4.10) teremos:

$$\begin{aligned} (nk^2)^\beta &= k^{\alpha_1} \\ nk^2 &= k^{\frac{\alpha_1}{\beta}} \\ n &= k^{\frac{\alpha_1}{\beta} - 2} \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Comparando este resultado com a Eq.(4.5), observando  $\gamma$  constante, temos que

$$z_2 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2 \quad . \quad (4.17)$$

Observe que Eq.(4.19) define uma lei de escala pois o conhecimento de dois expoentes é de fator determinante pra o conhecimento do terceiro.

Podemos também comparar as Eq.(4.7) com Eq.(4.13) e então, o seguinte resultado é obtido:

$$\begin{aligned} (nk^2)^\beta &= \gamma^{\alpha_2} \\ nk^2 &= \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}} \\ n &= k^{-2} \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}} \quad . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comparando com a Eq.(4.5) tomando  $k$  constante, concluimos que

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} \quad . \quad (4.19)$$

A Eq.(4.19) define outra lei de escala. Então, conhecendo-se os expoentes críticos e a lei de escala podemos reescalar as variáveis em seus eixos de modo a validar as hipóteses de escala. Aplicamos a transformação  $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/k^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}$  no eixo das ordenadas e  $n \rightarrow n\gamma^{z_2}$  no eixo das abcissas. A Figura 29 mostra a sobreposição de todas as curvas em uma curva universal, validando o esperado de acordo com o que foi proposto pelas hipóteses de escala.

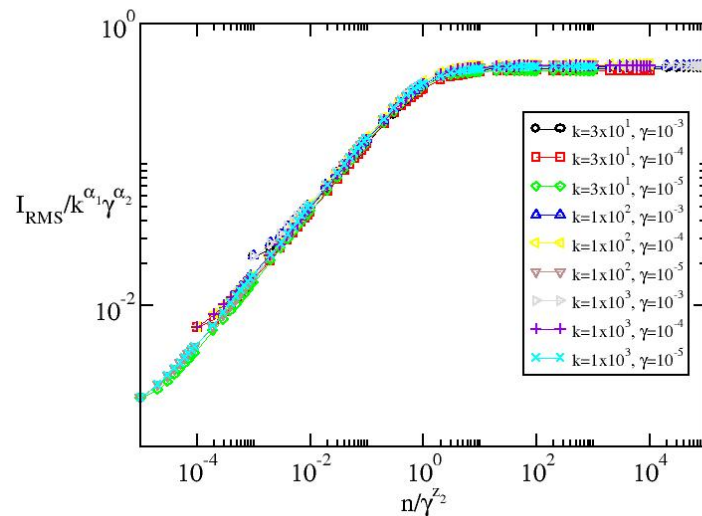


Figura 29: Sobreposição de todas as curvas mostradas na Figura 26 em uma única curva universal. Nesta construção, foram feitas as seguintes transformações:  $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/k^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}$  e  $n \rightarrow n\gamma^{z_2}$ .

Assim, encerramos a descrição fenomenológica e partimos para uma análise de obtenção dos expoentes de modo teórico, afim de reforçar nossas validações de escala.

### 4.3 Uma descrição analítica dos expoentes críticos

Nesta seção, iremos descrever analiticamente a obtenção dos expoentes críticos abordados na seção anterior, afim de comprovarmos os resultados advindos das hipóteses de escala. Para tal, começaremos definindo a equação de  $I_{RMS}$  e, na sequência, estudaremos cada caso particular. Com isso, a extração de todos os expoentes críticos ocorrerão de forma naturalmente matemática. Veremos também que para uma ação inicial em  $I_0 \gg k/\gamma^{\frac{1}{2}}$  o decaimento ocorre de forma exponencial.

#### 4.3.1 Definindo $I_{RMS}$

Nossa análise de  $I_{RMS}$  será dividida de duas formas: no caso em que  $\gamma = 0$ , ou seja, para o caso conservativo; e quando  $\gamma \neq 0$  que indica o caso dissipativo. Vejamos:

4.3.1.1  $\boxed{\gamma = 0}$ 

Considerando a Eq.(4.1), tomaremos apenas a primeira equação deste mapeamento, ou seja:

$$I_{n+1} = I_n + k \sin(\theta_n) \quad , \quad (4.20)$$

e então, tomaremos a média quadrática desta equação, pois somente uma média seria impróprio, tendo em vista que a média da função seno é zero. Elevando a Eq.(4.20) ao quadrado e em seguida tomando a média, temos:

$$\begin{aligned} I_{n+1}^2 &= I_n^2 + 2I_n k \sin(\theta_n) + k^2 \sin^2(\theta_n) \\ \overline{I_{n+1}^2} &= \overline{I_n^2} + 2k \overline{I_n \sin(\theta_n)} + k^2 \overline{\sin^2(\theta_n)} \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sabendo que  $\overline{\sin(\theta)} = 0$  e que  $\overline{\sin^2(\theta)} = 1/2$ , então a Eq.(4.21) tornar-se-á:

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2} \quad . \quad (4.22)$$

Agora, consideraremos a aproximação seguinte:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{I^2}}{dn} = \frac{k^2}{2} \quad , \quad (4.23)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem na qual será resolvida da forma

$$\int_{I_0}^{\overline{I}} d\overline{I^2} = \frac{k^2}{2} \int_0^n dn \quad , \quad (4.24)$$

cujos resultados

$$\begin{aligned} \overline{I^2}(n) &= I_0^2 + \frac{k^2}{2}n \\ I_{RMS}(n) &= \sqrt{I_0^2 + \frac{k^2}{2}n} \quad . \end{aligned} \quad (4.25)$$

A Eq.(4.25) confirma a difusão ilimitada da ação com a raiz de  $n$ , na ausência de curvas invariantes *spanning*.

4.3.1.2  $\boxed{\gamma \neq 0}$ 

Faremos um investigação do comportamento de  $I_{RMS}$  vs.  $n$  considerando  $\gamma \neq 0$ . Então, utilizando a Eq.(4.1) e, elevando ao quadrado, teremos:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (1 - \gamma)I_n + k \sin(\theta_n) \\ I_{n+1}^2 &= (1 - \gamma)^2 I_n^2 + 2(1 - \gamma)I_n k \sin(\theta_n) + k^2 \sin^2(\theta_n) \quad . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Então, fazemos uma média na Eq.(4.26) para um ensemble de  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Logo:

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - \gamma)^2 \overline{I_n^2} + 2(1 - \gamma) \overline{I_n k \sin(\theta_n)} + k^2 \overline{\sin^2(\theta_n)} . \quad (4.27)$$

Lembrando que  $\overline{\sin(\theta)} = 0$  e  $\overline{\sin^2(\theta)} = 1/2$ , substituindo em Eq.(4.27):

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - \gamma)^2 \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2} , \quad (4.28)$$

cuja Eq.(4.28) pode ser reescrita:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{I^2}}{dn} = \gamma(\gamma - 2)\overline{I^2} + \frac{k^2}{2} . \quad (4.29)$$

Por uma melhor manipulação algébrica, chamaremos  $\overline{I^2} = F$ . Portanto, temos agora uma equação diferencial de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{\gamma(\gamma - 2)F + \frac{k^2}{2}} &= dn \\ \int_{F_0}^{F(n)} \frac{dF}{\gamma(\gamma - 2)F + \frac{k^2}{2}} &= \int_0^n dn' . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Faremos uma mudança de variável, na qual chamaremos  $u = \gamma(\gamma - 2)F + \frac{k^2}{2}$ , então  $du = \gamma(\gamma - 2)dF$ . Substituindo na Eq.(4.30), temos:

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{du}{u} &= \gamma(\gamma - 2) \int_0^n dn \\ \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) &= \gamma(\gamma - 2)n \\ u(n) &= u_0 e^{\gamma(\gamma-2)n} . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Retornaremos às variáveis originais do problema e a Eq. 4.31 será

$$\begin{aligned} \left[\gamma(\gamma - 2)F + \frac{k^2}{2}\right] &= \left[\gamma(\gamma - 2)F_0 + \frac{k^2}{2}\right] e^{\gamma(\gamma-2)n} \\ \gamma(\gamma - 2)F(n) &= \frac{k^2}{2} [e^{\gamma(\gamma-2)n} - 1] + \gamma(\gamma - 2)F_0 e^{\gamma(\gamma-2)n} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Isolando  $F(n)$  da Eq. 4.32 e substituindo  $F = \overline{I^2}$  temos que:

$$\begin{aligned} F(n) &= F_0 e^{\gamma(\gamma-2)n} + \frac{k^2}{2\gamma(\gamma - 2)\gamma} [e^{\gamma(\gamma-2)n} - 1] \\ I_{RMS} = \sqrt{\overline{I^2}} = I_{RMS}(n) &= \sqrt{I_0^2 e^{\gamma(\gamma-2)n} + \frac{k^2}{2\gamma(\gamma - 2)\gamma} [e^{\gamma(\gamma-2)n} - 1]} . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para melhor visualização da discussão dos resultados extraídos da Eq.(4.33), iremos reescrevê-la de tal forma que:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{I_0^2 e^{-\gamma(2-\gamma)n} + \frac{k^2}{2\gamma(2-\gamma)} [1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}]}. \quad (4.34)$$

Então, discutiremos os casos particulares da Eq.(4.34).

### 4.3.2 Discussão dos casos particulares

Usaremos a Eq.(4.34) para extraírmos dois casos particulares:

1. Para o caso de  $n = 0$ , a Eq.(4.34) se tornará:

$$I_{RMS}(0) = \sqrt{I_0^2 e^{-\gamma(2-\gamma)0} + \frac{k^2}{2\gamma(2-\gamma)} [1 - e^{-\gamma(2-\gamma)0}]}. \quad (4.35)$$

Observando a Eq.(4.35) vemos que a primeira exponencial se resumirá a  $e^0 = 1$ , restando apenas o termo  $I_0^2$ . Na segunda exponencial, algo semelhante acontece, ou seja, se resumirá também a  $e^0 = 1$  que, subtraindo do 1 dentro do colchetes, torna o segundo termo nulo. Assim:

$$\begin{aligned} I_{RMS}(0) &= \sqrt{I_0^2} \\ I_{RMS}(0) &= I_0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Podemos observar que a Eq.(4.36) confirma o esperado - quando  $n = 0$ , o  $I_{RMS} = I_0$ , que é exatamente a condição inicial.

2. Para o caso em que  $n \rightarrow \infty$  a Eq.(4.34) será:

$$I_{RMS}(n \rightarrow \infty) = \sqrt{I_0^2 e^{-\gamma(2-\gamma)n} + \frac{k^2}{2\gamma(2-\gamma)} [1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}]}. \quad (4.37)$$

Quando o argumento da exponencial tende ao infinito, a exponencial será nula. Logo, restará apenas o termo

$$I_{RMS}(n \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{k^2}{2\gamma(2-\gamma)}}, \quad (4.38)$$

reescrito como

$$I_{RMS}(n \rightarrow \infty) = \frac{k^1}{\sqrt{(2-\gamma)}} \gamma^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

A Eq.(4.39) associada à Eq.(4.4) extraímos dois importantes expoentes críticos:  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = -1/2$ , resultados que reforçam os expoentes encontrados numericamente nas Figuras 27 e ??, validando analiticamente os resultados obtidos fenomenologicamente.

### 4.3.3 A evolução dinâmica

Nossa análise será em torno do caso em que  $0 < \gamma < 1$  em como o sistema evoluirá ao equilíbrio, tendo em vista a condição inicial em  $I_0 \approx 0$ . Então, tomando esta consideração, podemos descartar o primeiro termo da Eq.(4.34), então:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\frac{k^2}{2\gamma(2-\gamma)} [1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}]}. \quad (4.40)$$

Podemos reescrever a Eq.(4.40) da seguinte forma:

$$I_{RMS}(n) = \frac{k}{\sqrt{2\gamma(2-\gamma)}} [1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

Faremos um expansão em série de Taylor na função entre colchetes da Eq.(4.41), lembrando que a expansão para uma função do tipo  $e^x$  é da seguinte forma:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.42)$$

Então, a expansão de  $[1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}]$  será:

$$[1 - e^{-\gamma(2-\gamma)n}] = \sqrt{\gamma(2-\gamma)n}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\gamma(\gamma-2)}\gamma(\gamma-2)n^{\frac{3}{2}}\dots \quad (4.43)$$

Considerando apenas uma aproximação de primeira ordem na expansão em série, a Eq.(4.41) será:

$$I_{RMS}(n) \simeq \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma(2-\gamma)}} \sqrt{\gamma(2-\gamma)n}^{\frac{1}{2}} \\ I_{RMS}(n) \simeq \frac{k}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}}. \quad (4.44)$$

Comparando a Eq.(4.44) com a Eq.(4.3), concluímos que o expoente de aceleração  $\beta = 1/2$ , que está também em concordância com os resultados numéricos e as hipóteses fenomenológicas.

#### 4.3.4 Análise para o número de *crossover*

Na mudança entre os regimes, ou seja, o número de *crossover*, podemos obter seu expoente igualando as Eq.(4.39) e (4.44). Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}} &= \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2-\gamma}} \\ n &= \frac{\gamma^{-1}}{2-\gamma} \\ n_x &= \frac{1}{2-\gamma} \gamma^{-1} . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Comparando a Eq.(4.44) com a Eq.(4.5) podemos concluir que os expoentes  $z_1 = 0$  e  $z_2 = -1$ , o que confirma os resultados numéricos e de hipóteses de escala.

#### 4.3.5 Investigação analítica para o decaimento

Faremos uma investigação analítica em torno da condição em que  $I_0 \gg \frac{k}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$ . Então, tomando a Eq.(4.34), podemos perceber que o segundo termo será eliminado, pois esta consideração torna o argumento da exponencial aproximadamente zero e, portanto, pode-se eliminar este termo. Então:

$$\begin{aligned} I_{RMS}(n) &\simeq \sqrt{I_0^2 e^{-\gamma(2-\gamma)n}} \\ I_{RMS}(n) &\simeq I_0 e^{\frac{-\gamma(2-\gamma)n}{2}} . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Contudo, se  $\gamma \simeq 0$ , então teremos  $2 - \gamma \simeq 2$ , portanto:

$$I_{RMS}(n) = I_0 e^{-\gamma n} . \quad (4.47)$$

A Eq. (4.47) mostra que a ação tem um decaimento de forma exponencial. Porém, ela pode ser obtida de outra forma - iterando a primeira equação do mapeamento Eq.(4.1), partindo de um par de condições iniciais  $(I_0, \theta_0)$ , teremos:

$$I_1 = (1 - \gamma)I_0 + k \sin(\theta_0) , \quad (4.48)$$

para a primeira iteração e

$$I_2 = (1 - \gamma)I_1 + k \sin(\theta_1) , \quad (4.49)$$

para a segunda iteração. Substituindo a Eq.(4.48) em Eq.(4.49), temos:

$$\begin{aligned} I_2 &= (1 - \gamma)[(1 - \gamma)I_0 + k \sin(\theta_0)] + k \sin(\theta_1) \\ I_2 &= (1 - \gamma)^2 I_0 + k[(1 - \gamma) \sin(\theta_0) + \sin(\theta_1)] . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Para a terceira iterada, temos:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= (1 - \gamma)I_2 + k \sin(\theta_2) \\
 I_3 &= (1 - \gamma)\{(1 - \gamma)^2 I_0 + k[(1 - \gamma) \sin(\theta_0) + \sin(\theta_1)]\} + k \sin(\theta_2) \\
 I_3 &= (1 - \gamma)^3 I_0 + k[(1 - \gamma)^2 \sin(\theta_0) + (1 - \gamma) \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)] \quad . \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Da expressão Eq.(4.51) podemos fazer uma generalização. Assim sendo:

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 + k \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \gamma)^{n-1-i} \sin(\theta_i) \quad . \quad (4.52)$$

Quando  $\gamma$  muito pequeno, podemos dizer que  $\sum \sin(\theta_i) \cong 0$ , portanto:

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 \quad . \quad (4.53)$$

Na Eq.(4.53) faremos uma expansão em série de Taylor no termo  $(1 - \gamma)^n$ . Então, a equação se tornará:

$$I_n = I_0 \left[ 1 + \ln(1 - \gamma)n + \frac{1}{2} \ln(1 - \gamma)^2 n^2 + \dots \right] \quad (4.54)$$

Usando a propriedade da função exponencial e sua inversa, o logaritmo natural, temos que:

$$\begin{aligned}
 a^x &= e^{\ln(a)x} \\
 I_n &= I_0 e^{\ln(1-\gamma)n} \quad . \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Então, podemos fazer uma expansão no termo:

$$\ln(1 - \gamma) = -\gamma - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{3} \dots \quad , \quad (4.56)$$

considerando apenas o termo de primeira ordem, a Eq.(4.55) tornar-se-á:

$$I_n = I_0 e^{-\gamma n} \quad . \quad (4.57)$$

Usando uma outra abordagem através da iteração do mapa, mostramos que o decaimento é exponencial e cujo expoente de decaimento é dado por  $-\gamma$ , obtendo assim as mesmas equações em Eq.(4.47) e (4.55). Isto posto, podemos fazer um esboço das curvas de decaimento  $I$  vs.  $n$  e, usando valores diferentes para  $\gamma$ , podemos fazer as transformações: no eixo das ordenadas:  $I_n \rightarrow \frac{I_n}{I_0}$ ; e no eixo das abscissas:  $n \rightarrow \gamma n$ ; e teremos uma sobreposição de todas as curvas em uma única curva universal.



## Conclusões Parciais

No presente capítulo, vimos como a introdução de um termo dissipativo no mapa padrão gera uma supressão da difusão ilimitada da ação no espaço de fases. Vimos também que o comportamento da ação quadrática média é universal, para o qual caracterizamos os expoentes críticos da dinâmica próximo a transição da difusão limitada para ilimitada, fazendo uso de ferramentas fenomenológicas e analíticas. Usamos os mesmos procedimentos dos capítulos anteriores - através de uma função homogênea generalizada, obtivemos um lei de escala que conecta os expoentes críticos com uma lei de escala. Neste capítulo, encontramos através de simulações numéricas, cinco expoentes críticos:  $\beta \approx 1/2$  que é o expoente de aceleração,  $\alpha_1 = 1,002(3)$  e  $\alpha_2 = -0,5038(6)$  para os expoentes de saturação e  $z_1 = -0,002(1)$  e  $z_2 = -1,16(1)$  para os expoentes dinâmicos. Contudo, através de um procedimento analítico, que contempla a transformação de equações de diferença em uma equação diferencial, sua solução nos fornece avaliando em casos particulares, os seguintes resultados - para o expoente de aceleração:  $\beta = 1/2$ ; expoentes de saturação:  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = -1/2$ ; e os expoentes dinâmicos:  $z_1 = 0$  e  $z_2 = -1$ , validando os resultados numéricos obtidos.

## 5 CONCLUSÕES

Os trabalhos desenvolvidos ao longo desta tese de doutorado visou o estudo e a descrição de propriedades dinâmicas de mapeamentos unidimensionais e bidimensionais através da descrição do formalismo de lei de escala.

Na família de mapeamentos unidimensionais, foram caracterizados o comportamento dinâmico nas vizinhanças do estado estacionário quando o parâmetro que controla a dinâmica é  $R = 1$  e também em suas vizinhanças. No ponto de bifurcação, esse decaimento é descrito através de uma função homogênea generalizada, conduzindo à três expoentes críticos que se relacionam através de uma lei de escala do tipo  $z = \alpha/\beta$ . Nas vizinhanças desta bifurcação, concluímos que este decaimento é exponencial, caracterizado por um tempo de relaxação dado por uma lei de potência do tipo  $\tau \propto \mu^\delta$ . Vimos também que o expoente  $\delta = -1$  independe da não linearidade do mapa. Entretanto, investigamos também o comportamento na bifurcação de duplicação de período para  $\gamma = 1$  e obtivemos os expoentes  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -0,499925(4)$ ,  $z = -2,00004(5)$  e  $\tau = -1$ , confirmando os dados numéricos com as hipóteses de escala.

Nos mapeamentos bidimensionais, caracterizamos a dinâmica do espaço de fases na transição de integrável para não integrável usando dois procedimentos. O primeiro considera uma descrição fenomenológica usando condições iniciais no regime em que  $I_0$  é muito pequeno, para o qual obtivemos os expoentes críticos que descrevem o comportamento das propriedades caóticas em função do parâmetro de controle  $\epsilon$  e do número de interações  $n$ . Então, uma lei de escala baseada nas hipóteses de escala, definindo uma relação explícita entre os três expoentes críticos  $\alpha$  (expoente de saturação),  $\beta$  (expoente de aceleração) e  $z$  (expoente de *crossover*), dada pela relação  $z = \frac{\alpha}{\beta} - 2$ . O segundo procedimento para descrever a dinâmica do espaço de fases da transição da integrabilidade para não integrabilidade foi o uso de uma conexão com o mapa *standard*, na qual localizamos a primeira curva invariante do tipo *spanning* [43]. Isto foi possível porque o mapa *standard* exhibe uma transição no comportamento da dinâmica de caos local para caos global. O caos global é observado nesta dinâmica abaixo da primeira curva invariante, enquanto que o caos local é observado acima desta curva. Transformando a equação de diferenças numa equação diferencial de primeira ordem e, em seguida, integrando esta equação, obtivemos o *slope* de crescimento da média da ação, bem como o expoente de *crossover*.

Introduzimos também um termos de dissipação no mapa padrão, conhecido e amplamente discutido na literatura. Neste contexto, observamos a existência de três transições de fase: 1) transição de integrabilidade; 2) transição de caos local para caos

global; e 3) transição de ilimitada para limitada da ação. Focamos nosso estudo na última transição e observamos uma universalidade no comportamento da ação média. Nesse objetivo, os cinco expoentes aqui obtidos seguiram ao mesmo procedimento usados anteriormente, em que caracterizamos os expoentes tanto em dados numéricos quanto analiticamente.

### Artigos publicados

Durante o desenvolvimento deste trabalho de doutorado, publicamos os seguintes artigos científicos:

1) Teixeira, R. M., Rando, D. S., Geraldo, F. C., Costa Filho, R. N., de Oliveira, J. A., and Leonel, E. D. (2015). *Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation*. Physics Letters A, 379(18), 1246-1250.

2) Leonel, E. D., Teixeira, R. M., Rando, D. S., Costa Filho, R. N., and de Oliveira, J. A. (2015). *Addendum to: "Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation"*. [Phys. Lett. A 379 (2015) 1246]. Physics Letters A, 379(30), 1796-1798.

3) Leonel, E. D., Penalva, J., Teixeira, R. M., Costa Filho, R. N., Silva, M. R., and de Oliveira, J. A. (2015). *A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents*. Physics Letters A, 379(32), 1808-1815.

## ANEXO A

Physics Letters A 379 (2015) 1246–1250



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



## Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation



Rivania M.N. Teixeira<sup>a,\*</sup>, Danilo S. Rando<sup>b</sup>, Felipe C. Geraldo<sup>c</sup>, R.N. Costa Filho<sup>a</sup>,  
Juliano A. de Oliveira<sup>b,c</sup>, Edson D. Leonel<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física, UFC – Univ. Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brazil

<sup>b</sup> Departamento de Física, UNESP – Univ. Estadual Paulista, Av.24A, 1515 – Bela Vista, 13506-900, Rio Claro, SP, Brazil

<sup>c</sup> UNESP – Univ Estadual Paulista, Câmpus de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, SP, Brazil

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 21 October 2014  
Received in revised form 24 January 2015  
Accepted 11 February 2015  
Available online 14 February 2015  
Communicated by C.R. Doering

#### Keywords:

Scaling law  
Critical exponents  
Homogeneous function

### ABSTRACT

Decay to asymptotic steady state in one-dimensional logistic-like mappings is characterized by considering a phenomenological description supported by numerical simulations and confirmed by a theoretical description. As the control parameter is varied bifurcations in the fixed points appear. We verified at the bifurcation point in both; the transcritical, pitchfork and period-doubling bifurcations, that the decay for the stationary point is characterized via a homogeneous function with three critical exponents depending on the nonlinearity of the mapping. Near the bifurcation the decay to the fixed point is exponential with a relaxation time given by a power law whose slope is independent of the nonlinearity. The formalism is general and can be extended to other dissipative mappings.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

Mappings are often used to characterize the evolution of dynamical systems by using the so called discrete time [1]. The interest in the subject was increased after the investigation of May [2] with direct application to biology [3]. After that a large number of applications involving mappings were considered particularly related to physics [4–6], chemistry, biology, engineering, mathematics and many other areas [7–18].

The type of dynamics certainly depends on the control parameter. As it is varied, bifurcations appear changing the dynamics of the steady state [1], and for specific rates eventually lead to chaos [19,20]. Collisions of stable and unstable manifolds yield the destruction of chaotic attractors [4,21]. Many of these dynamical properties are already known and are taken indeed at the asymptotic state. The way the system goes to equilibrium is generally disregarded just by considering the evolution for a large transient.

Our main goal in this Letter is to apply a scaling formalism to explore the evolution towards the equilibrium near three types of bifurcations in a logistic-like mapping: (a) transcritical; (b) pitchfork and (c) period-doubling. Indeed at the bifurcation point the orbit relaxes to equilibrium in a way described by a homogeneous

function with well defined critical exponents [22–24]. Such exponents are not universal and depend mostly on the nonlinearity of the mapping and on the type of bifurcation. Near a bifurcation, the relaxation to the equilibrium is exponential, with a relaxation time characterized by a power law [22]. Here, two different procedures are used to obtain the exponents. The first one is mostly phenomenological with scaling hypotheses ending up with a scaling law of the three critical exponents. The second one considers transforming the difference equation into a differential one and solving it with the convenient initial conditions. Our analytical results confirm remarkably well the numerical data obtained via computer simulation.

This work is organized as follows. First the mapping, the equilibrium conditions and a phenomenological approach leading to the scaling law are described. Then we discuss the critical exponents by transforming the difference equation into a differential equation. Moving on we present discussions and extensions to other bifurcations when finally our conclusions are drawn.

### 2. The mapping and phenomenological properties of the steady state

The mapping we consider is written as

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (1)$$

\* Corresponding author. Tel.: +55 19 3526 9174.

E-mail address: rivania@fisica.ufc.br (R.M.N. Teixeira).

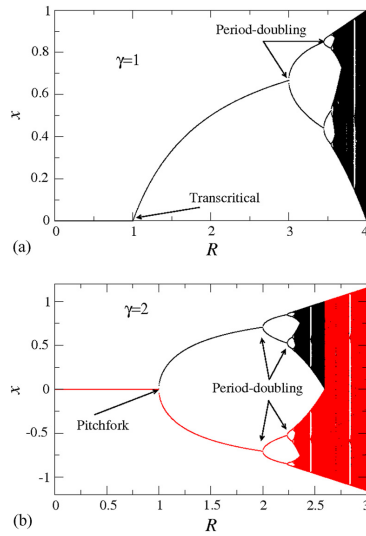


Fig. 1. Orbit diagrams obtained for Eq. (1) considering: (a)  $\gamma = 1$  (traditional logistic map) and; (b)  $\gamma = 2$  (cubic map). Some bifurcations are indicated in the figures.

where  $\gamma \geq 1$ ,  $R$  is a control parameter and  $x$  is a dynamical variable. A typical orbit diagram is shown in Fig. 1 for: (a)  $\gamma = 1$  (logistic map) and; (b)  $\gamma = 2$  (cubic map).

The fixed points are obtained by solving  $x_{n+1} = x_n = x^*$  and two cases must be considered: (i)  $\gamma$  is an even number or; (ii)  $\gamma$  is any other value (odd, irrational etc.). For case (i) there are three fixed points. One is  $x^* = 0$ , which is stable (asymptotically stable) for  $R \in [0, 1)$  and the two others are  $x^* = \pm[1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , which are stable for  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . The bifurcation at  $R = 1$  is called pitchfork [25,26]. For case (ii) there are only two fixed points. One is  $x^* = 0$ , stable for  $R \in [0, 1)$  and the other is  $x^* = [1 - 1/R]^{1/\gamma}$ , being stable for  $R \in (1, (2 + \gamma)/\gamma)$ . Transcritical is the bifurcation at  $R = 1$  for this case. Both bifurcations are identified in Fig. 1(a, b). Our goal is to consider the convergence to the fixed point  $x^* = 0$  at the bifurcation in  $R_c = 1$  and in its neighbouring such that  $\mu = R_c - R \geq 0$ , with  $R \leq R_c$ .

The orbit diagram allows also to extract more properties. After a transcritical bifurcation, as seen in Fig. 1(a), the period-1 orbit is stable for the range  $R \in (1, 3)$  when a period-doubling bifurcation happens. After that a period-doubling sequence is observed, obeying a Feigenbaum scaling [19,20] until reach the chaos. Similar dynamics, for a different range of  $R$  is also observed after a pitchfork bifurcation, as shown in Fig. 1(b).

The natural variable to describe the convergence to the steady state is the distance from the fixed point [23]. Indeed for the fixed point  $x^* = 0$ , the distance to the fixed point is the own dynamical variable  $x$ . The convergence to the steady state must also depend on the number of iterations  $n$ , on the initial condition  $x_0$ , and of course on the parameter  $\mu = R_c - R$ . The parameter  $\mu = 0$  defines the bifurcation point and the convergence to the fixed point is shown in Fig. 2 for two different values of  $\gamma$ : (a)  $\gamma = 1$  and; (b)  $\gamma = 2$  and different initial conditions  $x_0$ , as labelled in the figure.

We see from Fig. 2 that depending on the initial condition  $x_0$ , the orbit stays confined in a plateau of constant  $x$  and, after reaching a crossover iteration number,  $n_x$ , the orbit suffers a changeover

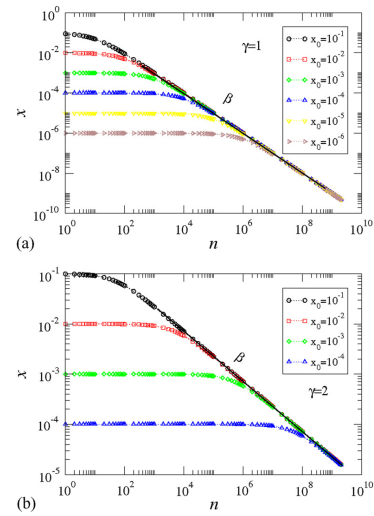


Fig. 2. Convergence towards the steady state at  $x^* = 0$  for: (a)  $\gamma = 1$  and; (b)  $\gamma = 2$ . The initial conditions are characterized in the figure. For this figure, we used the parameter  $\mu = 0$ .

from a constant regime to a power law decay marked by a critical exponent  $\beta$ . The length of the plateau also depends on the initial  $x_0$ . Based on the behaviour observed from Fig. 2 we can suppose that:

1. For a sufficiently short  $n$ , say  $n \ll n_x$ , the behaviour of  $x$  vs.  $n$  is given by

$$x(n) \propto x_0^\alpha, \quad \text{for } n \ll n_x, \quad (2)$$

and because  $x \propto x_0$ , we conclude that the critical exponent  $\alpha = 1$ .

2. For sufficient large  $n$ , i.e.,  $n \gg n_x$ , the dynamical variable is described as

$$x(n) \propto n^{-\beta}, \quad \text{for } n \gg n_x, \quad (3)$$

where the exponent  $\beta$  is called a decay exponent. The numerical value is not universal and depends on the nonlinearity of the mapping.

3. Finally, the crossover iteration number  $n_x$  is given by

$$n_x \propto x_0^z, \quad (4)$$

where  $z$  is a changeover exponent.

The exponents  $\beta$  and  $z$  can be obtained by considering specific plots. After the constant plateau, a power law fitting furnishes  $\beta$ . Indeed for  $\gamma = 1$  (logistic map) we found  $\beta = -0.99981(3)$  while for  $\gamma = 2$  (cubic map) we obtained  $\beta = -0.49969(5)$ . To obtain the exponent  $z$  we must have the behaviour of  $n_x$  vs.  $x_0$ , where  $n_x$  is obtained as the crossing of the constant plateau by the power law decay, as shown in Fig. 3.

The slope obtained for  $\gamma = 1$ , as shown in Fig. 3 is  $z = -1.0002(3)$  while for  $\gamma = 2$  the exponent obtained is  $z = -2.001(2)$ .

The behaviour shown in Fig. 2 together with the three scaling hypotheses allow us to describe the behaviour of  $x$  as a homogeneous function of the variables  $n$  and  $x_0$ , when  $\mu = 0$ , of the type

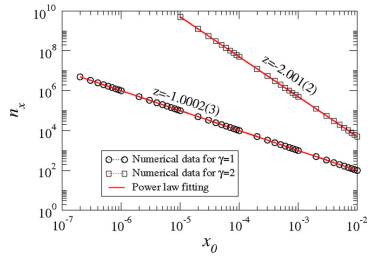


Fig. 3. Plot of the crossover iteration number  $n_x$  against the initial condition  $x_0$  together with their power law fitting for  $\gamma = 1$  with slope  $z = -1.0002(3)$  and  $\gamma = 2$  with slope  $z = -2.001(2)$ .

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n), \quad (5)$$

where  $l$  is a scaling factor,  $a$  and  $b$  are characteristic exponents. Because  $l$  is a scaling factor we choose  $l^a x_0 = 1$ , leading to  $l = x_0^{-1/a}$ . Substituting this expression in Eq. (5) we obtain

$$x(x_0, n) = x_0^{-1/a} x(1, x_0^{-b/a} n). \quad (6)$$

Assuming the term  $x(1, x_0^{-b/a} n)$  is constant for  $n \ll n_x$  and comparing Eq. (6) with the first scaling hypothesis we conclude that  $\alpha = -1/a$ . Moving on and choosing  $l^b n = 1$ , which leads to  $l = n^{-1/b}$  and substituting in Eq. (5) we obtain

$$x(x_0, n) = n^{-1/b} x(n^{-a/b} x_0, 1). \quad (7)$$

Again we suppose the term  $x(n^{-a/b} x_0, 1)$  is constant for  $n \gg n_x$ . Comparing then with the second scaling hypothesis we end up with  $\beta = -1/b$ . Finally we compare the two expressions obtained for the scaling factor. It indeed leads to  $n_x = x_0^{\alpha/\beta}$ . A comparison with third scaling hypothesis allows us to obtain a relation between the three critical exponents  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$  therefore converging to the following scaling law

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (8)$$

The knowledge of any two exponents allows to find the third one by using Eq. (8). Moreover the exponents can also be used to rescale the variables  $x$  and  $n$  in a convenient way such that  $x \rightarrow x/x_0^\alpha$  and  $n \rightarrow n/x_0^z$  and overlap all curves of  $x$  vs.  $n$  onto a single and hence universal curve, as shown in Fig. 4.

Before moving to the next section and considering the dynamics in a more analytical way, let us discuss here the dynamics for  $\mu \neq 0$ . This characterizes the neighbouring of the bifurcation. The convergence to the steady state is marked by an exponential law of the type (see Refs. [22,23])

$$x(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (9)$$

where  $\tau$  is the relaxation time described by

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (10)$$

where  $\delta$  is a relaxation exponent. Fig. 5 shows the behaviour of  $\tau$  vs.  $\mu$  for two different values of  $\gamma$ .

A power law fitting furnishes the exponent  $\delta \cong -1$  and is independent on the value of the parameter  $\gamma$ . In the next section we describe how to obtain the exponents discussed in this section using an analytical approach.

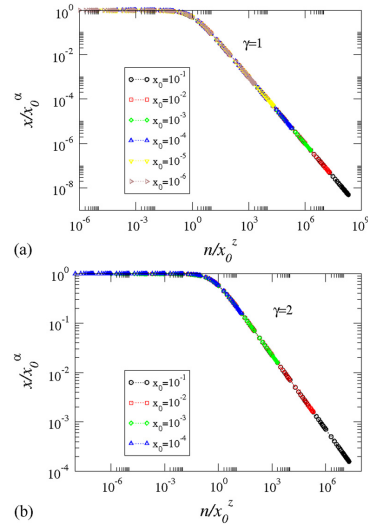


Fig. 4. Overlap of all curves shown in Fig. 2 onto a single and universal plot, after a convenient rescale of the axis, for both: (a)  $\gamma = 1$  and (b)  $\gamma = 2$ .

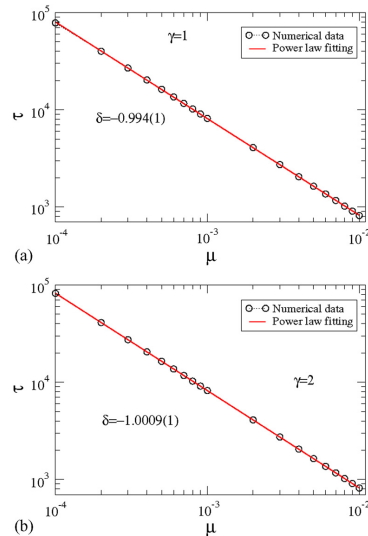


Fig. 5. Plot of the relaxation to the fixed point as a function of  $\mu$  in the logistic-like map for the exponents: (a)  $\gamma = 1$  and; (b)  $\gamma = 2$ .

### 3. An analytical description to the equilibrium

Let us now discuss a different approach to reach the equilibrium. We start first with case (i), i.e., at the bifurcation point  $R = R_c = 1$ . The equation of the mapping is then written as

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}. \quad (11)$$

Very near the fixed point, we suppose the dynamical variable  $x$  can be considered as a continuous variable. Therefore Eq. (11) is rewritten in a convenient way as (see also Ref. [27] for a recent application in a 2-D mapping)

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \approx \frac{dx}{dn} = -x^{\gamma+1}. \tag{12}$$

Grouping the terms properly we obtain the following differential equation

$$\frac{dx}{x^{\gamma+1}} = -dn. \tag{13}$$

Indeed the initial condition  $x_0$  is defined for  $n = 0$ . Of course for a generic  $n$  we have  $x(n)$ . Using these terms as limit of the integrals we end up with

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx}{x^{\gamma+1}} = - \int_0^n dn. \tag{14}$$

After integrating Eq. (14) and organizing the terms properly we obtain the following expression

$$x(n) = \frac{x_0}{[x_0^\gamma \gamma n + 1]^{1/\gamma}}. \tag{15}$$

Let us now discuss the implications of Eq. (15) for specific ranges of  $n$ . We start with the case  $x_0^\gamma \gamma n \ll 1$ , which is equivalent to the previous section of  $n \ll n_x$ . For such a case we obtain that  $x(n) \cong x_0$ . A quick comparison with first scaling hypothesis allow us to conclude that the critical exponent  $\alpha = 1$ . Second we consider the situation  $x_0^\gamma \gamma n \gg 1$ , corresponding to  $n \gg n_x$  in the previous section. For such case we obtain that

$$x(n) \approx n^{-1/\gamma}. \tag{16}$$

Comparing then this result with scaling hypothesis two of the previous section we conclude  $\beta = -1/\gamma$ . The last case is obtained when  $x_0^\gamma \gamma n = 1$ , which is the case of  $n = n_x$ . Then we obtain

$$n_x \cong x_0^{-\gamma}. \tag{17}$$

A comparison with third scaling hypothesis gives us that  $z = -\gamma$ . With this procedure we obtained all the three critical exponents discussed in the previous section as function of the parameter of the nonlinearity  $\gamma$ . Numerical simulations were made for several different values of  $\gamma$  considering either odd, even, irrational and other set of numbers. The numerical findings confirm the validity of both the scaling law as well as the analytical procedure.

The last point to discuss is the case of  $R < R_c$ , i.e., immediately before the bifurcation. For this case we can rewrite the mapping as

$$x_{n+1} - x_n = x_n(R - 1) - Rx_n^{\gamma+1}, \tag{18}$$

$$= \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \approx \frac{dx}{dn},$$

$$= x(R - 1) - Rx^{\gamma+1}.$$

We have to emphasize that near the steady state  $x \cong 0$  and considering  $\gamma > 1$ , the term  $x^{\gamma+1}$  goes faster to zero as compared with  $x$ . Then the last term of Eq. (18) can be disregarded. With this approach we obtain the following differential equation

$$\frac{dx}{dn} = -x\mu, \tag{19}$$

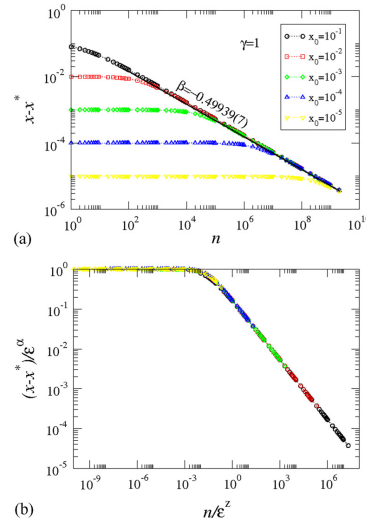


Fig. 6. (a) Convergence to the fixed point  $x^* = 2/3$  for  $\gamma = 1$  considering  $R = 3$ . The slope of decay obtained was  $\beta = -0.49939(7)$ . (b) Overlap of the curves shown in (a) onto a single and hence universal plot.

where  $\mu = 1 - R$ . Considering again that for  $n = 0$  the initial condition is  $x_0$ , we have to integrate the following equation

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx}{x} = -\mu \int_0^n dn'. \tag{20}$$

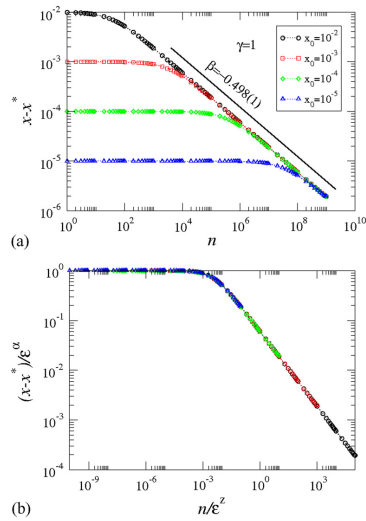
After integration and grouping the terms we obtain

$$x(n) = x_0 e^{-\mu n}. \tag{21}$$

Comparing this result with Eqs. (9) and (10) we conclude that the exponent  $\delta = -1$ . This finding is in good agreement with the simulations shown in Fig. 5.

#### 4. Discussions

Convergence to the steady state at a period-doubling bifurcation was also observed to obey a homogeneous function. Indeed to apply the formalism we have to look at the distance to the fixed point. Such observable can be defined as (following Refs. [22,23])  $y(n) = F^n(F^m(x)) - x^*$  where  $F$  stands for the mapping,  $m = 2, 4, 6, \dots$  and  $x^*$  is indeed the expression of the fixed point. In the previous sections, the fixed point was located at  $x^* = 0$ , hence it was convenient to rescale the observables in terms of  $x_0$ , which was the initial distance from the fixed point. In the period-doubling bifurcation considered here,  $x^*$  is not zero anymore, hence we represent the distance from the fixed point as  $\epsilon$ . Furthermore, the scaling is dependent on  $\epsilon$ . Fig. 6 shows the convergence to the fixed point for  $\gamma = 1$  and  $R = 3$ . The slope obtained for the decay is  $\beta = -0.49939(7)$ . The crossover exponent was obtained as  $z = -2.001(4)$ , and the same scaling law as obtained previously is applied here too. The exponents obtained for the convergence towards the fixed point in the period-doubling bifurcation show to be independent of the nonlinearity  $\gamma$ . The scaling (see the overlap of the curves shown in Fig. 6(a) onto a



**Fig. 7.** (a) Convergence to the fixed point  $x_2^* = 0.4399601688\dots$  for  $\gamma = 1$  considering  $R = 1 + \sqrt{6}$ . The slope of decay obtained was  $\beta = -0.498(1)$ . (b) Overlap of the curves shown in (a) onto a single and hence universal plot.

single and universal plot as shown in Fig. 6(b)) is better seen after the transformations: (i)  $(x - x^*) \rightarrow (x - x^*)/\epsilon^\alpha$  where  $\epsilon$  stands for the distance of the initial condition to the fixed point  $x^*$  and; (ii)  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . For  $\gamma = 1$ , the first period-doubling bifurcation happens at  $R = 3$ , and the fixed point is  $x^* = 2/3$ . For the second period-doubling,  $R = 1 + \sqrt{6}$  and the two fixed points are

$$x_{1,2}^* = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R - 3} \right]. \quad (22)$$

For  $R = 1 + \sqrt{6}$ , the two fixed points assume the values  $x_1^* = 0.8499377796\dots$  and  $x_2^* = 0.4399601688\dots$ . In this cases, the critical exponents are  $\alpha = 1$ ,  $z = -2$  and  $\beta = -0.498(1)$ .

The numerical results obtained for the parameter  $R = 1 + \sqrt{6}$  are shown in Fig. 7. The convergence to the fixed point is plotted in Fig. 7(a) for different values of initial conditions, as shown in the figure while the overlap onto a single and universal plot is shown in Fig. 7(b). The slope of the decay obtained is the same one as obtained for the first period-doubling bifurcation observed at  $R = 3$ . This result confirms the independence of the critical exponents  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$ , on the period-doubling bifurcation, as a function of  $\gamma$ .

## 5. Conclusions

To summarize, we have considered the convergence to the steady state in a family of logistic-like mappings in a bifurcation

point near a transcritical, pitchfork, period-doubling bifurcation, and around its neighbouring. At the bifurcation point we used a phenomenological description to prove that decay to the fixed point is described by using a homogeneous function with three critical exponents. The three critical exponents are related among themselves via a scaling law of the type  $z = \alpha/\beta$ . Near the bifurcation point the convergence to the fixed point is given by an exponential decay and the relaxation time is described by a power law of the type  $\tau \propto \mu^\delta$ . We found  $\delta = -1$  and is independent on the nonlinearity of the mapping. The results obtained by the phenomenological approach is confirmed by an analytical description and is valid for any  $\gamma \geq 1$ . The exponents obtained for the period doubling bifurcation were  $\alpha = 1$ ,  $\beta \cong -0.5$ ,  $z = -2$  and are independent of the parameter  $\gamma$ .

## Acknowledgements

RMNT thanks FUNCAP. FCG thanks CAPES and PROPe/FUNDUNESP. RNCf thanks CNPq (306502/2010-0). JAO thanks PROPe/FUNDUNESP and FAPESP (2014/18672-8). EDL acknowledges support from CNPq, FAPESP (2012/23688-5) and FUNDUNESP. The authors thank João L. Menicuci for fruitful discussions.

## References

- [1] R.L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment* (Studies in Nonlinearity), Westview Press, 1992.
- [2] R.M. May, *Science* 86 (1974) 645.
- [3] R.M. May, G.A. Oster, *Am. Nat.* 110 (1976) 573.
- [4] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1507; C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Physica D* 7 (1983) 181.
- [5] J.R. Ponder, T.D. Rogers, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 10 (1986) 415.
- [6] M. Joglekar, E. Ott, A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 084101.
- [7] K. Hamacher, *Chaos* 22 (2012) 033149.
- [8] M. McCartney, *Chaos* 21 (2012) 043104.
- [9] P. Philominathan, M. Santhiah, I.R. Mohamed, et al., *Int. J. Bifurc. Chaos* 21 (2011) 1927.
- [10] M. Santhiah, P. Philominathan, *Pramana J. Phys.* 75 (2010) 403.
- [11] Y.-G. Zhang, J.-F. Zhang, Q. Ma, et al., *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 11 (2010) 157.
- [12] H. Wen, Z. Guang-Hao, Z. Gong, et al., *Acta Phys. Sin.* 17 (2012) 170505.
- [13] M. Urquiza, A.M. Correig, *Chaos Solitons Fractals* 33 (2007) 1292.
- [14] G. Livadiotis, *Adv. Complex Syst.* 8 (2005) 15.
- [15] D. Ilhem, K. Amel, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2006 (2006), Article ID 15840.
- [16] T.Y. Li, J.A. Yorke, *Am. Math. Mon.* 82 (1975) 985.
- [17] J.A.C. Gallas, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1983) 2714.
- [18] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.
- [19] M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 21 (1979) 669.
- [20] M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978) 25.
- [21] E.D. Leonel, P.V.E. McClintock, *J. Phys. A, Math. Gen.* 38 (2005) L425.
- [22] P.C. Hohenberg, B.I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* 49 (1977) 435.
- [23] E.D. Leonel, J.K.L. da Silva, S.O. Kamphorst, *Int. J. Bifurc. Chaos* 12 (2002) 1667.
- [24] J.A. de Oliveira, E.R. Papesso, E.D. Leonel, *Entropy* 15 (2013) 4310.
- [25] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [26] A.J. Lichtenberg, M.A. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci., Springer Verlag, New York, 1992.
- [27] E.D. Leonel, A.L.P. Livorati, A.M. Cespedes, *Physica A* 404 (2014) 279.



## ANEXO B

Physics Letters A 379 (2015) 1796–1798



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



## Addendum

## Addendum to: “Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation” [Phys. Lett. A 379 (2015) 1246]

Edson D. Leonel<sup>a,b,c,\*</sup>, Rivania M.N. Teixeira<sup>c</sup>, Danilo S. Rando<sup>a</sup>, R.N. Costa Filho<sup>c</sup>, Juliano A. de Oliveira<sup>d</sup><sup>a</sup> Departamento de Física, UNESP – Univ Estadual Paulista, Av. 24A, 1515 – Bela Vista, 13506-900, Rio Claro, SP, Brazil<sup>b</sup> Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy<sup>c</sup> Departamento de Física, UFC – Univ. Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brazil<sup>d</sup> UNESP – Univ Estadual Paulista, Câmpus de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, SP, Brazil

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 10 April 2015

Received in revised form 30 April 2015

Accepted 3 May 2015

Available online 5 May 2015

Communicated by C.R. Doering

## Keywords:

Scaling law

Critical exponents

Homogeneous function

## ABSTRACT

An analytical description of the convergence to the stationary state in period doubling bifurcations for a family of one-dimensional logistic-like mappings is made. As reported in [1], at a bifurcation point, the convergence to the fixed point is described by a scaling function with well defined critical exponents. Near the bifurcation, the convergence is characterized by an exponential decay with the relaxation time given by a power law of  $\mu = R - R_c$  where  $R_c$  is the bifurcation parameter. We found here the exponents  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z$  and  $\delta$  analytically, confirming our numerical simulations shown in [1].

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

In a recent paper [1], Phys. Lett. A 379 (2015) 1246, the evolution towards the equilibrium was investigated near three types of bifurcations for a family of one-dimensional logistic-like mappings: (a) transcritical; (b) pitchfork and (c) period-doubling. It was shown that, at a bifurcation point, the convergence towards the asymptotic state is described by a generalized homogeneous function with three well defined critical exponents, namely:  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$ . The exponent  $\alpha$  is related with the plateau where the initial condition is temporary stationary and is heading the initial condition,  $x(n) \propto x_0^\alpha$  for  $n \ll n_x$ . The exponent  $\beta$  is a dynamical exponent and marks the evolution towards the stationary state. It is an algebraic function of the number of iterations of the mapping obtained from  $x(n) \propto n^\beta$ , for  $n \gg n_x$ . Finally, the changeover from one regime to the other is marked by a crossover exponent given by  $n_x \propto x_0^z$ . The exponents  $\beta$  and  $z$  were proved to be dependent on the nonlinearity of the mapping while  $\alpha$  was universal. All the three critical exponents are related among them by a scaling law of the type  $z = \alpha/\beta$ .

Near the bifurcation, the evolution towards the fixed point is given by an exponential function of both  $\mu = R - R_c$ , where  $R_c$  is

the bifurcation parameter and  $n$ , hence  $x(n) \propto e^{-n/\tau}$  where  $\tau \propto \mu^\delta$ . The exponent  $\delta$  was obtained to be independent of the bifurcation and on the nonlinearity of the mapping, being fixed as  $\delta = -1$ .

In this Addendum, we complement the description made in Ref. [1] and give a mathematical description of how such critical exponents  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$ , as well as  $\delta$  appear in the period doubling bifurcations for a family of logistic-like mappings.

The family of one-dimensional logistic-like mappings, as made in Ref. [1], is given by  $x_{n+1} = F(R, x_n) = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$  where  $\gamma \geq 1$ ,  $R$  is a control parameter and  $x$  is a dynamical variable. The fixed point which suffers a period doubling bifurcation is  $x^* = [1 - 1/R]^{1/\gamma}$ . The parameter  $R_c$  where the bifurcation happens is obtained from  $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} = R - (1 + \gamma)Rx^\gamma = -1$ , which marks a flip incipient point, leading to  $R_c = \frac{2+\gamma}{\gamma}$ .

At a period doubling bifurcation, the periodic orbits are obtained from the second iteration of the mapping, leading to the expression

$$x_{n+2} = F_R^{(2)}(x_n) = R[Rx_n(1 - x_n^\gamma)][1 - [Rx_n(1 - x_n^\gamma)]^\gamma]. \quad (1)$$

The idea is to expand Eq. (1) in Taylor series around the bifurcation point for the variables  $x_n = x^* + y_n$  and  $R = R_c + \mu$ , where  $y_n$  corresponds to the distance from the fixed point at the iterated  $n$ th and  $\mu$  is the distance, in the control parameter, to where the

DOI of original article: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2015.02.019>.

\* Corresponding author. Tel.: +55 19 3526 9174.

E-mail address: edleone@rc.unesp.br (E.D. Leonel).

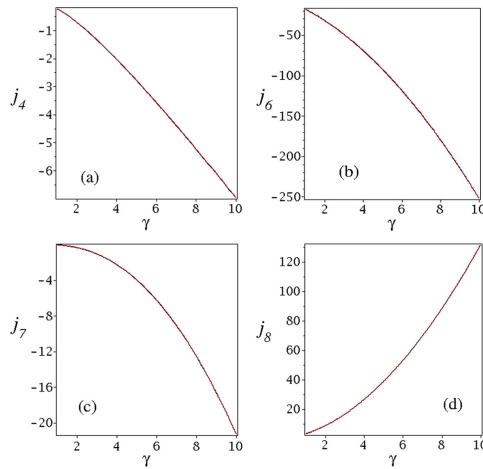


Fig. 1. Plot of the behaviour of  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  and  $j_8$  as a function of  $\gamma$ .

bifurcation happens. Hence we obtain

$$\begin{aligned}
 F_R^{(2)}(x_n) = & j_0 + (x_n - x^*)j_1 + (R - R_c)j_2 + (x_n - x^*)^2j_3 \\
 & + (R - R_c)^2j_4 + (x_n - x^*)(R - R_c)j_5 + \\
 & + (x_n - x^*)^3j_6 + (R - R_c)^3j_7 \\
 & + (x_n - x^*)^2(R - R_c)j_8 \\
 & + (x_n - x^*)(R - R_c)^2j_9 + \dots,
 \end{aligned} \quad (2)$$

where the auxiliary terms are

$$\begin{aligned}
 j_0 = F_{R_c}^{(2)}(x^*) &= \left[ \frac{2}{2 + \gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}; \quad j_1 = \left. \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right|_{x^*, R_c} = 1, \\
 j_2 = \left. \frac{\partial F^{(2)}}{\partial R} \right|_{x^*, R_c} &= 0; \quad j_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \right|_{x^*, R_c} = 0, \\
 j_4 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial R^2} \right|_{x^*, R_c}; \quad j_5 &= \left. \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x \partial R} \right|_{x^*, R_c} = 2\gamma, \\
 j_6 = \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right|_{x^*, R_c}; \quad j_7 &= \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial R^3} \right|_{x^*, R_c}, \\
 j_8 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^2 \partial R} \right|_{x^*, R_c}; \quad j_9 &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x \partial R^2} \right|_{x^*, R_c} = \gamma^2.
 \end{aligned}$$

The expressions for  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  and  $j_8$  are extensive and do not need to be presented. Instead, their behaviour as a function of  $\gamma$  allow us to collect the most information on them, as shown in Fig. 1. We can see all of them are well defined and smooth. The most important information regards, particularly, on the signal of  $j_6$ , which by now is negative. Table 1 presents some numerical values of  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  and  $j_8$ , evaluated at the period doubling bifurcation for different values of  $\gamma$ . Because  $j_3$  is zero, the Taylor expansion was made to higher order terms in  $(x - x^*)$  to guarantee a minimal nonlinearity to the difference equation.

Table 1

Table of values for  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$  and  $j_8$  for different values of  $\gamma$ .

$\gamma$	1	2	3	4	5
$j_4$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{\sqrt{2}}{9}$	$-\frac{9}{25}\sqrt[3]{50}$	$-\frac{8}{9}\sqrt[3]{27}$	$-\frac{25}{49}\sqrt[3]{4802}$
$j_6$	-18	-32	$-\frac{40}{3}\sqrt[3]{50}$	$-40\sqrt{3}$	$-28\sqrt[3]{392}$
$j_7$	$-\frac{4}{81}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{36}{125}\sqrt[3]{50}$	$-\frac{80}{81}\sqrt[3]{27}$	$-\frac{250}{343}\sqrt[3]{4802}$
$j_8$	3	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt[3]{20}$	$20\sqrt[3]{3}$	$15\sqrt[3]{112}$

Considering then the expressions  $x_n = x^* + y_n$  and  $R = R_c + \mu$  and the expansion of  $F_R^{(2)}(x_n)$ , we can rewrite Eq. (1) as

$$\begin{aligned}
 G(y_n, \mu) = & F_R^{(2)}(x_n) - F_{R_c}^{(2)}(x^*), \\
 \cong & y_n + \mu^2 j_4 + 2\gamma\mu y_n + y_n^3 j_6 + \mu^3 j_7 \\
 & + y_n^2 \mu j_8 + y_n \mu^2 \gamma^2.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Let us start first discussing the properties of the convergence to the fixed point exactly at the bifurcation point. This leads to  $\mu = 0$ . Hence we obtain  $G(y_n, 0) = y_n + y_n^3 j_6$ . If we consider here the approximation  $G(y_n, 0) - y_n \cong \frac{dy}{dn} = y^3 j_6$ , hence we have to integrate the following differential equation  $\int_{y_0}^{y(n)} \frac{dy}{y^3} = j_6 \int_0^n dn$ . Doing the integration, appropriate simplification and considering  $j_6$  is negative, we obtain  $y(n) = \frac{y_0}{\sqrt{1+2|j_6|y_0^2 n}}$ . From this expres-

sion we can discuss the numerical results obtained from Ref. [1]. The first scaling comes from the condition  $2|j_6|y_0^2 n \ll 1$ . Then we obtain  $y(n) \propto y_0$ . From the first scaling hypothesis presented in Ref. [1], we found  $y(n) \propto y_0^\alpha$ . Therefore  $\alpha = 1$ . It is indeed universal for the family of logistic-like mapping discussed here and does not depend on  $\gamma$ . The second scaling is obtained from the condition  $2|j_6|y_0^2 n \gg 1$  leading to  $y(n) \propto \frac{1}{\sqrt{2|j_6|n}}^{-1/2}$ . A second scaling hypothesis discussed in Ref. [1] argues that  $y(n) \propto n^\beta$ . Hence we found analytically  $\beta = -1/2$ . This exponent was obtained in Ref. [1] only by numerical simulations as  $\beta = -0.49939(7)$ , therefore very close to our present finding validating the numerical simulation. Finally, the exponent  $z$  comes from the condition  $2|j_6|y_0^2 n = 1$ . This is the condition leading to the changeover from the constant plateau to the regime of decay. Therefore we obtain  $n_x = \frac{1}{2|j_6|y_0^2} \propto y_0^{-2}$ . The latest scaling hypothesis discussed in Ref. [1] proposes that  $n_x \propto y_0^z$ . Numerically the result obtained was  $z = -2.001(4)$ , which is remarkably close to our analytical finding here.

Given the theory fits well with the numerical simulations for  $\mu = 0$ , let us now discuss the case of  $\mu \neq 0$ . To do so, we shall consider only the lowest representative term of  $\mu$  in Eq. (3), leading to  $G(y_n, \mu) \cong y_n + 2\gamma\mu y_n + j_6 y_n^3$ . Transforming the equation of differences into a differential equation, we have  $G(y_n, \mu) - y_n \cong \frac{dy}{dn} = y(2\gamma\mu + j_6 y^2)$ . The integration to be solved is  $\int_{y_0}^{y(n)} \frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = \int_0^n dn$ . Doing the integration and grouping the terms properly, we obtain

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|} \left[ 1 + \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right]^{-\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

To have a better insight in the consequences of Eq. (4), it is convenient to expand it in Taylor series. Therefore we obtain

$$y(n) \cong \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right]}. \quad (5)$$

Keeping only a linear power of  $\mu$ , hence disregarding terms of the order  $\mu\sqrt{\mu}$ , Eq. (5) can be written as  $y(n) - \sqrt{\frac{2\gamma\mu}{|j_6|}} \cong \sqrt{\frac{\gamma\mu}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n}$ . Comparing this equation with the simulation dis-

cussed in Ref. [1] we conclude  $y(n) \propto e^{-4\gamma\mu n}$  hence leading to  $\delta = -1$ , in agreement with the simulation shown in [1].

#### Acknowledgements

RMNT thanks to FUNCAP. RNCf thanks to CNPq. JAO thanks to CNPq, PROPE/FUNDUNESP and FAPESP (2014/18672-8). EDL ac-

knowledges support from CNPq, FAPESP (2012/23688-5) and FUNDUNESP.

#### References

- [1] R.M.N. Teixeira, D.S. Rando, F.C. Geraldo, R.N. Costa Filho, J.A. de Oliveira, E.D. Leonel, *Phys. Lett. A* 379 (2015) 1246.

## ANEXO C

Physics Letters A 379 (2015) 1808–1815



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



## A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents



Edson D. Leonel<sup>a,b,c,\*</sup>, Julia Penalva<sup>a</sup>, Rivânia M.N. Teixeira<sup>c</sup>, Raimundo N. Costa Filho<sup>c</sup>,  
Mário R. Silva<sup>d</sup>, Juliano A. de Oliveira<sup>e</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física, UNESP – Univ Estadual Paulista, Av.24A, 1515 Bela Vista, 13506-900 Rio Claro, SP, Brazil

<sup>b</sup> Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy

<sup>c</sup> Departamento de Física, UFC – Univ. Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brazil

<sup>d</sup> Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, UNESP – Univ Estadual Paulista, Av.24A, 1515 Bela Vista, 13506-900 Rio Claro, SP, Brazil

<sup>e</sup> UNESP – Univ Estadual Paulista, Câmpus de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, SP, Brazil

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 18 February 2015  
Received in revised form 3 April 2015  
Accepted 16 April 2015  
Available online 21 April 2015  
Communicated by C.R. Doering

## Keywords:

Phase transition  
Chaos  
Scaling law  
Critical exponents

## ABSTRACT

A dynamical phase transition from integrability to non-integrability for a family of 2-D Hamiltonian mappings whose angle,  $\theta$ , diverges in the limit of vanishingly action,  $I$ , is characterised. The mappings are described by two parameters: (i)  $\epsilon$ , controlling the transition from integrable ( $\epsilon = 0$ ) to non-integrable ( $\epsilon \neq 0$ ); and (ii)  $\gamma$ , denoting the power of the action in the equation which defines the angle. We prove the average action is scaling invariant with respect to either  $\epsilon$  or  $n$  and obtain a scaling law for the three critical exponents.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

Dynamical systems are generally described by differential equations [1–6]. Depending on the symmetries as well as conserved quantities involved in the problem, the solutions of differential equations can be qualitatively (quite often quantitatively too) transformed into an application described by nonlinear mappings [7]. The mappings correspond to a discrete time evolution dynamics and are governed by a set of control parameters. The variation of the control parameters may lead to phase transitions [8,9]. Indeed, in statistical mechanics, phase transitions are linked to abrupt changes in spatial structure of the system [10,11] and mainly due to variations of control parameters. In a dynamical system however, a phase transition is particularly related to modifications in the structure of the phase space of the system [12,13]. Therefore near a phase transition, the dynamics of the system is described by the use of a scaling function [14,15] where critical exponents characterise the dynamics near the criticality.

Here a family of mappings whose amplitude diverges in the limit of a vanishingly action is studied, where special attention is given to describe some statistical properties of chaotic orbits in the phase space focusing on the phase transition from integrability to non-integrability. The dynamics of the system is evolved by using a two dimensional, nonlinear and area preserving map. The relevant parameter controlling the nonlinearity of the system is  $\epsilon$ . Moreover it controls a transition from integrability ( $\epsilon = 0$ ) to non-integrability ( $\epsilon \neq 0$ ). For  $\epsilon = 0$  the phase space is regular composed only by periodic or quasi-periodic orbits. For  $\epsilon \neq 0$ , the phase space is mixed containing both periodic islands surrounded by a chaotic sea which is limited by a set of invariant spanning curves. They work as a barrier preventing the chaotic orbit to pass through. Because of this, they play a major role in the scaling of the chaotic sea. The behaviour of the average squared action and therefore the scaling properties depend on three elements: (a) the control parameters; (b) the number of iterations  $n$ ; and (c) the initial action  $I_0$ .

In Section 2 we describe the Hamiltonian and the family of mappings showing applications for different systems. Section 3 is devoted to discuss a phenomenological approach to obtain the critical exponents. A scaling law is derived there. A connection with the standard mapping is made in Section 4 as an attempt to obtain the critical exponents by using a different procedure. A break

\* Corresponding author. Tel.: +55 19 3526 9174.  
E-mail address: edleonel@rc.unesp.br (E.D. Leonel).

of symmetry of the probability distribution function, explaining a constant plateau at large initial action is discussed in Section 5. Finally our discussions and conclusions are presented in Section 6.

## 2. The Hamiltonian, a family of Hamiltonian mappings and order parameter

To start with let us consider a generic Hamiltonian [2] that describes the dynamics of a two degrees of freedom system. The Hamiltonian is composed of two parts and is given by

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2). \quad (1)$$

The integrable part is denoted by  $H_0(I_1, I_2)$  while a non-integrable part is given by  $H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ , and  $\epsilon$  is the parameter controlling the transition from integrability with  $\epsilon = 0$  to non-integrability for  $\epsilon \neq 0$ . Because the energy of the system is constant, one can in principle eliminate one of the four variables, say  $I_2$ , therefore lasting only three. A Poincaré section [2] can be used to reduce the 3-D flow to an application in a 2-D mapping in the plane  $I_1 \times \theta_1$  for a  $\theta_2$  constant. A generic mapping [2] can then be written as

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $h(\theta_n, I_{n+1})$ ,  $K(I_{n+1})$  and  $p(\theta_n, I_{n+1})$  are nonlinear functions of their variables. The index  $n$  is integer and denotes the iterations of the mapping. The mapping is area preserving only when the following condition is satisfied

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0. \quad (3)$$

In many cases (see Ref. [2]) it is convenient to set  $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ . Considering a periodic function for  $h$  as  $h(\theta_n) = \sin(\theta_n)$ , different applications were already considered previously in the literature. To nominate few of them we mention

- $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$ , describes the so-called standard mapping [16];
- $K(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$ , gives the dynamics of a Fermi–Ulam model [17,18];
- $K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$ , where  $\zeta$  is a constant, describes the bouncer model [19];
- For the case

$$K(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - \frac{1}{\zeta^2}}) & \text{if } I_{n+1} > \frac{1}{\zeta}, \\ 4\zeta^2 I_{n+1} & \text{if } I_{n+1} \leq \frac{1}{\zeta}, \end{cases}$$

with  $\zeta$  a constant, one recovers the hybrid Fermi–Ulam bouncer model [20–22];

- For  $K(I_{n+1}) = I_{n+1} + \zeta I_{n+1}^2$ , the logistic twist mapping is obtained [23].

In this paper, we consider  $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$  and  $K = 1/|I_{n+1}|^\gamma$  with  $\gamma > 0$  and  $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ . Therefore the mapping is written as (see Ref. [24] for an extended three control parameter mapping)

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma}] \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (4)$$

For  $\epsilon = 0$ , the phase space presents only regular dynamics leading to periodic or quasi-periodic regimes. For  $\epsilon \neq 0$  the regularity is destroyed and the phase space becomes mixed. Depending on the initial conditions, the dynamics may exhibit both chaos or regularity, marked by periodic islands or invariant spanning curves limiting the size of the chaotic sea. A typical phase space for the

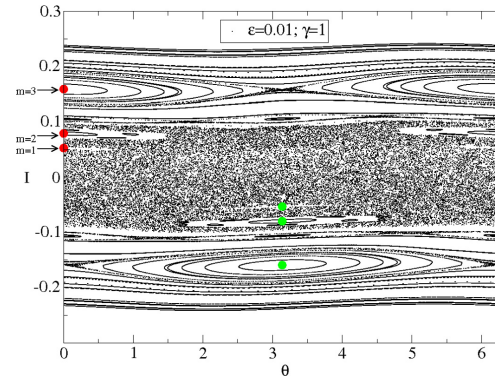


Fig. 1. Typical phase space for mapping (4) considering  $\epsilon = 0.01$  and  $\gamma = 1$ . The bullets identify the positions of the period-one elliptic fixed points. The letter  $m$  corresponds to the multiplicity of the sine function, i.e.,  $m = 1$  is equivalent to  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ ,  $m = 2$  denotes  $\theta \rightarrow \theta + 4\pi$  and so on.

mapping (4) is shown in Fig. 1 using the parameters  $\epsilon = 0.01$  and  $\gamma = 1$ . The bullets denote the position of the period-one elliptic fixed points.  $m$  indicates the periodicity of the sine function used to obtain the period-one fixed points.

We notice that when  $I$  is sufficiently small, the terms  $\theta_n + 1/|I_{n+1}|^\gamma$  become uncorrelated with  $\theta_n$ . This leads the  $\sin(\theta_n)$  to behave as a random function hence producing diffusion in the variable action  $I$ . As soon as the action grows, correlations appear in  $\theta$  bringing regularity to the phase space at high values of the action, and invariant spanning curves appear. Such curves, in particular the lowest one, work as a boundary do not letting an orbit to transpose them. The behaviour of the average action as function of  $n$  is the main observable we want to describe in this paper. Indeed for  $\epsilon = 0$  the average action is a constant and does not change as a function of  $n$ , hence the system is integrable. The scenario is different for  $\epsilon \neq 0$  and, inside of the chaotic sea, limited diffusion is observed for  $I$ , as we will show, scaling either as function of  $n$ ,  $I_0$  as well as  $\epsilon$ . The symmetry in the phase space observed for  $\epsilon = 0$ , particularly the integrability, is broken for  $\epsilon \neq 0$  leading the phase space to be mixed containing non-integrable parts. This characterises a transition from an integrable phase to a non-integrable phase. The parameter  $\epsilon$  plays a rule of order parameter.

## 3. A phenomenological description for the critical exponents and a scaling law

In this section we discuss the scaling properties of the average action by using a phenomenological description. Since the idea was used with success in the Fermi–Ulam model [12], different authors extended the formalism and hence applied with great success the scaling approach in other mappings [25–31].

The observable we want to look at is the average action. It is obtained by means of two different averages namely

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2 \right], \quad (5)$$

where  $M$  corresponds to an average over an ensemble of  $\theta \in [0, 2\pi]$  and  $n$  is the number of iterations of the mapping. The summation in  $j$  is taken over the orbit while the summation in  $i$  runs over the ensemble of initial conditions. The discussion presented in Ref. [12] takes into account the behaviour of the deviation around

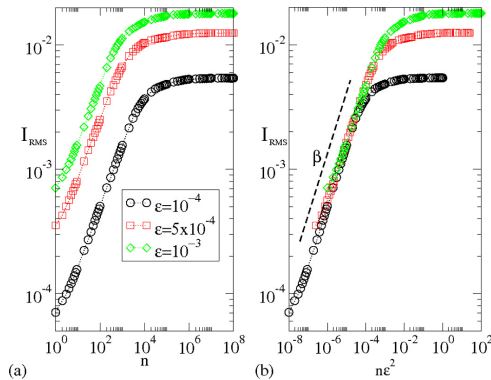


Fig. 2. (a) Plot of  $I_{\text{RMS}}$  vs.  $n$  for three different control parameters. (b) The same plot of (a) after transforming  $n \rightarrow n\epsilon^2$ .

the average velocity in the chaotic sea. We must emphasise the results obtained there considered a very particular model, with only one control parameter. To make the discussion clear and logical, we present below a phenomenological discussion to make the paper self-contained and easy to read. To investigate the diffusion in the average action in this section, we start with low initial action, for example  $I_0 = 10^{-3}\epsilon$  where  $\epsilon$  is small, near a transition from integrable to non-integrable. This is the condition that yields a maximum diffusion to the action. Latter on in this paper we discuss the consequences of a large initial action. Because of the existence of the invariant spanning curves, the action diffuses until visits majority of accessible states in the phase space and then saturates at a constant value. This condition leads the observable average squared action to reach the steady state. Fig. 2 shows the behaviour of  $I_{\text{RMS}} = \sqrt{\overline{I^2}}$  vs.  $n$  for three different control parameters, as shown in the figure.

We see from Fig. 2 that each curve has a similar behaviour from the another. They start to grow with  $n$ , at the same slope, and then for large enough  $n$ , they suffer a changeover and bend towards a regime of saturation characterised by a plateau. The higher the parameter, the higher is the saturation. The transformation  $n \rightarrow n\epsilon^2$  collapses all curves for small values of  $n$ . This transformation is made here empirically but appears naturally in the following section when we use a different procedure to describe the average action. The changeover from growth to a regime of constant plateau is given by a characteristic crossover iteration number  $n_x$ . Using similar procedure as made in [12], we can suppose that:

1. For  $n \ll n_x$ , the curves can be described as

$$I_{\text{RMS}} \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (6)$$

where  $\beta$  is called as the acceleration exponent;

2. For  $n \gg n_x$ , all curves bend towards a regime of saturation whose plateau is given by

$$I_{\text{RMS,SAT}} \propto \epsilon^\alpha, \quad (7)$$

where  $\alpha$  is the saturation exponent;

3. Finally the crossover iteration number is given by

$$n_x \propto \epsilon^z, \quad (8)$$

where  $z$  is a crossover exponent.

Based on these three scaling hypotheses, the behaviour of  $I_{\text{RMS}}$  can be described by using a homogeneous function [9]. The procedure is the same as the one used previously in [12], but for consistence we want to present it here once more. The function is given by

$$I_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon) = l I_{\text{RMS}}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon), \quad (9)$$

where  $l$  is a scaling factor,  $a$  and  $b$  are characteristic exponents [32]. Since  $l$  is a scaling factor, we choose  $l^a n\epsilon^2 = 1$ , which leads to

$$l = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}. \quad (10)$$

Substituting Eq. (10) into Eq. (9) we obtain

$$I_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_A((n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon), \quad (11)$$

where

$$I_A((n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon) = I_{\text{RMS}}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon) \quad (12)$$

is assumed to be constant for  $n \ll n_x$ . Comparing Eq. (11) with Eq. (6) we obtain  $\beta = -1/a$ . Our numerical simulations give  $\beta \cong 1/2$ , hence  $a = -2$ .

Choosing now  $l^b \epsilon = 1$  we find

$$l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}. \quad (13)$$

Substituting Eq. (13) in (9) we obtain

$$I_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} I_B(\epsilon^{-\frac{b}{a}} n\epsilon^2), \quad (14)$$

where the function

$$I_B(\epsilon^{-\frac{b}{a}} n\epsilon^2) = I_{\text{RMS}}(\epsilon^{-\frac{b}{a}} n\epsilon^2, 1) \quad (15)$$

is assumed to be constant for  $n \gg n_x$ . A comparison of Eq. (14) with Eq. (7) furnishes  $\alpha = -1/b$ .

The exponent  $z$  can be obtained by a match of the two distinct expressions for  $l$ , the scaling factors. The match leads to  $(n\epsilon^2)^\beta = \epsilon^\alpha$ . Isolating  $n$  we obtain

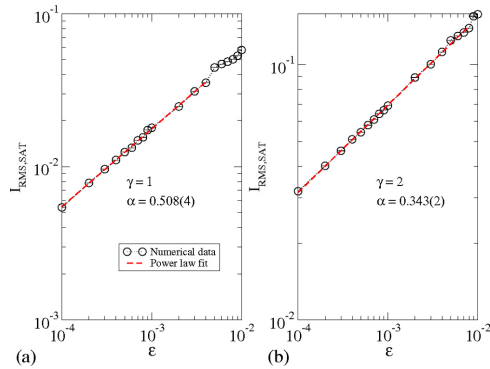
$$n_x = \epsilon^{\frac{\alpha}{\beta} - 2}. \quad (16)$$

Comparing (16) with (8) yields

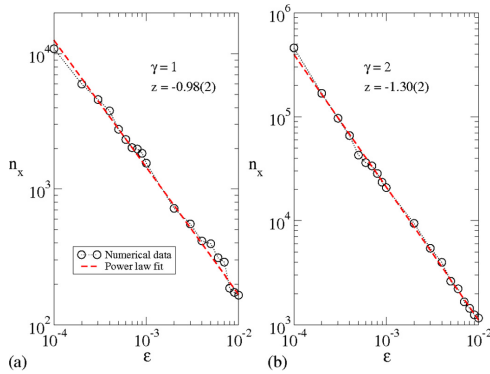
$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2. \quad (17)$$

Eq. (17) gives then a relation between the three critical exponents, therefore defining a scaling law. The knowledge of any two exponents allows to obtain the third.

The acceleration exponent  $\beta$  is obtained just fitting a power law to the regime of growth. Our numerical findings give  $\beta \cong 1/2$  therefore confirming a normal diffusion along the chaotic sea. This exponent appears naturally from an approximation we discuss in the next section. The exponent  $\alpha$  is obtained at the regime of large  $n$ , where the average action approached the saturation. In fairness, the saturation is carefully obtained by using a numerical technique of extrapolation. It consists in transforming each curve of  $I_{\text{RMS}}$  by  $n \rightarrow 1/n$  then fitting a linear function for small  $1/n$ . We then get from the fitting the numerical value for the intercept. The uncertainty using this procedure leads to an error size smaller than the symbol size used in the figure. Since the transition we are dealing with considers  $\epsilon$  sufficiently small, to obtain the critical exponent  $\alpha$ , we keep  $\gamma$  fixed and varied  $\epsilon$  within the range  $\epsilon \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ . Fig. 3(a) shows the behaviour of  $I_{\text{RMS,SAT}}$  vs.  $\epsilon$  for the parameter  $\gamma = 1$ . The critical exponent obtained was  $\alpha = 0.508(4)$ . Considering  $\gamma = 2$  we obtain  $\alpha = 0.343(2)$ , as shown in Fig. 3(b).



**Fig. 3.** Behaviour of  $I_{\text{RMS,SAT}}$  vs.  $\epsilon$  for: (a)  $\gamma = 1$ , and (b)  $\gamma = 2$ . The critical exponents obtained were: (a)  $\alpha = 0.508(4)$ , and (b)  $\alpha = 0.343(2)$ .



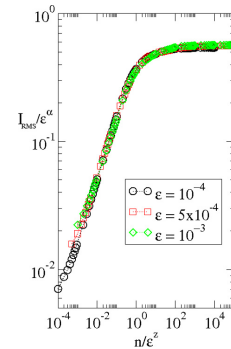
**Fig. 4.** Behaviour of  $n_x$  vs.  $\epsilon$  for: (a)  $\gamma = 1$ , and (b)  $\gamma = 2$ . The critical exponents obtained were: (a)  $z = -0.98(2)$ , and (b)  $z = -1.30(2)$ .

The exponent  $z$  is obtained by using a plot of  $n_x$  vs.  $\epsilon$  for a fixed  $\gamma$ . Indeed  $n_x$  corresponds to where the curve of  $I_{\text{RMS}}$  changes from the regime of growth to the saturation. Fig. 4(a) shows the behaviour of  $n_x$  vs.  $\epsilon$  for  $\gamma = 1$ . The critical exponent obtained by numerical simulation was  $z = -0.98(2)$ . We have to stress the critical exponent obtained is in well agreement with the scaling law given by Eq. (17). For  $\gamma = 2$  we obtain  $z = -1.30(2)$ , as shown in Fig. 4(b), which is also in good agreement with the scaling law.

The set of critical exponents obtained confirms the chaotic region, obtained near a transition from integrable to non-integrable, is scaling invariant either with respect to  $\epsilon$  or  $n$ . To check this we can overlap the curves of  $I_{\text{RMS}}$  obtained for different  $\epsilon$  onto a single and hence universal plot. The relevant transformations are  $I_{\text{RMS}} \rightarrow I_{\text{RMS}}/\epsilon^\alpha$  and  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . Fig. 5 shows all curves plotted in Fig. 2(a) overlapped onto a single and universal plot, after the scaling transformations.

#### 4. Theoretical investigation for the critical exponents

In the previous section we discussed how to obtain the critical exponents, describing the behaviour of the average action along the chaotic sea, by using a phenomenological description. In this section we discuss a different way to obtain the critical exponents



**Fig. 5.** Overlap of the curves shown in Fig. 2 onto a single and universal plot after the transformations  $I_{\text{RMS}} \rightarrow I_{\text{RMS}}/\epsilon^\alpha$  and  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . The parameter used was  $\gamma = 1$ .

$\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$ . Indeed the chaotic sea is limited by a set of invariant spanning curves. The lowest one prevents a chaotic orbit to diffuse unbounded. Above the lowest invariant spanning curve the phase space has regions of regularity and local chaos can also be observed. Below the lowest invariant spanning curve the region is composed by periodic islands and chaos, but mainly by the absence of spanning curves. Therefore the lowest invariant spanning curve characterises a transition from local to globally chaotic behaviour [2]. It indeed separates two distinct regions: (i) above the invariant spanning curve, where one may observe local chaos; and (ii) below the invariant spanning curve, where globally chaotic behaviour dominates over the dynamics.

A dynamical regime similar to the one described above was characterised firstly in the standard map [2]. The mapping is described as

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (18)$$

where  $K$  is a control parameter. For  $K = 0$ , the system is integrable while non-integrability is observed for  $K \neq 0$ . The phase space is mixed for small values of  $K$  and exhibits a transition from local to global chaos at  $K = K_c < 0.9716\dots$ , where the last invariant spanning curve is destroyed. We use this property here and hence extend the procedure used in [33] to estimate the localisation of the lowest action invariant spanning curve, giving also an expression for the second order correction of the curve localisation.

The first step is to consider that near an invariant spanning curve, the dynamical variable  $I$  can be written as

$$I_n = \tilde{I} + \Delta I_n, \quad (19)$$

where  $\tilde{I}$  corresponds to a characteristic value of  $I$  along the invariant spanning curve, and  $\Delta I_n$  is a small perturbation of  $\tilde{I}$ . This approximation is quite reasonable since  $I \gg \epsilon$ , therefore the region in the phase space is mostly characterised by correlations of  $\theta_{n+1}$  and  $\theta_n$ , leading to small variations of  $I$ . Using this approach, the first equation of mapping (4) is given by

$$\Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \epsilon \sin(\theta_n). \quad (20)$$

Doing the same to the second equation of mapping (4) we obtain

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{(\tilde{I} + \Delta I_{n+1})^\gamma}, \\ &= \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (21)$$

Applying a Taylor expansion to Eq. (21) we end up with

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left( 1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} \right), \\ &= \left[ \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \right].\end{aligned}\quad (22)$$

To make a connection with the standard mapping, we have to multiply Eq. (20) by  $-\gamma/\tilde{I}^{\gamma+1}$  and, in sequence, add the term  $1/\tilde{I}^\gamma$ . It is then convenient to define the following set of new variables

$$J_n = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \quad (23)$$

$$\phi_n = \theta_n + \pi. \quad (24)$$

Near the invariant spanning curve, the dynamics can be well described by the standard mapping. Then, mapping (4) is written near the invariant spanning curve, as

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n + \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \sin(\phi_n), \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + J_{n+1}] \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (25)$$

The mapping (25) has an effective control parameter which is given by

$$K_{ef} = \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}}. \quad (26)$$

According to [2], near the invariant spanning curve  $K_{ef} \cong 0.9716\dots$ . Therefore we can conclude that the localisation of the lowest action invariant spanning curve is given by

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \left[ \frac{\gamma \epsilon}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}, \\ &= \left[ \frac{\gamma}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}.\end{aligned}\quad (27)$$

A second order correction for the position of the lowest invariant spanning curve is given by

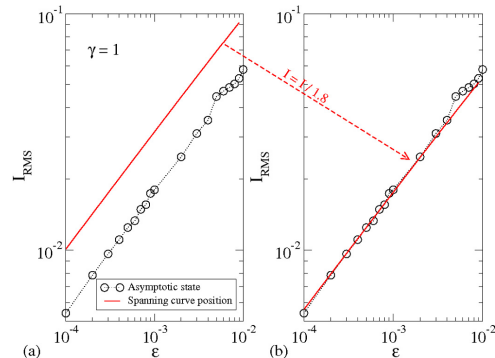
$$\circ^2 \left( \frac{\Delta I}{\tilde{I}} \right) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{K_{ef}}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (28)$$

The position of the lowest action invariant spanning curve defines indeed the ceiling limit for the chaotic region. The behaviour of  $I_{RMS}$  must be, in some sense, linked to  $\tilde{I}$ . The numerical value for  $I_{RMS,SAT}$ , which is observed for  $n \gg n_x$ , is defined via a fraction of  $\tilde{I}$ . Hence  $\tilde{I}$  defines the rule  $I_{RMS}$  must obey at large  $n$  as a function of  $\epsilon$ . A comparison of Eq. (27) with Eq. (7) allows us to conclude that

$$\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}. \quad (29)$$

The expression above gives a relation between the critical exponent  $\alpha$  and the control parameter  $\gamma$ , defining then one of the three critical exponents, lasting two to be defined. In fairness, only one more is needed because the scaling law given by Eq. (17) is still valid to define the third. Fortunately, we can derive the three scaling exponents analytically and confirm the scaling law.

Fig. 6(a) shows a plot of the behaviour of  $I$  vs.  $\epsilon$  for the saturation value (open circles) obtained for  $n \rightarrow \infty$  while the continuous line gives the theoretical prediction of Eq. (27). Both curves overlap onto a single plot after applying  $I \rightarrow I/1.8$  for the theoretical prediction. The transformation factor 1.8 was obtained empirically and corresponds only to a naive estimation.



**Fig. 6.** (a) Plot of the behaviour of  $I$  vs.  $\epsilon$  where open circles correspond to the saturation ( $n \rightarrow \infty$ ) and continuous line gives the theoretical prediction (see Eq. (27)) at the lowest action invariant spanning curve. (b) Same plot of (a) after the application of the transformation  $I \rightarrow I/1.8$  for the invariant spanning curve. The parameter used was  $\gamma = 1$ .

Let us now discuss how to obtain the exponent  $\beta$ . The procedure consists in transforming a difference equation into a differential equation. Hence the integration is immediate. To do so, let us square both sides of first equation of mapping (4), which leads to

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + 2\epsilon I_n \sin(\theta_n) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n). \quad (30)$$

Taking the average of Eq. (30) over an ensemble of  $\theta \in [0, 2\pi]$ , we obtain

$$\bar{I}_{n+1}^2 = \bar{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (31)$$

When  $\epsilon$  is sufficiently small leading to  $\bar{I}_{n+1}^2 - \bar{I}_n^2$  also small, we can use the following approximation

$$\begin{aligned}\bar{I}_{n+1}^2 - \bar{I}_n^2 &= \frac{\bar{I}_{n+1}^2 - \bar{I}_n^2}{(n+1) - n}, \\ &\cong \frac{d\bar{I}^2}{dn} = \frac{\epsilon^2}{2}.\end{aligned}\quad (32)$$

Therefore we have a first order differential equation that must be solved,

$$\int_{I_0}^{I(n)} d\bar{I}^2 = \int_0^n \frac{\epsilon^2}{2} dn. \quad (33)$$

Integrating both sides and applying square root we have

$$I_{RMS} = \sqrt{I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n}. \quad (34)$$

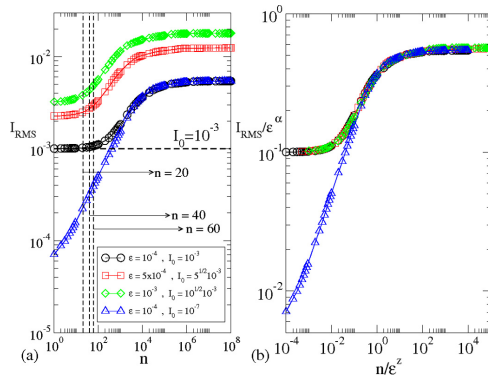
In the limit of sufficiently small  $I_0$ , we conclude

$$I_{RMS} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} (n\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

A comparison of Eq. (35) with Eq. (6) allows us to conclude that the accelerating exponent  $\beta = 1/2$  is in excellent agreement with our numerical findings. Other observation is that the term  $n\epsilon^2$ , added empirically to Eq. (6), now appears naturally in Eq. (35).

The exponent  $z$  can also be obtained analytically. To do so we have to use as integration limits of Eq. (33) the terms  $I_0 \rightarrow 0$  and  $I(n) = I/1.8$ . In such limits, a good approximation for  $n_x$  is





**Fig. 7.** (a) Plot  $I_{\text{RMS}}$  vs.  $n$  for different control parameter as well as initial action  $I_0$ . (b) Overlap of all curves plotted in (a) onto a single and hence universal curve, after the transformations:  $I \rightarrow I/\epsilon^\alpha$  and  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ . The control parameters and initial actions are labelled in the figure.

$$\frac{1}{1.8} \left[ \frac{\gamma \epsilon}{K_{\text{ef}}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} = \left[ \frac{n_x \epsilon^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Isolating  $n_x$  we obtain

$$n_x = \frac{2}{(1.8)^2} \left[ \frac{\gamma}{K_{\text{ef}}} \right]^{\frac{2}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}}. \quad (37)$$

A comparison of Eq. (37) with Eq. (8) allows us to conclude that

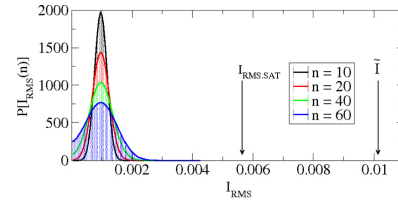
$$z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (38)$$

The expressions obtained for the critical exponents  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $z$  are in well agreement with the results obtained previously in the literature [24] as well as with the previous section.

### 5. Scaling for a non-null initial action

Let us discuss in this section the case when an initial action is not so small as discussed in Section 3, but is still smaller than the saturation, indeed  $0 < I_0 < \bar{I}/1.8$ . The behaviour of the average action changes as compared to the case of  $I_0 \cong 0$ . The curve of  $I_{\text{RMS}}$  stays stuck in a constant plateau for a while until reaches the curve growing from  $I_0 \cong 0$ . It then bends towards a regime a growth and follows the dynamics growing until, eventually, bends towards the regime of saturation. Fig. 7(a) shows the behaviour of  $I_{\text{RMS}}$  vs.  $n$  for both  $I_0 \cong 0$  and  $0 < I_0 < \bar{I}/1.8$  illustrating the initial plateau. The control parameters used and initial action are shown in the figure.

The existence of the first plateau shown in Fig. 7 is connected to a symmetry of the average squared action, imposed by the phase space. When the symmetry is broken, the curve of the average square action leaves the plateau and starts to grow. Starting from an initial action  $I_0$ , at a next step of dynamical evolution, the action can assume a value larger than  $I_0$ , which happens with a probability  $p$ , or smaller, with probability  $q = 1 - p$ . The decay of the squared action is limited to zero, working as a reflecting boundary [34]. When the probability distribution of the averaged squared action reaches the reflecting boundary at origin, i.e. at  $l = 0$ , there is a symmetry break of the distribution leading the average square action to grow. This marks the first crossover of Fig. 7(a). The behaviour of the probability distribution function



**Fig. 8.** Plot of four snapshots for the probability density  $P[I_{\text{RMS}}(n)]$  considering an ensemble of  $2 \times 10^5$  different initial phases,  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$  and a fixed initial action  $I_0 = 10^{-3}$  for the parameter  $\epsilon = 10^{-4}$ . For short  $n$ , the cases for  $n = 10$  and  $n = 20$  show a symmetric distribution while a non-symmetric curve is observed for  $n = 40$  and  $n = 60$ . For large  $n$ , the distribution reaches the reflecting boundary at  $l = 0$  and a symmetry is broken. This break of symmetry leads to the regime of growth when initial action is  $0 < I_0 < \bar{I}/1.8$ .

$P[I_{\text{RMS}}(n)]$  is shown in Fig. 8 using four snapshots at:  $n = 10$ ,  $n = 20$ ,  $n = 40$  and  $n = 60$ . We see when the distribution reaches the reflecting boundary at  $l = 0$ , the average square action starts to grow, therefore marking the crossover from the plateau to the regime of growth.

The scaling proved in Section 3 is also observed when the initial action is  $0 < I_0 < \bar{I}/1.8$ . In this case, the homogeneous function has three arguments and is given by

$$I(n\epsilon^2, \epsilon, I_0) = l(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon, l^c I_0). \quad (39)$$

As we discussed in Section 3, the two characteristic exponents  $a$  and  $b$  are directly related with the critical exponents  $\alpha$  and  $\beta$ . It is less straightforward to obtain the characteristic exponent  $c$ . To do so we use a previous expression found for the effective control parameter at the lowest action invariant spanning curve as

$$K_{\text{ef}} = \frac{\gamma \epsilon}{l^{\gamma+1}}. \quad (40)$$

When Eq. (40) is written in terms of the scaled variables, we end up with

$$\begin{aligned} K_{\text{ef}} &= \frac{\gamma l^b \epsilon}{(l\epsilon)^{\gamma+1}}, \\ &= \frac{\gamma \epsilon}{l^{\gamma+1}} l^{b-c(\gamma+1)}. \end{aligned} \quad (41)$$

The scaling exponents  $b$  and  $c$  must obey  $b - c(\gamma + 1) = 0$ . Using the expression for  $b$  obtained from Section 3 and for  $\alpha$  obtained from Section 4, we conclude  $c = -1$ . From the second argument of the homogeneous function, the scaling factor  $l$  can be written as  $\epsilon' = l^b \epsilon$ , leading to  $l(\epsilon'/\epsilon)^{1/b}$  or considering that  $1/b = -\alpha$  we obtain  $l = (\epsilon'/\epsilon)^{-\alpha}$  where  $\epsilon'$  is the scaled parameter.

Considering now the third argument of the homogeneous function we have  $l_0^c = l^c I_0$ , hence

$$l_0^c = \left[ \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} I_0. \quad (42)$$

The term  $l_0^c$  corresponds to the scaled initial action. Indeed Eq. (42) is the relevant transformation we have to consider when given the initial condition  $I_0$  for different control parameters  $\epsilon$ . The overlap of the curves for  $I_{\text{RMS}}$  vs.  $n$ , obtained for different initial actions and different control parameters, is shown in Fig. 7(b) after the transformations  $l \rightarrow l/\epsilon^\alpha$  and  $n \rightarrow n/\epsilon^z$ .

The procedure discussed in this section can be applied to other systems where such a scaling was observed also in different billiards [35–38] and under different situations. The break of symmetry of the probability distribution function can be described using a more robust formalism, particularly related with the diffusion

equation [34]. Let us then pose the problem to be described by using the diffusion equation. Firstly, the diffusion investigated is along the action axis, hence 1-D. The two relevant limits for the  $I_{\text{RMS}}$  are: (i)  $I_{\text{RMS}} = 0$  (lower limit); and (ii)  $I_{\text{RMS}} = \bar{I}$  (upper limit). We assume the two limits work as barriers that are both impenetrable and perfectly reflective. As impenetrable we want to say there is no leakage through them while the term perfectly reflective denotes the absence of absorption from the barrier. This term should be used with some care, particularly on the upper limit where a dynamical trapping modifying locally the distribution of occupation called stickiness [1,6] may affect temporary the dynamics. Our main interest in this description is in the opposite side, hence far away from the trapping produced by sticky dynamics. Because of the chaotic dynamics at low action, this problem can be mapped into a correspondent stochastic problem (random walk) of an ensemble of particles diffusing along an axis in a finite region. Therefore, a random particle can move one side, along the axis, with probability  $p$  and other side with probability  $q = 1 - p$ . Following the general idea discussed in Ref. [34], the diffusion equation for this system is then written as

$$\frac{\partial P(I_{\text{RMS}}, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I_{\text{RMS}}, n)}{\partial I_{\text{RMS}}^2}, \quad (43)$$

with the following boundary conditions

$$\left. \frac{\partial P(I_{\text{RMS}}, n)}{\partial I_{\text{RMS}}} \right|_{I_{1,2}^*} = 0, \quad (44)$$

for all  $n$  and considering the initial condition  $P(I_{\text{RMS}}, 0) = \delta(I_0)$  where  $0 < I_0 < \bar{I}$ . Here  $I_1^* = 0$  denotes the lower reflecting barrier while  $I_2^* = \bar{I}$  corresponds to the upper reflecting barrier.  $D$  is the diffusion coefficient. A first order approximation for the diffusion coefficient can be made by using Eq. (31). It gives us that  $D = (\bar{I}_{n+1}^2 - \bar{I}_n^2)/2 = \epsilon^2/4$ . The solution of the diffusion equation with these two boundary conditions is obtained by using the separation of variables technique and must be an even function of  $I_{\text{RMS}}$  for any  $n$  (see Ref. [34] for more specific discussion). It is given by

$$P(I_{\text{RMS}}, n) = \frac{1}{2\bar{I}} + \frac{1}{\bar{I}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{k\pi I_{\text{RMS}}}{\bar{I}} \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{\bar{I}^2}}. \quad (45)$$

The most relevant term on the summation is  $k = 1$ , which fits qualitatively well the behaviour shown in Fig. 8 for short  $n$ . For  $n \rightarrow \infty$ , which corresponds to the stationary state, the probability distribution function approaches  $P(I_{\text{RMS}}, \infty) = 1/(2\bar{I})$ . However, the saturation for  $I_{\text{RMS}}(n \rightarrow \infty)$  is slightly larger than  $\bar{I}/2$ , indeed around  $\bar{I}/1.8$  (naive numerical approximation). This numerical difference is mainly related to the existence of islands in the phase space, hence making the density of occupation along the  $I_{\text{RMS}}$  axis different for both  $I_{\text{RMS}} < I_{\text{SAT}}$  and  $I_{\text{RMS}} > I_{\text{SAT}}$ .

## 6. Discussions and conclusions

We characterised in this paper a dynamical phase transition from integrability to non-integrability using two different procedures. Considering first a phenomenological approach and using the initial regime with  $I_0$  sufficiently small, we obtained critical exponents describing the behaviour of chaotic properties either as a function of the control parameter  $\epsilon$  or the number of iterations  $n$ . At the end, a scaling law was derived defining an explicit relation of the three critical exponents  $\alpha$  (saturation exponent),  $\beta$  (accelerating exponent) and  $z$  (crossover exponent). The second procedure used to described the dynamical phase transition was using a connection with the standard mapping [2], particularly locating the position of the lowest action invariant spanning

curve [33]. This was possible because the standard mapping exhibits a transition from local to global chaos. The global chaos in our system is the region below the lowest action invariant spanning curve, while local corresponds to the above region. The relevant scaling of the chaotic sea is indeed given by the position of the lowest invariant spanning curve. By transforming the difference equation into a first order differential equation and after a properly integration, we obtained both the slope of growth of the average action as well as the crossover exponent. When the initial action  $I_0$  is not sufficiently small, the behaviour of the averaged squared action shows a plateau for short  $n$ , suddenly bends towards a regime of growth and then changes again in direction of the saturation for large enough  $n$ . The origin of the initial plateau is particularly related to diffusion in the phase space. Starting with a large ensemble of different  $\theta$  and with a fixed initial action  $0 < I_0 < \bar{I}/1.8$ , as the dynamics evolve, part of the ensemble moves towards large values of  $I$  (with probability  $p$ ) while the other part moves to lower values of  $I$  (with probability  $q = 1 - p$ ). The range of variation of action is however limited. Suddenly the distribution of the average square action reaches the lower and hence reflecting boundary at  $I = 0$ . At this point the curve of  $I_{\text{RMS}}$  starts to grow, marking a first crossover for the curve of the squared average action. Additional care must be taken to treat the problem when the initial action is in the range  $\bar{I}/1.8 < I_0 < \bar{I}$ , because of the dynamical regime called as stickiness. The formalism discussed here can be extended to many other different mappings, particularly to study suppression of unlimited diffusion in a class of time dependent billiards with dissipation, where Fermi acceleration is still a very active field of research.

## Acknowledgements

E.D.L. kindly acknowledges support from CNPq, FAPESP (2012/23688-5) and FUNDUNESP. E.D.L. thanks also fruitful discussions with Makoto Yoshida, J.P. thanks to CAPES for partial support. R.M.N.T. thanks to FUNCAP and CAPES. R.N.C.F. thanks to CNPq, J.A.O. thanks to CNPq, PROPE-FUNDUNESP and FAPESP (2014/18672-8).

## References

- [1] G.M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, London, 1998.
- [2] A.J. Lichtenberg, M.A. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci., vol. 38, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [3] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, Cambridge, 2001.
- [4] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [5] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
- [6] G.M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, New York, 2008.
- [7] R.L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, Westview Press, Cambridge, 1992.
- [8] L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2009.
- [9] A.-L. Barabási, H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [10] A.M. Figueiredo Neto, S.R.A. Salinas, *The Physics of Lyotropic Liquid Crystals: Phase Transitions and Structural Properties*, Monogr. Phys. Chem. Mater., Oxford University Press, New York, 2005.
- [11] L.P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2000.
- [12] E.D. Leonel, P.V.E. McClintock, J.K.L. da Silva, Fermi-Ulam accelerator model under scaling analysis, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 014101.
- [13] D.G. Ladeira, J.K.L. da Silva, Scaling features of a breathing circular billiard, *J. Phys. A* 41 (2008) 365101.
- [14] W.D. McComb, *Renormalization Methods: A Guide for Beginners*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [15] R.K. Patria, *Statistical Mechanics*, Elsevier, 2008.
- [16] B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.* 52 (1979) 263.

- [17] M.A. Lieberman, J.A. Lichtenberg, Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces, *Phys. Rev. A* 5 (1971) 1852.
- [18] J.K.L. da Silva, D.G. Ladeira, E.D. Leonel, P.V.E. McClintock, S.O. Kamphorst, Scaling properties of the Fermi–Ulam accelerator model, *Braz. J. Phys.* 36 (2006) 700.
- [19] L.D. Pustynnikov, Stable and oscillating motions in non-autonomous dynamical systems, *Trans. Mosc. Math. Soc.* 2 (1978) 1.
- [20] E.D. Leonel, P.V.E. McClintock, A hybrid Fermi–Ulam bouncer model, *J. Phys. A* 38 (2005) 823.
- [21] D.G. Ladeira, E.D. Leonel, Dynamical properties of a dissipative hybrid Fermi–Ulam–bouncer model, *Chaos* 17 (2007) 013119.
- [22] D.F.M. Oliveira, R.A. Bizão, E.D. Leonel, Scaling properties of a hybrid Fermi–Ulam–bouncer model, *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009), Article ID 213857.
- [23] J.E. Howard, J. Humphreys, Nonmonotonic twist maps, *Physica D* 80 (1995) 256.
- [24] J.A. de Oliveira, R.A. Bizão, E.D. Leonel, Finding critical exponents for two-dimensional Hamiltonian maps, *Phys. Rev. E* 81 (2010) 046212.
- [25] D.G. Ladeira, J.K.L. da Silva, Scaling properties of a simplified bouncer model and of Chirikov’s standard map, *J. Phys. A* 40 (2007) 11467.
- [26] J.A. Méndez-Bermúdez, R. Aguilar-Sánchez, Scaling properties of discontinuous maps, *Phys. Rev. E* 85 (2007) 056212.
- [27] D.G. Ladeira, J.K.L. da Silva, Time-dependent properties of a simplified Fermi–Ulam accelerator model, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 026201.
- [28] O.F.A. Bonfim, Dynamical properties of an harmonic oscillator impacting a vibrating wall, *Phys. Rev. E* 79 (2009) 056212.
- [29] O.F.A. Bonfim, Fermi acceleration in a periodically driven Fermi–Ulam model, *Int. J. Bifurc. Chaos* 22 (2012) 1250140.
- [30] D.G. Ladeira, J.K.L. da Silva, Scaling features of a breathing circular billiard, *J. Phys. A* 41 (2008) 365101.
- [31] D.F.M. Oliveira, M. Robnik, In-flight dissipation as a mechanism to suppress Fermi acceleration, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 026202.
- [32] S.K. Ma, *Statistical Mechanics*, World Scientific, London, 2004.
- [33] E.D. Leonel, J.A. de Oliveira, F. Saif, Critical exponents for a transition from integrability to non-integrability via localization of invariant tori in the Hamiltonian system, *J. Phys. A* 44 (2011) 302001.
- [34] V. Balakrishnan, *Elements of Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Ane Books India, New Delhi, 2008.
- [35] R.E. de Carvalho, F.C. de Souza, E.D. Leonel, Fermi acceleration on the annular billiard: a simplified version, *J. Phys. A* 39 (2006) 3561; R.E. de Carvalho, F.C. de Souza, E.D. Leonel, Fermi acceleration on the annular billiard, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 066229.
- [36] D.F.M. Oliveira, E.D. Leonel, Suppressing Fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions, *Physica A* 389 (2010) 1009.
- [37] D.F.M. Oliveira, J. Vollmer, E.D. Leonel, Fermi acceleration and its suppression in a time-dependent Lorentz gas, *Physica D* 240 (2011) 389.
- [38] D.F.M. Oliveira, E.D. Leonel, In-flight and collisional dissipation as a mechanism to suppress Fermi acceleration in a breathing Lorentz gas, *Chaos* 22 (2012) 026123.

## REFERÊNCIAS

- [1] DEVANEY, R. L.; DEVANEY, L.; DEVANEY, L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Reading, 1989. v. 13046.
- [2] POINCARÉ, H.; MAGINI, R. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Il Nuovo Cimento (1895-1900)*, v. 10, n. 1, p. 128–130, 1899.
- [3] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- [4] GLEICK, J. *Caos a criação de uma nova ciência*. Campus Rio de Janeiro, 1990.
- [5] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [6] FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. C. *Caos: uma introdução*. Edgar Blucher, 1994.
- [7] HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. oxford university press, 2000.
- [8] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 2014.
- [9] MAY, R. M. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, London, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976.
- [10] MAY, R. M.; OSTER, G. F. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *American Naturalist*, p. 573–599, 1976.
- [11] POUNDER, J.; ROGERS, T. D. The geometry of chaos: dynamics of a nonlinear second-order difference equation. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 42, n. 4, p. 551–597, 1980.
- [12] JOGLEKAR, M.; OTT, E.; YORKE, J. A. Scaling of chaos versus periodicity: How certain is it that an attractor is chaotic? *Physical review letters*, v. 113, n. 8, p. 084101, 2014.
- [13] HAMACHER, K. Dynamical regimes due to technological change in a microeconomical model of production. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 22, n. 3, p. 033149, 2012.
- [14] MCCARTNEY, M. Lyapunov exponents for multi-parameter tent and logistic maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 21, n. 4, p. 043104, 2011.
- [15] PHILOMINATHAN, P.; SANTHIAH, M.; MOHAMED, I. R.; MURALI, K.; RAJASEKAR, S. Chaotic dynamics of a simple parametrically driven dissipative circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 21, n. 07, p. 1927–1933, 2011.

- [16] SANTHIAH, M.; PHILOMINATHAN, P. Statistical dynamics of parametrically perturbed sine-square map. *Pramana*, v. 75, n. 3, p. 403–414, 2010.
- [17] ZHANG, Y.-G.; ZHANG, J.-F.; MA, Q.; MA, J.; WANG, Z.-P. Statistical description and forecasting analysis of life system. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, v. 11, n. 3, p. 157–164, 2010.
- [18] WEN, H.; GUANG-HAO, Z.; GONG, Z.; JING-QIAO, Z.; XIAN-LONG, L. Stabilities and bifurcations of sine dynamic equations on time scale. 2012.
- [19] URQUIZÚ, M.; CORREIG, A. M. Fast relaxation transients in a kicked damped oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 33, n. 4, p. 1292–1306, 2007.
- [20] LIVADIOTIS, G. Numerical approximation of the percentage of order for one-dimensional maps. *Advances in Complex Systems*, v. 8, n. 01, p. 15–32, 2005.
- [21] ILHEM, D.; AMEL, K. One-dimensional and two-dimensional dynamics of cubic maps. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, v. 2006, 2006.
- [22] LI, T. Y.; YORKE, J. A. Ergodic transformations from an interval into itself. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 235, p. 183–192, 1978.
- [23] GALLAS, J. A. Structure of the parameter space of the h enon map. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 70, n. 18, p. 2714, 1993.
- [24] COLLET, P.; ECKMANN, J.-P. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [25] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics*, v. 19, n. 1, p. 25–52, 1978.
- [26] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [27] ABDULACK, S. A. *O sombreamento de trajetórias no mapa padrão*. Disserta o, UEPG, 2010.
- [28] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979.
- [29] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, New York, v. 48, n. 22, p. 1507, 1982.
- [30] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. Applied mathematical sciences. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. Cet ouvrage est la mise   jour de : Regular and stochastic motion, 1983.
- [31] LEONEL, E. D.; DA SILVA, J. K. L.; OLIFFSON KAMPHORST, S. Relaxation and transients in a time-dependent logistic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 12, n. 07, p. 1667–1674, 2002.
- [32] BARABÁSI, A. L.; STANLEY, H. E. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge university press, 1995.

- [33] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V.; DA SILVA, J. K. L. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 93, n. 1, p. 014101, 2004.
- [34] LEONEL, E. D.; TEIXEIRA, R. M.; RANDO, D. S.; COSTA FILHO, R.; DE OLIVEIRA, J. A. Addendum to: “convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation” [phys. lett. a 379 (2015) 1246]. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 379, p. 1796–1798, 2015.
- [35] SALINAS, S. *Introdução a física estatística vol. 09*.
- [36] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling of dynamical properties of the fermi–ulam accelerator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 23, p. 5707 – 5715, 2008.
- [37] PUSTYL’NIKOV, L. D. Stable and oscillating motions in nonautonomous dynamical systems. ii. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, v. 34, p. 3–103, 1977.
- [38] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. A hybrid fermi–ulam-bouncer model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 38, n. 4, p. 823, 2005.
- [39] LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. Dynamical properties of a dissipative hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 17, n. 1, p. 013119, 2007.
- [40] OLIVEIRA, D. F.; BIZÃO, R. A.; LEONEL, E. D. Scaling properties of a hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, 2009.
- [41] HOWARD, J. E.; HUMPHERYS, J. Nonmonotonic twist maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 80, n. 3, p. 256–276, 1995.
- [42] MACKAY, R. S. Greene’s residue criterion. *Nonlinearity*, v. 5, n. 1, p. 161, 1992.
- [43] LEONEL, E. D.; DE OLIVEIRA, J. A.; SAIF, F. Critical exponents for a transition from integrability to non-integrability via localization of invariant tori in the hamiltonian system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 44, n. 30, p. 302001, 2011.
- [44] DE OLIVEIRA, J. A.; BIZÃO, R.; LEONEL, E. D. Finding critical exponents for two-dimensional hamiltonian maps. *Physical Review E*, v. 81, n. 4, p. 046212, 2010.
- [45] LEONEL, E. D.; OLIVEIRA, D. F.; LOSKUTOV, A. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 19, n. 3, p. 033142, 2009.
- [46] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V.; DA SILVA, J. K. L. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 93, n. 1, p. 014101, 2004.